

國立交通大學  
光電工程研究所

碩士論文

調變 a 面氮化鎵銦/氮化鎵光子晶體極化特  
性以增強自發性輻射



**Manipulative Polarization of a-plane  
InGaN/GaN Photonic Crystals for  
Enhanced Spontaneous Emission**

研究生：李彥群

指導教授：余沛慈教授

中華民國九十九年七月

調變 a 面氮化鎵銦/氮化鎵光子晶體極化特性以增強自發性輻射

**Manipulative Polarization of a-plane InGaN/GaN Photonic  
Crystals for Enhanced Spontaneous Emission**

研究生:李彥群

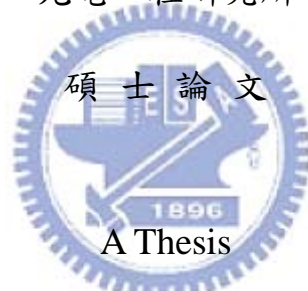
Student: Yen-Chun Lee

指導教授:余沛慈 教授

Advisor: Prof. Pei-Chen Yu

國立交通大學

光電工程研究所



Submitted to Department of Photonic

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

In

Electro-Optical Engineering

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年七月

# 調變 a 面氮化鎵銦/氮化鎵光子晶體極化特性以增強自發性輻射

## Manipulative Polarization of a-plane InGaN/GaN Photonic Crystals for Enhanced Spontaneous Emission

研究生: 李彥群

指導教授: 余沛慈 教授

交通大學光電工程研究所

### 摘要

本論文主要是在探討，利用光子晶體微共振腔的特性提高非極性氮化鎵銦/氮化鎵量子井的自發輻射。在一般的假設下，自發性輻射速率的提高可以使用 Purcell factor 來定義，而 Purcell factor 在定義上只與共振腔共振模態的品質因子(Quality factor)與等效模態體積(effective modal volume)有關，本研究從費米黃金定律(Fermi golden rule)出發推導 Purcell factor，推導的過程中發現，自發輻射速率的增強除了與品質因子(Q-factor)以及等效膜態體積(effective modal volume) ( $V_m$ ) 有關外，還與光源的自發輻射以及共振模態的極化特性有關。

本文分兩大部分討論，第一部份討論光子晶體共振腔的設計，我們討論光子晶體共振腔的空氣柱的調變對品質因子(Q-factor)、共振模態的等效膜態體積( $V_m$ ) 以及共振模態的極化特性的影響，並藉由空氣柱的調變將光子晶體共振腔做最佳化設計；第二部分討論 a-plane 氮化鎵銦/氮化鎵單一量子井隨著調整不同的銦含量與量子井的厚度，其自發輻射的電場極化特性將會有所改變，我們考慮自發輻射與共振模態的極化特性計算得到自發輻射增強因子(Spontaneous emission enhancement factor, SpE factor)，與 Purcell factor 做比較，最後我們發現到在當自發輻射在低極化率下必須將 Purcell factor 因子做修正，而在高極化率的情況下 SpE-factor 會與 Purcell factor 非常地接近。

調變 a 面氮化鎵銦/氮化鎵光子晶體極化特性以增強自發性輻射

## Manipulative Polarization of a-plane InGaN/GaN Photonic Crystals for Enhanced Spontaneous Emission

Student: Yen Chun Lee

Advisors: Prof. Pei-chen Yu

Institute of Electro-Optical Engineering

National Chiao Tung University

### Abstract

In this article, we discussed the utilization of photonic crystal microcavity for the enhancement of spontaneous emission rate of the a-plane InGaN/GaN single quantum well by reducing threshold power of laser. In general assumption, spontaneous emission rate enhancement factor can be defined by Purcell factor, and Purcell factor is proportional to the quality factor of photonic crystal microcavity and inversely-proportional to effective modal volume of cavity mode. We derived the Purcell factor from Fermi golden rule. During the deriving process, we found the spontaneous emission rate enhancement factor is not only related to the quality factor and effective modal volume of cavity mode but also polarization characteristic of spontaneous emission rate and cavity mode.

In the first of the thesis, we discussed the influence of the quality factor, effective modal volume and polarization characteristic of cavity mode by tuning air holes of photonic crystal microcavity. And we optimize the photonic crystal microcavity by tuning air hole. In the second part, we discuss the variation of polarization characteristic of spontaneous emission rate of a-plane InGaN/GaN single quantum well by different indium composition and quantum well width. Finally, the calculated spontaneous emission enhancement factor considering polarization characteristic of spontaneous emission rate and cavity mode was

compared with Purcell factor. We found the value of spontaneous emission enhancement factor in high polarization was closed to Purcell factor but the Purcell factor in low polarization ratio needed to be revised.

Keywords : photonic crystal microcavity, nonpolar, a-plane, InGaN , GaN, quantum well, spontaneous emission rate enhancement factor, Purcell factor, Polarization ratio.



## 誌 謝

時光飛逝，兩年的碩士班生活就這樣一轉眼的就過去了，回想兩年前剛踏進交大校園時興奮的心情，從什麼都不懂的碩一新生，到碩二迎接新進的學弟妹，而現在即將帶著畢業證書離開學校踏入人生的下一個旅程，在這兩年的碩士生活，有歡笑，有憂愁，有挫折，有快樂，這中間都要感謝家人，老師，學長，同屆和學弟妹的扶持陪伴與鼓勵，才能讓我順利走完這兩年。

首先謝謝我的指導教授余沛慈老師，謝謝老師這兩年對我的包容與指導，當我每每遇到困難時，老師都能不厭其煩的給我方向與我討論，並且訓練我以正確的邏輯與嚴謹的方法自我學習以及解決問題的能力，這對我在未來的人生上會有莫大的幫助；感謝台灣大學光電元件模擬實驗室的吳育任教授以及黃泓勛學長，由於老師與學長的協助讓我能順利完成學業與研究，感謝學長在我遇到問題時都能夠給予幫助與建議；謝謝瑞晉學長，感謝你在我進入實驗室時給我的關懷與照顧，學長在我對程式語言一竅不通的時候給予我協助與教導，讓我在往後的研究生活中能夠順利度過，謝謝家華學長在這兩年聽我瘋狂的囉說，並且給予我對於研究態度的建議，謝謝亭綱學長，你是我的攝影的師父，這兩年感謝你承受我毫無邏輯性的發言，謝謝閔安學長在研究上和羽球上的指導，讓我在研究所還有人可以一起打羽球，我的同屆，正宇、小邱，感謝你們這兩年的陪伴與照顧，因為有你們的陪伴，一路走來我不會感到孤單，在研究上因為有你們不斷向前奔跑，當我遇到挫折時，有動力與勇氣繼續往前邁進，很高興能認識你們，希望以後的人生你們能更加順利。謝謝翁翁，你的出現讓我在光子晶體的研究上找到了一起奮戰的朋友，也謝謝 Joseph、永吉、祥淇、阿飛、阿祥、獸皇、小新、依寧、惟雯、大偉、哭哭、以及所有其他博士班的學長，因為認識大家讓我的生活互多采多姿，閔翔你是個優秀的人材，祝福你順利申請到你心目中理想的學校，峰瑜，冠霖，大頭，kaka，碩二的生活是相當辛苦的，希望你們能夠堅持下去，這一年謝謝你們的陪伴。

在這邊我也要感謝我的大學好朋友，岳民，佳翰，明璽，宜育，因為有你們的經驗讓我在碩士生涯中相對順利，在我遭遇到挫折時，有你們的關心與協助，給予了我莫大的支持真的非常的感謝你們。

最後我要感謝我的家人，總在我背後支持我，鼓勵我，讓我沒有後顧之憂，專心在課業與研究上奮鬥，你們的養育之恩是我沒有辦法回報的。

學生 彥群 2010.07

# 目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要 .....	ii
誌謝.....	iv
目錄.....	v
圖目錄.....	vii
表目錄.....	x
<b>第一章 緒論</b> .....	<b>1</b>
1-1 三族氮化物材料簡介.....	1
1-1-1 三族氮化材料(III-nitride material)基本特性.....	1
1-1-2 III-nitride material InGaN/GaN 量子井(Quantum well)特性.....	2
1-1-3 極性與非極性InGaN/GaN量子井.....	3
1-2 自發輻射與光子晶體.....	4
1-2-1 自發輻射.....	4
1-2-2 光子晶體.....	5
1-2-3 二維光子晶體共振腔.....	8
1-3 研究動機.....	10
<b>第二章 原理與計算方法</b> .....	<b>12</b>
2-1 光子晶體能帶理論.....	12
2-2 有限時域插分法 Finte different time domen (FDTD).....	16
2-3 自發輻射與共振腔.....	18
2-3-1 半導體雷射基本原理.....	18
2-3-2 共振腔特性.....	20
2-3-3 自發輻射控制.....	22

<b>第三章 光子晶體共振腔設計與調變</b> .....	27
3-1 光子晶體共振腔結構設計.....	27
3-2 qL2光子晶體共振腔調變.....	33
3-2-1 qL2共振腔水平空氣柱調變.....	33
3-2-1.1 共振模態波長分析.....	34
3-2-1.2 共振模態等效模態體積與Q-factor分析.....	36
3-2-1.3 共振模態電場分析.....	42
3-2-2 qL2 共振腔垂直空氣柱調變.....	44
<b>第四章 A-plane InGaN/GaN SQW自發輻射控制</b> .....	51
4-1 a-plane InGaN/GaN SQW 極化光特性分析.....	51
4-2 a-plane InGaN/GaN SQW 自發輻射增強結果與討論.....	55
4-2-1 自發輻射增強因子與Purcell factor之比較.....	55
4-2-2 自發輻射增強因子與極化率之關係.....	58
<b>第五章 結論未來展望</b> .....	61
<b>參考文獻</b> .....	62





## 圖目錄

圖1-1 氮化鎵 wurtzite 結構.....	1
圖1-2 III-nitride的能隙對晶格常數關係圖.....	2
圖1-3 (a) 同值介面結構 (b)異質介面結構.....	3
圖1-4 (a) GaN 分子結構示意圖 (b) QCSE效應.....	5
圖1-5 光子晶體週期結構示意圖.....	6
圖1-6 能帶邊緣型光子晶體雷射.....	7
圖1-7 線缺陷光子晶體結構圖.....	7
圖1-8 點缺陷光子晶體結構圖.....	8
圖1-9 光學共振腔.....	8
圖1-10 二維共振腔型光子晶體雷射的造結構.....	9
圖2-1 電子能帶與光子能帶形成示意圖.....	12
圖2-2 光子晶體能帶圖.....	16
圖2-3 Yee lattice 示意圖.....	18
圖2-4 半導體雷射模型.....	19
圖2-5 二能階模型示意圖.....	19
圖2-6 受激輻射增強示意圖.....	20
圖2-7 柱波形成示意圖.....	21
圖2-8 共振譜線.....	21
圖2-9 電偶極距輻射示意圖.....	23
圖2-10 光子態密度示意圖.....	24
圖3-1 H1, L3, qL2 共振腔的共振模態.....	28
圖3-2 L3共振腔微調 Q-factor與 $V_m$ 對空氣柱的位移量變化.....	31
圖3-3 qL2 共振腔微調.....	33
圖3-4 光子晶體共振腔模擬結構.....	34

圖3-5 水平調變共振模態變化示意圖.....	35
圖3-6 共振波長對R'關係圖.....	36
圖3-7 Mode-a mode-b 能量侷限示意圖.....	36
圖3-8 共振模態Q值與等效模態體積對R'關係圖.....	37
圖3-9 動量守恆全反射示意圖.....	38
圖3-10 電場邊界條件變化與動量變化分布圖.....	38
圖3-11 qL2共振腔mode-a Ey電場強度在動量空間的分布(R'=0.1).....	39
圖3-12 R'縮減調變的電場水平動量分布圖.....	40
圖3-13 mode-a Ey電場剖面圖.....	41
圖3-14 電場能量對R'關係圖.....	42
圖3-15 光子晶體等效布拉格反射鏡示意圖.....	42
圖3-16 mode-b Ex電場剖面圖.....	43
圖3-17 光子晶體經由90度旋轉，電場極化方向互換示意圖.....	44
圖3-18 MqL2共振腔.....	45
圖3-19 共振波長對r'關係圖.....	46
圖3-20 mode-a電場能量對r'關係圖.....	46
圖3-21 mode-a Ex電場截面圖.....	46
圖3-22 mode-a 與 mode-b Q-factor 與 Vm 對r'的關係圖.....	47
圖3-23 r'縮減調變的電場水平動量分布圖.....	48
圖3-24 mode-a 改變厚度(d)對波長、Q-factor、Vm關係圖.....	49
圖3-25 共振模態 mode-a 對 r'與R' 變化的關係.....	50
圖4-1 self-consistent model 計算流程圖.....	52
圖4-2 c-plane與a-plane InGaN bulk 價帶能帶結構圖.....	53
圖4-3 c-plane與a-plane InGaN/GaN SQW 自發輻射速率頻譜.....	53
圖4-4 a-plane InGaN/GaN SQW 極化率與能帶分裂能量差.....	54
圖4-5 MqL2光子晶體共振腔光子態密度.....	56

圖4-6 自發性輻射增強因子(Spontaneous Emission Enhancement factor )V.S  $r'$ 與 $R'$ .....57

圖4-7 GaN, InGaN 色散關係圖( $n(\lambda)$ ).....58

圖4-8 波長、Q-factor 以及 $V_m$  對晶格常數的變化.....59

圖4-9 SpE factor 與 Purcell 對 In含量的變化.....59

圖4-10 SpE factor對量子井厚度與In的比例的變化.....60



## 表 目 錄

表1-1 Wurtzite structure AlN, GaN, InN 特性.....	2
表2-1 薛丁格方程式與馬克斯威爾方程式.....	13
表3-1 H1, L3, qL2 共振模態特性.....	29
表3-2 H1, L3, qL2 共振腔比較.....	32
表3-3 MqL2共振腔優化結果.....	47



# 第一章 序論

## 1-1 三族氮化物材料簡介

### 1-1-1 三族氮化物材料(III-nitride material)基本特性

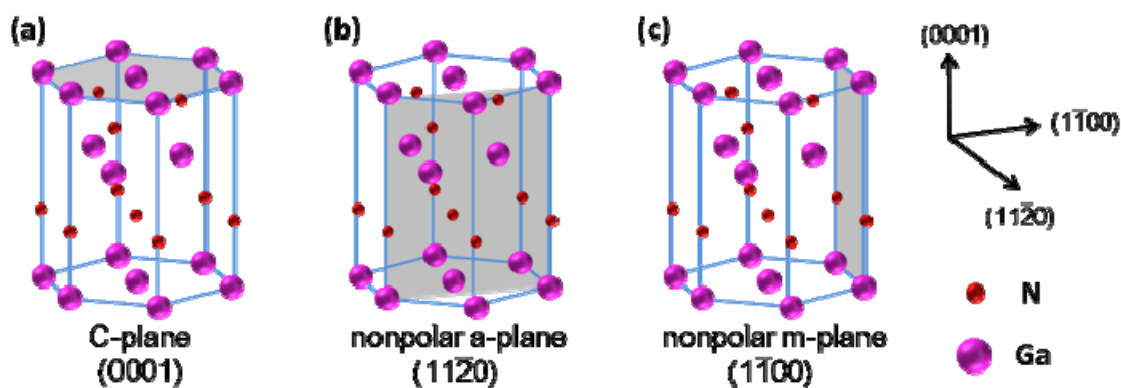


圖 1-1 氮化鎵 wurtzite structure

(a) 極性 c-plane、(b) 非極性 a-plane、(c) 非極性 m-plane

現今的三五族半導體合金半導體材料大部份的結構都是以鋅閃結構(zinc-blende structure) [1]的形式出現在我們的世界中，其中以紅光材料砷化鎵 (GaAs)最具代表性。還有一部分的合金半導體，其結構以三、七、三，堆疊而成的六角對稱的柱狀結構(hexagonal structure)，稱為鎢材結構(wurtzite structure) [2]，見圖1-1從45°角看 wurtzite structure 時，相當接近 zincblende structure 但是由於在空間上主軸的定義與比例有所差異，一搬來說還是將 wurtzite structure 規範在 hexagonal structure 中，而在 hexagonal structure 中定義空間中的座標系主要有三個方向，c-面 (c-plane) (0001)、a-面 (a-plane) ( $11\bar{2}0$ ) 以及 m-面 (m-plane) ( $1\bar{1}00$ )，圖1-1-(a)~1-1-(c)，而這樣結構的合金半導體，大部分為三族氮化物 (III-nitride) 合金半導體，而 III-nitride 合金半導體 wurtzite structure 以 氮化鎵 (GaN)、氮化鋁 (AlN) 以及氮化銦 (InN) 最為常見應用與研究，其主要原因除了這三種材料都為直接能隙(direct band gap) 外，還有它們的能隙差距相當大，見表 1-1 [3]，InN 0.77 eV、GaN 3.4 eV、AlN 6.3 eV，由於這個原因，再搭配不同比例的 鋁 (Al)、銦 (In)、鎵 (Ga)

表1-1 wurtzite structure AlN、GaN、InN 特性			
III-nitride	AlN	GaN	InN
<b>Band gap (eV)</b>	6.28	3.425	0.77
<b>Lattice constant a (Å)</b>	3.112	3.191	3.545
<b>Lattice constant c (Å)</b>	4.982	5.185	5.803
<b>Refractive index near <math>E_g</math></b>	2.15	2.5	2.9

其利用 direct band gap 所發出的光，其波長可從遠紅外光 (1550nm) 至紫外光 (200nm)，見圖1-2，因此氮化物材料在「發光二極體」(light emitting diodes)(LEDs)、「雷射」(Laser diodes)(LDs)、「光偵測器」(photodetectors) 等半導體光電元件上被廣泛應用與研究討論。

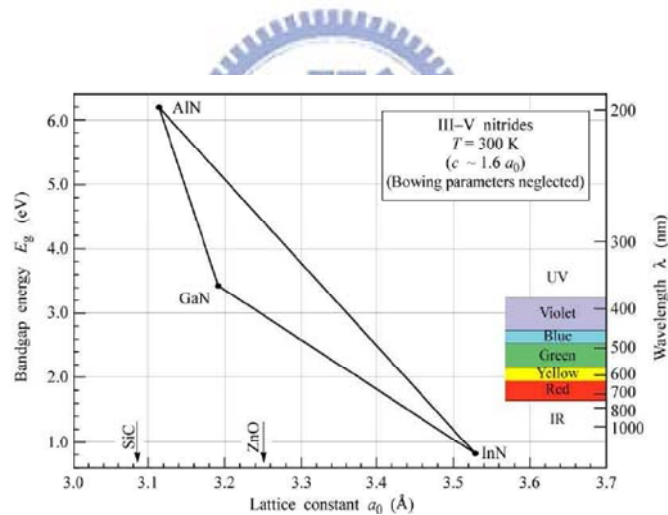


圖 1-2 III-nitride 的能隙對晶格常數關係圖 [4]

### 1-1-2 III-nitride material InGaN/GaN 量子井(Quantum well)特性

對於 III-nitride 來說利用 InGaN/GaN 量子井結構所製作的發光元件是最常見的，當調整 In、Ga 的比例，發光範圍可以涵蓋整個可見光波段，回顧光電半導體的歷史，在發光元件的一開始使用的為同質介面的 P-N junction，但是由此技術所製作出來的發光元件在順向偏壓下電子電洞對的複合效率極差，因此當時元件的發光效率也相對較差，直到 1963 年，Kroemer 和 Alferov 提出雙異質接面的結構，將能隙較小的材料置入兩

塊能隙較大的材料中間，利用本身能隙的差異使得在中間能隙較小的地方產生量子井，藉此將電子電洞侷限在量子井中增加複合機率，見圖1-3，使得原件發光效率提升，也帶動了光電半導體的發展，使得光電元件能融入大眾的生活之中。但是雙異質結構

InGaN/GaN量子井應用在發光元件上還充滿了許多問題，像是 III-nitride材料本身的特性會有自發性的內建極化電場，或者因為長晶時，應力的不匹配，使得原件在磊晶的過程充斥這局部的缺陷，又或者因為應力的關係造成元件內部有壓電場的存在，這種種的因素，造成了電子電洞複合機率降低，因此為了解決這些問題上，部分的研究團隊提出了藉由長晶方向的不同，提出了非極性面 InGaN/GaN 量子井發光元件[5]。

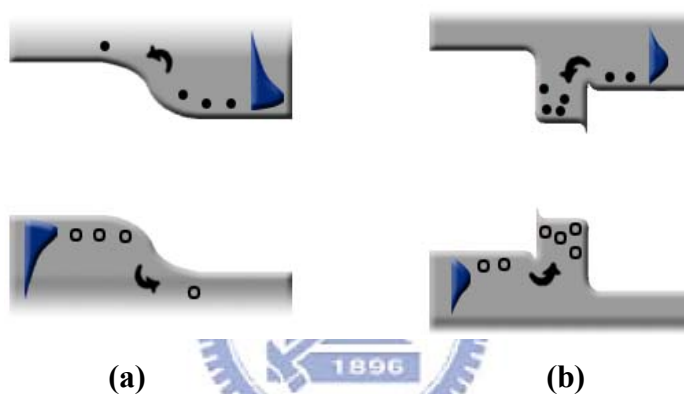


圖1-3 (a) 同質接面結構 (b) 異質接面結構[6]

### 1-1-3 極性與非極性InGaN/GaN量子井

前小節我們有提到，III-nitride材料本身的特性會有自發性的內建極化電場，以氮化鎵為例，會有這種情況的原因是由於 wurtzite structure 在c-plane的方向，氮原子與上面鎵原子距離和下面鎵原子的距離是不一樣的，圖1-4(a)，因此在總極距上不會相抵消，而產生了內建極化場，不只是 GaN, InN、AlN 等氮化系列都會有這樣的問。而除了本身原子結構上所產生的內建極化場外，由於在磊晶成量子井的時候，由於晶格不匹配產生應力擠壓的關係，因此也會有內建壓電場的產生，這些內建電場的產生始得量子井能階變形，量子井內的電子電洞對在空間中波函數的重疊降低，電子電洞複合機率下降[7]，圖1-4(b)，導致發光效率降低，這樣現象，稱量子侷限史塔克效應(Quantum confined stark effect QCSE)。為了解決這個問題，科學家們開始將研究的重點放在非極化



(non-polar) 面上，a-plane 或者是 m-plane ，III-nitride材料，在這兩個面上由於長晶方向以及使得原子排列具有對稱性，以及應力非等向性的關係，使得內建電場對量子井的影響大大的降低了，圖1-4(c)。

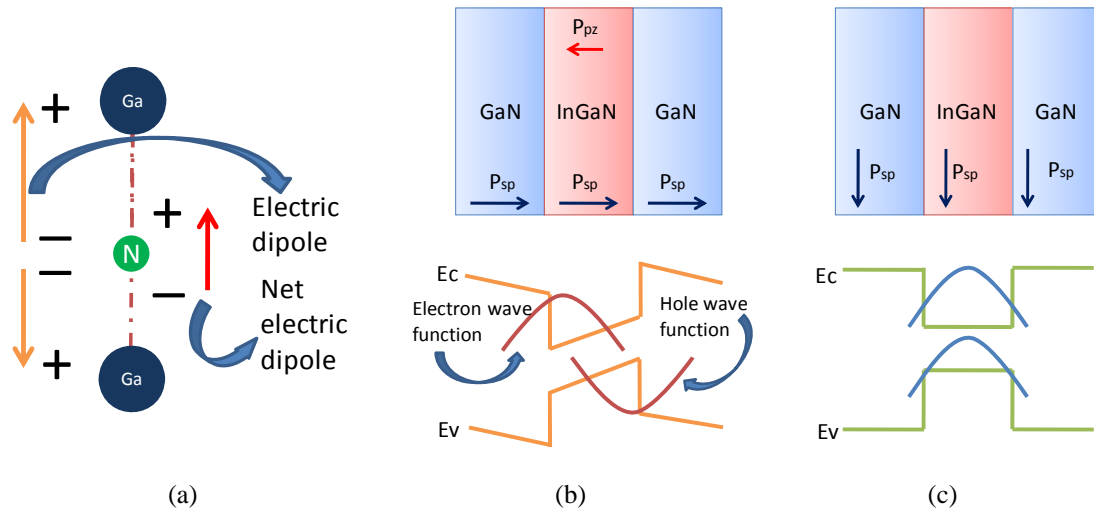


圖1-4，(a) GaN分子結構示意圖。(b)、(c) c-plane 與 a-plane GaN因為內建電場使得導帶與價帶的波函數在空間上錯位。不易複合。

除了在電性上因為克服了QCSE效應使得在發光效率上有所改善外[8]，在1997年[9][10][11] Domen 在把 m-plane GaN 長在m-plane 的SiC 用光機螢光系統量測後，發現他所量測的光譜中具有極化光的現象。並且在 a-plane中也有相同的特性，只不過電場的極化方向有所不太一樣，雖然使用non-polar的晶面長晶可以改善電性方面的問題並且有極化光產生，但是由於長晶技術與成本的考量non-polar的元件缺陷多，成長不易，尚未達到理想的狀態，還有許多問題有待解決，待克服後[12][13]，對於未來在照明[14]、顯示器[15]、光通訊[16]、光儲存[17]、以及量子傳輸[18]等光電元件應用是相當有潛力。

## 1-2 自發輻射與光子晶體

### 1-2-1 自發輻射

自發輻射(spontaneous emission)為半導體光電元件中最基本的光源產生的機制，但是由於物理特性與元件設計上的限制，使得自發輻射所產生的光源並沒有辦法有效的



被利用，對發光二極體(light emitting diodes, LEDs)來說，其主要的發光形式以自發輻射為主，但半導體材料的折射係數與空氣差異甚大，以氮化鎵為例，折射系數  $n=2.5$ ，由於全反射角大約只有 23.5 度，經由自發輻射所產生的光只有小於 23.5 度才能從半導體中被萃取出來利用，而有將近 90% 的光將以 guided mode 形式被困在半導體內，整體的發光效率降因此而有所降低[19]也因此有許多的團隊嘗試的製作表面結構來增強光的萃取率[20][21][22][23]；在光電元件中除了扮演了發光的基本特性外，對於雷射來說，自發輻射偶與雷射模態的耦合，是雷射光來源的起因，但是大部分的自發輻射，卻與雷射光的產生無關，只有少部分的自發輻射會與雷射模態進行耦合發出雷射光，也因此使得產生雷射光的臨界電流(threshold current)提高，造成了電能的浪費，有鑑於此，物理學家們開始對如何掌握與控制自發輻射產生濃厚的興趣，主要的目標為讓多餘不被利用的自發輻射被抑制，而提升被需要的自發輻射，如此一來將可以大幅度的提升光電元件的效率。

根據量子理論[24]，自發輻射形成原因為電子由激發態回到基態，且以光子的形式與未被佔領的光學模態(optical modes)耦合後放出光子，而由激發態，回到基態發生的機率會與光子態密度(photonic density of state)與電場強度與位置有關，因此當我們想要嘗試控制自發輻射，其實就是在控制光學模態的數目，以及控制電場在空間中的分布與強度。而以目前來說最好的方法就是利用光子晶體光子能隙的特性來控制控制自發輻射。

