

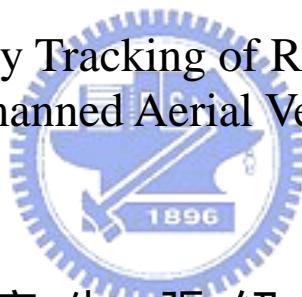
國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

無人螺旋航空載具的軌跡控制

The Trajectory Tracking of Rotorcraft-Based
Unmanned Aerial Vehicles



研究生：張紹興

指導教授：林心宇博士

中華民國九十三年七月

無人螺旋航空載具的軌跡控制

The Trajectory Tracking of Rotorcraft-Based Unmanned Aerial Vehicles

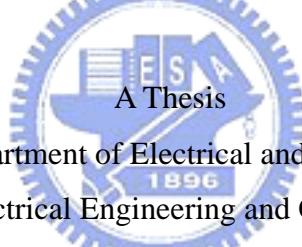
研究 生：張 紹 興

Student : Shao-Hsiang Chang

指導 教授：林 心 宇

Advisor : Dr. Shin-Yeu Lin

國立交通大學
電機與控制工程學系
碩士論文



Submitted to Department of Electrical and Control Engineering

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Electrical and Control Engineering

June 2004

HsinChu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十三年七月

無人螺旋航空載具的軌跡控制

學生：張紹興

指導教授：林心宇 博士

國立交通大學電機與控制工程學系碩士班

摘要

在近十年間控制技術快速的發展使得自動航空載具變的較小且功能較強；在很多的領域上需要減少實際的參與人力與避免危險，由於這個原因，自動航空載具即將成為很多應用的一部份。

演算法應用在離散化的最佳控制問題上，可作平行且簡單的運算，演算法在運算的步驟上具有簡單且規律的流程。因此，具有二次效益評估值與最終時間固定的非線性最佳控制問題最適合運用此一演算法。

在本論文中，我們的研究適合非線性模型在無人螺旋載具上的軌跡控制；利用 RQPD (recursive quadratic programming with dual method) 演算法在限制輸入與限制狀態下做位置軌跡與機鼻姿態的追蹤，比較最低能量控制與軌跡控制的差別。

The Trajectory Tracking of Rotorcraft-Based Unmanned Aerial Vehicles

Student : Shao-Hsiang Chang

Advisors : Dr. Shin-Yeu Lin

Department of Electrical and Control Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The rapid development of control technology in the last few decades has made autonomous vehicles smaller and more powerful. And the need to alleviate the actual human participation in order to save human efforts and avoid hazards has been ever increasing in numerous fields. As a result, autonomous vehicles are about to become part of reality in many applications.

The algorithm is applied to discretized optimal control problems, a simple and parallel computation and a simple and regular data flow pattern between consecutive computational steps results. Therefore, this technique is best suited to obtain the discrete solution of fixed final-time constrained nonlinear optimal control problems with quadratic performance index.

In this thesis, we investigate the feasibility of a nonlinear model tracking control for unmanned aerial vehicle. We use a RQPD algorithm for planning path under input and state constraints and tracking position and heading trajectories, and compare minimum-control-effort with minimum energy.

論文貢獻

本論文應用 *Lin*[13]提出的方法用在無人直昇機的軌跡控制上，在 6.5 節中分別討論最佳控制與低耗能控制兩種，預先規劃出三種飛行路徑與姿態，所得到的狀態歷程與控制歷程加以比較與分析。提供 *behavior model* 的模擬分析資訊，對於想以 *cell-base* 方法實現[13]硬體設計之研究者一個先期的模擬與討論。



誌 謝

首先，必需感謝我的父母與家人，一直不曾對你們說聲謝謝，由於你們的關心與支持，才能讓我無後顧之憂的度過這兩年，順利完成學業，在此致上由衷的感謝，僅將此榮耀與你們共享。

本論文得以順利完成，首要衷心感謝指導教授林心宇博士在這兩年的研究過程中，所給予的悉心指導與教誨，使學生得以在學術研究方面有所啟迪，且對於為人處世的方法態度上，也獲益匪淺。同時也要向李福進老師、鄭木火老師致謝，感謝您們在口試期間的寶貴意見與指導。另外，要感謝土程學長、榮壽學長，謝謝您們在論文寫作期間給予我許多寶貴意見與股勵。



目 錄

中 文 摘 要	i
英 文 摘 要	ii
論 文 貢 獻	iii
誌 謝	iv
目 錄	v
表 目 錄	viii
圖 目 錄	viii
符 號 說 明	ix
第一章 緒論	1
第二章 直昇機之非線性模型簡介	3
2.1 直昇機模型的架構	3
2.2 剛體動力學	4
2.2.1 角速度移動座標系統下的尤拉延伸式	4
2.2.2 考慮旋轉運動下的牛頓定律	5
2.3 座標轉換與尤拉角	6
2.4 角速度	8
2.5 系統方程式	8
第三章 最佳化理論	11
3.1 受限制的最佳化問題	11
3.2 拉格朗基乘子(Lagrange Multipliers)	11
3.3 肯恩 · 塔克條件(Kuhn-Tucker Conditions)	12
3.3.1 肯恩 · 塔克必要定理	13
3.3.2 肯恩 · 塔克充分定理	13

3.4 二階最佳化條件	14
3.4.1 二階必要條件	14
3.4.2 二階充分條件	15
3.5 解限制性問題的線性化方法	15
3.5.1 線性限制式問題	16
3.5.2 一般性的非線性規劃問題	16
3.6 可分離規劃 (Separable Programming)	17
3.6.1 單變數可分離函數	18
3.6.2 多變數可分離函數	19
3.7 線性規劃 (Linear Programming)	20
3.8 二次規劃 (Quadratic Programming)	20
3.9 對偶性理論	21
第四章 最佳控制理論	24
4.1 考慮的系統	24
4.2 實際的限制	25
4.3 效益評量	26
第五章 遞迴二次對偶規劃(RQPD)	29
5.1 問題的公式化	29
5.2 Runge-Kutta Method	29
5.3 二次規劃遞迴法	30
5.4 對偶法	31
5.5 RQPD 演算法	32
5.6 RQPD 在最佳控制上的應用	34
第六章 利用遞迴二次對偶規劃 解最佳控制問題	41
6.1 簡介	41
6.2 模擬最低耗能追蹤問題	42

6.3 模擬追蹤問題	44
6.4 模擬範例程式流程圖	47
6.5 模擬結果與討論	48
第七章 結論	69
參考文獻	70
附錄	72



表目錄

表 2.1 定義座標符號	6
--------------------	---

圖目錄

圖 2.1 直昇機飛行時的自由度	3
圖 2.2 直昇機的動力系統	4
圖 2.3 直昇機的座標軸	6
圖 2.4 球體座標系統與機體座標系統	7
圖 2.5 旋翼葉轂平面與主翼尖端平面的縱向傾角	9
圖 2.6 旋翼葉轂平面與主翼尖端平面的橫向傾角	9
圖 2.7 無人螺旋載具動力系統方塊圖	10
圖 3.1 片段線性曲	18
圖 5.1 RQPD 演算法的整體架構	33
圖 5.3 RQPD 終值限制式之最佳控制問題 演算法的整體架構	40
圖 5.2 RQPD 無終值限制式之最低耗能制問題演算法的整體架構	47
圖 6.1 無人螺旋載具控制軌跡與目標軌跡對應圖 (不限制能量)	51
圖 6.2 無人螺旋載具控制訊號 (不限制能量)	52
圖 6.3 無人螺旋載具控制軌跡與目標軌跡對應圖 (限制能量)	53
圖 6.4 無人螺旋載具控制訊號 (限制能量)	54
圖 6.5 低耗能控制 (Track2) 與軌跡控制 (Track1)	55
圖 6.6 無人螺旋載具控制軌跡與目標軌跡對應圖 (不限制能量)	57
圖 6.7 無人螺旋載具控制訊號 (不限制能量)	57
圖 6.8 無人螺旋載具控制軌跡與目標軌跡對應圖 (限制能量)	59
圖 6.9 無人螺旋載具控制訊號 (限制能量)	59
圖 6.10 低耗能控制 (Track2) 與軌跡控制 (Track1)	61
圖 6.12 無人螺旋載具控制訊號 (不限制能量)	63
圖 6.13 無人螺旋載具控制軌跡與目標軌跡對應圖 (限制能量)	65
圖 6.14 無人螺旋載具控制訊號 (限制能量)	65
圖 6.15 低耗能控制 (Track2) 與軌跡控制 (Track1)	67
圖 6.16 低耗能控制 (Track2) 與軌跡控制 (Track1)	67

符號說明

m	無人載具的質量
\mathbf{F}	對質量為 m 的物體所施的力。
\mathbf{V}_c	質量中心的速度。
τ_c	質量中心的轉矩。
\mathbf{H}_c	質量中心的角動量 ($\mathbf{H} = I \cdot \omega$) 角速度。
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	螺旋載具相對各軸的質量慣性矩。
p, q, r	機身的三軸角速度分量。
u, v, w	機身的三軸速度分量。
ϕ, θ, ψ	機身姿態角。
p_x, p_y, p_z	表示球座標系統的位置
a_{1s}, b_{1s}	分別表示為主螺旋槳縱向與橫向的傾斜角度。
r_{fb}	為陀螺儀表示的機體方向。
$u_{\theta M}$	為控制主旋翼集合傾角，所謂集合傾角即同時改變所有翼片的傾角來達到不同升力效果。主要的升力控制並達到控制螺旋載具的升降或加速。
$u_{\theta T}$	則為控制尾旋翼之槳距，可以克服力矩及調整機身行進之方向。
u_{a1s}, u_{b1s}	為控制循環傾角， u_{a1s} 可以操控螺旋載具前後之飛行姿態， u_{b1s} 可以操控螺旋載具左右之飛行姿態。
t_f	最終時間。
N	取樣次數。

α 、 β 、	跨步長度。
j_{\max}	拉格朗基最大遞迴次數。
l_{\max}	二次遞迴規劃最大遞迴次數。
ε_1	拉格朗基終止參數。
ε_2	二次遞迴規劃終止參數。
Q 、 M 、 R	權重矩陣。
$r(i), i = 0, \dots, N$	軌跡函數。
$\mu(0)$	拉格朗基乘子。
$x_i^{(L)}$ 、 $x_i^{(U)}$	變數 x_i 給定或假設的下界與上界。
$f_{x_i}(l)$	函數 f 對 x 作偏微分。
$f_{u_i}(l)$	函數 f 對 u 作偏微分。



第一章 緒論

由於製程技術與 *IC* 設計技術的成熟，對於整合性控制晶片的實現不再是個難題，將原本循序執行的程式，藉由硬體轉變成平行方式的執行，且硬體實現的方法可以大幅增加執行效率。目前在無人航空載具的應用領域上，偵察與搜救是較常被使用到，如何使無人航空載具依循規劃的軌跡飛行，並且達到即時的軌跡與飛行姿態控制，無人直昇機航空載具模型[1]，[5]-[7]，利用此一非現性動態模型作為控制的基礎。

本論文針對可分解的非凸集 (non-convex) 最佳化問題，應用一個可完全解構的平行演算法快速計算出控制解，解決運算量大的問題達到即時控制。此一演算法結合遞迴二次規劃 (recursive quadratic programming) 與對偶方法 (dual method) [13]-[15]。

論文中以 *Matlab* 來做演算法的模擬，雖然在程式中是以循序的方式完成，但其演算法本身是以平行方式運算，演算法完全是由硬體的觀點來計算；在 *VLSI* 陣列處理器的技術上，*Lin* [15]有完整演算法在硬體計機架構的實現；以目前 *cell-base design* 的流程在行為模式驗證後即可利用 *ASIC* 來做硬體的實現。由於飛行控制需要考量即時的效果，此一演算法用硬體實現後可增加計算效率，可彌補計算時間長的問題，有機會可用在無人直昇機系統的控制。

在第六章中利用遞迴二次對偶規劃法(recursive quadratic programming with dual method)解最佳控制問題，針對無人直昇機的控制，我們考慮低耗能問題與追蹤問題，並以三種不同的飛行姿態與軌跡作為目標函數，對於低耗能問題與追蹤問題的控制歷程分別作討論。

本論文的架構大致如下，而第二章中，我們介紹小型無人直昇機的控制模型與動態方程式。在第三章中，討論所需的最佳化基礎理論；在第四章中，討論如何完成最佳控制的效益評估函數；第五章說明如何將遞迴二次對偶規劃法運用在

解最佳控制問題上；第六章運用 *RQPD* 解低耗能問題與追蹤問題；最後在第七章中做一結論。



第二章 直昇機之非線性模型簡介

2.1 直昇機模型的架構

直昇機的系統可以分解成四個主要的子系統，如促動機動力系統（actuator dynamics）、螺旋翼動力系統（rotary wing dynamics）、力與力矩的產生過程（force & moment generation process）、剛體動力系統（rigid body dynamics）。直昇機飛行自由度如圖 2.1 所示，子系統之間的連結與控制變數關係如圖 2.2 所示。對於次系統而言，我們描述其動態模式的自由度各為

- (1) 主旋翼及尾旋翼：旋翼葉片的擺動角度。
- (2) 機身及尾翼：速度、角速度、姿態角、描述剛體運動的自由度。
- (3) 發動機：主旋翼的轉速和發動機的輸出轉矩。

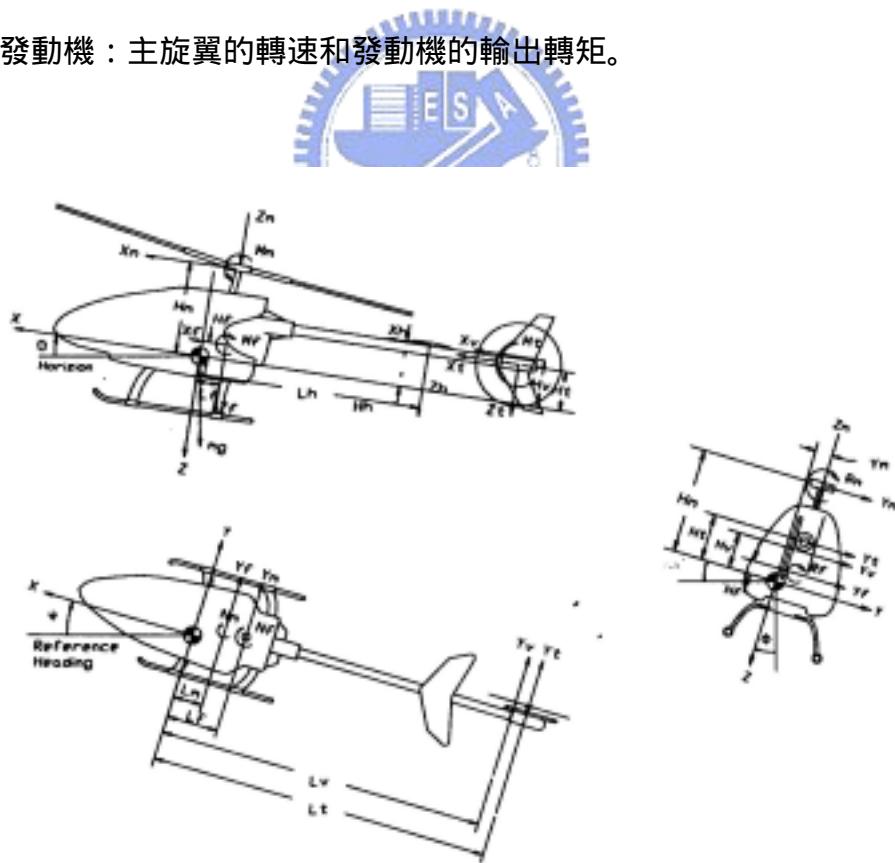


圖 2.1 直昇機飛行時的自由度
資料來源[1]

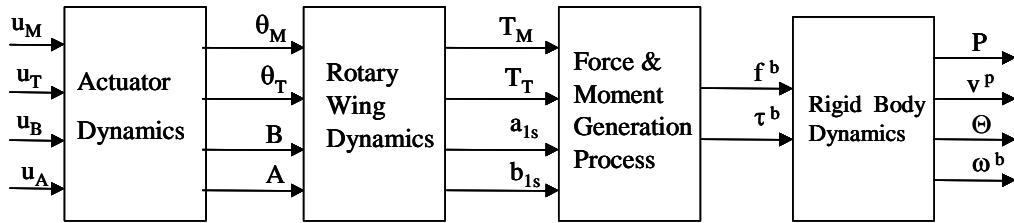
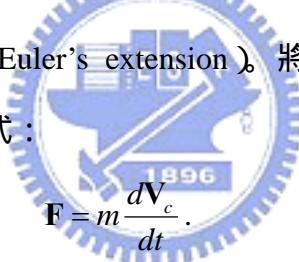


圖 2.2 直昇機的動力系統

根據[1]中的直昇機剛體模型，可以利用牛頓-尤拉方程式[2]，[3]表示直昇機的動力方程式。

2.2 剛體動力學

運用直昇機的質量中心為體框架座標 (body coordinate frame) 的圓心，可以寫出直昇機的移動方程式。動力學上表示線性動量用牛頓定律 (Newton's law)，而角動量用尤拉延伸公式 (Euler's extension)，將兩個數學式合起來表示為牛頓-尤拉 (Newton-Euler) 方程式：



$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{V}_c}{dt} \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\tau}_c = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_c \quad (2.2)$$

\mathbf{F} ：對質量為 m 的物體所施的力。

\mathbf{V}_c ：質量中心的速度。

$\boldsymbol{\tau}_c$ ：質量中心的轉矩。

\mathbf{H}_c ：質量中心的角動量。 $(\mathbf{H} = I)$

由於上式 (2.2) 是對固定點 O 或質心 G 而言。

2.2.1 角速度移動座標系統下的尤拉延伸式

如果我們以相對於一具有角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的移動座標系統來表示 \mathbf{H} 的話，轉矩關係可寫成：

$$\begin{aligned}
\sum \tau &= \left(\frac{d\mathbf{H}}{dt} \right)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \\
&= (\dot{H}_x \mathbf{i} + \dot{H}_y \mathbf{j} + \dot{H}_z \mathbf{k}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \\
&= (\dot{H}_x - H_y \omega_z + H_z \omega_y) \mathbf{i} \\
&\quad + (\dot{H}_y - H_z \omega_x + H_x \omega_z) \mathbf{j} \\
&\quad + (\dot{H}_z - H_x \omega_y + H_y \omega_x) \mathbf{k}. \tag{2.3}
\end{aligned}$$

對任意物體及原點 O ，至少可以找到一個座標系使該物體的慣性積為零，則該座標系的座標軸即為主慣性軸，如果將體座標系軸與主慣性軸重合，且體座標原點落在質量中心的話，則 I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} 皆為零，公式 (2.3) 便可寫成：

$$\begin{aligned}
\sum \tau &= \left(\frac{d\mathbf{H}_c}{dt} \right)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_c \\
&= (\dot{H}_x \mathbf{i} + \dot{H}_y \mathbf{j} + \dot{H}_z \mathbf{k}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_c \\
&= (I_{xx} \dot{\omega}_x - I_{yy} \omega_y \omega_z + I_{zz} \omega_y \omega_z) \mathbf{i} \\
&\quad + (I_{yy} \dot{\omega}_y - I_{zz} \omega_z \omega_x + I_{xx} \omega_z \omega_x) \mathbf{j} \\
&\quad + (I_{zz} \dot{\omega}_z - I_{xx} \omega_x \omega_y + I_{yy} \omega_x \omega_y) \mathbf{k}. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

2.2.2 考慮旋轉運動下的牛頓定律

一般線性動量方程式(2.1)不考慮旋轉運動，現在將旋轉運動考慮進去(右式第二項的向心力)，線性動力方程式可寫成：

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{V}_c}{dt} + m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_c. \tag{2.5}$$

剛體動力方程式中以 $f^b \in \mathfrak{R}^3$ (force) 與 $\tau^b \in \mathfrak{R}^3$ (torque) 分別表示加在質量中心上力與力距。可以寫出體座標下的牛頓-尤拉 (Newton-Euler) 方程式：

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}^b \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^b \times m\mathbf{v}^b \\ \boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^b \\ \boldsymbol{\tau}^b \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

這裡的 $\mathbf{v}^b \in \mathfrak{R}^3$ 為體速度向量， $\boldsymbol{\omega}^b \in \mathfrak{R}^3$ 為體角速度向量， $m \in \mathfrak{R}$ 為質量， $\mathbf{I} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ 為

單位矩陣，而且 $I \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ 是慣性矩陣。

2.3 座標轉換與尤拉角

飛行姿態可以用尤拉角度來表示，傳統上旋轉矩陣 $R(\Theta)$ 是由三個尤拉角旋轉矩陣相乘所形成；我們將其解構成三個部分，直昇機機頭的俯仰角(x 在 $X-Z$ 平面的投影向量與 X 軸的夾角)為 θ ，機身的滾動角(y 在 $Y-Z$ 平面的投影向量與 Y 軸的夾角)為 ϕ ，機頭的指向角(x 在 $X-Y$ 平面的投影向量與 X 軸的夾角)為 ψ 。

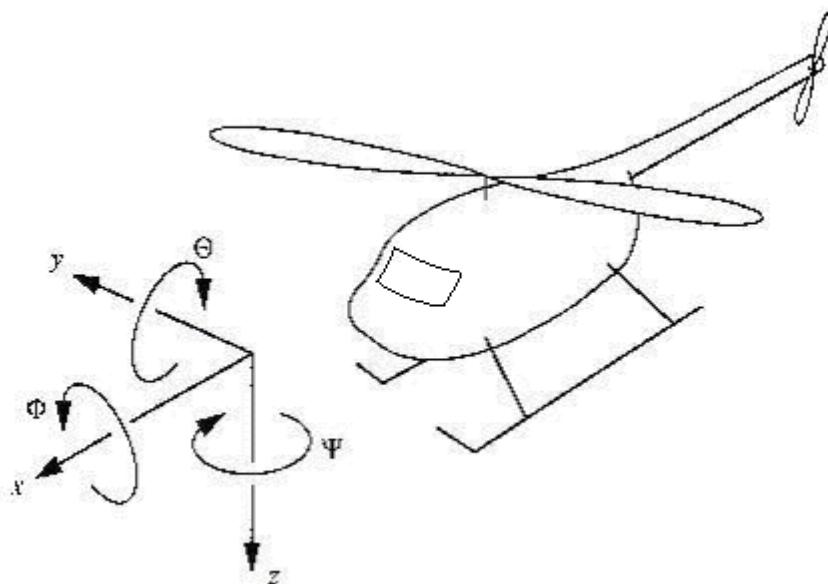


圖 2.3 直昇機的座標軸

直昇機的移動方程式以機頭的方向為 x 座標，右邊機身方向為 y 座標，機腹方向為 z 座標。

表 2.1 定義座標符號

$OXYZ$:	球座標系統 (Earth-fixed coordinate system)
$oxyz$:	體座標軸系統 (Body axes coordinate system)
ϕ, θ, ψ :	體座標對球座標的旋轉尤拉角 (Euler angles for rotation from Earth-fixed to body axes coordinate system)

