國立交通大學

物理研究所

碩 士 論 文

Bianchi type I 宇宙模型探討

A study on the Bianchi type I model universe

研 究 生：陳俊憲

指導教授：高文芳　教授

中 華 民 國 九十九 年 六 月

Bianchi type I 宇宙模型探討

A study on the Bianchi type I model universe

研 究 生：陳俊憲　　Student：Chun-Hsien Chen

指導教授：高文芳　　Advisor：W.F. Kao

國 立 交 通 大 學

物 理 研 究 所

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Institute of Physics

College of Science

National Chiao Tung University

for the Degree of

Master

in

Physics

June 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年六月

Bianchi type I 宇宙模型探討

學生：陳俊憲 指導教授：高文芳 教授

國立交通大學物理研究所碩士班

摘 要

宇宙學家曾對帶有正宇宙常數項的膨脹宇宙模型其終期行為做了一些驗證：目前已知 Bianchi 空間下的愛因斯坦模型只要滿足特定能量條件，宇宙最後一定會演化成一個均勻、均向的 de Sitter space 時空。早期宇宙在高能量下應該要做修正；於是有宇宙學家導入了高次曲率項來修正早期宇宙模型，並找到一個不均向宇宙的膨脹解。後續的檢驗發現它依然是不穩定的。我們詳細介紹 Wald 有關宇宙演化定理的証明，隨後假設宇宙演化初期起始於 Bianchi type I 空間，在導入了高次項重力模型後，有系統地找出了 de Sitter 空間解和正確的不均向空間解。最後我們以微擾的方式證實，這個不均向解的確是不穩定的。

A study on the Bianchi type I model universe

Student：Chun-Hsien Chen Advisor：Prof. W.F. Kao

Institute of Physics

Nation Chiao Tung University

ABSTRACT

Robert Wald showed that anisotropically expanding universes will evolve to a stable de Sitter space for a large class of Einstein gravity models with a positive cosmological constant under certain energy conditions. A detailed review is presented in this paper. It is also found that a class of Bianchi type I expanding solutions exist in the presence of the higher derivative corrections. We provide a detailed derivation of the field equations, and solve for the expanding solutions in a systematic manner. This class of anisotropically expanding soltuions are shown to be unstable by perturbating the field equations in the presence of the expanding background solution.

誌　謝

這一段大概是論文的最後部份，總是到了結束前才明白了些什麼。

之前看到有人在爭論研究生是在做研究，還是在學做研究，也許每個人的認定都不同；但，不論哪一方，在兩年的研究生生活裡都體認過。

每次的研究、計算過程中，都存在個想法，自己是在追求自然的真理，還是做個精神糧食的生產者，減少人們對無緣由存在的恐懼。兩者所為的目標不太一樣；但，至少肯定自己是在做個值得的研究。兩年裡，與朋友間的扶持、交流，看到他人的付出時，也體認、學到了人與人互助的感動。對我來說，其實不管是做研究還是學做研究都沒有什麼好取捨，一個是對自然和追求未知，一個是對人和討論，兩者都是讓自己成長的必需。

其實，我想研究生最重要的，應該是研究生活。不管是做研究還是學做研究，那些研究上帶給你的情緒，都會慢慢的被撫平；最後剩下的情感，只有對這段研究生活裡的所有人的感謝；也許誌謝才是論文最重要的部份吧。這兩年要感謝的人很多：

謝謝老師你給予的自由討論平台，比起採用強迫適應環境的作法，我倒覺得自主的調整與規劃更能彈性地應對未來的變化。

謝謝家銘學長，你總是可以給予我們知識上的補齊，論文裡 introduction 的部份受到了你很多的指導，每次與你討論後總令人安心不少。

謝謝英程學長，在微擾求解時也受到你的指點，加入了解的限制於方程式裡頭，讓解以更方便及正確的形式展現；與你研究的過程中，在你身上看到的認真態度和實力，令人感到佩服(很少用這個詞的)。

謝謝益宏學長、理策學長、宣翰學長、傳睿、韋嵐、國俊，與你們的交流討論，讓我更有動力。

謝謝白鯨，不過跟你太熟了，就後面留點空白讓你自己填吧。

謝謝豪大、凱薩、Q 雄、路易斯、咪，高中同學 A、B，下面也有空白處。

謝謝 BG 團的 Danny、Baby ，讓我在共同興趣的過程中有了某些依賴。

謝謝散落在校園各角落的大學同學，看到你們總是喚起懷念的回憶。

還要謝謝天文社的各位，我的生日你們總是還記得，還有跳、Lin 妳們的支持；以及其它的許多許多，謝謝你們，謝謝。

每一分一秒存在都是種感謝，很多人都在尋找它的源頭，以為只能以理解作為回報；其實，自己的存在，就已經是那個源頭，而回應那感謝源頭的方式，就不再單單只是理解了。

Contents

Chapter 1

Introduction

我們確信宇宙有一個短暫的加速膨脹時期；而這些膨脹的來源，我們可以說是從有常數位能的純量場而來，也可以說是從自然界存在的純重力的高次項模型而來。研究在這些模型下的宇宙是否加速和漸近地趨近於 de Sitter 度規是一個重要的課題；而這個課題我們將先跟著 Robet M. Wald 從一個尚未修正的宇宙模型來探討[1]。

首先我們要去了解，為何在演化早期擁有暴漲機制的宇宙，不太需要嚴格的初始條件，就能演化到我們現存的宇宙。大部分關於宇宙模型的研究，都是假設在 Friedmann-Robertson-Walker symmetry (均勻、均向)下進行。有人在宇宙 supercooled 時期(相轉變時期)，指數膨脹發生的情況下，發現了暴漲會造成宇宙視界急遽增加。當 false vacuum 給出了 stress energy ，也在動力學方程上產生了一個很大的宇宙常數 Λ 。這種 Friedmann-Robertson-Walker 模型下的視界增加令人猜測：宇宙可能被交互作用均勻、均向，隱含著現存的宇宙不用太過嚴格的初始條件。

我們從一個非均向的宇宙模型出發，來看它隨時間的演化。也就是，我們要討論的不是非 Friedmann-Robertson-Walker 的宇宙模型是否會發生暴漲；而是在已經有暴漲的前提下，非 Friedmann-Robertson-Walker 的宇宙是否會被拉平。

關於以上，有宇宙學家提出了一個猜想：所有在正宇宙常數下的膨脹宇宙模型，將漸近的趨向於 de Sitter 時空。

要驗證這個猜想，我們將證明除了 type IX 的 Bianchi 時空下的宇宙模型，會趨向於演化成 de Sitter 時空。而 type IX 的 Bianchi 時空下的宇宙模型，在宇宙常數 Λ 夠大下也會是如此；但我們不多做 type IX 介紹。最後的結果，將會支持宇宙演化終期回到 de Sitter 時空的猜想。

要考慮 Bianchi 宇宙的動力學演化，可經由 Einstein 方程：

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + 8\pi T_{ab} \tag{1.0.1}$$

G_{ab} 是描述時空結構的幾何張量，T_{ab} 是描述物質分佈的能量動量張量。其中 T_{ab} 項，是由 nonvacuum 在暴漲時的貢獻而來，我們假設 T_{ab} 必須符合主能量條件和強能量條件就好。

主能量條件，對所有 timelike t^a ，且 $T_{ab}t^b$ 是 timelike 或 null， $T_{ab}t^a t^b \geq 0$ 。相對於強能量條件，則是 $(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T)t^a t^b \geq 0$。

接下來我們用到，初始值限制方程(Einstein 場方程)：

$$0 = G_{ab}n^a n^b - \Lambda - 8\pi T_{ab}n^a n^b \tag{1.0.2}$$

其中，n^a 是均勻超平面的法向量。

它可以由內部做 trace 後，寫成：

$$0 = R_{ab}n^a n^b + \Lambda - 8\pi(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T)n^a n^b \tag{1.0.3}$$

其中，$G_{ab}n^a n^b$ 和 $R_{ab}n^a n^b$ 可以被均勻超曲面的三維幾何和此曲面上的外曲率 K_{ab} 表示。首先為了方便，我們分解 K_{ab} 成其 trace K 和 trace-free σ_{ab}兩部份，

$$K_{ab} = \frac{1}{3}Kh_{ab} + \sigma_{ab} \tag{1.0.4}$$

其中，

$$K \equiv K_{ab}h^{ab} \tag{1.0.5}$$

h_{ab} 是空間度規，$h_{ab} \equiv g_{ab} + n_a n_b$ ， h^{ab} 是其 inverse，σ_{ab} 是 shear (在這裡是其矩陣 h_{ab} 的非對角項)。

在使用以上方程式後，我們再用到 Raychaudhuri 方程：

$$\dot{K} = -\frac{1}{3}K^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega^{ca}\omega_{ca} - R_{cd}n^c n^d \tag{1.0.6}$$

可以得到均於超曲面上的 K 和 $\dot{K}$ ，

$$K^2 = 3\Lambda + \frac{3}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab} - \frac{3}{2}{}^{(3)}R + 24\pi T_{ab}n^a n^b \tag{1.0.7}$$

$$\dot{K} = \Lambda - \frac{1}{3}K^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - 8\pi(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T)n^a n^b \tag{1.0.8}$$

