

國立交通大學

光電工程研究所

碩士論文

鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀

Phase-lock PEM Mueller matrix Polarimetry

研究生：蔡宗翰

指導教授：趙于飛教授

中華民國九十八年七月

鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀

Phase-lock PEM Mueller matrix Polarimetry

研究生：蔡宗翰

Student : Tsung-Han Tsai

指導教授：趙于飛

Advisor : Yu-Faye Chao

國立交通大學



Submitted to Institute of Electro-Optical Engineering
College of Electrical and Computer Engineering
National Chiao Tung University
In Partial Fulfillment of the Requirements
For the Degree of
Master
In
Electro-Optical Engineering

July 2009
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年七月

鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀

學生：蔡宗翰

指導教授：趙于飛 教授

國立交通大學光電工程研究所

摘要

本系統結合了偏振態分析器與偏振態產生器，進行樣品穆勒矩陣的單點量測。利用波形分析法鎖定光彈調變器調制下的特定時間相位，本系統以特殊偏振態分析量測，相較於傳統的穆勒矩陣偏光儀，不僅減少元件的旋轉次數，同時也降低旋轉元件造成的光束偏移現象，並提升系統的量測速度。透過穆勒矩陣的分析，使我們可以得到樣品詳細的偏光特性，並使得本系統得以量測各種非等向性材料，並證明本系統具有拓展至二維量測的潛力。在本文中，我們透過空氣、偏光片以及相位延遲片的穆勒矩陣的量測，以驗證本系統的量測能力。由量測過程中光強度、量測系統以及各項待測參數的線性關係，我們改變量測系統的入射以及出射偏振態以減少系統誤差並提升信噪比，進行系統的最佳化。最後，藉由分析系統中的偏光元件於空間以及時間相位的偏差量，進行量測結果的誤差估計。

Phase-lock PEM Mueller matrix Polarimetry

Student : Tsung-Han Tsai

Advisor : Prof. Yu-Fuye Chao

Institute of Electro-Optical Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

A phase-lock photoelastic modulated (PEM) polarimetry is used to measure the complete Mueller matrix of a sample. In the traditional rotating polarimetry, one has to utilize at least 15 mechanical rotations to complete the measurement, while in this PEM polarimetry we only require 7 rotations to achieve the same results. This technique not only reduces the measurement time, the beam deviation caused by rotation can also be diminished. In this work, we quantitatively estimate the errors of this PEM polarimetry by analyzing its measurement matrix. We find the optimal polarization state generator (PSG) and match the optimal polarization states analyzer (PSA) in this polarimetric system. In comparing the figure of merit of PSG and PSA with that of other configurations of polarimetry in the world, we proved that this PEM Mueller matrix polarimetry is a very competitive polarimetric technique. By acquiring the whole polarization properties of the sample, this polarimetry provides the potential for two-dimensional distribution of the optical anisotropic media by stroboscopic illumination technique.

致謝

我要感謝我的母親含辛茹苦的將我扶養長大，他的付出使我衣食無虞，讓我能順利的陸續完成學業；教導我待人處世，使我學會與人和睦相處；培養我樂觀的態度，使我有健康的心態面對並解決問題。

從求學至完成這篇論文的過程當中，有許多人我必須特別感謝，沒有你們的幫助，我必然無法如此順利。首先，我必須要感謝趙老師這數年間的教導，不論是在課堂上、參與國內外研討會時，或是研究過程中的指導，都使我獲益良多。接著，我必須感謝修銘學長給我的許多建議，使我能了解自己的不足，並且幫助我發掘出解決問題的能力，還要感謝學長在撰寫過程中提供給我的寶貴意見，幫助我確立了論文的方向以及架構。另外，我必須感謝冠毅在程式撰寫、繪圖以及實驗儀器整合上給我的幫助，使我能順利的完成實驗。當然也必須要感謝俊逸學長以及建智在平日與我的討論，這都使我受益匪淺。

最後，我要感謝純純這些日子的陪伴，帶給我歡笑、陪我度過困難，以及在我最需要的時候激發我的靈感，沒有你我必定十分苦悶。

目錄

鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀(摘要)	i
Phase-lock PEM Mueller matrix Polarimetry (Abstract) ..	ii
致謝.....	iii
目錄.....	iv
圖目錄.....	vii
表目錄	ix
第一章 緒論.....	1
第二章 基本原理介紹	
2.1 光波的電場與橢圓偏振態理論.....	6
2.2 光的偏振態表示法.....	10
2.2.1 瓊斯向量(Jones vector)與瓊斯矩陣(Jones matrix)	10
2.2.2 史脫克參數(Stokes parameter)	12
2.2.3 穆勒矩陣(Mueller matrix)	15
2.2.4 龐加萊球面(Poincaré sphere)	18
2.3 偏振態產生器(PSG)與偏振態分析器(PSA)	20
第三章 鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀	
3.1 文獻回顧-穆勒矩陣偏光儀.....	22

3.2 光彈調變器(photoelastic modulator).....	32
3.3 實驗原理.....	35
3.3.1 閃頻式量測架構.....	35
3.3.2 波形分析法.....	37
3.4 儀器規格與實驗架構.....	39
3.5 實驗結果與偏光參數分析.....	43
3.5.1 量測空氣的穆勒矩陣.....	47
3.5.2 量測四分之一波片的穆勒矩陣.....	48
3.5.3 量測偏光片的穆勒矩陣.....	50
第四章 誤差分析與系統最佳化.....	53
4.1 偏極光量測系統的線性關係.....	54
4.2 系統分析.....	56
4.2.1 透過行列式(determinant)與條件數(condition number)進行 PSG 的最佳化.....	58
4.2.2 透過等權重變異數(Equally weighted variance)進行 PSA 的 最佳化.....	61
4.3 誤差分析.....	67
4.3.1 樣本為空氣的誤差分析.....	69
4.3.2 樣本為偏光片的誤差分析.....	70

4.3.3 樣本為四分之一波片的誤差分析.....	72
第五章 結論與未來展望.....	74
參考文獻.....	85
附錄 A：透過光強度求得穆勒矩陣.....	87
附錄 B：空氣的穆勒矩陣誤差項.....	89
附錄 C：偏光片的穆勒矩陣誤差項.....	90
附錄 D：四分之一波片的穆勒矩陣誤差項.....	91



圖目錄

圖 2-1：光波的傳播方向.....	6
圖 2-2：光的橢圓偏振態.....	8
圖 2-3：線性偏振光.....	9
圖 2-4：圓偏振光.....	9
圖 2-5：橢圓偏振光.....	9
圖 2-6：龐加萊球面.....	19
圖 2-7：偏極光量測系統.....	20
圖 3-1：RP/RA 系統.....	22
圖 3-2：RP/RCFA 系統.....	23
圖 3-3；FPRC/RCFA 系統.....	24
圖 3-4：PM/PM 系統.....	26
圖 3-5：PM/PM 系統 2.....	26
圖 3-6：DPM/DPM 系統.....	28
圖 3-7：PLD/PLD 系統.....	30
圖 3-8：PEM90 光彈調變器系統.....	32
圖 3-9：時間相位的週期性變化.....	33
圖 3-10：量測方法說明示意圖.....	36
圖 3-11：光強度波形圖.....	37

圖 3-12：鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀系統.....	40
圖 3-13：三亮度量測法系統.....	46
圖 4-1：常見的偏振態產生器(PSG)	59
圖 4-2：常見的偏振態分析器(PSA)	63
圖 4-3：本系統使用的偏振態分析器(PSA)	64
圖 4-4：本系統使用的特殊偏振態在龐加萊球面上的位置.....	65
圖 4-5：空氣穆勒矩陣： x , 四分之一波片的相位延遲量的偏差量； y , PEM 時間相位的偏差量.....	69
圖 4-6：偏光片的穆勒矩陣： x , 四分之一波片的相位延遲量的偏差量； y , PEM 時間相位的偏差量.....	70
圖 4-7：四分之一波片的穆勒矩陣： x , 四分之一波片的相位延遲量的 偏差量； y , PEM 時間相位的偏差量.....	72
圖 5-1：影像式穆勒矩陣偏光儀系統... ..	82
圖 5-2：長葉九宮.....	82
圖 5-3：相位延遲量隨時間的變化情形（左側為真正的相位延遲量， 右側則包含去偏極化效應的相位延遲量）.....	83

表目錄

表 2-1：不同偏振態的表示法.....	14
表 2-2：常見光學元件的穆勒矩陣.....	17
表 3-1：空氣的穆勒矩陣量測結果.....	47
表 3-2：四分之一波片的穆勒矩陣量測結果.....	48
表 3-3：偏光片(方位角 0°)的穆勒矩陣量測結果.....	50
表 3-4：偏光片(方位角 45°)的穆勒矩陣量測結果.....	51
表 4-1：常見 PSA 系統的 EWV 值.....	60
表 4-2：本系統的 EWV 值.....	60
表 4-3：常見 PSG 系統的行列式值與 2-norm 條件數的比較.....	63
表 4-4：本系統的行列式值與 2-norm 條件數.....	64
表 5-1：以偏振態的極分解分析空氣的量測結果.....	79
表 5-2：以偏振態的極分解分析四分之一波片的量測結果.....	80
表 A-1：光強度與元件的空間與時間相位.....	87

第一章 緒論

橢圓偏光術(ellipsometry) 與一般光學量測最大的不同，在於偏光術並非只是分析入射光與出射光間強度(intensity)的差異，而是藉由分析入射光與出射光間偏振態(polarization state)的變化[1]，來推算樣品的光學特性，例如樣品的厚度、折射率以及反射率。由於偏光術具有非破壞性以及豐富的資料性等量測特性，因此被廣泛的利用在非等向性(anisotropic)材料各項光學性質的測量上。

利用橢圓偏光術進行光學量測需要透過下列 5 個步驟[2]：(1) 產生一組具有特定偏振態的入射光；(2) 藉由穿透(transmission)、反射(reflection)或是散射(scattering)使入射光的偏振態受到待測材料的影響而改變；(3) 分析出射光的偏振態；(4) 分析量測系統中各項參數的變化，以求得偏振態的改變量；(5) 求得樣品的光學特性。透過前三項步驟的改變，可以衍生出許多不同種類的量測方法，並針對特定或是全部的光學特性加以量測。

依照量測中所使用儀器的不同，橢圓偏光術可以分為(1)歸零式(null)、(2)亮度式(photometric)以及(3)偏光調變式(Polarization modulation)。歸零式是發展最早的橢圓偏光術，藉由改變偏光片(polarizer)與析光片(analyzer)的方位角(azimuth angle)，使得通過偏光

片、樣品以及析光片的光強度達到最小，再分析各光學元件的方位角以得到系統參數。這種量測方法的優點在於有最少的誤差來源[1]，因此可以達到最高的精確度，但是相較於其他的量測方法，歸零式需要大量的時間在改變光學元件的方位角上，這也限制了其應用上的彈性。亮度式橢圓偏光術是利用光偵測器(photo detector)或是電子耦合偵測器 CCD(Charge-Coupled Device)量測出射光的強度，藉由系統中各項元件的方位角、相位延遲量(phase retardance)、樣品的旋轉、入射角(angle of incidence)的改變等對出射光偏振態的影響，改變了出射光的強度。藉由分析光強度的變化，並透過傅立葉分析(Fourier analysis)或是波形分析(Waveform analysis)以求得系統參數。然而系統內各元件的旋轉不但會導致寄生誤差(parasitic error)[3]的產生，也直接影響了此系統的精確度。偏光調變式利用相位調變器(phase modulator)，在不轉動光學元件的情形之下調變入射光或是出射光的偏振態，不但可以完全避免光學元件旋轉所造成的量測誤差，其極高的調變頻率也可以增加量測的速度以及時間解析度(time resolution)，如用高頻也可減少背景噪音，進而擴展了橢圓偏光術的應用。

在橢圓偏光術中，我們以偏振態產生器(polarization state generator，簡稱 PSG)控制入射的偏振態，並且利用偏振態分析器

(polarization state analyzer, 簡稱 PSA)量測出射光的偏振態，系統產生入射的偏振態以及分析出射光偏振態的能力，決定了各項參數:包括橢圓偏光參數 Δ 與 Ψ 、史脫克參數(Stokes parameter)以及穆勒矩陣(Mueller matrix)，是否能被量測。藉由合適的 PSG 以及 PSA 的搭配，使系統具有能夠分析完整的穆勒矩陣的能力，則被稱為穆勒矩陣偏光儀(Mueller matrix polarimetry)。穆勒矩陣偏光儀具有能以單一入射光源分析非等向性(anisotropic)材料的各項光學性質的能力，藉著 Lu-Chipman 偏振態的極分解 (polar decomposition) 而被廣泛的應用在散射性物質，例如生物組織的測量上。

本實驗室近年來致力於光彈調變器(Photoelastic Modulator, 簡稱 PEM)在橢圓偏光術中的研究以及應用，並且發展出數種校正各元件相對方位角的方法，已將光彈調變橢圓術(PEM ellipsometry)應用在一維以及二維的薄膜光學特性的量測。2005 年韓建遠學長與李嘉倫學長利用觸發脈波產生器對雷射二極體進行時間相位的調變，可以利用四個特定時間相位下的光強度取得一組橢圓偏光參數 Δ 與 Ψ ，此項技術被稱為閃頻式橢圓偏光儀[4]。藉由閃頻式橢圓儀選取 PEM 特殊時間相位的鎖相(phase-lock)技術，我們能在 PEM 所產生地連續偏振態變化中，鎖定特殊的偏振態進行量測。此項技術可以應用在穆勒矩陣偏光儀上，搭配合適的 PSG 與 PSA，將光彈調變橢圓術的量測範圍

擴展到穆勒矩陣的量測。

本論文針對鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀(Phase-lock PEM Mueller matrix polarimetry)在單點量測的系統架設、系統最佳化以及測量的精確度做探討，分為以下五個部份：

第一部份 基本原理介紹

介紹本論文中所使用到的物理以及數學原理，包括偏光量測的基本原理以及如何描述光的偏振態。

第二部份 系統架構與實驗結果

首先透過文獻回顧比較各式穆勒矩陣偏光儀的優勢與劣勢，接著介紹 PEM 的光學特性，說明鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀的系統組成與工作原理，並介紹分析穆勒矩陣的方法，最後以鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀量測常見的光學元件，並分析各元件的偏光特性。

第三部份 誤差分析系統最佳化

以量測系統的線性關係模擬系統偏差對量測結果的影響，並由行列式(determinant)、條件數(Condition number)以及等權重變異數(Equally weight variance，簡稱 EWV)進行量測系統的最佳化，並分析系統中的偏差項對不同量測樣品造成的影響。

第四部份 結論與未來展望

將本系統擴展至二維量測，並透過偏振態的極分解避免量測結果

受到去偏極化效應(depolarization effect)的影響，最後展示二維量測的初步結果。



第二章 基本原理介紹

2.1 光波的電場與橢圓偏振態理論

光波屬於電磁波中的特定頻率波段，當光波在空間傳播的時候，電場會以隨機的方式震盪，會我們通常以電場在傳播中隨時間變化的分布情形來描述光波的特性，這種特性又被稱為光的偏振態

(polarization state)。在 1818 年，Fresnel 與 Arago 以偏振態的理論來分析 Young 的干涉實驗，他們認為當光在傳播時，只存在的兩個互相垂直的穿透分量(transmittance component)，而縱向分量(longitudinal component)並不存在。

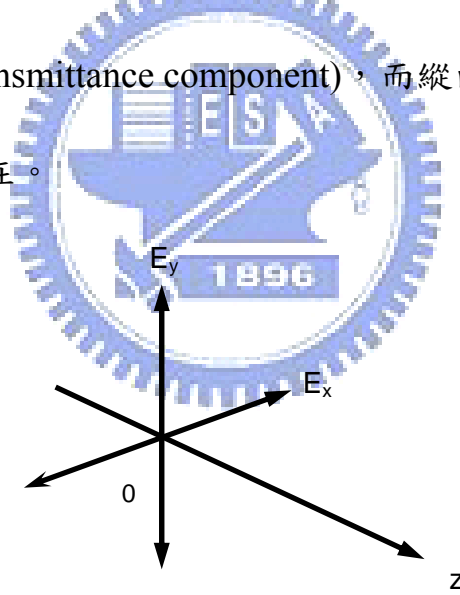


圖 2-1 光波的傳播方向

因此，當光波沿著 z 方向傳遞時，其電場可以表示為

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_x) \quad (2.1)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_y) \quad (2.2)$$

其中 E_{0x} 與 E_{0y} 代表最大振幅(amplitude)， ω 代表角頻率(angular frequency)， k 則是波數(wave number)， δ_x 與 δ_y 則描述其相位(phase)。

將 (2.1) 以及 (2.2) 以三角函數展開可得

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} = \cos(\omega t - kz) \cos \delta_x - \sin(\omega t - kz) \sin \delta_x \quad (2.3)$$

$$\frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} = \cos(\omega t - kz) \cos \delta_y - \sin(\omega t - kz) \sin \delta_y \quad (2.4)$$

接著將 (2.3) 與 (2.4) 合併為

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} \sin \delta_y - \frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} \sin \delta_x = \cos(\omega t - kz) \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (2.5)$$

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} \cos \delta_y - \frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} \cos \delta_x = \sin(\omega t - kz) \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (2.6)$$

將 (2.5) 與 (2.6) 平方相加後可得當 $z=0$ 時，電場的分布為

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.7)$$

其中 δ 為 $\delta_y - \delta_x$ ，表示兩垂直電場的相位差(phase difference)。

此方程式是一個橢圓方程式，由此可知在任意時間光波的電場的傳播

軌跡是一個橢圓，這種現象又稱為橢圓偏振(polarization ellipse)。

透過座標轉換，我們將 (2.7) 式化為一個標準的橢圓方程式，將

(x, y) 座標旋轉 θ 角，轉換為 (x', y') 座標

$$E_x = E'_x \cos \theta - E'_y \sin \theta \quad (2.8)$$

$$E_y = E'_x \sin \theta + E'_y \cos \theta \quad (2.9)$$

可得到標準的橢圓方程式

$$\frac{E_x'^2}{a^2} + \frac{E_y'^2}{b^2} = 1 \quad (2.10)$$

$$a^2 = E_{0x}^2 \cos^2 \theta + E_{0y}^2 \sin^2 \theta + 2E_{0x}E_{0y} \sin \theta \cos \theta \cos \delta \quad (2.11a)$$

$$b^2 = E_{0x}^2 \sin^2 \theta + E_{0y}^2 \cos^2 \theta - 2E_{0x}E_{0y} \sin \theta \cos \theta \cos \delta \quad (2.11b)$$

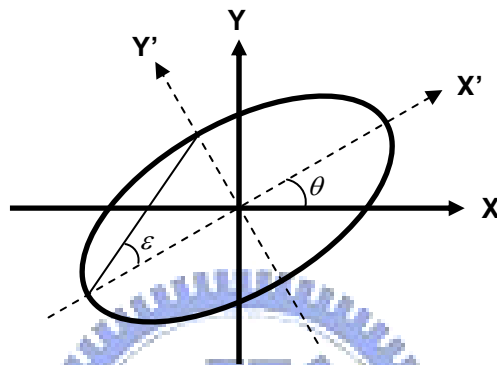


圖 2-2 光的橢圓偏振態

其中 a 為橢圓半長軸， b 為橢圓半短軸， θ 為橢圓傾角 (orientation angle)， ε 為橢圓率角 (elliptical angle)。

當 (2.11) 式中的 E_{0x} 、 E_{0y} 以及 δ 為特定值時，我們可以得到特殊的橢圓偏振態，以下將介紹數種特例：

(1) 當 $\delta = 0$ 或是 $\delta = \pi$ 時，從 (2.10) 式中可以得到

$$E_y = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x \quad (2.12)$$

此時電場在平面上沿著特定的直線方向振動，我們稱之為線性偏振光 (linear polarized light)。

(2) 當 $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ ，且 $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ 時，從 (2.10) 式中可以得到

$$\frac{E_x^2}{E_0^2} + \frac{E_y^2}{E_0^2} = 1 \quad (2.13)$$

此時電場的傳播軌跡為圓形，稱圓偏振光(circular polarized light)。

(3) 當 $\delta \neq 0$ 、 $\delta \neq \pi$ 、 $\delta \neq \pm \frac{\pi}{2}$ 時，電場傳播軌跡為一橢圓，稱為橢圓偏振光(elliptical polarized light)。