### 1-2-2 光子晶體

早在二十世紀初，半導體產業快速興起，已發展為全球最大的產業。在發展的同時，其半導體物理相關的理論已經相當成熟。而物理學家瞭解到晶體中的電子，由於受到晶格中的週期性位勢分佈，部份波段會因破壞性干涉而形成能隙(Energy gap)，導致電子的色散關係 (Dispersion relation)呈帶狀分佈，產生所謂的電子能帶結構。相對的，物理學家也在思考，當光子在介電質週期性結構中，是否有可有類似的現象出現，在 1987 年

美國UCLA 電機系的 Eli Yablonovitch 教授與加拿大University of Toronto 物理系的 Sajeew John 分別提出對於光子能隙 (photonic band gap)的看法，並且對有週期性的介電質結構提出了光子晶體 (photonic crystal) 的概念 [25][26][27] 。

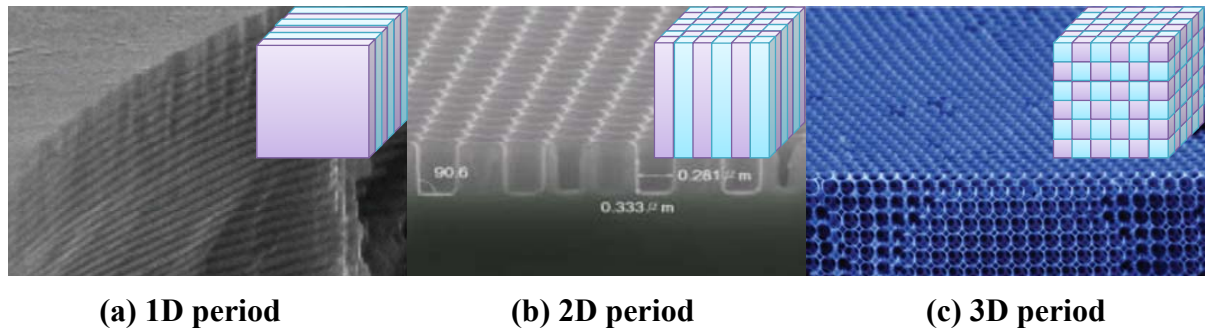


圖1-5 光子晶體週期結構為度示意圖

光子晶體是用介電值的材料，在空間上做週期性變化而形成的結構。依照它在空間週期分佈的維度，可分為一維光子晶體、二維光子晶體及三維光子晶體，圖1-5，而光在週期性傳遞時，與介質互相影響，而產生了光子能隙，所謂的光子能隙是指，當光的頻率剛好介於光子能隙中，則此頻率的光將不能在光子晶體內傳播，因此我們可以利用光子能隙的特性來對光加以控制。

光子晶體應用層面相當的廣泛，以發光二極體為例，利用光子晶體的週期結構可以將因為全反射被侷限在半導體內的光被萃取出來，在1999年 M.Boroditsky 首次在實驗上證明了光子晶體能夠增加LED的發光效率[28] 其中光能隙的能量會隨著孔洞之間的距離 $a$ (晶格常數)改變而改變，他們做了樣品ABC，其晶格常數分別為  $a=600, 760, 900 \text{ nm}$ ，然後量測其光輸出之頻譜及效率，和沒有作光子晶體之樣品做比較，PL之信號隨晶格常數之增加而增加，當 $a=900 \text{ nm}$ 時，其量出之效率高達70%。在2005年，任教於 UCSB 的中村修二教授團隊，去量測有光子晶體結構，以及沒有光子晶體結構的LED，隨角度變化的頻譜與場強，竟然可以量測到光子晶體的光子能隙圖，並且隨著光子晶體的設計不同，遠場的分布也會有所不同 [29]，或者可以利用光子能隙的特性製作抗反射層，一般的面射型雷射的布拉格反射鏡就是最好的例子[30]，還有一些有趣的研究，利用 Distributed feedback 的效應，當電磁波在光子能隙band edge時群速度會趨近於零，此時電磁波以駐波的形式將能量儲存在光子晶體內，並且經由光子晶體繞射出來，利用此特

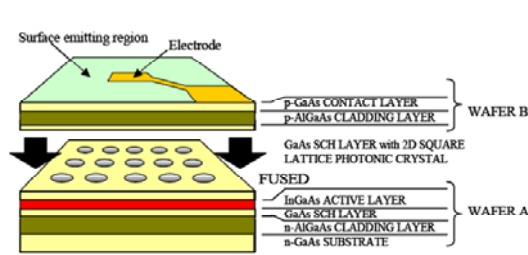
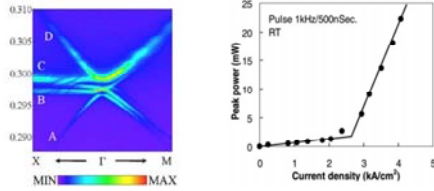
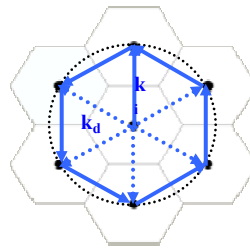


Fig.1 Schematic diagram of the device structure.



PRB, vol. 65 (2002)

### In-plane coupling



### Surface emission condition

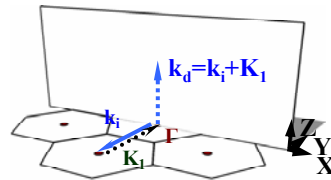


圖1-6 能帶邊緣型光子晶體雷射

性所發展的能帶邊緣型光子晶體雷射 Photonic crystal band edge laser, Photonic crystal band edge laser, 圖1-6 最早由日本的 Noda 教授所提出來並且在1999年首次發表, 利用電激發驅動二維光子晶體脈衝雷射[31], 且於2004年成功的在室溫下連續操作紅光雷射[32], 並且對於 Photonic crystal band edge laser 與布拉格繞射的關係做了深入的討論。在2008年Noda教授團隊成功的製作了第一顆在室溫下電機發GaIn的Photonic crystal band edge laser。

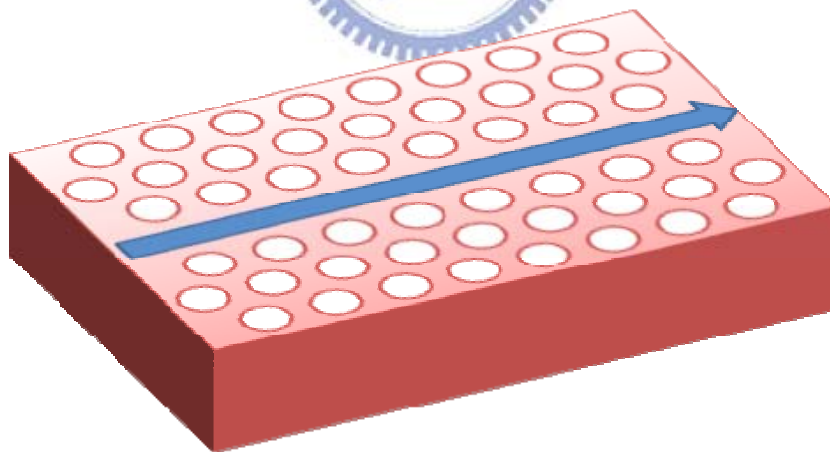


圖1-7 線缺陷光子晶體結構圖

光子晶體的研究與應用如此之多, 但是其光子晶體最重要的研究與應用莫過於對光子晶體結構做破壞, 使光子晶體的能帶產生缺陷態(defect mode), 由於缺陷模態的頻率落在光子能隙內, 因此這種模態無法朝向四周具有週期性的方向傳遞出去而被侷限在缺陷的部位, 光子晶體的缺陷態主要根據形式的不同分為兩種, 第一種設計為一個半開放

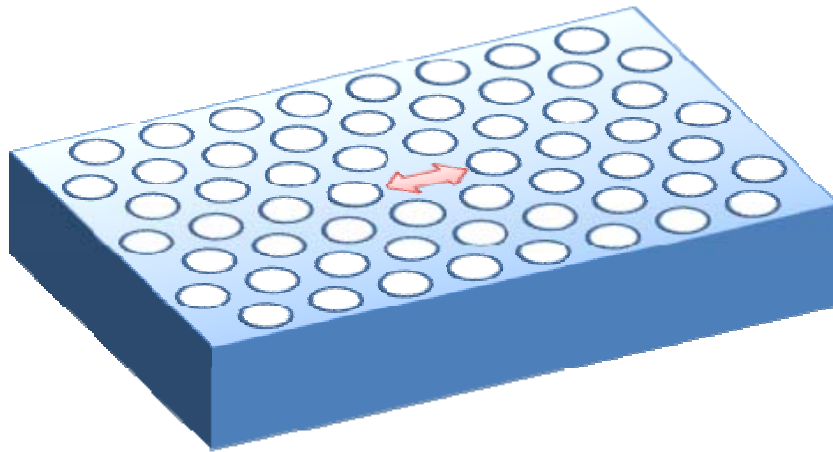
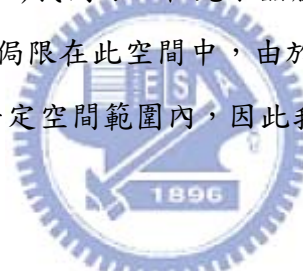


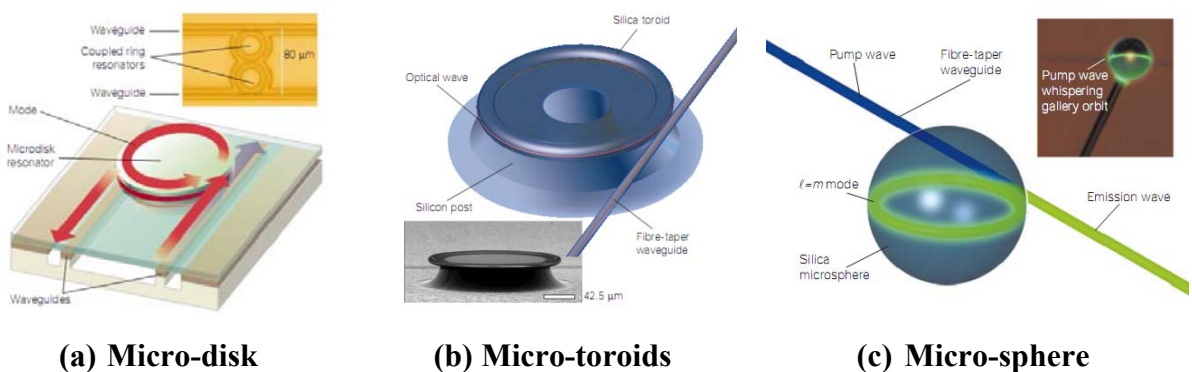
圖1-8 點缺陷光子晶體結構圖

式的線缺陷(line defect) 圖1-7，由於缺陷模態落在光子能隙內，因此滿足缺陷態頻率的光只能沿著缺陷態傳遞，而我們可以利用此特性製作像波導一樣的光傳播媒介 [33][34]。

第二種為點缺陷(point defect)我們可以在光子晶體上製造一個封閉的空間的設計如圖1-8，可將缺陷模態的光能量侷限在此空間中，由於在點缺陷中光的能量因為光子能隙的原因，被有效的被侷限在一定空間範圍內，因此我們可以利用其特性加以設計來製作光學共振腔。



### 1-2-3 二維光子晶體共振腔



(a) Micro-disk

(b) Micro-toroids

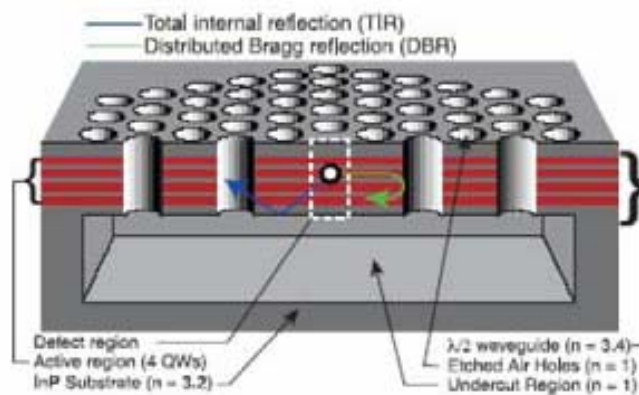
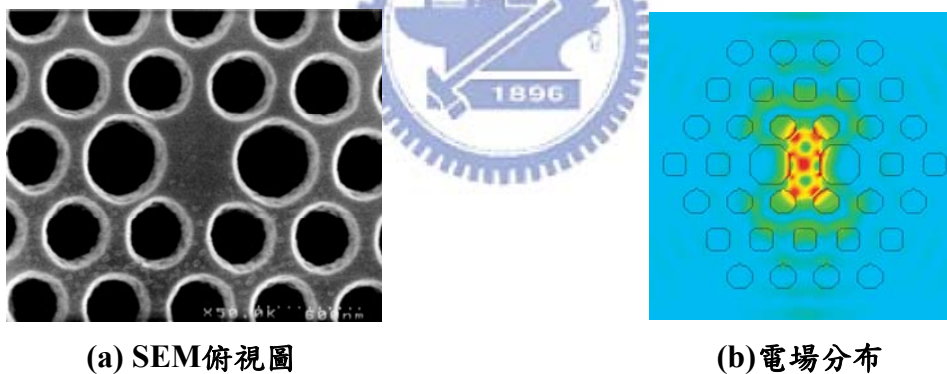
(c) Micro-sphere

圖1-9 光學共振腔

微光學共振腔(optical micro-cavity)由於具有對光源的侷限以及選頻的功能因此在微光學(micro-photonics)以及半導體雷射的領域中，一直是相當熱門的研究之一，對於光學共振腔來說，其主要對於光源的侷限方式幾乎都是利用光在介質內的全反射，讓光的能量聚集在介質內，根據設計的方法不同有分為micro-disk、micro-toroids 以及micro-sphere



圖1-9[35]，在optical micro-cavity的領域來說，其表現與應用都相當卓越，但是當光學元件越做越小後我們也希望optical micro-cavity也能夠變小，最好是與共振波長同等級，但是隨著optical micro-cavity開始變小，對於光能量的侷限開始慢慢變弱，且在製作上也相當有難度，光子晶體的出現解決了我們對於波長等級的共振腔 micro-cavity或著是 nano-cavity的需求，主要原因我們可以輕易的在光子晶體中製造一個點缺陷，在缺陷的位置由於光子能隙的效應形成了波長等級的共振腔。而光子晶體共振腔當中水平方向對光能量的侷限是由光子能隙，而在垂直方向是利用全反射的條件，光能量的損失主要也由垂直方向所貢獻，而製作光子晶體共振腔主要是希望應用在雷射的製作上，始得雷射元件能做到微米或者是奈米等級，二維光子晶體共正腔雷射的概念，在1994年由P.R.Bermang [36]，但是實際的元件一直沒有被設計出來，直到1999年，加州理工學院O.Painter 團隊成功了作出第一個光子晶體缺陷態雷射 [37]，圖1-10，他們利用電子束微影技術在發光元件上製作二維光子晶體，再將底部利用濕試蝕刻的方法挖空此時水平方向二維光子晶體對電磁波所侷限，而上下藉由光從密介質到疏介質會有全反射的發生藉以侷限電磁波，由圖1-8-(b)我們可以明顯的看出電磁波的能量大部分集中在缺陷區。



(a) 結構圖

圖1-10 二維共振腔型光子晶體雷射的造結構。光在光子晶體共振腔內受光子能隙效應的影響而產生共振的行為

而這幾年來各式各樣不同種類型式的光子晶體共振腔已經被許多團隊所研究與展現，而對於光晶共振腔所討論的議題主要著重在高品質因子(Quality factor)、超小模態體積(small modal volume)，就目前為止Prof. Notomi的團隊在理論計算上可得到Q-factor約為 $5 \times 10^9$ 的光子晶體共振腔[38]，而實驗上Prof. Noda的團隊可以做到Q-factors 約 $3 \times 10^6$ 的共振腔[39]，在另一方面Prof. T. Baba以及 Prof. Y. H. Lee 的團隊分別提出關於超小 modal volume ( $V_m$ )的光子晶體共振腔[40][41]。由於光子晶體共振腔具有high Q-factor以及small  $V_m$ 的特徵，因此我們有超高的 $Q/V_m$  的值當 $Q/V_m$  足夠大的時候我們可以觀察到電子與光的交互作用(quantum electro -dynamics)，例如 Rabi splitting[42]，對於雷射元件來說，設計具有high Q-factor以及small  $V_m$ 的光子晶體共振腔可以達到抑制多餘不被利用的自發輻射，提升被需要的自發輻射，以降低雷射的threshold current提升雷射元件的表現。因為提高某個頻率的Q-factor就是在增加該頻率的光子模態數目；而降低 $V_m$ 就是在增強電場的強度。



### 1-3 研究動機

在1-2節中我們介紹了自發輻射的限制以及光子晶體的應用，並且提到了關於自發性輻射的控制最佳的方法是利用光子晶體共振腔來操作，我們希望能夠藉由自發輻射的控制藉達到抑制多餘不被利用的自發輻射，提升被需要的自發輻射，以降低雷射的threshold current，如果雷射的 threshold power 太高，除了成本上的浪費外，元件會容易過熱降低雷射效率，且易於損壞，因此在雷射的設計上我們希望能雷射的 threshold current 越低越好，而為了要達到低 threshold current的條件，因此在設計雷射時必須考慮低損耗 (較高Q-factor)，單模(較小的模態體積 modal volume)，而光子晶體共振腔型雷射就同時具有這種特性，因此大部分在研究光子晶體的學者都在設法提高光子晶體共振腔的 Q-factor，以及降低 $V_m$ 。而在這方面的研究也有許多的研究團隊討論與設計，其中以2002年Prof. Noda團隊的研究最具代表性，Prof. Noda團隊將共振腔的設計由原本的在光子晶體的中心抽去三根空氣柱(L3-cavity)且將L3共振腔左右兩邊的空氣柱向外移動一些[43]，將共振腔的微調可以將Q-factor拉高至45000左右，進而增強共振模態的自

發輻射。因此本文主要探討如何設計與調變quasi-L2(qL2)光子晶體共振腔以提升Q-factor與降低 $V_m$ ，並且將qL2光子晶體共振腔優化，我們在此名為modified qL2 (MqL2)，並且討論自發輻射的變化，除此之外，自發輻射的增強與共振腔共振模態的極化方向以及增益介質的極化率，也有明顯的相關性，這部分的討論將是本文第二個重點。

本文在第二章的部分將會介紹光子晶體的能帶理論以及共振腔，自發性輻射增強，與雷射之間的關係，在第三章討論如何設計與選取光子晶體共振腔，第四章本文將會討論極化率特性對於自發性輻射的增強的影響，第五章為本文的結論與未來展望。



## 第二章 原理與計算方法

### 2-1 光子晶體能帶理論

物理學家認為，在空間中讓材料不同的折射率（介電常數）作週期性變化的排列會產生週期性的位勢，就像晶體（crystal）中，原子排列所產生週期性位勢一樣，而晶體中的電子會受到週期性位勢的影響產生能隙與能帶，圖2-1(a)，用相同的道理，當電磁波在不同折射率所產生的週期性位勢中傳遞時，電磁波也會受到位勢的影響產生建設性或破壞性的干涉而形成光子能隙，圖2-1 (b)，而導致色散關係的帶狀分布，此帶狀分布稱為光子能帶結構（photonic band structure）。而對於電子能隙與光子能隙的些微差異是在於，晶體中的電子若正好填滿能帶中能量較低的價帶，使得電子難以越過能隙到達能量較高的導帶，則電荷將無法在此半導體中傳輸。光子晶體能隙是指，當光的波段是落在光子能隙中，則此波段內的光線在所有方向上都無法穿過此光子晶體。

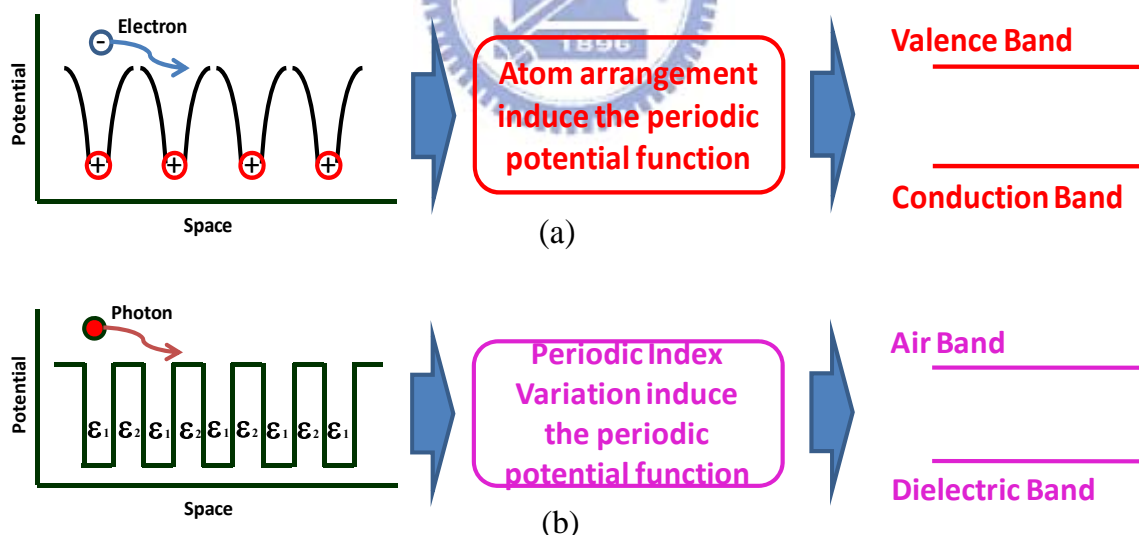


圖2-1，(a) 電子在週期位勢中傳遞產生電子能帶，(b) 光子在週期介電質中傳遞產生光子能帶。

在思考光子晶體能帶問題時，一開始我們會用固態物理的物理模型去想像與解釋，以方便我們對新領域的探討，光子類似於電子，介質週期性位能則類似原子週期性位能，由於兩者在物理模型上的描述極微的類似，因此解決兩者行為模式所用到的數學模型，



表2-1 薛丁格方程式與馬克斯威爾方程式

Schrödinger equation	$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t)$
Electromagnetic wave equation	$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)}{\mu(\vec{r})}\right) = -\frac{\varepsilon(\vec{r})}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$
	$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{\varepsilon(\vec{r})}\right) = -\frac{\mu(\vec{r})}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$

也是相當類似的。電子在晶體內的行為由薛丁格方程式描述，而電磁波在光子晶體內的行為模式由馬克斯威爾方程式所推導的電磁波動方程式所描述，表2-1。

由表2-1可以發現到，描述電子行為的物理量是波函數( $\Psi$ )，而波函數是一個純量，而描述電磁波行為的物理量是電場( $\vec{E}$ )與磁場( $\vec{B}$ )，他們都是向量，因此在對於光子晶體在數學上的處理與描述會顯得格外的複雜與繁瑣，也因為是向量場的關係，導致於會出現不同偏振的電磁波會有屬於自己的光子能帶。

而在探討電子能帶的計算的時，我們會希望能夠將薛丁格方程式的時間項，作簡化的動作，得到時諧頻域的薛丁格方程式，進一步的得到薛丁格特徵方程式 (eigen equation)，這樣一來在數學上的計算將會方便許多，因此在解決光子能帶的問題時，我們利用相同的技巧去處理電磁波動方程式，首先我們將電場，磁場用時諧方程式表示 (2.1)、(2.2) 使問題由時域 (time domain) 轉至頻域 (frequency domain)，將上式代入馬克斯威爾方程式，消去時間參數，得到時諧頻域的馬克斯(2.3) (2.4)，其中介電常數 $\varepsilon(\vec{r})$ 是空間的函數，c 是光速。

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp^{-i\omega t} \quad (2.1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) \exp^{-i\omega t} \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times |\vec{H}\rangle = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 |\vec{H}\rangle \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} |\vec{D}\rangle = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 |\vec{D}\rangle \quad (2.4)$$

由(1.3) (1.4)式中可以看出是一種特徵值(Eigenvalue)問題，其特徵值分別為  $(\frac{\omega}{c})^2$  與

$$(\frac{\omega}{c})^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{r})，特徵算符 (operator) 分別為  $[\vec{\nabla} \times \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{r})} \vec{\nabla} \times]$  與  $[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{r})}]$ ，$$

值得注意的是在計算特徵問題時會希望特徵值算符要為赫米特算符，且越單純越好，而由電場或者電通量開始計算，其特徵方程式線性運算子並非符合赫米特運算，不能夠用正交基底展開，且在TM波的情況下，有可能會出現邊界不連續的情況，增加計算困難度，因此在這兩個特徵方程式計算選取上，我們大多從(1.3)出發，在解決了磁場在光子晶體的關係，我們可以用馬克斯威爾方程式( $[\frac{-ic}{\omega \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{r})}] \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r})$ )間接得到電場、電通量與光子晶體的關係。

在討論完時諧頻域的波動方程式與特徵方程式的建立後，我們接著將介電常數隨空間的變化考慮進去，光子晶體的精髓是在於週期性的介電常數，因此以週期函數表示， $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{r} + \vec{a}_i) = \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{r})$ ，其中 $\vec{a}_i$ 是在實空間中的件電介質的週期向量， $i$ 為1,2,3代表不同維度的方向，再把每一個週期的介電質想像成為晶格點，因此我們同時定義 $\vec{a}_i$ 是原始晶格向量(primitive lattice vector)，又因為 $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{r})$ 在空間上具有週期性，所以我們用傅立葉級數將 $(\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{r}))^{-1}$ 再倒晶格空間展開，(2.5) 其中 $\vec{G}$ 為倒晶格向量， $\kappa(\vec{G})$ 的決定會與單位晶格體積(unit cell)有關的，並且根據布洛赫理論可將(2.3)的解， $\vec{H}(\vec{r})$ ，假設為(2.6)， $\vec{k}$ 為布洛赫波向量，而 $\vec{H}_{\vec{k}}(\vec{r})$ 為一個週期的週期性磁場的週期函數， $\vec{H}_{\vec{k}}(\vec{r})$ 的表示會與單位晶格的大小有關。

$$\frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{r})} = \sum_{\vec{G}} \kappa(\vec{G}) \exp(i\vec{G} \cdot \vec{r}) \quad (2.5)$$

$$|\vec{H}(\vec{r})\rangle = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} |\vec{H}_{\vec{k}}(\vec{r})\rangle \quad (2.6)$$

我們將，(2.6)帶入(2.3)並將其化簡可得(2.7)，其中 $\hat{A}_{\vec{k}}$ 為化簡後的赫米特算符以(2.8)示之，特徵頻率 $\omega(\vec{k})$ 為 $\vec{k}$ 的函數。

$$\hat{A}_{\vec{k}} |\vec{H}_{\vec{k}}(\vec{r})\rangle = \left(\frac{\omega(\vec{k})}{c}\right)^2 |\vec{H}_{\vec{k}}(\vec{r})\rangle \quad (2.7)$$

$$\hat{A}_{\vec{k}} = (\vec{\nabla} + i\vec{k}) \times \frac{1}{\epsilon(\vec{r} + \vec{a}_i)} (\vec{\nabla} + i\vec{k}) \times \quad (2.8)$$