${}^{(3)}R$ 是均勻超平面的純量曲率， $\dot{K}$ 是 K 對 proper time 的微分。${}^{(3)}R$ 可由空間對稱群的李代數的結構常數張量 $C^a_{\ bc}$ 給定：

$$ {}^{(3)}R = -C^a_{\ ab}C_c^{\ cb} + \frac{1}{2}C^a_{\ bc}C^{c\ b}_{\ a} - \frac{1}{4}C_{abc}C^{abc} \tag{1.0.9}$$

接下來把 ${}^{(3)}R$ 用另外的形式表示。我們從其反對稱的性質 $C^c_{\ ab} = -C^c_{\ ba}$ 將 $C^a_{\ ab}$ 表示成：

$$C^c{}_{ab} = M^{cd}\epsilon_{dab} + \delta^c{}_{[a}A_{b]} \tag{1.0.10}$$

其中 $A_a \equiv C^b{}_{ba}$、$M^{ab} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{acd}(C^b{}_{cd} - \delta^b{}_c A_d)$ 且 $M^{cd} = M^{dc}$ 。於是，可以用張量 M^{ab} 和 vector A_a 來計算。

得到 ${}^{(3)}R$:

$${}^{(3)}R = -\frac{3}{2}A_b A^b - (M_{ab}M^{ab} - \frac{1}{2}M^2) \tag{1.0.11}$$

如果要 ${}^{(3)}R$ 是正數，則必須遵守 $M_{ab}M^{ab} < \frac{1}{2}M^2$ 。然而，經由計算只有 type IX 才會符合 $M_{ab}M^{ab} < \frac{1}{2}M^2$ 。因此，除 type IX 之外，所有的 Bianchi 模型，我們有：

$${}^{(3)}R \leq 0 \tag{1.0.12}$$

現在我們來考慮非 type IX 的 Bianchi 模型。將主能量條件、強能量條件和不等式 (1.0.12) 用於 K^2 、$\dot{K}$ ，

$$\dot{K} \leq \Lambda - \frac{1}{3}K^2 \leq 0 \tag{1.0.13}$$

由 $K^2 \geq 3\Lambda$ 可以看出 K 在演化的過程中，不會經過零。也就是 K 在某時間是大於零，則一直大於零下去(某時間的宇宙是膨脹，則會一直膨脹下去)。也就是：

$$K \geq (3\Lambda)^{\frac{1}{2}} \tag{1.0.14}$$

然而，方程式 (1.0.13) 也隱含了：

$$\frac{1}{K^2 - 3\Lambda}\frac{dK}{d\tau} \leq -\frac{1}{3} \tag{1.0.15}$$

對這個不等式積分，我們可以得到：

$$K \leq \frac{(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}}{\tanh(\frac{\tau}{\alpha})} \tag{1.0.16}$$

其中，$\alpha \equiv (\frac{3}{\Lambda})^{\frac{1}{2}}$。

於是，K 值將介於下限 $(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$ 和時間尺度 α 以指數接近於$(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$ 的上限 $\frac{(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}}{\tanh(\frac{\tau}{\alpha})}$ 這個小區間內。於是，我們發現 K 值將快速的接近 $(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$ 。回到 K^2 ，我們從方程式 (1.0.16) 得到：

$$\sigma^{ab}\sigma_{ab} \leq \frac{2}{3}(K^2 - 3\Lambda) \leq \frac{2\Lambda}{\sinh^2(\frac{\tau}{\alpha})} \tag{1.0.17}$$

由上式也可以看出 shear 會快速的接近於零。相同地，K^2 和方程式 (1.0.16) 也隱含了物質能量密度被限制：

$$T_{ab}n^a n^b \leq \frac{\Lambda}{8\pi}\frac{1}{\sinh^2(\frac{\tau}{\alpha})} \tag{1.0.18}$$

於是由 $\sinh^2(\frac{\tau}{\alpha})$ 可以看出，所有的 $T_{ab}n^a n^b$ 將快速的接近於零：

$$T_{ab} \to 0$$

$$\sigma_{ab} \to 0$$

$$K \to (3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$$

最後，當 $\sigma_{ab} \to 0$ 時 $K \to (3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$ ；這件事隱含著，與時間有關的空間度規的形式在演化終期將會近似於：

$$h_{ab}(\tau) = e^{\frac{2(\tau-\tau_0)}{\alpha}} h_{ab}(\tau_0) \tag{1.0.19}$$

這是一個按比例增加的的度規；然而，卻導致空間曲率 ${}^{(3)}R_{ab}$ 將趨向於零。於是我們結論出，初始膨脹非 type IX 的 Bianchi 宇宙，在演化時間 $\tau \gg \alpha$ 情況下，將會趨向於以常數膨脹率 $K = (3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$ 均向地膨脹成一個平坦的空間(按比例增加的度規，卻能導致空間平滑，可見各方向已經均向)。也就是接近於 de Sitter 時空。再一次強調，宇宙在演化終期不必是 de Sitter ，但我們卻得到是 de Sitter 的結論。於是 Wald 結論出，符合主能量條件、強能量條件的 Einstein 宇宙模型，會從大部分非均向的時空(Bianchi I-VIII)演化成 de Sitter 時空。

事實上，Wald 已經假設能量動量張量至少符合某種形式；但是，並不表示所有的能量動量張量皆適用。特別地，當曲率二次項被引入到廣義相對論 Lagrangian 裡時，一個新型態的解在 $\Lambda > 0$ 時將會發生[12]；這些解會非均向性的暴漲，而在演化終期不趨近於 de Sitter 時空。這隱含了宇宙演化終期 de Sitter 的預測，在高次項引入後可能會出現反預期的事。

短述一下我們想要檢驗的爭論：由 Einstein 重力模型的宇宙無毛定理說，在 Bianchi I-VIII 空間下且物質來源遵守強能量條件，則宇宙在演化的最後時間會朝向 de Sitter 時空[6]。反過來說，如果不遵守此能量條件，宇宙無毛定理將不能被證明，也可能出現反例。

我們看法及工作包括以下：修正後的宇宙模型在 Bianchi type space 、正宇宙常數下，給出了解；然而，此解不再是 de Sitter 也不再是漸近的趨近於 de Sitter 。理論

上，曲率的二次項給予了場方程二次以上時間的微分，產生了不均向解；不過不均向解可以被假定是無物理意義的，因為它在理論的限制之外。所以，所有解出來的解，不是每個都有物理意義的。此篇裡我們將證明，藉由微擾和解的限制，BH 非均向膨脹解是不穩定的。

在高次項的重力模型下，從一般的方法去取得運動方程裡的穩定性資訊是困難的。我們採用了一種與模型無關的方法去取得場方程式，非均向的微擾也因此更容易被執行。

我們的步驟分成如下：

(i) 用一個與模型無關的方法，得到場方程式(此場方程式符合舊有的方法取得的場方程式)，而 BH 的解會符合此方法的場方程式。

(ii) 非均向的微擾可以直接在此場方程式上被執行，而我們可以得到與模型無關的微擾、線性次數的方程式。

(iii) 在 BH 度規下的微擾方程式，可以直接地被取得，它們以多項式的方式被呈現。

(iv) 最後我們找到了不穩定的模式，所以，BH 的解在非均向微擾下是不穩定的。

Chapter 2

Bianchi type I space

2.1 Metric tensor

度規空間是(metric space)一個集合，在其中可以定義在這個集合的元素之間的距離的概念。空間的幾何性質依賴於所選擇的度規(metric)，通過使用不同的度規可以構造不同的幾何。當選定一個坐標系統 x^i ，度規張量 $g_{\mu\nu}$ 可以用矩陣表示。

Bianchi type I 的度規為:

$$ds^2 = -b^2(t)dt^2 + a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)dy^2 + a_3^2(t)dz^2 \tag{2.1.1}$$

假定 $B(t) \equiv \frac{1}{b^2(t)}$ ， $g_{\mu\nu}$ 在 Bianchi type I 下矩陣表示為 :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^2 \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

其反矩陣， $g^{\mu\nu}$ 在 Bianchi type I 下表示為 :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3^2} \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

其中 determinant 為:

$$\sqrt{-g} = \frac{a_1 a_2 a_3}{\sqrt{B}} \tag{2.1.4}$$

2.2 Christoffel symbol

進行演算時會用到克里斯托費爾符號(Christoffel symbol)，它與度規的關係是：

$$\Gamma^{a}_{\ bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc} \right) \tag{2.2.1}$$

定義 $H_i \equiv \frac{\dot{a}_i}{a_i}$ for $i = 1 \sim 3$，克里斯托費爾符號在 Bianchi type I 表示為：

$$\Gamma^{0}_{\ \mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{B}}{2B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ba_1^2 H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ba_2^2 H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ba_3^2 H_3 \end{pmatrix} \tag{2.2.2}$$

$$\Gamma^{1}_{\ \mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_1 & 0 & 0 \\ H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.3}$$

$$\Gamma^{2}_{\ \mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

$$\Gamma^{3}_{\ \mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & H_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.5}$$

2.3 Components of Riemann tensor

黎曼張量 (Riemann tensor) 是度規的二次微分，用克里斯托費爾符號的表示為：

$$R^{d}{}_{cba} = -\partial_a \Gamma^{d}{}_{bc} - \Gamma^{e}{}_{cb}\Gamma^{d}{}_{ae} - (a \longleftrightarrow b) \tag{2.3.1}$$