圖 2-4 圓偏振光

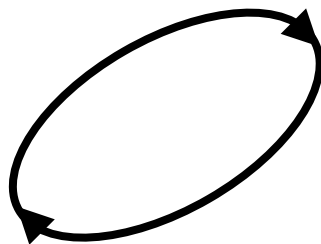


圖 2-5 橢圓偏振光

2.2 光的偏振態表示法

2.2.1 瓊斯向量(Jones vector)與瓊斯矩陣(Jones matrix)

以平面波表示法可以將光波的電場表示為

$$E_x(z, t) = E_{0x} e^{i\delta_x} \quad (2.14)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} e^{i\delta_y} \quad (2.15)$$

我們將上兩式以 2 乘 1 的矩陣 E 表示，此行矩陣稱為瓊斯向量(Jones vector)。

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\delta_x} \\ E_{0y} e^{i\delta_y} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

在瓊斯向量中， E_{0x} 與 E_{0y} 代表最大振幅，此兩項皆為實數。我們可以

透過瓊斯向量進行偏振光的運算。當偏振光 $\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$ 透過一個偏光元件，

其出射的偏振態受到元件的影響，變成為 $\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix}$ ，其線性關係可以透過

下列矩陣的運算式表示

$$\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

或是

$$E' = J \cdot E \quad (2.18)$$

這個 2 乘 2 的矩陣稱之為瓊斯矩陣(Jones matrix)。

我們可以透過瓊斯矩陣來描述光學元件對於入射光以及出射光偏振態之間的線性變換關係，因此各光學元件的瓊斯矩陣代表了其各自的光學特性。但瓊斯向量只能描述純偏振光(pure polarized light)的物理特性，在大部分的情況下，光訊號會透過光學元件和待測材料間的多重反射或是散射，產生非偏振光(unpolarized light)或是部分偏振光(partially polarized light)的情形，此時則必須透過史脫克向量(Stokes vector)來能完整表示光的偏振態。



2.2.2 史脫克參數(Stokes parameters)

瓊斯向量的限制以及在於其無法表示非偏振光或是部分偏振光，這是個極為嚴重的問題，因為自然界的光大多不為純偏振光。1852年史脫克(Stokes)將光的偏振態以定量的形式加以描述，此參數稱之為史脫克參數(Stokes parameters)。史脫克參數的定義如下

$$\begin{aligned} S_0 &= E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ S_1 &= E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ S_2 &= 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \\ S_3 &= 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta \end{aligned} \quad (2.19)$$

另外從史脫克參數之中，我們可以得到下列的關係

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.20)$$

這四項參數皆為實數，其中，第一項參數 S_0 代表偏振光的總亮度， S_1 描述了線性偏振光在水平以及鉛直方向的分量差， S_2 代表了線性偏振光在 $+45^\circ$ 以及 -45° 的分量差，最後， S_3 代表了左旋以及右旋圓偏振光的分量差。透過這四項史脫克參數，我們可以描述所有可能的偏振光。我們也可以將史脫克參數以為4乘1的行矩陣表示，此矩陣稱為史脫克向量 S

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

當產生部分偏振光時，史脫克參數會符合下列的關係

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.22)$$

上式中的等號只有在光波為純偏振光時才會成立。為了更精確的描述光的偏振態，我們透過史脫克參數來判斷光的偏振程度，其定義如下

$$P = \frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}}{S_0}, \quad 0 \leq P \leq 1 \quad (2.23)$$

其中 P 值代表偏光率 (degree of polarization)，當偏光率為 1 時，此時為純偏振光，當偏光率為 0 時，此時為非偏振光，而偏光率介於 0 與 1 之間則為部分偏振光。

最後，我們可以利用光的橢圓偏振來描述史脫克參數



$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ P \cos 2\theta \cos 2\varepsilon \\ P \sin 2\theta \cos 2\varepsilon \\ P \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

其中 I_0 為光波的總亮度，P 為偏光率， θ 為橢圓傾角， ε 為橢圓率角。

另外，在偏極光量測中，我們經常以史脫克參數來推算橢圓偏光參數 Δ 與 Ψ ，其關係如下式

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -\cos 2\Psi \\ \sin 2\Psi \cos 2\Delta \\ -\sin 2\Psi \sin 2\Delta \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

透過史脫克參數的量測，我們可以將出射光的偏振態加以量化，成為橢圓偏光術的量測基礎。




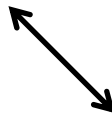
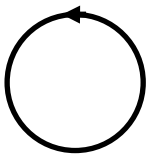
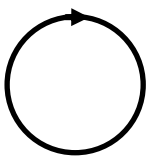
Polarization State	Jones Vector	(Δ, Ψ)	(ε, θ)	Stokes Vector
	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$(0, \frac{\pi}{4})$	$(0, \frac{\pi}{4})$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$(\pi, \frac{\pi}{4})$	$(0, -\frac{\pi}{4})$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4}, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$	$(-\frac{\pi}{4}, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

表 2-1 不同偏振態的表示法

2.2.3 穆勒矩陣(Mueller matrix)

光的偏振態可以透過改變光的振幅、相位以及偏光率而有所不同。當偏振光通過光學元件之後，其偏振態的改變可以由 4 項史脫克參數的線性組合關係表示。當入射光的史脫克參數為 $S_i = (S_0, S_1, S_2, S_3)^T$

$$\begin{aligned} S'_0 &= m_{00}S_0 + m_{01}S_1 + m_{02}S_2 + m_{03}S_3 \\ S'_1 &= m_{10}S_0 + m_{11}S_1 + m_{12}S_2 + m_{13}S_3 \\ S'_2 &= m_{20}S_0 + m_{21}S_1 + m_{22}S_2 + m_{23}S_3 \\ S'_3 &= m_{30}S_0 + m_{31}S_1 + m_{32}S_2 + m_{33}S_3 \end{aligned} \quad (2.26)$$

可以得到其出射光的史脫克參數 $S_o = (S'_0, S'_1, S'_2, S'_3)^T$ ，以矩陣形式可以改寫為

$$S_o = M \cdot S_i \Rightarrow \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

我們將此光學元件改變入射光與出射光的偏振態之間的能力表示為一個 4 乘 4 的傳導矩陣 M，稱為穆勒矩陣(Mueller matrix)，我們可以透過穆勒矩陣來預估各偏光元件(polarizing element)對於光偏振態改變的能力。

當光學路徑中有數個偏光元件時，我們可以將出射光的史脫克參數透過各偏光元件以及入射光的史脫克參數之間的線性組合，以矩陣乘法表示為

$$S_o = M_n \cdots M_2 \cdot M_1 \cdot S_i \quad (2.28)$$

其中 M_i 為各偏光元件的穆勒矩陣。

以下將列舉幾種光學元件的穆勒矩陣

(1) 旋轉器(rotator)，旋轉角(rotation angle)為 C 角

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2C & \sin 2C & 0 \\ 0 & -\sin 2C & \cos 2C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

(2) 偏光片(polarizer)，方位角(azimuth angle)為 P 角

$$M_P(P) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ \cos 2P & \cos^2 2P & \sin 2P \cos 2P & 0 \\ \sin 2P & \sin 2P \cos 2P & \sin^2 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

(3) 補波片(compensator)，方位角為 θ 角，相位延遲量(phase retardation)

為 δ

$$M_{RE}(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \delta \sin^2 2\theta & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin \delta \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos \delta \cos^2 2\theta & -\sin \delta \cos 2\theta \\ 0 & -\sin \delta \sin 2\theta & \sin \delta \cos 2\theta & \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

當相位延遲為 π 時，此補波片又被稱為半波片(half wave plate)；當相位延遲為 $\frac{\pi}{2}$ 時，又被稱為四分之一波片(quarter wave plate)，此兩種光學元件為最常見的補波片。

光學元件	穆勒矩陣	光學元件	穆勒矩陣
線性偏光片 (0°)	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	四分之一波片 (0°)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
線性偏光片 (90°)	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	四分之一波片 (90°)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
線性偏光片 (+45°)	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	四分之一波片 (+45°)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
線性偏光片 (-45°)	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	四分之一波片 (-45°)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
右旋圓偏光片	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	空氣	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
左旋圓偏光片	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	鏡面	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

表 2-2 常見光學元件的穆勒矩陣

2.2.4 龐加萊球面(Poincaré sphere)

1892 年，法國數學家 Henri Poincaré 發現光學的偏振態可以被投影在一個空間中的球面上，此球面稱為龐加萊球面(Poincaré sphere)，直到 20 世紀中期，科學家們發現，任何的偏振態都可以透過史脫克參數 S_1 、 S_2 以及 S_3 在龐加萊球面上找到其對應的位置，當我們改變偏光元件的方位角時或是相位延遲，偏振態的改變會使其在龐加萊球面上的投影量隨著特定的軌跡移動，因此各種光學元件所造成光的偏振態改變，皆可以透過龐加萊球面來預測。

我們以一個直角座標來描述龐加萊球面，為了專注於其特性的描述，先以純偏振光作為範例。在龐加萊球面上，其 x 、 y 以及 z 座標分別為史脫克參數的 S_1 、 S_2 以及 S_3 ，同時，也可以利用光的橢圓偏振以及橢圓偏光參數 Δ 與 Ψ 來找到與龐加萊球面的對應關係，其關係如下

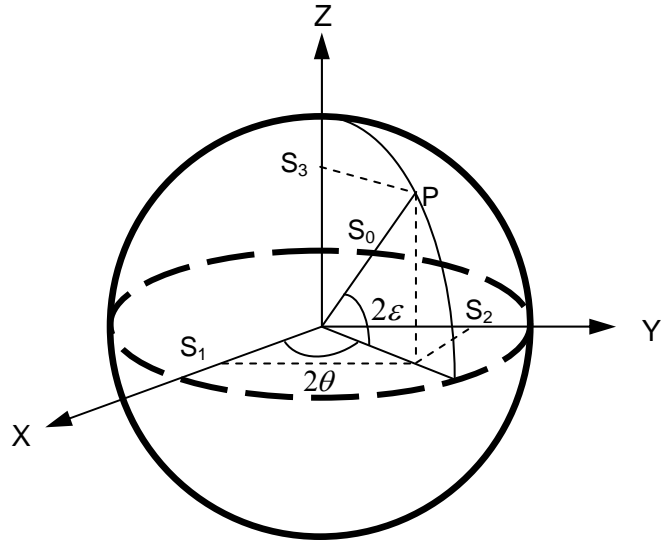
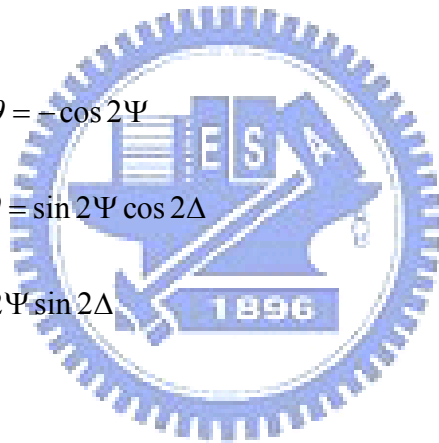


圖 2-6 龐加萊球面

$$X = \cos 2\varepsilon \cos 2\theta = -\cos 2\Psi \quad (2.32)$$

$$Y = \cos 2\varepsilon \sin 2\theta = \sin 2\Psi \cos 2\Delta \quad (2.33)$$

$$Z = \sin 2\varepsilon = \sin 2\Psi \sin 2\Delta \quad (2.34)$$



2.3 偏振態產生器(PSG)與偏振態分析器(PSA)

偏振態產生器(PSG)與偏振態分析器(PSA)決定了系統的量測能力。使用前者的目的在於將光源轉變為偏振光，並且能藉由調整元件的方位角或者相位延遲量調變入射光的偏振態；而後者則是被用為分析出射光的偏振態。在偏振光量測中，會同時利用 PSG 以及 PSA 分析樣品改變偏振態的機制，以量測各種偏光參數[2]。

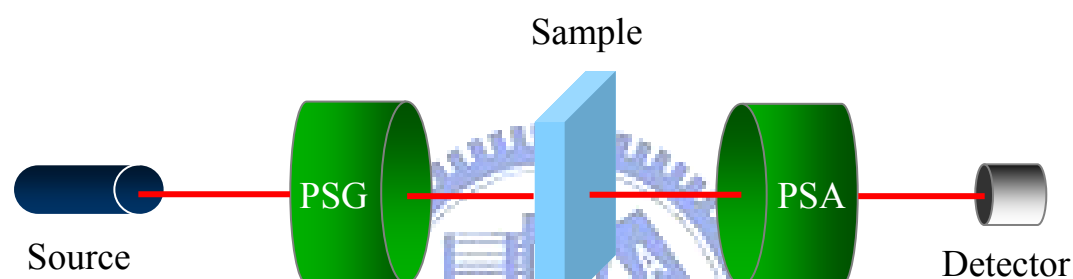


圖 2-7 偏極光量測系統

PSA 由一至數個偏光元件以及光偵測器所組成，經常使用的元件包括偏光片、相位延遲片與相位調變器。為了能夠精確的控制並且分析偏振態，通常會利用各元件的穆勒矩陣與以及偏振光的史脫克參數間的線性組合關係計算量測的結果。不同的組成元件與各元件在量測過程中的方位角決定了 PSA 的量測能力，也就是決定在 PSA 能夠量測完整(complete)或是部分(partial)的史脫克參數。

PSG 是由光源以及與 PSA 相似的偏光元件組成，其目的在於產生入射系統的偏振光。一般的偏光儀在量測過程中只需要一種入射的偏振態，搭配部份或是完全的 PSA，就可以量測橢圓偏光參數橢圓偏

光參數 Δ 與 Ψ 或是史脫克參數。如果要使系統能夠量測樣品的穆勒矩陣，其入射偏振態必須要能透過線性組合產生所有的橢圓偏振光 [2]，也就是 PSG 必須能控制入射偏振態中的 S_1 、 S_2 和 S_3 三項史托克參數，因此在穆勒矩陣偏光儀中，至少需要四種彼此線性獨立的入射偏振態，才能完全的量測穆勒矩陣中 16 項參數。若是系統的 PSG 無法完全控制入射偏振態，則穆勒矩陣中至少有一行參數無法求得；若是 PSA 無法量測的所有的史托克參數，則穆勒矩陣中至少有一列參數無法求得，因此在一個不完整的偏極光量測系統中，只能量測到穆勒矩陣中的 12 個或 9 個參數。

由於 PSG 以及 PSA 決定了系統的特性，因此一個良好的偏光儀，必須要準確的控制 PSG 產生各組入射偏振態，並且利用 PSA 精確的分析所有出射的偏振態，才能得到可靠的偏光參數。

第三章 鎖相式光彈調變穆勒矩陣 偏光儀

3.1 文獻回顧-穆勒矩陣偏光儀

傳統的穆勒矩陣偏光儀是透過偏光片與補波片等偏光元件組成 PSG 以及 PSA，並經由旋轉光學元件調變入射偏振態與分析出射偏振態，最後透過傅立葉分析法將光強度轉換為待測的穆勒矩陣，常見的旋轉元件式(rotating-element)穆勒矩陣偏光儀有以下數種，其 PSG 以及 PSA 包括旋轉偏光片 (rotating-polarizer)與旋轉補波片與固定偏光片 (rotating compensator and fixed polarizer)兩種形式。

(1) 旋轉偏光片/旋轉析光片(RP/RA)系統[4]

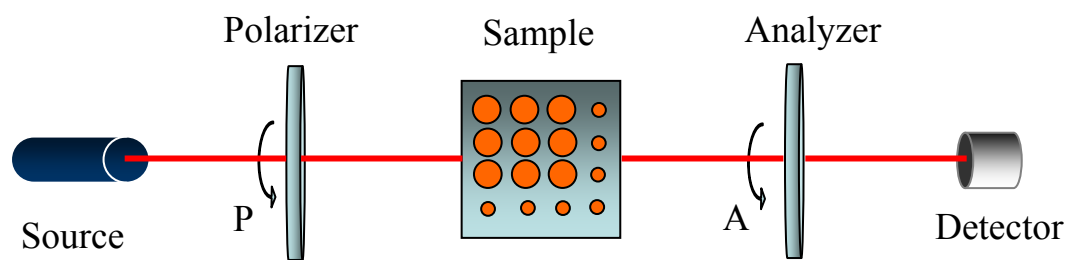


圖 3-1 RP/RA 系統

當系統僅以偏光片與析光片作為 PSG 以及 PSA，且偏光片與析光片以 1：3 的旋轉速度同步轉動時，穆勒矩陣與光強度之間的關係

如下

$$\frac{4I}{I_0} = a_0 + \sum_{k=1}^4 (a_{2k} \cos 2kP + b_{2k} \sin 2kP) \quad (3.1)$$

其中 I_0 為入射光的強度，穆勒矩陣可以由傅立葉分析所得到的 9 項係數結合而成。

$$M = \begin{bmatrix} a_0 & a_2 & b_2 & m_{03} \\ a_6 & a_4 + a_8 & b_4 - b_8 & m_{13} \\ b_6 & b_4 + b_8 & a_4 - a_8 & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

由於轉動偏光片僅能改變入射光的線性偏振態，因此本系統無法得到樣品的去偏極化(depolarization)與圓偏振光的特性，只能得到穆勒矩陣中僅與線性偏振態有關的 9 項係數。

(2) 旋轉偏光片/旋轉補波片-析光片(RP/RCFA)系統[5]

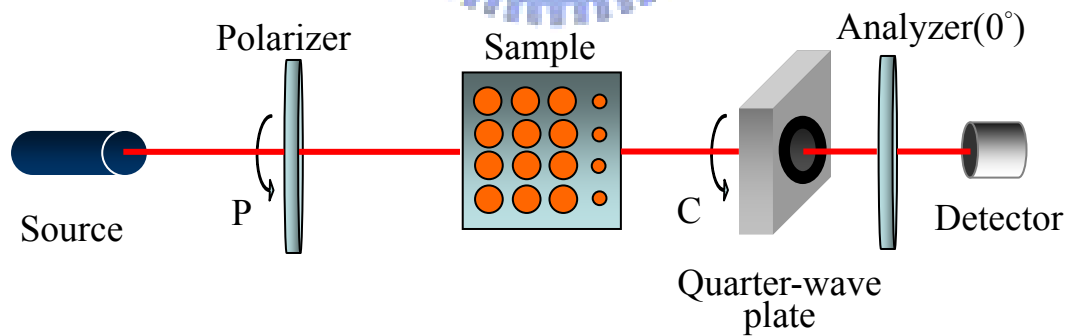


圖 3-2 RP/RCFA 系統

如上圖，系統以一片轉動的偏光片作為 PSG，且以一旋轉的補波片與一片方位角固定的析光片作為 PSA，當偏光片與補波片之間以

1 : 3 的旋轉速度同步轉動時，穆勒矩陣與光強度之間的關係如下

$$\frac{4I}{I_0} = a_0 + \sum_{k=1}^7 (a_{2k} \cos 2kP + b_{2k} \sin 2kP) \quad (3.3)$$

透過傅立葉分析，可以將得到的 15 項係數組成樣品的穆勒矩陣。

$$M = \begin{bmatrix} a_0 - a_6 & a_1 - a_5 - a_7 & b_1 - b_5 + b_7 & m_{03} \\ 2a_6 & 2(a_5 + a_7) & 2(b_7 - b_5) & m_{13} \\ 2b_6 & 2(b_5 + b_7) & 2(a_5 - a_7) & m_{23} \\ -2b_3 & -2b_2 & -2a_2 & m_{33} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

由於本系統的 PSG 無法改變入射光的線性偏振態，使得本系統無法得到樣品的穆勒矩陣中第四列的係數，即使 PSA 能夠分析完整的出射偏振態，本系統依然無法得到完整的穆勒矩陣。

(3) 偏光片-旋轉補波片/旋轉補波片-析光片(FPRC/RCFA)系統[6]