體座標 x, y, z 對球座標 X, Y, Z 的尤拉角度 (Euler angles) R 為 ϕ, θ, ψ 的函數，參考體座標軸寫成的旋轉矩陣為 R_ψ, R_θ, R_ϕ 如下所示[4]：

$$R_x(\phi) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

$$R_y(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

$$R_z(\psi) \equiv \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

旋轉矩陣 $R(\Theta)^{B \rightarrow S}$ 的通式可以寫成 $R(\Theta)^{B \rightarrow S} = R_\phi R_\theta R_\psi$

$$R(\Theta)^{B \rightarrow S} = R_\phi R_\theta R_\psi$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta \ c\psi & c\theta \ s\psi & -s\theta \\ s\phi \ s\theta \ c\psi - c\phi \ s\psi & s\phi \ s\theta \ s\psi + c\phi \ c\psi & s\phi \ c\theta \\ c\phi \ s\theta \ c\psi + s\phi \ s\psi & c\phi \ s\theta \ s\psi - s\phi \ c\psi & c\phi \ c\theta \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

$$[\dot{x}^S, \dot{y}^S, \dot{z}^S]^T = R(\Theta)^{B \rightarrow S} [u, v, w]^T. \quad (2.11)$$

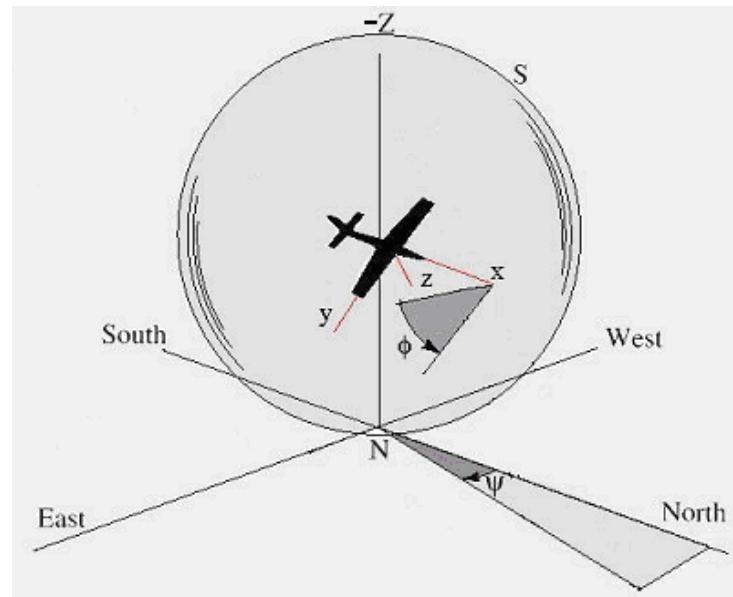


圖 2.4 球體座標系統與機體座標系統

這裡的 $x = [1 \ 0 \ 0]^T$, $y = [0 \ 1 \ 0]^T$, $z = [0 \ 0 \ 1]^T$; s , c 分別為 $\sin(\phi)$ 與

$\cos(\)$, 其它符號表示與前者相似。

2.4 角速度

機體的角速度由 (2.10) 式得知角速度向量可寫成

$$\omega = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{j} + \dot{\phi} \mathbf{i}. \quad (2.12)$$

進一步將 (2.12) 式展開為

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \\ &= \dot{\phi} \mathbf{i} + \dot{\theta} (c\phi \mathbf{j} - s\phi \mathbf{k}) + \dot{\psi} (-s\theta \mathbf{i} + s\phi c\theta \mathbf{j} + c\phi c\theta \mathbf{k}) \\ &= (\dot{\phi} - \dot{\psi} s\theta) \mathbf{i} + (\dot{\theta} c\phi + \dot{\psi} s\phi c\theta) \mathbf{j} + (-\dot{\theta} s\phi + \dot{\psi} c\phi c\theta) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

可以得到體角速度 ω_x, ω_y 與 ω_z 相對於角度 ϕ, θ, ψ 的關係式為

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \Psi(\Theta) \omega^b$$


$$= \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

2.5 系統方程式

多輸入多輸出 (MIMO) 系統的非線性方程式如下：

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u.$$

$$x = \begin{bmatrix} x^K \\ x^D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{15}.$$

$$x^K = [x^s, y^s, z^s, \phi, \theta, \psi].$$

$$x^D = [u, v, p, q, a_{ls}, b_{ls}, w, r, r_{fb}]$$

$$u = [u_{als}, u_{b1s}, u_{\theta M}, u_{\theta T}] \quad (2.16)$$

這裡的 S 為球座標符號。而 r_{fb} 為陀螺儀的迴授狀態。在這個模型中縱向葉片傾角與橫向葉片傾角 a_{ls}, b_{ls} 動態方程式可表示為

$$\dot{b}_{ls} = -\frac{b_{ls}}{\tau_f} - p + B_{b1s} a_{ls} + B_{u_{als}} u_{als} + B_{u_{b1s}} u_{b1s} \quad (2.17)$$

$$\dot{a}_{ls} = -\frac{a_{ls}}{\tau_f} - q + A_{b1s} b_{ls} + A_{u_{als}} u_{als} + A_{u_{b1s}} u_{b1s} \quad (2.18)$$

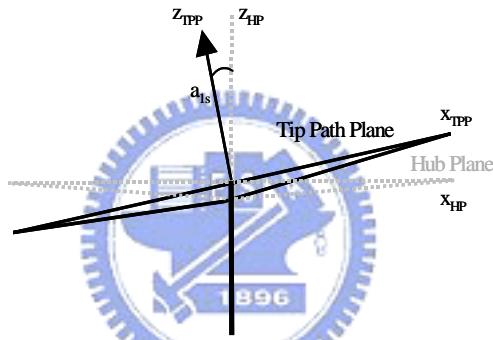


圖 2.5 旋翼葉轂平面與主翼尖端平面的縱向傾角

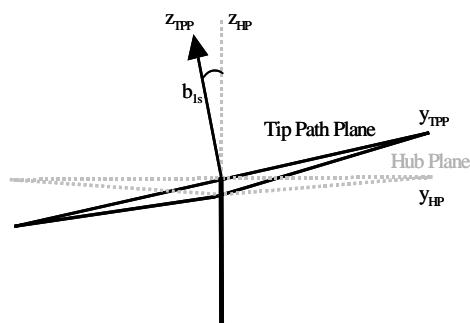


圖 2.6 旋翼葉轂平面與主翼尖端平面的橫向傾角

應用牛頓-尤拉方程式，可得

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin \theta - \frac{T_M}{m} a_{1s} + vr - wq \\ g \sin \phi - \frac{T_M}{m} b_{1s} - \frac{T_T}{m} - ur + wp \\ g - \frac{T_M}{m} + uq - vp \\ -\frac{Q_M}{I_{xx}} a_{1s} - \frac{T_M h_M + dR_M}{I_{xx}} b_{1s} - \frac{T_M y_M + T_T h_T}{I_{xx}} + \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{xx}} qr \\ \frac{T_M h_M + dM_M}{I_{yy}} a_{1s} - \frac{Q_M}{I_{yy}} b_{1s} + \frac{T_M l_M - Q_T}{I_{yy}} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} pr \\ \frac{T_M l_M}{I_{zz}} b_{1s} + \frac{-Q_M + T_T l_T}{I_{zz}} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} pq \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

對於 T_M, T_T 與 Q_M, Q_T 可以由 $u_{\theta M}, u, v, w, r, r_{fb}$ 所組成。直昇機的動力系統可以表示為

圖 2.7，下圖的 $u_{\theta M}$ 、 $u_{\theta T}$ 、 u_{a1s} 與 u_{b1s} 為系統的輸入控制訊號， $P_x, P_x, P_x, \phi, \theta, \psi$

無人直昇機系統的輸出訊號[5]–[8]。

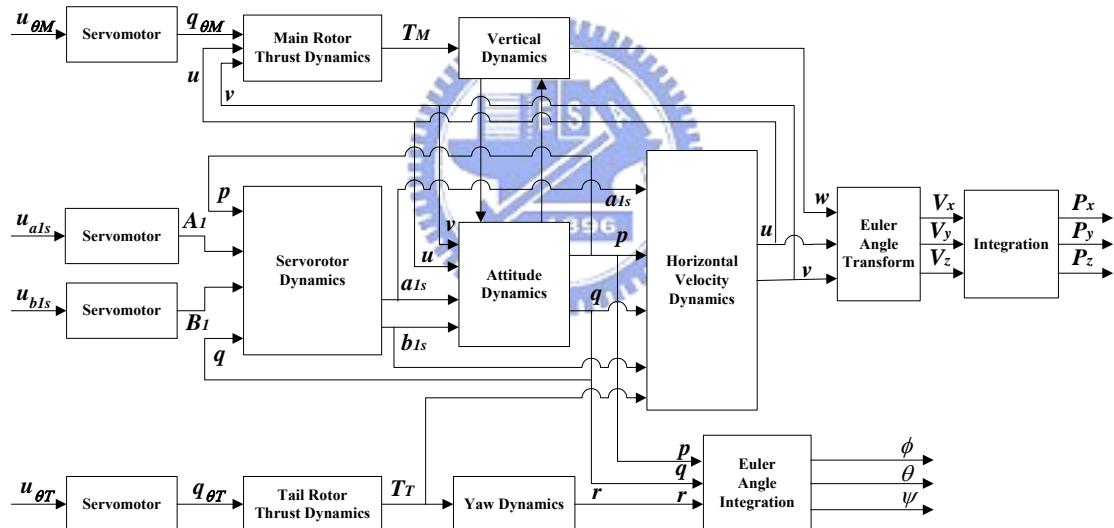


圖 2.7 無人螺旋載具動力系統方塊圖

第三章 最佳化理論

在進入第四章之前，先介紹一些基礎的最佳化理論[9]；一般而言最佳化方法是用數學上的結果及數值方法，從一大堆可用的事物中尋找出最好的，卻不必將所有可用事物都加以評估才挑選出來。

3.1 受限制的最佳化問題

考慮包含有數個等式限制的最佳化問題：

$$\text{Minimize} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

$$\text{Subject to} \quad h_k(x_1, \dots, x_N) = 0, \quad k = 1, \dots, K. \quad (3.1)$$

基本上，這問題可用等式限制式消去 K 個獨立變數，而視為是無限制的最佳化問題。等式限制式的出現使得問題的維度從原本的 N 減少成 $N-K$ 。一旦問題轉化成無限制性的最佳化問題，針對單變數函數 (functions of a single variable) 與多變數函數 (functions of several variables) 分別利用各自的方法尋找最佳點，如：牛頓-雷佛森法 (Newton-Raphson Method) 柯契法 (Cauchy's Method) ...等。

只要能從等式限制式解出一組外顯形式的獨立變數，就可以使用變數消去法 (variable-elimination method)。若出現好幾個等式現制式，消去的過程就會變的很不容易。而且在某些情況可能根本無法從限制式中解出外顯形式的解，而利用變數消去法。因此，問題包含有數個複雜的等式限制式，最好是用拉格朗基乘子法[10] (Lagrange multipliers) 來處理限制式。

3.2 拉格朗基乘子 (Lagrange Multipliers)

拉格朗基乘子法基本上是供給一組必要條件，用來辨明受等式限制最佳化問題的候選最佳點。這是運用稱為拉格朗基乘子的非確定參數，將受限制問題轉換

為對等的無限制問題。

考慮受限於一個等式限制式的 N 變數函數之最小化問題：

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_N). \\ \text{Subject to} \quad & h_1(x_1, \dots, x_N) = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

拉格朗基乘子法將這問題轉化成下列的無限制最佳化問題：

$$\text{Minimize} \quad L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h_1(x). \quad (3.3)$$

無限制函數 $L(x, \lambda)$ 稱為拉格朗基函數，而 λ 是一個未確定的常數稱為拉格朗基乘子， λ 的值沒有正負號的限制。

利用數值搜尋法可以用來求出所有可能解，對於每一個解 (x, λ) ，可以算出相對於 x 的 L 之赫遜矩陣 (Hessian matrix)，以判斷它為正定 (positive definite) 區域最小值或者為負定 (negative definite) 區域最大值。



3.3 肯恩 · 塔克條件 (Kuhn-Tucker Conditions)

拉格朗基乘子可以用來發展具有等式限制的最佳化問題，肯恩 · 塔克[11]擴展了這個理論，包含等式與不等式限制的一般非線性規劃 (NPL)，考慮一般非線性規劃的問題：

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x). \\ \text{Subject to} \quad & g_j(x) \leq 0, \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, J. \\ & h_k(x) = 0, \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, K. \\ & x = (x_1, x_2, \dots, x_N). \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.3.1 肯恩 · 塔克必要定理

考慮 (3.4) 式所提供的 *NLP* 問題，令 f 、 g 和 h 是可微分的函數，而 x^* 是 *NLP* 的一個可用解 (feasible solution)，令 $I = \left\{ j \mid g_j(x^*) = 0 \right\}$ 。而且對於 $j \in I$ ， $\nabla g_j(x^*)$ 和對於 $k = 1, \dots, K$ ， $\nabla h_k(x^*)$ 是線性獨立的。若 x^* 是 *NLP* 的一個最佳解，則存在 (λ^*, μ^*) ，使得 (x^*, λ^*, μ^*) 為 (3.5) 至 (3.9) 式肯恩 · 塔克問題的解。

$$\nabla f(x) + \lambda^T \nabla h_k(x) + \mu^T \nabla g_j(x) = 0. \quad (3.5)$$

$$g_j(x) \leq 0, \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, J. \quad (3.6)$$

$$h_k(x) = 0, \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, K. \quad (3.7)$$

$$\mu^T g_j(x) = 0, \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, J. \quad (3.8)$$

$$\mu^T \geq 0, \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, J. \quad (3.9)$$

一般很難去驗證限制資格，因為這必須事先知道最佳解才行。而對某些特別的 *NLP* 問題，限制資格是可以滿足的：

- (1) 當所有的等式和不等式限制式都是線性的。
- (2) 當所有的不等式限制式都是凹函數 (concave function)，等式限制式是線性的，而且至少存在一個可用的 x ，它是必須存在於不等式限制的可用區域之內部。換句話就是存在 x^* 使得對於 $j = 1, \dots, J$ ， $g_j(x^*) < 0$ ，且對於 $k = 1, \dots, K$ ， $h_k(x^*) = 0$ 。當最佳點不符合限制資格之時，肯恩 · 塔克問題的解可能不存在。

3.3.2 肯恩 · 塔克充分定理

考慮方程式 (3.4) 式所提供的 *NLP* 問題。令目標函數 $f(x)$ 是凸函數 (convex

function)，對於 $j = 1, \dots, J$ ，不等式限制式 $g_j(x)$ 皆為凹函數 (concave function)，

而且對於 $k = 1, \dots, K$ ，等式限制式 $h_k(x)$ 是線性的。若存在一解 (x^*, λ^*, μ^*) 滿足 (3.5) 至 (3.9) 式肯恩 · 塔克條件，則 x^* 是這個 NLP 問題的最佳解。

3.4 二階最佳化條件

在第 3.3 節中討論受限制最佳化問題的必要與充分定理，稱為肯恩 · 塔克條件，採用目標函數與限制式的梯度。應用到二次可微分函數的二階必要和充分最佳化條件。

3.4.1 二階必要條件

考慮 (3.4) 式所提供的 NLP 問題，令 f 、 g 和 h 是二階可微分的函數，並使得 x^* 在非線性規劃中是可用點 (feasible point)。令在 x^* 的活躍限制 (active constraint) 之集合是 $I = \{j \mid g_j(x^*) = 0\}$ 。更進一步假設對於 $j \in I$ ， $\nabla g_j(x^*)$ 和對於 $k = 1, \dots, K$ ， $\nabla h_k(x^*)$ 是互相線性獨立的。則 x^* 的 NLP 問題區域最小點的必要條件是

(1) 存在 (λ^*, μ^*) 使得 (x^*, λ^*, μ^*) 是一個肯恩 · 塔克點。

(2) 對於每一個向量 $y_{(1 \times n)}$ 滿足

$$\nabla g_j(x^*) y = 0, \quad \text{for } j \in I. \quad (3.10)$$

$$\nabla h_k(x^*) y = 0, \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, K. \quad (3.11)$$

必須是

$$y^T H_L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y \geq 0. \quad (3.12)$$

式中

$$L(x, \lambda, \mu) = \nabla f(x) + \lambda^T \nabla h_k(x) + \mu^T \nabla g_j(x). \quad (3.13)$$

而且 $H_L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ 是 L 對於 x 的二階偏微分赫遜矩陣在 (x^*, λ^*, μ^*) 處計算所得之矩陣。

3.4.2 二階充分條件

NPL 問題中 f , g 和 h 是二階可微分的函數。點 x^* 的 *NLP* 問題之嚴格區域最小點的充分條件是

(1) 存在 (λ^*, μ^*) 使得 (x^*, λ^*, μ^*) 是一個肯恩 · 塔克點。

(2) 對於每一個非零向量 $y_{(1 \times n)}$ 滿足

$$\nabla g_j(x^*) y = 0, \quad j \in I_1 = \left\{ j \mid g_j(x^*) = 0, \mu^* > 0 \right\}. \quad (3.14)$$

$$\nabla g_j(x^*) y \leq 0, \quad j \in I_2 = \left\{ j \mid g_j(x^*) = 0, \mu^* = 0 \right\}. \quad (3.15)$$

$$\nabla h_k(x^*) y = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (3.16)$$

$$y \neq 0.$$

必須要

$$y^T H_L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y > 0. \quad (3.17)$$

3.5 解限制性問題的線性化方法

一般的非線性函數 $f(x)$ 在點 x^0 的附近可以用泰勒展開來逼近。

$$f(x) = f(x^0) + \nabla f(x^0)(x - x^0) + O(\|x - x^0\|^2) \quad (3.18)$$

忽略掉較高階項 $O(\|x - x^0\|^2)$ ，因此函數 $f(x)$ 被 f 在 x^0 的線性化函數所近似，將其

記為

$$\tilde{f}(x; x^0) = f(x^0) + \nabla f(x^0)(x - x^0). \quad (3.19)$$

3.5.1 線性限制式問題

線性限制式的非線性規劃 (NLP) 形式為

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f(x) \\ & \text{Subject to} && Ax \leq b, \\ & && x \geq 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

因為 $f(x)$ 是非線性，最佳點不在侷限於可用區域的頂點或角落點，而可能是區域中的任何點。若 $f(x)$ 是非凸形的，線性限制 NLP 問題可能出現多重區域最小點。線性化建構最簡單和最直接的運用是在某個選定的預估解，把所有問題函數線性化，取代一般性非線性問題。

知道此一特性之後，考慮線性限制問題建構在某可用點 x^0 的線性化

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \tilde{f}(x; x^0) \\ & \text{Subject to} && Ax \leq b, \\ & && x \geq 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

問題變成一個 LP 的問題，如果假設可用區域是有界的，最佳點將出現在可用區的角落。近似問題的解 \tilde{x}^* 要和那一個 NLP 的區域最小點最接近，完全決定於所選擇的線性化點。因此在非凸形的情況下無法保證可得到全域最小解。因 \tilde{x}^* 必定是角落點， x^* 可能在任何位置也可能是內部點，即使 $f(x)$ 是凸形的， \tilde{x}^* 仍然需要做進一步的調整，使它確定能夠較接近 x^* 。

3.5.2 一般性的非線性規劃問題

一般非線性規劃 (NLP) 的形式為

$$\text{Minimize} \quad f(x).$$

$$\text{Subject to} \quad g_j(x) \leq 0, \quad \text{for } j=1, 2, \dots, J.$$

$$h_k(x) = 0, \quad \text{for } k=1, 2, \dots, K.$$

$$x_i^{(U)} \geq x_i \geq x_i^{(L)}, \quad \text{for } i=1, 2, \dots, N. \quad (3.22)$$

給定一個估計值 $x^{(t)}$ ，在 $x^{(t)}$ 可以建構一個直接的線性近似問題

$$\text{Minimize} \quad f(x^{(t)}) + \nabla f(x^{(t)}) (x - x^{(t)}).$$

$$\text{Subject to} \quad g_j(x^{(t)}) + \nabla g_j(x^{(t)}) (x - x^{(t)}) \leq 0, \quad \text{for } j=1, 2, \dots, J.$$

$$h_k(x^{(t)}) + \nabla h_k(x^{(t)}) (x - x^{(t)}) = 0, \quad \text{for } k=1, 2, \dots, K.$$

$$x_i^{(U)} \geq x_i \geq x_i^{(L)}, \quad \text{for } i=1, 2, \dots, N. \quad (3.23)$$

非線性規劃問題已經轉變成線性規劃問題，可以運用 *LP* 方法去解，而得到新點 $x^{(t+1)}$ 。即使 $x^{(t)}$ 是原非線性問題的可用解，卻不能保證 $x^{(t+1)}$ 將是可用點，實際上若限制函數是非線性的，點 $x^{(t+1)}$ 在大部分情形是不可用的。若 $x^{(t+1)}$ 是不可用的，由目標函數的線性近似值所獲得的改善，即是

$$\tilde{f}(x^{(t+1)}; x^{(t)}) < \tilde{f}(x^{(t)}; x^{(t)}). \quad (3.24)$$

並不保證得到的是真正有改善的估計點。為了要能收斂到真正的最佳解，充分條件是對於每一點 $x^{(t)}$ ，皆可在目標函數值和限制的不可用性上得到改善。若 $x^{(t)}$ 是一連續的點，每一點都是由前一 *LP* 問題的解當成線性化點，所得 *LP* 的問題的解即為最佳點。