提升一個腳標，方便計算：

$$R^{ab}{}_{cd} = g^{be} R^{a}{}_{ecd} \tag{2.3.2}$$

在 Bianchi type I space 下, 所有非零的黎曼張量分量為：

$$R^{ti}{}_{tj} = \frac{1}{2}\left[H_i \dot{B} + 2B\left(\dot{H}_i + H_i^2\right)\right]\delta^{i}{}_{j} \tag{2.3.3}$$

$$R^{ij}{}_{kl} = H_i H_j B \epsilon^{ijm}\epsilon_{mkl} \tag{2.3.4}$$

如果我們選擇 $B = 1$ 和 $\dot{B} = 0$，則可以表示成：

$$R^{01}{}_{01} = \dot{H}_1 + H_1^2 \tag{2.3.5}$$

$$R^{02}{}_{02} = \dot{H}_2 + H_2^2 \tag{2.3.6}$$

$$R^{03}{}_{03} = \dot{H}_3 + H_3^2 \tag{2.3.7}$$

$$R^{12}{}_{12} = H_1 H_2 \tag{2.3.8}$$

$$R^{23}{}_{23} = H_2 H_3 \tag{2.3.9}$$

$$R^{31}{}_{31} = H_3 H_1 \tag{2.3.10}$$

2.4 Components of Ricci tensor

Ricci tensor 是 Riemann tensor 腳標上的縮併 (contraction)。在 Bianchi type I space 下，所有非零的里奇張量分量為 $R^{\mu}_{\ v} = R^{\mu\alpha}_{\ \ v\alpha}$：

$$R^{0}{}_{0} = \frac{1}{2}\dot{B}(3H) + B(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3) \tag{2.4.1}$$

$$R^{1}{}_{1} = \frac{1}{2}\dot{B}H_1 + B[H_1\,(H_1 + H_2 + H_3) + \dot{H}_1] \tag{2.4.2}$$

$$R^{2}{}_{2} = \frac{1}{2}\dot{B}H_2 + B[H_2\,(H_1 + H_2 + H_3) + \dot{H}_2] \tag{2.4.3}$$

$$R^{3}{}_{3} = \frac{1}{2}\dot{B}H_3 + B[H_3\,(H_1 + H_2 + H_3) + \dot{H}_3] \tag{2.4.4}$$

其中，$3H = H_1 + H_2 + H_3$。為了計算方便，令 $B = 1$：

$$R^{0}{}_{0} = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 \tag{2.4.5}$$

$$R^{1}{}_{1} = H_1\,(H_1 + H_2 + H_3) + \dot{H}_1 \tag{2.4.6}$$

$$R^{2}{}_{2} = H_2\,(H_1 + H_2 + H_3) + \dot{H}_2 \tag{2.4.7}$$

$$R^{3}{}_{3} = H_3\,(H_1 + H_2 + H_3) + \dot{H}_3 \tag{2.4.8}$$

在場方程式導完後，我們所用到的都會是 $B = 1$。

2.5 Scalar curvature

在黎曼幾何中，純量曲率 (scalar curvature) 是一個黎曼流形最簡單的曲率不變數。對黎曼流形的每一點，純量曲率是該點附近幾何的一個實數。

純量曲率表示為 $R = R^{\mu}{}_{\mu}$，是 Ricci tensor 的 trace；在 Bianchi type I space 下表示成：

$$R = \dot{B}(3H) + 2B\left(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_1\right) \tag{2.5.1}$$

為了計算方便，令 $B = 1$：

$$R = 2\left(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_1\right) \tag{2.5.2}$$

在場方程式導完後，我們所用到的都會是 $B = 1$。

Chapter 3

Field equations

3.1 Least action principle

最小作用力原理 (Least action principle) 可以建立各種基本的運動方程式。在重力方面，描述重力的 Einstein field equation 可以由最小作用力原理得出。只要對作用 (action) 變分，就可以得到運動方程式；在附錄裡有較詳細的 Einstein field equation 推導。如 introdution 所說，我們使用的 Lagrangian 將加入曲率的二次項。

Action：

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu}_{\ v} R^{\nu}_{\ \mu} - 2\Lambda\right] \tag{3.1.1}$$

Lagrangian：

$$L = \sqrt{-g}\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu}_{\ v} R^{\nu}_{\ \mu} - 2\Lambda\right] \tag{3.1.2}$$

Largrangian density：

$$\mathcal{L} = R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu}_{\ v} R^{\nu}_{\ \mu} - 2\Lambda \tag{3.1.3}$$

其中，α、β 項也可說是物質的作用。

Action 對 $g^{\mu\nu}$ 變分後，得到修正過後二次項曲率的 Einstein field equation :

$$\begin{aligned} &R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\alpha g_{\mu\nu}R^2 - \tfrac{1}{2}\beta R_{\sigma\rho}R^{\sigma\rho}g_{\mu\nu} + 2\alpha\left(RR_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box R - \nabla_\mu\nabla_\nu R\right) \\ &+2\beta(R^{a}_{\ \nu}R_{a\mu} - \nabla_a\nabla_\nu R^{a}_{\ \mu} + \tfrac{1}{2}\Box R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_a\nabla_b R^{ab}) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

3.2 Field equations

從 Einstein 場方程式我們的確可以得到切確的運動方程式，但是如果從 Einstein 場方程式開始去計算的話，會遭遇許多共變微分的地方，增加了計算的困難性(光是得到某特定形式的 Einstein 場方程式，就必須做一翻計算)。接下來，我們將使用一個較簡單的方法，直接對作用裡所有的變數做變分，也就是從 Euler equation 出發，可以得到時間部分的場方程式 Friedmann equation 和空間部分的場方程式。而計算裡，我們選用的變數為哈伯 factor H_i，重新稱之為 B equation 和 a_i equation。以下為推導：

首先，我們必須要認知到令 $B(t) = 1$ 雖然可以簡化計算，也可以容易的看出時空的對稱性，但是也會遺失掉時空的一些資訊在裡頭；所以我們必須先把 $B(t)$ 項還原，當作是我們的變數；在推導至某一程度後就可以再把 $B(t) = 1$ 代入，再引入 Lagrangian 的時空對稱性，最後得到 B equation (B equation 包含著 $B(t)$ 原有的資訊，是個 non-redundant 方程式，不管之後求解或是找尋不穩定態都必須使用；舉例來說，我們可以定義 Einstein 場方程式為 $H_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}$ ，由 $D_\mu T_{\mu\nu} = 0$ 和 Bianchi 恆等式 $D_\mu G_{\mu\nu} = 0$ ，可以得出 $D_\mu H_{\mu\nu} = 0$，也就是 $(\partial_t + 3H)\, H_{tt} + H_i H_{ii} = 0$ ；在只有三個變數卻有四個方程式下，我們判斷有一條方程式是多餘的，假如我們已知 H_{tt} 、H_{11} 、 H_{22} 是零，則就知 H_{33} 也是零；如果已知改成 H_{11} 、 H_{22} 、 H_{22} ，只能知道 H_{tt} 是一個 constant ；這件事給了我們一個支持：H_{tt} 不可忽略，也就是 B equation 是個 non-redundant 方程式)。

先體認到一開始我們有變數 $B(t)$、$\dot{B}(t)$、$a_i(t)$、$\dot{a}_i(t)$、$\ddot{a}_i(t)$ ；把 action 對 $B(t)$ 做變分 ，得到一個場方程式：

$$\frac{\partial L}{\partial B} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{B}} = 0 \tag{3.2.1}$$

將 Lagrangian 寫成：

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial B} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial \dot{B}} = 0 \tag{3.2.2}$$

將 Lagrangian density 與體積部分分開：

$$\mathcal{L}\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial B} + \sqrt{-g}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} - \frac{d}{dt}\left(\sqrt{-g}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}}\right) = 0 \tag{3.2.3}$$

其中，$\sqrt{-g} = \frac{V}{\sqrt{B}}$ 、$V \equiv a_1 a_2 a_3$。微分計算後：

$$\mathcal{L}V\left(-\frac{1}{2B^{\frac{3}{2}}}\right) + \sqrt{-g}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} - \frac{\dot{V}}{\sqrt{B}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}} + \frac{\dot{B}}{2B^{\frac{3}{2}}}V\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}} - \frac{V}{\sqrt{B}}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}} = 0 \tag{3.2.4}$$

同乘 $\frac{-2B^{\frac{3}{2}}}{V}$ ：

$$\mathcal{L} - 2B\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} + 2B\left(3H\right)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}} - \dot{B}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}} + 2B\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}} = 0 \tag{3.2.5}$$

將 $B(t)$ 設為 1：

$$\mathcal{L} - 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} + 2\left(3H\right)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}} + 2\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}} = 0 \tag{3.2.6}$$

接下來引入 Lagrangian 的時空對稱性做以下的代換：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} \longrightarrow \frac{H_i}{2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_i} + \dot{H}_i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}} \longrightarrow \frac{H_i}{2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i}$$

從此與模型無關的方法，可以得到場方程式，我們也稱之為 B equation ，其中 $i = 1 \sim 3$：

$$\mathcal{L} + H_i\left(\frac{d}{dt} + 3H\right)\mathcal{L}^i - H_i\mathcal{L}_i - \dot{H}_i\mathcal{L}^i = 0 \tag{3.2.7}$$

其中 $3H \equiv H_1 + H_2 + H_3 \qquad \mathcal{L}_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_i} \qquad \mathcal{L}^i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i}$

另外，再把 action 對 $a_i(t)$ 做變分，得到另一個場方程式：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{a}_i} = 0 \tag{3.2.8}$$