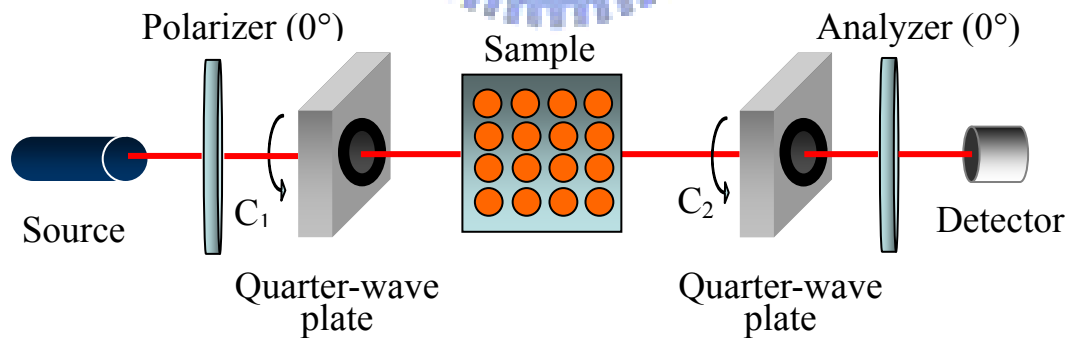


圖 3-3 FPRC/RCFA 系統

此系統利用偏光片與補波片作為 PSG，而系統的 PSA 則是利用補波片與析光片所組成，並以 5：1 的轉速改變補波片方位角 C。在量測過程中入射光依序通過 PSG、待測樣品、PSA，最後由光偵測器接收光強度。

$$4 \frac{I}{I_0} = a_0 + \sum_{k=1}^{12} (a_{2k} \cos 2kC + b_{2k} \sin 2kC) \quad (3.5)$$

其中 I_0 為入射光的強度，穆勒矩陣可以由傅立葉分析所得到的 25 項係數結合而成。

$$M = \begin{bmatrix} a_0 - a_2 + a_8 - a_{10} + a_{12} & 2(a_2 - a_8 + a_{12}) & 2(b_2 + b_8 - b_{12}) & b_1 + b_9 - b_{11} \\ 2(a_{10} - a_8 - a_{12}) & 4(a_8 + a_{12}) & 4(-b_8 + b_{12}) & 2(b_{11} - b_9) \\ 2(b_{10} - b_8 - b_{12}) & 4(b_8 + b_{12}) & 4(a_8 - a_{12}) & 2(a_9 - a_{11}) \\ b_3 - b_5 + b_7 & -2(b_7 + b_3) & 2(a_7 - a_3) & a_6 - a_4 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

由於此系統結合了完整的 PSG 以及 PSA，因此能藉由分析得到樣品穆勒矩陣中的所有係數。

以上數種穆勒矩陣偏光儀皆透過同步旋轉偏光元件，並透過傅立葉分析以得到樣品的穆勒矩陣，然而，不論是偏光片或是補波片的旋轉接有可能對量測結果造成顯著的影響。首先，系統中元件的旋轉容易造成光束的偏移，進而產生寄生誤差，另外，元件旋轉速率的不同步與方位角起始點的不匹配皆會造成測量結果的不準確[7]，因此，偏光量測系統應該減少偏光元件的旋轉。

為了減少因光學元件的旋轉而導致的量測誤差，許多研究者以單一(single phase modulator)或雙重相位調變器(dual phase modulator)取

代系統中的旋轉元件，以產生或量測偏振態。

(4) 偏光片-相位調變器/相位調變器-析光片(PM/PM)系統[8]

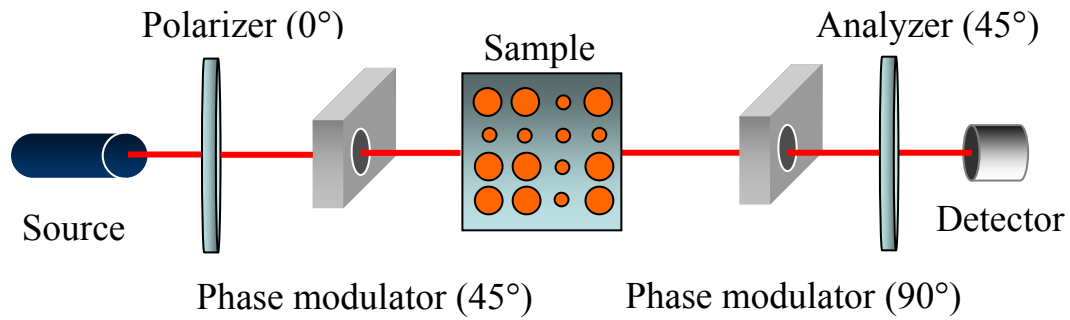


圖 3-4 PM/PM 系統

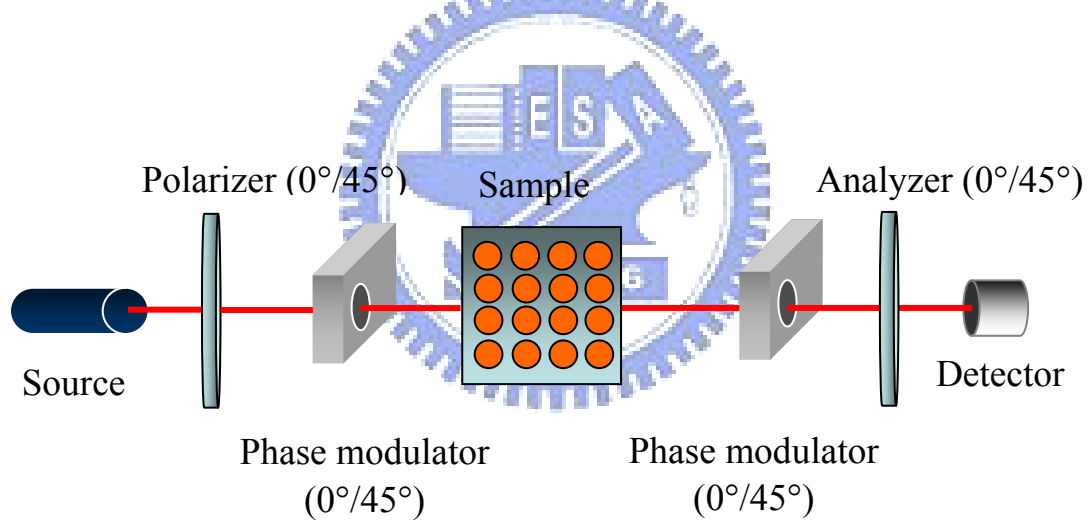


圖 3-5 PM/PM 系統 2

如圖 3-4，當以單一相位調變器與偏光片和析光片作為偏極光量測系統中的 PSG 與 PSA 時，由於相位調變器無法完整的調變線性偏振光，因此在不改變元件方位角的前提下，量測到的穆勒矩陣中會遺失其中一行與一列的訊息。此系統得到的光強度與相位調變器的調變

振幅與調變頻率相關，其關係如下

$$\frac{4I}{I_0} = m_{00} + m_{01}c_1 + m_{03}s_1 + m_{20}c_2 + m_{21}c_1c_2 + m_{23}s_1c_2 + m_{30}s_2 + m_{31}c_1s_2 + m_{33}s_1s_2$$

$$c_i = \cos \Delta_i = \cos(\Delta_{0i} \sin \omega_i t)$$

$$s_i = \sin \Delta_i = \sin(\Delta_{0i} \sin \omega_i t) \quad (3.7)$$

其中 Δ_{0i} 代表相位調變器的調變振幅， ω_i 則代表調變頻率。

因此，我們可以將光強度值透過傅立葉分析得到穆勒矩陣中的 9 項係數。

當偏光元件的方位角固定時，由於 PSG 的不完整，僅能在穆勒矩陣中第二行與第三行元素中擇一量測；而 PSA 的不完整則造成穆勒矩陣中的第二列與第三列元素必有一列無法得到，為了使此系統能夠量測完整的穆勒矩陣，1992 年 Anderson 改變偏光片與相位調變器的相對方位角，透過量測 4 組部份(partial)穆勒矩陣，以組成完整的穆勒矩陣，如圖 2-14。其方位角組合如下[8]

$$I_1 = A(0^\circ) \cdot PM_2(45^\circ) \cdot M \cdot PM_1(45^\circ) \cdot P(0^\circ) \cdot S_i$$

$$I_2 = A(45^\circ) \cdot PM_2(0^\circ) \cdot M \cdot PM_1(45^\circ) \cdot P(0^\circ) \cdot S_i$$

$$I_3 = A(0^\circ) \cdot PM_2(45^\circ) \cdot M \cdot PM_1(0^\circ) \cdot P(45^\circ) \cdot S_i$$

$$I_4 = A(45^\circ) \cdot PM_2(0^\circ) \cdot M \cdot PM_1(0^\circ) \cdot P(45^\circ) \cdot S_i \quad (3.8)$$

其中 $P(\theta)$ 、 $PM_1(\theta)$ 、 $PM_2(\theta)$ 與 $A(\theta)$ 分別代表偏光片、兩台相位調變器以及析光片的方位角。藉由 4 次的量測的互補性，透過傅立葉分析即

可以得到完整的穆勒矩陣。

此系統存在著一些待解決的問題，首先，為了避免偏光片的方位角的改變影響入射光的強度，本系統的光源必須為非偏振光或是圓偏振光，因此無法使用具有線性偏振態的雷射作為光源。另外，由於完整的穆勒矩陣是由 4 組部分的穆勒矩陣中的 36 個參數組合而成，使得量測系統與待測參數之間的線性關係不復存在，因此，穆勒矩陣中的各項參數會受到不同程度的系統誤差影響，使其物理可靠度 (physical realizability) 降低 [9]。

(5) 偏光片-雙重相位調變器/雙重相位調變器-析光片 (DPM/DPM) 系統 [10]

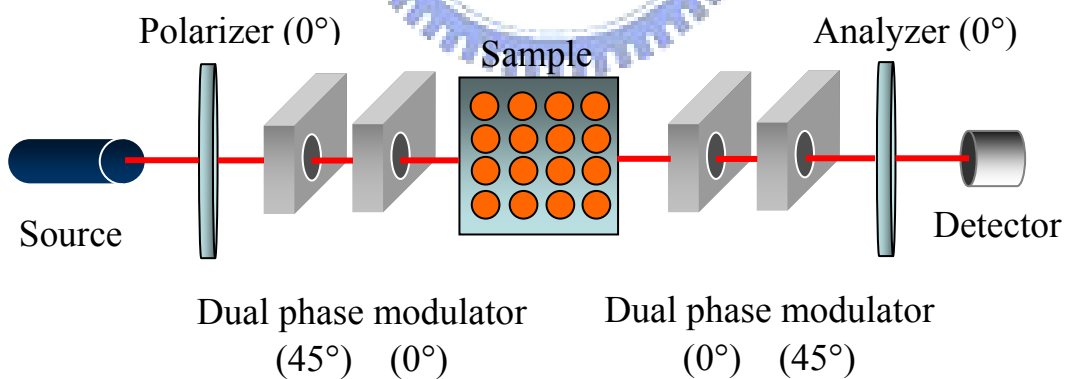


圖 3-6 DPM/DPM 系統

上圖中的系統分別以兩個相位調變器與偏光片構成 PSG 以及 PSA，由於雙重相位調變器構成的 PSG 與 PSA 皆有完整性，因此可

以得到完整的穆勒矩陣。此系統的光強度與相位調變器特性參數的關

係如下

$$\begin{aligned} \frac{4I}{I_0} = & m_{00} + m_{01}c_2 + m_{02}s_1s_2 - m_{03}c_1s_2 + m_{10}c_3 + m_{11}c_2c_3 + m_{12}s_1s_2c_3 - m_{13}c_1s_2c_3 + m_{20}s_3s_4 + m_{21}c_2s_3s_4 \\ & + m_{22}s_1s_2s_3s_4 - m_{23}c_1s_2s_3s_4 - m_{30}s_3c_4 - m_{31}c_2s_3c_4 + m_{32}s_1s_2s_3c_4 + m_{33}c_1s_2s_3c_4 \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中 Δ_{0i} 代表相位調變器的調變振幅， ω_i 則代表調變頻率。因此，我們可以將光強度值透過傅立葉分析得到完整的穆勒矩陣。

以相位調變器取代旋轉偏光元件的優點，在於量測過程中不需要旋轉任何光學元件。然而，當系統中使用一台以上的相位調變器時，就必須考慮其同步性，由於任何一台相位調變器的時間相位皆會影響光強度，一旦相位調變器無法被同步而且穩定的驅動，我們便無法得到準確的量測結果。

上述的各種穆勒矩陣偏光儀皆是透過傅立葉分析得到穆勒矩陣。此方法的優點在於運算過程簡單，不必個別計算 PSG 產生的入射偏振態與 PSA 的分析結果即可透過倍頻訊號得到樣品的穆勒矩陣。一般而言，傅立葉分析法需要 64 個以上的光強度，這個限制並不會對單點量測造成影響，但卻其龐大資料量與冗長的取樣時間卻侷限了此系統在二維量測上的應用。

(6)偏光片-液晶相位調變器/液晶相位調變器-析光片(PLD/PLD)系統[11]

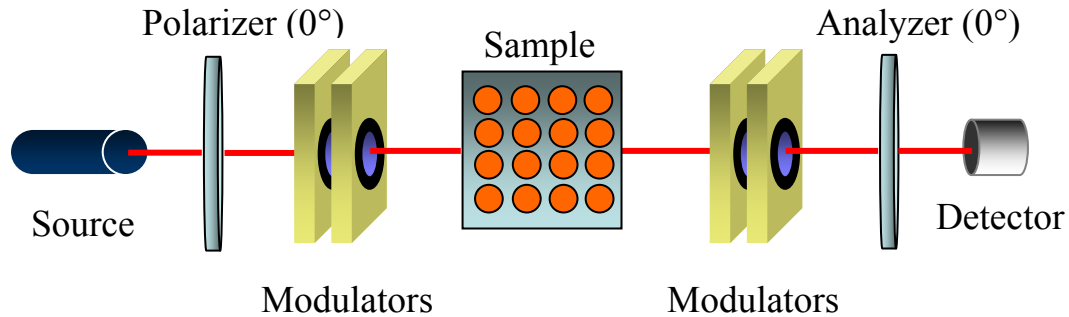


圖 3-7 PLD/PLD 系統

為了改善相位調變器在二維量測受到的限制，在 2004 年，De Matino 利用液晶相位調變器(liquid-crystal variable phase modulator)取代旋轉的補波片，並搭配偏光片與析光片組合成 PSG 以及 PSA，其系統如圖 (3-7) 所示

由於該系統中不含任何旋轉元件，因此不會因為元件的旋轉光束導致光束的偏移，另外，由於液晶相位調變器是以電訊號改變元件的雙折射特性，相較於傳統的旋轉元件系統，此系統的取樣時間較短，可以大幅提升量測速度。

然而，此系統仍有許多尚未解決的問題，首先，液晶相位調變器的去偏極化效應會產生部分偏振光[12]，在取樣時間中，部分偏振光會使 PSG 無法精確控制入射偏振態，同時也會造成 PSA 無法準確的

分析量測結果。另外，隨著操作時間增加，元件溫度的上升也會改變在同樣電訊號下的雙折射效應，每上升 1°C 的偏差量約為 0.4% [28]，這項缺點限制此系統在長時間量測與連續量測上的應用。

在穆勒矩陣偏光儀中，元件的偏光特性必須被精確的控制，不論是旋轉元件造成方位角的偏差、多重相位調變器驅動的不同步，或是溫度導致相位延遲量的變化都會使量測結果不準確。為了減少系統中光學元件的轉動，同時維持系統的穩定性，我們利用偏光片與四分之一波片在固定方位角下產生可控制的入射偏振態，並以 PEM 取代液晶相位調變器，使出射偏振態能被準確的分析，以增加系統的可靠度。



3.2 光彈調變器(photoelastic modulator)

光彈調變器(PEM)是本論文中所使用的相位調變系統，由控制器(controller)，高壓驅動器(electronic head)與光學頭(optical head)所組成構造如圖所示。



圖 3-8 PEM-90 光彈調變器系統

在控制器內包含有控制面板和信號輸出端，在控制面板上可以設定調變振幅 Δ_0 (modulation amplitude) 以及所使用的入射光波長，在本機型中其調變頻率 ω (modulation frequency) 則固定為約 51kHz。接著控制器會透過信號輸出端將信號傳入高壓驅動器，使其產生交流高壓電訊號以驅動光學頭的相位變化。光學頭是由氟化鈣 (calcium fluoride, CaF_2) 所構成的光學元件區 (optical element) 以及石英 (quartz) 所構成的壓電換能器 (piezoelectric transducer) 所組成。

當光學頭接收到高壓驅動器所產生的電訊號時，壓電換能器會隨著電場的方向改變而產生週期性的膨脹或收縮應力，使得光學元件區垂直於受力方向產生線性雙折射效應(linear birefringence, LB)，此現象被稱為光彈效應 (photoelastic effect)，因此 PEM 可以被視為是一個週期性改變相位的相位延遲片(phase retarder)，其相位 Δ_p 受到調變振幅 Δ_0 以及調變頻率 ω 的影響，可以表示為

$$\Delta_p = \Delta_0 \sin(\theta_p) \quad (3.10)$$

因此 PEM 在方位角為 0 度時的穆勒矩陣可以表示如下

$$M_{PEM}(\Delta_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Delta_p & -\sin \Delta_p \\ 0 & 0 & \sin \Delta_p & \cos \Delta_p \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

由於 PEM 的相位隨著時間而改變，這與其他相位延遲片透過旋轉元件等空間調變來改變相位有明顯的不同，因此我們將 θ_p 稱為時間相位 (temporal phase)，我們可以利用其週期性變化的特性，透過鎖相技術得到特定的偏極態。

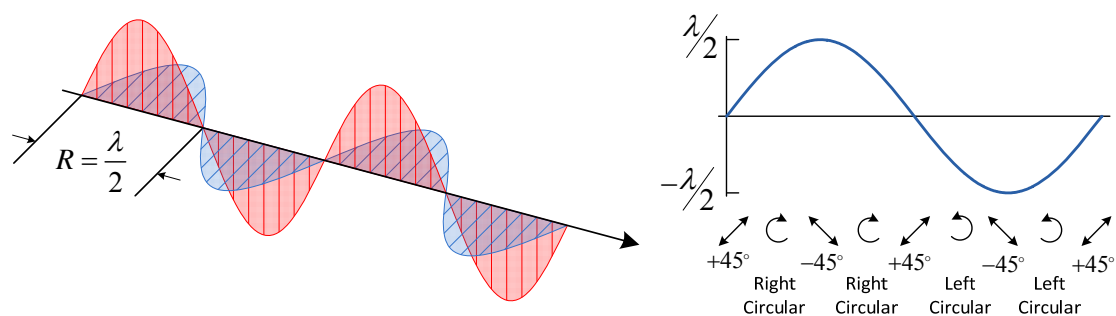


圖 3-9 時間相位的週期性變化

PEM 可以被用來量測特定的光學現象，例如線性二色性(linear dichroism, LD)、圓二色性 (circular dichroism, CD)、線性雙折射效應 (linear birefringence, LB)以及圓雙折射效應(circular birefringence, LB)，或是搭配其他偏光元件組成偏振態產生器或是偏振態分析器 [13]。在本論文中，我們利用 PEM 與析光片組成偏振態分析器 (PSA)，以量測樣品的穆勒矩陣。