由於(2.7)式，為特徵方程式、 $\hat{A}_{\vec{k}}$ 為赫米特算符、 $\vec{H}_{\vec{k}}(\vec{r})$ 為週期場，因此我們可以將 $\vec{H}_{\vec{k}}(\vec{r})$ 用平面波當基底  $|\vec{b}_m\rangle$  作正交函數作展開，

$$|\vec{H}_{\vec{k}}(\vec{r})\rangle = \sum_{m=1}^n h_m |\vec{b}_m\rangle \quad (2.9)$$

$|\vec{b}_m\rangle$  代表的是平面波，則可用  $e^{i\vec{G}_m \cdot \vec{r}}$  表示， $\vec{G}_m$  為倒晶格向量，將(2.9)帶入(2.7)作化簡後得到(2.10)，

$$A_{lm} h_m = \left(\frac{\omega(\vec{k})}{c}\right)^2 B_{lm} h_m \quad (2.10)$$

因此最後一開始的波動方程式，將會變成一個廣義的特徵值問題，其中  $A_{lm} = \langle \vec{b}_l | \hat{A}_{\vec{k}} | \vec{b}_m \rangle$ 、 $B_{lm} = \langle \vec{b}_l | \vec{b}_m \rangle$ ， $A_{lm}$  與  $B_{lm}$  都為  $N \times N$  的矩陣且與  $\vec{G}_m$ 、 $\vec{k}$  相關， $N$  的大小與平面波基底的個數相關，而  $\langle \vec{b}_l | \vec{b}_m \rangle = \delta_{l,m}$ ，當然在正交基底理論中，如果基底取無限大，則所得到的解會越準確，但是在數學計算上我們沒辦法計算無限大的平面波，如果我們只對低階向有興趣，對於平面波各數的要求上，可以相對較少，最後我們可以由(2.10)，解出  $\omega(\vec{k})$  與  $\vec{k}$  得色散關係圖，以一為週期性光子晶體為例，最後化簡的式子為(2.11)，

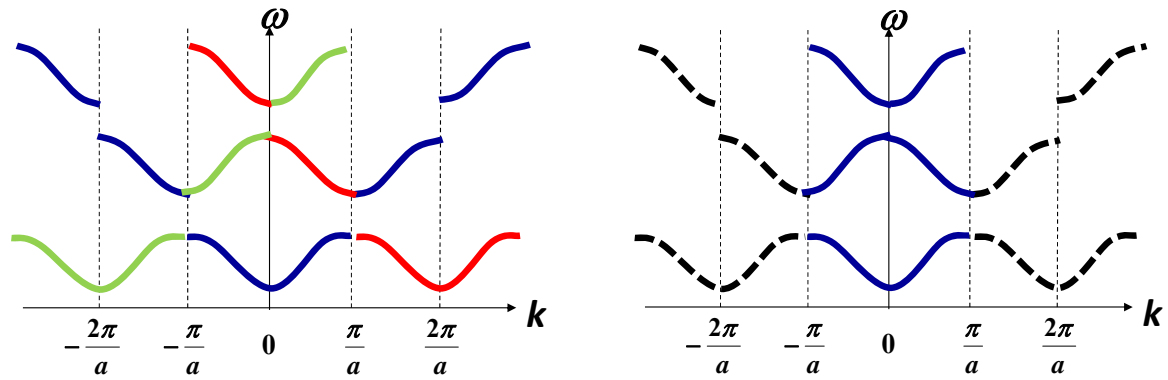
$$[k^2 - \omega^2 \mu \kappa(0)][(k - G_0)^2 - \omega^2 \mu \kappa(0)] - (\omega^2 \mu |\kappa(G_0)|) = 0 \quad (2.11)$$

解出的結果如圖2-2 一維光子晶體光子能帶圖。

由圖2-2，我們可以發現到在  $k$  為  $\pi/a$  的整數倍時，能帶有分裂的現象，這種現象形成的原因就是前面所提到的光在光子晶體內破壞性干涉所造成的。由式(2.11)我們知道了  $\omega(\vec{k})$

是  $\vec{k}$  的函數，由圖2-2(a)可發現  $\vec{k}$  具備週期性，因此  $\vec{k} + \vec{G}_m$  所得到的解應該要與  $\vec{k}$  相同，

因此不需要把所有  $\vec{k}$  對應的  $\omega(\vec{k})$  全部解出來，舉例來說在圖2-2(a)， $0 \sim \pi/a$  紅色線條的解其實與  $-\pi/a \sim -2\pi/a$  藍色線條所代表的解是同一件是，因此我們只要考慮  $-\pi/a \sim \pi/a$  之間的  $\omega(\vec{k})$ ，



(a) 不考慮週期性光子能帶圖

(b) 考慮週期性光子能帶圖

圖2-2一維光子晶體光子能帶圖

就代表所有的解了我們將此區域定義為約化布里淵區 (irreducible Brillouin Zone)，圖 2-2(b)。由以上我們可以初略的了解光子晶體的光能隙的特性，理論，但是這個方法有一個很大的問題，因為在解的過程中我們將時間項化減了，因此我們沒辦法得知在光子晶體內，場與時間的關係，因此一搬來說處理光子晶體最常見的方法是有限時域差分法 (Finite difference time domain)。



## 2-2 有限時域差分法 Finite difference time domain (FDTD)

有限時域差分法 (finite-difference time-domain, FDTD) 是一種廣泛使用於電磁波模擬的數值方法，其主要是將時域的馬克士威方程式 (Maxwell's equations) 從原本微分方程式轉為差分方程式，進而程式化，以電腦模擬電磁波傳遞的情形 這個方法有推導容易，適合計算複雜結構的優點。

Yee [44] 在1966年提出這個方法，雖然推導計算直接，但是相對的需要許多運算資源，當時的電腦運算速度慢而且記憶體少，因此並未受到重視。隨著時代演進，電腦在計算的速度與精確度不斷提升，FDTD才受到重視，也使有限時域差分法的模擬範圍越來越廣，除了光子晶體外，從天線模擬、高頻電路、甚至用以聲波在聲子晶體的模擬都可以用FDTD計算。

FDTD是從微分型式的馬克士威方程式推得，在真空中無源的馬克士威方程式 (2.12)。

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_v$$

FDTD主要是將其中的法拉第定律以及安培定律由微分作差分化，先考慮一維以x方向傳播的電磁波，並且電場極化方向在z方向(1.13)

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

在離散化時使用中央差分(central difference)的技巧，將原本對時間以及對空間的微分轉為差分(1.14)

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = \frac{F_i^{n+1/2} - F_i^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial F^{n+1/2}}{\partial x} = \frac{F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}$$

其中i是電磁場空間上第幾個切割點的位置，而 n 表示時間上第幾個時間格點，這樣表示法稱 **Yee's notation**  $t=n\Delta t$ 、 $x=i\Delta x$  因此先前微分型式的法拉第定律以及安培定律差分化可得到式 (2.15)

$$E_z|_i^{n+1} = E_z|_i^n + \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \frac{H_y|_{i+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \quad (2.15)$$

$$H_y|_{i+1/2}^{n+1/2} = H_y|_{i+1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_0} \frac{E_z|_{i+1}^n - E_z|_i^n}{\Delta x}$$

式 (2.15) 就是一維的FDTD的演算式。將整個計算域的空間切割成許多的網格格點，而每個格點如圖分布不同方向上的電磁場，這種格點叫Yee lattice，如圖2-3，而因為中央差分的緣故，電磁場在時間上也是交錯的，因此整個FDTD在實作時



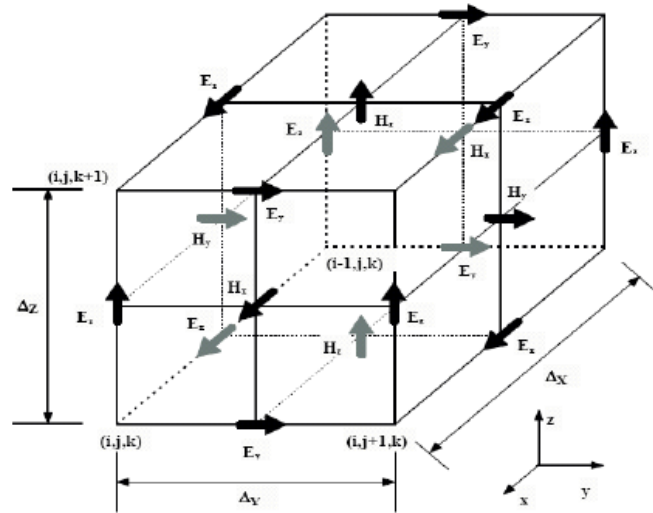


圖2-3 Yee lattice 之示意圖

將會是一個隨時間而變的疊代演算，計算整個空間的電場後，再計算下個時間點的磁場。

FDTD相對於其他的數值方法有著推導容易，並可以觀察電磁波隨著時間的變化情形的優點，故本文採用此法來模擬，在不同高度的奈米柱狀結構，光由半導體材料內部發射至空氣中，輸出光能量之變化。

由上述討論中我們可以清楚了解到，光子晶體的光能隙的特性，理論與計算方法，這兩個計算方法在本文的討論中都會應用到，因此在這邊先作介紹。

## 2-3 自發輻射與共振腔

### 2-3-1 半導體雷射基本原理

在了解共振腔之前我們先來了解半導體雷射的基本原理[6]，以及為什麼半導體雷射需要共振腔，雷射基本上是由四大部分所組成的，圖2-4，(1) 增益介質，具有將在此介質的電磁波強度放大的功能。(2) 增益介質的幫浦系統，提供能量給增益介質，如電子、電洞、光子，使得增益介質具有放大電磁波的能力。(3) 光學共振腔，提供雷射模態，使得所增益的電磁波能夠有效率的轉換成雷射光。(4) 輸出耦合，可將共振腔內的雷射輸出到共振腔外。增益介質為半導體雷射發光的主動層，主要產生光源，一般來說在半導體主動層在不同維度對於載子的拘束可以分為，量子井，量子線，量子線點，而利用幫浦系統將電子、電洞注入主動層後，電子與電洞將會在主動層內進行複合動作，

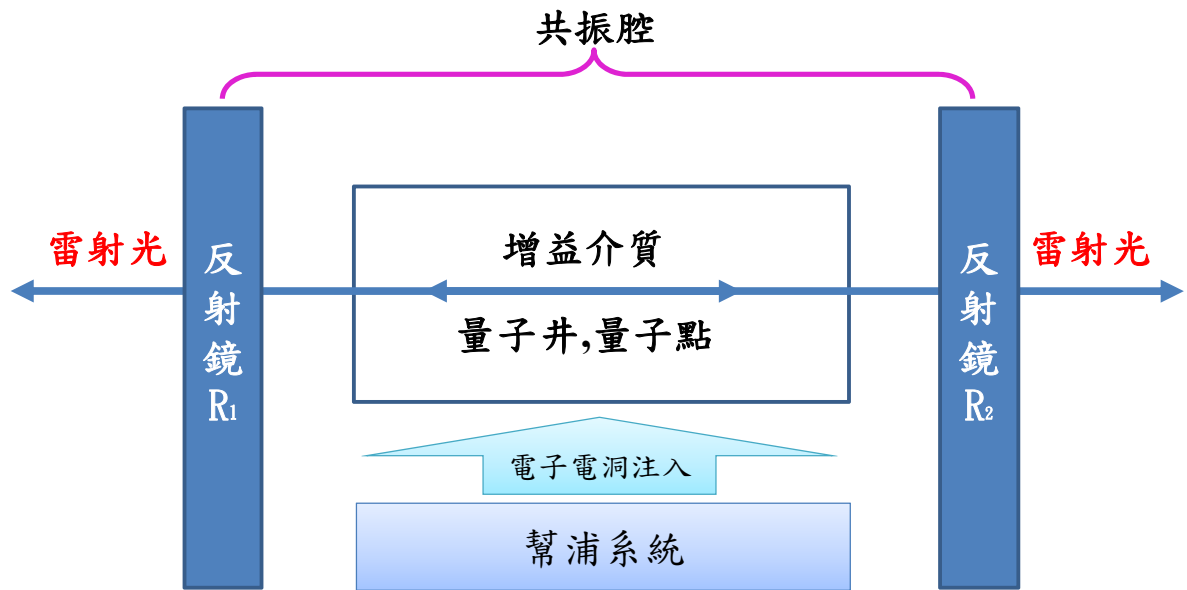


圖2-4 半導體雷射模型

復合程主要有兩種，第一種為不會放出光子的非輻射復合，第二種為會放出光子的輻射復合，在此我們可以使用「二階模型」來解釋輻射復合[46]如圖2-5，電子吸收光子能

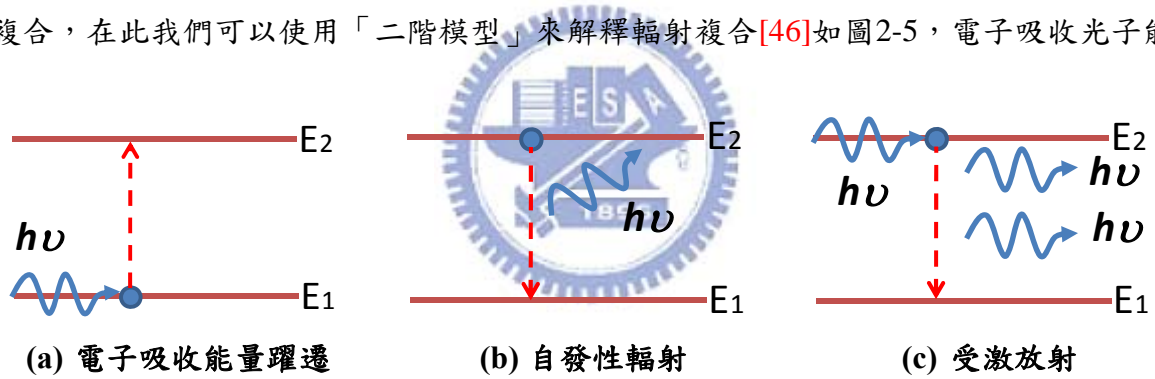
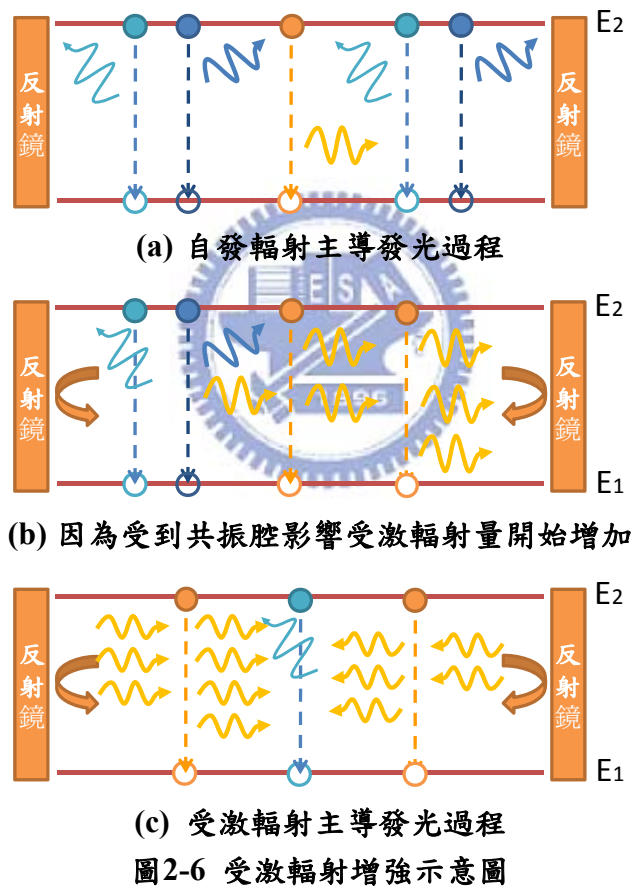


圖2-5 二能階模型示意圖

量( $h\nu$ )從能階較低的 $E_1$ 躍遷到能階較高 $E_2$ ，圖2-5(a)，當電子從高的能階回到低能階且與電動產生復合後，便會產生光子而這種發光形式可以分成兩種，第一種情況是電子自發性的向低能階轉移，稱為自發輻射(spontaneous emission) 圖2-2(b)，第二種情況則是高能階電子被一個光子誘發向低能階轉移，導致電子電洞復合，此過程光子的能量不會消失，因此最後的光子會有兩個，稱為受激輻射(stimulated emission)，如圖2-2(c)，在自發輻射中，電子、電洞在自發性復合後，所放出的光子沒有特定的方向，由於復合過程是隨機產生的因此自發放射所產生的光子與光子之間的相位毫無關聯，一般的發光二極體(LED)，所發出的光就為自發輻射，而受激輻射由於一開始需要一個光子做誘導，因此所放出光子的能量大小、輻射方向、以及相位，皆與誘導的光子相同，因此受激放射可以使光具有同調性，單光性，與指向性，由於受激輻射可以將一個光子變成兩個光子，

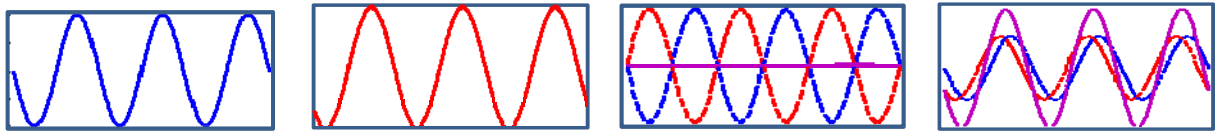
因此可視為將光放大的功能，但是是否這樣就會有雷射光產生，其實就如同前面所說的輻射的機制有兩種，雖然說在LED中主要的放光形式是以自發輻射為主，但是還是有各種少量的受激輻射，受到自發輻射的影響所釋放，但是這些受激輻射量太過稀少而且方向也不是固定的，因此沒有足夠的量去誘使大量的受激輻射釋放具有同調性，單光性，與指向性的光子，此時，我們使用共振腔來選擇自發輻射的頻率，讓此頻率自發輻射的光與共振腔中的共振模態耦合在一起，此時耦合在共振腔內的光子，不易損耗，在共振腔內來回行走，進而誘發大量電子電洞對複合，產生受激輻射，只要在這部分的受激輻射開始主導發光的過程，這時就會達到 threshold power 而放出雷射，圖2-6，。在下一小節我們將簡單介紹共振腔的特性。



### 2-3-2 共振腔特性[46]

「共振腔」cavity 是能夠將波動能量儲存在空間中的一種設計，假設有一弦波在共振腔內傳遞，在共振腔的邊界上波動的能量幾乎可以全部反彈回去，反彈回去的波動跟原來的波動進行疊加後可以形成建設性干涉或者是破壞性干涉，如果形成建設性干涉，此





(a) 平面波      (b) 經反射的平面波      (c) 破壞性干涉      (d) 建設性干涉

圖2-7駐波形成示意圖

時能量將會以駐波的形式儲存能量，而不會有所損耗，圖2-7，此時共振腔腔長經由推導可知與1/2波長的整數倍有關 $d = N\lambda/2$   $N$ 為整數， $d$ 為共振腔腔長， $\lambda$ 為共振波長，因此當 $d$ 只要固定，滿足此關係的波長都可以駐波的形式儲存在共振腔的內，我們稱這些波長為此共振腔的共振模態。而由駐波關係式中可以告訴我們兩件事情，第一件事情如果我們將 $N$ 固定，此時 $d$ 與 $\lambda$ 成正比，也就是隨著腔體的變長，對於同一個的共振模態的共振波長會因此而改變，第二件事情我們將關係式，改寫成與頻率相關的式子且由 $(N+1) - N$ ，我們計算前後不同共振模態的頻譜差距可得 $\nu_F = c/2d$ ，由此我們可以知道當共振腔長度越小，共振模態的頻率差距越大，因此如果希望能做單模的雷射，共振腔在設計上，越小越好。

在圖2-8中我們可以看到， $\delta$ 函數的頻譜是由於完美的共振腔所造成的，橫軸是頻率，縱軸是強度，但實際上所製作的共振腔不可能達到完美的地步，因此有部分輻射會從腔體跑出，此時 $\delta$ 函數的頻譜會擴展開來，而擴展的寬度將由輻射從腔中跑出的量來決定，量越多寬度愈大，因此在不同的共振模態來應該會有自己的頻寬與高度，通常我們會取模態強度的一半來定義譜線的寬度，我們稱之為半高寬(full-width half-maximum, FWHM)。因為半高寬是由輻射從共振腔中跑出的量來決定，因此我們可以藉由半高寬來了解共振腔對於光侷限的能力好不好。



(a) 完美共振譜線

(b) 不完美共振譜線

圖2-8 共振譜線

### 2-3-3 自發輻射控制

在2-3-1節與2-3-2，我們介紹了半導體雷射的基本原理與共振腔的特性，也了解到，如果發光元件要能發出雷射光必須要使用共振腔選擇自發輻射的頻率，讓此頻率自發輻射的光與共振腔中的共振模態耦合在一起，此時耦合在共振腔中的光子再去誘發受激放射，在這邊產生了一個問題值得我們去討論，由於自發輻射所發出的光頻譜是寬頻譜，且散亂沒有同調性的，因此自發輻射所放出的光子絕大部分是沒有用的，且也不會供獻到共振腔模態進而產生雷射光，換個角度說，如果可以控制自發輻射，將屬於共振模態的自發輻射增強變快，同時抑制不為共振模態的自發輻射，這時候我們就不會浪費多餘能量在不屬於共振腔的自發輻射，而且屬於共振模態的自發輻射光能夠更大量且迅速的與共振腔耦合，使得雷射的 threshold power 降低。在這邊我們可以定義自發輻射耦合因子。

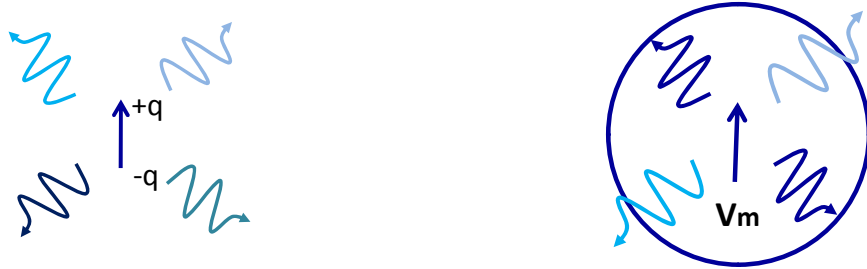
$$\beta_{sp} = \frac{\text{耦合到特定雷射模態的自發輻射}}{\text{所有的自發輻射}} \quad (2.16)$$

當 $\beta_{sp}=1$ 時為最大值，表示所有的自發輻射只會放出一種模態的光子，而單一模態的性質與雷射的同調光相似，因此不需要有threshold power的限制就可發出雷射，我們稱為無閾值雷射。

在本小節一開始，本文提到了希望能夠控制並且增強共振模態的自發輻射，而最先提出這個想法的是Prof. Purcell，他在1946年所發表的論文「物質與電磁場耦合的關係在共振腔中如何調變」[47]中提到自發輻射的增強，與腔內的電場模態體積(modal volume)以及共振腔的品質因子(quality factor)有關，這是由於材料內的輻射偶極距與共振腔內儲存的電場產生了弱耦合，在此我們將模型簡化，用電偶極震盪來代取代電子電洞對複合，考慮以下兩種情況，單一偶極距放置在真空中與放入具有單一共振模態的共振腔中，圖2-9我們分別計算電偶極在真空中與在共振腔中的自發輻射速率，根據簡化費米黃金定律 [48]，自發輻射速( $\gamma_{sp}$ )率可表示為(2.17)

$$\gamma_{sp} = \frac{2\pi}{\hbar} \rho(\hbar\omega) |\langle f | \vec{\mu} \cdot \vec{E}(\vec{r}_e) | i \rangle|^2 \quad (2.17)$$

式中 $f$ ， $i$ 為最後狀態，與初始狀態， $\vec{\mu}$ 為電偶極距向量， $\vec{E}(\vec{r}_e)$ 為電偶極距所在位置的電場向量， $\rho(\hbar\omega)$ 為光子態密度，為在空間中，單位能量內有多少的模態數。



(a)電偶極放置真空中

(b)電偶極放置單模態共振腔內

圖2-9 電偶極距輻射示意圖[49]

符合共振腔的頻率將會倍束縛在腔體內不易損耗。

首先考慮在均勻介質， $\rho(\hbar\omega) = \rho_{free}(\hbar\omega)$ ，

$$\rho_{free}(\hbar\omega) = \frac{\omega^2 n^3}{\pi^2 \hbar c^3} V \quad (2.18)$$

均勻介質中的電場的形式可以用平面波來表示

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, \omega)e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r}, \omega)e^{i\omega t} \quad (2.19)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = iE_{max}\vec{f}(\vec{r})$$

$\vec{f}(\vec{r})$ 代表電場在空間不同位置強度的轉換因子，且滿足歸一條件，而當 $|\vec{E}(\vec{r}_{max}, \omega)| = E_{max}$ 時  $|\vec{f}(\vec{r}_{max})| = 1$ ，在這邊假設電場在空間最大值與電偶極的位置相符因此 $\vec{E}(\vec{r}_e) = E_{max}^{free}$ ，而電場可以使用光子的能量來做替代，

$$\hbar\omega = 2\varepsilon_0 \iiint n^2(\vec{r}) |\vec{E}(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} \quad (2.20)$$

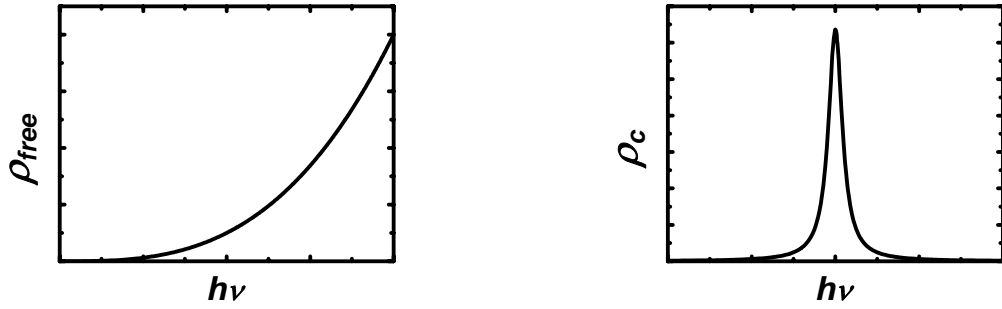
因此在均勻介質V中，平面波電場的關係可以改寫成

$$E_{max}^{free} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 n^2 V}} \quad (2.21)$$

因此 $\gamma_{sp}$ 均勻介質中可令為 $\gamma_{free}$ 可表示為

$$\begin{aligned} \gamma_{free} &= \frac{2\pi}{\hbar} \rho_{free}(\hbar\omega) \frac{|\vec{\mu}|^2}{3} |\vec{E}|^2 \\ \gamma_{free} &= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\omega^2 n^3}{\pi^2 \hbar c^3} V \frac{|\vec{\mu}|^2}{3} \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 n^2 V} \end{aligned} \quad (2.22)$$