代入：

$$L = a_1 a_2 a_3 \mathcal{L} \tag{3.2.9}$$

所以得到：

$$\frac{\mathcal{L}}{a_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} - \left(\frac{d}{dt} + 3H\right)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} + \left(\frac{d}{dt} + 3H\right)^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{a}_i} = 0 \tag{3.2.10}$$

假設我們已經對 Largrangian density 用哈伯 factor H_i 、 $\dot{H}_i$ 表示，意味著變分的變數也要替換：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_i}\frac{\partial H_i}{\partial a_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i}\frac{\partial \dot{H}_i}{\partial a_i} = -\frac{1}{a_i}H_i\mathcal{L}_i - \frac{1}{a_i}\left(\dot{H}_i - H_i^2\right)\mathcal{L}^i \tag{3.2.11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \dot{a}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i}\frac{\partial \dot{H}_i}{\partial \dot{a}_i} = \frac{1}{a_i}H_i\mathcal{L}_i - \frac{2}{a_i}H_i\mathcal{L}^i \tag{3.2.12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{a}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \ddot{a}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i}\frac{\partial \dot{H}_i}{\partial \ddot{a}_i} = \frac{1}{a_i}\mathcal{L}^i \tag{3.2.13}$$

可以得到稱之為 a_i equation ，也就是另外的場方程，其中 i 取決於 a_i 的下標：

$$\mathcal{L} + \left(\frac{d}{dt} + 3H\right)^2 \mathcal{L}^i - \left(\frac{d}{dt} + 3H\right)\mathcal{L}_i = 0 \tag{3.2.14}$$

其中 $3H \equiv H_1 + H_2 + H_3$ 、 $\mathcal{L}_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_i}$ 、 $\mathcal{L}^i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i}$

3.3 B equation and a_i equation in Bianchi type I space

從 B equation 和 a_i equation :

$$\mathcal{L} + H_i\left(\frac{d}{dt} + 3H\right)\mathcal{L}^i - H_i\mathcal{L}_i - \dot{H}_i\mathcal{L}^i = 0 \tag{3.3.1}$$

$$\mathcal{L} + \left(\frac{d}{dt} + 3H\right)^2\mathcal{L}^i - \left(\frac{d}{dt} + 3H\right)\mathcal{L}_i = 0 \tag{3.3.2}$$

其中 $3H \equiv H_1 + H_2 + H_3$ $\quad \mathcal{L}_i \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial H_i}$ $\quad \mathcal{L}^i \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{H}_i}$

將 B equation 和 a_i equation 寫開 :

$$\mathcal{L} + H_i\left(\frac{d}{dt}\mathcal{L}^i + 3H\mathcal{L}^i\right) - H_i\mathcal{L}_i - \dot{H}_i\mathcal{L}^i = 0 \tag{3.3.3}$$

$$\mathcal{L} + \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{L}^i + 3H\frac{d}{dt}\mathcal{L}^i + \frac{d}{dt}\left(3H\mathcal{L}^i\right) + 9H^2\mathcal{L}^i - \left(\frac{d}{dt}\mathcal{L}_i + 3H\mathcal{L}_i\right) = 0 \tag{3.3.4}$$

列出兩方程式每一部份的 Largrangian density 在 Bianchi type I space 下的量 ， 其中 $i \neq j$ 、腳標的 $i' = 1 \sim 3$:

$$\mathcal{L} = R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu}{}_{\nu}R^{\nu}{}_{\mu} - 2\Lambda \tag{3.3.5}$$

$$\mathcal{L}_i = 2\left(3H + H_i\right) + 4\alpha R\left(3H + H_i\right) + 2\beta\left(2R^0{}_0H_i + R^{i'}{}_{i'}H_{i'} + 9H^2H_i\right) \tag{3.3.6}$$

$$\mathcal{L}^i = 2 + 4\alpha R + 2\beta\left(R^0{}_0 + R^i{}_i\right) \tag{3.3.7}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{L}}_i = {} & 2\left(3\dot{H} + \dot{H}_i\right) + 4\alpha\left(3H\dot{R} + H_i\dot{R} + 3\dot{H}R + \dot{H}_iR\right) + 2\beta(\dot{R}^{i'}_{i'} \\ & H_{i'} + R^{i'}_{i'}\dot{H}_{i'} + 9H^2\dot{H}_i + 2\dot{R}^0_0H_i + 2R^0_0\dot{H}_i + 18H\dot{H}H_i)\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

$$\dot{\mathcal{L}}^i = 4\alpha\dot{R} + 2\beta\left(\dot{R}^0{}_0 + \dot{R}^i{}_i\right) \tag{3.3.9}$$

$$\ddot{\mathcal{L}}^i = 4\alpha\ddot{R} + 2\beta\left(\ddot{R}^0{}_0 + \ddot{R}^i{}_i\right) \tag{3.3.10}$$

把 Largrangian density 的 Ricci tensor 和 scalar curvature 用哈伯 factor 表示：

$$\dot{R} = 2\left(2H_i\dot{H}_i + \ddot{H}_i + \dot{H}_i H_j\right) \tag{3.3.11}$$

$$\ddot{R} = 2\left(2\dot{H}_i^{\,2} + 2H_i\ddot{H}_i + H_i^{(3)} + \ddot{H}_i H_j + \dot{H}_i\dot{H}_j\right) \tag{3.3.12}$$

$$\dot{R}^0{}_0 = 2H_i\dot{H}_i + \ddot{H}_i \tag{3.3.13}$$

$$\ddot{R}^0{}_0 = 2\left(\dot{H}_i^{\,2} + H_i\ddot{H}_i\right) + H_i^{(3)} \tag{3.3.14}$$

$$\dot{R}^i{}_i = 2\left(H_i\dot{H}_i + \dot{H}_i H_j\right) + \ddot{H}_i \tag{3.3.15}$$

$$\ddot{R}^i{}_i = 2\left(\dot{H}_i^{\,2} + H_i\ddot{H}_i + \ddot{H}_i H_j + \dot{H}_i\dot{H}_j\right) + H_i^{(3)} \tag{3.3.16}$$

其中 $3\dot{H} \equiv \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3$。

B equation in Bianchi type I space :

在計算完成後，我們將算好的 B equation 做係數和來源的分類 (無 α、β 項的部份表示未修正的時空張量分量，有 α、β 項的部份表示高階 Ricci 、 scalar 修正重力理論的修正項) :

$$B_0 + \alpha(B^{\alpha}_{-4} + B^{\alpha}_{16} + B^{\alpha}_{8} + B^{\alpha}_{24}) + \beta(B^{\beta}_{-2} + B^{\beta}_{2} + B^{\beta}_{4} + B^{\beta}_{8}) - 2\Lambda = 0 \tag{3.3.17}$$

其中 (i、j、$k = 1 \sim 3$ 和 $i \neq j$):

$$B_0 = H_i H_j$$

$$B^{\alpha}_{-4} = -(2H_i^2 - H_i H_j)(2H_i^2 + H_i H_j) - 4\dot{H}_i^{\,2}$$

$$B^{\alpha}_{16} = 8\dot{H}_i H_j H_k$$

$$B^{\alpha}_{8} = 4\left(2H_i^2 \dot{H}_i + 18\ddot{H}H - \dot{H}_i \dot{H}_j\right)$$

$$B^{\alpha}_{24} = 24 H_i \dot{H}_i H_j$$

$$B^{\beta}_{-2} = -\left(2H_i^2 - H_i H_j\right) H_i^2$$

$$B^{\beta}_{2} = -2\dot{H}_i^{\,2} - \dot{H}_i \dot{H}_j + 2\ddot{H}_i H_j$$

$$B^{\beta}_{4} = 2(2H_i^2 \dot{H}_i + \dot{H}_i H_j H_k + \ddot{H}_i H_i)$$

$$B^{\beta}_{8} = 8 H_i \dot{H}_i H_j$$

a_i equation in Bianchi type I space :

在計算完成後，我們將算好的 a_i equation 做係數和來源的分類 (無 α、β 項的部份表示未修正的時空張量分量，有 α、β 項的部份表示高階 Ricci 、 scalar 修正重力理論的修正項) :

$$\begin{aligned} & a_{i(0)}+\alpha(a^{\alpha}_{i(4)}+a^{\alpha}_{i(8)}+a^{\alpha}_{i(12)}+a^{\alpha}_{i(16)}+a^{\alpha}_{i(20)}+a^{\alpha}_{i(24)}+a^{\alpha}_{i(32)}) \\ & +\beta(a^{\beta}_{i(2)}+a^{\beta}_{i(4)}+a^{\beta}_{i(6)}+a^{\beta}_{i(8)}+a^{\beta}_{i(10)})-2\Lambda=0 \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