3.3 實驗原理

3.3.1 閃頻式量測架構

基於對 PEM 偏光特性的了解，本實驗室成功的將 PEM 應用於二維量測。為了鎖定快速調變下的特殊時間相位，我們藉由 PEM 控制器所輸出的方波訊號(square wave)來當作參考訊號，輸入可程式化脈衝延遲產生器(Programmable delay/pulse generator)當作觸發訊號(trigger signal)來驅動半導體雷射作激發，使半導體雷射之激發時間與 PEM 建立了同步的時間關係，此技術稱為同步照射(synchronous illumination)[4]。我們偵測時所需要的時間相位，則可藉由改變可程式化脈衝延遲產生器中的脈衝延遲時間來達成。PEM 的時間相位經由此方法被鎖定，除非改變脈衝激發的時間，系統所偵測光強度值不受 PEM 的時變訊號影響而改變。由此可知系統偵測速度則決定在光偵測器上，如以電荷耦合元件 (CCD) 為例，其曝光時間為 0.5 秒時，所偵測到的光強度大小約是 25000 ($= 50\text{kHz}/2$)次雷射脈衝強度之合，藉由控制每次曝光時間與配合不同的脈衝激發時間，則可以藉由偵測到四個時間相位的光強度大小而得到二維的橢圓偏光參數 Δ 與 Ψ 。

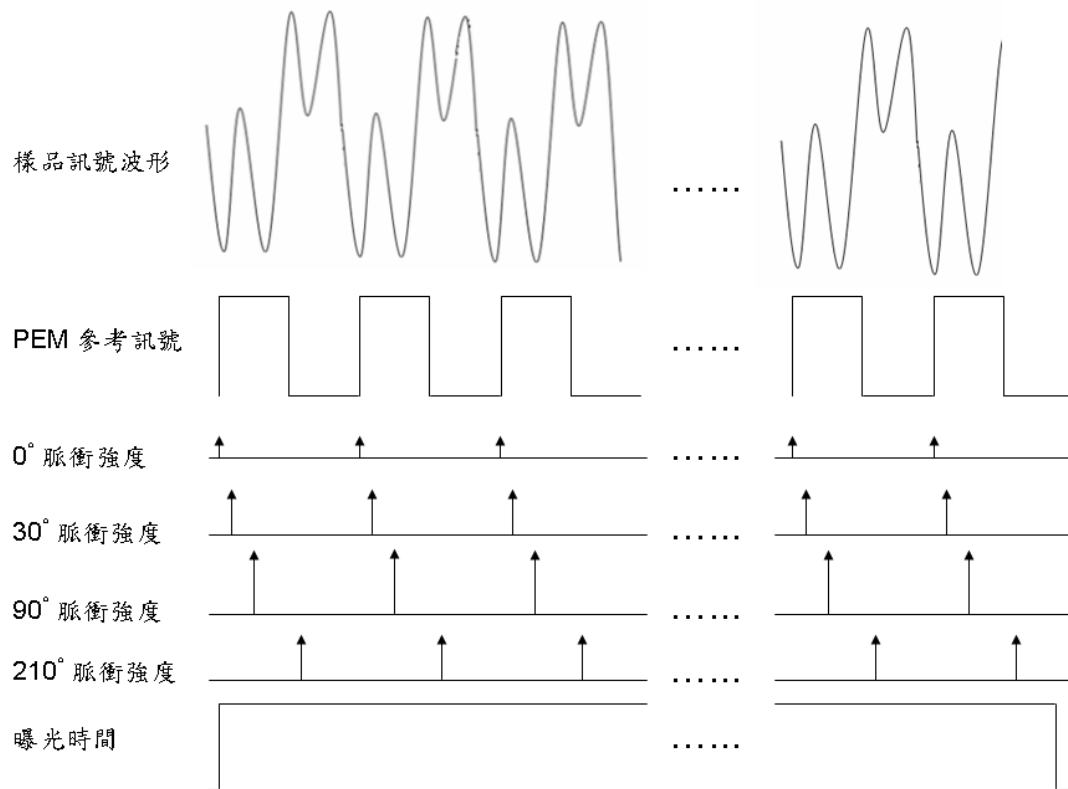


圖 3-10 量測方法說明示意圖

本論文將以閃頻式橢圓偏光儀作為基礎，為了避免多重相位調變器同步驅動的困難，在使用單一 PEM 的前提下，將此系統僅能量測橢圓偏光參數 Δ 與 Ψ 的能力延伸至完整的穆勒矩陣的量測。

3.3.2 波形分析法

本系統以 PEM 與析光片的組合來分析出射光的偏振態，因此如何準確的鎖定 PEM 特定的時間相位下的光強度值成為重要的課題，我們以 PEM 控制器所輸出的方波作為參考訊號，並利用此訊號觸發數據擷取卡紀錄光強度隨時間變化的波形。但數據擷取卡記錄的光強度與 PEM 的相位變化存在約八分之一週期的時間延遲關係，因此我們必須藉由分析光強度訊號的波形才能鎖定特定的時間相位，並將其強度值導入樣品偏光參數的計算。

本系統的數據擷取速率為 10MHz，由於 PEM 的調變頻率約為 51kHz，因此在光訊號波形的週期 20 微秒(μs)中，可以記錄 196 個光強度值。我們以 500 個光強度訊號為一組，透過 500 組訊號平均以減少光強度不準確造成的誤差。當析光片平行於偏光片時，且待測的四分之一波片的方位角為 15° 時，示波器所呈現的波形如下。

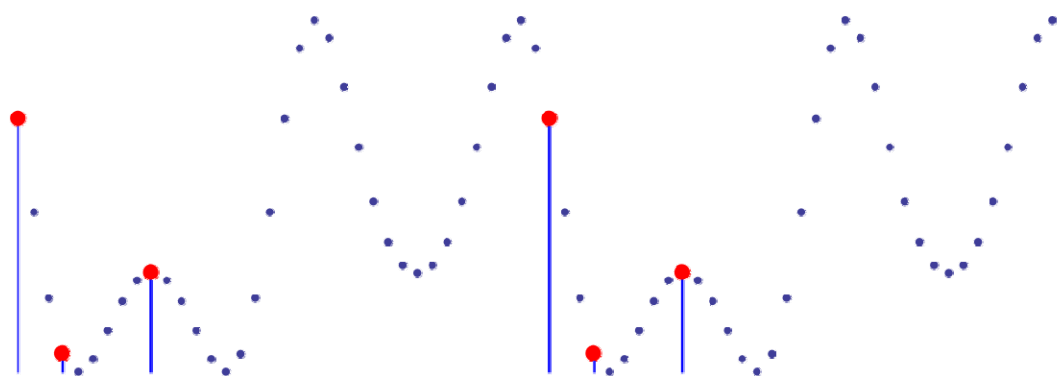


圖 3-11 光強度波形圖

此時光強度隨著時間變化的關係為

$$I = \frac{I_0}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \cos(\pi \sin \theta_p) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\pi \sin \theta_p) \right) \quad (3-12)$$

其光強度的一階微分是

$$I' = -\frac{I_0}{16} \pi \cos \theta_p [2\sqrt{3} \cos(\pi \sin \theta_p) + \sin(\pi \sin \theta_p)] \quad (3-13)$$

當 (3-13) 式為 0 時，可以得到光強度為極大值或是極小值的時間相位，由上式以及圖 3-11 可以得知當時間相位 θ_p 為 90° 時，光強度為區域極大值。接著分析波形找出此區域極大值，並將此極大值設為參考點，其時間相位 θ_p 定為 90° 。藉由分析波形可以決定各組光強度訊號中的參考點，再經由內插法即可鎖定時間相位為 0° 與 30° ，或其他任何時間相位的的光強度訊號。

由於數據擷取卡的取樣速率並非遠大於 PEM 的調變速率，因此作為參考點的區域極大值未必能準確的與時間相位 90° 重合，在經過進一步的誤差修正之前，最大時間相位的誤差會小於取樣速率的一半，也就是在 0.92° 以內 [14]。

3.4 儀器規格與實驗架構

本實驗所使用的各光學儀器與偏光元件的規格如下

1. 光源

氬氙雷射：Melles Griot，05-LHR-151，功率 15mW，波長 632.8nm。

2. 偏光元件

偏光片與析光片：Melles Griot，03FPG007 Dichroic sheet

polarizer，extinction ratio： 10^{-4} 。

四分之一波片：Knight Optical，RYM2506，zero order mica retarder 1/4

Wave Plate $\pm 0.01\lambda$, for 633nm。

光彈調變器(PEM)：Hinds instruments，PEM-90。

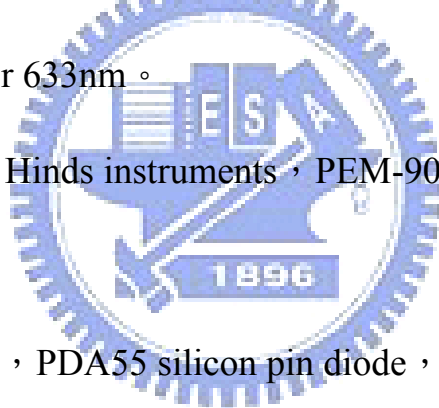
3. 訊號接收

光偵測器：Thorlabs，PDA55 silicon pin diode，spectral range：

400~1000nm。

數據擷取卡：National instruments，PCI-6115。

接線盒：National instrument BNC-2110。



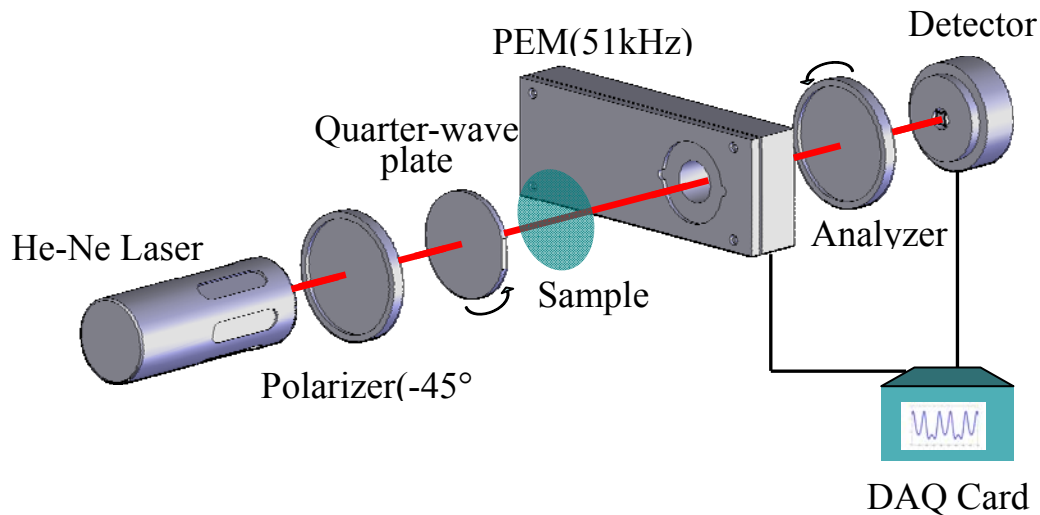


圖 3-12 鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀系統

本實驗的實驗架構如圖 3-12，我們透過偏光片的方位角來訂定系統的光軸方向，並設其方位角為 -45° ，接著透過三亮度量測法確定析光片的方位角，並將其方位角旋轉至 0° ，接下來則是以三亮度量測法分別確定 PEM 以及四分之一波片的方位角，並將其方位角旋轉至 0° 以及 -15° ，最後將各偏光元件依序排列，並將光偵測器的信號輸出端與 PEM 參考訊號的輸出端與接線盒連接，即完成系統的架構。本系統訊號擷取的方式是由儀器控制軟體 LabView 控制光學元件的旋轉，並透過軟體指令從數據擷取卡中取得波形訊號，最後利用數學計算軟體 Matlab 分析訊號，並經由運算獲得樣品的穆勒矩陣。

在本系統中，入射光會先經過 PSG 產生特定偏振態，接著再通過待測樣品，再經由 PSA 分析偏振態的變化量，最後由光偵測器紀

錄光強度，並以數據擷取卡(data acquisition card)紀錄光強度隨時間變化的波形。本系統可以透過穆勒矩陣可以表示如下。

$$S_{out} = PSA(a, \theta_p) M PSG(p, c) S_i \quad (3-14)$$

$$S_{out} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2a & \sin 2a & 0 \\ \cos 2a & \cos^2 2a & \sin 2a \cos 2a & 0 \\ \sin 2a & \sin 2a \cos 2a & \sin^2 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi \sin \theta_p) & -\sin(\pi \sin \theta_p) \\ 0 & 0 & \sin(\pi \sin \theta_p) & \cos(\pi \sin \theta_p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2c^2 & \cos 2c \sin 2c & -\sin 2c \\ 0 & \cos 2c \sin 2c & \sin 2c^2 & \cos 2c \\ 0 & \sin 2c & -\cos 2c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2p \\ \sin 2p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

其中 a 、 p 以及 c 分別代表析光片、偏光片以及四分之一波片的方位角； θ_p 則代表 PEM 的時間相位。

本系統的 PSG 是由偏光片以及四分之一波片所組成，其中偏光片的方位角 p 置於 -45° ，透過改變四分之一波片的方位角來產生四個不同的入射光偏振態。此 PSG 所產生的入射偏振態 S_{in} 隨四分之一波片方位角的變化如下

$$S_{in}(c) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\cos 2c \sin 2c \\ -\sin^2 2c \\ \cos 2c \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

為了使入射偏振態彼此線性獨立，四分之一波片的方位角 c 依序為 -90° 、 -45° 、 -15° 與 15° ，因此入射樣品的偏振態分別為左旋偏振光

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{、線性偏振光} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{和兩個橢圓偏振光} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{與} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{。}$$

系統的 PSA 是由 PEM 以及一析光片所構成，在量測過程中，PEM 的方位角與系統光軸維持平行，即 0° ，藉由鎖定的時間相位 θ_p 來分析出射偏振態，使用的時間相位分別為 0° 、 30° 以及 90° ，而析光片則改變方位角 a 為 0° 以及 45° 。藉由矩陣運算，我們可以個別分析入射光與出射光的偏振態，並將波形分析所得到的 16 個光強度以線性組合的關係得到待測樣品的穆勒矩陣，詳細內容請見附錄 A。

相較於傳統旋轉四分之一波片的穆勒矩陣偏光儀，本系統減少了元件旋轉的次數，因此較不受到元件方位角誤差的影響，另外以波形分析取代傅立葉分析不但使系統不受旋轉速率匹配的影響，也奠定了本系統拓展至二維量測的基礎。

3.5 實驗結果與偏光參數分析

我們可以藉由穆勒矩陣中的 16 個參數來描述該物體所有的偏光特性，包括(1)偏極量 (polarizance)：說明該物體能調變非偏振光成為橢圓偏振光的特性；(2)吸收量 (diattenuation)：該物體對於水平與鉛直的線性偏振光、 $+45^\circ$ 以及 -45° 的線性偏振光與左右旋偏振光的吸收度；(3)旋轉量 (rotation)：對於偏振態的旋轉能力；(4)延遲量 (retardation)：對於平行光軸和垂直光軸的偏振光間相位延遲率的改變；(5)去偏極化量 (depolarization)：改變出射光偏光率的程度。這些特性參數使我們能完全掌握物體對於偏光性質，這也是量測樣品穆勒矩陣的目的。

藉由分析穆勒矩陣中各項元素值，可以得到樣品的各項偏光參數，如相位延遲量或是方位角，但樣品的偏光參數與穆勒矩陣之間並不存在固定的關係，因此隨著樣品的性質不同，分析穆勒矩陣的方式需要有所調整。

以分析一個具有吸收特定線性偏振光特性的樣品為例，此樣品的穆勒矩陣與偏光片類似，可以表示如下

$$\begin{bmatrix} p_x^2 + p_y^2 & p_x^2 - p_y^2 & 0 & 0 \\ p_x^2 - p_y^2 & p_x^2 + p_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & 0 & 0 \\ P_2 & P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

其中 p_x 與 p_y 代表樣品水平與垂直光軸的穿透係數，而 p_x^2 與 p_y^2 則代表

水平與垂直光軸的穿透光強度。一般而言，一個好的偏光片的 p_y 值會趨近於 0，代表其垂直穿透軸沒有發生漏光的情形，由於我們無法直接求出其穿透係數 p_x 與 p_y ，僅能以其比值 $\frac{p_y}{p_x}$ 來判斷樣品的特性，這項比值又稱為消光比(Extinction ratio)，通常可以在元件的特性參數的找到此項係數。

當待測樣品的方位角未知時，樣品的穆勒矩陣可以表示如下

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \cos 2P & P_2 \sin 2P & 0 \\ P_2 \cos 2P & P_1 \cos^2 2P + P_3 \sin^2 2P & (P_1 - P_3) \sin 2P \cos 2P & 0 \\ P_2 \sin 2P & (P_1 - P_3) \sin 2P \cos 2P & P_1 \sin^2 2P + P_3 \cos^2 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

其中 P 代表方位角，也就是穿透軸與系統光軸的夾角。從上式可以得知系統的光軸與矩陣係數的關係如下

$$P = 0.5 * \tan^{-1} \left(\frac{m_{20}}{m_{10}} \right) \quad (3-19)$$

當樣品為理想的偏光片時，消光比接近 0，其與矩陣係數的關係如下。

$$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{m_{00} - \sqrt{m_{10}^2 + m_{20}^2}}{m_{00} + \sqrt{m_{10}^2 + m_{20}^2}} \right)^2 \quad (3-20)$$

藉由消光比與方位角 P，我們可以完整的描述一個具有線性二色性樣品的偏光特性。

在描述一個具有線性雙折射效應的樣品時，其穆勒矩陣中的各項係數與補波片類似，可以表示如下

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \delta \sin^2 2\theta & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin \delta \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos \delta \cos^2 2\theta & -\sin \delta \cos 2\theta \\ 0 & -\sin \delta \sin 2\theta & \sin \delta \cos 2\theta & \cos \delta \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

線性雙折射效應樣品的偏光特性由相位延遲量 δ 與方位角 θ 決定。由上式可以得到相位延遲量 δ 與矩陣係數的關係如下

$$\delta = \cos^{-1} \left(\frac{m_{00} + m_{11} + m_{22} + m_{33}}{2} - 1 \right) \quad (3-22)$$

我們可以透過矩陣主軸上的四項係數求得樣品的相位延遲量。而樣品的方位角可以透過下列的關係求得

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(-\frac{m_{13}}{m_{23}} \right) \quad (3-23)$$

藉由量測樣品的穆勒矩陣並加以分析，我們可以將樣品的各項偏光參數量化，再以各項偏光參數來描述待測物的各項偏光特性，例如吸收或是雙折射效應。

Chao 在 1991 年利用偏光片-樣品-析光片的量測系統，透過析光片方位角的改變，進行樣品各項偏光參數的量測[15]。該系統如下圖所示

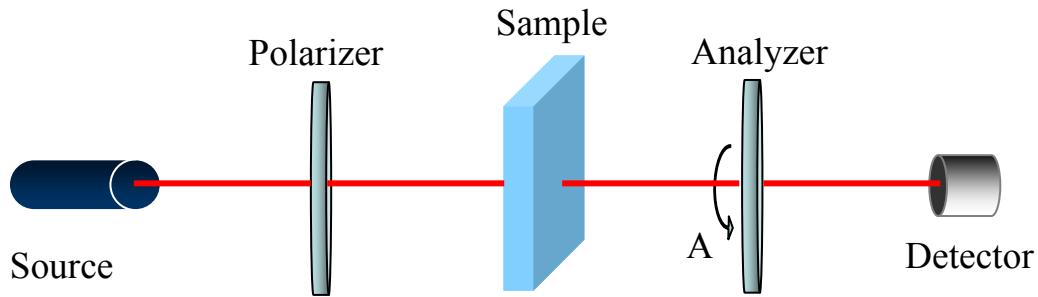


圖 3-13 三亮度量測法系統

光強度 I 隨著析光片方位角 A 以及樣品的橢圓偏光參數 Δ 與 Ψ 的改變值可以表示為

$$I = I_0(1 - \cos 2A \cos 2\Psi - \cos \Delta \sin 2A \sin 2\Psi) \quad (3-24)$$

其中 I_0 為入射光的強度。我們可以透過橢圓偏光參數 Δ 與 Ψ 推算出樣品的各項偏光參數。

鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀能以波形分析法鎖定特定時間相位的強度值，並計算其穆勒矩陣，接著我們以常見的偏光元件作為樣品，透過其穆勒矩陣求得其方位角、相位延遲量與消光比等偏光參數，並與三亮度量測法所得結果對照，以驗證本系統在量測上的可行性。