式中1/3是假設在均勻介質中電偶極距平均分配在x, y, z，三個不同的方向。



(a) 均勻介質

(b) 單一模態共振腔

圖2-10 光子能態密度示意圖

接著我們來討論在共振腔內的自發輻射，由式(2.22)，我們可以了解到，在相同的電偶極距下，如果自發輻射要有所改變會與「光子能態密度」、「電場強度」，還有「電場向量與電偶極距的夾角」有關，考慮共振腔只允許一種共振頻率 $\omega_c$ 且定義共振頻率半高寬為 $\Delta\omega$ ，此時光子能態密度可由歸一化的勞倫茲函數表示，圖2-10，

$$\rho_{cavity}(\hbar\omega) = \frac{(\hbar\Delta\omega_c)/(2\pi)}{(\hbar\omega - \hbar\omega_c)^2 + (\hbar\Delta\omega_c/2)^2} \quad (2.23)$$

而在共振腔中，受到共振腔的影響 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 已經不是平面波，雖然我們還是可以類推出 $E_{max}$ 與 $V$ 的關係但是此時的 $V$ 會與在共振腔中折射係數隨位置的變化有關，應此我們將式(2.6)改寫

$$E_{max}^{cavity} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 n^2 V_{eff}}} \quad (2.24)$$

$V_{eff}$ 為等效模態體積，定義為

$$V_{eff} = \iiint \frac{n^2(\vec{r}) |\vec{E}(\vec{r})|^2 d^3\vec{r}}{n_{max}^2 E_{max}^2} \quad (2.25)$$

因此在共振腔內的自發輻射可寫成

$$\begin{aligned} \gamma_c &= \frac{2\pi}{\hbar} \rho_{cavity}(\hbar\omega) \langle |\vec{\mu} \cdot \vec{E}(\vec{r}_e)|^2 \rangle \\ \gamma_c &= \frac{2\pi}{\hbar} \rho_{cavity}(\hbar\omega) \eta^2 \frac{|\vec{\mu}|^2 |\vec{E}(\vec{r}_e)|^2}{E_{max}^{cavity^2}} E_{max}^{cavity^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

其中 $\eta^2$ 為空間耦合因子，代表電偶極距向量與共振模態的電場向量耦合的程度，表示為

$$\eta^2 = \frac{\langle |\vec{\mu} \cdot \vec{E}(\vec{r}_e)|^2 \rangle}{|\vec{\mu}|^2 |\vec{E}(\vec{r}_e)|^2} \quad (2.27)$$

由式中我們可以發現，當在空間中電偶極距與電場互相垂直，此時 $\eta = 0$ 則 $\gamma_c = 0$ 此時將會抑制電偶極距所擁有的自發輻射，這就是屬於自發輻射控制的一種，我們將 $\gamma_{cavity}/\gamma_{free}$ 來比較電偶極距在共振腔中與均勻介質的差別經由化簡後可得

$$\frac{\gamma_{cavity}}{\gamma_{free}} = \frac{3Q}{4\pi^2 V_{eff}} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^3 \frac{n^2}{n_{max}^2} \frac{(\hbar\Delta\omega_c)/(2\pi)}{(\hbar\omega - \hbar\omega_c)^2 + (\hbar\Delta\omega_c/2)^2} \eta^2 \frac{|\vec{E}(\vec{r}_e)|^2}{E_{max}^{cavity^2}} \quad (2.28)$$

式(2.12)定義為自發性輻射增強因子(SpE Enhancement Factor)  $Q = \omega_c / \Delta\omega_c$ 為共振腔品質因子，為了更方便了解這個式子，我們做了以下四點假設，

1. 電偶極距在共振腔內所放置的位置為電場的極大值  $|\vec{E}(\vec{r}_e)|^2 = E_{max}^{cavity^2}$
2. 電偶極距與電場完美的耦合， $\eta^2 = 1$
3. 電偶極距所發出的光與共振頻率完全相符  $\omega = \omega_c$
4. 電場的極大值位於的介質與均勻介質是同一種材料  $n = n_{max}$

因此(2.12)可簡化為

$$F_p = \frac{3Q}{4\pi^2 V_{eff}} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^3 \quad (2.29)$$

式(2.13)就是著名的Purcell Factor，因此，在滿足上面四點的假設下，自發輻射的增強就會與共振腔的Q值還由共振腔的等效體積有關，當 $V_{eff}$ 越小且 $Q$ 越大的情況下，對於共振模態的自發輻射的增強效果也越好，藉由 $F_p$ 我們也可以計算 $\beta_{sp}$

$$\beta_{sp} = \frac{F_p}{F_p + 1} \quad (2.30)$$

由(2.14)可以發現當 $F_p$ 越大 $\beta_{sp}$ 就越接近一，因此也就越接近無閾值雷射的條件。由以上的介紹我們可以了解到共振腔與自發輻射的關係，還有如何達到無閾值雷射的條件，但是這個理論自1946由Purcell提出來後，就很少有學者對於這塊領域有所鑽研，主要原因是在於沒有一個良好的共振腔結構，可以讓我們輕易的調整與控制自發性輻射，一直到 Prof. Yablonoivith 利用調變光子晶體共振腔控制自發輻射[25]，並且發現我們可以藉由簡單的方法去修改與設計不同的光子晶體共振腔，藉以調變Q值與 $V_{eff}$ 達到增強與控制



自發輻射，其中目前又以二維的光子晶體共振腔效果最好，而在第一章節我們也介紹過了二維光子晶體，到此為止我們所討論的自發輻射的控制與增強因子 $F_p$ 是經過四個完美的假設所得到的結果而其中有兩個假設是與共振腔中的電場還有電偶極距有關的，

1. 電偶極距在共振腔內所放置的位置為電場的極大值  $|\vec{E}(\vec{r}_e)|^2 = E_{max}^{cavity^2}$
2. 電偶極距與電場完美的耦合， $\eta^2 = 1$

這兩個假設的精髓在於共振模態的電場極化方向為單一方向，且電偶極距的所發出的光及化方向與共振模態完全的相同，電場振幅完全集中在電偶極距上，但是實際的情況卻不是這個樣子，共振模態的電場極化方向不一定是單一方向，尤其是像二維光子晶體共振腔，對於同一個共振模態，至少會又兩個極化方向的電場 $E_x E_y$ ，不同極化方向的電場比例會不一樣，而在空間中不同位置的電場其強度是也不一樣的，我們可以藉由設計光子晶體去對共振腔內的電場做調變，因此在計算自發輻射增強因子時我們必須考慮共振腔內電場能量在不同方向的比例，與電場在空間中的實際分佈。

除了考慮共振腔電場的問題外，材料本身電偶極距的方向性也是考量的重點之一，因為不同方向的電偶極距會發出不同方向的極化光，而不同方向的極化光比例發生改變後，自發輻射增強因子也會有所改變，因此在本文中往後的討論會將上述與電場相關的假設抽去，並且討論共振模態的電場與極化光對於自發性輻射的影響

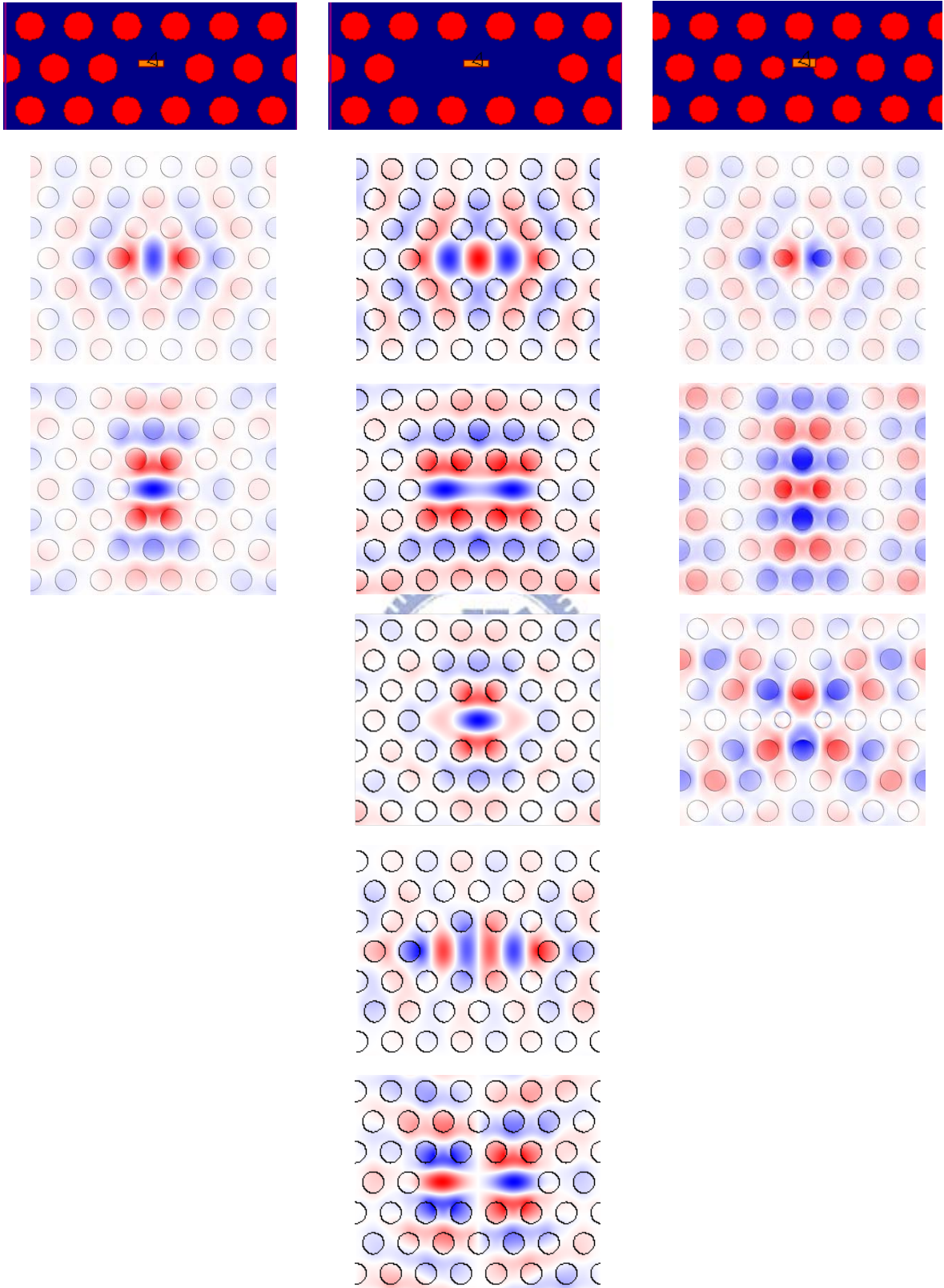
## 第三章 光子晶體共振腔設計與調變

在前面的章節中我們有介紹到自發輻射的控制與共振腔的Q-factor， $V_m$ ，還有與共振模態的極化方向與 a-plane InGaN 電偶極的耦合率有密切的關係，因此在本章節中我們將設計符合 a-plane InGaN 發光材料的光子晶體共振腔，並且討論共振腔在調變的過程中，共振頻率、Q-factor，等效模態體積，與共振模態電場的變化。

### 3-1 光子晶體共振腔結構設計

在本小節我們拿目前比較常 H1、L3還有qL2[50][51] 三種共振腔來比較，以選擇出較符合我們所期待的共振腔，再加以優化，這三種共振腔結構都為三角晶格排列，不使用四方晶格排列的共振腔是因為在四方晶格中不易有光子能隙產生，為了了解這三種共振腔共振模態的基本特性，我們首先從平面波展開法著手，而在參數的設計上必須考量未來元件設計的需求。在光子晶體理論中， $r/a$  的比例會影響光子能隙寬度  $r$  為空氣柱的半徑  $a$  為晶格常數，較大的光子能隙寬度，對光的侷限效果也相對明顯，但是也不是比例越大越好，因為  $r/a$  的比例是有一定的限制的，除了過大的  $r/a$  會使空氣柱佔據太多面積使得原件在製作上容易損毀，還有就是當  $r/a$  過大時光子能隙的反而會變小，因此我們在模擬計算上選取較權衡的數值  $r/a=0.3$ ，除了可以避免上述的問題，未來在調變空氣柱的大小時 ( $r$ ) 所容許的可調變量相對來說可以比較大。我們所使用的材料為GaN折射係數設為2.5，因此經由上述的設定我們可以計算出三種不同共振腔的共振模態，如圖3-1。圖3-1(a)-(c)分別為 H1 L3 以及 qL2 共振腔結構與共振模態電場分布，圖中上方為三種不同共振腔的形式，藍色部分的為GaN材料的部分紅色為空氣柱的部分，而下方為不同共振模態的電場強度分布圖 $|E_t|^2$ ，其中 $|E_t|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2$ ，由於往後的討論自發性輻射的控制將與電場有關，因此在此我們就不討論磁場的分布情況。

由圖3-1中我們發現H1有兩個共振模態，L3有五個共振模態，qL2有三個共振模態，利用平面波展開法計算共振模態時，我們也可以同時知道共振波長，我們將共振模



(a) H1型共振腔

(b) L3型共振腔

(c) qL2型共振腔

圖3-1 H1、L3、qL2共振腔與共振模態



態的順序由長波長到短波長排列，這邊值得注意的是，由於H1共振腔為完美的對稱結構，因此H1共振腔所擁有的兩個共振模態為簡併態，為了要完全了解三種共振腔共振模態的特性因此利用有限時域差分法(FDTD)分別針對這三種共振腔做初步計算，計算結果如表3-1。表3-1 為 H1、L3、qL2共振腔的共振模態的Q-factor， $V_m$ 以及在水平面上不同極化方向的能量比例分配。

表3-1(a) H1共振腔

	Q-factor	$V_m (\lambda/n)^3$	$\epsilon(\mathbf{r}) E_x ^2$	$\epsilon(\mathbf{r}) E_y ^2$
H1 mode A	406	0.401	0.31	0.69
H1 mode B	164.5	0.385	0.75	0.25

表3-1(b) L3共振腔

	Q-factor	$V_m (\lambda/n)^3$	$\epsilon(\mathbf{r}) E_x ^2$	$\epsilon(\mathbf{r}) E_y ^2$
L3 mode a	833.32	0.66	0.4	0.6
L3 mode b	124.03	0.78	0.79	0.21
L3 mode c	260	0.51	0.57	0.43
L3 mode d	310.5	1.6	0.24	0.76
L3 mode e	X	X	X	X

表3-1(c) qL2共振腔

	Q-factor	$V_m (\lambda/n)^3$	$\epsilon(\mathbf{r}) E_x ^2$	$\epsilon(\mathbf{r}) E_y ^2$
qL2 mode a	1476	0.346	0.31	0.69
qL2 mode b	334.9	0.66	0.87	0.13
qL2 mode c	X	X	X	X

其中Q-factor 的定義為

$$Q \equiv 2\pi \frac{\text{在共振頻率下所儲存的時間平均能量}}{\text{在共振頻率下一週期所消耗的能量}}$$

將共振腔儲存之能量U寫成時間的函數

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q} U \quad \text{其解為}$$

$$U(t) = U(0) \exp(-t/\tau_{ph}) \quad 3.1$$

$$\text{其中 } \tau_{ph} = Q/\omega_0 \quad 3.2$$

利用FDTD可得光子在共振腔內的衰減時間 $\tau_{ph}$ ，在此利用計算存在共振腔模態之能量以指數方式衰減的速率，可求出在共振頻率下光子晶體共振腔的Q值。Vm我們可以利用式(2.25)來計算，而在水平面的電場比例，我們將所得到的電場做歸一化的動作使得

$$\iiint \varepsilon(\mathbf{r}) |E|^2 d\mathbf{v} = 1$$

在半導體雷射共振腔的製作上，我們會希望共振模態的數量要少最好是單模，且共振模態的Q-factor要大，Vm要小，除此之外，為了要搭配 a-plane InGaN 的極化特性，我們還會希望共振模態的極化要為Y方向的極化，由表3-1中可以發現到雖然H1型的共振腔的共振模態數較少，而且有一個共振模態具有電場 $E_y$ 方向主導，但是由於共振模態的Q值太小且Vm稍大因此在這裡我們不考慮H1型的共振腔。

而L3型的共振腔具有五種不同的共振模態，每種共振模態的特性列於表3-1(b)，由表3-1(b)中我們可以發現有兩個共振模態是由電場 $E_y$ 方向主導L3 mode-a與L3 mode-d，其中L3 mode-d 我們可以發現其 $E_y$ 電場分配到的比例相當的多，但是此共振模態的Q-factor太小而且Vm太大並不符合我們的需求，而另外一個  $E_y$ 主導的L3 mode a共振模態具有較高的Q-factor，但是由於Y方向電場能量所分配到的比例較少，大約只有57%，因此我們推測，如果發光元件是利用具有Y方向極化特性InGaN量子井，將會因此降低雷射的自發性輻射速率增強因子，這部分我們將會在之後計算自發性輻射速率增強因子時證明，這邊有一個問題還必須釐清，如果能夠提高共振腔的Q-factor是否可以彌補因

為 $E_y$ 電場分量不足的問題，這個答案是肯定的，對於L3-a mode共振模態的研究已經有很多的研究團隊做過了，其中以日本 Prof. Noda 所率領的團隊在2003對於L3共振腔的左右的兩個空氣柱往外微調最具代表性[43]，該團對成功的將L3共振腔的Q值拉高到45000，但是該篇論文是討論的結果是針對矽在紅外波段的討論，矽在紅外波段的折射率大約為3.7，但是本文所討論的光子晶體材料是GaN且波段在藍光，折射率為2.5，因此所提升的Q值是否會像用矽所做的L3共振腔這麼的大我們抱持著懷疑的態度，因此在此我們在這裡也對GaN的材料的L3共振腔微調，我們同時計算微調過程中的Q-factor， $V_m$ 以及 $E_y$ 電場的變化，計算結果如圖3-2，由圖3-2我們可以發現Q-factor從833上升到約1600但是由於空氣柱向外擴展的關係迫使， $V_m$ 變大了 $E_y$ 電場的分量變小，最後所得到的自發輻射速率增強因子，增強的幅度不會太明顯，在這邊我們也發現到對於 GaN L3共振腔的微調後Q值的提升並不會像對 Si L3共振腔微調後差距這麼大，主要因為Q值變化對於較低折射率的反應不像高折射率一樣怎麼明顯，礙於篇幅的關係，我們在這邊不討論此問題，不過在2007年已有國外的團隊針對這個問題做探討了[52]

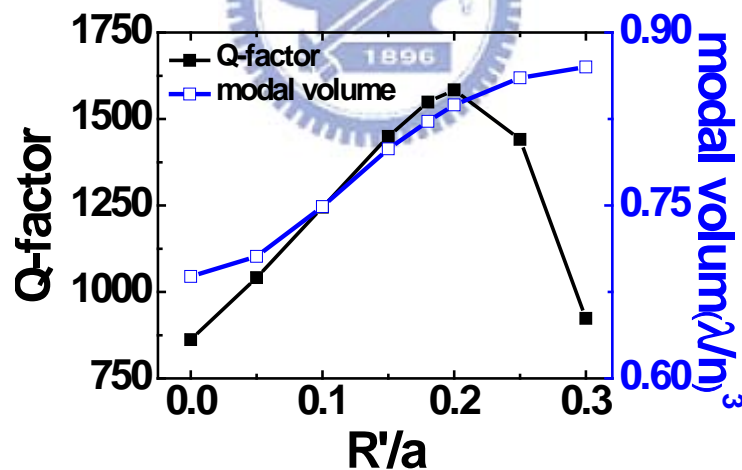


圖3-2 L3-a共振腔微調 Q-factor與 $V_m$  對空氣柱的位移量變化

對於L3 mode-a共振模態來說，由於 $E_y$ 電場極化所分配到的比率過低、Q值不夠大， $V_m$ 比H1共振腔模態還大，也不太符合我們的需求，而且L3共振腔的共振模態過多，因此在本論文中我們不使用L3型的共振腔來增強a-plane InGaN/GaN 量子井的自發輻射，

qL2[50][51]型的共振腔為日本的Prof. T.BaBa 所提出的H0型[40]共振腔為基礎加以改制而設計的結構，其主要的缺陷結構不像H1或L3型的共振腔，是將空氣柱填滿，而

是將光子晶體的其中兩個空氣柱之間移出一個位置，而在此本文在這邊先不討論最佳化的qL2共振腔而是先將qL2共振腔的特性做初步的了解，計算結果列於表3-1(c)，由表 3-1(c)我們可以發現到qL2型的共振腔主要有兩個共振模態，這與我們利用平面波展開法所計算的結果有所出入，其主要原因是因為FDTD的模擬為三維模擬，需要考慮光子晶體的厚度，而平面波展開法是假設在厚度的部分為無限大，而光子晶體的厚度的不同會造成原本因該存在的高階共振模態，在垂直方向無法對光有較好的侷限的能力而無法共振，因此我們利用FDTD的計算共振模態時，無法找到第三個較高頻的共振模態，經由FDTD所計算的結果，我們可以發現qL2共振腔的兩個共振模態其中之一為Ey電場所主導我們稱為 mode-a，其Ey電場比例大約為0.68，Q-factor在還未最佳化的情況下已經其值就大約有1476，而且qL2共振腔的 $V_m$ 與H1共振腔的 $V_m$ 差不多大約為 $0.34(\lambda/n)^3$ ，對於另外一個由Ex電場所主導的共振模態模態我們稱為mode-b可以發現，Ex電場所佔據的分量高達0.89，其Q值約350，雖然說沒有像Ey電場所主導的mode-a共振模態有將近1700的Q值，但是相對於L3具有高極化電場分量的模態來說，qL2共振腔由Ex電場所主導的mode-b共振模態其Q值的表現算是還可接受。最後，表3-2說明三種不同的共振腔以Ey電場所主導的共振模態(mode-a)比較結果。

**表3-2 光子晶體共振腔比較表**

	共振模態數	Q factor	$V_m$	$\epsilon(\mathbf{r}) E_y ^2$
<b>L3</b>	5	大	大	小
<b>H1</b>	2	小	小	大
<b>qL2</b>	2	大	小	大

如果要符合半導體雷射共振腔的製作需求，又要滿足極化具有強烈Ey電場所主導的共振模態，由表3-2可以告訴我們qL2型的共振腔比較符合我們的需求，因此本文在往後將以qL2共振腔為出發點，並且討論共振腔調變，對Q值、 $V_m$ ，以及共振模態電場的影響。

## 3-2 qL2光子晶體共振腔調變

在本節中我們將對qL2的共振腔做調變研究，調變的方法有分為兩種，第一種為水平空氣柱的調變，第二種為垂直空氣柱的調變，在調變的過程中我們討論共振模式的頻率、電場、Q-factor 以及  $V_m$  化，並且我們會發現到qL2共振腔在水平空氣柱與垂直空氣柱都有變動的情況下將有最好的表現，在水平與垂直空氣柱都有變動qL2共振腔，我們稱之為MqL2共振腔 (Modified qL2 Cavity)，本文所模擬的結構為GaN的獨立式板狀結構 (freestanding slab structure)，而使用這種結構的原因在於，獨立式板狀結構在垂直方向上利用介質與空氣折射率的差別，使得垂直方向因全反射的原因讓光侷限能力變好。

### 3-2-1 qL2共振腔水平空氣柱調變

qL2共振腔為將六角晶格的光子晶體其中兩根空氣柱向外縮減而產生的點缺陷，如圖3-3，本文的模擬以FDTD為主，所設定的空氣柱大小為 $r$ ， $r$ 為 $0.3a$ ， $a$ 為光子晶體的晶格常數，在這邊我們設定 $a$ 為 $140\mu\text{m}$ ，薄片的厚度設為 $d_{\text{slab}}$ ， $d_{\text{slab}}=0.7a$ ，這邊的參數設定主要是希望之後的調變能夠接近a-plane InGaN/GaN量子井的發光波長，為了要使的光子晶體共振腔發揮光子能隙的效應，使得共振腔在水平方向對光有強大的侷限能力，因此我們的光子晶體的數量不能設太少，在這邊我們用 $8\times 8$ 大小的光子晶體，其詳細模擬結構與參數見圖3-4，水平方向調變的空氣柱設定為 $R'$ ， $R'$ 的變化由 $0.275a\sim 0.1a$ 。計算結果如圖示。

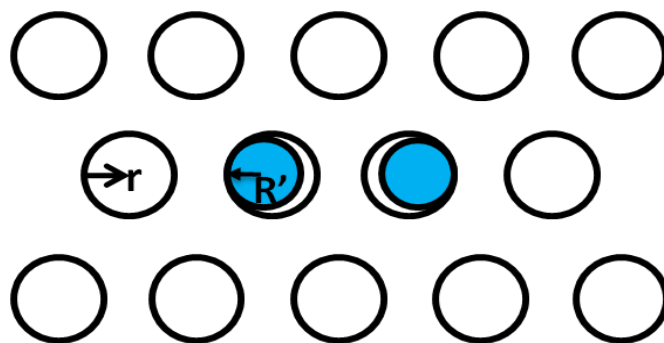


圖3-3 qL2共振腔



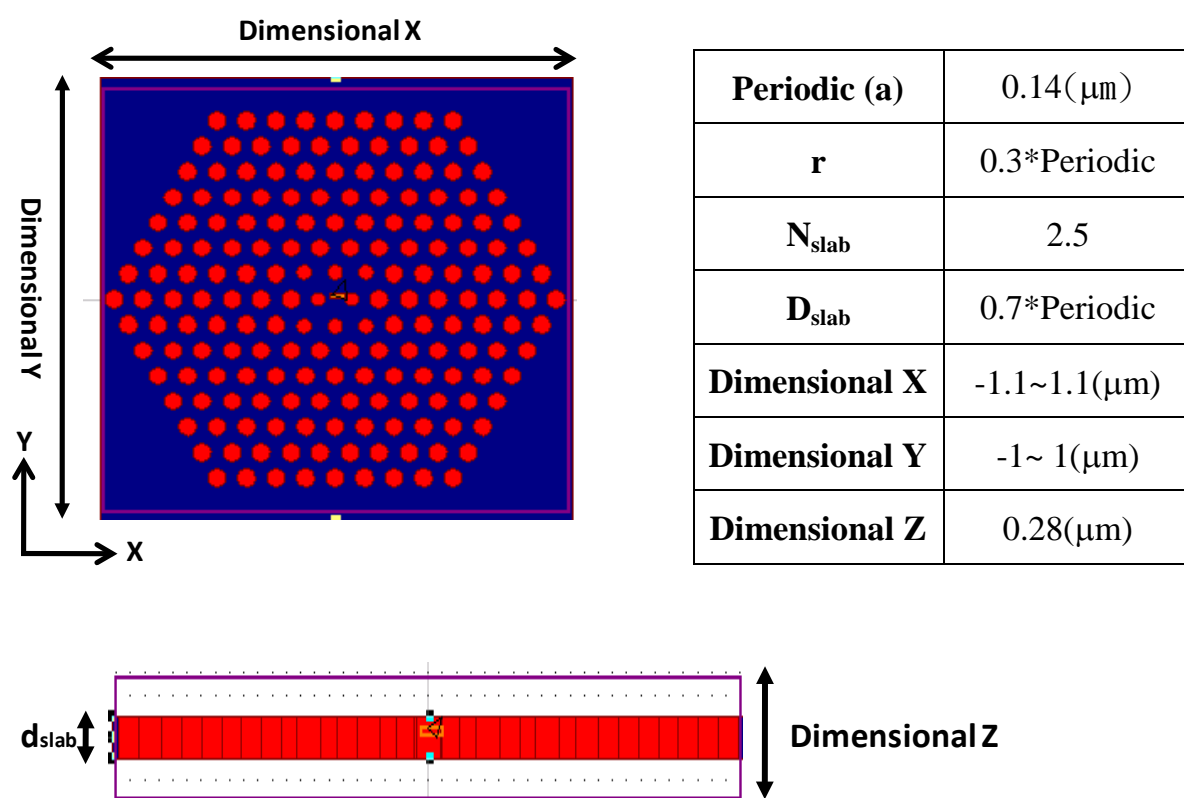


圖3-4 光子晶體模擬結構圖

### 3-2-1.1 共振模態波長分析

圖3-5為共振模態隨著 $R'$ 的變化，由計算的模態可以了解到對於每一個共振模態來說，在水平面上都會有兩個方向分量的電場( $E_x$ 與 $E_y$ )，而當 $E_y$ 的分量大於 $E_x$ 我們稱此模態為mode-a，反之稱為mode-b，圖3-6為mode-a與mode-b的波長隨著 $R'$ 的變化，由圖3-6我們可以發現到隨著 $R'$ 變小，不管mode-a或者mode-b的共振波長都會有紅移的現象，我們可以由前面所推導的駐波關係式說明，由於 $R'$ 的改變使得共振腔的腔長變長了，對於同一種模態，共振腔長度正比於共振波長，因此在這邊mode-a與mode-b的波長都有紅移的現象，值得注意的是，由mode-a與mode-b的波長紅移的量，可以發現調變水平方向的空氣柱時，mode-a的波長變化量比mode-b波長變化量還來的劇烈，圖3-7 mode-a 與mode-b 能量被侷限範圍示意圖，虛線的部分代表能量被侷限的範圍，由圖中可以發現當水平邊界條件發生改變後 mode-a電場擴散的程度比mode-b還來的劇烈，導致於mode-a 所看到的等效共振腔變化比 mode-b 看到的等效共振腔變化還來的大，因此mode-a的波長變化量