其中 (i、j、$k=1\sim 3$ 和 $i\neq j$):

$$a_{i(0)}=2H_j^2+2\dot{H}_j+H_iH_j$$

$$a^{\alpha}_{i(4)}=4\left(H_j^4-H_i^4-H_i^2H_j^2\right)$$

$$a^{\alpha}_{i(8)}=8\left[\begin{array}{l} -H_i^3H_j+H_j^3H_k-H_i^2\dot{H}_i+H_j^2\dot{H}_i-\frac{1}{2}H_i^2H_jH_k \\ +H_iH_j\dot{H}_i+H_iH_j\dot{H}_j+H_iH_j\dot{H}_k+H_i\ddot{H}_j+3H^{(3)} \end{array}\right]$$

$$a^{\alpha}_{i(12)}=12\left(\dot{H}_i^{\,2}+\frac{1}{2}H_j^2H_k^2\right)$$

$$a^{\alpha}_{i(16)}=16\left(\ H_j^2\dot{H}_k+\frac{1}{2}\dot{H}_iH_jH_k+3H\ddot{H}_i+\dot{H}_i\dot{H}_j+H_k\ddot{H}_j\ \right)$$

$$a^{\alpha}_{i(20)}=20\dot{H}_j^{\,2}$$

$$a^{\alpha}_{i(24)}=24\left(H_j^2\dot{H}_j+\frac{1}{2}\dot{H}_j\dot{H}_k+H_j\ddot{H}_j\right)$$

$$a^{\alpha}_{i(32)}=32H_j\dot{H}_jH_k$$

$$a^{\beta}_{i(2)}=2\left[\begin{array}{l} -H_i^4+H_j^4-H_i^3H_j-H_iH_j^3+H_j^3H_k+\frac{1}{2}H_i^2H_jH_k-H_iH_j^2H_k \\ +H_j^2\dot{H}_i+H_i^2\dot{H}_j-H_iH_j\dot{H}_j+H_iH_k\dot{H}_j+H_i\ddot{H}_j+H_j^{(3)} \end{array}\right]$$

$$a^{\beta}_{i(4)}=4\left(\frac{1}{2}H_j^2H_k^2+H_i^{(3)}-H_i^2\dot{H}_i+H_j^2\dot{H}_k+H_j\ddot{H}_k\right)$$

$$a^{\beta}_{i(6)}=6\left(3\dot{H}^2+\dot{H}_i\dot{H}_j+H_j\ddot{H}_j\right)$$

$$a^{\beta}_{i(8)}=8\left(H_j^2\dot{H}_j+3H\ddot{H}_i+\frac{3}{2}\dot{H}H_jH_k\right)$$

$$a^{\beta}_{i(10)}=10H_i\dot{H}_iH_j$$

$$3H^{(3)}=H_1^{(3)}+H_2^{(3)}+H_3^{(3)}$$

$$3\dot{H}^2=\dot{H}_1^2+\dot{H}_2^2+\dot{H}_3^2$$

附錄裡，我們有 B equation 、 a_i equation 的詳細計算；也將 Bianchi type I space 帶入到舊有計算場方程式的方法裡，和 B equation 、 a_i equation 做驗證後，可以證實 B equation 、 a_i equation 確實是場方程式。

3.4 Solutions of field equations

我們假定解的形式為指數常數倍時間次方膨脹，我們暫且稱此為 BH 度規 (不只方便計算，指數常數倍時間次方的設定、引入，就表徵了 B equation 、a_i equation 在 H_i 為常數的樣子，所以解出來的解，表徵了宇宙演化後期的樣子)：

$$a_1 = e^{at} \qquad a_2 = e^{bt} \qquad a_3 = e^{ct}$$

H_i、$\dot{H}_i$、$\ddot{H}_i$、$H_i^{(3)}$ 變成：

$$H_1 = a \qquad H_2 = b \qquad H_3 = c \qquad \dot{H}_i = \ddot{H}_i = H_i^{(3)} = 0$$

再引入 BH 度規後，方程式變成:

B equation：

$$\begin{aligned} &2\,(ab+bc+ca) - 4\alpha(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a^2+b^2+c^2+ab \\ &+bc+ca) - 2\beta\,(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\,(a^2+b^2+c^2) - 2\Lambda = 0 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

$a_1 + a_2 + a_3$ equation：

$$\begin{aligned} &2\,(2a^2+2b^2+2c^2+ab+bc+ca) - 4\alpha\,(-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ca) \\ &(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) - 2\beta\,(-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ca)\,(a^2+ \\ &b^2+c^2) - 6\Lambda = 0 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

為了方便計算，定義：

$$X \equiv a^2+b^2+c^2 \qquad Y \equiv ab+bc+ca$$

B equation：

$$Y + 2\alpha\left(-X^2+Y^2\right) + \beta\left(-X^2+XY\right) = \Lambda \tag{3.4.3}$$

$a_1 + a_2 + a_3$ equation：

$$2X + Y + 2\alpha\,(X-Y)\,(X+Y) + \beta X\,(X-Y) = 3\Lambda \tag{3.4.4}$$

可以解出 $X = \frac{-1-8\alpha\Lambda}{2\beta}$ $\quad Y = \frac{1+8\alpha\Lambda+4\beta\Lambda}{2\beta}$ 這樣一組不均向的解。

(其中另一組解 $X = \Lambda$ 、$Y = \Lambda$ 為 de Sitter space 的解)

3.5 Energy conditions

根據 Wald 的文章，假如能量動量張量符合主能量條件、強能量條件，則演化終期會是一個 de Sitter space ；於是我們接下來將驗證我們的能量動量張量，是不是符合這樣子的條件。

能量動量張量可以表示如下矩陣部份：

$$G^{\mu}_{\ v} + \Lambda g^{\mu}_{\ v} = -\Phi^{\mu}_{\ v} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \tag{3.5.1}$$

其中，強能量條件、主能量條件，等價於：

Strong energy condition： $\rho + P \geq 0 \qquad \rho + p_i \geq 0$

Dominant energy condition： $\rho \geq |P|$

Weak energy condition： $\rho + P \geq 0 \qquad \rho \geq 0$

Null energy condition： $\rho + P \geq 0$

接下來，計算在我們的系統時空下的能量條件，來判定我們的系統時空是否符合。

B **equation** 和 $a_1 + a_2 + a_3$ **equation**：

$$Y + 2\alpha\left(-X^2 + Y^2\right) + \beta\left(-X^2 + XY\right) = \Lambda \tag{3.5.2}$$

$$2X + Y + 2\alpha(X - Y)(X + Y) + \beta X(X - Y) = 3\Lambda \tag{3.5.3}$$

由 $X = \frac{-1-8\alpha\Lambda}{2\beta}$ 、 $Y = \frac{1+8\alpha\Lambda+4\beta\Lambda}{2\beta}$ 我們可以得到:

$$X + Y = 2\Lambda \tag{3.5.4}$$

從 $G^{\mu}_{v} + \Lambda g^{\mu}_{v}$ 我們可以解得：

$$\rho = Y - \Lambda \tag{3.5.5}$$

$$P = -2X - Y + 3\Lambda \tag{3.5.6}$$

Strong energy condition：

$$\rho + P = -2X + 2\Lambda$$

$$= -2X + (X + Y)$$

$$= -X + Y$$

$$= -a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca < 0$$

（算術平均大於幾何平均、$a \neq b \neq c$）

Dominant energy condition：

$$\rho - |P| = Y - \Lambda - |-2X - Y + 3\Lambda|$$

$$= Y - \Lambda - \left|-\tfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \tfrac{1}{2}(ab + bc + ca)\right|$$

$$= Y - \Lambda - \tfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \tfrac{1}{2}(ab + bc + ca)$$

$$= -\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + (ab + bc + ca) < 0$$

（算術平均大於幾何平均、$a \neq b \neq c$）

Weak energy condition：

$$\rho + P = -2X + 2\Lambda$$

$$= -2X + (X + Y)$$

$$= -X + Y$$

$$= -a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca < 0$$

$$\rho = Y - \Lambda$$

$$= ab + bc + ca - \tfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right) < 0$$

（算術平均大於幾何平均、$a \neq b \neq c$）

Null energy condition：

$$\begin{aligned}\rho + P &= -2X + 2\Lambda \\ &= -2X + (X+Y) \\ &= -X + Y \\ &= -a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca < 0\end{aligned}$$

（算術平均大於幾何平均、$a \neq b \neq c$）

Energy conditions 都不滿足；也就是根據 Wald 的文章，不能證實是否是 de Sitter，於是這隱含著宇宙終期有可能是不均向。但，接下來我們將做微擾來檢驗這樣子的說法。

Chapter 4

Perturbation

接下來，我們想要找出 Bianchi type I space 下不穩定的解，於是對 B equation 和 a_i equation 微擾 (共 4 個方程式)。Bianchi identity 告訴我們 a_i equation 中有對稱性，可以省略其中一個方程式，所以我們要微擾的 equation 剩下三個；為了方便計算，我們選用其線性組合，B equation 、 a_1 equation 、 $B+a_1+a_2+a_3$ (trace) equation 來做微擾。

4.1 Perturbation and the set

此節，我們為了得到 B equation 、 a_1 equation 的微擾方程。我們對 Lagrangian 展開後，裡面的 H_i 做擾動，然後取用其一階微擾的方程式，這樣子的計算像是代數上的展開 (附錄有得到 perturbation equations 的步驟) :

首先為了方便計算，我們假定微擾為如下指數形式(BH 的形式) :

$$a_i(t) = e^{A_i(t)}$$

$$\delta A_i \equiv k_i e^{vt}$$

其中，由這樣的設定，座標間的差異可以被 k_i 吸收掉，也是個不均向的微擾；而 v 所代表的是微擾的穩定與否($v>0$ 代表擾動不會隨時間消失，也代表了只要時間夠長，不均向的解就一定有機會掉到這樣子的擾動態，就是不穩定)。

δH_i 微擾 :

$$H_i = \frac{\dot{A}_i e^{A_i}}{e^{A_i}} = \dot{A}_i \quad \Rightarrow \quad \delta H_i = \delta \dot{A}_i = v k_i e^{vt} = v\delta A_i$$