3.5.1 量測空氣的穆勒矩陣

首先我們以空氣作為量測樣品，由於空氣不具有任何吸收與雙折射特性，當偏振光通過樣品後，偏振態完全不會受到任何的改變，因此方位角與相位延遲率在空氣的量測中不具物理意義。

我們比較理論值與量測結果

量測樣品：空氣	
理論值	量測結果
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -0.0041 & 0.0140 & 0.0560 \\ -0.0109 & 1.0282 & -0.0011 & -0.0452 \\ 0.0039 & -0.0281 & 0.9750 & 0.0810 \\ -0.0067 & 0.0046 & -0.0867 & 1.0362 \end{bmatrix}$

表 3-1 空氣的穆勒矩陣量測結果

可以發現量測結果與理論值相近，矩陣主軸上的 4 項參數 m_{00} 、 m_{11} 、 m_{22} 與 m_{33} 十分接近理論值 1，其餘各項參數皆符合穆勒矩陣的對稱關係，與理論值之間的差距則小於 0.087，這些非零值的出現則可歸因於系統誤差，此部份在 4-2 節會有進一步的說明。另外，經過 500 次量測結果所得到的各係數的標準差皆小於 0.02。

3.5.2 量測四分之一波片的穆勒矩陣

本實驗所使用的樣品為四分之一波片，其參數如下

Knight optical，RYM2506

zero order mica retarders-1/4 Wave Plate $\pm 0.01\lambda$, for 633nm。

我們先使用三亮度量測法確定樣品的相位延遲量以及方位角，並計算出穆勒矩陣的理論值，接著再以本系統實際量測穆勒矩陣。

我們比較理論值與量測結果

量測樣品：四分之一波片		
理論值	量測結果	
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0.0374 & -0.0059 & 0.0177 \\ -0.0317 & 0.0093 & -0.0476 & -0.9766 \\ 0.0100 & 0.0457 & 1.0039 & -0.0049 \\ -0.0022 & 1.0241 & -0.0347 & 0.0698 \end{bmatrix}$	
	三亮度量測法	穆勒矩陣分析法
方位角	45.00°	44.85°
標準差	0.02°	0.71°
相位延遲量	87.80°	87.62°
標準差	0.02°	0.13°

表 3-2 四分之一波片的穆勒矩陣量測結果

本樣品具有的線性雙折射效應會使垂直與平行光軸的偏振光產生相位偏移，因此在量測此類偏光元件時，相位延遲量的準確度變的格外重要。由測量結果得知，穆勒矩陣中各項元素與理論值的差異皆小於 0.07，得到的方位角與理論值的差異小於 0.18° ，至於相位延遲量則小於 0.15° ，另外，經過 500 次量測結果所得到的各係數的標準差皆小於 0.02。值得一提的是，當四分之一波片的方位角接近 45° 時，一般偏光儀在判斷方位角時容易產生錯誤，由於量測到的參數較少，在量測值皆十分接近極值(0、1 或 -1)時，容易造成方位角估算上的錯誤。但若是透過穆勒矩陣偏光儀中進行元件方位角的分析，由於穆勒矩陣可以透過 16 個元素詳細的描述樣品的偏光特性，相較於一般偏光儀僅以三或四項參數描述出射光的偏振態，穆勒矩陣偏光儀的量測結果更為可靠。另外，當待測樣品的相位延遲量未知時，由於各項參數皆同時受到相位延遲量與方位角的影響，因此無法利用單量測的結果，使相位延遲量與方位角能獨立計算，此項缺失將會額外增加計算的困難度。相較之下，以穆勒矩陣進行量測的優點在於各項參數之間的關係簡單，同時相位延遲量與方位角得以分開計算，使彼此的誤差不會透過互相影響而增加，因此穆勒矩陣偏光儀特別適合用於量測樣本的線性雙折射效應。

3.5.3 量測偏光片的穆勒矩陣

本實驗所使用的樣品為偏光片，其參數如下

Melles Griot，03FPG007

Dichroic sheet polarizer，extinction ratio： 10^{-4} 。

我們先使用三亮度量測法確定樣品的方位角為 0° ，並計算出在該方位角時穆勒矩陣的理論值，接著再以本系統實際量測穆勒矩陣。理論值與量測結果如下

量測樣品：偏光片		
理論值	量測結果	
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1.0140 & 0.0791 & 0.0021 \\ 0.9968 & 0.9814 & 0.0522 & -0.0130 \\ -0.0430 & 0.0497 & 0.0060 & 0.0022 \\ -0.0033 & -0.0027 & -0.0002 & -0.0002 \end{bmatrix}$	
	三亮度量測法	穆勒矩陣分析法
方位角	0.00°	1.24°
標準差	0.02°	0.08°
消光比	0.001	0.034
標準差		0.036

表 3-3 偏光片(方位角 0°)的穆勒矩陣量測結果

由於本實驗所使用樣品在垂直光軸向的穿透率極小，透過三亮度量測法可求得其消光係數為 0.001，因此偏光片是線性二色性元件中的典型範例。當偏光片位於 0° 時，其穆勒矩陣僅剩 m_{00} 、 m_{01} 、 m_{10} 與 m_{11} 為 1，其餘各項係數皆為 0，由測量結果可以看出與理論值相接近，各項係數與理論值的誤差皆小於 0.08，而方位角則與三亮度量測法得到的結果相差 1.24° ，消光比則與理論值相差 0.033。為了證明本系統並非只適用於特定方位角的量測，接著我們旋轉樣品偏光片的方位角至 45° ，量測結果與理論值的模擬如下

量測樣品：偏光片		
理論值	量測結果	
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -0.0332 & 1.0010 & -0.0145 \\ -0.0353 & 0.0115 & -0.0389 & 0.0026 \\ 0.9964 & -0.0335 & 0.9986 & -0.0147 \\ -0.0695 & 0.0175 & -0.0731 & 0.0036 \end{bmatrix}$	
	三亮度量測法	穆勒矩陣分析法
方位角	45.00°	43.98°
標準差	0.02°	0.28°
消光比	0.001	0.038
標準差		0.023

表 3-4 偏光片(方位角 45°)的穆勒矩陣量測結果

當偏光片的方位角位於 45° 時，其穆勒矩陣僅剩 m_{00} 、 m_{02} 、 m_{20} 與 m_{22} 為 1，其餘各項係數皆為 0，從結果中可以發現各項元素與理論值的最大差異依然小於 0.08，透過分析穆勒矩陣，求得的方位角則與三亮度測量測法的結果相差 0.98° ，而消光比則相差 0.037，整體結果相較於方位角平行光軸時更為準確。另外，經過 500 次量測結果所得到的各係數的標準差皆小於 0.027。

我們比較了樣品的方位角在 0° 以及 45° 時的穆勒矩陣，並透過量測結果比較方位角和矩陣各元素與理論值之間的差異。從結果中可以看出本系統在樣品的方位角不同時的量測結果十分穩定。



第四章 誤差分析與系統最佳化

透過改變光學元件的組合即可得到不同種類的偏光儀，例如調整元件的先後順序，新增或移除光學元件，或是以相位調變器取代補波片，都會影響偏光儀的量測能力；即使使用相同的光學元件，以不同量測方法，例如改變量測時各元件的方位角，皆會影響量測結果的準確度。為了提升量測系統的可靠程度，我們分析量測系統與量測結果之間的線性關係，並透過各系統的條件數 (condition number)、行列式 (determinant) 以及等權重變異數 (Equally weighted variance) 推估各量測系統的訊號雜訊比 (signal-to-noise ratio, 簡稱 SNR)。當系統擁有較佳的訊號雜訊比，代表該系統的量測結果受到系統誤差的影響較小，因此我們以相對訊號雜訊比作為系統最佳化的依據，藉由比較不同量測方法的相對訊號雜訊比，尋找最合適的量測方式。

為了確定穆勒矩陣偏光儀在量測上的精確度，我們引入誤差分析，來評估量測系統中各誤差項對量測結果的影響。由於穆勒矩陣代表樣品對偏振光的調變能力，其準確與否會隨著入射偏振態有所改變，因此準確度無法以各元素的偏差量來評估，為了提升系統的精確度，我們利用偏極光量測的線性關係將系統最佳化[14]，以減少誤差對量測結果的影響。

4.1 偏極光量測系統的線性關係

在偏光量測中，待測參數與量測系統和量測結果之間的線性關係能以矩陣乘法的型式表示如下

$$P = W \cdot S \quad (4-1)$$

其中 P 代表偏光儀的量測結果，因此會隨量測次數的改變而增加或減少；W 代表量測系統的特性矩陣，我們稱之為測量矩陣 (measurement matrix)，其行數等於系統待測參數的數目相同，其列數則取決於量測次數；S 代表系統的待測參數，在偏光儀中則為橢圓偏光參數 Δ 與 Ψ 、史托克參數或是穆勒矩陣。經由矩陣的運算，待測參數與量測系統的線性關係可以改寫為

$$S = W^+ \cdot P \quad (4-2)$$

W^+ 為測量矩陣的擬逆矩陣 (pseudo-inverse matrix)，代表測量矩陣的廣義反矩陣，當測量矩陣為方陣時，代表系統量測次數與待測參數的數目相同，此時擬逆矩陣等於反矩陣 (inverse matrix)。

量測系統的缺陷會造成待測參數的偏差。當量測結果 P 受到微擾 (perturbation) n 的影響時，待測參數會產生相對應的誤差 ε ，此項誤差受到微擾的影響程度可以透過系統的線性關係表示如下

$$S + \varepsilon = W^+ \cdot (P + n) \quad (4-3)$$

$$\varepsilon = W^+ \cdot n \quad (4-4)$$

由此可知，待測參數的誤差是來自於測量矩陣的擬逆矩陣將微擾項放大，當微擾被放大的程度越明顯，待測參數誤差也隨之增加，因此量測時所使用的測量矩陣是影響偏極光量測準確程度的關鍵因素。藉由估計量測系統將微擾放大的程度，我們可以評估各系統的相對訊號雜訊比，並找出系統最合適的偏光元件與量測所使用的方位角。

由量測系統的線性關係，我們得知測量矩陣會影響系統的訊號雜訊比。測量矩陣是由系統的 PSA 以及各光學元件的方位角或是時間相位所決定的，由於光偵測器紀錄的是出射系統的光強度值 I ，以本系統為例，由矩陣運算可以得到下列結果

$$I = S_0' + S_1' \cos 2a + S_2' \sin 2a \cos(\pi \sin(\theta_p)) + S_3' \sin 2a \sin(\pi \sin(\theta_p)) \quad (4-5)$$

其中 $S_j', j=1,2,3,4$ 為出射偏振態的史托克參數， a 為析光片的方位角， θ_p 則代表 PEM 的時間相位。因此，當 PSA 的量測次數 N 為 4 時，可

定義本系統的測量矩陣為

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \cos 2a_1 & \sin 2a_1 \cos(\pi \sin \theta_{p1}) & \sin 2a_1 \sin(\pi \sin \theta_{p1}) \\ 1 & \cos 2a_2 & \sin 2a_2 \cos(\pi \sin \theta_{p2}) & \sin 2a_2 \sin(\pi \sin \theta_{p2}) \\ 1 & \cos 2a_3 & \sin 2a_3 \cos(\pi \sin \theta_{p3}) & \sin 2a_3 \sin(\pi \sin \theta_{p3}) \\ 1 & \cos 2a_4 & \sin 2a_4 \cos(\pi \sin \theta_{p4}) & \sin 2a_4 \sin(\pi \sin \theta_{p4}) \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

4.2 系統分析與最佳化

在偏光量測中，研究者經常增加量測的次數以提升結果的準確度，例如使用區域平均 (zone average) 將產生的誤差項互相抵消或是使用傅立葉轉換 (Fourier transform) 以大量的資料減少誤差對結果的影響，但在量測系統中，過多的量測不但使資料龐大，也會限制系統量測的速度，因此，如何以最少的量測次數得到最佳的量測結果一直是使系統最佳化的重要條件。為了評估各種量測方法，我們引入條件數、行列式以及等權重變異數以一個客觀的角度分析系統的訊號雜訊比，避免不必要的量測影響系統的速度與結果，並找出最合適的量測方式[16]。

穆勒矩陣偏光儀中的入射偏振態 S_{in} 、待測穆勒矩陣 M 、測量矩陣 W ，與出射系統的光強度 I 之間的關係如下[17]

$$I = W \cdot M \cdot S_{in} \quad (4-7)$$

其中 S_{in} 為系統入射的四組偏振態排列成的矩陣

$$S_{in} = \begin{bmatrix} S_{0-1} & S_{0-2} & S_{0-3} & S_{0-4} \\ S_{1-1} & S_{1-2} & S_{1-3} & S_{1-4} \\ S_{2-1} & S_{2-2} & S_{2-3} & S_{2-4} \\ S_{3-1} & S_{3-2} & S_{3-3} & S_{3-4} \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

因此待測的穆勒矩陣與其他參數的關係可以改寫如下

$$M = W^{-1} \cdot I \cdot S_{in}^{-1} \quad (4-9)$$

其中 W^{-1} 與 S_{in}^{-1} 分別為測量矩陣與入射偏振態矩陣的反矩陣

當量測的光強度、測量矩陣，與入射偏振態產生誤差 ΔI 、 ΔW 與 ΔS_{in} 時，實際上量測到的光強度 I' 如下

$$I' = \Delta I + (W + \Delta W) \cdot M \cdot (S_{in} + \Delta S_{in}) \quad (4-10)$$

接著將 (4-9) 式中的結果帶入上式，我們實際求得的穆勒矩陣 M' 為穆勒矩陣的理論值 M 與誤差項 ΔM 的組合

$$M' = W^{-1} \cdot [\Delta I + (W + \Delta W) \cdot M \cdot (S_{in} + \Delta S_{in})] \cdot S_{in}^{-1} = M + \Delta M \quad (4-11)$$

最後由上式我們可以得到穆勒矩陣的誤差項 ΔM 的關係式為

$$\Delta M = W^{-1} \cdot \Delta I \cdot S_{in}^{-1} + W^{-1} \cdot \Delta W \cdot M + M \cdot \Delta S_{in} \cdot S_{in}^{-1} + W^{-1} \cdot \Delta W \cdot M \cdot \Delta S_{in} \cdot S_{in}^{-1} \quad (4-12)$$

由上式我們可以得知系統的誤差項會受到測量矩陣 W 與入射偏振態 S_{in} 的影響。為了減少量測系統的 SNR，我們必須使測量矩陣 W 與入射偏振態 S_{in} 對量測結果的影響降到最低，因此，我們透過條件數[18]以及等權重變異數[16]，分別對量測系統中的 PSG 以及 PSA 進行分析，並透過結果進行系統的最佳化。

4.2.1 透過行列式 (determinant) 與條件數 (condition number)

進行 PSG 的最佳化的確認

一個完整的穆勒矩陣偏光儀透過 PSG 控制入射系統的偏振態，由於 PSG 與待測參數之間並沒有直接的線性關係，因此我們必須以間接的方式來描述 PSG 對系統的影響。我們透過 (4-12) 式討論 PSG 與量測結果之間的關係

$$\Delta M = W^{-1} \cdot \Delta I \cdot S_{in}^{-1} + W^{-1} \cdot \Delta W \cdot M + M \cdot \Delta S_{in} \cdot S_{in}^{-1} + W^{-1} \cdot \Delta W \cdot M \cdot \Delta S_{in} \cdot S_{in}^{-1} \quad (4-12)$$

為了描述入射偏振態矩陣 S_{in} 對量測誤差 ΔM 造成的影響，我們引入矩陣的行列式 (determinant) 與條件數 (condition number) 來分析 S_{in}^{-1} 將各項誤差放大的程度。

矩陣 S_{in} 的條件數受到其矩陣範數 (matrix norm) 影響。經常被用來作為誤差估計的包括 1-norm、2-norm、 ∞ -norm，以及 Forbenius-norm，在描述 4 乘 4 矩陣時的定義如下 [19]。

$$\|A\|_1 \equiv \max_{1 \leq j \leq 4} \sum_{i=1}^4 |a_{ij}| \quad (4-13a)$$

$$\|A\|_2 \equiv \sqrt{\lambda_{\max}(A^* \cdot A)} \quad (4-13b)$$

$$\|A\|_{\infty} \equiv \max_{1 \leq i \leq 4} \sum_{j=1}^4 |a_{ij}| \quad (4-13c)$$

$$\|A\|_{Forb} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 |a_{ij}|^2} \quad (4-13d)$$

其中 a_{ij} 代表的是矩陣 A 中第 i 列第 j 行的元素， λ_{\max} 代表的是最大的特徵值。則矩陣條件數可以定義如下

$$\kappa(A) \equiv \|A\| \|A^{-1}\| \quad (4-14)$$

矩陣 S_{in}^{-1} 將誤差放大的能力與行列式以及條件數符合以下的關係。

$$S_{in}^{-1} \propto \frac{\kappa(A)}{|\det(S_{in})|} \quad (4-15)$$

由於以 2-norm 條件數作為系統最佳化的依據可以更有效的提升系統的訊號雜訊比[20]，並且可以透過 2-norm 條件數評估系統中最大與最小誤差項的比值，因此，為了使入射偏振態對系統產生的影響降到最小，其 S_{in} 矩陣應該要有較大的行列式，與較小的 2-norm 條件數。

我們同樣也能使用龐加萊球面分析入射偏振態。入射偏振態在龐加萊球面上對應點的連線可以形成一個正多面體，此正多面體的體積恰與 S_{in} 矩陣行列式的大小成反比[19]，且與其 2-norm 條件數成正比，因此我們可以透過此關係直觀的描述 S_{in} 矩陣在量測過程中對待測參數的影響程度。當 S_{in} 對待測參數的影響越小時，在龐加萊球面上圍成體積則越大[14]。

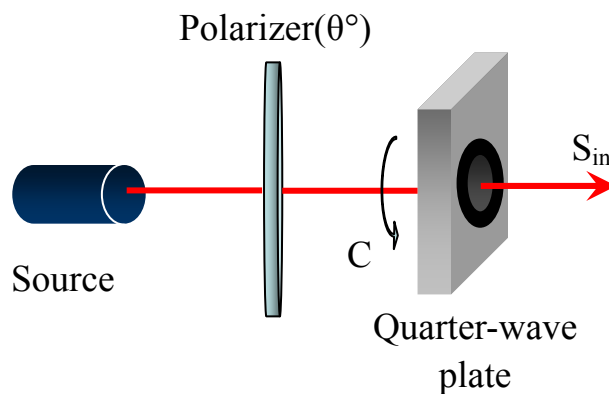


圖 4-1 常見的偏振態產生器(PSG)

由於穆勒矩陣偏光儀中的 PSG 必須要能產生線性獨立的入射偏振態，當符合此條件時， S_m 矩陣的秩(rank)為 4。在以偏光片與四分之一波片所組成的 PSG 系統中，常使用的方位角組合如下

年份	P 角	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	det	2-norm
1990[21]	0°	-45°	45°	67.5°	90°	1	5.774
1990[22]	0°	-22.5°	0°	22.5°	45°	0.5	10.350
1990	0°	-30°	0°	30°	60°	1.125	4.717
1990	0°	0°	67.5°	135°	202.5°	1.207	4.309
1995[16]	0°	-45°	0°	30°	60°	1.4	3.627
1995	0°	-90°	-45°	30°	60°	1.4	3.627

表 4-1 常見 PSG 系統的行列式與 2-norm 條件數的比較

在本系統中使用的 PSG 其偏光片與四分之一波片的方位角如下

年份	P 角	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	det	2-norm
2009	-45°	-90°	-45°	-15°	15°	1.4	3.627

表 4-2 本系統的行列式與 2-norm 條件數

本系統擁有較小的 2-norm 條件數 3.627 以及相對較大的行列式 1.4，因此我們可以確定本系統的 PSG 對量測誤差的影響是相對較小的。

4.2.1 透過等權重變異數 (Equally weighted variance) 進行 PSA 最佳化的確認

由於量測過程中的微擾會受到擬似矩陣的放大而成為誤差，而擬似矩陣的放大效果與擬似矩陣中的各項元素之間的關係可以表示如下

$$W^+ \propto \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 w_{ij}^+{}^2 = \text{Tr}[W^+ \cdot (W^+)^T] = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{\mu_k^2} \quad (4-13)$$