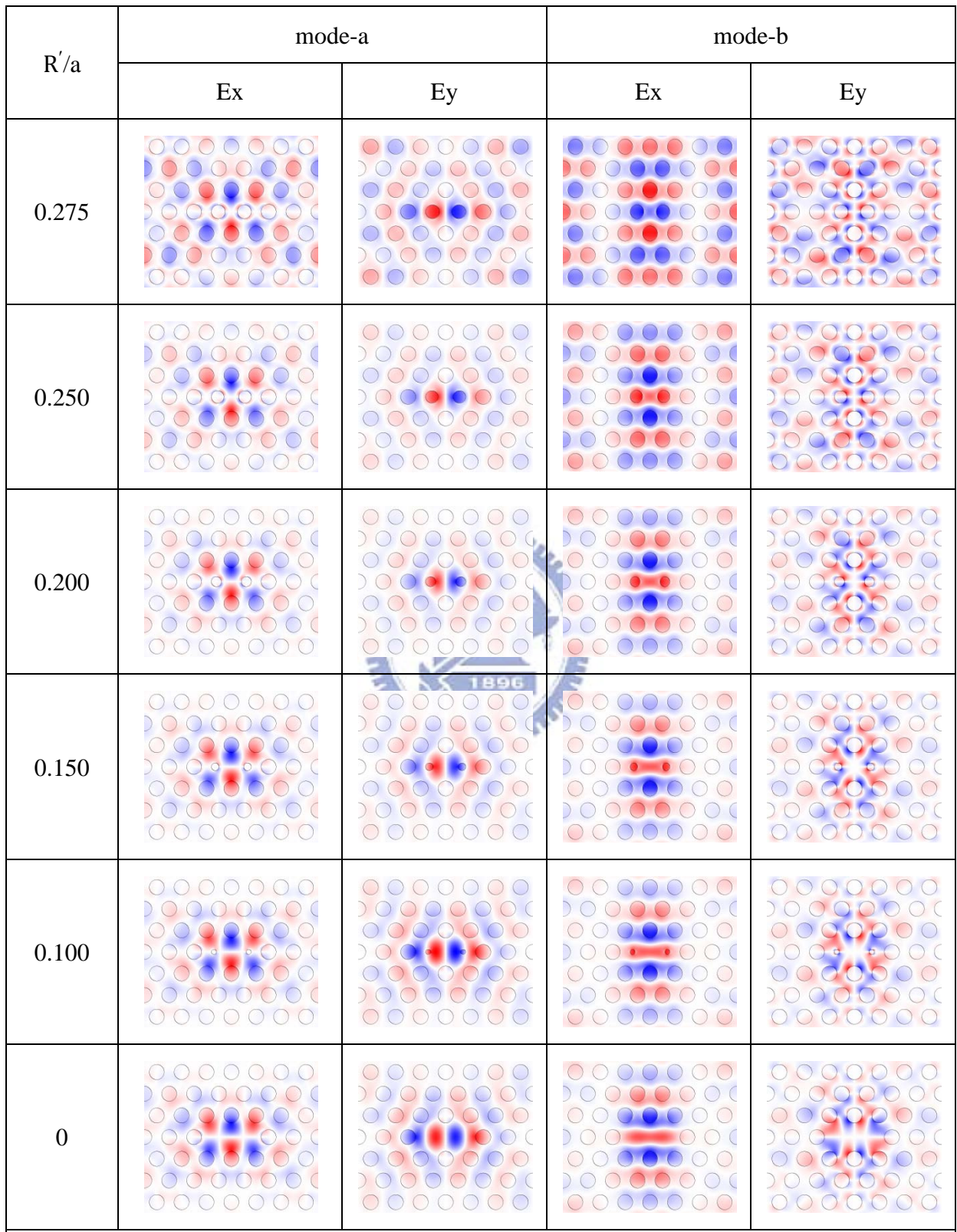


圖3-5 水平調變共振模態變化示意圖

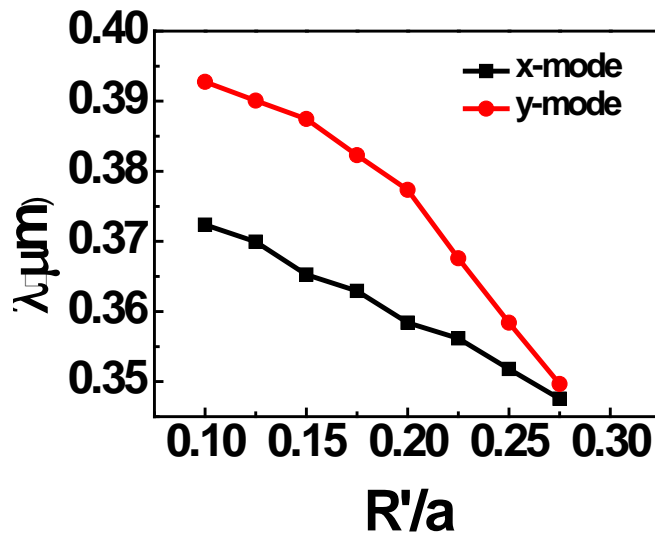


圖3-6 共振波長對R'關係圖

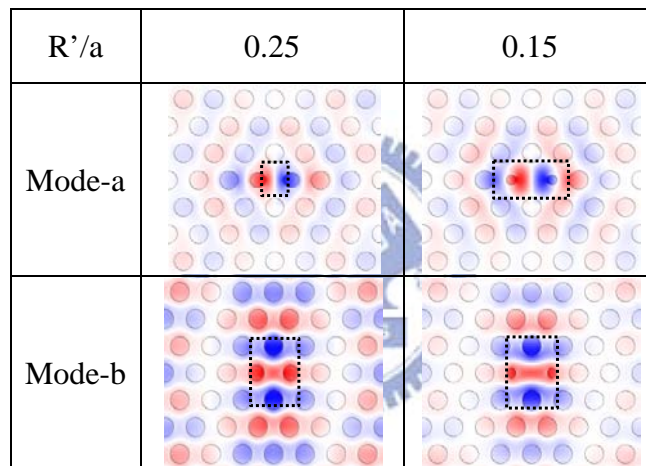


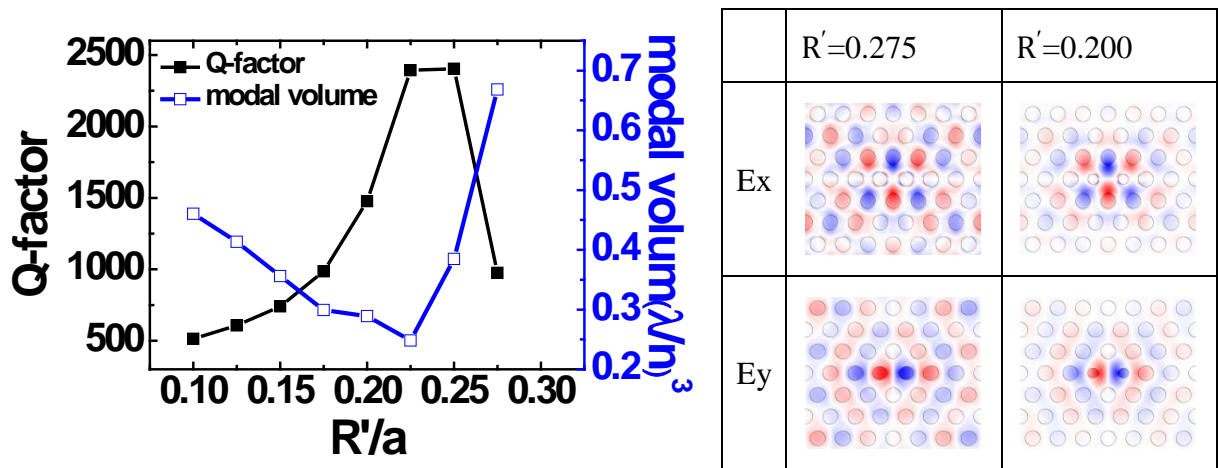
圖3-7 mode-a mode-b 能量侷限示意圖

比mode-b波長變化量還來的劇烈 而在此我們也可以定義，對於mode-a來說主要能量侷限方向為水平方向的空氣柱，也是mode-a的主要邊界，對於mode-b來說主要能侷限方向為垂直方向的空氣柱，也是mode-b的主要邊界。

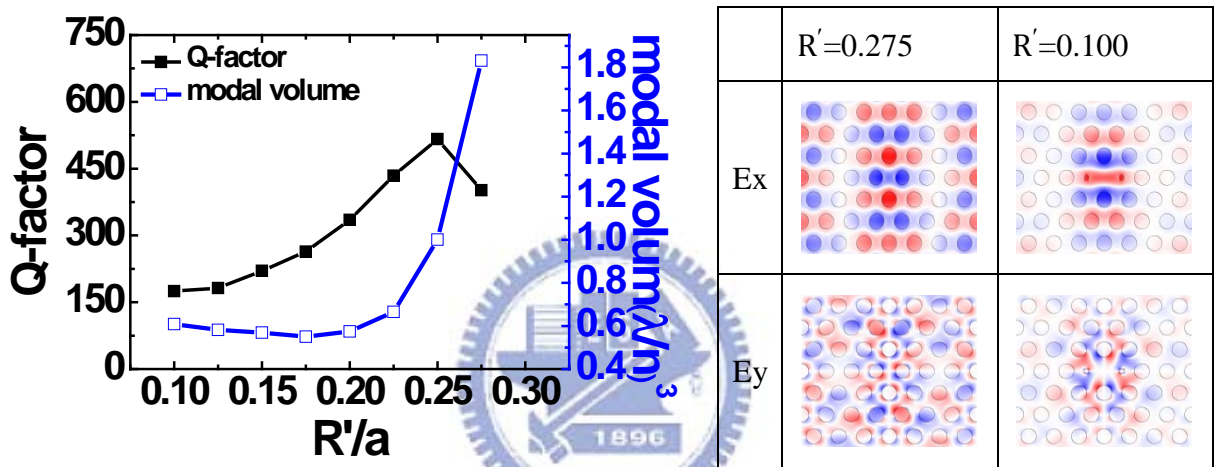
### 3-2-1.2 共振模態 $V_m$ 與Q-factor分析

圖3-8為FDTD所計算的 $V_m$ 與Q-factor對R'變化的關係圖，對於不同的R'會對應到不同的 $V_m$ 與Q-factor，首先對 $V_m$ 做分析，圖中可以發現到不管mode-a或者是mode-b當變動R'的時候都找到一個極小值的 $V_m$ ，由於 $V_m$ 為共腔對共振腔模態的包覆程度，在理想的情況下，共振腔越小 $V_m$ 越小，但是有時過小的共振腔會擠壓到共振模態，當擠壓程度





(a) mode-a



(b) mode-b

圖3-8 共振模態Q值與 $V_m$ 對 $R'$ 關係圖

大於共振模態所能承受的範圍，此時共振模態就會潰散而 $V_m$ 就會因此而變大，而當共振腔越大時共振模態所佔據的體積相對來也會變大，因此對於共振腔的共振模態而言，在調變 $R'$ 時可以找到符合該共振模態的 $V_m$ ，只是對於不同的共振模態來說，符合最小 $V_m$ 的情況是不同的，以mode-a來說最小的 $V_m$ 在 $R'=0.225a$ ，而mode-b最小 $V_m$ 在 $R'=0.175a$ ，以mode-a來說，當 $R'=0.2a$ 時由電場模態圖可以觀察到，因為的 $R'$ 水平空氣柱開始縮減共振腔變大，導致電場能存在的區間變多了， $V_m$ 上升，而 $R'=0.275a$ 時我們可發現到模態的崩潰，電場向外側溢出， $V_m$ 因此而變大，圖3-8電場變化。

接者我們來討論共振腔Q-factor變化的情況，較高的Q-factor能夠讓能共振腔內的量不易損耗，在我們所討論的二維光子晶體平板結構共振腔，在X、Y平面上為光子晶體

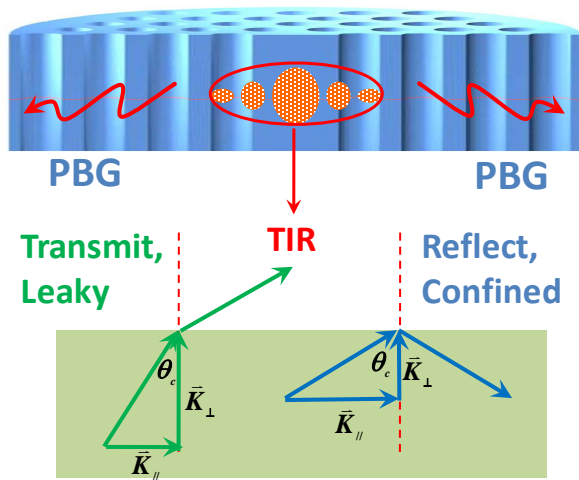


圖3-9 動量守恆全反射示意圖

結構，由於光子能隙的關係，在X、Y平面上對於光能量的侷限相當的好，但是對於Z方向，侷限光能量是靠全反射的效果，而全反射僅發生在入射光與法線的夾角大於臨界角的條件下，圖3-9，因此共振腔內能量的流失主要來自於Z方向小於臨界角的入射光能量。如果我們能提升入射角大於臨界角的能量比例，也就是將入射光的水平動量提升，降低Z方向的動量，此時共振腔在Z方向漏光的情況會改善，而共振腔的Q-factor就會因此提升。而在本章一開始的時候有提到Prof. Noda對於Si L3共振腔的調變就是基於這個理念，Prof. Noda 認為Q-factor會提升的原因，在於當空氣柱向外移動的時候TE偏振的電場在共振腔旁邊的空氣柱附近的邊界會變化的較平緩，因此能夠將水平動量提升，而減少了較低水平動量的比例，圖3-10[43]。由動量守恆得知，如果將水平動量的提升，則可降低Z方向的動量，因此可以增加全反射光的比例，能量將不易從共振腔流失因此

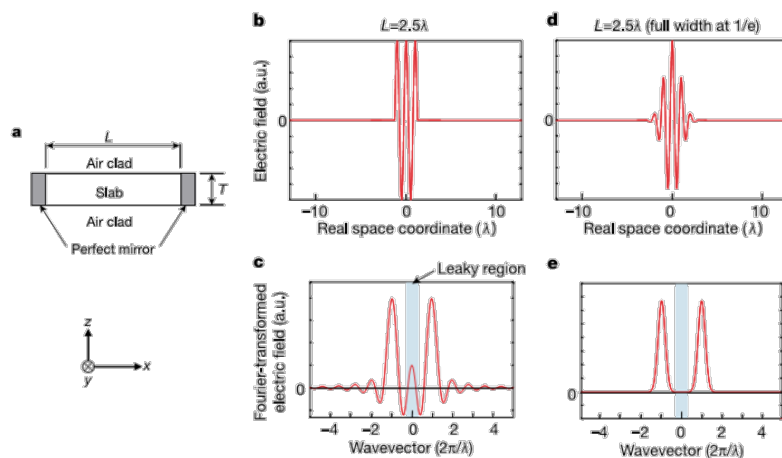


圖3-10 電場邊界條件變化與動量變化分布圖

Prof. Noda 的團隊利用了空氣柱位移的方式，將水平動量提升而提高了共振腔的Q-factor。而本文所探討qL2共振腔的空氣柱縮減有異曲同工之妙，我們同樣的經由空氣柱的縮減可以增加水平動量，由圖3-8可以得知隨著共振腔水平空氣柱的調變，Q-factor會有所改變，而且會有一個最好的Q-factor，為了進一步了解Q-factor隨著 $R'$ 的變化，我們利用三維FDTD計算出共振模態在水平方向上的電場分布，並且對電場做傅麗葉轉換，得到電場在動量空間的水平分量，圖3-11為mode-a在 $R'=0.1a$ 的 $E_y$ 電場進行傅麗葉轉換結果，圖中我們看到白色的圈圈是光錐，光錐是三維的斯乃爾定律所定義出來的全反射邊界，在光錐內的光由於水平動量較小，Z方向動量較大，不滿足臨界角的要求，只要動量落在

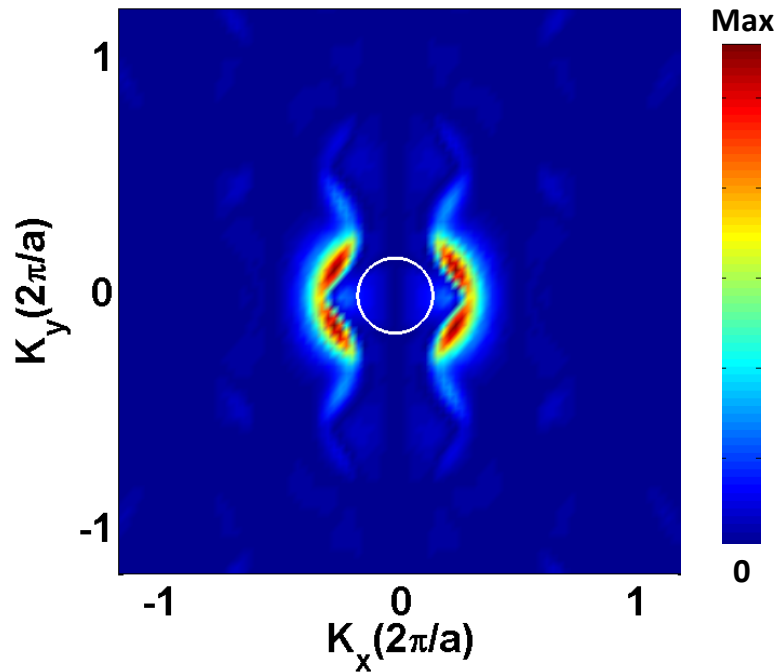
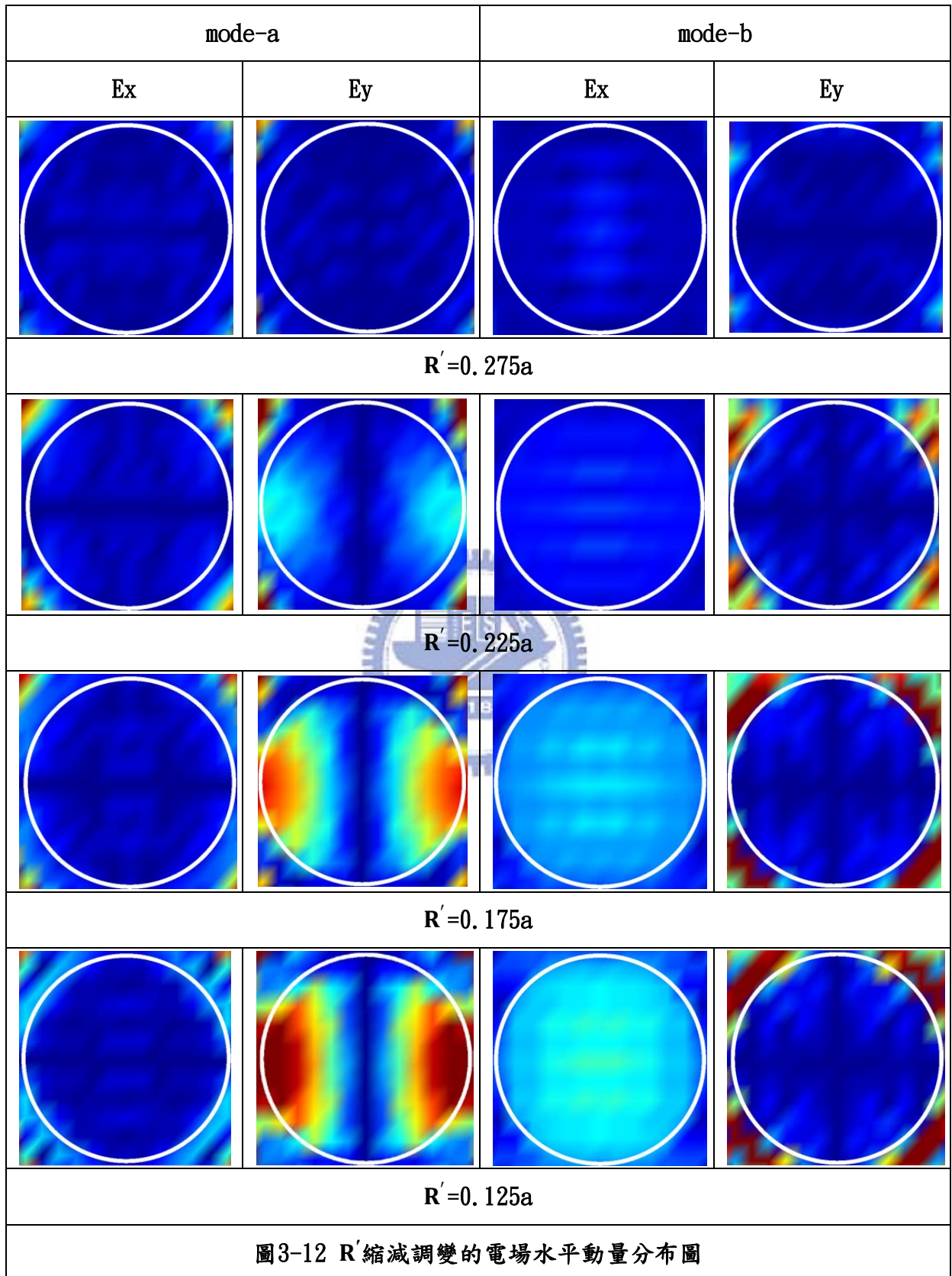


圖3-11 qL2共振腔mode-a  $E_y$ 電場強度在動量空間的分布( $R'=0.1$ )

圈內的光都會從共振腔內漏出角的要求，因此只要動量落在圈內的光都會從共振腔內漏出，我們會希望在光錐內的動量強度越少越好，這樣共振腔整體的Q-factor才會提升，圖3-12為 $R'$ 縮減調變時mode-a與mode-b電場在動量空間變化的情形，為了能清楚了解縮減調變對動量的變化我們只看光錐內部的區域，我們可以觀察到除了在 $R'=275a$ 以外，隨著 $R'$ 的縮減，對於光錐內的動量開始增加，以結果與之前我們所計算的Q-factor相當一致。

以mode-a來說在 $R'=275a$  的動量分布與計算的Q-factor不一樣的原因在於，對qL2共振模態來說cavity mode的形成是由band edge mode所演變而來的在 $R'=0.275a$ 的時候





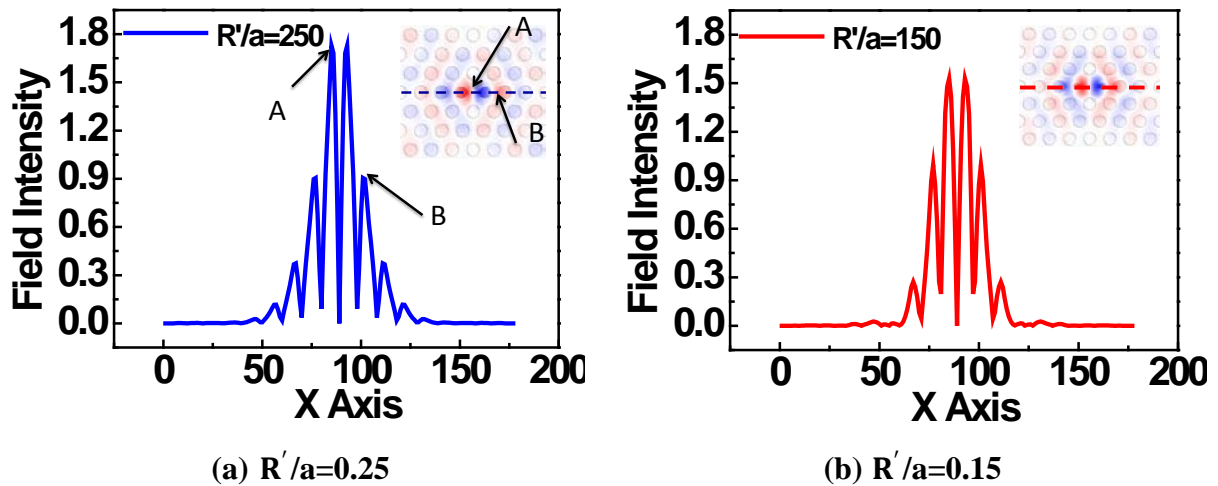


圖3-13 mode-a  $E_y$  電場剖面圖

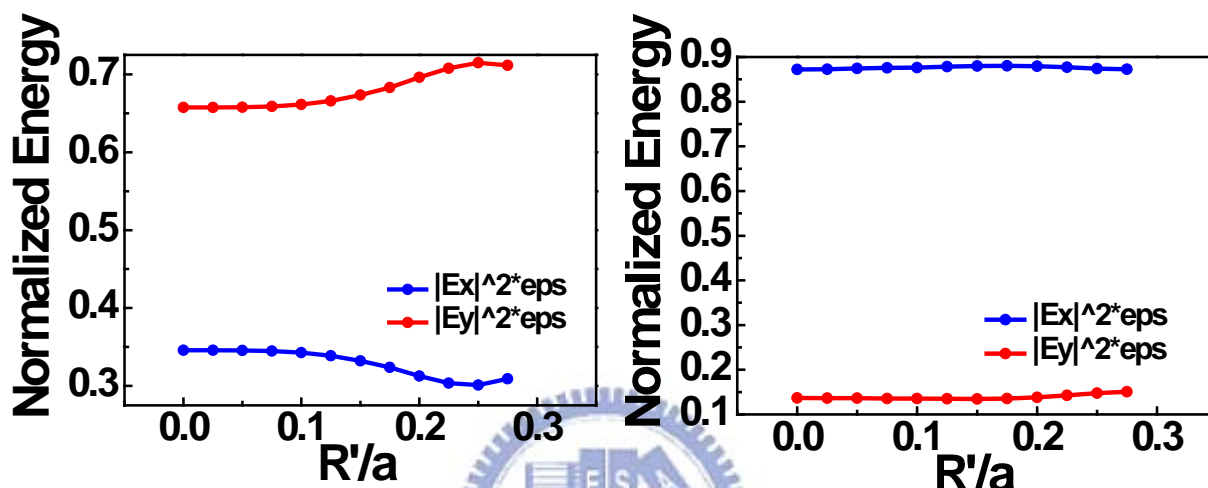
cavity mode 所表現的特徵不夠明顯，此時共振機制還是由 band edge mode 所主導，而 band edge mode 的共振形範圍是含了整個光子晶體，因此當光子晶體的層數不夠多的時候，能量就會從側向流竄出去造成 Q-factor 下降，