3.6 可分離規劃 (Separable Programming)

這種技巧可將某些形式的非線性受限制最佳化問題重新推導成只包含線性函數的對等問題。這技巧產生的動機是：對於一般涵蓋大區間的非線性函數，改善

線性近似的一種好方法，把區間分割成多個子區間，然後對各個區間建立個別的線性近似。

3.6.1 單變數可分離函數

考慮定義在區間 $0 \leq x \leq a$ 的連續性單變數函數 $f(x)$ ，假設在區間中任意選定 K 個分割點，標記為 $x^{(k)}$ ， $k = 1, \dots, K$ 。對於每一個 $x^{(k)}$ 求出 $f^{(k)} = f(x^{(k)})$ ，並在每相鄰分割點 $x^{(k)}$ 與 $x^{(k+1)}$ 間畫出一條線，連接點 $(x^{(k)}, f^{(k)})$ 和 $(x^{(k+1)}, f^{(k+1)})$ 。一個片段線性近似函數 $\tilde{f}(x)$ （圖 3.1）

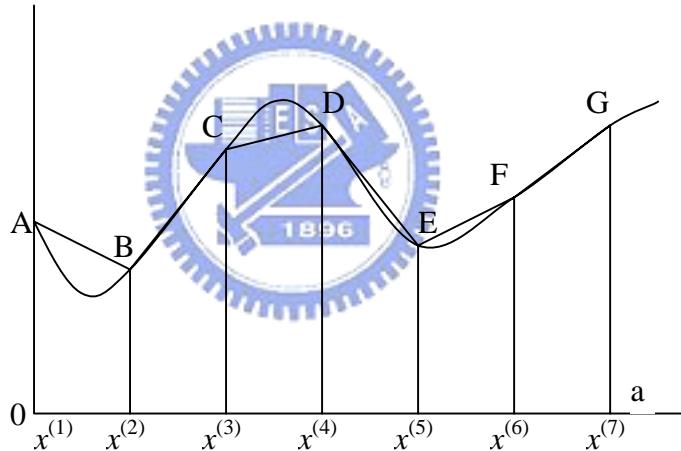


圖 3.1 片段線性曲線

連接兩點 $(x^{(k)}, f^{(k)})$ 和 $(x^{(k+1)}, f^{(k+1)})$ 的直線為，

$$\tilde{f}(x) = f^{(k)} + \frac{f^{(k+1)} - f^{(k)}}{x^{(k+1)} - x^{(k)}}(x - x^{(k)}). \quad (3.25)$$

方程式將與每一個子區間 $x^{(k)} \leq x \leq x^{(k+1)}$ 相對應。因此 $f(x)$ 由 $K-1$ 個線性方程式所構成，每個方程式在各自的限制區間中有效。

任何 x 在 $x^{(k)} \leq x \leq x^{(k+1)}$ 的範圍中可以寫成

$$x = \lambda^{(k)} x^{(k)} + \lambda^{(k+1)} x^{(k+1)}. \quad (3.26)$$

把 x 的表示式代入 (3.25) 式中：

$$\tilde{f}(x) = f^{(k)} + \frac{f^{(k+1)} - f^{(k)}}{x^{(k+1)} - x^{(k)}} \left(\lambda^{(k+1)} x^{(k+1)} - (1 - \lambda^{(k)}) x^{(k)} \right). \quad (3.27)$$

$$\tilde{f}(x) = f(x^{(k)}) + \lambda^{(k+1)} (f^{(k+1)} - f^{(k)}) = \lambda^{(k)} f^{(k)} + \lambda^{(k+1)} f^{(k+1)}. \quad (3.28)$$

3.6.2 多變數可分離函數

一個具有 N 個分量的向量變數 x 的函數是可分離的，則它可以表示成單變數函數的和，而每一個單變數函數都只含 N 個變數之中的一個。

在多變數函數 $f(x)$ 是可分離且為連續的限制下， $f(x)$ 的片段線性近似得建構進行如下：用 k_i 個分割點把每一個變數 x_i 的區間劃分出來。因此每一變數將會對應於一點序列

$$x_i^{(L)} = x_i^{(1)} < x_i^{(2)} < \dots < x_i^{(j)} < \dots < x_i^{(K_i)} = x_i^{(U)}. \quad (3.29)$$

(3.23) 式中 $x_i^{(L)}$ 與 $x_i^{(U)}$ 是變數 x_i 給定或假設的上界與下界。 $f_i^{(k)} = f_i(x_i^{(k)})$ 為縮寫

表示，近似函數 $\tilde{f}(x)$ 變成

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{K_1} \lambda_1^{(k)} f_1^{(k)} + \sum_{k=2}^{K_2} \lambda_2^{(k)} f_2^{(k)} + \dots + \sum_{k=1}^{K_N} \lambda_N^{(k)} f_N^{(k)}. \quad (3.30)$$

式中

$$x_i = \sum_{k=1}^{K_i} \lambda_i^{(k)} x_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.31)$$

$$(1) \sum_{k=1}^{K_i} \lambda_i^{(k)} = 1.$$

$$(2) \lambda_i^{(k)} \geq 0, \quad k = 1, \dots, K_i.$$

$$(3) \lambda_i^{(k)} \lambda_i^{(j)} = 0, \quad \text{if } j > i + 1; i = 1, \dots, K_i - 1.$$

符合上述 3 項條件，任何非線性函數 $f(x)$ 可用線性的函數 $\tilde{f}(x)$ 來取代。若需要非

常近似 $f(x)$ ，則分割點以及變數 λ 的數目將變的相當大，線性化要付出增加相當維度的代價。

3.7 線性規劃 (Linear Programming)

考慮一非線性最佳化問題：

$$\text{Minimize} \quad f(x).$$

$$\text{Subject to} \quad g_j(x) \leq 0, \quad \text{for } j=1, 2, \dots, J. \quad (3.32)$$

將目標函數與限制條件在起始設計點 x_0 以一階泰勒級數線性化，展開成如下形式：

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0} . \\ \text{Subject to} \quad & g_j(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} \leq 0, \quad \text{for } j=1, 2, \dots, J . \\ & a_{li} \leq x_i - x_{0i} \leq a_{ui} . \end{aligned} \quad (3.33)$$

此一問題變成線性規劃子問題，可以用線性規劃中的方法，得到下一次迭代的設計點。(3.33)式的限制條件稱為移動限制(move limit)，主要是因為利用線性規劃解非線性最佳化問題時，函數是以一階泰勒級數方式近似展開，只有在設計點附近才會較近似於原來的非線性曲線，超過一定範圍線性近似便相當不準確。每次迭代過程中設計變數改變量必須以移動限制加以侷限，否則會發生振盪及發散的情況。

3.8 二次規劃 (Quadratic Programming)

線性規劃法中移動限制形式 $a_{li} \leq x_i - x_{0i} \leq a_{ui}$ ，是給每一次迭代的設計點一個「方形」的移動區域，另一種可能的移動限制式則是給每次迭代的設計點一個「圓形」的移動區域

$$\|x - x_0\| \leq \sqrt{2\xi} \Rightarrow 0.5(x - x_0)^T(x - x_0) \leq \xi. \quad (3.34)$$

改用圓形的移動區域後，線性規劃法中的線性規劃子問題成為

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0} \\ \text{Subject to} \quad & g_j(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} \leq 0, \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, J. \\ & 0.5(x - x_0)^T(x - x_0) \leq \xi. \end{aligned} \quad (3.35)$$

上述的問題已經不再是線性規劃問題，改成圓形區域定義移動限制，依舊有移動步長 設定大小的問題。然而這個數學模型可進一步變形，把移動步長的限制條件併入目標函數中如 (3.34) (3.35) 式，便無需實際訂定移動步長

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0} + 0.5 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^2. \\ \text{Subject to} \quad & g_j(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} \leq 0, \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, J. \end{aligned} \quad (3.36)$$

上式是一個二次規劃 (quadratic programming) 問題，也就是其目標函數為二次函數，而所有的限制條件均為線性。二次規劃法是一個頗為強健的演算法，也是目前解大型非線性最佳化問題相當流行且重要的演算法。

3.9 對偶性理論

對偶性理論[11]的基本概念：每一個線性規劃都有一個相對應的線性規劃，稱為對偶，使得其中一個線性規劃的解一定是另一個的解。原始和其對偶的解之間有很多重要的關係。

考慮一非線性最佳化問題

$$\text{Minimize} \quad f(x).$$

$$\text{Subject to } h(x) = 0. \quad (3.37)$$

也可將上述的限制式擴張成為包含不等式與等式。假設 x^* 為上述問題的區域最小值，可對應到拉格朗基乘子 λ^* 使得

$$\nabla f(x^*) + (\lambda^*)^T \nabla h(x^*) = 0. \quad (3.38)$$

而且拉格朗基乘子的赫遜矩陣 (Hessian matrix) 為

$$L(x^*) = F(x^*) + (\lambda^*)^T H(x^*). \quad (3.39)$$

必須保證為正半定 (positive semidefinite)。

由上述的觀點發展區域對偶理論導入區域凸集的假設，特別假設赫遜矩陣 $L(x^*)$ 在所有的空間中皆為正定。這樣的假設可以保證拉格朗基乘子 $l(x) = f(x) + (\lambda^*)^T h(x)$ 在 x^* 點是區域凸集。

進一步假設 x^* 點不是只是限制問題 (3.37) 的唯一區域解，也同時是非限制問題的唯一區域解



$$\text{Minimize} \quad f(x) + (\lambda^*)^T h(x). \quad (3.40)$$

且對於區域最小點滿足一階與二階充分條件，對於任何趨近 λ^* 的 λ 皆對應一個區域最小點 x 趨近 x^* 滿足 $f(x) + \lambda^T h(x)$ 。上述的函數隱含了

$$\nabla f(x) + \lambda^T \nabla h(x) = 0. \quad (3.41)$$

當 λ 趨近 λ^* 即有一解 x 趨近 x^* ，在解為 x^* 點時赫遜矩陣 $F(x) + \lambda^T H(x)$ 為正定。因此在區域中有為一相對應於非限制問題解的 x 與 λ

$$\text{Minimize} \quad f(x) + \lambda^T h(x). \quad (3.42)$$

將對偶函數 ϕ 定義趨近 λ^*

$$\phi(\lambda) = \text{Minimize} [f(x) + \lambda^T h(x)]. \quad (3.43)$$

這是一個針對 x 趨近 x^* 的區域最小點。我們可以知道限制問題 (3-37) 是相等於針對 λ 的對偶函數 ϕ 的非限制問題區域最大點。



第四章 最佳控制理論

軌跡追蹤問題[12]是一個很典型的最佳控制問題。假設有個系統其模式可由下列的動態方程式及輸出方程式來描述

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0. \\ y(t) &= h(x(t)).\end{aligned}\quad (4.1)$$

我們希望能找到一組控制解 $u^*(t)$ ，使系統的輸出軌跡 $y(t)$ 能遵循一個期望的輸出軌跡 $r(t)$ 。

任何一組控制解 $u(t)$ 皆能得到一個輸出軌跡，但是任意的輸出軌跡並非我們所期望的，達到我們目標真正的輸出軌跡與期望的輸出軌跡的差距最小的控制解，即為我們所謂的最佳控制解。最佳控制問題的基本要素

- (1) 考慮的系統
- (2) 實際的限制
- (3) 效益的評估



4.1 考慮的系統

將任何控制問題作模型化處理的工作是重要一環。目的是為的獲得一個簡單的數學描述方程式，它可以將所有實際輸入系統的訊號，反應在對應於實際系統的輸出端。我們所討論系統的狀態變數是由微分方程描述而成，假設在時間為 t 的狀態變數表示為 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ，在時間為 t 的輸入控制訊號為 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ ，則系統可由 n 個一階微分方程所描述

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t), \\
\dot{x}_2(t) &= a_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t), \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

我們定義系統的狀態向量為

$$x(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

控制向量為

$$u(t) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}.$$

可將 (4.2) 的狀態方程式改寫成

$$\dot{x}(t) = \alpha(x(t), u(t), t).$$

在時間 $[t_0, t_f]$ 間的控制輸入訊號可以表示為 u 或稱做控制歷程，在時間 $[t_0, t_f]$ 間的狀態值可以表示為 x 或稱做狀態軌跡。

4.2 實際的限制

在我們選定數學模型之後，下一步將要定義控制值與狀態值的實際限制。假設狀態向量限制有兩個變數，狀態變數 x_1 在 t_0 時為 0 且 t_f 時達到 e ，表示如下

$$\begin{aligned}
x_1(t_0) &= 0, \\
x_1(t_f) &= e.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

狀態變數 x_2 在 t_0 時為 0 且 t_f 時為 0，表示如下

$$\begin{aligned}
x_2(t_0) &= 0, \\
x_2(t_f) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

狀態變數的限制條件矩陣為

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad x(t_f) = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}, \\ 0 \leq x_1(t) &\leq e, \quad 0 \leq x_2(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

控制向量輸入限制有兩個變數，控制變數 u_1 在 t_0 時為 0 且 t_f 時達到 M_1 ，控制變數 u_2 在 t_0 時為 $-M_2$ 且 t_f 時為 0，表示如下

$$\begin{aligned} 0 \leq u_1(t) &\leq M_1, \\ -M_2 \leq u_2(t) &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

有限制條件的基本概念後，將這樣的概念再進一步描述

(1) 可行的控制向量變數(admissible control)滿足控制向量變數限制如

$$q_1(u(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f] \quad \text{或} \quad q_2(x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f]$$

的控制向量變數。

(2) 可行的狀態軌跡(admissible state trajectories)滿足狀態向量變數限制如

$$p_1(x(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f] \quad \text{或} \quad p_2(x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f]$$

的狀態軌跡。

(3) 目標區(target set)：系統最後的狀態 $x(t_f)$ 必須落腳的區域，滿足

$$S(x(t_f), t_f) = 0 \text{ 的限制式。}$$

4.3 效益評量

一個評估系統效益的量化指標，一般而言它可以用下式來表示

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt. \quad (4.7)$$

其中 $h: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ 為最終狀態的成本函數， $g: \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ 為在時間 $t \in [t_0, t_f]$ 之軌跡

成本函數； n 是 $x(t)$ 的維數， m 是 $u(t)$ 的維數。

效益評量依問題所要的目的不同，而有不同的選擇

(1) 最短時間控制問題(Minimum-time control)

$$J = t_f - t_0 \text{ 或 } J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt . \quad (4.8)$$

(2) 最終狀態控制問題(Terminal state control)

$$J = [x(t_f) - r(t_f)]^T H [x(t_f) - r(t_f)]. \quad (4.9)$$

其中 $r(t_f)$ 代表期望的最終狀態， H 是正定(positive definite)的權重矩陣。

(3) 最少的控制耗力問題(Minimum-control-effort)

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^p \beta_i |u_i(t)| dt . \quad (4.10)$$

其中 $u_i(t)$ 是第 i 個控制變數； β_i 是 u_i 的權重係數。

(4) 最低耗能問題(Minimum energy)

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) R u(t) dt . \quad (4.11)$$

其中 R 是一個實正定(real positive definite)的權重矩陣。

(5) 追蹤問題(Tracking)

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - r(t)]^T Q(t) [x(t) - r(t)] dt . \quad (4.12)$$

$r(t)$ ：期望的狀態軌跡。

$Q(t)$ ：實半正定對稱(real positive semi-definite symmetric)的權重矩陣。

(6) 調節問題(Regulation)

$$J = \int_{t_0}^{t_f} x(t)^T Q(t) x(t) dt . \quad (4.13)$$

這是當 $r(t) = 0, t \in [t_0, t_f]$ 的追蹤問題。

利用效益評量來轉換硬限制(hard constraints)成軟限制(soft constraints)，如：

(1) 我們可以在原本的效益評量中加上一項 $[x(t_f) - r(t_f)]^T H [x(t_f) - r(t_f)]$ 亦

即 $J = \dots + [x(t_f) - r(t_f)]^T H [x(t_f) - r(t_f)]$ 以取代終端狀態的硬限制
 $x(t_f) - r(t_f) = 0$ 。

(2) 為了防止控制輸入太大，我們可以用 $J = \int_{t_0}^{t_f} \{ \dots + u^T(t) R u(t) \} dt$ 取代
 $-|u_{\max}| \leq u(t) \leq |u_{\max}|, t \in [t_0, t_f]$ 。

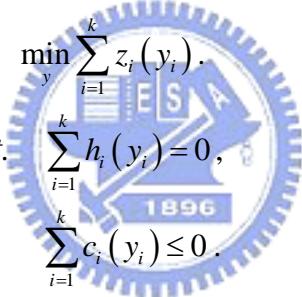


第五章 遷迴二次對偶規劃(RQPD)

利用二次規劃的特性將目標函數與限制式分別作二次近似與一次近似目標函數的，目標函數的赫遜矩陣（Hessian matrix）對角線為正數，如果不為正數的則令它為一個小的正數。再利用對偶法解二次規劃的目標函數，對偶法的目標函數為的含數，由於原赫遜矩陣（Hessian matrix）為正定，所以保證對偶法的目標函數對為非凸集型。合併二次規劃與對偶法解非線性的最佳控制問題[13]-[15]。

5.1 問題的公式化

本章中討論的非凸集可分離最佳化問題如下

$$\begin{aligned} & \min_y \sum_{i=1}^k z_i(y_i), \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^k h_i(y_i) = 0, \\ & \quad \sum_{i=1}^k c_i(y_i) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$


在這裡討論的 $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^n$, $y_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ 而且 $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ；限制式方程式 $h_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $c_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^q$ 與目標函數 $z_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$, 皆為二次可微分的 y_i 函數。

5.2 Runge-Kutta Method

系統為非線性動態方程式，利用用 Runge-Kutta Method[16]將系統的非線性動態方程式離散化，first-order Runge-Kutta 法如下

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, u_n). \quad (5.2)$$

second-order Runge-Kutta 如下

$$x_{n+1} = x_n + hf \left[x_n + \frac{h}{2} f(x_n, u_n), u_n + \frac{h}{2} \right]. \quad (5.3)$$

在此一問題中我們使用的是 *first-order Runge-Kutta*，一階與二階或是四階近似的差別在於對非線性動態方程式離散後的近似度，使用一階近似時可以選用較小的 *step-size*，同樣可以達到較精準得離散動態方程式。

5.3 二次規劃遞迴法

由於在 3.8 節中已經大略的介紹過二次規劃法，所以在此節將不再贅述，直接運用二次規劃法重寫 (5.1) 式為

$$\begin{aligned} \min_d \quad & \sum_{i=1}^k \nabla_{y_i} z_i(y_i(l)) d_i + \frac{1}{2} d_i^T B_i(y_i(l)) d_i. \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^k h_i(y_i(l)) + \nabla_{y_i} h_i(y_i(l)) d_i = 0, \\ & \sum_{i=1}^k c_i(y_i(l)) + \nabla_{y_i} c_i(y_i(l)) d_i \leq 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

上式中的 $d_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ， $\nabla_{y_i} h_i(\cdot)$ 為 $m \times n_i$ 的矩陣， $\nabla_{y_i} c_i(\cdot)$ 為 $q \times n_i$ 的矩陣，而 $\nabla_{y_i} z_i(\cdot)$ 為 n_i 維度的列向量， $B_i(y_i(l))$ 是個 $n_i \times n_i$ 的正定對角矩陣，例如第 j 個對角元素

$$b_{ij} = \begin{cases} \left. \frac{\partial^2}{\partial y_{ij}^2} \right|_{y_i(l)}, & \text{if } \left. \frac{\partial^2}{\partial y_{ij}^2} \right|_{y_i(l)} > 0; \\ \gamma, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

這裡的 γ 為大於零的純量，向量 y_i 的第 j 個元素表示為 y_{ij} ，且 $(\cdot)^T$ 表示為 (\cdot) 的轉置矩陣。

利用遞迴二次規劃法求解 (5.1) 式，遞迴更新的程序如 (5.6) 式

$$y_i(l+1) = y_i(l) + \bar{\alpha} d_i^*, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.6)$$

這裡的 d_i^* 為 (5.5) 式的最佳解，也是 (5.1) 式的搜尋方向。對偶法是最適合解 (5.5) 式的方法，因為 (5.5) 是可分離且含有正定的赫遜矩陣 (Hessian matrix)， $\bar{\alpha}$ 是利

用一維線性搜尋法，沿 $d_i^* = (d_1^*, \dots, d_k^*)$ 方向搜尋的最小值。

5.4 對偶法

利用對偶法求解 (5.5) 式描述如下：

$$\begin{aligned} & \underset{\lambda, \mu}{\text{Maximize}} \quad \Phi(\lambda, \mu). \\ & \mu \geq 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

對偶函數 $\Phi(\lambda, \mu)$ 是拉格朗基乘子 (λ, μ) 的函數， $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ， $\mu \in \mathbb{R}^q$ ，如下：

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \mu) = & \min_d \left\{ \sum_{i=1}^k \left[\nabla_{y_i} z_i(y_i(l)) d_i + \frac{1}{2} d_i^T B_i(y_i(l)) d_i \right] \right. \\ & \left. + \left[\sum_{i=1}^k H_i(y_i(l), d_i) \right]^T \lambda + \left[\sum_{i=1}^k C_i(y_i(l), d_i) \right]^T \mu \right\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

上式的 $H_i(y_i(l), d_i)$ 與 $C_i(y_i(l), d_i)$ 分別表示為：

$$\begin{aligned} H_i(y_i(l), d_i) &= h_i(y_i(l)) + \nabla_{y_i} h_i(y_i(l)) d_i, \\ C_i(y_i(l), d_i) &= c_i(y_i(l)) + \nabla_{y_i} c_i(y_i(l)) d_i. \end{aligned}$$

利用對偶法來解 (5.5) 式，再利用梯度法 (gradient ascent method) 解 (5.7) 式，遞迴的過程如下：

$$\begin{aligned} \lambda^t(j+1) &= \lambda^t(j) + \bar{\beta} \nabla_{\lambda^t} \Phi(j), \quad t = 1, \dots, m. \\ \mu^v(j+1) &= \mu^v(j) + \bar{\beta} \nabla_{\mu^v} \Phi(j), \quad v = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (5.9)$$

這裡的 j 代表遞迴的次數， $\Phi(\lambda, \mu)$ 用 $\Phi(j)$ 來表示第 j 次的遞迴，而且 λ^t 與 μ^v 分別表示 λ 與 μ 的第 t 個與第 v 個元素。利用一維線性搜尋法求得參數 $\bar{\beta}$ 的值，並使 $\bar{\beta} = \arg \max_{\beta \in \Omega} \{ \Phi(\lambda(j) + \beta \nabla_{\lambda} \Phi(j), \mu(j) + \beta \nabla_{\mu} \Phi(j)) \}$ ，這裡的 $\Omega = \{ \beta \in \mathbb{R} \mid \mu(j) + \beta \nabla_{\mu} \Phi(j) \geq 0 \}$ ；對於所有的 $(\nabla_{\lambda} \Phi(j), \nabla_{\mu} \Phi(j))$ 可以根據下列公

式求得：

$$\begin{aligned}\nabla_{\lambda^t} \Phi(j) &= \sum_{i=1}^k H_i^t(y_i(l), \hat{d}_i), \\ \nabla_{\mu^v} \Phi(j) &= \sum_{i=1}^k C_i^v(y_i(l), \hat{d}_i).\end{aligned}\quad (5.10)$$

由於 (5.8) 式中最小解 \hat{d} 為 $(\lambda, \mu) = (\lambda(j), \mu(j))$ 的函數，因此求得 λ 與 μ 收斂解的同時也求出最小解 \hat{d} 。在 (5.10) 式的 $H_i^t(y_i(l), \hat{d}_i)$ 與 $C_i^v(y_i(l), \hat{d}_i)$ 分別代表 $H_i(y_i(l), \hat{d}_i)$ 與 $C_i(y_i(l), \hat{d}_i)$ 的第 t 個與第 v 個元素。

由於 (5.5) 式是可分離的，所以可以針對 λ 值將 (5.8) 解構成 k 個獨立的最
小化子問題，每個子問題 I 可以由下列方程式求得：

$$\begin{aligned}\hat{d}_i &= B_i(y_i(l))^{-1} \left[\nabla_{y_i} z_i(y_i(l))^T \right. \\ &\quad \left. + \nabla_{y_i} h_i(y_i(l))^T \lambda(j) + \nabla_{y_i} c_i(y_i(l))^T \mu(j) \right]\end{aligned}\quad (5.11)$$

因為 $B_i(y_i(l))^{-1}$ 為對角矩陣，所以可以平行的計算 k 個 \hat{d}_i 。所有的 $\nabla_{\lambda} \Phi(j)$ 與 $\nabla_{\mu} \Phi(j)$ 也可以根據 (5.10) 式作平行計算。

5.5 RQPD 演算法

根據上面的推演，對於非凸集可分離得最佳化問題，我們已經有了最適的的求解方式：

演算法 I.