其中 w_{ij}^+ 代表擬似矩陣中的各項元素值， μ_k 則是測量矩陣的特徵值。

因此 EWV 定義為

$$EWV = \sum_{k=0}^N \frac{1}{\mu_k^2} \quad (4-14)$$

由矩陣的線性關係，我們發現微擾被放大的程度與測量矩陣的特徵值有關，為了方便分析其特徵值，我們將其擬似矩陣以單一值分解 (singular value decomposition) 得到以下結果

$$W^+ = V \cdot \begin{bmatrix} \mu_0^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3^{-1} \end{bmatrix} \cdot U^T \quad (4-15)$$

其中 μ_0 至 μ_3 為測量矩陣的特徵值 (eigenvalue)，而 V 與 U 則為變換基底 (change-of-basis) 矩陣，並不影響量測。由 EWV 與測量矩陣的關係得知微擾被放大的程度與系統的 EWV 成反比，因此擁有較小 EWV 值的系統，產生的系統誤差也相對的小。最後，系統的 SNR 與 EWV 值的關係如下[16]

$$SNR \propto \frac{1}{\sqrt{EWV}} \quad (4-16)$$

為了使系統擁有最佳的 SNR，必須透過調整光學元件以及量測方式，使 EWV 值最小化。

我們也可以用其他形式描述 PSA 的特性。將 PSA 在分析參數時所使用的偏振態在龐加萊球面上的位置連線可以形成一個多面體，由於該多面體的體積正比於測量矩陣的特徵值總和，因此，當系統的 EWV 值越小，可在龐加萊球面上圍出越大的體積。以偏光儀的量測為例，當量測次數為四次時，一個最佳化的系統能在龐加萊球面上圍成一個正四面體，其 EWV 為 10，此系統可以由一個相位延遲量為 132° 且方位角位於 $\pm 15.2^\circ$ 與 $\pm 51.7^\circ$ 的補波片以及方位角平行光軸的析光片組合而成。但在實際的偏光儀應用上，相位延遲量為 132° 的補波片必須要特別製作，或是由兩片以上的補波片或是相位調變器組合而成[17, 23]，另外此系統中各項參數的運算過程十分複雜，因此大多實驗者在系統最佳化的過程中會選擇 EWV 次佳，卻能以特殊偏振態或是較簡潔的運算過程分析系統參數的角度組合。

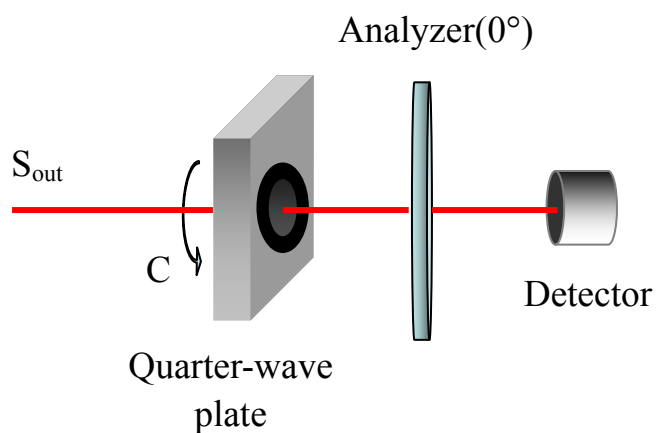


圖 4-2 常見的偏振態分析器(PSA)

常見偏光儀在 PSA 中使用的補波片相位延遲量以及方位角組合如下

年份	相位延遲量	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	EWV
1990[21]	90°	-45°	45°	67.5°	90°		36
1990[22]	90°	-22.5°	0°	22.5°	45°		92
1990	90°	-30°	0°	30°	60°		28
1990	90°	0°	67.5°	135°	202.5°		24.92
1995[16]	90°	-45°	0°	30°	60°		21.64
1995	90°	-90°	-45°	30°	60°		21.64
2007[24]	90°	0°	12.25°	22.5°	34.75°	135°	17.11

表 4-3 常見 PSA 系統的 EWV 值

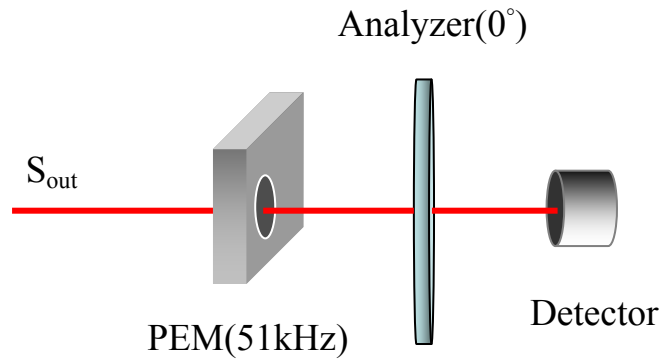


圖 4-3 本系統使用的偏振態分析器(PSA)

相較之下，我們所使用的 PSA 系統中 PEM 的時間相位 θ_p 與析光片的方位角 a 可以表示如下

年份	相位延遲量	(θ_{p1}, a)	(θ_{p2}, a)	(θ_{p3}, a)	(θ_{p4}, a)	EWV
2009	$2\pi\Delta_0 \sin \theta_p$	$(0^\circ, 0^\circ)$	$(0^\circ, -45^\circ)$	$(30^\circ, -45^\circ)$	$(90^\circ, -45^\circ)$	16

表 4-4 本系統的 EWV 值

這些特殊偏振態在龐加萊球面上的位置如下圖所示

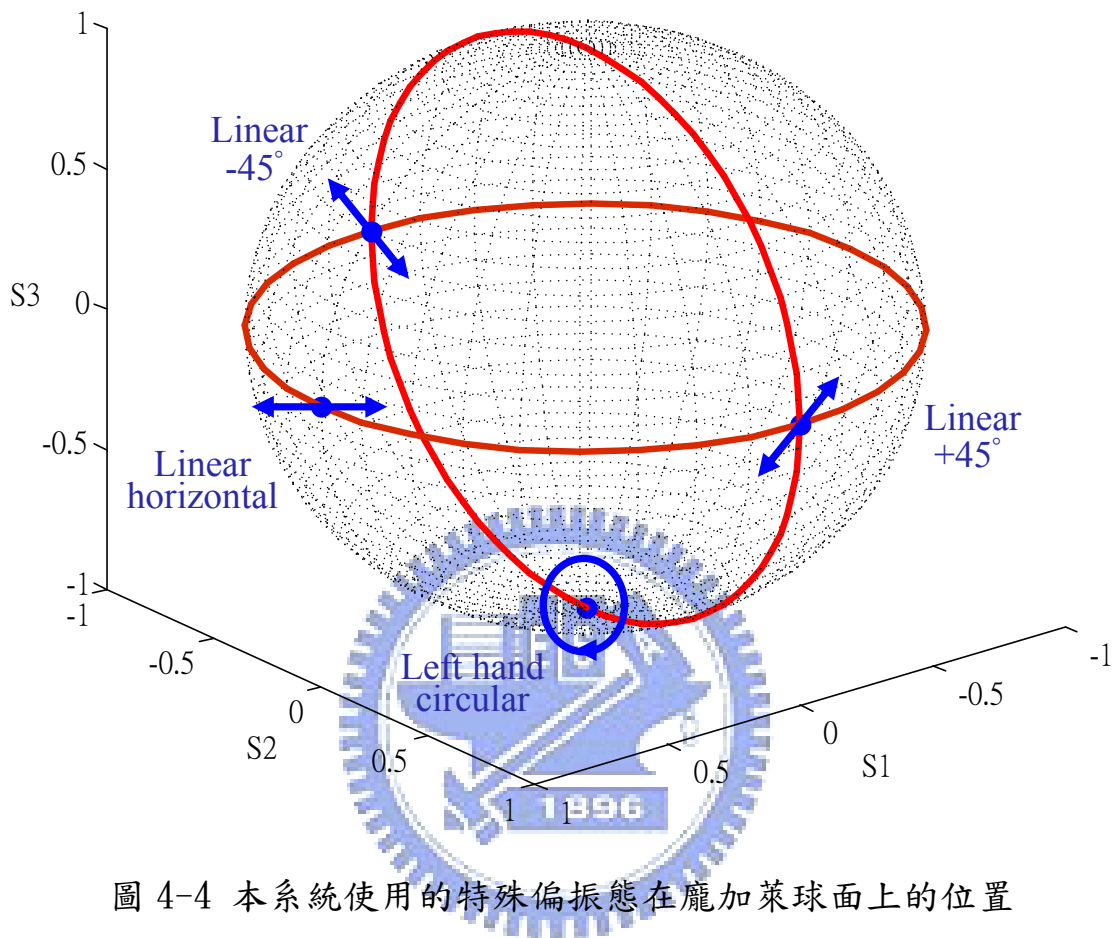


圖 4-4 本系統使用的特殊偏振態在龐加萊球面上的位置

當偏光片的方位角為 0° 時，其偏振態的軌跡隨著時間相位的改變沿著赤道移動；當偏光片的方位角為 -45° 時，其偏振態的軌跡會隨著時間相位的改變沿著子午線移動。本系統用來分析偏光參數的偏振態為線性水平偏振光、線性 $+45^\circ$ 偏振光、線性 -45° 偏振光以及左旋偏振光。以這些特殊偏振態分析待測參數的優點在於運算過程相對簡單，而且 EWW 值較於其他 PSA 系統為小，由表 4-3 以及表 4-4

的結果，可得知本系統的 EWV 值 16 低於所有其他 PSA 系統的 EWV 值。這也代表本系統的量測結果比較不易受到系統誤差的影響產生量測的不準確。

在以偏光片與四分之一波片所組成的 PSG 系統中，本系統選擇的入射偏振態擁有較大的行列式與較小的 2-norm 條件數。透過 EWV 分析系統中的 PSA，能以定量方式比較其相對訊號雜訊比，並且結果不會受到量測次數的影響，除此之外，EWV 也不會受到系統元件的限制而產生無法分析的情況。由於穆勒矩陣偏光儀無法以修正公式彌補量測誤差，本系統使得 PSG 以及 PSA 不論是在產生入射偏振態或是分析出射偏振態上，都產生相對較小的系統誤差，因此，得到較精確的測量結果是可預期的。



4.3 誤差分析

穆勒矩陣的偏差項與量測系統的關係可以表示如下：

$$\Delta M = W^{-1} \cdot \Delta I \cdot S_{in}^{-1} + W^{-1} \cdot \Delta W \cdot M + M \cdot \Delta S_{in} \cdot S_{in}^{-1} + W^{-1} \cdot \Delta W \cdot M \cdot \Delta S_{in} \cdot S_{in}^{-1} \quad (4-12)$$

由上式我們可以得知光強度、測量矩陣，與入射偏振態的誤差不但受到 W^{-1} 與 S_{in}^{-1} 的放大，也與樣品的穆勒矩陣 M 有關，當量測的穆勒矩陣不同，誤差項 ΔM 也會隨之改變，因此我們在分析誤差項時必須將不同待測樣品所產生的誤差分開討論。

由於本系統的光軸是以偏光片的方位角 p 作為參考的基準，因此 PSG 中影響量測結果的僅有四分之一波片的相位延遲量的不準確，由於本實驗室對方位角的校正誤差小於 0.02° ，因此方位角不會造成顯著的影響，我們可以將入射偏振態的誤差項表示為實際產生的偏振態 S_{in}' 與理論值 S_{in} 因相位延遲量的偏差量 x 導致的誤差 $\Delta S_{in}(x)$ 。

測量矩陣 W 的不準確項 ΔW 的影響來源包括 PEM 的時間相位 θ_p 以及析光片的方位角 a 。由於本實驗室對析光片方位角的校正誤差小於 0.02° ，此項變因可以忽略不計；而根據 3-3 節中的敘述，PEM 的時間相位 θ_p 的誤差範圍在 $\pm 0.92^\circ$ 之間，我們假設時間相位的偏差量為 y 。我們可以將 PSA 產生測量矩陣誤差項表示為測量矩陣 W' 與其理論值 W 因時間相位的偏差量 y 導致的誤差 $\Delta W(y)$ 光強度的偏差項 ΔI 來自於光源與光偵測器等無法確定的變化量，由於本實驗分析

的是平均之後的光強度值，因此，此項誤差可以被忽略不計。

以下我們以常見的樣品做為範例，模擬 PSG 以及 PSA 的不準確對穆勒矩陣各項參數的影響[25]。



4.3.1 樣本為空氣的誤差分析

空氣為典型的等向性材料，當量測的樣品為空氣時，穆勒矩陣的誤差項 ΔM 受到四分之一波片的相位延遲量的偏差量 x 以及 PEM 時間相位的偏差量 y 之間的關係請參照附錄 B，我們模擬 x 與 y 介於 $+3^\circ$ 與 -3° 之間時，量測到的穆勒矩陣與其理論值偏差量如下圖所示

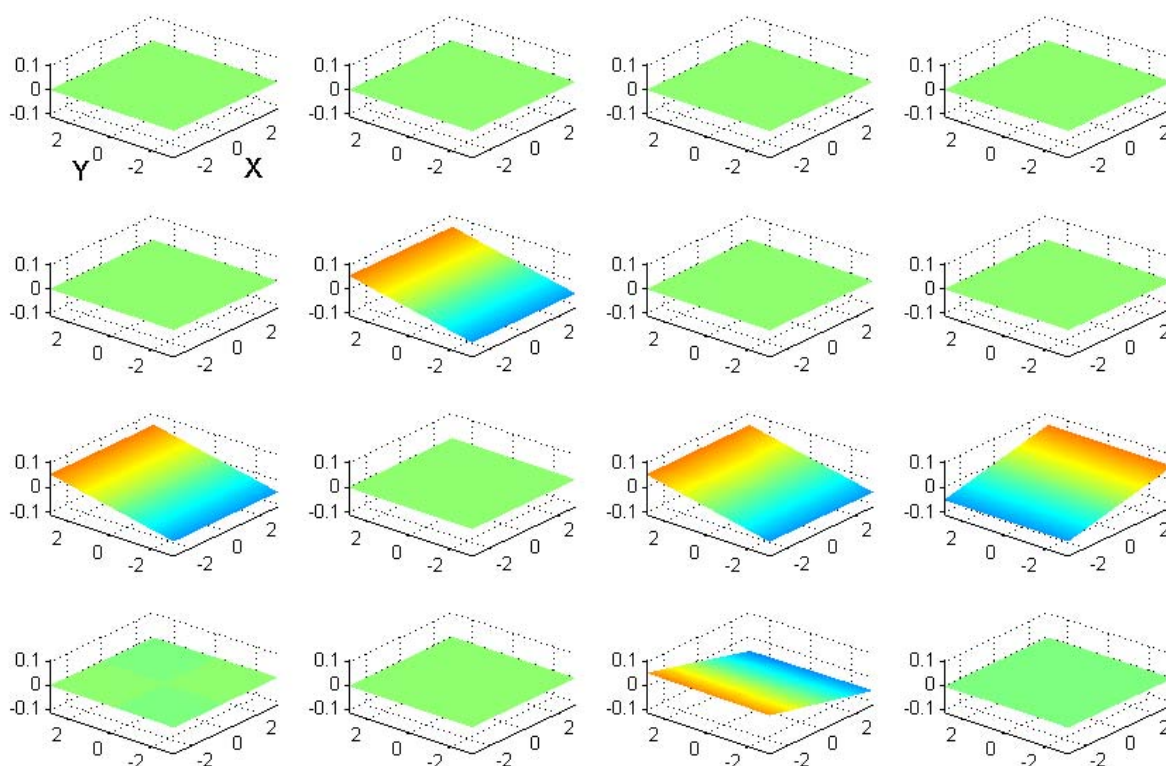


圖 4-5 空氣穆勒矩陣： x , 四分之一波片的相位延遲量的偏差量；

y , PEM 時間相位的偏差量

由此結果可以明顯的看出元件的偏差對於矩陣各元素的影響並不相同，因此我們無法透過空氣的量測結果，以參數補償的方式進行樣品量測結果的修正。

4.3.2 樣本為偏光片的誤差分析

偏光片為光學元件中具有線性二色性的典型範例，當量測的樣品為偏光片，且方位角與光軸夾 $+45^\circ$ 時，穆勒矩陣的誤差項 ΔM 受到四分之一波片的相位延遲量的偏差量 x 以及 PEM 時間相位的偏差量 y 之間的關係請參照附錄 B，我們模擬 x 與 y 介於 $+3^\circ$ 與 -3° 之間時，量測到的穆勒矩陣與其理論值偏差量如下圖所示

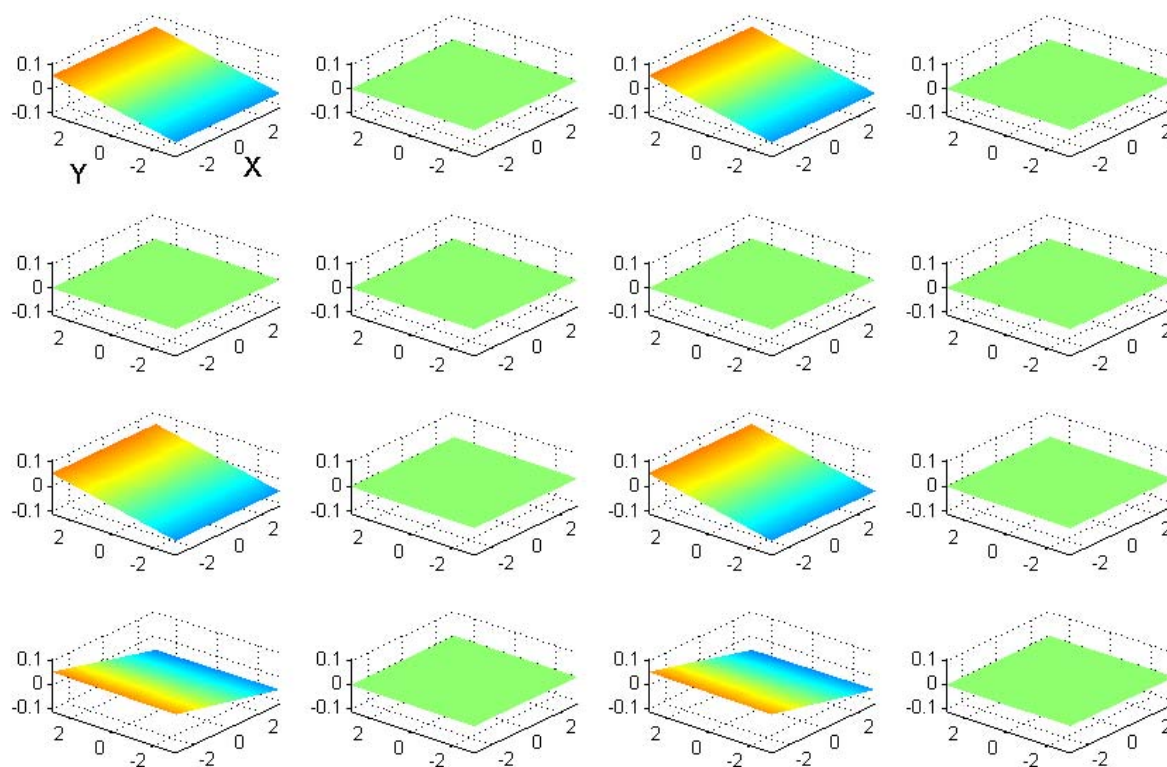


圖 4-6 偏光片的穆勒矩陣： x , 四分之一波片的相位延遲量的偏差量；

y , PEM 時間相位的偏差量

由圖 4-6，可以發現時間相位的偏差量 y 並不會影響量測結果，但當樣品為偏光片時， m_{00} 與 m_{20} 的偏差量會受到 PSG 以及 PSA 不準

確的影響，而這兩項元素又與偏光片的物理參數相關，因此，我們可以確定量測系統的不準確會影響偏光片的方位角以及消光比。



4.3.3 樣本為四分之一波片的誤差分析

補波片的偏光特性是其具有線性雙折射效應，當量測的樣品為四分之一波片，且方位角與光軸夾 45° 時，穆勒矩陣的誤差項 ΔM 受到四分之一波片的相位延遲量的偏差量 x 以及 PEM 時間相位的偏差量 y 之間的關係請參照附錄 B，我們模擬 x 與 y 介於 $+3^\circ$ 與 -3° 之間時，量測到的穆勒矩陣與其理論值偏差量如下圖所示