將 B equation 和 a_i equation 裡的哈伯常數換成 :

$$H_i \to H_i + \delta H_i = H_i + v\delta A_i$$

$$\dot{H}_i \to \dot{H}_i + \delta \dot{H}_i = \dot{H}_i + v^2\delta A_i$$

$$\ddot{H}_i \to \ddot{H}_i + \delta \ddot{H}_i = \ddot{H}_i + v^3\delta A_i$$

$$H_i^{(3)} \to H_i^{(3)} + \delta H_i^{(3)} = H_i^{(3)} + v^4\delta A_i$$

我們的步驟分成，將 B equation 做以下微擾、取一階微擾、減去未微擾的部份、用上 BH 度規，展開的部分於附錄之中：

$$H_i \to H_i + v\delta A_i \quad \dot{H}_i \to \dot{H}_i + v^2\delta A_i \quad \ddot{H}_i \to \ddot{H}_i + v^3\delta A_i$$

也就是：

$$D_\mu^{first-order(BH)}\mathcal{L}(X+\delta X) - D_\mu\mathcal{L}(X) = 0 \tag{4.1.1}$$

首先，得出 B perturbation equation：

$$\begin{aligned} &2A + \alpha\left[\ -4\left(B-A\right)\left(B+A\right) - 4C + 16G + 8\left(D+E-F\right) + 24I\ \right] \\ &+\beta[-2\left(B-A\right)B + 2\left(-C-F\right) + 2M + 4\left(D+G+O\right) + 8I] - 2\Lambda = 0 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

其中：

$A = \frac{1}{2}(H_i + v\delta A_i)(H_j + v\delta A_j)$

$B = (H_i + v\delta A_i)^2$

$C = \left(\dot{H}_i + v^2\delta A_i\right)^2$

$D = (H_i + v\delta A_i)^2(\dot{H}_i + v^2\delta A_i)$

$E = \left(\ddot{H}_i + v^3\delta A_i\right)(H_i + v\delta A_i)$

$F = \frac{1}{2}\left(\dot{H}_i + v^2\delta A_i\right)\left(\dot{H}_j + v^2\delta A_j\right)$

$G = \frac{1}{2}\left(\dot{H}_i + v^2\delta A_i\right)(H_j + v\delta A_j)(H_k + v\delta A_k)$

$I = (H_i + v\delta A_i)\left(\dot{H}_i + v^2\delta A_i\right)(H_j + v\delta A_j)$

$M = \left(\ddot{H}_i + v^3\delta A_i\right)(H_j + v\delta A_j)$

$O = \left(\ddot{H}_i + v^3\delta A_i\right)(H_i + v\delta A_i)$

同樣，將 a_i equation 以下處理後，展開的部分於附錄之中：

$$H_i \to H_i + v\delta A_i \quad \dot{H}_i \to \dot{H}_i + v^2\delta A_i \quad \ddot{H}_i \to \ddot{H}_i + v^3\delta A_i \quad H_i^{(3)} \to H_i^{(3)} + v^4\delta A_i$$

得出 a_i perturbation equation：

$$\begin{aligned}
&2P + \alpha[-4\left(Q+R\right)\left(B+A\right) + 8\left(S+T+U\right) + 24\left(\bar{C}+\bar{D}+\bar{E}\right) + 16(X+Y+ \\
&Z+\bar{A}+\bar{B}) + 12V + 20W + 32\bar{F}] + \beta[-2\left(Q+R\right)B + 2\left(\bar{G}+\bar{H}-\bar{I}\right) + 2(\bar{J}+ \\
&\bar{K}+\bar{L}) + 4(\bar{M}-\bar{N}+Y+\bar{E}) + 6\left(C+F+\bar{E}\right) + 8\left(\bar{C}+\bar{A}+\bar{O}\right) + 10H] + 2\Lambda = 0
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

其中：

$P = \left(H_j + v\delta A_j\right)^2 + \left(\dot{H}_j + v^2\delta A_j\right) + \frac{1}{2}\left(H_j + v\delta A_j\right)\left(H_k + v\delta A_k\right)$

$Q = \left(H_i + v\delta A_i\right)^2 - \left(H_j + v\delta A_j\right)^2$

$R = \left(H_i + v\delta A_i\right)\left(H_j + v\delta A_j\right) - \frac{1}{2}\left(H_j + v\delta A_j\right)\left(H_k + v\delta A_k\right)$

$S = \left(\ 3\dot{H} + 3v^2\delta A\ \right)\left(\ H_j + v\delta A_j\ \right)\left(\dot{H}_i + v^2\delta A_i\right)$

$T = \left(H_i + v\delta A_i\right)\left(\ddot{H}_j + v^3\delta A_j\right)$

$U = -\left(\dot{H}_i + v^2\delta A_i\right)\left(H_i + v\delta A_i\right)^2 + \left(\dot{H}_j + v^2\delta A_j\right)\left(H_j + v\delta A_j\right)^2$

$V = \left(\dot{H}_i + v^2\delta A_i\right)^2$

$W = \left(\dot{H}_j + v^2\delta A_j\right)^2$

$X = \frac{1}{2}\left(\dot{H}_i + v^2\delta A_i\right)\left(H_j + v\delta A_j\right)\left(H_k + v\delta A_k\right)$

$Y = \left(H_j + v\delta A_j\right)^2\left(\dot{H}_k + v^2\delta A_k\right)$

$Z = \left(\dot{H}_i + v^2\delta A_i\right)\left(\dot{H}_j + v^2\delta A_j\right)$

$\bar{A} = \left(H_i + v\delta A_i + H_j + v\delta A_j\right)\left(\ddot{H}_i + v^3\delta A_i\right)$

$\bar{B} = \left(H_j + v\delta A_j\right)\left(\ddot{H}_k + v^3\delta A_k\right)$

$\bar{C} = \left(H_j + v\delta A_j\right)^2\left(\dot{H}_j + v^2\delta A_j\right)$

$\bar{D} = \frac{1}{2}\left(\dot{H}_j + v^2\delta A_j\right)\left(\dot{H}_k + v^2\delta A_k\right)$

$\bar{E} = \left(H_j + v\delta A_j\right)\left(\ddot{H}_j + v^3\delta A_j\right)$

$$\bar{F} = (H_j + v\delta A_j)\left(\dot{H}_j + v^2\delta A_j\right)(H_k + v\delta A_k)$$

$$\bar{G} = H_j^{(3)} + v^4\delta A_j$$

$$\bar{H} = (H_i + v\delta A_i)(H_j + v\delta A_j)\left(\dot{H}_k + v^2\delta A_k\right)$$

$$\bar{I} = (H_i + v\delta A_i)(H_j + v\delta A_j)\left(\dot{H}_j + v^2\delta A_j\right)$$

$$\bar{J} = (H_i + v\delta A_i)^2\left(\dot{H}_j + v^2\delta A_j\right)$$

$$\bar{K} = \left(\dot{H}_i + v^2\delta A_i\right)(H_j + v\delta A_j)^2$$

$$\bar{L} = (H_i + v\delta A_i)\left(\ddot{H}_j + v^3\delta A_j\right)$$

$$\bar{M} = H_i^{(3)} + v^4\delta A_i$$

$$\bar{N} = (H_i + v\delta A_i)^2\left(\dot{H}_i + v^2\delta A_i\right)$$

$$\bar{O} = \frac{1}{2}\left(\ 3\dot{H} + 3v^2\delta A\ \right)(H_j + v\delta A_j)(H_k + v\delta A_k)$$

$$3\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 + \delta A_3$$

4.2 First-order perturbation equations for BH metric

接下來，我們取微擾過後的 B perturbation equation、a_{i} perturbation equation 的一階微擾 δA_1、δA_2、δA_3 項；再將 BH 度規 帶入，於是就可以得到 BH 度規下的 first-order B perturbation equation 和 first-order a_{i} perturbation equation (而我們選用的是 $i=1$ 的微擾方程式)。

BH 度規下的 first-order B perturbation equation :

$$B^{p}_{A1}+B^{p}_{A2}+B^{p}_{A3}+\alpha(B^{p\alpha}_{A1}+B^{p\alpha}_{A2}+B^{p\alpha}_{A3})+\beta(B^{p\beta}_{A1}+B^{p\beta}_{A2}+B^{p\beta}_{A3})=0 \tag{4.2.1}$$

其中：

$$B^{p}_{A1}=2v\,(b+c)\,\delta A_1$$

$$B^{p}_{A2}=B^{p}_{A1}\,(a\leftrightarrow b\quad b\leftrightarrow c\quad c\leftrightarrow a)$$

$$B^{p}_{A3}=B^{p}_{A1}\,(a\leftrightarrow c\quad b\leftrightarrow a\quad c\leftrightarrow b)$$

$$B^{p\alpha}_{A1}=\left[\begin{array}{l}8v^3\,(a+b+c)+8v^2\,(a^2+3ab+2bc+3ca)\\-8v\,(2a^3+b^2a-b^2c+c^2a-c^2b-2abc)\end{array}\right]\delta A_1$$

$$B^{p\beta}_{A1}=\left[\begin{array}{l}2v^3\,(2a+b+c)+4v^2\,(a^2+2ab+bc+2ca)-2v(4a^3-\\b^3-c^3-3a^2b-3a^2c+4b^2a-b^2c+4c^2a-c^2b-2abc)\end{array}\right]\delta A_1$$

$$B^{p\alpha}_{A2}=B^{p\alpha}_{A1}\,(a\leftrightarrow b\quad b\leftrightarrow c\quad c\leftrightarrow a)$$

$$B^{p\alpha}_{A3}=B^{p\alpha}_{A1}\,(a\leftrightarrow c\quad b\leftrightarrow a\quad c\leftrightarrow b)$$

$$B^{p\beta}_{A2}=B^{p\beta}_{A1}\,(a\leftrightarrow b\quad b\leftrightarrow c\quad c\leftrightarrow a)$$

$$B^{p\beta}_{A3}=B^{p\beta}_{A1}\,(a\leftrightarrow c\quad b\leftrightarrow a\quad c\leftrightarrow b)$$