步驟 0：設定初始值 $y(0)$ 和 $i = 0$ 。

步驟 1：設定初值 $\lambda(0)$ 與 $\mu(0)$ ($\mu \geq 0$)， $j = 0$ 。

步驟 2：利用 (5.11) 式平行計算 \hat{d} 。

步驟 3：利用 (5.10) 式平行計算 $(\nabla_{\lambda} \Phi(j), \nabla_{\mu} \Phi(j))$ 。

步驟 4：假如 $\{\|\nabla_\lambda \Phi(j)\|_\infty, \|\nabla_\mu \Phi(j)\|_\infty\} < \varepsilon_1$ ，執行步驟 6.，其它情況執行步驟 5.。

步驟 5：利用 (5.9) 式平行的處理與更新 $(\lambda(j+1), \mu(j+1))$ ，返回步驟 2.。

步驟 6：假如 $|\hat{d}|_\infty < \varepsilon_2$ 結束，且輸出 $y(l)$ 得解；其它則利用 (5-6) 式作平行的更新 $y(l+1)$ ，並返回步驟 1.。

(注意： ε_1 與 ε_2 表示解的準確度，而 $|\cdot|_\infty$ 為 (\cdot) 的無限-範數。)

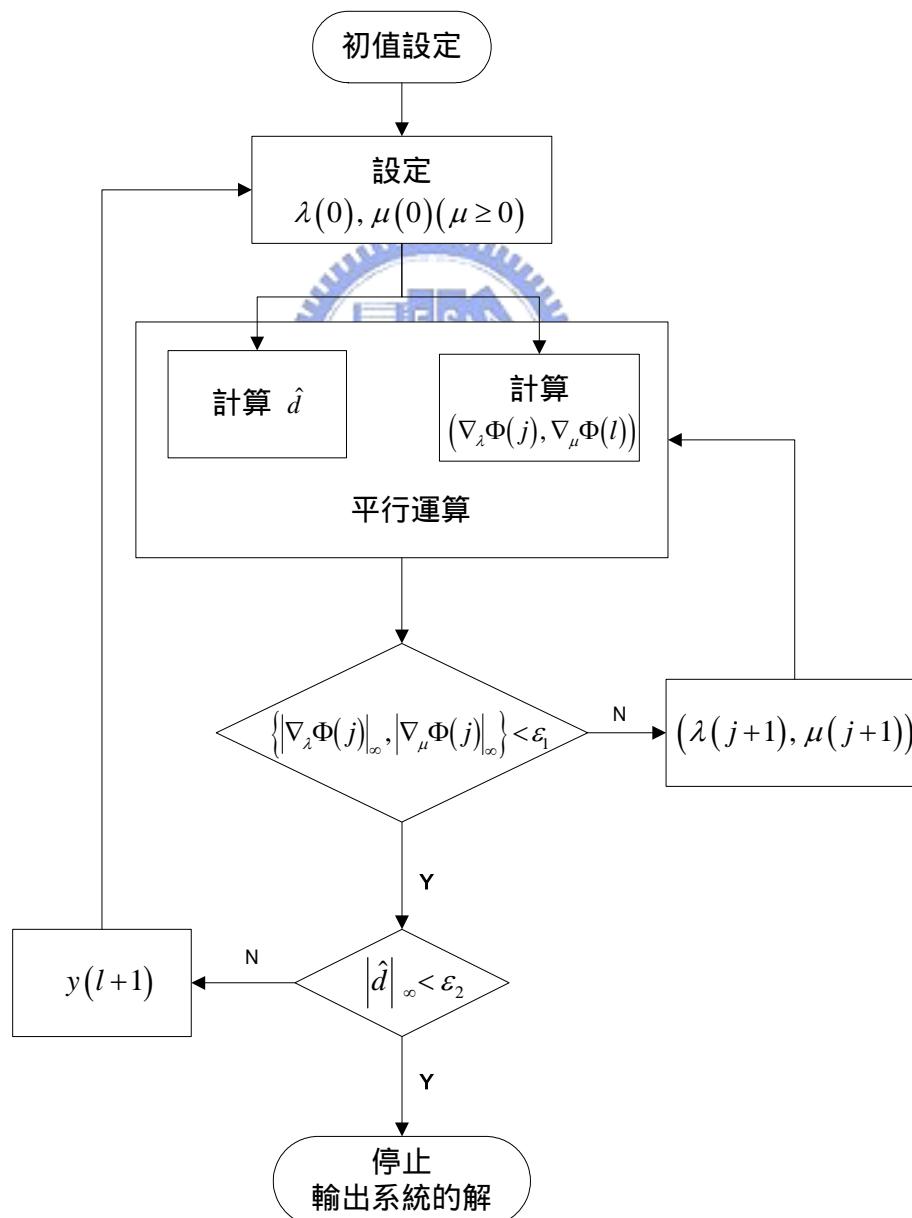


圖 5.1 RQPD 演算法的整體架構

5.6 RQPD 在最佳控制上的應用

對於 RQPD 演算法特別適合求解，二次效益評估值與不等的控制變數限制式，在最終時間固定的非線性多變數問題。

最佳控制的問題在數學上可以表示成

$$\begin{aligned} \min J(x, u) &= x^T(t_f) M x(t_f) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) R(t) u(t) + x^T(t) Q(t) x(t) dt. \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$s.t. \quad \dot{x}(t) = f'(x(t), u(t)); \quad x(t_0) = x_0. \quad (5.13)$$

$$g(u(t)) \leq 0. \quad (5.14)$$

$$T(x(t_f)) = 0. \quad (5.15)$$

上式的狀態變數向量 $x \in \mathbb{R}^m$ ，控制變數向量 $u \in \mathbb{R}^n$ ，函數 $f' : \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，
 $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ， $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 對 $x(t)$ 與 $u(t)$ 為皆為二次可微分，且矩陣 $R(t) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 為正定， $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 、 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 為正半定。典型的效益評估值可能是最小化能量問題、調節器問題、軌跡追蹤問題等。最終狀態限制式是否考慮，相差在 (5.15) 式考慮與否。

將連續時間的最佳控制問題離散化，假設 $t_0 = 0$ ，間隔時間 $\Delta t = t_f / N$ ，連續時間問題 (5.12) 至 (5.14) 可以被離散化成

$$\min \sum_{i=0}^N J(x_i, u_i). \quad (5.16)$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{t_f}{N} f(x_i, u_i, i); \quad x_0 = x_0. \quad (5.17)$$

$$g(u_i) \leq 0, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (5.18)$$

這裡的 $J(x_i, u_i) = \frac{1}{2} (u_i^T R_i u_i + x_i^T Q x_i) \Delta t$ 在 $0 \leq i \leq N-1$ 範圍裡， $J(x_N, u_N) = x_N^T M x_N$ 且 $u_N = 0$ ；利用一階 Runge-Kutta 方法，將 (5.13) 式的函數 $f : \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 離散化成 (5.17) 式，同時 (5.15) 式也可離散化成

$$T(x_N) = 0. \quad (5.19)$$

直接應用 RQPD 演算法求解 (5.16) 至 (5.18) 式，因為它是一個非凸集可分離的最佳化問題。假設

$$E_i(l) = x_{i+1}(l) - x_i(l) - \frac{t_f}{N} f(x_i(l), u_i(l), i), \quad 0 \leq i \leq N-1.$$

$$f_{x_i}(l) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i(l), u_i(l), i)}, \quad f_{u_i}(l) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_i(l), u_i(l), i)}.$$

$$g_{u_i}(l) = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{u_i(l)}.$$

R_i 與 Q_i 的第 s 個與第 k 個對角元素分別以 r_i^s 與 \bar{q}_i^k 表示，同樣也令 \bar{q}_N^k 為 M 矩陣第 k 個對角元素。定義

$$q_i^k = \begin{cases} \bar{q}_i^k, & \text{if } \bar{q}_i^k > 0, \\ \gamma, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N;$$

將 (5.16) 至 (5.18) 式對點 $(x_i(l), u_i(l))$, $i = 1, \dots, N-1$ 做二次近似為

$$\begin{aligned} \min J = & \left[Mx_N(l) \right]^T dx_N + dx_N^T M dx_N + \frac{t_f}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[Q_i x_i(l) \right]^T dx_i \\ & + \left[R_i u_i(l) \right]^T du_i + dx_i^T Q_i dx_i + du_i^T R_i du_i. \end{aligned} \quad (5.20)$$

s.t.

$$\begin{aligned} E_i(l) + dx_{i+1} - dx_i - \frac{t_f}{N} f_{x_i}(l) dx_i \\ - \frac{t_f}{N} f_{u_i}(l) du_i; \quad dx_0 = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$g(u_i(l)) + g_{u_i}(l) du_i \leq 0, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (5.22)$$

(5.21) 至 (5.22) 的對偶法表示符號為 $\Phi(\lambda, \mu)$ ，且 $\Phi(j)$ 可以表示 $\Phi(\lambda, \mu)$ 執行第 j 次。

演算法 II.

步驟 0：設定初始值 $(x(0), u(0))$ 和 $l = 0$ 。

步驟 1：設定初值 $\lambda(0)$ 與 $\mu(0)$ ($\mu \geq 0$)， $j = 0$ 。

步驟 2：平行的計算出下列係數：

$$E_i(l), f_{x_i}(l), f_{u_i}(l), g(u_i(l)), R_i u_i(l), Q_i x_i(l) \quad i = 0, \dots, N-1 \text{ 和 } M x_N(l).$$

步驟 3：平行計算下列參數：

$$\hat{dx}_i^k(j) = \begin{cases} -\frac{1}{q_i^k} \left([Q_i x_i(l)]^k + \lambda_{i-1}^k(j) - \lambda_i^k(j) \right. \\ \quad \left. - \frac{t_f}{N} f_{x_i}^T(l) \lambda_i(j) \right), & \text{if } i = 1, \dots, N-1; \\ -\frac{1}{q_N^k} \left([M x_N(l)]^k + \lambda_{N-1}^k(j) \right), & \text{if } i = N. \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\hat{du}_i^s(j) = -\frac{1}{r_i^s} \left([R_i u_i(l)]^s - \frac{t_f}{N} f_{u_i}^{sT}(l) \lambda_i(j) + g_{u_i}^{sT}(l) \mu_i(j) \right), \quad (5.24)$$

$$s = 1, \dots, p; i = 0, \dots, N-1.$$

步驟 4：平行計算下列參數：

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_i^k} \Phi(j) = & E_i^k(l) + \hat{dx}_{i+1}^k(j) - \hat{dx}_i^k(j) - \frac{t_f}{N} \left[f_{x_i}^{kT}(l) \hat{dx}_i(j) \right. \\ & \left. + f_{u_i}^{kT}(l) \hat{du}_i(j) \right], \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu_i^s} \Phi(j) = & g^s(u_i(l)) + g_{u_i}^{sT}(l) \hat{du}_i(j), \\ & s = 1, \dots, q; i = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5.26)$$

步驟 5：假如 $\max_i \left\{ \left| \nabla_{\lambda_i} \Phi(j) \right|_{\infty}, \left| \nabla_{\mu_i} \Phi(j) \right|_{\infty} \right\} < \varepsilon_1$ ，執行步驟 7.，其它情況跳至步驟 6. 執行。

步驟 6：平行處理與更新

$$\lambda_i^k(j+1) = \lambda_i^k(j) + \bar{\beta} \nabla_{\lambda_i^k} \Phi(j).$$

$$\mu_i^s(j+1) = \mu_i^s(j) + \bar{\beta} \nabla_{\mu_i^s} \Phi(j).$$

$$i = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, m, \quad s = 1, \dots, q.$$

返回步驟 3，這裡的 $\bar{\beta}$ 定義在 (5.9) 式。

步驟 7：假如 $\max_i \left(\left| \hat{dx}_i \right|_{\infty}, \left| \hat{du}_i \right|_{\infty} \right) < \varepsilon_2$ 結束，輸出最佳控制解 $u_i(l), i = 0, \dots, N-1$ ；

其它則執行步驟 8。

步驟 8：平行處理與更新

$$x_{i+1}^k(l+1) = x_{i+1}^k(l) + \bar{\alpha} \hat{dx}_{i+1}^k.$$

$$u_i^s(l+1) = u_i^s(l) + \bar{\alpha} \hat{du}_i^s.$$

$$i = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, m, \quad s = 1, \dots, q. \quad (5.27)$$

設定 $l = l + 1$ 然後返回步驟 1，這裡的 $\bar{\alpha}$ 與 (5.6) 式的定義相似，(5.20)

至 (5.22) 沿者 (\hat{dx}, \hat{du}) 方向的絕對直懲罰法，可以求得函數最小時的 $\bar{\alpha}$ 。

(注意： $(\cdot)^{(i)}$ 可以表示為向量 (\cdot) 的第 i 個元素，或是矩陣 (\cdot) 的第 i 個列。)



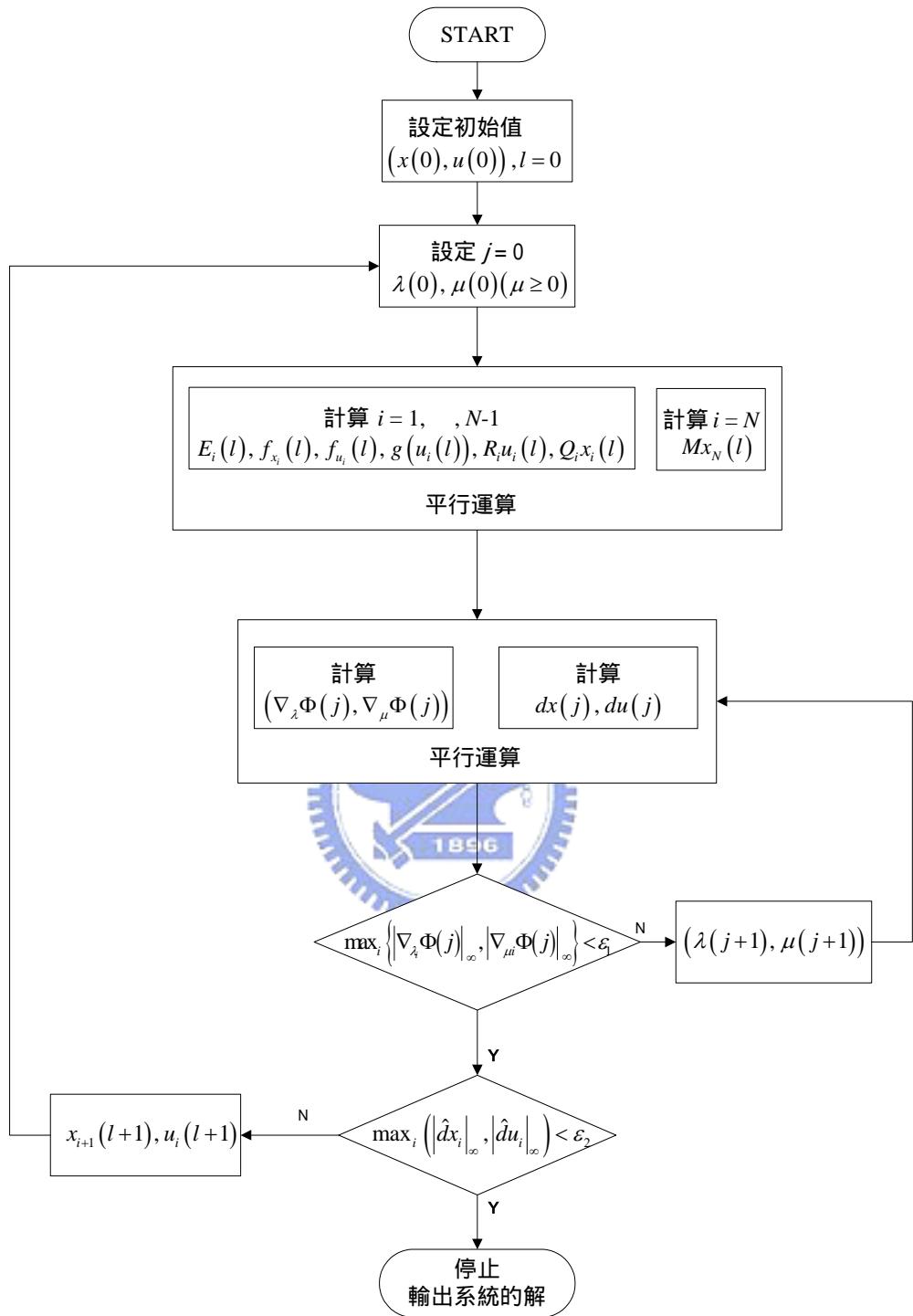


圖 5.2 RQPD 無終值限制式之最佳控制問題

演算法的整體架構

求解終值限制問題 (5.12) - (5.15) , 因為終值限制式 (5.15) , 在任何滿足

$g(u) + g_u^T(u)du \leq 0$ 下的 du , 可能不存在保證滿足方程式的 dx

$$\begin{aligned} E_i(l) + dx_{i+1} - dx_i - \frac{t_f}{N} f_{x_i}^T(l) dx_i \\ - \frac{t_f}{N} f_{u_i}^T(l) du_i = 0, \quad i = 0, \dots, N-1. \\ T(x_N(l)) - T_{x_N}^T(l) dx_N = 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

為了處理這一個困難的問題 , 使用拉格朗日擴增法(augmented Lagrangian method)

[17]處理終值限制式問題。利用拉格朗日擴增法解 (5.12) - (5.15) 式

$$\begin{aligned} \max_{\tau} \left\{ \min_{x, u} J(x, u) + cT(x_N)^2 + \tau T(x_N) \mid x_{i+1} - x_i \right. \\ \left. - \frac{t_f}{N} f(x_i, u_i, i) = 0, g(u_i) \leq 0, i = 0, \dots, N-1 \right\}. \end{aligned}$$

的遞迴更新程序為 $\tau(k+1) = \tau(k) + cT(\hat{x}_N)$, 最小問題限制式在 $\tau(k)$ 時 x_N 最佳解為 \hat{x}_N , 且懲罰係數 c 是大的正純量。最小問題限制式與 (5.12) - (5.14) 的最佳控制問題幾乎是相似的 , 除了終值狀態的懲罰係數項可能沒有被二次化。然而利用演算法 II 可以解具有終值限制式的問題 , 只需要將對角矩陣 M 的第 k 個元素 \bar{q}_N^k , 使用 $cT(x_N)^2 + \tau T(x_N)$ 得第 k 個對角項取代 , 且 (5.23) 式的 $Mx_N(l)$ 用下列的式子取代

$$\frac{\partial \left[cT(x_N)^2 + \tau T(x_N) \right]}{\partial x_N} \Bigg|_{x_N(l)}.$$

將拉格朗日擴增法與演算法 II 結合成演算法 III , 利用演算法 III 求解 (5.12) - (5.15) 式的最佳控制終值限制問題。

演算法 III

步驟 0 : 設定適當大小的初始值 $c(0)$ 與 $\tau(0)$, 設定 $k = 0$ 。

步驟 1：使用演算法 II 解

$$\min_{x, u} J(x, u) + c(k)T(x_N)^2 + \tau(k)T(x_N).$$

$$x_{i+1} - x_i - \frac{t_f}{N} f(x_i, u_i, i) = 0.$$

$$g(u_i) \leq 0, i = 0, \dots, N-1. \quad (5.29)$$

步驟 2：從步驟獲得到的 \hat{x}_N ，代入 $\tau(k+1) = \tau(k) + cT(\hat{x}_N)$ 更新。

步驟 3：假如 $|T(\hat{x}_N)|_\infty < \varepsilon_3$ 則停止運算，且將步驟 1 所得到 (5.12) - (5.15) 的最佳解輸出；其它則設定 $k = k + 1$ 且增加 $c(k)$ ，然後返回步驟 1。