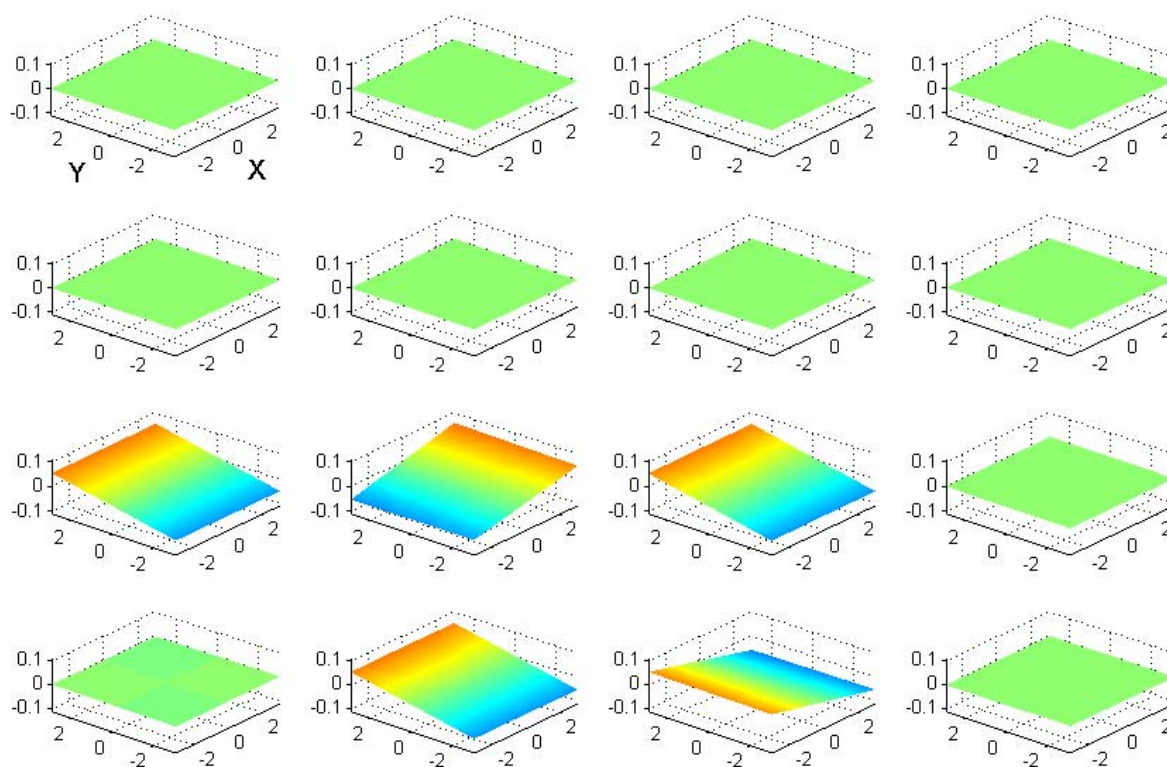


圖 4-7 四分之一波片的穆勒矩陣: x , 四分之一波片的相位延遲量的偏差量; y , PEM 時間相位的偏差量

同樣的，在量測四分之一波片時，其相位延遲量與方位角皆會受到偏差量的影響。

藉由比較具有等向性、線性二色性與線性雙折射效應的偏光元件，我們發現穆勒矩陣的量測值與系統中各項光學元件的不準確量之間的關係並非線性變化，各元素的誤差項與不準確量之間的關係並不固定，而是隨著樣品穆勒矩陣的改變而有所不同，例如在等向性的材料當中，穆勒矩陣的吸收項並不受到 x 值與 y 值的影響，但在具有線性二色性的材料當中，吸收項卻會受到明顯的影響。在缺乏共通性的情況下，我們無法利用各元件的誤差項找出特定的關係式對量測結果進行修正。同時，這也代表我們無法利用已知的量測結果作為修正未知穆勒矩陣的參考。為了提升量測的可靠度，我們需要將系統最佳化，以減少量測中各項誤差項對量測結果的影響程度[14, 15, 17-19]。

第五章 結論與未來展望

本實驗架構利用偏光片與四分之一波片的偏光特性，產生特定入射偏振態，並以 PEM 搭配析光片來分析出射光的偏振態。透過波形分析法分析經由數據擷取卡取得的光強度訊號，我們能夠鎖定 PEM 在特定時間相位下產生的特殊偏振態，運用此技術我們才得以克服由相位調變器的調變頻率過快導致的量測限制，並以特殊偏振態分析樣品的偏光特性與量測樣品完整的穆勒矩陣，因此本系統被稱為鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀。

在本實驗中，我們量測空氣、偏光片以及四分之一波片的穆勒矩陣，並與理論值相比較，證明了本系統分析各種偏光特性與樣品改變偏振態的能力。由於穆勒矩陣的準確度無法以矩陣內各元素與理論值之間的偏差大小評估，因此我們透過系統與量測結果之間的線性關係，描述量測系統的缺陷與矩陣中相對應的誤差項。然而在偏極光量測系統中，誤差項的大小會同時受到待測樣品的穆勒矩陣影響。我們以空氣、偏光片和四分之一波片模擬光學元件的方位角偏差如何影響穆勒矩陣中各項參數的偏差項，並證明我們無法利用已知的量測結果進行未知穆勒矩陣的誤差修正。最後，再利用等權重變異數、行列式以及條件數分別對量測系統中的 PSA 與 PSG 進行系統最佳化，以減

少微擾被系統經由量測過程放大，以證明透過本系統能夠得到可信賴的量測結果。

傳統的偏極光量測系統無法得到樣品全部的偏光特性，相較於其他偏極光量測系統，穆勒矩陣偏光儀能夠得到樣品完整的穆勒矩陣，透過偏振態的極分解，能將樣品的穆勒矩陣分解為由偏振光產生的吸收項 M_D 、延遲項 M_R 以及由非偏振光產生的去偏極化項 M_R ，避免去偏極化效應影響量測結果。另外，透過分別討論樣品的吸收、延遲與去偏極化效應，可以使各種偏光效應不會彼此干擾，增加量測結果的準確度。

相較於傳統的量測需要十五次的轉動，鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀以較少的元件旋轉次數(七次)即可達到穆勒矩陣的完整量測，此項優點可以使量測所需時間控制在兩分鐘之內。另外，本系統以波形分析法取代傳統量測系統使用的傅立葉分析，能以最少的量測資料數(十六個)完成穆勒矩陣的二維量測，因此更適合擴展至影像式偏光儀系統。

在文章的最後，我們展示了影像式穆勒矩陣偏光儀初步的量測結果，未來希望能提升量測的準確度以及速度，並將此鎖相式光彈調變穆勒矩陣偏光儀應用於樣品偏光性質的二維量測。

偏極光量測是透過分析樣品藉由穿透、反射，以及散射對入射光偏振態的改變程度，以得到樣品的物理參數，由於入射系統的偏振光皆為完全偏振光，因此出射光中包含的非偏振光是來自於樣品或是量測系統的不理想。在量測過程中，量測系統或是樣品所造成的多重反射、樣品厚度的不均勻，或是因為樣品表面的粗糙導致的漫射皆會產生非偏振光，這種非理想偏振光的產生稱為去偏極化效應 (Depolarization effect)[26]。此效應會導致待測參數受到非偏振光的影響，造成量測結果的不準確，尤其在生物材料等高散射介質之中，嚴重的去偏極化效應影響了樣品偏光特性的量測，因此我們以偏振態的極分解(polar decomposition)分析樣品的穆勒矩陣，將各項係數受到非偏振光影響的部分從穆勒矩陣中分離，減少去偏極化效應對量測結果的影響[27]。

偏振態的極分解能將樣品的穆勒矩陣分解為三個部份，包括(1)吸收項 (diattenuator) M_D ：描述樣品對於各種偏振光的吸收程度；(2)延遲項 (retardance) M_R ：描述樣品對各種偏振光產生的相位延遲量；以及(3)去極化項 (depolarizer) M_Δ ：受到非偏振光影響而產生的雜訊項。因此穆勒矩陣可以表示為

$$M = M_\Delta \cdot M_R \cdot M_D = \begin{bmatrix} 1 & \vec{D}^T \\ \vec{P} & m \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

其中吸收向量(diattenuation vector) \vec{D} 可以描述樣品對於各種偏振光的

吸收係數，被定義為

$$\vec{D} \equiv \left(\frac{m_{01}}{m_{00}}, \frac{m_{02}}{m_{00}}, \frac{m_{03}}{m_{00}} \right)^T \quad (5-2)$$

而偏振態向量(polarization vector)則是代表當非偏振光受到待測樣品

影響所產生的出射的偏振態，可以表示為

$$\vec{P} \equiv \left(\frac{m_{10}}{m_{00}}, \frac{m_{20}}{m_{00}}, \frac{m_{30}}{m_{00}} \right)^T \quad (5-3)$$

另外 m 為穆勒矩陣中 3 乘 3 的子矩陣(sub-matrix)。

由於吸收矩陣 M_D 僅受到穆勒矩陣中第一行係數 m_{00} 、 m_{01} 、 m_{02} 以及 m_{03} 的影響，因此吸收矩陣 M_D 可以表示為

$$M_D = \begin{bmatrix} 1 & \vec{D}^T \\ \vec{D} & m_D \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

其中 m_D 為 3 乘 3 的子矩陣，可以表示如下

$$m_D = \frac{\sqrt{1-D^2}I + (1-\sqrt{1-D^2})\vec{D}\vec{D}^T}{D^2} \quad (5-5)$$

在去除吸收項之後，穆勒矩陣可以表示為

$$M' = M \cdot M_D^{-1} = M_\Delta \cdot M_R \quad (5-6)$$

此時 M' 矩陣中不包含吸收項。由於量測結果中包含了非偏振光造成的影響，因此 M' 矩陣中包含了延遲項以及去極化項。

$$\begin{aligned} M_\Delta \cdot M_R &= \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{P}_\Delta & m_\Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & m_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{P}_\Delta & m_\Delta m_R \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{P}_\Delta & m' \end{bmatrix} = M' \end{aligned} \quad (5-7)$$

其中 m' 為矩陣 M' 的 3 乘 3 子矩陣，我們透過進一步的分解將去極化

矩陣 M_{Δ} 與延遲矩陣 M_R 分離。

$$m'(m')^T = m_{\Delta} m_R (m_{\Delta} m_R)^T = m_{\Delta}^2 \quad (5-8)$$

由於穆勒矩陣皆屬於厄米特矩陣(Hermitian matrix)，因此我們可以將子矩陣 m_{Δ}^2 進行矩陣對角化(diagonalization)並得到以下關係

$$m_{\Delta}^2 = V \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \cdot V^{-1} \quad (5-9)$$

則子矩陣 m_{Δ} 可以表示為

$$m_{\Delta} = V \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \cdot V^{-1} = V \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{bmatrix} \cdot V^{-1} \quad (5-10)$$

此子矩陣代表量測過程中非偏振光對於延遲項 M_R 的影響量。

另外，非偏振光對於吸收項 M_D 的影響量 \vec{P}_{Δ} 可以表示如下

$$\vec{P}_{\Delta} = \frac{\vec{P} - m\vec{D}}{1 - D^2} \quad (5-11)$$

最後，延遲矩陣 M_R 可以透過吸收矩陣 M_D 、去極化矩陣 M_{Δ} 以及量測到的穆勒矩陣 M 之間的關係得到。

$$M_R = M_{\Delta}^{-1} \cdot M \cdot M_D^{-1} \quad (5-12)$$

當樣品的線性二色性或是圓二色性十分顯著時，此時子矩陣 m' 的特徵值將會出現 0，這種奇異解(singular)將會導致 (5-12) 式不成立，此時偏振態的極分解將有其他的表示法[25]。

我們將空氣以及四分之一波片的實驗結果透過偏振態的極分

解，得到下列的結果

量測樣品：空氣 (air)			
$\begin{bmatrix} 1 & -0.0041 & 0.0140 & 0.0560 \\ -0.0109 & 1.0282 & -0.0011 & -0.0452 \\ 0.0039 & -0.0281 & 0.9750 & 0.0810 \\ -0.0067 & 0.0046 & -0.0867 & 1.0362 \end{bmatrix}$			
吸收矩陣 M_D (diattenuation matrix)	延遲矩陣 M_R (retardation matrix)		
$\begin{bmatrix} 1 & -0.0041 & 0.0140 & 0.0560 \\ -0.0041 & 0.9983 & 0 & -0.0001 \\ 0.0140 & 0 & 0.9984 & 0.0004 \\ 0.0560 & -0.0001 & 0.0004 & 0.9999 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9997 & 0.0136 & -0.0226 \\ 0 & -0.0117 & 0.9965 & 0.0828 \\ 0 & 0.0237 & -0.0825 & 0.9963 \end{bmatrix}$		
去極化矩陣 M_Δ (depolarization matrix)	$M_D \cdot M_R$		
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0041 & 1.0305 & 0.0167 & -0.0202 \\ 0.0144 & -0.0167 & 0.9979 & 0.0001 \\ -0.0637 & 0.0202 & 0.0001 & 1.0432 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -0.0041 & 0.0140 & 0.0560 \\ -0.0052 & 0.9980 & 0.0135 & -0.0227 \\ 0.0186 & -0.0117 & 0.9950 & 0.0832 \\ 0.0545 & 0.0235 & -0.0820 & 0.9962 \end{bmatrix}$		

表 5-1 以偏振態的極分解分析空氣的量測結果

透過偏振態的極分解，我們可以將去極化矩陣從量測結果中移除，得到由偏振光影響的量測結果 $M_D \cdot M_R$ ，比較表 5-1 中經過偏振態的極分解前後的結果，我們發現在 $M_D \cdot M_R$ 矩陣中，主軸上的各元素更接近 1，使量測結果更接近單位矩陣。另外，由於空氣沒有任何的偏光特性，我們得到的吸收、延遲以及去極化矩陣都接近單位矩陣。另外，經過 500 次量測結果所得到的各係數的標準差皆小於 0.012。

接著，我們將四分之一波片的量測結果以偏振態的極分解分析

待測樣品：四分之一波片(QW-plate)			
$\begin{bmatrix} 1 & 0.0374 & -0.0059 & 0.0177 \\ -0.0317 & 0.0093 & -0.0476 & -0.9766 \\ 0.0100 & 0.0457 & 1.0039 & -0.0049 \\ -0.0022 & 1.0241 & -0.0347 & 0.0698 \end{bmatrix}$			
吸收矩陣 M_D (diattenuation matrix)	延遲矩陣 M_R (retardation matrix)		
$\begin{bmatrix} 1 & 0.0374 & -0.0059 & 0.0177 \\ 0.0374 & 0.9998 & -0.0001 & 0.0003 \\ -0.0059 & -0.0001 & 0.9991 & -0.0001 \\ 0.0177 & 0.0003 & -0.0001 & 0.9993 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0400 & -0.0282 & -0.9988 \\ 0 & 0.0408 & 0.9988 & 0.0265 \\ 0 & 0.9984 & -0.0397 & 0.0411 \end{bmatrix}$		
去極化矩陣 M_Δ (depolarization matrix)	$M_D \cdot M_R$		
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0150 & 0.9776 & -0.0214 & -0.0281 \\ 0.0143 & -0.0214 & 1.0057 & 0.0051 \\ -0.0421 & -0.0281 & 0.0051 & 1.0285 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0.0374 & -0.0059 & 0.0177 \\ -0.0160 & 0.0397 & -0.0281 & -0.9981 \\ -0.0048 & 0.0407 & 0.9980 & -0.0266 \\ 0.0383 & 0.9982 & -0.0397 & 0.0414 \end{bmatrix}$		

表 5-2 以偏振態的極分解分析四分之一波片的量測結果

我們可以看出四分之一波片去極化矩陣與吸收矩陣都接近為單位矩陣，與空氣類似，然而在延遲矩陣上則有顯著的不同，由此可以看出四分之一波片具有顯著的相位延遲特性。透過延遲矩陣，我們利用 (3-22) 式求得樣品的相位延遲量為 87.70° ，更接近三亮度量測法的結果 87.80° ，証明了我們可以透過偏振態的極分解得到更精確的量測結果。而經過 500 次量測結果所得到的各係數的標準差皆小於 0.012。

透過穆勒矩陣的偏振態極分解，我們可以將樣品對偏振光的吸收、延遲以及去極化效應分別以吸收矩陣、延遲矩陣以及去極化矩陣進行個別的分析，使這些偏光特性不受其他性質的影響，因此，我們能夠得到更精確的物理參數，例如相位延遲量、方位角，或是消光比。另外，唯有得到樣品完整的穆勒矩陣，才能使用偏振態極分解將量測過程中產生的非偏振光項排除。因此，當我們的量測系統僅能得到橢圓偏光參數 Δ 與 Ψ 、史托克向量，或是不完整的穆勒矩陣時，是無法透過此關係除去量測結果中的非偏振光項。此特性使得穆勒矩陣偏光儀能夠完整的描述樣品的偏光特性。

在二維量測中，我們透過可程式化脈衝延遲產生器 (Programmable delay pulse generator)，將半導體雷射與 PEM 進行同步調制，以同步照射 (synchronous illumination) 的方式得到特定量測訊號，並利用改變脈衝延遲時間鎖定時間相位，以克服相位調變器過快的調變頻率造成系統上的限制。此系統如下圖所示