BH 度規下的 first-order a_1 perturbation equation：

$$a^{p}_{1(A1)}+a^{p}_{1(A2)}+a^{p}_{1(A3)}+\alpha(a^{p\alpha}_{1(A1)}+a^{p\alpha}_{1(A2)}+a^{p\alpha}_{1(A3)})+\beta(a^{p\beta}_{1(A1)}+a^{p\beta}_{1(A2)}+a^{p\beta}_{1(A3)})=0 \quad (4.2.2)$$

其中：

$$a^{p}_{1(A1)}=0$$

$$a^{p}_{1(A2)}=2v\,(a+b+c)\,\delta A_2$$

$$a^{p}_{1(A3)}=a^{p}_{1(A2)}\,(b\leftrightarrow c)$$

$$a^{p\alpha}_{1(A1)}=\left[\begin{array}{l} 8v^4+16v^3\,(a+b+c)+8v^2(-a^2+b^2+c^2+ab+2b \\ c+ca)+8v\,(-2a^3-b^2a-3ba^2-3ca^2-c^2a-2abc) \end{array}\right]\delta A_1$$

$$a^{p\alpha}_{1(A2)}=\left[\begin{array}{l} 8v^4+8v^3\,(a+3b+2c)+8v^2(ab+3b^2+ca+4bc+ \\ 2c^2)+8v(-a^3-b^2a+2b^3-ca^2+3b^2c+3bc^2+c^3) \end{array}\right]\delta A_2$$

$$a^{p\alpha}_{1(A3)}=a^{p\alpha}_{1(A2)}\,(b\leftrightarrow c)$$

$$a^{p\beta}_{1(A1)}=\left[\begin{array}{l} 4v^4+3v^3\,(a+b+c)+2v^2(-2a^2+5ab+b^2+4bc+c^2+5ca) \\ +2v(-4a^3-b^3-c^3-3a^2b-3a^2c-b^2c+2c^2a-c^2b+2abc) \end{array}\right]\delta A_1$$

$$a^{p\beta}_{1(A2)}=\left[\begin{array}{l} 2v^4+2v^3\,(a+3b+2c)+2v^2(a^2-ab+4b^2+ac+4bc+2c^2) \\ +2v(-a^3-3ab^2+4b^3+a^2c-2abc+3b^2c-c^2a+4c^2b+c^3) \end{array}\right]\delta A_2$$

$$a^{p\beta}_{1(A3)}=a^{p\beta}_{1(A2)}\,(b\leftrightarrow c)$$

如果要得到 **first-order** a_2 **perturbation equation** 只要：

$$a\to b、b\to c、c\to a$$

如果要得到 **first-order** a_3 **perturbation equation** 只要：

$$a\to c、b\to a、c\to b$$

4.3 Perturbation $B + a_1 + a_2 + a_3$ (trace) equation

接下來我們為了方便的取得 trace field equation ，我們採用 [5] Barrow equation (2、3、4)；此方程式來源為直接對 $g^{\mu\nu}$ 變分：

$$G_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{4.3.1}$$

其中：

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \tag{4.3.2}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu\nu} &= 2\alpha R(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}Rg_{\mu\nu}) + (2\alpha+\beta)(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)R \\ &+\beta\Box(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) + 2\beta(R_{\mu\sigma\nu\rho} - \tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}R_{\sigma\rho})R^{\sigma\rho}\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

$B + a_1 + a_2 + a_3$ equation (由[5] Barrow equation (2、3、4) 做 trace 而來) :

$$-R + 2\left(3\alpha+\beta\right)\Box R + 4\Lambda = 0 \tag{4.3.4}$$

對上式微擾：

$$-\delta R + 2\left(3\alpha+\beta\right)\delta\Box R = 0 \tag{4.3.5}$$

其中：

$$\delta R = 4H_i\delta H_i + 2\delta\dot{H}_i + 2H_j\delta H_i \tag{4.3.6}$$

$$\delta\Box R = -2\left[\ H_i\delta\ddot{H}_i + \delta H_i^{(3)} + H_j\delta\ddot{H}_i + 6H\left(2H_i\delta\dot{H}_i + \delta\ddot{H}_i + H_j\delta\dot{H}_i\right)\ \right] \tag{4.3.7}$$

代入$\delta H_i = v\delta A_i \quad \delta\dot{H}_i = v^2\delta A_i \quad \delta\ddot{H}_i = v^3\delta A_i \quad \delta H_i^{(3)} = v^4\delta A_i$

在 BH 度規情形下， $\delta\Box R$ 會變成 :

$$\delta\Box R = -v\left(v+a+b+c\right)\delta R \tag{4.3.8}$$

整理出 perturbation $B + a_1 + a_2 + a_3$ (trace) equation :

$$\left[-1 - 2\left(3\alpha+\beta\right)v\left(v+a+b+c\right)\right]\delta R = 0 \tag{4.3.9}$$

上式可以看出$-1-2\left(3\alpha+\beta\right)v\left(v+a+b+c\right)=0$ 或 $\delta R=0$。

由 $-1-2\left(3\alpha+\beta\right)v\left(v+a+b+c\right)=0$ 先解出 2 個 v ($v=\frac{-a-b-c\pm\sqrt{(a+b+c)^2-\frac{2}{(3\alpha+\beta)}}}{2}$)，簡化了計算；之後我們所用的 trace equation 就用 $\delta R=0$ 代替即可。

為了下節記算方便，我們將 $\delta R=0$ 寫成：

$$\delta R = R^p_{A1} + R^p_{A2} + R^p_{A3} = 0 \tag{4.3.10}$$

其中：

$$R^p_{A1} = 2(v^2 + 2av + bv + cv)\delta A_1$$

$$R^p_{A2} = 2(v^2 + av + 2bv + cv)\delta A_2$$

$$R^p_{A3} = 2(v^2 + av + bv + 2cv)\delta A_3$$

4.4 Solve perturbation equations

由上幾節，我們得到了 B perturbation equation 、 a_i perturbation equation 、perturbation trace equation (用 $\delta R = 0$ 代表即可)：

First-order B perturbation equation :

$$B^p_{A1} + B^p_{A2} + B^p_{A3} + \alpha(B^{p\alpha}_{A1} + B^{p\alpha}_{A2} + B^{p\alpha}_{A3}) + \beta(B^{p\beta}_{A1} + B^{p\beta}_{A2} + B^{p\beta}_{A3}) = 0 \tag{4.4.1}$$

First-order a_1 perturbation equation :

$$a^p_{1(A1)} + a^p_{1(A2)} + a^p_{1(A3)} + \alpha(a^{p\alpha}_{1(A1)} + a^{p\alpha}_{1(A2)} + a^{p\alpha}_{1(A3)}) + \beta(a^{p\beta}_{1(A1)} + a^{p\beta}_{1(A2)} + a^{p\beta}_{1(A3)}) = 0 \tag{4.4.2}$$

Perturbation trace equation :

$$\delta R = R^p_{A1} + R^p_{A2} + R^p_{A3} = 0 \tag{4.4.3}$$

這三式，也是我們選擇要解的聯立方程式；到此，我們可以先預測要解的 v 的數目，B perturbation equation 是 v 三次方程式、a_1 perturbation equation 是 v 四次方程式、$\delta R = 0$ 是 v 二次方程式，所以剩下總共應該有 9 組解。

接下來為了簡化計算，我們將 $B^p_{A1} + B^p_{A2} + B^p_{A3}$ 、 $a^p_{1(A1)} + a^p_{1(A2)} + a^p_{1(A3)}$ 乘上 $f_{\alpha\beta} \equiv -4\alpha\left(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca\right) - 2\beta\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 1$，這項式子可以從 $X + Y$ 得到，也是 BH 解的限制。

要解的為三個聯立方程式：

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_4 & F_5 & F_6 \\ F_7 & F_8 & F_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A_1 \\ \delta A_2 \\ \delta A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.4.4}$$

其中：

$$F_1 = B^p_{A1} f_{\alpha\beta} + \alpha B^{p\alpha}_{A1} + \beta B^{p\beta}_{A1}$$

$$F_2 = B^p_{A2} f_{\alpha\beta} + \alpha B^{p\alpha}_{A2} + \beta B^{p\beta}_{A2}$$

$$F_3 = B^p_{A3} f_{\alpha\beta} + \alpha B^{p\alpha}_{A3} + \beta B^{p\beta}_{A3}$$

$$F_4 = a^p_{1(A1)} f_{\alpha\beta} + \alpha a^{p\alpha}_{1(A1)} + \beta a^{p\beta}_{1(A1)}$$

$$F_5 = a^p_{1(A2)} f_{\alpha\beta} + \alpha a^{p\alpha}_{1(A2)} + \beta a^{p\beta}_{1(A2)}$$

$F_6 = a^p_{1(A3)} f_{\alpha\beta} + \alpha a^{p\alpha}_{1(A3)} + \beta a^{p\beta}_{1(A3)}$