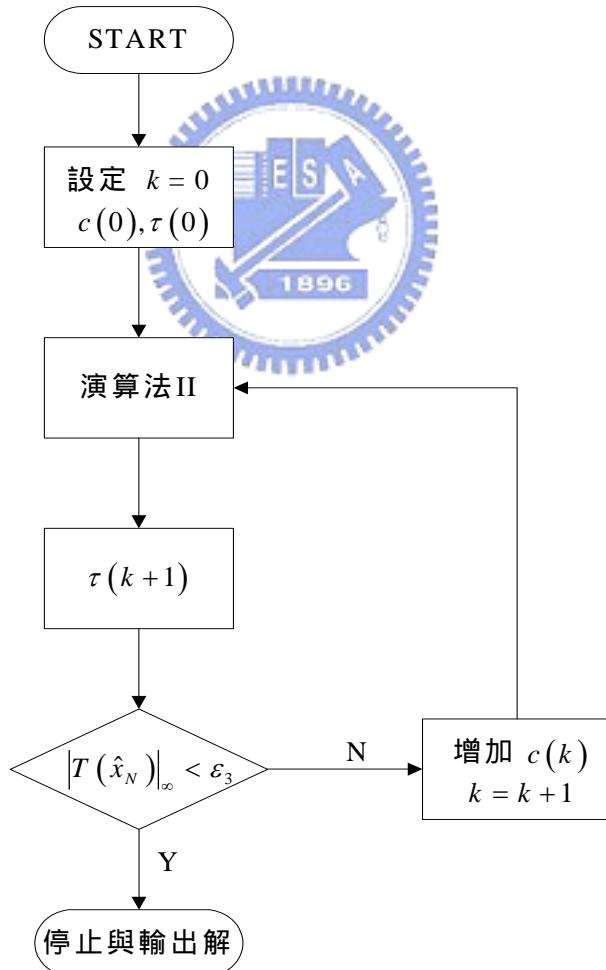


圖 5.3 RQPD 終值限制式之最佳控制問題
演算法的整體架構

第六章 利用遞迴二次對偶規劃

解最佳控制問題

6.1 簡介

在第四章最佳控制導論中討論了一些效益評估法，針對螺旋無人航空載具軌跡控制與姿態控制，我們做兩組實驗

(1) 最低耗能追蹤問題

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[x(t_f) - r(t_f) \right]^T Q \left[x(t_f) - r(t_f) \right] + u^T(t) R u(t) \right\} dt. \quad (6.1)$$

(2) 追蹤問題

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[x(t_f) - r(t_f) \right]^T Q \left[x(t_f) - r(t_f) \right] \right\} dt. \quad (6.2)$$

將這兩組的狀態向量變數與控制向量變數，比較考慮最低耗能時的狀態歷程與不考慮的差異，最低耗能時的控制歷程與不考慮的差異。

由於螺旋無人航空載具是多輸出-多輸入系統，且描述行為的動態方程式也為非線性方程式；解此一複雜的問題最適合用 RQPD 演算法，此一演算可以用積體電路實現，將演算法用平行的方式運算，可以大幅的加快計算速度，此晶片可以達成運用在即時控制速度的要求。

直昇機的動態模型有四個輸入控制訊號，分別為橫向循環傾角、縱向循環傾角、主螺旋集合傾角與尾螺旋集合傾角。系統的方程式

$$\dot{x}(t) = f(x, u).$$

$$x = \begin{bmatrix} x^K, & x^D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{15}.$$

$$x^K = \begin{bmatrix} x^s, & y^s, & z^s, & \phi, & \theta, & \psi \end{bmatrix}.$$

$$x^D = \begin{bmatrix} u, & v, & p, & q, & a_{ls}, & b_{ls}, & w, & r, & r_{fb} \end{bmatrix}.$$

$$u = \begin{bmatrix} u_{als}, & u_{b1s}, & u_{\theta M}, & u_{\theta T} \end{bmatrix}.$$

6.2 模擬最低耗能追蹤問題

此一問題在最佳控制上可以表示成

$$\begin{aligned} \min J(x, u) = & [x(N) - r(N)]^T M [x(N) - r(N)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ [x(i) - r(i)]^T Q [x(i) - r(i)] \right. \\ & \left. + u^T(i) R u(i) \right\}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$s.t. \quad x_{i+1} = x_i + \frac{t_f}{N} f(x_i, u_i); \quad x_0 = x_0. \quad (6.4)$$

上式的狀態變數向量 $x \in \mathbb{R}^{15}$ ，控制變數向量 $u \in \mathbb{R}^4$ ，函數 $f: \mathbb{R}^{15+4} \rightarrow \mathbb{R}^{15}$ 對 $x(i)$ 與 $u(i)$ 皆為二次可微分，且矩陣 $R \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ， $M \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$ 與 $Q \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$ 皆為正定。不考慮最終狀態限制式。

直接應用 RQPD 演算法求解 (6.3)、(6.4) 式，因為它是一個非凸集可分離的最佳化問題。假設

$$\begin{aligned} E_i(l) &= x_{i+1}(l) - x_i(l) - \frac{t_f}{N} f(x_i(l), u_i(l), i), \quad 0 \leq i \leq N-1. \\ f_{x_i}(l) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i(l), u_i(l), i)}, \quad f_{u_i}(l) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_i(l), u_i(l), i)}. \end{aligned}$$

將 (6.3)、(6.4) 式對點 $(x_i(l), u_i(l))$, $i = 1, \dots, N-1$ 做二次近似為

$$\begin{aligned} \min & \left[M x_N(l) - M r_N \right]^T dx_N + dx_N^T M dx_N + \frac{t_f}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[Q x_i(l) - Q r_i \right]^T dx_i \\ & + \left[R u_i(l) \right]^T du_i + dx_i^T Q dx_i + du_i^T R du_i. \end{aligned} \quad (6.5)$$

s.t.

$$\begin{aligned} E_i(l) + dx_{i+1} - dx_i - \frac{t_f}{N} f_{x_i}(l) dx_i \\ - \frac{t_f}{N} f_{u_i}(l) du_i; \quad dx_0 = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

(6.5) 至 (6.6) 的對偶法表示符號為 $\Phi(\lambda)$ ，且 $\Phi(j)$ 可以表示 $\Phi(\lambda)$ 執行第 j 次。

以硬體實現為出發點，下列演算法的 $\bar{\alpha}$ 、 $\bar{\beta}$ 將用常數取代。

演算法 II.

步驟 0：設定初始值 $(x(0), u(0))$ 和 $l = 0$ 。

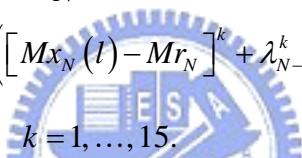
步驟 1：設定初值 $\lambda(0)$ ， $j = 0$ 。

步驟 2：平行的計算出下列係數：

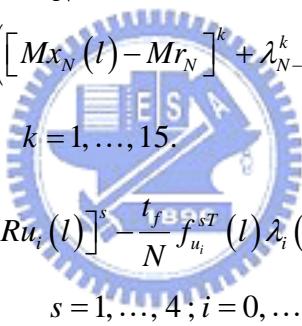
$$E_i(l), f_{x_i}(l), f_{u_i}(l), Ru_i(l), Qx_i(l) \quad i = 0, \dots, N-1 \text{ 和 } Mx_N(l)。$$

步驟 3：平行計算下列參數：

$$dx_i^k(j) = \begin{cases} -\frac{1}{q_i^k} \left([Qx_i(l) - Qr_i]^k + \lambda_{i-1}^k(j) - \lambda_i^k(j) \right) \\ \quad -\frac{t_f}{N} f_{x_i}^T(l) \lambda_i(j), & \text{if } i = 1, \dots, N-1; \\ -\frac{1}{q_N^k} \left([Mx_N(l) - Mr_N]^k + \lambda_{N-1}^k(j) \right), & \text{if } i = N. \end{cases} \quad (6.7)$$



$$du_i^s(j) = -\frac{1}{r_i^s} \left([Ru_i(l)]^s - \frac{t_f}{N} f_{u_i}^{sT}(l) \lambda_i(j) \right), \quad (6.8)$$



$s = 1, \dots, 4; i = 0, \dots, N-1.$

$$\hat{dx}_i^k(j) = \begin{cases} \bar{x}_i^k - x_i^k(j), & \text{if } x_i^k(j) + dx_i^k > \bar{x}_i^k; \\ dx_i^k, & \text{if } \underline{x}_i^k(j) \leq x_i^k(j) + dx_i^k \leq \bar{x}_i^k; \\ \underline{x}_i^k - x_i^k(j), & \text{if } x_i^k(j) + dx_i^k \leq \underline{x}_i^k; \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\hat{du}_i^k(j) = \begin{cases} \bar{u}_i^k - u_i^k(j), & \text{if } u_i^k(j) + du_i^k > \bar{u}_i^k; \\ du_i^k, & \text{if } \underline{u}_i^k(j) \leq u_i^k(j) + du_i^k \leq \bar{u}_i^k; \\ \underline{u}_i^k - u_i^k(j), & \text{if } u_i^k(j) + du_i^k \leq \underline{u}_i^k; \end{cases} \quad (6.10)$$

步驟 4：平行計算下列參數：

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_i^k} \Phi(j) = & E_i^k(l) + \hat{dx}_{i+1}^k(j) - \hat{dx}_i^k(j) - \frac{t_f}{N} \left[f_{x_i}^{kT}(l) \hat{dx}_i(j) \right. \\ & \left. + f_{u_i}^{kT}(l) \hat{du}_i(j) \right], \quad k = 1, \dots, 15. \end{aligned} \quad (6.11)$$

步驟 5：假如 $\max_i |\nabla_{\lambda_i} \Phi(j)|_{\infty} < \varepsilon_1$ ，執行步驟 7.，其它情況跳至步驟 6. 執行。

步驟 6：平行處理與更新

$$\lambda_i^k(j+1) = \lambda_i^k(j) + \bar{\beta} \nabla_{\lambda_i^k} \Phi(j).$$

$$i = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, 15;$$

返回步驟 3。

步驟 7：假如 $\max_i \left(\left| \hat{dx}_i \right|_{\infty}, \left| \hat{du}_i \right|_{\infty} \right) < \varepsilon_2$ 結束，輸出最佳控制解 $u_i(l), i = 0, \dots, N-1$ ；

其它則執行步驟 8。

步驟 8：平行處理與更新

$$x_{i+1}^k(l+1) = x_{i+1}^k(l) + \bar{\alpha} \hat{dx}_{i+1}^k.$$

$$u_i^s(l+1) = u_i^s(l) + \bar{\alpha} \hat{du}_i^s.$$

$$i = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, 15, \quad s = 1, \dots, 4. \quad (6.12)$$

設定 $l = l + 1$ 然後返回步驟 1。



6.3 模擬追蹤問題

此一問題在最佳控制上可以表示成

$$\begin{aligned} \min J(x, u) = & \left[x(N) - r(N) \right]^T M \left[x(N) - r(N) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left[x(i) - r(i) \right]^T Q \left[x(i) - r(i) \right] \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$s.t. \quad x_{i+1} = x_i + \frac{t_f}{N} f(x_i, u_i); \quad x_0 = x_0. \quad (6.14)$$

上式的狀態變數向量 $x \in \mathbb{R}^{15}$ ，控制變數向量 $u \in \mathbb{R}^4$ ，函數 $f: \mathbb{R}^{15+4} \rightarrow \mathbb{R}^{15}$ 對 $x(i)$ 與 $u(i)$ 皆為二次可微分，且矩陣 $R \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ， $M \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$ 與 $Q \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$ 皆為正定。不考慮最終狀態限制式。

直接應用 RQPD 演算法求解 (6.13) (6.14) 式，因為它是一個非凸集可分離的最佳化問題。假設

$$E_i(l) = x_{i+1}(l) - x_i(l) - \frac{t_f}{N} f(x_i(l), u_i(l), i), \quad 0 \leq i \leq N-1.$$

$$f_{x_i}(l) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i(l), u_i(l), i)}, \quad f_{u_i}(l) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_i(l), u_i(l), i)}.$$

將 (6.13) 和 (6.14) 式對點 $(x_i(l), u_i(l))$, $i = 1, \dots, N-1$ 做二次近似為

$$\begin{aligned} \min \quad & \left[Mx_N(l) - Mr_N \right]^T dx_N + dx_N^T M dx_N + \\ & \frac{t_f}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[Qx_i(l) - Qr_i \right]^T dx_i + dx_i^T Q dx_i + du_i^T R du_i. \end{aligned} \quad (6.15)$$

s.t.

$$\begin{aligned} E_i(l) + dx_{i+1} - dx_i - \frac{t_f}{N} f_{x_i}(l) dx_i \\ - \frac{t_f}{N} f_{u_i}(l) du_i; \quad dx_0 = 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

(6.15) 至 (6.16) 的對偶法表示符號為 $\Phi(\lambda)$, 且 $\Phi(j)$ 可以表示 $\Phi(\lambda)$ 執行第 j 次。以硬體實現為出發點, 下列演算法的 $\bar{\alpha}$ 、 $\bar{\beta}$ 將用常數取代。



演算法 II.

步驟 0：設定初始值 $(x(0), u(0))$ 和 $l = 0$ 。

步驟 1：設定初值 $\lambda(0)$, $j = 0$ 。

步驟 2：平行的計算出下列係數：

$$E_i(l), f_{x_i}(l), f_{u_i}(l), Qx_i(l) \quad i = 0, \dots, N-1 \text{ 和 } Mx_N(l).$$

步驟 3：平行計算下列參數：

$$dx_i^k(j) = \begin{cases} -\frac{1}{q_i^k} \left(\left[Qx_i(l) - Qr_i \right]^k + \lambda_{i-1}^k(j) - \lambda_i^k(j) \right) \\ \quad - \frac{t_f}{N} f_{x_i}^T(l) \lambda_i(j), & \text{if } i = 1, \dots, N-1; \\ -\frac{1}{q_N^k} \left(\left[Mx_N(l) - Mr_N \right]^k + \lambda_{N-1}^k(j) \right), & \text{if } i = N. \end{cases} \quad (6.17)$$

$k = 1, \dots, 15.$

$$du_i^s(j) = -\frac{1}{r_i^s} \left(-\frac{t_f}{N} f_{u_i}^{sT}(l) \lambda_i(j) \right), \quad (6.18)$$

$$s = 1, \dots, 4; i = 0, \dots, N-1.$$

$$\hat{dx}_i^k(j) = \begin{cases} \bar{x}_i^k - x_i^k(j), & \text{if } x_i^k(j) + dx_i^k > \bar{x}_i^k; \\ dx_i^k, & \text{if } x_i^k(j) \leq x_i^k(j) + dx_i^k \leq \bar{x}_i^k; \\ \underline{x}_i^k - x_i^k(j), & \text{if } x_i^k(j) + dx_i^k \leq \underline{x}_i^k; \end{cases} \quad (6.19)$$

$$\hat{du}_i^k(j) = \begin{cases} \bar{u}_i^k - u_i^k(j), & \text{if } u_i^k(j) + du_i^k > \bar{u}_i^k; \\ du_i^k, & \text{if } u_i^k(j) \leq u_i^k(j) + du_i^k \leq \bar{u}_i^k; \\ \underline{u}_i^k - u_i^k(j), & \text{if } u_i^k(j) + du_i^k \leq \underline{u}_i^k; \end{cases} \quad (6.20)$$

步驟 4：平行計算下列參數：

$$\nabla_{\lambda_i^k} \Phi(j) = E_i^k(l) + \hat{dx}_{i+1}^k(j) - \hat{dx}_i^k(j) - \frac{t_f}{N} \left[f_{x_i}^{kT}(l) \hat{dx}_i(j) \right. \\ \left. + f_{u_i}^{kT}(l) \hat{du}_i(j) \right], \quad k = 1, \dots, 15. \quad (6.21)$$

步驟 5：假如 $\max_i |\nabla_{\lambda_i} \Phi(j)|_{\infty} < \varepsilon_1$ ，執行步驟 7.，其它情況跳至步驟 6. 執行。

步驟 6：平行處理與更新

$$\lambda_i^k(j+1) = \lambda_i^k(j) + \bar{\beta} \nabla_{\lambda_i^k} \Phi(j).$$

$$i = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, 15.$$

返回步驟 3。

步驟 7：假如 $\max_i \left(|\hat{dx}_i|_{\infty}, |\hat{du}_i|_{\infty} \right) < \varepsilon_2$ 結束，輸出最佳控制解 $u_i(l), i = 0, \dots, N-1$ ；

其它則執行步驟 8。

步驟 8：平行處理與更新

$$x_{i+1}^k(l+1) = x_{i+1}^k(l) + \bar{\alpha} \hat{dx}_{i+1}^k.$$

$$u_i^s(l+1) = u_i^s(l) + \bar{\alpha} \hat{du}_i^s.$$

$$i = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, 15, \quad s = 1, \dots, 4. \quad (6.22)$$

設定 $l = l + 1$ 然後返回步驟 1。

6.4 模擬範例程式流程圖

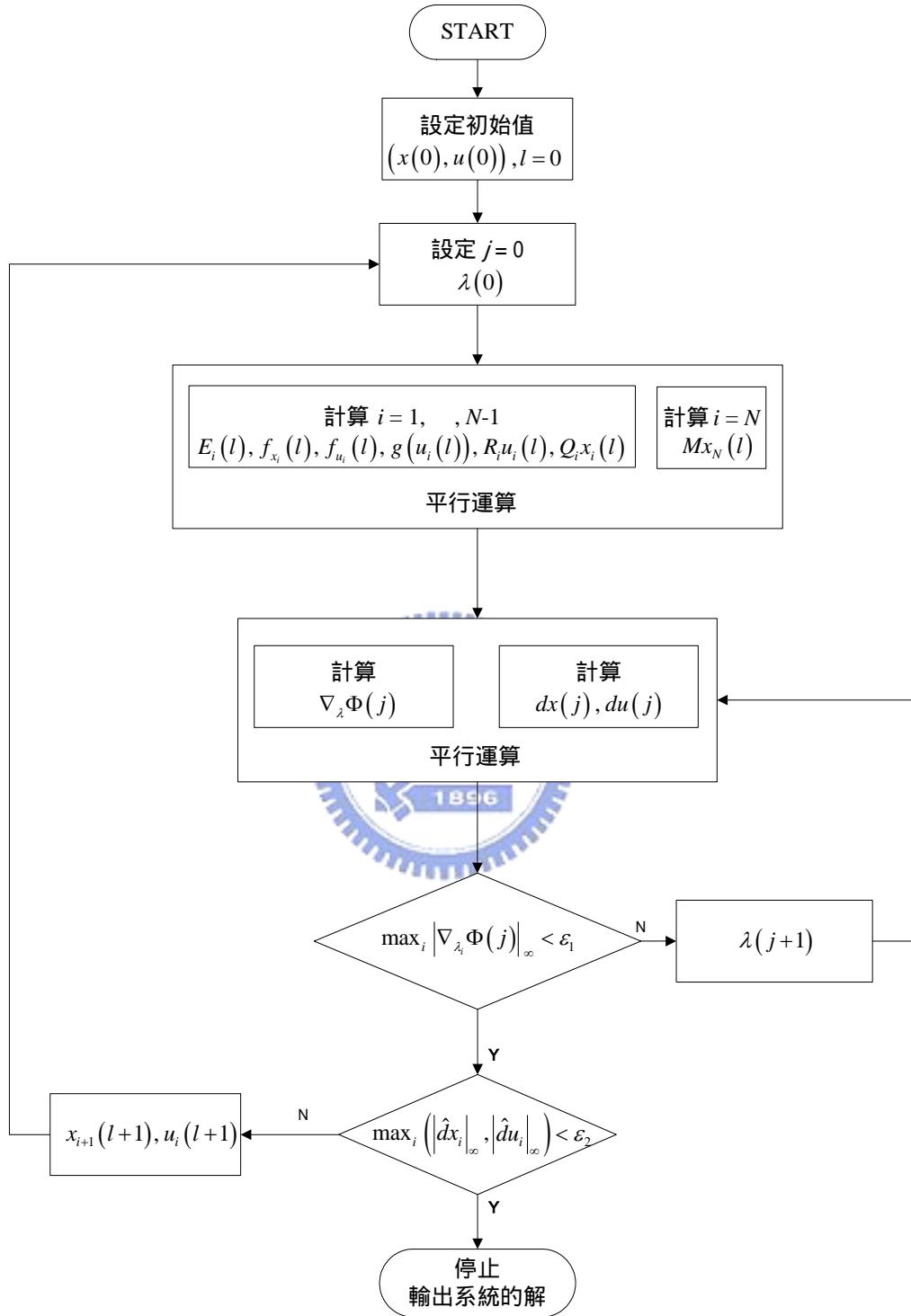


圖 5.2 RQPD 無終值限制式之最低耗能制問題演算法的整體架構

6.5 模擬結果與討論

在本節中將列出三個範例的模擬結果，每個範例將比較限制能量軌跡控制與最佳軌跡控制兩種。箭頭方向標示為機鼻的方向，體座標中 z 軸的正端為對地方向的變化量，為了便於觀看 z 軸方向的變化量，在繪製 z 軸圖形的變化量時加上負號做處理（如圖 6.1 (d)）。本實驗中演算法的係數 $N = 40$ 、 $\alpha = 1$ 、 $\beta = 0.5$ 、 $t_f = 1$ 、

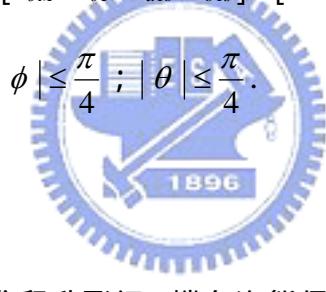
$l_{\max} = 5 \times 10^3$ 、 $j_{\max} = 5 \times 10^3$ 、 $\varepsilon_1 = 5 \times 10^{-2}$ 、 $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$ 在 5.6 節中已有提及其實意義。