雖然當空氣柱向外移動的時候 TE 偏振的電場在共振腔旁邊的空氣柱附近的邊界會變化的較平緩，因此能夠將水平動量提升，而減少了較低水平動量的比例進而提升 Q-factor，但是隨著  $R'$  的縮減，主要影響電場得空氣柱慢慢由最內層的  $R'$  轉移到  $R'$  外側的空氣柱，隨著  $R'$  越小，外側空氣柱影響越明顯，因為被外側的空氣柱影響，此時外層電場在邊界會變化的又開始較劇烈，因此在  $R'$  小到一定程度後導致 Q-factor 會降低下來，圖 3-13 為  $R'/a=0.25$  與  $R'/a=0.15$  固定 Y 在 X 切面的電場分布，我們可以發現隨著  $R'$  的變小，最內側(A點)的電場值開始有所降低，而外側(B點)的電場隨著  $R'$  變小開始有所增加

在圖 3-12 中我們可以發現到對於 mode-a  $E_y$  動量的變動比  $E_x$  動量變動大很多， $E_x$  的動量分布幾乎沒什麼變化，其原因在於變動的邊界為水平邊界，而對於 mode-a 主要侷限為水平方向，當  $R'$  再進行變動的時候，對於  $E_y$  來說是在電場集中的位置進行調變，而  $R'$  空氣柱的調變對於  $E_x$  來說，是在電場的節點位置(電場密度較少的地方)，因此  $E_y$  動量的變動比  $E_x$  動量變動大；但是我們在 mode-b 卻看不到  $E_y$  動量的變動大於  $E_x$  動量的變動，可能原因有兩點，第一，前面我們有計算不同共振模態的電場比例，對於 mode-b， $E_x$  的比例遠大於  $E_y$ ，由於  $E_y$  分量過小，因此在變動水平空氣柱的情況下，對整體模態的影響也就不是那麼的重要。第二，由於 mode-b 的主要電場為  $E_x$ ，而由  $E_x$  的電場場圖可以知道，

有部分的Ex 電場與R' 空氣柱有所影響，因此在於Ex的電場比例遠大於Ey，且Ex的電場與R' 空氣柱有所影響下，則不難想像為什麼對mode-b來說Ex動量的變動量大於Ey動量的變動量。

### 3-2-1.1 共振模電場分析



(a) mode-a 電場能量 V.s. R' (b) mode-b電場能量 V.s. R'

圖3-14 電場能量對R'關係圖

圖3-14為mode-a與mode-b歸一化後，Ex與Ey電場能量隨R'的變化，由圖我們可以發現兩件事，第一，對於mode-b來說具有單一高極化的Ex電場能量；第二，當水平的空氣柱進行調變時mode-a的電場能量的變化程度比mode-b大，首先我們先說明為什麼mode-b具有高單一極化的Ex電場能量，圖3-15可知，我們在Y方向將光子晶體做切割，此時光

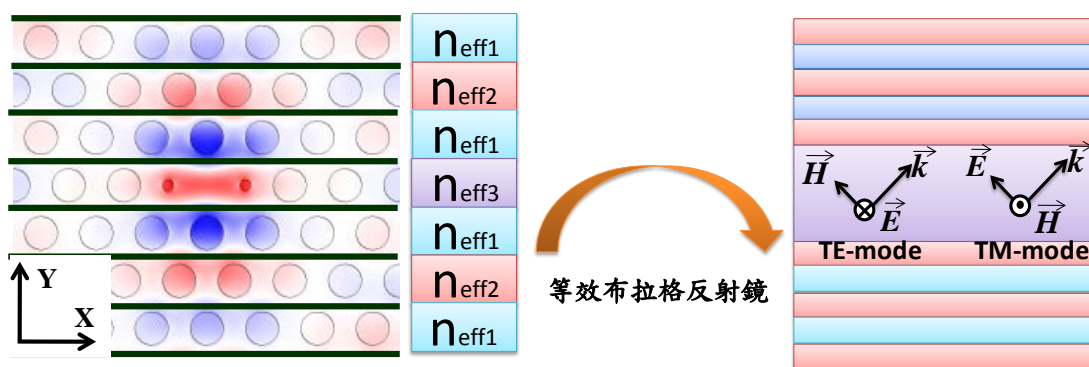


圖3-15 光子晶體等效布拉格反射鏡示意圖

子晶體的結構可以等效成一維布拉格反射鏡結構，對於布拉格反射鏡中，不同光能量的傳播形式可以分為電場平行反射介面(TE波)與磁場平行反射介面(TM波)，而mode-b能量主要傳播方向是以Y方向傳播，對於mode-b來說，其行為表現非常類似TE波的形式，因此mode-b具有高極化Ex電場能量。

接著來說明為什麼水平調變時，電場Ex與Ey的比例為什麼會發生改變，而且mode-a的電場能量變化幅度對於mode-b來的大，我們將mode-a的其中兩組共振模態挑出來做說明，回到前小節圖3-13為 $R'/a=0.25$  與 $R'/a=0.15$ ，圖中我們可以發現到共振模態電場密度最強的地方在水平空氣柱的邊界上(A點)，當 $R'/a=0.25$ 時電場在邊界受到空氣柱擠壓的程度比 $R'/a=0.15$ 還來的嚴重，由於電場受到擠壓，導致在邊界的電場密度提升，Ey的整體能量因此上升，對水平空氣柱進行縮減調變時，Ey在邊界上的電場密度受到釋放，能量因此降低，在調變水平空氣柱時，對於mode-a的Ex分量的影響沒有像對Ey影響那麼大的原因在於R'的空氣柱位於電場Ex分量的節點上，在節點上的電場密度比在邊界上小很多，因此在調變水平空氣柱時對於Ex的影響不大，調變的結果主還是影響了Ey電場，而由於歸一化的關係，圖3-14可以發到當Ey的能量變小後相對於Ex能量就有所提升，而在R'的空氣柱越來越小後對電場的影響也慢慢的減弱因此在R'小於一定的值後電場的變化量將趨近飽和狀態。

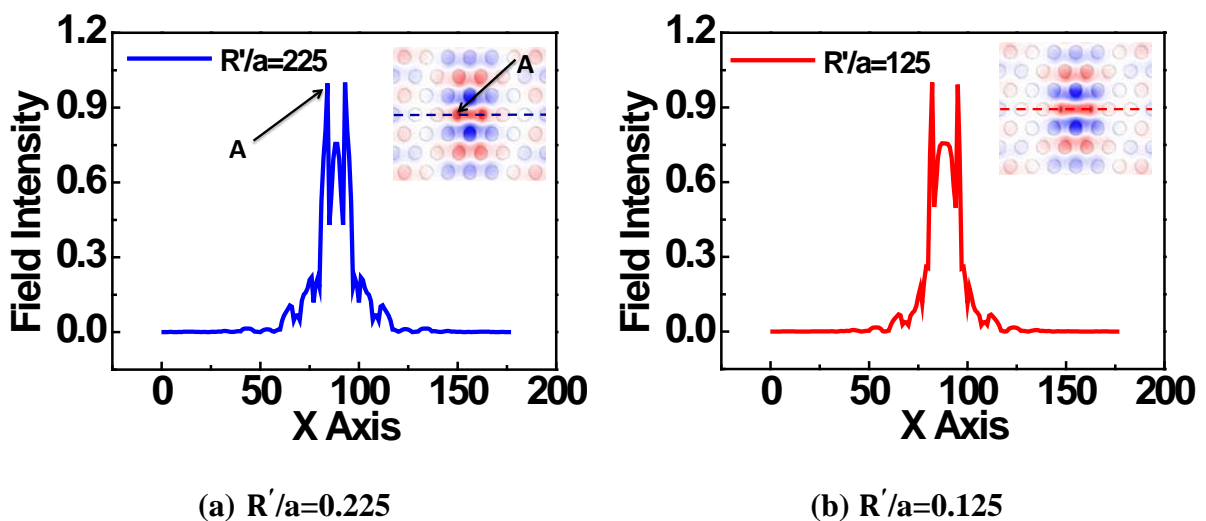


圖3-16 mode-b Ex電場剖面圖



對於mode-b而言我們發現當 $R'/a$ 改變時電場能量幾乎沒有什麼變化，由圖3-16對mode-b電場的截面圖可以觀察到，電場在邊界的密度(A點)幾乎沒有因為 $R'/a$ 的改變而有所變化，這很有可能是因為mode-b的行為類似DBR中TE波的形式，水平方向的邊界對於mode-b來說影響太過於微弱，因此在調變水平方向的空氣柱時，對於mode-b的影響沒有很大。

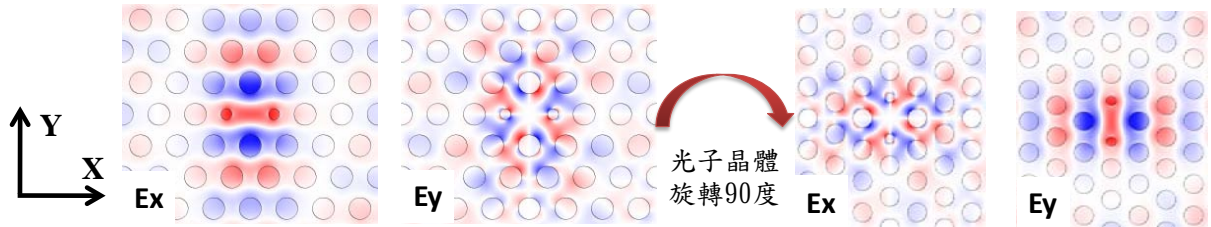


圖3-17 光子晶體經由90度旋轉，電場極化方向互換示意圖

以上的討論可以了解到，對於mode-a來說，電場的能量 $E_y$ 大於 $E_x$ 且能量的侷限方向主要為水平方向(對於 $E_y$ 電場能量的侷限)，而mode-b電場的能量 $E_x$ 大於 $E_y$ 且能量的侷限方向主要為垂直方向(對於 $E_x$ 電場能量的侷限)，在水平空氣柱的調變下，雖然對mode-a與mode-b都會有所影響，但是對於mode-a的影響程度還是比mode-b大的多。對於mode-a，水平空氣柱調變下，在 $R'=0.225$ 時，有較好的Q-factor，較低的 $V_m$ ，其 $E_y$ 電場比例大約為0.7。而對於mode-b來說電場極化能量主要是以 $E_x$ 方向為主，其比例高達80%以上，因此當遇上發光材料所發出來的光主要是以 $E_y$ 為主的元件，例如a-plane InGaN/GaN量子井，主要發光是以y方向電偶極震盪；此時空間上的耦合率太低了，導致無法有效的提升自發輻射反而還有可能降低元件的發光效率，雖然說我們可以將光子晶體旋轉90度使得mode-b的 $E_x$ 與 $E_y$ 方向的電場互換如圖3-17，但是其效率與表現還是沒有mode-a來的好，因此在往後的討論與光子晶體的設計我們以mode-a為主。

### 3-2-2 qL2共振腔垂直空氣柱調變

由3-2-1我們可以了解到水平空氣柱的調變，對於qL2共振腔不同共振模態的Q-factor， $V_m$ ，以及電場分量的影響，而由前小節的結果我們也了解到，水平空氣柱的調變不只有對mode-a有影響，對於mode-b同樣也會發生影響，而發生影響的原因在於，電場在邊界的條件發生改變了，前面我們也有討論到對於mode-b來說，由於 $E_y$ 的電場比例過少，而

且mode-b的所看到光子晶體所表現的行為相當類似DBR的TE-mode，導致在進行水平空氣柱調變時對於mode-b的影響有限，但是對於mode-a來說Ex電場的比例與Ey電場的比例不會相差那麼多，mode-a所看到光子晶體的行為表現並不像mode-b，而且由圖3-5電場圖可以發現到mode-a的Ex電場分布在六個空氣柱邊界有較高的電場密度，因此我們在想，如果針對這六個空氣柱作縮減調變的話，mode-a共振模態的Q值是否會變好，而且由前面的討論，我們可以知道當空氣柱在電場密度較高的地方進行縮減時，此時對於該電場的能量會下降，相對的另外一個方向的電場會上升，因此當我們針對光子晶體的垂直空氣柱調變時，mode-a的電場比例分布，Q-factor以及 $V_m$  應該會有所改變。

圖3-18為MqL2共振腔 (Modified qL2 Cavity) 主要為針對qL2共振腔的垂直空氣柱做調變，由前章節我們知道對於mode-a來說qL2共振腔在 $R'/a=0.225$ 時有最佳的表現，因此我們將水平空氣柱的 $R'/a$ 定在0.225，並且定義我們要調變的垂直空氣柱為 $r'$ ， $r'$ 的變動我們由 $0.325a$ 到 $0.15a$ ，

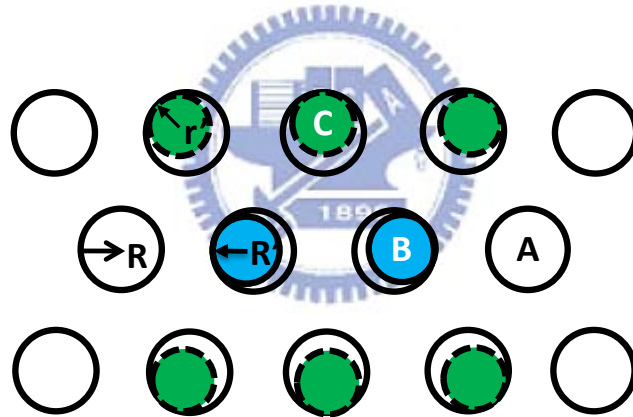


圖3-18 MqL2共振腔

圖3-19為變動 $r'$ 時mode-a與mode-b的頻率變化，由於討論垂直方向的空氣柱縮減因此我們可以發現再改變垂直方向的邊界條件時，對於mode-b的頻率變動相對於mode-a大上很多，這邊與我們前小節的討論結果相當一致。

圖3-20為變動 $r'$ 時mode-a的電場能量的比例變化，由圖中我們可以發現到將 $r'$ 做縮減調變時， $E_y$ 電場的比例有明顯的提升，其主要原因為當改變垂直空氣柱時，將Ex分量電場密度較高的進行了釋放，圖3-21為mode-a在不同的 $r'$ 下Ex在虛線的電場截面圖，圖中我們發現到隨著 $r'/a$ 由0.3變到0.2時在邊界的電場密度有下降的趨勢，導致能量發生轉移與改變，因此降低了Ex分量的電場能量而提高了Ey方向的能量，這邊我們也發現到，

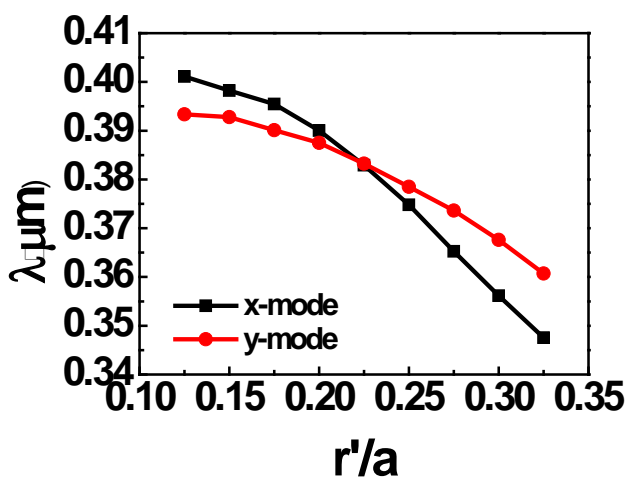


圖3-19 共振波長對r'關係圖

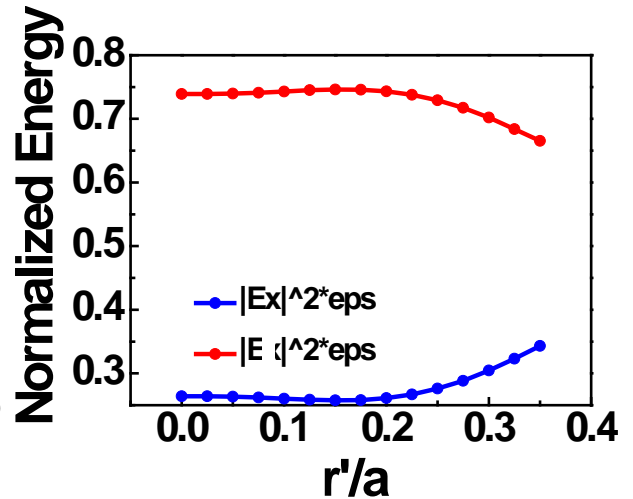


圖3-20 mode-a電場能量對r'關係圖

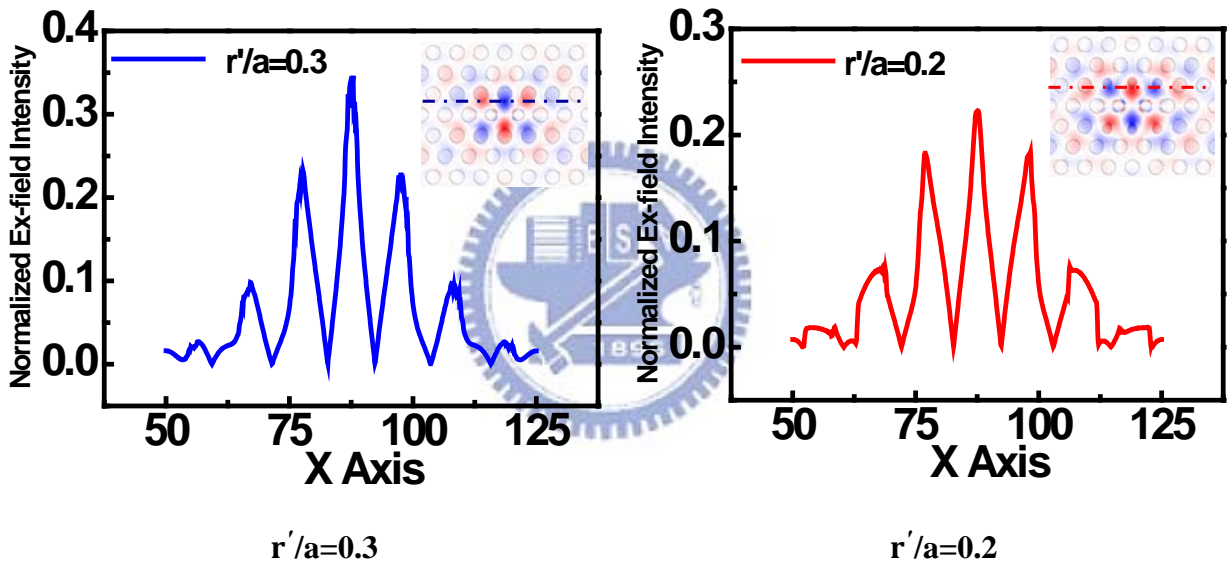
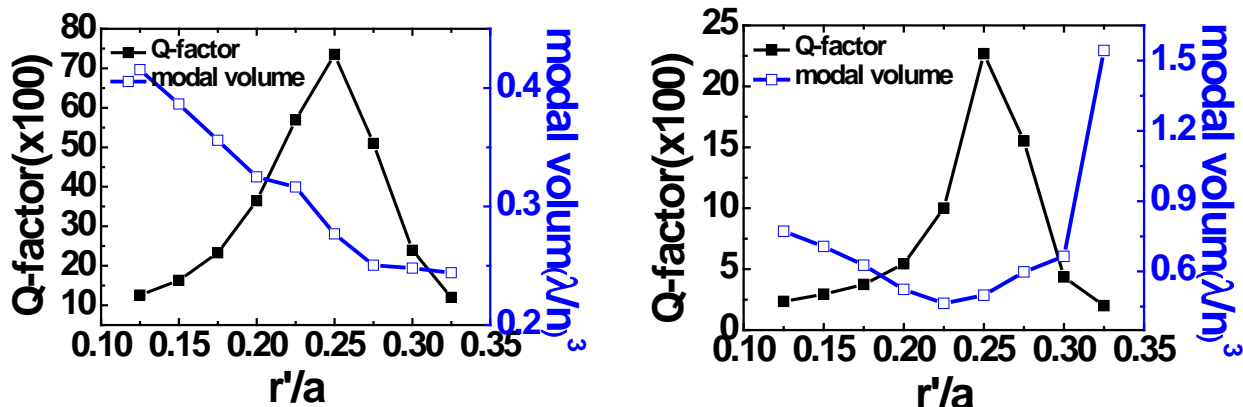


圖3-21 mode-a Ex電場截面圖

當r'做縮減時電場並不是正相關的變動，而是一開始的變動很大，之後慢慢的變飽和，這是由於r'的改變對電場的影響慢慢變小了，取而代之的影響為更外層的空氣柱

圖3-22為對垂直方向空氣柱調變，所得到的Q-factor與Vm變化關係，對於mode-a來說，當將r'變大的時候，共振模態Ey分量的電場被包覆的更好且模態沒有因擠壓而潰散，因此Vm在r'變大時變小，在這邊我們沒有看到最小的Vm，但是我們相信當r'在變大下去時，模態必定會崩潰導致Vm變大。在這邊沒有找到最小的Vm並不會影響我們對於MqL2共振腔的調變，原因在於由電場能量的變化可得知對於mode-a來說r'變大時Ey的能量會迅速的下降，因此不符合我們所期待的結果。對於Q-factor的變化我們發現到不管mode-a



(a) mode-a

(b) mode-b

圖3-22 mode-a 與 mode-b Q-factor 與  $V_m$  對  $r'$  的關係圖

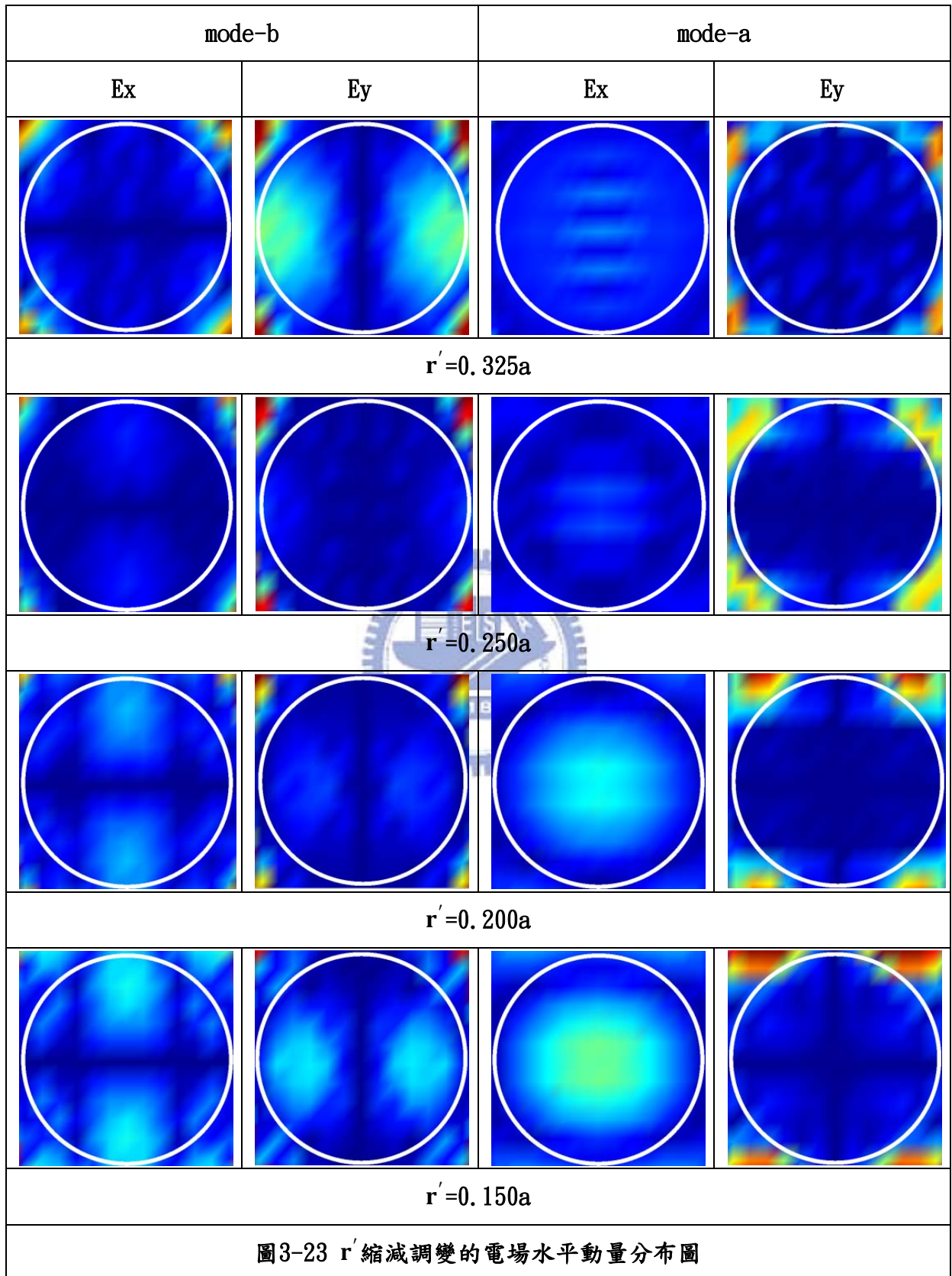
與mode-a在 $r'/a=0.25$ 的時候都會最好的Q-factor值，而在這邊的調變使得Q-factor會變化是因為侷限 $E_x$ 電場的邊界條件發生改變了，而最後會掉下來的原因與之前改變變水平邊界條件一樣，由最內側的空氣柱變小了，導致影響電場的邊界條件由第二內側的空氣柱取而代之。在這邊我們也將FDTD所跑出來的電場圖做富麗葉轉換得到電場在K空間的動量分配，圖3-23，由圖中我們可以看到當改變垂直方向的邊界條件不管對mode-a還是對mode-b 經由電場 $E_x$ 所做的傅麗葉轉換，光錐內的水平動量的比例都有改變的現象。這也說明了藉由不同邊界的調變可以影響不同方向電場變化，進而影響到Q值的改變。