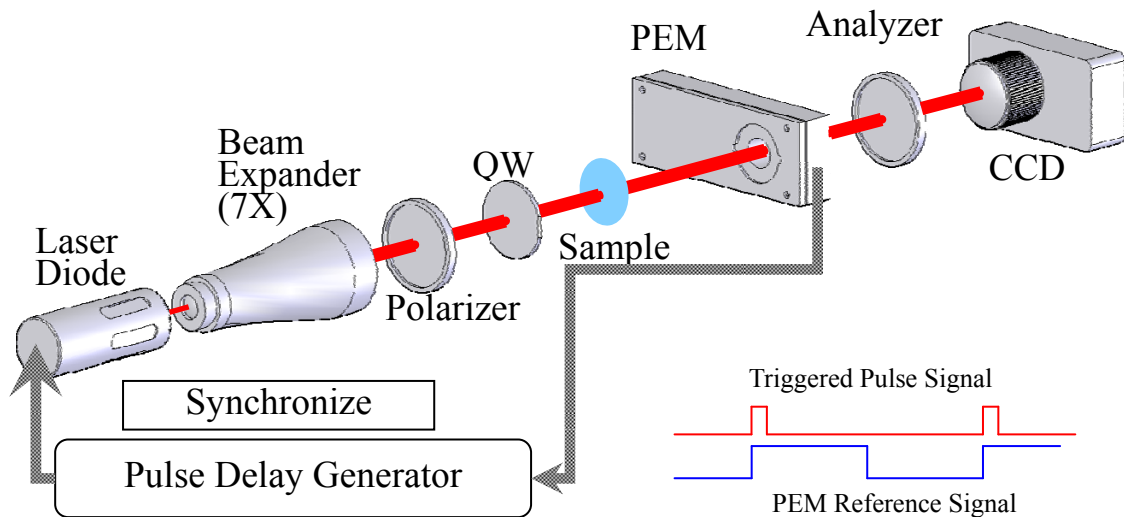


圖 5-1 影像式穆勒矩陣偏光儀系統

為了提升二維量測的精確度，我們引用偏振態的極分解將系統的偏光特性逐一分開，以提升量測的精確度。

我們以穆勒矩陣偏光儀量測長葉九宮隨著時間散失水分的過程。

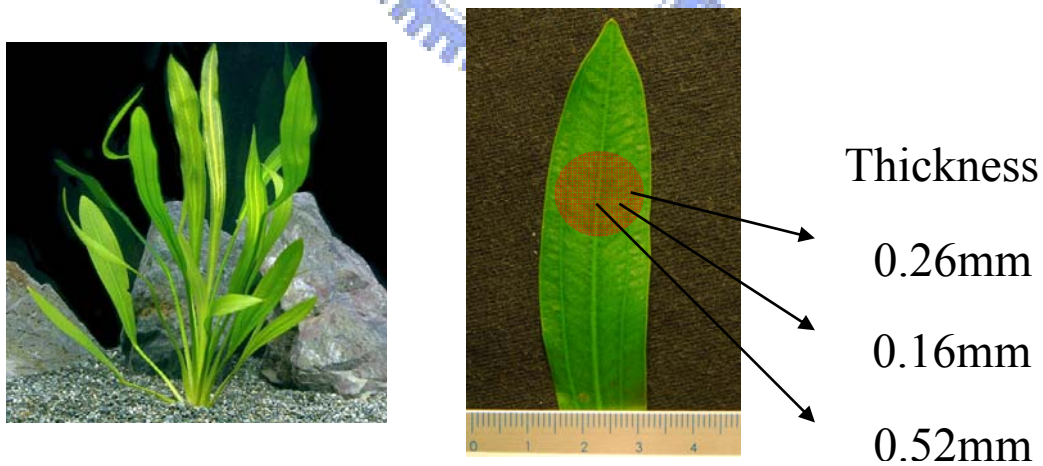


圖 5-2 長葉九宮

然而在量測過程中，樣品產生的散射效應會影響量測結果，因此

我們透過偏振態的極分解，觀察樣品相位延遲量的實際變化程度。

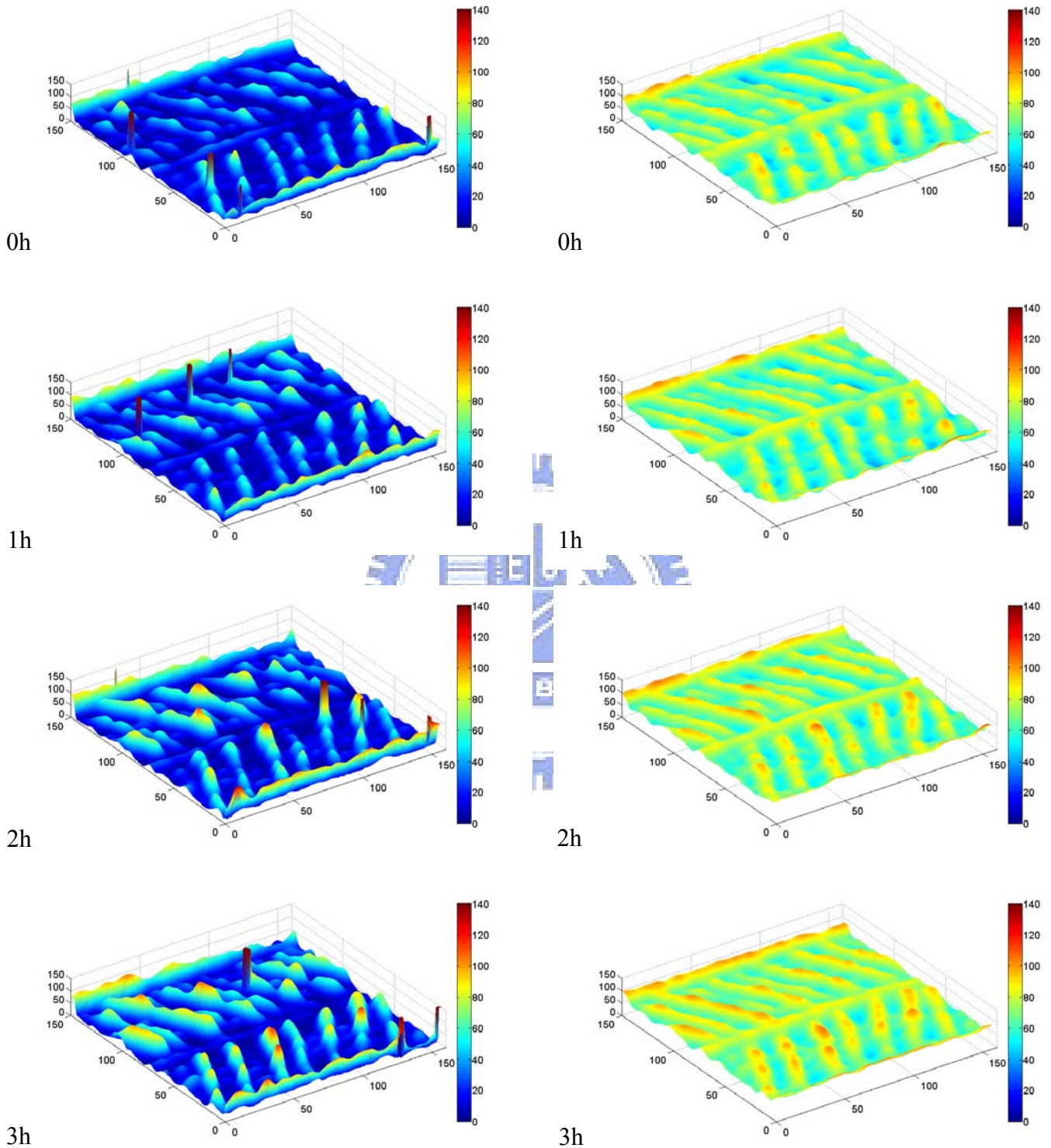


圖 5-3 相位延遲量隨時間的變化情形（左側為真正的相位延遲量，右側則包含去偏極化效應的相位延遲量）

樣品的相位延遲量隨著水份散失會逐漸增加，左側的結果為樣品真正的相位延遲量，而右側的結果則受到樣品的去偏極化效應影響，使相位延遲量比實際值略高。

我們以實際的量測結果，比較樣品的去偏極化效應對量測結果的影響，並證明穆勒矩陣偏光儀搭配偏振態的極分解可以避免散射效應造成量測的不準確。十分適合應用於生物材料的量測。



參考文獻

- [1] D. Goldstein, Polarized light, (Marcel Bekker, Inc.,2003).
- [2] P. S. Hauge, “Recent developments in instrumentation in ellipsometry,” Surf. Sci. 96, 108-140 (1980).
- [3] J. C. Kemp, “Piezo-optical birefringence modulators: new use for long-known effect,” J. Opt. Soc. Am. 8, 950 (1969).
- [4] R. M. A. Azzam, “A simple Fourier photopolarimeter with rotating polarizer and analyzer for measuring Jones and Mueller matrices,” Opt. Commun. 25 137-140 (1978).
- [5] P. S. Hauge, “Conventions and formulas for using the Mueller-Stokes calculus in ellipsometry,” Surf. Sci. 96, 81-107 (1980).
- [6] R. M. A. Azzam, “Photopolarimetric measurement of the Mueller matrix by Fourier analysis of a single detected signal,” Opt. Lett. 2, 148-150 (1978).
- [7] D. H. Goldstein and R. A. Chipman, “Error analysis of a Mueller matrix polarimeter,” J. Opt. Soc. Am. A, 7, 693-700 (1990).
- [8] R. Anderson, “Measurement of Mueller matrices,” Appl. Opt. 31, 11-13 (1992)
- [9] R. Barakat, “Conditions for the Physical Realizability of Polarization Matrices Characterizing Passive Systems,” J. Mod. Opt. 34, 1535-1544 (1987).
- [10] R. C. Thompson, S. E. Fry, and J. R. Bottiger, “Measurement of polarized light interactions via the Mueller matrix,” Appl. Opt. 19, 1323-1332 (1980).
- [11] B. Laude-Boulesteix, A. De Martino, B. Dre’ villon, and L. Schwartz, “Mueller polarimetric imaging system with liquid crystals,” Appl. Opt. 43, 2824-2832 (2004).
- [12] M. Le Doucen and P. Pellat-Finet, “Polarization properties and diffraction efficiencies of binary anisotropic gratings: general study and experiments on ferroelectric liquid crystals,” Opt. Commun. 151, 321-330, (1998).
- [13] Hinds instrument, “PEM-90 user manual.”
- [14] 陳智偉, “閃頻式橢圓偏光儀的校正與誤差分析,” 國立交通大學光電研究所九十六年碩士論文, 2007.
- [15] Y. F. Chao, W. C. Lee, C. S. Hung, and J. J. Lin, 1998, A three-intensity technique for polarizer-sample-analyzer photometric ellipsometry and polarimetry, J. Phys. D. Appl. Phys. 31, 1968-1974

- (1998).
- [16] D. S. Sabatke, M. R. Descour, E. Dereniak, W. C. Sweatt, S. A. Kemme, and G. S. Phipps, "Optimization of retardance for a complete Stokes polarimeter," *Opt. Lett.* 25, 802-804 (2000).
- [17] K. M. Twietmeyer and R. A. Chipman, "Optimization of Mueller matrix polarimeters in the presence of error sources," *Opt. Express* 16, 11589-11603 (2008).
- [18] A. Ambirajan and D. C. Look, "Optimum angles for a polarimeter: part I," *Opt. Eng.* 34, 1651-1655 (1995).
- [19] J. S. Tyo, "Design of optimal polarimeters: maximization of signal-to-noise ratio and minimization of systematic error," *Appl. Opt.* 41, 619-630 (2002).
- [20] I. J. Vaughn and B. G. Hoover, "Noise reduction in a laser polarimeter based on discrete waveplate rotations," *Opt. Express* 16, 2091-2108 (2008).
- [21] J. L. Pezzaniti and R. A. Chipman, "Imaging polarimeters for optical metrology," in *Polarimetry: Rader, Infrared, visible, Ultraviolet, and X-Ray*, SPIE 1317, 280-294, (1990).
- [22] F. M. Morgan, R. A. Chipman and D. G. Toor, "An ultra violet polarimeter for characterization of an imaging spectrometer," in *Polarimetry: Rader, Infrared, visible, Ultraviolet, and X-Ray*, SPIE 1317, 384-394, (1990).
- [23] D. S. Sabatke, M. R. Descour, E. Dereniak, W. C. Sweatt, S. A. Kemme, and G. S. Phipps, "Figure of merit for complete Stokes polarimeter optimization," *SPIE* 4133, 75-81, 2000
- [24] C. Chou, H. K. Teng, C. J. Yu and H. S. Huang "Polarization modulation imaging ellipsometry for thin film thickness measurement" *Opt. Commun.* 273, 74-83, (2007).
- [25] G. Piller, L. Broch, and L. Johann, "Experimental study of the systematic errors for a Mueller matrix double rotating compensator ellipsometer," *Phys. Stat. Sol. (c)* 5, 1027-1030 (2008)
- [26] H. Fujiwara, "Depolarization effect of samples," in *Spectroscopic ellipsometry principles and application*, (John Wiley & Sons, Ltd, 2007), pp. 139-141.
- [27] S. Y. Lu and R. A. Chipman, "Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition," *J. Opt. Soc. Am. A* 13, 1106-1113 (1996).
- [28] Meadowlark Optics, "Catalog of liquid crystal devices."

附錄 A：透過光強度求得穆勒矩陣

光偵測器所得到的光強度 I 如下

$$\begin{aligned}
 I(a, c, \theta_p) = & \frac{I_0}{4} \left\{ m_{00} - m_{02} \sin^2 2c - \frac{1}{2} m_{01} \sin 4c + \cos 2a (m_{10} - \frac{1}{2} m_{11} \sin 4c - m_{12} \sin^2 2c + m_{13} \cos 2c) \right. \\
 & + \frac{1}{2} \sin 2a [\cos(\pi \sin \theta_p) (2m_{20} - m_{21} \sin 4c - 2m_{22} \sin^2 2c) \\
 & \quad \left. + \sin(\pi \sin \theta_p) (2m_{30} - m_{31} \sin 4c - 2m_{32} \sin^2 2c)] \right. \\
 & \left. + \cos 2c [m_{03} + \sin 2a (m_{23} \cos(\pi \sin \theta_p) + m_{33} \sin(\pi \sin \theta_p))] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{A-1}$$

取得的 16 組光強度與元件方位角以及時間相位的關係為

PSG\PSA	$(0^\circ, 0^\circ)$	$(-45^\circ, 0^\circ)$	$(-45^\circ, 30^\circ)$	$(-45^\circ, 90^\circ)$
$(-45^\circ, 15^\circ)$	I_4	I_5	I_6	I_7
$(-45^\circ, -15^\circ)$	I_3	I_{10}	I_9	I_8
$(-45^\circ, -45^\circ)$	I_2	I_{11}	I_{12}	I_{13}
$(-45^\circ, -90^\circ)$	I_1	I_{16}	I_{15}	I_{14}

表 A-1 光強度與元件的空間與時間相位

穆勒矩陣的各元素與出射光強度的關係如下

$$m_{01} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-I_5 - I_7 + I_8 + I_{10}) \tag{A-2a}$$

$$m_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}} (I_5 - I_7 + I_8 - I_{10}) \tag{A-2b}$$

$$m_{31} = \frac{1}{\sqrt{3}}(I_5 + 2I_6 - I_7 + I_8 - 2I_9 - I_{10}) \quad (\text{A-2c})$$

$$m_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2I_3 - 2I_4 + I_5 + I_7 - I_8 - I_{10}) \quad (\text{A-2d})$$

$$m_{00} = (-1 + \frac{2}{\sqrt{3}})(I_5 + I_7 + I_8 + I_{10} - \frac{1}{2}(I_{11} + I_{13}) + \sqrt{3}(I_{14} + I_{16})) \quad (\text{A-2e})$$

$$m_{20} = (-1 + \frac{2}{\sqrt{3}})(-I_5 + I_7 + I_8 - I_{10} + \frac{1}{2}(I_{11} - I_{13}) + \sqrt{3}(I_{14} - I_{16})) \quad (\text{A-2f})$$

$$m_{10} = (-1 + \frac{2}{\sqrt{3}})(2\sqrt{3}I_1 - I_2 + 2I_3 + 2I_4) - m_{00} \quad (\text{A-2g})$$

$$m_{30} = (-1 + \frac{2}{\sqrt{3}})(-2I_6 - 2I_9 + I_{12} - 2\sqrt{3}I_{15}) + m_{00} \quad (\text{A-2h})$$

$$m_{02} = -\frac{1}{2}(I_{11} + I_{13}) + m_{00} \quad (\text{A-2i})$$

$$m_{22} = \frac{1}{2}(I_{11} - I_{13}) + m_{20} \quad (\text{A-2j})$$

$$m_{12} = -2I_{12} + \frac{1}{2}(I_{11} + I_{13}) + m_{10} \quad (\text{A-2k})$$

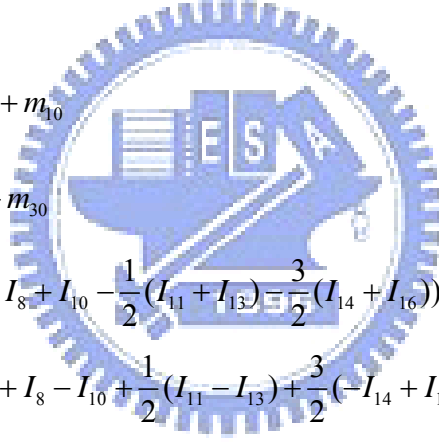
$$m_{32} = 2I_{12} - \frac{1}{2}(I_{11} + I_{13}) + m_{30} \quad (\text{A-2l})$$

$$m_{03} = (-1 + \frac{2}{\sqrt{3}})(I_5 + I_7 + I_8 + I_{10} - \frac{1}{2}(I_{11} + I_{13}) - \frac{3}{2}(I_{14} + I_{16})) \quad (\text{A-2m})$$

$$m_{23} = (-1 + \frac{2}{\sqrt{3}})(-I_5 + I_7 + I_8 - I_{10} + \frac{1}{2}(I_{11} - I_{13}) + \frac{3}{2}(-I_{14} + I_{16})) \quad (\text{A-2n})$$

$$m_{13} = (-1 + \frac{2}{\sqrt{3}})(-3I_1 - I_2 + 2I_3 + 2I_4) - m_{03} \quad (\text{A-2o})$$

$$m_{33} = (-1 + \frac{2}{\sqrt{3}})(-2I_6 - 2I_9 + I_{12} + 3I_{15}) + m_{03} \quad (\text{A-2p})$$



附錄 B：空氣的穆勒矩陣誤差項

$$\Delta m_{00} = 0 \quad (\text{B-1a})$$

$$\Delta m_{01} = 0 \quad (\text{B-1b})$$

$$\Delta m_{02} = 0 \quad (\text{B-1c})$$

$$\Delta m_{03} = 0 \quad (\text{B-1d})$$

$$\Delta m_{10} = 0 \quad (\text{B-1e})$$

$$\Delta m_{11} = \sin x \quad (\text{B-1f})$$

$$\Delta m_{12} = 0 \quad (\text{B-1g})$$

$$\Delta m_{13} = 0 \quad (\text{B-1h})$$

$$\Delta m_{20} = \sin x \cos y \quad (\text{B-1i})$$

$$\Delta m_{21} = 0 \quad (\text{B-1j})$$

$$\Delta m_{22} = (1 + \sin x) \cos y - 1 \quad (\text{B-1k})$$

$$\Delta m_{23} = \cos x \sin y \quad (\text{B-1l})$$

$$\Delta m_{30} = -\sin x \sin y \quad (\text{B-1m})$$

$$\Delta m_{31} = 0 \quad (\text{B-1n})$$

$$\Delta m_{32} = -(1 + \sin x) \sin y \quad (\text{B-1o})$$

$$\Delta m_{33} = \cos x \cos y - 1 \quad (\text{B-1p})$$



附錄 C：偏光片的穆勒矩陣誤差項

$$\Delta m_{00} = \sin x \quad (\text{C-1a})$$

$$\Delta m_{01} = 0 \quad (\text{C-1b})$$

$$\Delta m_{02} = \sin x \quad (\text{C-1c})$$

$$\Delta m_{03} = 0 \quad (\text{C-1d})$$

$$\Delta m_{10} = 0 \quad (\text{C-1e})$$

$$\Delta m_{11} = 0 \quad (\text{C-1f})$$

$$\Delta m_{12} = 0 \quad (\text{C-1g})$$

$$\Delta m_{13} = 0 \quad (\text{C-1h})$$

$$\Delta m_{20} = (1 + \sin x) \cos y - 1 \quad (\text{C-1i})$$

$$\Delta m_{21} = 0 \quad (\text{C-1j})$$

$$\Delta m_{22} = (1 + \sin x) \cos y - 1 \quad (\text{C-1k})$$

$$\Delta m_{23} = 0 \quad (\text{C-1l})$$

$$\Delta m_{30} = -(1 + \sin x) \sin y \quad (\text{C-1m})$$

$$\Delta m_{31} = 0 \quad (\text{C-1n})$$

$$\Delta m_{32} = (1 + \sin x) \sin y \quad (\text{C-1o})$$

$$\Delta m_{33} = 0 \quad (\text{C-1p})$$



附錄 D：四分之一波片的穆勒矩陣誤差項

$$\Delta m_{00} = 0 \quad (D-1a)$$

$$\Delta m_{01} = 0 \quad (D-1b)$$

$$\Delta m_{02} = 0 \quad (D-1c)$$

$$\Delta m_{03} = 0 \quad (D-1d)$$

$$\Delta m_{10} = 0 \quad (D-1e)$$

$$\Delta m_{11} = 0 \quad (D-1f)$$

$$\Delta m_{12} = 0 \quad (D-1g)$$

$$\Delta m_{13} = 0 \quad (D-1h)$$

$$\Delta m_{20} = \sin x(\cos y + \sin y) \quad (D-1i)$$

$$\Delta m_{21} = 0 \quad (D-1j)$$

$$\Delta m_{22} = (1 + \sin x)(\cos y + \sin y) \quad (D-1k)$$

$$\Delta m_{23} = 1 - \cos x \cos y \quad (D-1l)$$

$$\Delta m_{30} = \sin x(\cos y - \sin y) \quad (D-1m)$$

$$\Delta m_{31} = 0 \quad (D-1n)$$

$$\Delta m_{32} = (1 + \sin x)(\cos y - \sin y) - 1 \quad (D-1o)$$

$$\Delta m_{33} = \cos x \sin y \quad (D-1p)$$