狀態變數 p_x 、 p_y 、 p_z 是表示球座標系統的位置(m)， u 、 v 、 w 是表示在體座標下 x 、 y 、 z 三個方向的速度(m/s)， ϕ 、 θ 、 ψ 表示為體座標下的機體姿態(rad)， p 、 q 、 r 表示為體座標下的機體旋轉角速度(rad/s)， a_{1s} 、 b_{1s} 分別表示為主螺旋槳縱向與橫向的傾斜角度(rad)， r_{fb} 為陀螺儀表示的機體方向。控制變數分別以 $u_{\theta M}$ 、 $u_{\theta T}$ 、 u_{a1s} 、 u_{b1s} 表示， $u_{\theta M}$ 為控制主旋翼集合傾角，所謂集合傾角及同時改變所有翼片的傾角來達到不同升力效果，此時升力垂直於旋翼旋轉平面，主要的升力控制並達到控制螺旋載具的升降或加速， $u_{\theta T}$ 則為控制尾旋翼之槳距，可以克服力矩及調整機身行進之方向， u_{a1s} 與 u_{b1s} 為控制循環傾角，即翼片傾角隨著旋轉翼的轉動坐週期性的改變，而其功用在於旋翼的升力隨著翼片旋轉時的位置不同而改變，使得旋翼的旋轉平面由水平往側邊傾斜，造成旋轉之升力由垂直向上往旁傾斜，因此有水平的分量來拉直昇機做水平的飛行，如果其往前傾斜，則直昇機亦往前飛行； u_{a1s} 可以操控螺旋載具前後之飛行姿態， u_{b1s} 可以操控螺旋載具左右之飛行姿態。

就一般直昇機的控制系統而言 $u_{\theta M}$ ，主要是控制主旋翼葉片的轉距角以調整升力。就尾旋翼的操控而言 $u_{\theta T}$ ，是用來平衡因主旋翼旋轉時所產生反轉矩，利用尾旋翼產生一作用力來產生一個力矩來平衡主旋翼產生的反力矩，避免繞著主旋翼打轉。就載具前後與左右之飛行姿態而言 u_{a1s} 、 u_{b1s} 決定縱向與橫向的傾斜角，因為陀螺效應，所以即使只單獨輸入 u_{b1s} 也會導致 a_{1s} 、 b_{1s} 的變化。

系統的動態方程式為 ($c\theta = \cos \theta$, $s\phi = \sin \phi$ 其餘類似的符號如前敘述)

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \\ \dot{\psi} \\ \dot{r} \\ \dot{a}_{1s} \\ \dot{b}_{1s} \\ \dot{r}_{fb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta u + s\psi c\theta v - s\theta w \\ -s\psi c\phi u + c\psi s\theta s\phi u + c\psi c\phi v + s\psi s\theta s\phi v + c\theta s\phi w \\ s\psi c\phi u + c\psi s\theta c\phi u - c\psi s\phi v + s\psi s\theta c\phi v + c\theta c\phi w \\ -g \sin \theta - g a_{1s} + X_u u \\ g \sin \phi + g b_{1s} + Y_v v \\ Z_w w + Z_r r + Z_{a_{1s}} a_{1s} + Z_{b_{1s}} b_{1s} \\ p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \\ L_u u + L_v v + L_{a_{1s}} a_{1s} + L_{b_{1s}} b_{1s} \\ q \cos \phi - r \sin \phi \\ M_u u + M_v v + M_{a_{1s}} a_{1s} + M_{b_{1s}} b_{1s} \\ q \sin \phi \cos \theta + r \cos \phi \cos \theta \\ N_p p + N_w w + N_r r + N_{rfb} r_{fb} \\ -q - \frac{1}{\tau_f} a_{1s} + A_{b_{1s}} b_{1s} \\ -p + B_{b_{1s}} a_{1s} - \frac{1}{\tau_f} b_{1s} \\ K_{rfb} r_{fb} + K_r r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_{u_{\theta M}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{u_{\theta M}} & R_{u_{\theta T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{u_{a1s}} & A_{u_{b1s}} \\ 0 & 0 & B_{u_{a1s}} & B_{u_{b1s}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\theta M} \\ u_{\theta T} \\ u_{a1s} \\ u_{b1s} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_{\theta M}, u_{\theta T}, u_{a1s}, u_{b1s} \end{bmatrix} \in [-1, 1]^4 ;$$


$$|\phi| \leq \frac{\pi}{4}; |\theta| \leq \frac{\pi}{4}. \quad (6.23)$$

範例 (一)：

為無人螺旋載具作前進爬升飛行，機身姿態保持不變。設軌跡一為軌跡控制，軌跡二為低耗能控制。此先描述軌跡控制 (軌跡一) 的效益評估函數為

$$\begin{aligned} \min J(x, u) = & \left[x(N) - r(N) \right]^T M \left[x(N) - r(N) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left[x(i) - r(i) \right]^T Q \left[x(i) - r(i) \right], \quad x(0) = r(0). \end{aligned}$$

無人螺旋載具的目標軌跡 $r(i), i = 0, 1, \dots, N$ 為

效益評估函數中的權重矩陣

$$Q \in \mathbb{R}^{15 \times 15},$$

$$M \in \mathbb{R}^{15 \times 15},$$

$$M = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

效益評估函數作二次近似時 du 的權重係數

$$R \in \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

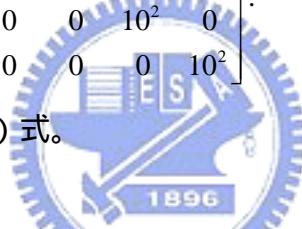
低耗能控制（軌跡二）的效益評估函數為

$$\begin{aligned} \min J(x, u) = & [x(N) - r(N)]^T M [x(N) - r(N)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \{ [x(i) - r(i)]^T Q [x(i) - r(i)] + u^T(i) R u(i) \}, \quad x(0) = r(0). \end{aligned}$$

無人螺旋載具的目標軌跡 $r(i), i = 0, 1, \dots, N$ 為 (6.24) 式。效益評估函數中的權重矩陣 $Q, M \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$ 分別為 (6.25)、(6.26) 式。 $R \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$,

$$R = \begin{bmatrix} 10^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^2 \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

系統的動態方程式為 (6.23) 式。



軌跡控制（軌跡一）的控制訊號圖與軌跡圖如下：

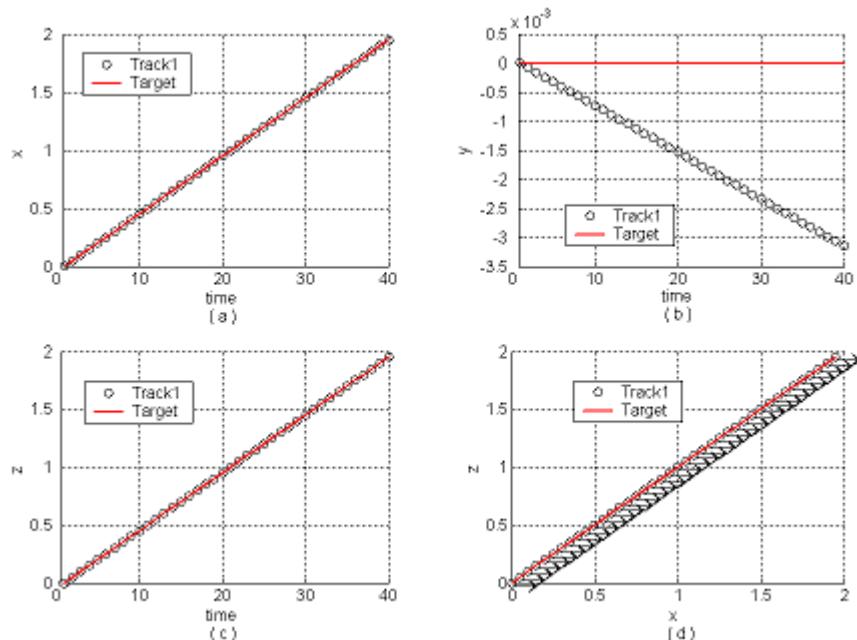


圖 6.1 無人螺旋載具控制軌跡與目標軌跡對應圖（不限制能量）

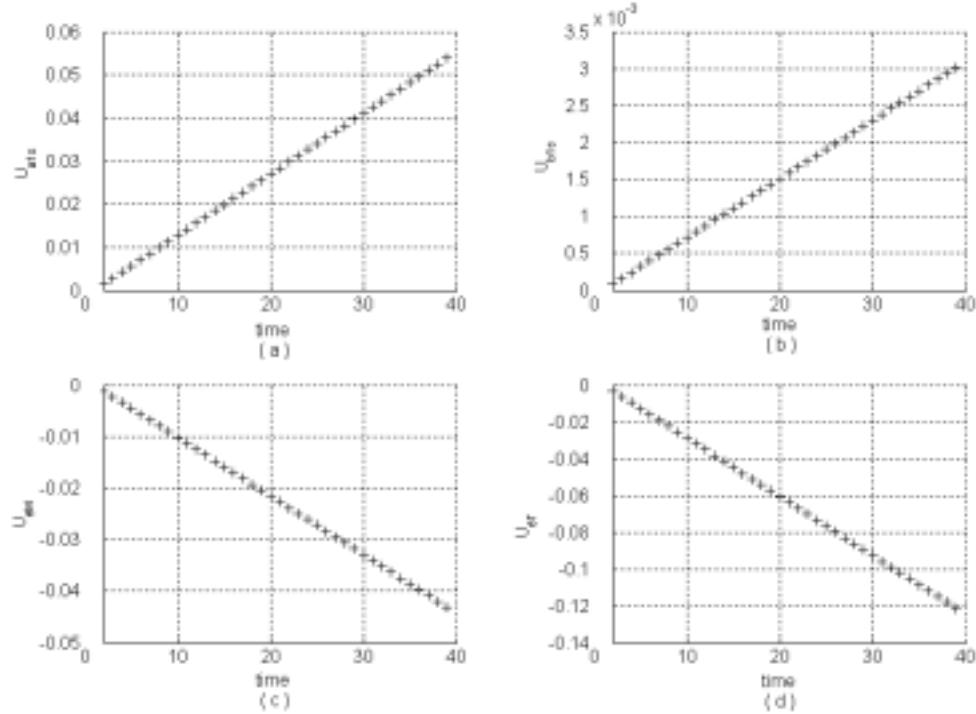


圖 6.2 無人螺旋載具控制訊號 (不限制能量)

圖 6.1 中的實線代表前進爬升飛行模式的目標軌跡 (Target), 目標軌跡表現在 x 軸作線性增加的前進飛行與 z 軸作線性增加的爬升飛行，在 y 軸保持不變。圖 6.1 控制軌跡 (Track1) 的每一個點對應到的 x, y, z 分別以圖 6.1 (a) - (c) 表示，這裡的 x, y, z 分別表示狀態變數的 p_x, p_y, p_z 。圖 6.1 (a) 在 x 軸的前進飛行控制軌跡與前進飛行的目標軌跡分別作線性增加且完全追蹤。圖 6.1 (c) 在 z 軸的爬升飛行控制軌跡與爬升飛行的目標軌跡分別作線性增加且完全追蹤。圖 6.1 (b) 觀察到在 y 軸上的目標軌跡應保持不變，但是目標軌跡與控制軌跡的誤差在的 5×10^{-3} 以內，所以可以說 y 軸上的目標軌跡與控制軌跡也是完全追蹤。圖 6.1 (d) 為 $x-z$ 平面的側視圖，此圖可以觀察到無人螺旋載具在 x 軸前進飛行與 z 軸爬升飛行的目標軌跡與控制軌跡分別作線性增加且完全追蹤，在圖中呈現的形式為前進爬升飛行且完全追蹤。目標軌跡函數中要求機鼻角度保持 0° ，所以圖 6.1 (d) 中的機體姿態 (箭頭方向) 指向前進的方向。

控制變數歷程的每一個點對應到 $u_{a1s}, u_{b1s}, u_{\theta M}, u_{\theta T}$ 分別表示在圖 6.2 (a) - (d)。

u_{a1s} 、 u_{b1s} 分別決定前進與左右飛行的動作，由圖 6.2 (a) 中 u_{a1s} 控制輸入量與圖 6.2 (b) 中 u_{b1s} 控制輸量得知，控制輸入量 u_{a1s} 提供直昇機前進飛行的動力，控制輸入量 u_{b1s} 太小不足已提供直昇機左右飛行的動力，因此在圖 6.1 (a) 可以觀察到無人載具在作前進飛行 (x 軌跡線性增加)。圖 6.2 (c) 中的 u_{θ_M} 控制主螺旋槳輸入量使載具產生向上的動力，因此在圖 6.1 (c) 可以觀察到 z 軌跡作線性增加的爬升飛行。因主旋翼旋轉時所產生反轉矩，所以圖 6.2 (d) 中的 u_{θ_T} 為平衡因主旋翼旋轉時所產生反轉矩，利用尾旋翼產生一作用力來產生一個力矩來平衡主旋翼產生的反力矩，避免繞著主旋翼打轉，使機鼻方向保持不變。

低耗能控制的控制訊號圖與軌跡圖如下：

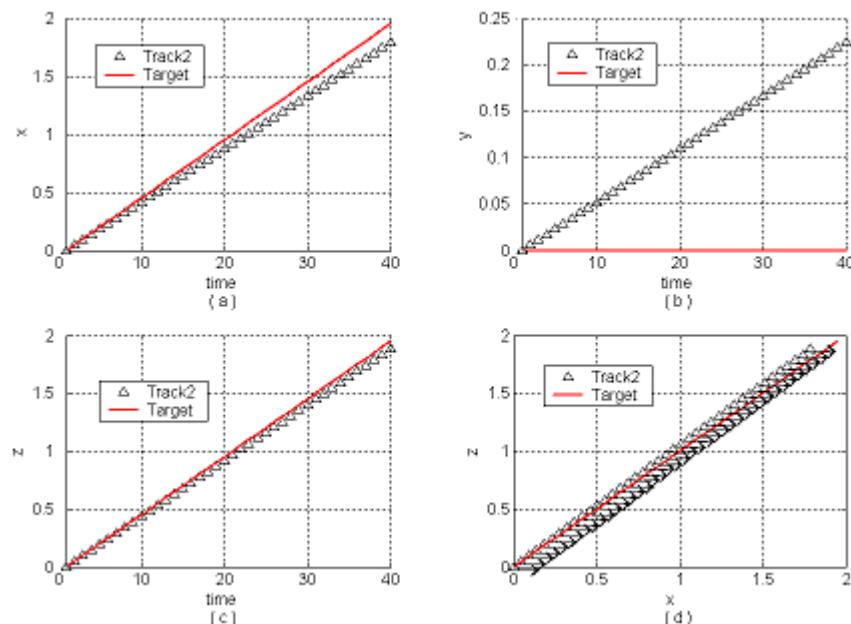


圖 6.3 無人螺旋載具控制軌跡與目標軌跡對應圖 (限制能量)

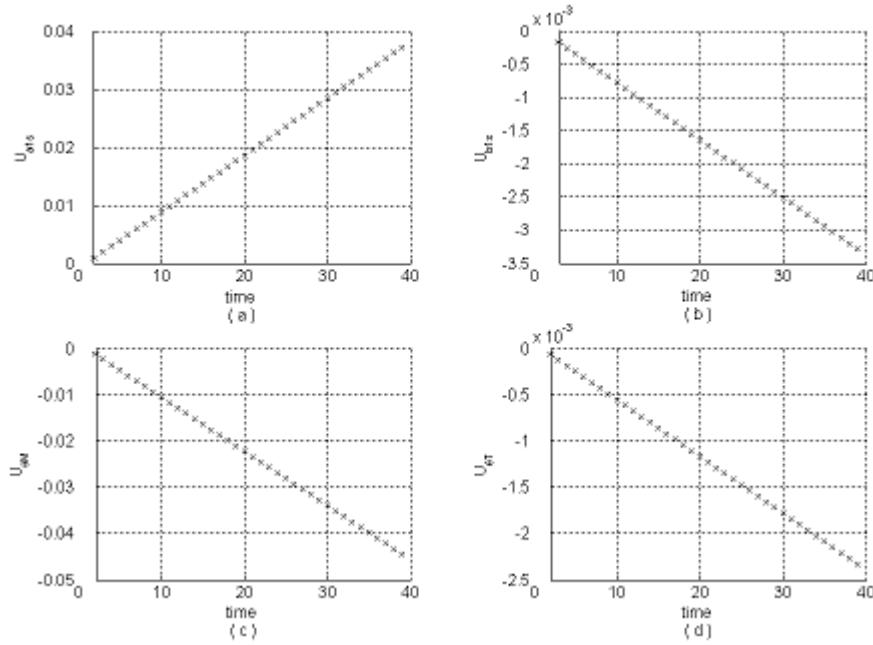


圖 6.4 無人螺旋載具控制訊號 (限制能量)

圖 6.3 中的實線代表前進爬升飛行模式的目標軌跡 (Target)，目標軌跡表現在 x 軸與 z 軸方向作線性增加，在 y 軸方向保持不變。圖 6.3 控制軌跡 (Track2) 的每一個點對應到的 x, y, z 分別以圖 6.3 (a) - (c) 表示，這裡的 x, y, z 分別表示狀態變數的 p_x, p_y, p_z 。圖 6.3 (a) x 軸前進飛行的目標軌跡以線性方式增加，控制軌跡也是以相同線性方式增加，但是與目標軌跡之間有落後的現象產生。圖 6.3 (c) 的 z 軸爬升飛行的目標軌跡以線性方式增加，控制軌跡雖然也是以線性方式增加，但與目標軌跡之間有落後的現象產生。圖 6.3 (b) 在 y 軸上的目標軌跡需保持不變，但是控制軌跡與目標軌跡之間有相當的偏離發生。圖 6.3 (d) 為 $x-z$ 平面的側視圖，此圖中的 x 軸前進飛行與 z 軸爬升飛行皆是以線性方式增加，可以觀察到無人螺旋載具在作前進爬升飛行，且明顯在前進速度與爬升力上有所不足，因此控制軌跡落後目標軌跡。目標軌跡函數中要求機鼻角度為保持 0° ，所以圖中的機鼻方向 (箭頭方向) 指向前進方向。

控制變數歷程的每一個點對應到 $u_{a1s}, u_{b1s}, u_{\theta M}, u_{\theta T}$ 分別表示在圖 6.4 (a) - (d)。由圖 6.4 (a) 中 u_{a1s} 控制輸入量與圖 6.4 (b) 中 u_{b1s} 控制輸量得知，控制輸入量 u_{a1s} 提供直昇機前進飛行的動力，控制輸入量 u_{b1s} 太小不足已提供直昇機左右飛行的動

力，在圖 6.4(a)可以觀察到無人載具在作前進飛行(x 軌跡線性增加)，圖 6.4(c)中的 u_{θ_M} 控制主螺旋槳輸入量使載具產生向上的動力，因此在圖 6.3(c)可以觀察到 z 軌跡作線性增加的爬升飛行。因主旋翼旋轉時所產生反轉矩，所以圖 6.4(d)中的 u_{θ_T} 為平衡因主旋翼旋轉時所產生反轉矩，利用尾旋翼產生一作用力來產生一個力矩來平衡主旋翼產生的反力矩，避免繞著主旋翼打轉，使機鼻方向保持不變。

軌跡控制與低耗能控制的軌跡圖比較如下：

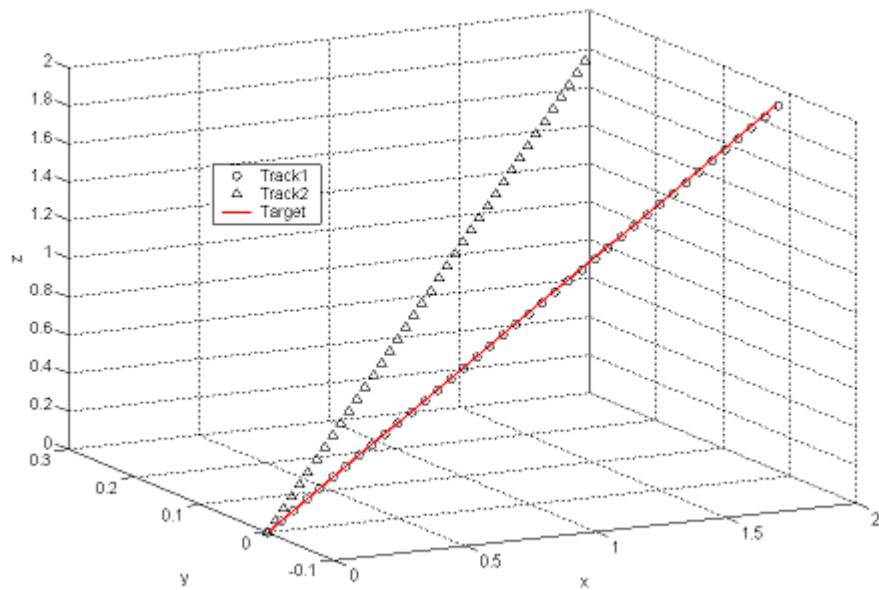


圖 6.5 低耗能控制 (Track2) 與軌跡控制 (Track1)

由圖 6.5 可知無人載具在低耗能控制 (Track2) 下的前進飛行、爬升飛行與 y 軸軌跡追蹤上都明顯不如軌跡控制 (Track1)。圖 6.2(a), (b) 與圖 6.4(a), (b)觀察可知，圖 6.4 中 (a) 控制訊號 u_{a1s} 比圖 6.2 (a) 的控制訊號 u_{a1s} 小，因此可以得知為何圖 6.3(a)與圖 6.5 呈現的 x 軸控制軌跡 (Track2) 皆落後目標軌跡 (Target)。由 (6.23) 式可知，再加上低耗能控制 (圖 6.4(d)) 所產生的尾翼控制訊號輸出量不如軌跡控制 (圖 6.2(d))，無法有效的抵抗主螺旋槳的反作用力，使無人螺旋載具在 y 軸應保持不變的目標軌跡與控制軌跡有不完全追蹤產生。