因此我們將水平空氣柱調整所設計的光子晶體，其調變的結果定在 $R'=0.225$ 、 $r'=0.250$ ，其對mode-b與mode-a的電場能量比例分配、Q-factor， $V_m$ 以及 Purcell factor 的值列於表3-3。

表3-3 MqL2共振腔優化結果

	$E_x$	$E_y$	Q-factor	$V_m(\lambda/n)^3$	$F_p$
Mode-a	0.28	0.72	7352	0.276	2024
Mode-b	0.83	0.17	2821	0.375	571





在前面我們討論了光子晶體第一層空氣柱的調變對波長，Q-factor、 $V_m$ 、電場能量比例分配的討論，而在本章一開始的參數設定我們將 $d$ 光子晶體厚度定在0.7倍的週期大小，圖3-24 我們考慮厚度上對於Q-factor 波長  $V_m$  的變化，我們發現到最好的厚度在0.6倍的週期大小，與我們所設定的0.7倍的週期大小不會相差太多。

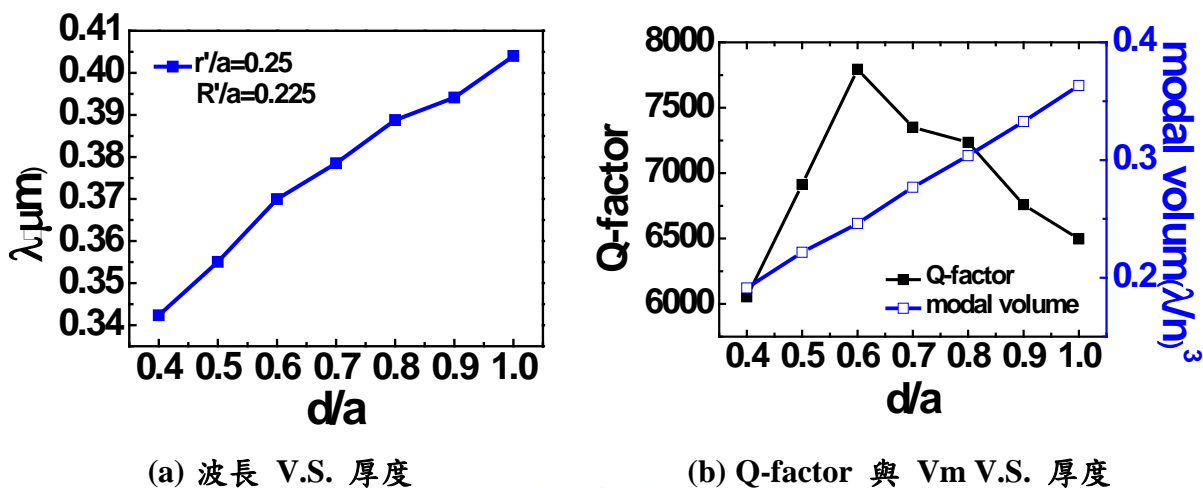
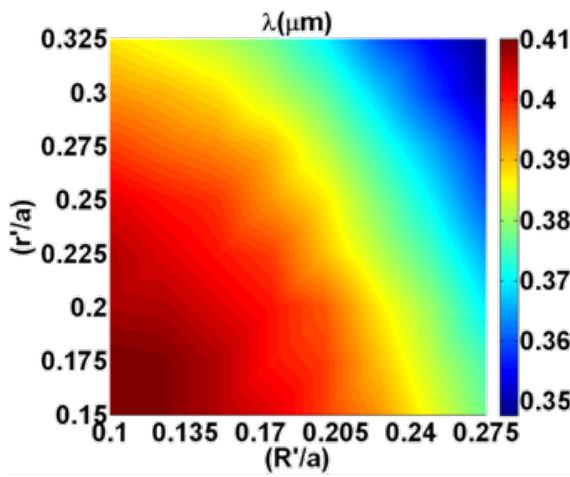


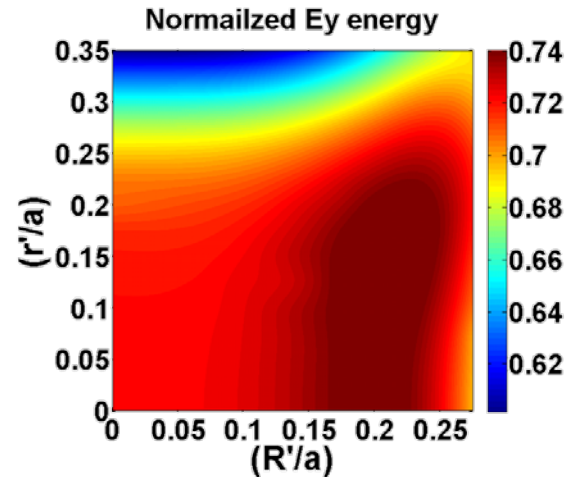
圖3-24 mode-a 改變厚度( $d$ )對波長、Q-factor、 $V_m$ 關係圖

在本章的最後我們來討論一個問題，當在調變共振腔時，是先將水平空氣柱最佳化後再調變垂直空氣柱，這邊有個小問題，當在調變 $r'$ 時， $R'$ 的最佳點會不會跑掉，要驗證這個問題我們必須將 $r'$ 與 $R'$ 的每一點結果計算出來，但由於FDTD是個相當耗費時間與資源的計算，因此我們只針對mode-a的結果做討論，圖3-25為調變MqL2共振腔mode-a的頻率、電場、Q-factor、與 $V_m$ 的二維圖，由圖3-25(a)頻率對 $R'$ 與 $r'$ 的變化關係，可以看到隨著 $R'$ 與 $r'$ 的縮減頻率會有紅移的現象，原因前面已經提過這邊不在論述。而由圖3-25(b)我們可以觀察到mode-a我們所設定的最佳點並不是 $E_y$ 電場分量最強的的地方，但是在水平空氣柱固定在 $R'=0.225$ 的情況下所對垂直空氣柱 $r'$ 調變後的結果會是較好的，而對於 $R'$ (水平)與 $r'$ (垂直)的調變也顯示出水平空氣柱 $R'$ 越大越好，而垂直空氣柱 $r'$ 則是越小越好，在圖3-25(b)右下角的電場變化與整體的變化幅度有些不太一樣，因為在右下角的共振模態不太穩定有潰散的現象。圖3-25(c)為Q-factor對 $R'$ 與 $r'$ 的變化，由圖可以看到Q值的最高點確實在 $R'=0.225$ 與 $r'=0.25$ 與我們之前所調變的結果相吻合，其主要原因在於微調共振腔的空氣柱，變動垂直方向的邊界條件並不會對水平方向的邊界有

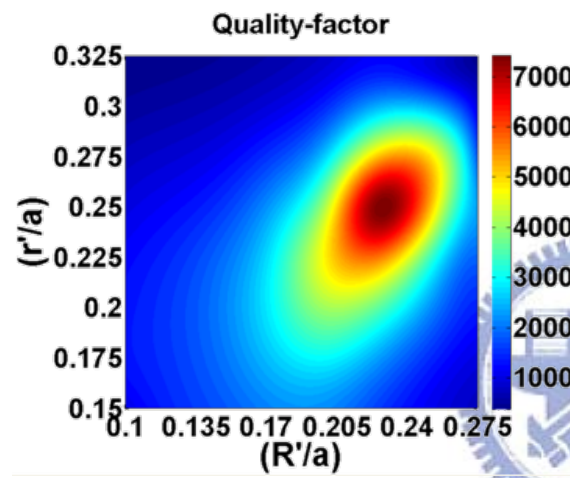




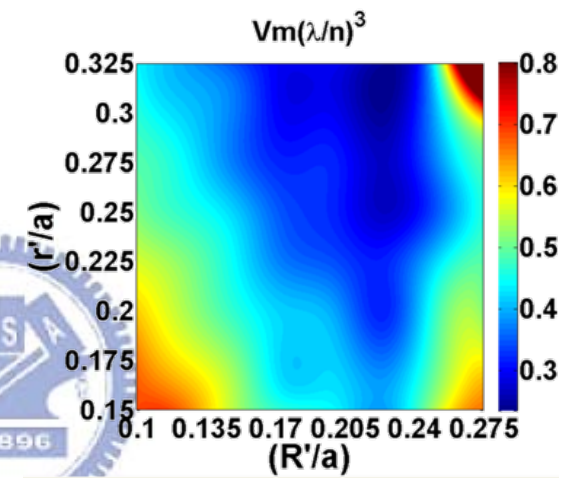
(a) 頻率對 $r'$ 與 $R'$ 變化的關係



(b)  $E_y$ 電場對 $r'$ 與 $R'$ 變化的關係



(c) Q-factor對 $r'$ 與 $R'$ 變化的關係



(d)  $V_m$ 對 $r'$ 與 $R'$ 變化的關係

圖3-25 共振模態 mode-a 對  $r'$ 與 $R'$  變化的關係

太大的影響，而且我們前面也提到了Q-factor會上升的原因在於電場與邊界的交互作用，對電場 $E_x$ 來主要的邊界為垂直空氣柱，而對電場 $E_y$ 來說主要的邊界為水平空氣柱，因此我們可以將水平調變與垂直調變視為獨立分開的，這邊有一點要注意，如果對電場的模態不是像我們所討論的，不同方向的電場會由不同邊界來決定侷限，或者對於共振腔的調變是大幅度的情況下，則此方法可能不適用，圖3-25(d)則顯示了等效值模態體積對 $R'$ 與 $r'$ 的變化，可以發現不管 $r'$ 為多少最小的都在 $R'=0.225a$ 的位置。因此由圖3-25我們可以確定經由共振腔最內側的空氣柱調變，我們可以操控共振模態的頻率 電場 Q-factor 以及 $V_m$ 。

## 第四章 A-plane InGaN/GaN SQW自發輻射控制

本章節將分兩個部分討論，第一部分將討論a-plane InGaN/GaN single quantum well (SQW) 極化光的特性，並且計算不同In比例與SQW厚度的自發性輻射，在計算的結果我們發現對於不同的In與SQW其電場極化率的比例不一樣，而在第二部分我們將討論根據前面所設計的光子晶體，在這樣的材料下，自發輻射增強的程度有多大，並且計算不同極化率下，自發性輻射增強因子會如何改變。

### 4-1 a-plane InGaN/GaN SQW 極化光特性分析 [53]

本文的第二章有介紹到，為了要避免內建電場造成的QCSE效應使得電子電洞的複合效率降低，因此目前在研究上希望以非極性面 a-plane 或者是 m-plane 的 InGaN/GaN 量子井取代c-plane InGaN/GaN 量子井，由於長晶面的方向不同a-plane InGaN/GaN SQW 與c-plane InGaN/GaN SQW 的應力分布的情況是有所差別的，對於c-plane InGaN/GaN量子井在x-y平面的應力是一樣的，但對於a-plane InGaN/GaN量子井在x-y平面的應力卻是不匹配的，由於x-y平面應力的不匹配會使得能帶結構產生改變，而此改變除了對a-plane InGaN/GaN電性有影響外也可會對發光特性造成影響。為了了解應力的不匹配對發光特性造成影響，我們利用 self-consistent Poisson 以及  $6 \times 6 \vec{k} \cdot \vec{p}$  Schrodinger method 帶入 self-consistent model 內求解a-plane InGaN/GaN SQW 的自發性輻射速率，經由 self-consistent model 我們可以求得的資訊有能帶結構(band structure)、費米能階、(Fermi level)，電子、電洞波函數 (wave-functions)，以及不同方向的自發性輻射速率，圖4-1為self-consistent model 計算流程圖，其計算步驟如下：

1. 求解 poisson equation 得到 initial guess。
2. 利用  $6 \times 6 \vec{k} \cdot \vec{p}$  Schrodinger method 得到能帶結構的相關訊息。
3. 考慮載子在量子井內的分布。
4. 求解poisson equation非線性項並且檢查所得結果是否收斂，如果未收斂，將所得結果

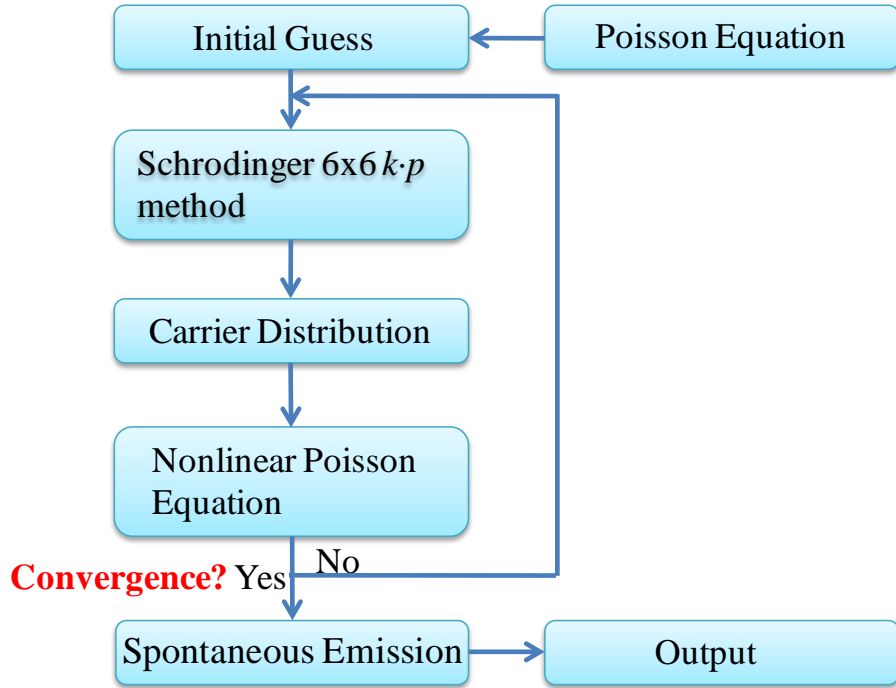


圖4-1 self-consistent model 計算流程圖

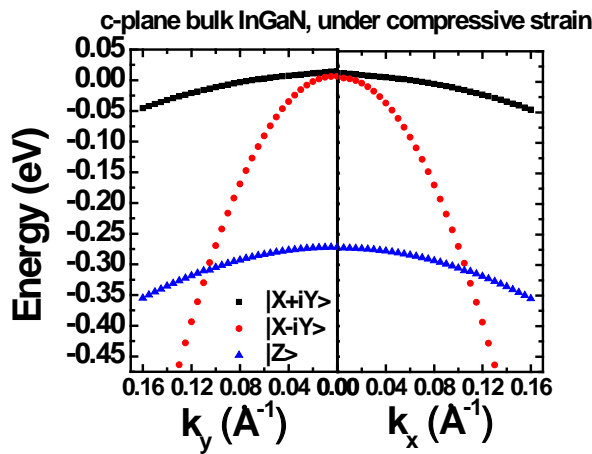
帶回到第一步驟且重複此4個步驟。

5. 如果收斂則將所有的資訊帶入式 4.1得到量子井的自發性輻射速率。

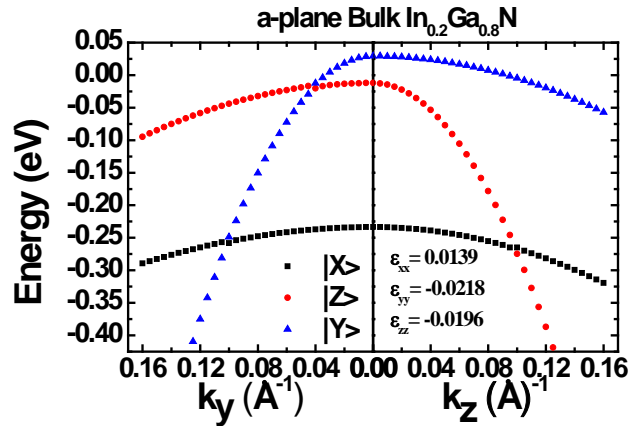
式4.1為計算 polarization-dependent 自發輻射速率

$$\begin{aligned}
 R_{sp}^{free} = & \int d(\hbar\omega) \frac{e^2 n_r \hbar\omega}{m_0^2 \epsilon_0 c^3 \hbar^2} \sum_{ij} \int \frac{2}{(2\pi)^2} d\vec{k}^2 |\langle \Psi_j | \hat{\alpha} \cdot \vec{p}_{ij} | \Psi_i \rangle|^2 \\
 & \times \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(E_{ij} - \hbar\omega)^2}{2\sigma^2}\right) f^e(E_i^e(\vec{k})) f^h(E_j^h(\vec{k}))
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1式中的 $n_r$ 代表材料的折射率前面的係數包含了電場與自由空間中的光子態密度 (photon density of state)的化減， $E_{ij}$ 為能帶結構中導電帶與價電帶的能階差， $\sigma$ 為不均勻擴展因子 (inhomogeneous broadening factor)， $|\langle \Psi_j | \hat{\alpha} \cdot \vec{p}_{ij} | \Psi_i \rangle|^2$ 為計算電子與電動波函數複合機率的動量矩陣元素 (momentum matrix element)， $\Psi_i \Psi_j$ 為電子電動的波函數  $f^e, f^h$  為 Fermi-Dirac function 與注入電子密度有關。圖4-2(a),(b)為用  $6 \times 6 \vec{k} \cdot \vec{p}$  Schrodinger method計算c-plane 與 a-plane  $\text{In}_{0.2}\text{Ga}_{0.8}\text{N}$ -bulk 的能帶結構圖，由圖中我們可以發現到，由於應力的不對稱性，使得原本在價電帶應該偶合在一起的重電洞 (heavy



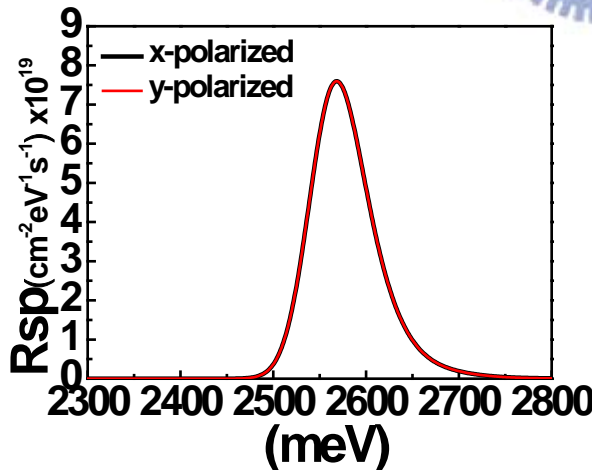
(a) c-plane InGaN bulk



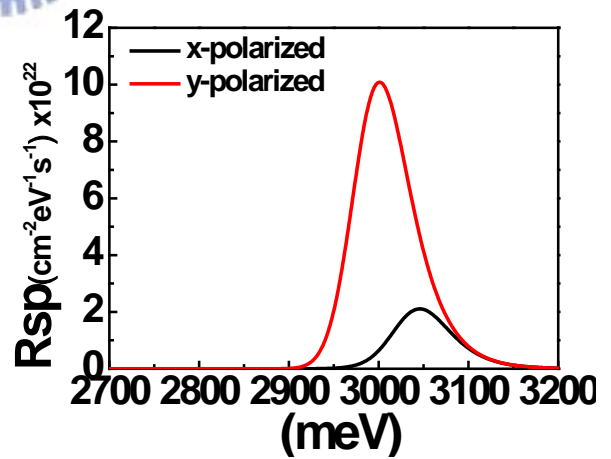
(b) a-plane InGaN bulk

圖4-2 c-plane與a-plane InGaN bulk 價帶能帶結構圖

hole)  $|X + iY\rangle$  與輕電洞(light hole)  $|X - iY\rangle$  分裂開成為  $|Y\rangle$  - like state 以及  $|X\rangle$  - like state 而對於a-plane  $\text{In}_{0.2}\text{Ga}_{0.8}\text{N}$ 的 $|Y\rangle$  - like state 在價帶中為能量最低的狀態，因此當電子、電洞符合時  $|Y\rangle$  - like state 將會主導整個發光的特性，在了解因為應力的不對稱性造成能帶分裂後，我們計算c-plane與a-plane  $\text{In}_{0.2}\text{Ga}_{0.8}\text{N}/\text{GaN}$  SQW 在相同電流的注入下，電子、電洞復合後自發輻射的情況，圖4-3(a)(b)分別為c-plane 與a-plane  $\text{In}_{0.2}\text{Ga}_{0.8}\text{N}/\text{GaN}$  SQW的自發輻射輻射速率，由圖中可以告訴我們兩個資訊，



(a) c-plane InGaN/GaN SQW



(b) a-plane InGaN/GaN SQW

圖4-3 c-plane與a-plane InGaN/GaN SQW 自發輻射速率頻譜

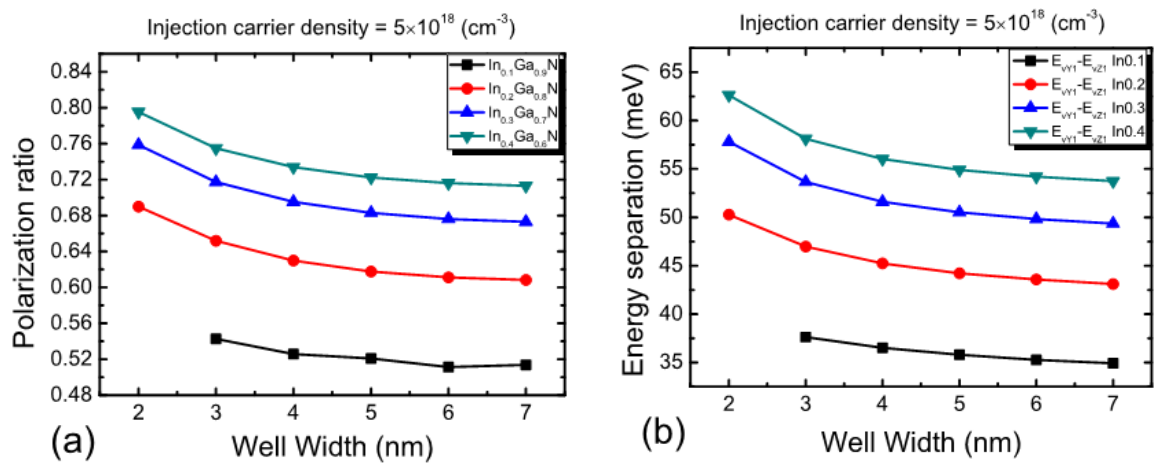
1.a-plane 的自發輻射速率明顯比c-plane大上許多，這是由於a-plane InGaN/GaN SQW 克服了QCSE效應，讓電子、電洞波函數符合效率增加，因此自發輻射速率整體的提升。

2. 在InGaN/GaN SQW的自發輻射速率圖可以發現到，由於c-plane InGaN/GaN SQW  $|X + iY\rangle$ 與 $|X - iY\rangle$ 的能帶是耦合在一起的，因此兩個能帶的自發輻射頻譜幾乎是重合在一起的，但是對於 a-plane InGaN/GaN SQW 由於應力的不對稱性使得能帶的分裂，因此將會有兩個對應到不同能帶的自發性輻射頻譜，其中自發輻射速率比較強的為 $|Y\rangle$ -like state的電洞與導帶電子複合所發出具有y方向極化電場( $E_y$ )的光，而另外一個較弱的是由 $|X\rangle$ -like state所發出具有x方向極化電場( $E_x$ )的光。

由以上的討論我們了解到，a-plane 與 c-plane InGaN/GaN SQW 發光的特性差異，在於應力特性的不同，而非等向性的應力讓 a-plane InGaN/GaN SQW所發出得的光強是由 $E_y$ 所主導，如果我們改變力應的大小，此時對於a-plane InGaN/GaN SQW 所放出光的 $E_y$ 光強與 $E_x$ 光強比例會有怎樣的變化，除了改變應力外，如果波函數的拘束的能力改變時， $E_y$ 光強與 $E_x$ 光強比例又會有怎樣的變化，為了方便分析極化特性的改變，在這邊定義極化率。

$$\rho = \frac{I_y - I_x}{I_y + I_x} \quad (4.2)$$

式 4.2 為極化率公式，其中 $I_y$ 與 $I_x$ 為所發出的光極化光強度 $I_y$ 為平行y-axis  $I_x$ 為平行x-axis，極化率越大代表 $I_y$ 越強，圖4-4為改變不同的In比例與不同SQW的厚度對於極化率的改變以及 $|Y\rangle$ -like state與 $|X\rangle$ -like state的能量差異。由圖4-4(a)中我們可以發現



(a) 極化率 Vs 量子井厚度與In含量比例 (b) 能帶分裂 Vs 量子井厚度與In含量比例

圖4-4 a-plane InGaN/GaN SQW 極化率與能帶分裂能量差



在相同電流注入下隨著In比例增加與量子井的厚度減少極化率都會因此上升。其主要原因，當In的比例上升時迫使得在長晶時GaN與InGaN晶格不匹配的問題更加嚴重，應力因此增加，而當應力增加後會讓|Y) – like state與|X) – like state分裂的更大圖4-4(b)，此時在向注入相同載子濃度的情況下由於填入|X) – like state的電子機率變少了，而填入|Y) – like state的電子機率變高了，極化率因此提升；而當量子井的寬度改變時，為什麼會影響極化率，根據無限深未能井的定義( $E_{n+1}-E_n$ )與量子井的寬度(W)成反比，當W越小( $E_{n+1}-E_n$ )越大，因此|X) – like state與|Y) – like state的能階差會受到量子井的寬度的影響。

由以上的討論我們可以了解到InGaN/GaN SQW的極化光特性，在下一小節我們將計算在具有極化率的影響下，其自發輻射的變化情形。

## 4-2 a-plane InGaN/GaN SQW 自發輻射增強結果與討論

在第三章的部分我們討論過光子晶體的設計，並且藉由調變水平與垂直的空氣柱，控制MqL2共振腔的Q-factor、電場極化特性、等效模態體積、以及共振頻率，本節我們將計算具有y-polarized 極化光的特性的a-plane InGaN/GaN SQW在與共振腔a-mode共振模態耦合在一起後自發輻射增強的關係，同時我們也會討論，自發輻射增強因子與極化率的關係。

### 4-2-1 自發輻射增強因子與Purcell factor之比較

在第二章介紹自發輻射增強因子時，本文有對簡化的費米黃金定律(Fermi golden rule)進行推倒，並且在四個假設下，得到了Purcell factor，而為了要考據電場的極化特性與自發性輻射增強因子的影響，我們將經由未簡化的 Fermi golden rule 計算在共振腔內的自發性輻射速率，為了要考慮電場在共振腔內所造成的效應 momentum matrix element 將表示為

$$|M_{ij}|^2 = |\langle \Psi_j | A \hat{\alpha} \cdot \vec{p} | \Psi_i \rangle|^2 \quad 4.3$$