範例 (二)：

為無人螺旋載具作水平直線飛行，機鼻作 360 度的旋轉。先描述軌跡控制 (軌跡一) 的效益評估函數為

$$\begin{aligned} \min J(x, u) = & [x(N) - r(N)]^T M [x(N) - r(N)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} [x(i) - r(i)]^T Q [x(i) - r(i)], \quad x(0) = r(0). \end{aligned}$$

無人螺旋載具的目標軌跡 $r(i), i = 0, 1, \dots, N$ 為

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ u \\ v \\ w \\ \phi \\ p \\ \theta \\ q \\ \psi \\ r \\ a_{1s} \\ b_{1s} \\ r_{fb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i/20 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \times \pi \times i/20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

效益評估函數中的權重矩陣 $Q, M \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$ 與二次近似時 du 的權重係數 $R \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 分別為 (6.25) - (6.27) 式，系統的動態方程式為 (6.23) 式。低耗能控制 (軌跡二) 的效益評估函數為

$$\begin{aligned} \min J(x, u) = & [x(N) - r(N)]^T M [x(N) - r(N)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ [x(i) - r(i)]^T Q [x(i) - r(i)] + u^T(i) R u(i) \right\}, \quad x(0) = r(0). \end{aligned}$$

無人螺旋載具的目標軌跡 $r(i), i = 0, 1, \dots, N$ 為 (6.29) 式。效益評估函數中的權重矩陣 $Q, M \in \mathbb{R}^{15 \times 15}, R \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 分別為 (6.25) (6.26) 與 (6.28) 式，系統的動態方程式為 (6.23) 式。

軌跡控制（軌跡一）的控制訊號圖與軌跡圖如下：

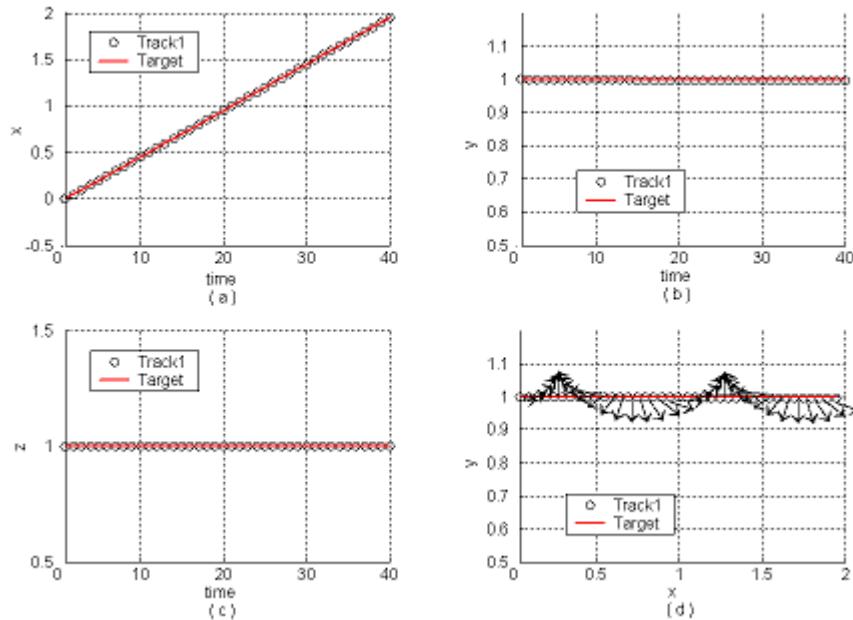


圖 6.6 無人螺旋載具控制軌跡與目標軌跡對應圖（不限制能量）

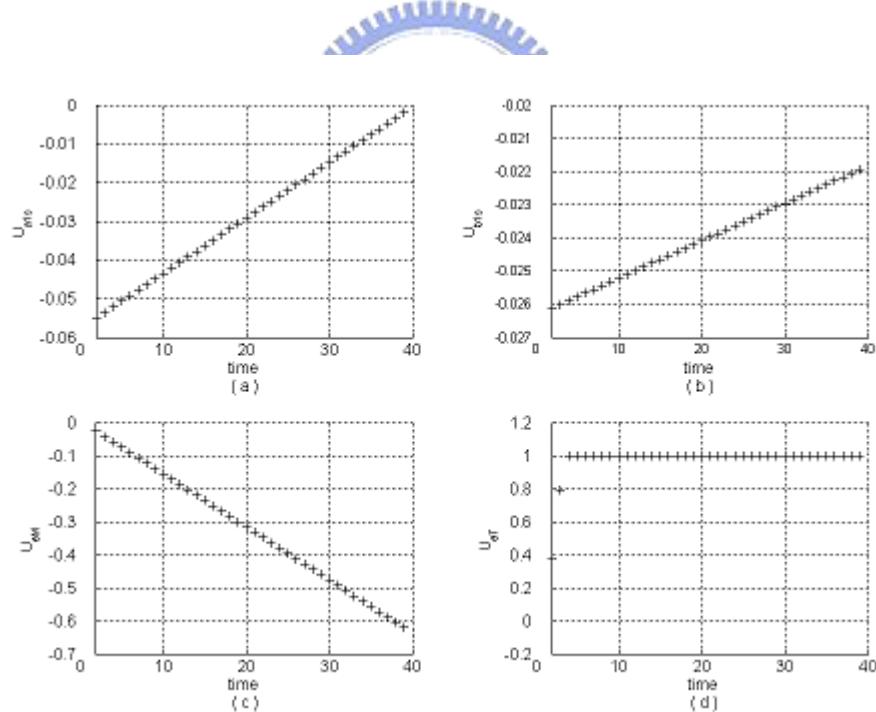


圖 6.7 無人螺旋載具控制訊號（不限制能量）

圖 6.6 中的實線代表前進飛且機身做旋轉運動的目標軌跡 (Target)，目標軌跡表現在 x 軸作線性增加的前進飛行， y 軸與 z 軸保持不變，機鼻方向 (ψ) 的旋轉目標軌跡函數為 $2\pi \times \frac{i}{20} rad$, $i = 0, 1, \dots, 40$ 。圖 6.6 控制軌跡 (Track1) 的每一個

點對應到的 x, y, z 分別以圖 6.6 (a) - (c) 表示，這裡的 x, y, z 分別表示狀態變數的 p_x, p_y, p_z 。圖 6.6 (a) 在 x 軸的前進飛行控制軌跡與前進飛行的目標軌跡分別作線性增加且完全追蹤。圖 6.6 (b) 觀察到在 y 軸上的控制軌跡保持不變與目標軌跡相同且完全追蹤。圖 6.6 (c) 在 z 軸上的控制軌跡保持不變與目標軌跡完全追蹤。圖 6.6 (d) 為 $x-y$ 平面的俯視圖，此圖可以觀察到無人螺旋載具在 x 軸作線性增加的前進飛行，且 y 軸的控制軌跡保持不變與目標軌跡完全追蹤，在圖中載具姿態呈現的形式為前進飛行且機鼻（箭頭方向）以 $2\pi \times \frac{i}{20} rad$ 的方式旋轉。

控制變數歷程的每一個點對應到 $u_{a1s}, u_{b1s}, u_{\theta M}, u_{\theta T}$ 分別表示在圖 6.7 (a) - (d)。
 u_{a1s} 、 u_{b1s} 分別決定前進與左右飛行的動作，觀察圖 6.7 (a) 中 u_{a1s} 控制輸入量與圖 6.7 (b) 中 u_{b1s} 控制輸量得知，因為在圖 6.6 (a) 在 x 軸上無人載具作前進飛行 (x 軌跡線性增加) 且圖 6.6 (c) 在 z 軸上無人載具作水平飛行，因此在 u_{a1s} 予足夠前進飛行的力，且 u_{b1s} 需給予修正左右方向的力。因主旋翼旋轉時所產生反轉矩，所以圖 6.7 (d) 中的 $u_{\theta T}$ 為平衡因主旋翼旋轉時所產生反轉矩，機鼻方向 (ψ) 的目標函數為 $2\pi \times \frac{i}{20} rad$ ，因尾旋翼旋轉時所產生反轉矩希望機鼻方向 (ψ) 完全追蹤，所以增加主旋翼產生的反力矩來平衡尾旋翼產生一反作用力，並使機鼻方向 (ψ) 的控制軌跡與目標軌跡完全追蹤。

低耗能控制的控制訊號圖與軌跡圖如下：

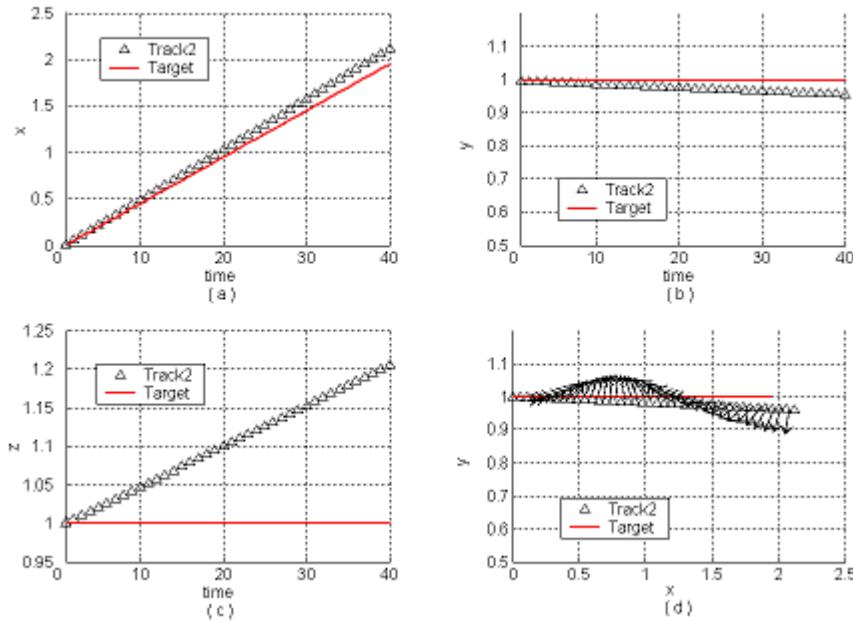


圖 6.8 無人螺旋載具控制軌跡與目標軌跡對應圖 (限制能量)

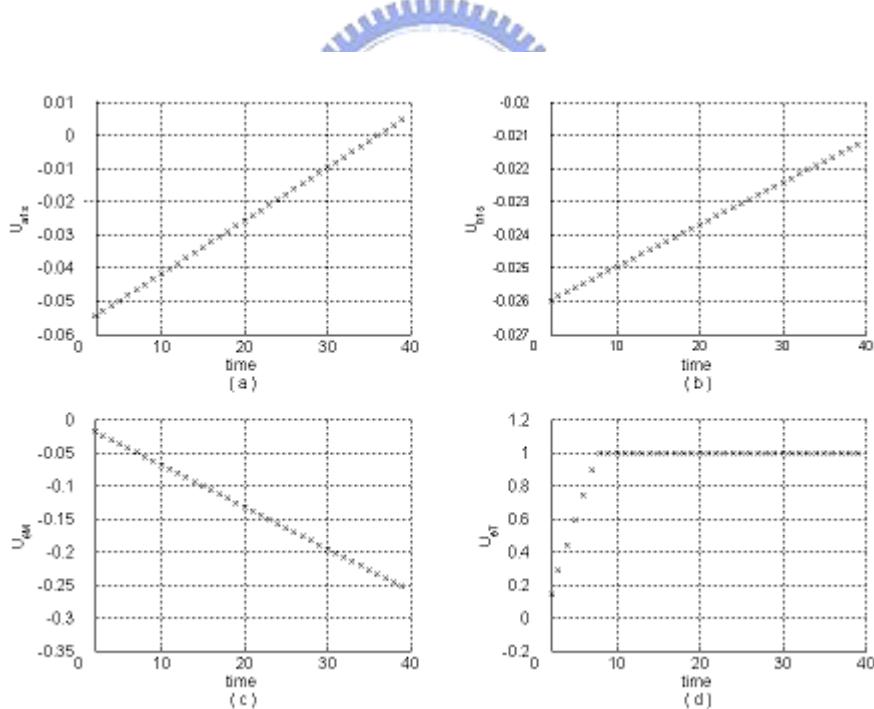


圖 6.9 無人螺旋載具控制訊號 (限制能量)

圖 6.8 中的實線代表前進飛且機身做旋轉運動的目標軌跡 (Target)，目標軌跡表現在 x 軸作線性增加的前進飛行， y 軸與 z 軸保持不變，機鼻方向 (ψ) 的旋轉目標軌跡函數為 $2\pi \times \frac{i}{20} rad$ ， $i = 0, 1, \dots, 40$ 。圖 6.8 控制軌跡 (Track2) 的每一個

點對應到的 x, y, z 分別以圖 6.8 (a) - (c) 表示，這裡的 x, y, z 分別表示狀態變數的 p_x, p_y, p_z 。圖 6.8 (a) 在 x 軸線性增加的前進飛行控制軌跡 (Track2) 超前目標軌跡 (Target)。圖 6.8 (b) 觀察到在 y 軸上應保持不變的控制軌跡與目標軌跡產生誤差。圖 6.8 (c) 在 z 軸上的控制軌跡應保持固定，但實際上有一上升力產生與目標軌跡為不完全追蹤。圖 6.8 (d) 為 $x-y$ 平面的俯視圖，此圖可以觀察到無人螺旋載具在 x 軸作線性增加的前進飛行且領先目標軌跡， y 軸的控制軌跡與目標軌跡為不完全追蹤。在圖中載具姿態呈現的形式應為前進飛行且機鼻 (箭頭方向) 以 $2\pi \times \frac{i}{20} rad$ 的方式旋轉，但是圖 6.8 (d) 可知飛行的姿態無法完全追蹤目標函數。

控制變數歷程的每一個點對應到 $u_{a1s}, u_{b1s}, u_{\theta M}, u_{\theta T}$ 分別表示在圖 6.9 (a) - (d)。
 u_{a1s} 、 u_{b1s} 分別決定前進與左右飛行的動作，觀察圖 6.9 (a) 中 u_{a1s} 控制輸入量與圖 6.9 (b) 中 u_{b1s} 控制輸量得知，因為在圖 6.8 (a) 在 x 軸上無人載具作前進飛行 (x 軌跡線性增加) 且圖 6.8 (c) 在 z 軸上無人載具需保持水平飛行，因此在 u_{a1s} 予足夠前進飛行的力，且 u_{b1s} 需給予修正左右方向的力。因主旋翼旋轉時所產生反轉矩，所以圖 6.9 (d) 中的 $u_{\theta T}$ 為平衡因主旋翼旋轉時所產生反轉矩，機鼻方向 (ψ) 的目標函數為 $2\pi \times \frac{i}{20} rad$ ，因尾旋翼旋轉時所產生反轉矩希望機鼻方向 (ψ) 完全追蹤，所以增加主旋翼產生的反力矩來平衡尾旋翼產生一反作用力，並使機鼻方向 (ψ) 的控制軌跡與目標軌跡完全追蹤。

軌跡控制與低耗能控制的軌跡圖比較如下：

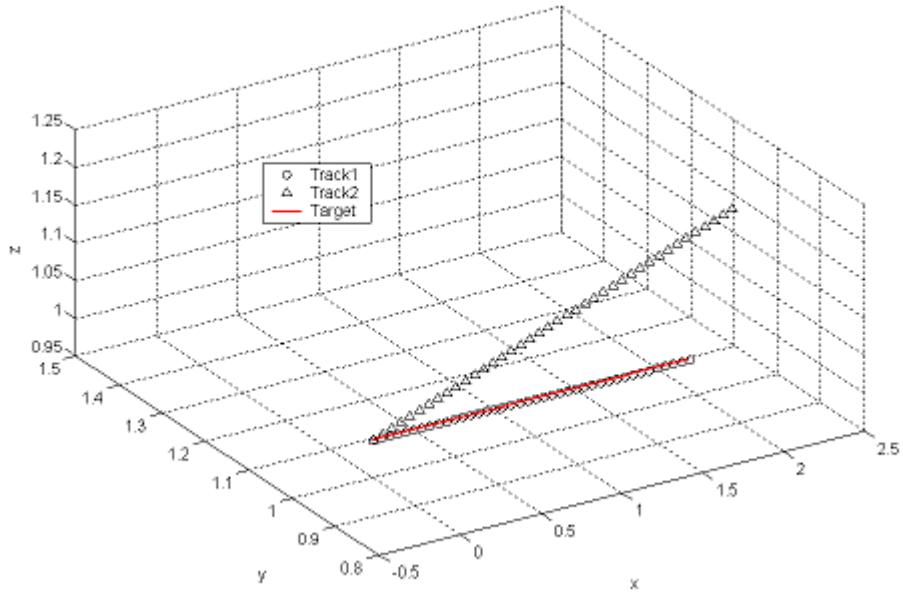


圖 6.10 低耗能控制 (Track2) 與軌跡控制 (Track1)

由圖 6.10 可知無人載具在低耗能控制 (Track2) 下的 x 軸的前進飛行、 y 軸與 z 軸的固定軌跡飛行在完全追蹤的要求上都明顯不如軌跡控制 (Track1)。圖 6.7 (a) (b) 與圖 6.9 (a) (b) 觀察可知，圖 6.9 中 (a) 控制訊號 u_{als} 比圖 6.7 (a) (b) 控制訊號 u_{als} 大，且控制訊號 u_{als} 決定前進飛行的力，因此可以得知為何圖 6.8 (a) 與圖 6.10 呈現的 x 軸控制軌跡 (Track2) 領先目標軌跡 (Target)。因為圖 6.8 (b) 的控制訊號造成低耗能控制的 b_{ls} 比軌跡控制的 b_{ls} 來的小，造成橫向傾角 b_{ls} 改變飛行的路徑。低耗能控制圖 6.8 (d) 所產生的尾翼控制訊號初期輸出量不如軌跡控制圖 6.2 (d)，無法在初期有效的抵抗增加主螺旋槳的反作用力，加上無人螺旋載具控制訊號 $u_{\theta M}$ 輸出較大，所以在 z 軸有爬升的行為發生與目標軌跡有不完全追蹤產生，反作用力可以由 r 產生，載具在姿態上的無法完全追蹤也就是 r 不夠大，造成控制姿態軌跡落後目標姿態軌跡。

範例 (三)：

為無人螺旋載具作螺旋爬升飛行，機身保持水平，機鼻保持朝向著圓心旋轉。

先描述軌跡控制 (軌跡一) 的效益評估函數為

$$\begin{aligned} \min J(x, u) = & [x(N) - r(N)]^T M [x(N) - r(N)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} [x(i) - r(i)]^T Q [x(i) - r(i)], \quad x(0) = r(0). \end{aligned}$$

無人螺旋載具的目標軌跡 $r(i), i = 0, 1, \dots, N$ 為

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ u \\ v \\ w \\ \phi \\ p \\ \theta \\ q \\ \psi \\ r \\ a_{1s} \\ b_{1s} \\ r_{fb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+i/20) \times \cos(2 \times \pi \times i/35) \\ (1+i/20) \times \sin(2 \times \pi \times i/35) \\ -2 \times \pi \times i/35 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \pi + 2 \times \pi \times i/35 \\ 18.06 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

效益評估函數中的權重矩陣 $Q, M \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$ 與二次近似時 du 的權重係數 $R \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 分別為 (6.25) - (6.27) 式，系統的動態方程式為 (6.23) 式。低耗能控制 (軌跡二) 的效益評估函數為

$$\begin{aligned} \min J(x, u) = & [x(N) - r(N)]^T M [x(N) - r(N)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ [x(i) - r(i)]^T Q [x(i) - r(i)] + u^T(i) R u(i) \right\}, \quad x(0) = r(0). \end{aligned}$$

無人螺旋載具的目標軌跡 $r(i), i = 0, 1, \dots, N$ 為 (6.30) 式。效益評估函數中的權重矩陣 $Q, M \in \mathbb{R}^{15 \times 15}, R \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 分別為 (6.25) (6.26) 與 (6.28) 式，系統的動態方程式為 (6.23) 式。

軌跡控制（軌跡一）的控制訊號圖與軌跡圖如下：

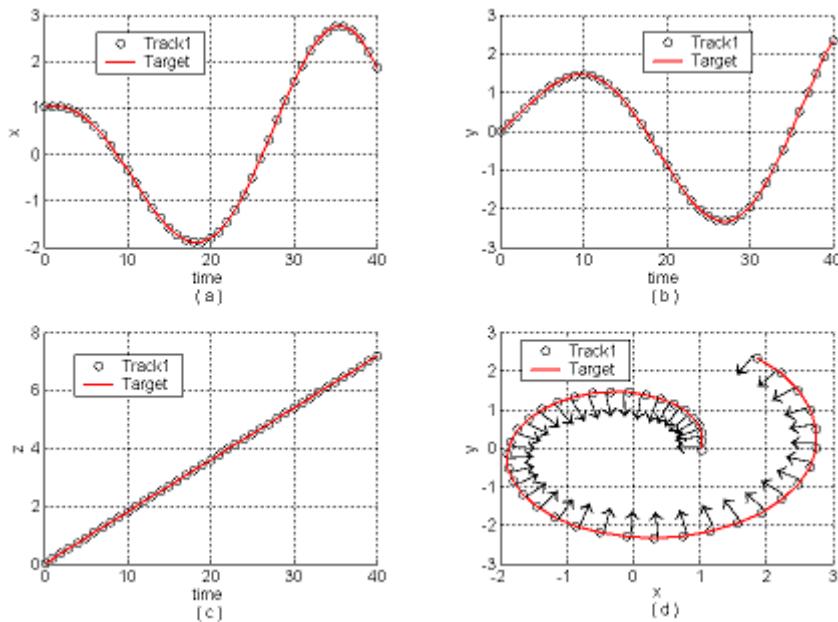


圖 6.11 無人螺旋載具控制軌跡與目標軌跡對應圖（不限制能量）

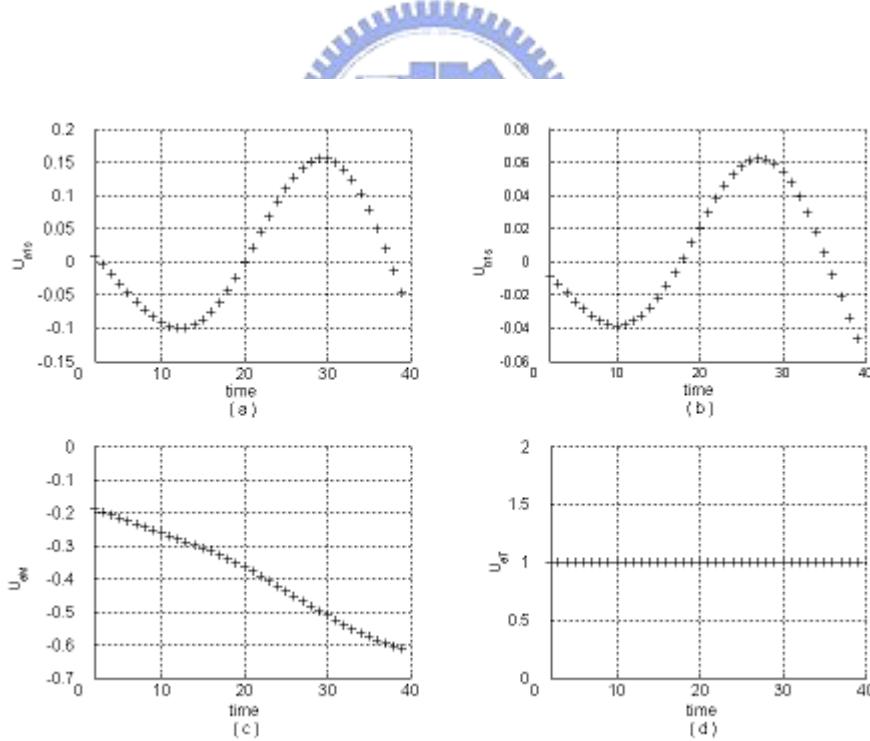


圖 6.12 無人螺旋載具控制訊號（不限制能量）

圖 6.11 中的實線代表螺旋飛行且機鼻方向指向圓心的目標軌跡（Target），目標軌跡表現在 x 軸與 y 軸上作弦波方式的前進飛行， z 軸以線性方式作爬升飛行，

機鼻方向 (ψ) 的旋轉目標軌跡函數為 $\pi + 2 \times \pi \times \frac{i}{35} rad$, $i = 0, 1, \dots, 40$ 。圖 6.11 控制軌跡 (Track1) 的每一個點對應到的 x, y, z 分別以圖 6.11 (a) - (c) 表示 , 這裡的 x, y, z 分別表示狀態變數的 p_x, p_y, p_z 。圖 6.11 (a) 在 x 軸的弦波前進飛行控制軌跡完全追蹤弦波前進飛行的目標軌跡。圖 6.11 (b) 在 y 軸上的弦波前進飛行控制軌跡完全追蹤弦波前進飛行的目標軌跡。圖 6.11 (c) 在 z 軸上的控制軌跡與目標軌跡作線性爬升飛行且完全追蹤。圖 6.11 (d) 為 $x-y$ 平面的俯視圖 , 此圖可以觀察到無人螺旋載具在 x 軸作弦波前進飛行 , 且 y 軸的控制軌跡亦作弦波前進飛行 , 在 x 軸與 y 軸上的控制軌跡完全追蹤目標軌跡。在圖中載具姿態呈現的形式為螺旋飛行且機鼻方向 (箭頭方向) 指向圓心的目標軌跡以 $2\pi \times \frac{i}{20} rad$, $i = 0, 1, \dots, 40$, 的方式旋轉。

控制變數歷程的每一個點對應到 $u_{a1s}, u_{b1s}, u_{\theta M}, u_{\theta T}$ 分別表示在圖 6.12(a)-(d) u_{a1s} 、 u_{b1s} 分別決定前進與左右飛行的動作 , 觀察圖 6.12 (a) 中 u_{a1s} 控制輸入量與圖 6.12 (b) 中 u_{b1s} 控制輸量得知 , 因為在圖 6.11 (a) 在 x 軸上無人載具作弦波方式的前進飛行且圖 6.11 (b) 在 y 軸上無人載具亦作弦波方式的前進飛行 , 因此再控制訊號 u_{a1s} 、 u_{b1s} 也分別以弦波的方式輸出。圖 6.11 (c) 在 z 軸上無人載具線性增加的爬升飛行 , 圖 6.12 (c) 中的 $u_{\theta M}$ 控制主螺旋槳輸入量使載具產生向上的動力。因主旋翼旋轉時所產生反轉矩 , 所以圖 6.12 (d) 中的 $u_{\theta T}$ 為平衡因主旋翼旋轉時所產生反轉矩 , 機鼻方向 (ψ) 的目標函數為 $\pi + 2 \times \pi \times \frac{i}{35} rad$, 因主旋翼旋轉時所產生的反轉矩會使機鼻方向 (ψ) 不完全追蹤 , 所以尾旋翼產生一作用力來產生一個力矩來抵抗主旋翼產生的反力矩 , 使機鼻方向 (ψ) 的控制軌跡與目標軌跡完全追蹤。

低耗能控制的控制訊號圖與軌跡圖如下：

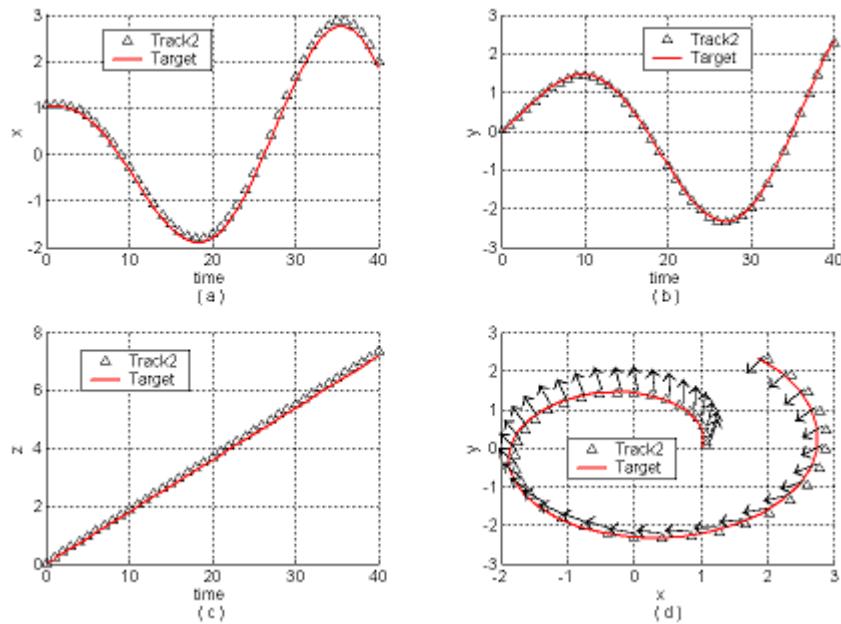


圖 6.13 無人螺旋載具控制軌跡與目標軌跡對應圖 (限制能量)

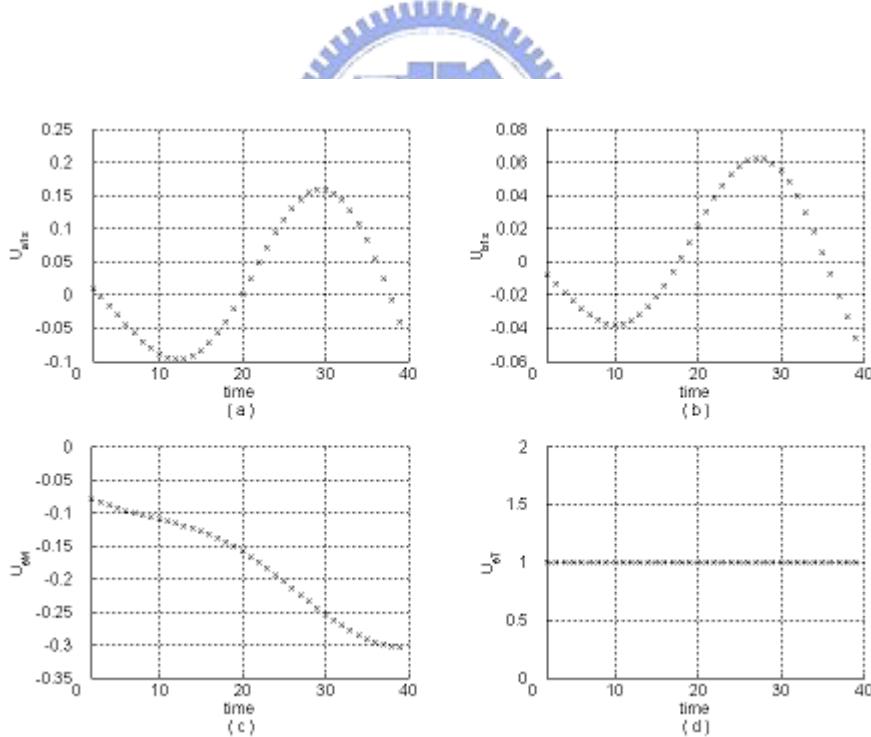


圖 6.14 無人螺旋載具控制訊號 (限制能量)

圖 6.13 中的實線代表螺旋飛行且機鼻方向指向圓心的目標軌跡 (Target) , 目標軌跡表現在 x 軸與 y 軸上作弦波方式的前進飛行 , z 軸以線性方式作爬升飛行 ,

機鼻方向 (ψ) 的旋轉目標軌跡函數為 $\pi + 2 \times \pi \times \frac{i}{35} rad$, $i = 0, 1, \dots, 40$ 。圖 6.13 控制軌跡 (Track2) 的每一個點對應到的 x, y, z 分別以圖 6.13 (a) - (c) 表示，這裡的 x, y, z 分別表示狀態變數的 p_x, p_y, p_z 。圖 6.13 (a) 在 x 軸的弦波前進飛行控制軌跡幾乎完全追蹤弦波前進飛行的目標軌跡。圖 6.13 (b) 在 y 軸上的弦波前進飛行控制軌跡完全追蹤弦波前進飛行的目標軌跡。圖 6.13 (c) 在 z 軸上的控制軌跡與目標軌跡作線性爬升飛行且控制軌跡領先目標軌跡。圖 6.13 (d) 為 $x-y$ 平面的俯視圖，此圖可以觀察到無人螺旋載具在 x 軸作弦波前進飛行，且 y 軸的控制軌跡亦作弦波前進飛行，在 x 軸與 y 軸上的控制軌跡與目標軌跡有些許的誤差。在圖中載具目標軌跡與姿態呈現的形式應為螺旋飛行，且機鼻方向 (箭頭方向) 指向圓心的目標軌跡以 $2\pi \times \frac{i}{20} rad$, $i = 0, 1, \dots, 40$ ，的方式旋轉，但是控制軌跡在姿態控制上無法完全的追蹤。

控制變數歷程的每一個點對應到 $u_{a1s}, u_{b1s}, u_{\theta M}, u_{\theta T}$ 分別表示在圖 6.14(a)-(d)。
 u_{a1s} 、 u_{b1s} 分別決定前進與左右飛行的動作，觀察圖 6.14 (a) 中 u_{a1s} 控制輸入量與圖 6.14 (b) 中 u_{b1s} 控制輸量得知，因為在圖 6.13 (a) 在 x 軸上無人載具作弦波方式的前進飛行且圖 6.13 (b) 在 y 軸上無人載具亦作弦波方式的前進飛行，因此再控制訊號 u_{a1s} 、 u_{b1s} 也分別以弦波的方式輸出。圖 6.13 (c) 在 z 軸上無人載具線性增加的爬升飛行，圖 6.14 (c) 中的 $u_{\theta M}$ 控制主螺旋槳輸入量使載具產生向上的動力。因主旋翼旋轉時所產生反轉矩，所以圖 6.14 (d) 中的 $u_{\theta T}$ 為平衡因主旋翼旋轉時所產生反轉矩，機鼻方向 (ψ) 的目標函數為 $\pi + 2 \times \pi \times \frac{i}{35} rad$ ，因主旋翼旋轉時所產生的反轉矩會使機鼻方向 (ψ) 不完全追蹤，所以尾旋翼產生一作用力來產生一個力矩來抵抗主旋翼產生的反力矩，但是尾旋翼已經輸出最大作用力來產生一個力矩，亦不足以抵抗主旋翼產生的反力矩使機鼻方向 (ψ) 的控制軌跡與目標軌跡完全追蹤。

軌跡控制與低耗能控制的軌跡圖比較如下：

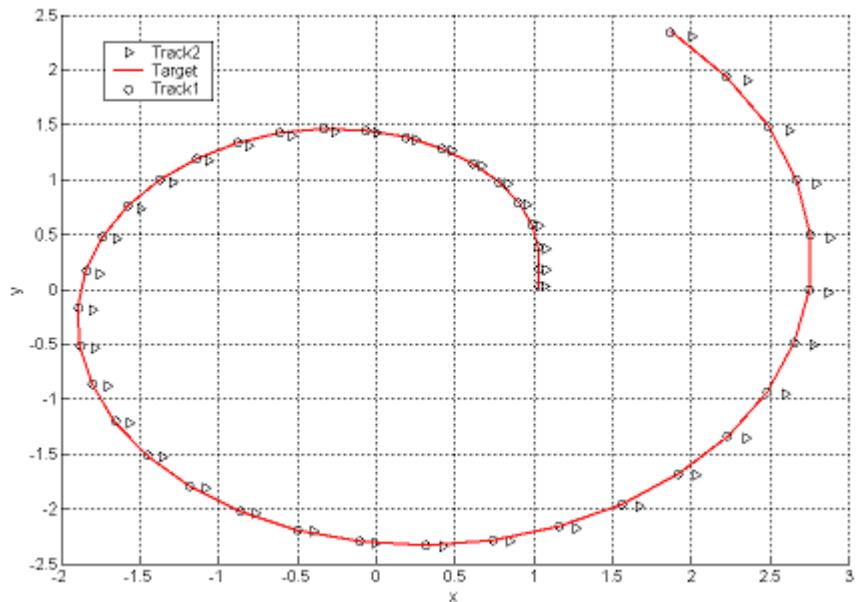


圖 6.15 低耗能控制 (Track2) 與軌跡控制 (Track1)

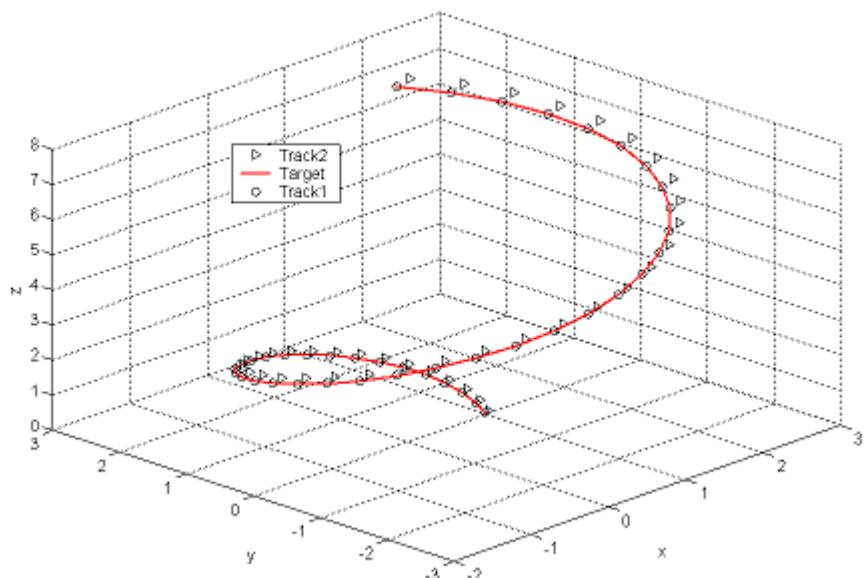


圖 6.16 低耗能控制 (Track2) 與軌跡控制 (Track1)

由圖 6.15 可知無人載具在低耗能控制 (Track2) 下的 x 軸與 y 軸作弦波方式的前進飛行、 z 軸以線性的方式作爬升飛行在完全追蹤的要求上都不如軌跡控制 (Track1)。圖 6.12 (a) (b) 與圖 6.14 (a) (b) 觀察可知，圖 6.13 (a) 與圖 6.15

呈現的 x 軸控制軌跡 (Track2) 領先目標軌跡 (Target) 是由於控制訊號 u_{a1s} 的原因。低耗能控制圖 6.14 (c) 所產生的主旋翼控制訊號大於軌跡控制圖 6.12 (c)，加上尾旋翼已經輸出最大作用力來產生一個力矩，且無法有效的增加主螺旋槳的反作用力，使無人螺旋載具在姿態控制上無法完全追蹤。



第七章 結論

本論文針對可分離化的非凸集(nonconvex)最佳控制問題有完整的演算法，此演算法適合解目標函數為二次效益評估函數的非線性控制問題且具有的最終時間限制式。文章中沒有討論到超大型積體陣列處理器實現的問題，關於運用超大型積體陣列處理器實現 RQPD 演算法的架構部分，*Lin* [15]中有硬體的架構與之間的運算。RQPD 演算法應用於最佳控制上，具備了下列特性：穩定、正確、簡單等。其中穩定性是指演算法能夠使整個系統迅速達到收斂；另外，正確性是指演算法保證能找到最佳解。

軌跡控制問題中狀態變數與控制變數很多，且需考慮的時間範圍很長，使用 RQPD 演算法可分離化的問題皆可變成數個子問題，我們只需要計算出每個子問題得控制訊號與狀態變數即可，它的缺點用平行運算（晶片實現）可以改善，此一部份現在已有學術界在研究，以線性控制做成的控制晶片，在非線性控制的晶片實現上研究非常有限，此一論文可以提供研究者做非線性晶片的研製。

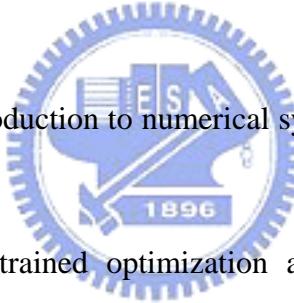


參考文獻

- [1] T. John Koo, Yi Ma, and Shankar Sastry, “Nonlinear control of a helicopter based unmanned aerial vehicle model,” IEEE Transactions on Control Systems Technology, submitted for publication.
- [2] Haim Baruh, “Analytical dynamics,” McGraw-Hill, 1999.
- [3] Francis C. Moon, “Applied dynamics: with applications to multibody and mechatronic systems,” Wiley, 1998.
- [4] R.M. Murray, Z. Li, and S. Shankar Sastry, “A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation,” CRC Press, 1994.
- [5] H. Jin Kim, David H. Shim, Shankar Sastry, “Flying Robots: Modeling, Control and Decision Making,” In Proceeding of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation, May 2002.
- [6] H. Jin Kim, David H. Shim, Shankar Sastry, “Nonlinear model predictive tracking control for rotorcraft-based unmanned aerial vehicles,” American Control Conference, Anchorage, AK, May 2002.
- [7] H. Jin Kim, David H. Shim, Shankar Sastry, “Decentralized reflective model predictive control of multiple flying robots in dynamic environment,” IEEE Conference on Decision and Control, December, 2003.
- [8] Bernard Mettler, Mark B. Tischler, Takeo Kanade, “System identification of small-size unmanned helicopter dynamics,” Presented at the American Helicopter Society 55th Forum, Motreal, Quebec, Canada, May 25-27, 1999.
- [9] G. V. Reklaitis, A. Ravindrad, K. M. Ragsdell, “Engineering optimization methods and applications,” Wiley, 1983.
- [10] Edwin K. P. Chong, Stanislaw H. Zak, “An introduction to optimization,” Wiley,

2001.

- [11] David G. Luenberger, “Linear and nonlinear programming,” Addison Wesley, 1984.
- [12] Donald E. Kirk, “Optimal control theory: an introduction,” Prentice-Hall, 1970.
- [13] Lin, S.-Y., “Complete decomposition algorithm for nonconvex separable optimization problems and applications,” *Automatica*, Vol. 28, No. 6, pp. 1249-1254, 1992.
- [14] Lin. S.-Y., “A hardware implementable receding horizon controller for constrained nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 9, September 1994.
- [15] Lin. S.-Y., “A hardware implementable two-level parallel computing algorithm for general minimum-time control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 5, May 1992.
- [16] K. E. Atkinson, “An introduction to numerical systems, 2nd ed.,” Singapore: Wiley, 1989.
- [17] Bersekas, D. P., “Constrained optimization and lagrange multiplier method,” Academic Press, New York, 1982.
- [18] D. Q. Mayne and H. Michaiska, “Receding horizon control of nonlinear system,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, no. 7, July 1990.



附錄

以下的系統參數為常系數

$$X_u = -0.0954$$

$$Y_v = -0.2221$$

$$Z_{a_{1s}} = -28.85$$

$$Z_{b_{1s}} = -121.2$$

$$Z_w = -0.5377$$

$$Z_r = 5.7974$$

$$L_u = -0.2047$$

$$L_v = 0.1521$$

$$L_{a_{1s}} = 22.14$$

$$L_{b_{1s}} = 32.995$$

$$M_u = -0.0836$$

$$M_v = -0.0514$$

$$M_{a_{1s}} = 67.74$$

$$M_{b_{1s}} = 142.5$$

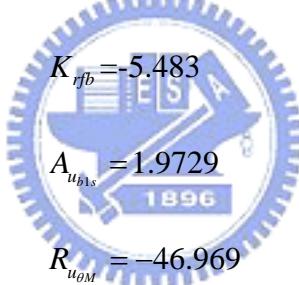
$$N_p = -0.0178$$

$$N_w = 0.0746$$

$$N_r = -4.4017$$

$$\frac{1}{\tau_f} = 2.6645$$

$$g = 9.8$$



$$N_{rfb} = -46.959$$

$$A_{u_{a1s}} = -0.5912$$

$$A_{u_{b1s}} = 1.9729$$

$$B_{u_{a1s}} = -2.4055$$

$$B_{u_{b1s}} = -0.0993$$

$$R_{u_{\theta M}} = -46.969$$

$$R_{u_{\theta T}} = 15.2454$$

$$W_{u_{\theta M}} = 116.952$$

$$A_{b1s} = 0$$

$$B_{b1s} = 0.5543$$