在此我們會發現momentum matrix element 多了電場A的因素在裡面，但是在前面所討論在自由空間中的momentum matrix element卻沒有，原在在於，自由空間中電場是平面波的形式，因此可用式2.9帶換掉，最後我們可以將自發性輻射速率在共振腔內的公式改寫為

$$R_{sp}^{Cavity} = \frac{2\pi}{V_m \hbar} \int d(\hbar\omega) \sum_k \frac{e^2}{m_0^2 \omega_k^2} \rho_{c(\hbar\omega - \hbar\omega_k)} \sum_{i,j} \int \frac{2}{(2\pi)^2} d\vec{k}^2 |M_{ij}|^2 \quad 4.4$$

$$\times \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(E_{ij} - \hbar\omega)^2}{2\sigma^2}\right) f^e(E_i^e(\vec{k})) f^h(E_j^h(\vec{k}))$$

式4.4中 $\rho_{c(\hbar\omega - \hbar\omega_k)}$ 為在共振腔中的photon density of state其直與共振腔的Q-factor有關， $\omega_k$ 為共振頻率， $V_m$ 為等效模態體積，在這邊值得注意的是 $\rho_{c(\hbar\omega - \hbar\omega_k)}$ 由於光子晶體並不是完美單模的共振腔，因此我們在幾自發輻射所用的光子態密度並非第二章所提到單一共振模態的勞倫斯函數，圖4-5為MqL2光子晶體共振腔的光子態密度，圖中可以

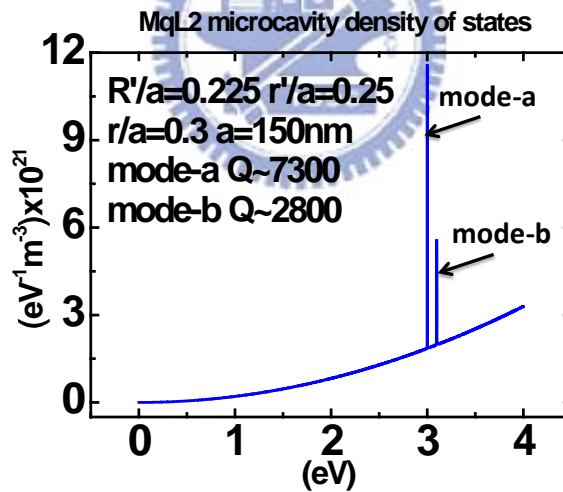


圖4-5 MqL2光子晶體共振腔光子態密度

發現到光子晶體共振腔的光子態密度會同時擁有塊材與共振腔的特性，光子態密度會因為共振腔的共振模態影響下而有所增強，我們將第三章與第四章所討論的結果帶入式4.4，並且與式(4.1)相除得到了考慮電場極化特性的自發輻射增強因子，圖4-5為自發性輻射增強因子隨著調變光子晶體 $r'$ 與 $R'$ 的變化。

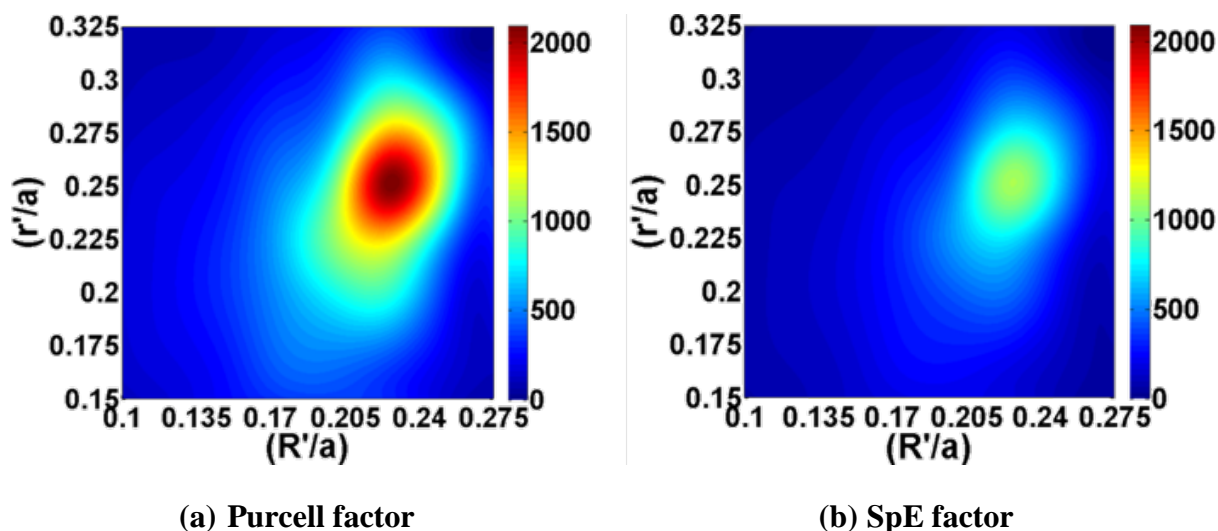


圖4-6 自發性輻射增強因子(Spontaneous Emission Enhancement factor )V.S  $r'$  與  $R'$

圖4-6(a) 為傳統利用Purcell Factor 所計算，圖4-6(b) 為利用式(4.4)除式(4.1)所得到的自發輻射增強因子(Spontaneous Emission Enhancement factor ) (SpE factor)，由圖中我們可以發現到，SpE factor 與 Purcell factor 所計算的結果其行為極為類似，SpE factor 與 Purcell factor 的最大值都落在MqL2光子晶體共振腔最佳化的區域( $r'=0.25$  與  $R'=0.225$ )，除此之外也可以發現，利用式(4.4)除式(4.1)所得到的SpE factor 比Fp弱了許多，這裡主要有二個因素導致SpE factor結果比Purcell factor小，第一是空間上的耦合，由圖4-3可以了解到，對於a-plane InGaN/GaN的頻譜來說，由於能帶分裂的關係使得x-polarized 與y-polarized 的主要輻射的頻率是不一樣的，當cavity mode共振頻率確定後，只有一個方向的極化電場能耦合到cavity mode，以我們這邊所討論的例子來說，y-polarized 耦合到mode-a (cavity mode) 的Ey polarization state，但是 x-polarized 與cavity mode 的頻率不一樣，x-polarized 幾乎不會與 mode-a 的Ex polarization state 耦合，整體的SpE factor因此有所下降，這也是為什麼我們在設計光子晶體的時候要非常注意光子晶體共振模態的電場極化的問題了；第二為光子態密度的差異，Purcell factor 所計算的結果是考慮單模共振腔，所使用的光子態密度是以勞倫茲函數為主，並且在計算的過程有所簡化，但是事實對於光子晶體共振腔的光子態密度應該用圖4-5的形式，由簡化與形式上的差異導致兩個結果有所差異。

## 4-2-2 自發輻射增強因子與極化率之關係

在這個部分我們將討論自發輻射受到發光元件極化率的影響使得自發輻射的增強因子會與Purcell factor 的趨勢有所出入，4-1的討論我們知道隨著不同厚度的SQW以及隨不同的In含量的比例a-plane InGa<sub>y</sub>N/GaN SQW 所發出的y-polarized的光其比例上會有所差異因此我們想要知道極化率的不同將會對SpE factor產生什麼影響。

當改變In含量的比例時勢必導致發光波長紅移，因此我們固定MqL2光子晶體共振腔的結構與R/a比例，調整a(晶格常數)的大小，利用光子晶體線性的關係將共振波長紅移，確定共振頻率會對應到不同 In 含量的SQW發光波長，而在這邊有件事情要注意，發光波長紅移的量過大時，勢必要考慮折射係數對波長的關係，此時Q值的大小與等效模態體積勢必會跟著變動，圖4-7為Ga<sub>1-y</sub>In<sub>y</sub>N 與Ga<sub>1-y</sub>In<sub>y</sub>N隨著不同波長的折射係數，經由此折射係數，計算結果如圖4-8，4-8(a)波長對晶格常數的變化、4-8(b) Q值與等效模態體積 對晶格常數的變化，圖4-8中可以發現到，隨著晶格常數的增加，共振波長開始紅移，而

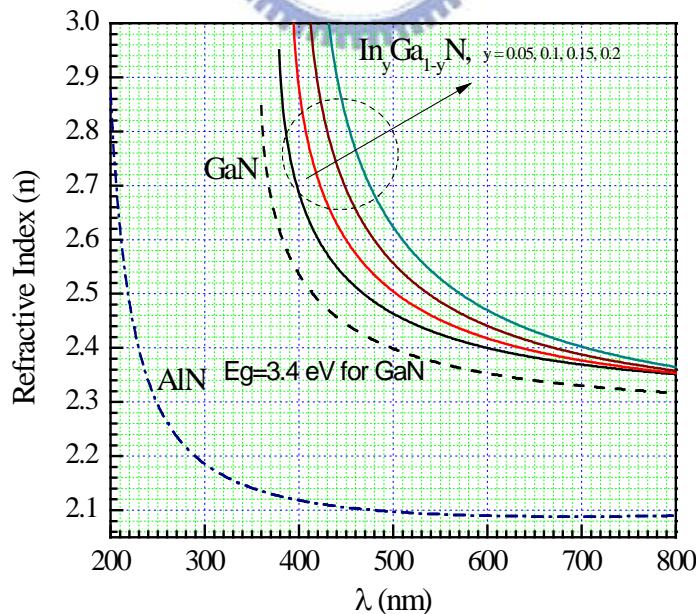
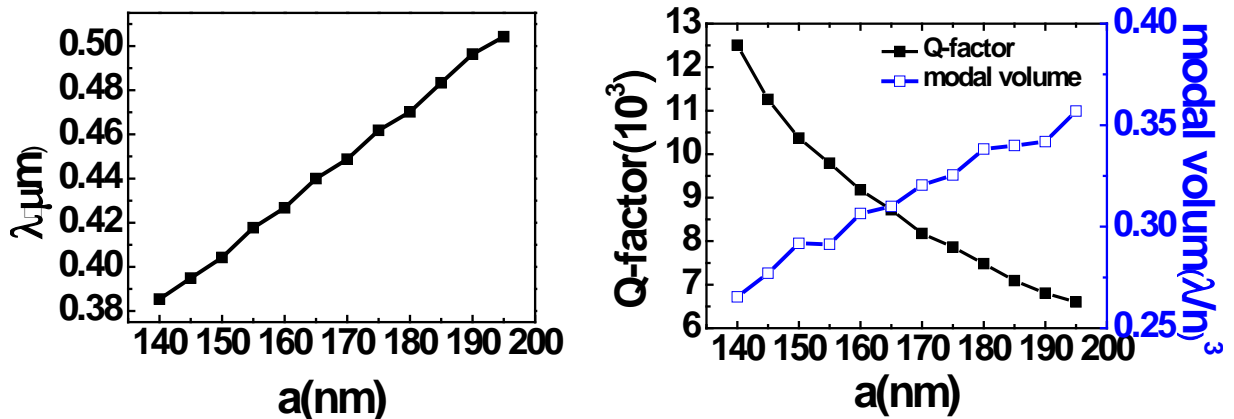


圖4-7 GaN, InGa<sub>y</sub>N 色散關係圖(n(λ))



(a) 波長V.S. a

(b) Q and Vm a

圖4-8 波長、Q-factor 以及Vm 對晶格常數的變化

此折射係數開始下降，由於折射係數開始下降的關係，使得全反射的角度開始變小了，導致在光子晶體共振腔z方向對於光的侷限能力變差，Q值因此下降，而由Q值的變化也符合GaN的色散關係圖，在短波長Q直變化大(折射率在band gap 附近變化大)，較長波長的地方Q直變化小(折射率在遠離band gap變化小)；而由於整體的光子晶體結構等比例放大了，因此等效模態體積因此而有所變大。

圖4-9為SQW的厚度為3nm考慮在光子晶體下共振腔影響下 SpE factor 以及 Fp的比較，由圖中我們可以發現，兩條線的趨勢變化有些不太一樣，而且在最後In為0.4時，

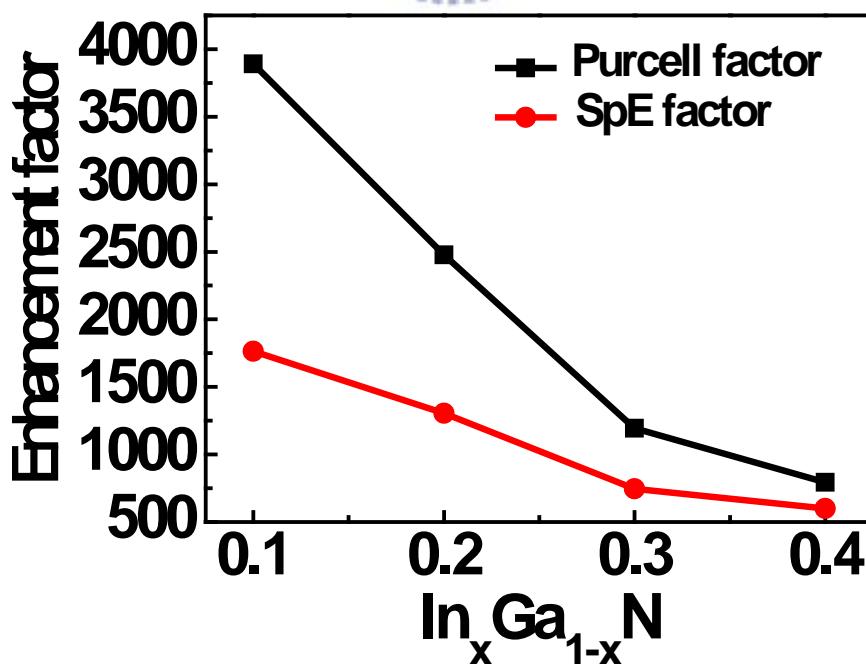


圖4-9 SpE factor 與 Purcell 對 In含量的變化

兩條線會非常的接近，原因為In的比例增加時y-polarized的比例將會有所提升，主導了整體的發光，由於所發出的光主要為y-polarized，可以視為大部分的光將耦合到cavita-mode，因此計算的結果將會非常的貼近理論值的計算，而之所以在In=0.1時與理論值差距較大的原因，為y-polarized的光相對於In=0.4時少了很多。圖4-9為不同In的比例與量子井的厚度對SpE的變化圖，由圖中我們也可以發現對同一比例的In含量不同well來說，當well越小y-polarized極化程度越高因此自發輻射增強因子較大，而由圖中也發現到由於極化的比例不同，使得在較低In含量的位置對於不同的well width反應程度較明顯。

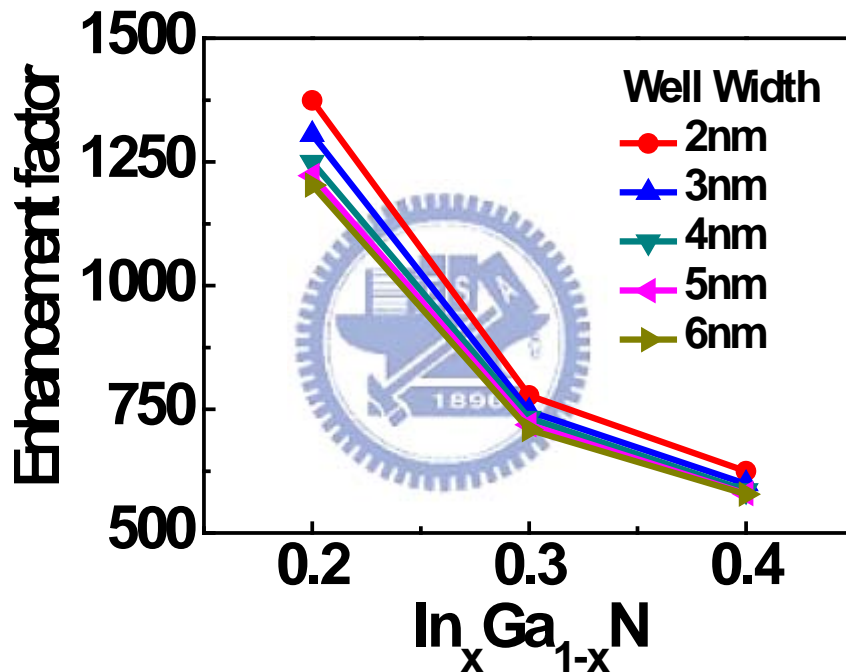


圖4-10 SpE factor對量子井厚度與In的比例的變化



## 第五章 結論與未來展望

本論文主要探討利用光子晶體共振腔，增強具有極化特性自發性輻射的發光元件，其自發性輻射增強因子特性的變化；在內文中討論如何最佳化MqL2 (modified quasi L2) 光子晶體共振腔，以及討論a-plane InGaN/GaN single quantum well的所發出的極化光特性並且在最後討論a-plane InGaN/GaN single quantum well 的自發輻射的增強與MqL2光子晶體共振腔之間的關係，我們將結果整理如下：

1. 經由費米黃金定律(Fermi golden rule) 的推倒Purcell factor，我們發現到自發性輻射增強因子不只與共振模態的quality factor與effective modal volume有關，事實上，也會與共振模態的電場極化方向與大小有密切的關係，因此我們定義與電場有關的自發性輻射增強因子為SpE(spontaneous emission enhancement) factor。
2. 經由MqL2光子晶體共振腔的調變得到的頻率變化，我們了解到水平空氣柱的調變對於a-mode的影響大於x-mode，而垂直空氣柱的調變對x-mode的影響大於a-mode，這是由於不同的共振模態的主要邊界條件不同的原因所造成的。
3. 經由光子晶體最內側空氣柱的調變控制共振模態的共振頻率、quality factor、effective modal volume 以及 electric field 的極化特性。經由模擬發現調變在微調垂直方向的空氣柱，有助於提升a-mode的 quality factor以及electric field 的極化特性。
4. a-plane InGaN/GaN single quantum well 的極化率會隨著不同的In含量的比例以及量子井的厚度有所改變，而當In含量越高，量子井越小時y方向的極化率越大。
5. 在具有極化特性的發光元件的影響下Purcell factor 的結果將被修正，當極化率越強時所得到的結果越貼近Purcell factor。

由於non-polar InGaN/GaN Quantum well 的元件成長品質有待突破，而本文主要以模擬計算為主，在未來上可以實際製作元件，且考慮極化光的特性並且希望在實驗上得到極化率對雷射的臨界功率的影響，並且我們將討論材料的增益係數對於光子晶體的設計是否有所影響。

## 參考資料

- [1] M. J. Paisley, Z. Sitar, J. B. Posthil, and R. F. Davis, *J. Vac. Sci. Tech. B7*, 701 (1989).
- [2] J. I. Pankove, S. Bloom, and G. Harbeke, *RCA Rev.* 36, 163 (1975)
- [3] E. Fred Shubert, “Light-Emitting Diodes” , Cambridge, 2006, New York USA.
- [4] S. Ghosh, O. Brandt, A Trampert, H. T. Grahn, J. Menniger, M. Ramsteiner, M. Reiche, and K. H. Ploog, *Nature*, 406 865-868.
- [5] S. H. Park and S. L. Chuang, *J. Appl. Phys.*, vol. 87, no. 1, pp. 353 – 364, Jan. 2000.
- [6] 盧廷昌，王興宗，“半導體雷射導論”，五南出版社，2008, Taipei Taiwan
- [7] S. Tirpathy, R. K. Soni, H. Asahi, K. Iwata, R. Kuroiwa, K. Asami, and S. Gonda. *Appl. Phys.* 85. 8386-8399
- [8] K. Domen, K. Horino, A. Kuramata, and T. Tanahashi, *IEEE J. Select. Top. In Quantum Electron.*, vol. 3, no. 2, pp. 450 – 455, 1997
- [9] K. Domen, K. Horino, A. Kuramata, and T. Tanahashi, *Appl. Phys. Lett.*, vol. 71, no. 14, pp. 1996 – 1998, 1997
- [10] M. C. Schmidt, K. C. Kim, H. Sato, N. Fellows, H. Masui, S. Nakamura, S. P. DenBaars, and J. S. Speck, *Jpn. J. Appl. Phys., Part 2*, vol. 46, no. 4-7, pp. L126 – L128, 2007.
- [11] A. Chakraborty, B. A. Haskell, S. Keller, J. S. Speck, S. P. Denbaars, S. Nakamura, and U. K. Mishra, *Jpn. J. Appl. Phys., Part 2*, vol. 44, no. 1-7, pp. L173 – L175, 2005
- [12] M. McLaurin, T. E. Mates, and J. S. Speck, *Appl. Phys. Lett.*, vol. 86, no. 26, p. 262104, 2005.
- [13] K. Okuno, Y. Saito, S. Boyama, N. Nakada, S. Nitta, R. G. Tohmon, Y. Ushida, and N. Shibata, *Appl. Phys. Express*, vol. 2, no. 3, p. 031002, 2009.
- [14] Schubert, E. F. & Kim, J. K. Solid-state light sources getting smart. *Science* 308, 1274 – 1278 (200

- [15] Ziemelis, K. Display technology: Glowing developments. *Nature* 399, 408 – 411 (1999).
- [16] Suematsu, Y. & Arai, S. Single-mode semiconductor lasers for long-wavelength optical fiber communications and dynamics of semiconductor lasers. *IEEE J. Sel. Top. Quant. Electron.* 6, 1436 – 1449 (2000).
- [17] Grätzel, M. Photoelectrochemical cells. *Nature* 414, 338 – 344 (2001).
- [18] Mabuchi, H. & Doherty, A. C. Cavity quantum electrodynamics: Coherence in context. *Science* 1372 – 1377 (2002).
- [19] H. Benisty, H. De Neve, and C. Weisbush, *IEEE J. Quantum Electron.* 34 1612 (1998)
- [20] M. R. Krames, M. Ochiai-Holcomb, G. E. Höfler, C. Carter-Coman, E. I. Chen, I.-H. Tan, P. Grillot, N. F. Gardner, H. C. Chui, J.-W. Huang, S. A. Stockman, F. A. Kish, and M. G. Craford, *Appl. Phys. Lett.* 75, 2365 (1999)
- [21] I. Schnitzer, E. Yablonovitch, C. Caneau, T.J. Gmitter, A.Scherer, *Appl. Phys. Lett.*, 63,16 (1993)
- [22] T. Fujii, Y. Gao, R. Sharma, E.L. Hu, S.P. DenBaars, S. Nakamura - *Appl. Phys. Lett.* 84, 855 (2004)
- [23] M. Boroditsky, T.F. Krauss, R. Coccioli, R. Vrijen, R. Bhat, and E. Yablonovitch - *Appl. Phys. Lett.* 75, 1036 (1999)
- [24] Loudon, R. *The Quantum Theory of Light Ch. 2* (Oxford Univ. Press, New York, 2000)
- [25] Eli Yablonovitch, *Phys. Rev. Lett.* 58, 2059 - 2062 (1987)
- [26] Sajeev John, *Phys. Rev. Lett.* 58, 2486 - 2489 (1987)
- [27] 樂丕綱、陳啟昌, ” 光子晶體-從蝴蝶翅膀到奈米光子學”, 五南圖書出版股份有限公司 (2005 年 8 月)
- [28] M. Boroditsky, T.F. Krauss, R. Coccioli, R. Vrijen, R. Bhat, and E. Yablonovitch

- Appl. Phys. Lett. 75, 1036 (1999)**
- [29] A. David, C. Meier, R. Sharma, F. S. Diana, S. P. DenBaars, E. Hu, S. Nakamura, and C. Weisbuch, **Appl. Phys. Lett. 87, 101107 (2005).**
- [30] M. J. Paisley, Z. Sitar, J. B. Posthil, and R. F. Davis, **J. Vac. Sci. Tech. B7, 701 (1989).**
- [31] M. Imada, S. Node, A. Chutinan. and T. Tokuda, **Appl. Phys. Lett., 75, 316, (1999)**
- [32] Hideki Matsubara, Susumu Yoshimoto, Hirohisa Saito, Yue Jianglin, Yoshinori - Tanaka, Susumu Noda, **Science, 319, 25 JANUARY, (2008)**
- [33] M. Loncar, T. Doll, J. Vuckovic, and A. Scherer, **J. Lightwave Tech. 18, 1402 (2000).**
- [34] Y. A. Vlasov and S. J. McNab **Opt. Lett. 31, 50-52 (2006)**
- [35] Kerry J. Vahala, **Nature 424, 839-846 (2003)**
- [36] Paul R. Berman, “Cavity Quantum Electrodynamics” , **Academy (1994).**
- [37] O. Painter, R. K. Lee, A. Scherer, A. Yariv, J. D. O’ Brien, P. D. Dapkus, and I. Kim, **Science 284,1819, (1999).**
- [38] M. Notomi and H. Taniyama, **Opt. Express 16, pp18657-18666(2008)**
- [39] H. Hagino, Y. Takahashi, Y. Tanka, T. Asano, S. Noda, **Phys Rev. B 79 085112 (2009)**
- [40] K. Nozaki and T. Baba, **Appl. Phys. Lett. 88 211102 (2006)**
- [41] H. S. Ee, K. Y. Jeong, M. K. Seo, Y. H. Lee and H. G. Park, **Appl. Phys. Lett. 93 011104 (2008)**
- [42] T. Yoshie, A. Scherer, J. Hendrickson, G. Khitrova, H. M. Gibbs, G. Rupper, C. Ell, O. B. Shchekin, and D. G. Deppe, **Nature 432, pp. 200-203 (2004)**
- [43] Y. Akahane, T. Asano, B. S. Song, and S.Noda, **Nature 425, 944 (2003).**
- [44] Yee, K. S., **IEEE Trans. Antennas and Propagation., vol. 14, pp. 302-307,(1966)**
- [45] Saleh,” **Foundamental of Photonics “(John Wiley & Sons, Inc., New York, 1977)**
- [46] 林佳翰 ; “二維光子晶體共振腔之共振模態調變研究” ; 國立中央大學, 物理研究所, 碩士論文 (2008年6月)

- [47] E. M. Purcell, *Phys. Rev.* **69**, 681 (1946)
- [48] C. Choen-Tannoudji and F. Laloe B. Diu,” *Quantum Mechanics*” (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1977)
- [49] Shun Lien Chuang” *Physics of photonic device*” (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1977)
- [50] ]曾彥鈞,「高品質因子與低模態體積光子晶體微共振腔之設計與 製作」,國立中央大學光電科學研究所,碩士論文(2006)
- [51] Yen-Chun Ts eng, Shu-Ping Lee, Chun-Jung Wang, Pei-Chin Chiu, Wen-Yen Chen, Tzu-Min Hsu, and Jen-Inn Chyi 2009 CLEO
- [52] A. Tandaechanurat, S. Iwamoto, M. Nomura, N. Kumagai, and Y. Arakawa, *Opt. Express* **16**,448-455, (2008),
- [53] H.-H. Huang and Y.-R. Wu, *J. Appl. Phys.* **106**, 023106 (2009).