$F_7 = R^p_{A1}$

$F_8 = R^p_{A2}$

$F_9 = R^p_{A3}$

因為我們假定的微擾形式 δA_1、δA_2、δA_3 不為零，為零的話就沒有微擾，於是 $det\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_4 & F_5 & F_6 \\ F_7 & F_8 & F_9 \end{pmatrix} = 0$ 是唯一的條件，可以解得所有 v 值：

$v = 0$ (四重根) 沒有微擾

$v = -a - b - c$ (三重根) 其中 $0 = ak_1 + bk_2 + ck_3$

$v = -\frac{1}{2}\left(a + b + c \pm \sqrt{9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6ab - 6bc - 6ca}\right)$

其中，

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{-\left(2a^2 - 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc + 2ca + av - 2bv + cv\right)}{2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2ab - 2bc + 2ca + 2av - bv + cv}$$

$$\frac{k_3}{k_1} = \frac{-\left(2a^2 + 2b^2 - 2c^2 + 2ab - 2bc - 2ca + av + bv - 2cv\right)}{2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2ab - 2bc + 2ca + 2av - bv + cv}$$

可以看出 k_1 是我們可以調控的因素，值得一提的是，$\frac{k_2}{k_1}$ 裡的很多項，都跟 $\frac{k_3}{k_1}$ 裡的項，差一個負號，可以理解為假使某方向變大比較快的話，會有一個自然的機制讓它慢下來，讓另外的方向變大。

為了確認不穩定解，我們可以從不等式：

$$4(a-b)^2 + 4(b-c)^2 + 4(c-a)^2 = \left(9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6ab - 6bc - 6ca\right) - (a+b+c)^2 > 0 \tag{4.4.5}$$

於是，

$$\sqrt{9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6ab - 6bc - 6ca} > a + b + c \tag{4.4.6}$$

$$a + b + c - \sqrt{9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6ab - 6bc - 6ca} < 0 \tag{4.4.7}$$

得到 $v = -\frac{1}{2}\left(a + b + c - \sqrt{9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6ab - 6bc - 6ca}\right) > 0$ 是我們要的不穩定解。

Chapter 5

Conclusions

帶有正宇宙常數的 Einstein 模型宇宙演化最後一定會是 de Sitter space ，一個均勻、均向的空間。甚至，在 Bianchi space 下，帶有正宇宙常數的 Einstein 模型宇宙演化也會如此。但是，帶有正宇宙常數的 Einstein 模型宇宙在小尺度下必須做修正，於是宇宙學家導入了曲率的高次項來修正宇宙模型，並發現宇宙演化最後有可能會產生不同以往相信的結果，一個終期不均向的宇宙。

我們對此事做了檢驗，證實這樣的一個不均向的解是處在一個不穩定的狀態，終期均向的宇宙還是較有可能發生。我們從 假設宇宙初期處在一個均勻、不均向的空間裡頭，選用了 Bianchi type I space ，導入了高次項重力模型，解出了 de Sitter 的解和非 de Sitter 的解，再給予微擾，最後證實將此宇宙模型微擾的不均向的解是不穩定的。在這裡提一下，不均向解的不穩定態也已經另外有宇宙學家找出，不過與我們採用的方法不同。

我們的計算流程:

(i) 用一個與模型無關的方法，得到場方程式(此場方程式符合舊有的方法取得的場方程式)，而 BH 的解會符合此方法的場方程式。

(ii) 非均向的微擾可以直接在此場方程式上被執行，而我們可以得到與模型無關的微擾、線性次數的方程式。

(iii)在 BH 度規下的微擾方程式，可以直接地被取得，它們以多項式的方式被呈現。

(iv)最後我們找到了不穩定的模式，所以，BH 的解在非均向微擾下是不穩定的。

一般來說，想要得到能量動量張量且取得時空的度規(尤其是高階曲率修正的 Largrangian)，是有一定的複雜度的。但，我們在 Bianchi type I space 下，使用了一個與模型無關的方法，可以以較低的難度得到場方程式(代數多項式方程)，也找到了非 de Sitter 的解。然後更進一步的，去證實解之中擁有不穩定態。這種方法不僅快速且有效，更正確的說法是可以將原有的計算複雜度移轉(共變微分換成一般偏微分)(也許會較多代數項要算，但此複雜度可交予電腦，這種方法的計算也較簡單用程式表達出)。除此之外，它與模型無關的特性，也可以使計算者不用針對不同的模型，來找不同的能量動量張量。

我們找到了不穩定態，雖然還不能完全的否決掉宇宙會在演化終期不均向(某些宇宙學家的看法)，但是至少提供了一向支持給宇宙朝向 de Sitter 這一方。所以整篇研究的結果為，我們找到了 de Sitter 解和非 de Sitter 的解，而又證明了非 de Sitter 的解是不穩定的，在一切自然界事物都會朝向於穩定這個想法下，宇宙演化終期是 de Sitter 這個說法，較能使人相信。

附錄 A

A.1 Derive the introduction

我們確信宇宙有一個短暫的加速膨脹時期，而這些膨脹的來源，我們可以說是從有常數位能的純量場而來，也可以說是從自然界存在的純重力的高次項模型而來。因此，研究在這些模型下的宇宙是否加速和漸近的趨近於 de Sitter 度規就是一個重要的課題。而這個課題我們將先跟著 Robet M. Wald 從一個尚未修正的宇宙模型來探討。

首先我們要了解，為何在演化早期擁有暴漲機制的宇宙，不太需要嚴格的初始條件，就能演化到我們現存的宇宙。大部分關於宇宙模型的研究，都是假設在 Friedmann-Robertson-Walker symmetry (均勻、均向)下進行。有人在 supercooled 時期(相轉變時期)(隨着膨脹和冷卻，宇宙物質經歷了相變，這種相變與蒸氣冷卻時的凝結過程和水的凝固過程相似，不同之處在於其發生在更基本的粒子層面上)，指數膨脹發生的情況下，發現了暴漲會造成宇宙視界急遽增加。當 false vacuum 給出了量子場主控的 stress energy ，也在動力學方程上產生了一個很大的宇宙常數Λ。這種 Friedmann-Robertson-Walker 度規下的視界增加，意味著宇宙可能被交互作用均勻、均向，也隱含著現存的宇宙不用太過嚴格的初始條件。

事實上我們不知非 Friedmann-Robertson-Walker 初始條件的宇宙將會有暴漲，也不知暴漲發生下，非均勻、非均向將被拉平。我們能做的就只是從一個非均勻、非均向的宇宙模型出發，來看它隨時間的演化。

再一次強調，我們要討論的不是非 Friedmann-Robertson-Walker 的宇宙模型是否會發生暴漲，而是在已經有暴漲的前提下，非 Friedmann-Robertson-Walker 的宇宙是否會被拉平。這部份有宇宙學家提出了一個猜想，所有在正宇宙常數下的膨脹宇宙模型，將漸近的趨向於 de Sitter 時空。我們要做的就是驗證這個猜想，我們將從除了 type IX 的 Bianchi 時空下的宇宙模型出發，在指數膨脹的情況下，宇宙會趨向於演化成 de Sitter 時空。而 type IX 的 Bianchi 時空下的宇宙模型，在宇宙常數 Λ 夠大下也會是如此，但我們不多做介紹。我們最後的結果，將會支持宇宙演化終期回到 de Sitter 時空的猜想。

要考慮 Bianchi 宇宙的動力學演化，可經由 Einstein 方程：

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + 8\pi T_{ab} \tag{A.1.1}$$

G_{ab} 是描述時空結構的幾何張量， T_{ab} 是描述物質分佈的能量動量張量。其中 T_{ab} 項，是由 nonvacuum 在暴漲時的貢獻而來，除了必須符合主能量條件和強能量條件外，沒有太多其它假設。

主能量條件，對所有 timelike t^a，且 $T_{ab}t^b$ 是 timelike 或 null，$T_{ab}t^a t^b \geq 0$。相對於強能量條件，則是 $(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T)t^a t^b \geq 0$。

接下來我們由 Einstein 場方程作用 $n^a n^b$ 得到，初始值限制方程：

$$0 = G_{ab} n^a n^b - \Lambda - 8\pi T_{ab} n^a n^b \tag{A.1.2}$$

其中，n^a 是超曲面上的單位法向量，符合：

$$n^a n_a = -1 \tag{A.1.3}$$

由 trace (A.1.1) $-R = -4\Lambda + 8T$ 代入到 (A.1.2)：

$$0 = R_{ab} n^a n^b + \Lambda - 8\pi (T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T) n^a n^b \tag{A.1.4}$$

$G_{ab} n^a n^b$ 和 $R_{ab} n^a n^b$ 可以被均勻超曲面的三維幾何和此曲面上的外曲率 K_{ab} 表示(描述此曲面上不同點法向量的變化，描述所嵌入的外部時空流形的彎曲方式)(因為均勻性的關係，超曲面上每一個事件處都有同樣的密度及壓強，spacetime 曲率也會如此)。首先為了方便，我們分解 K_{ab} 成其 trace K 和 trace-free σ_{ab} 兩部份，

$$K_{ab} = \frac{1}{3} K h_{ab} + \sigma_{ab} \tag{A.1.5}$$

其中，$K \equiv K_{ab} h^{ab}$

h_{ab} 是空間度規，$h_{ab} \equiv g_{ab} + n_a n_b$， h^{ab} 是其 inverse， σ_{ab} 是與類時幾合正交的均勻超平面的 shear (就是其矩陣 h_{ab} 的非對角項)(描述測地線束的空間截面在體積不變下產生形變的趨勢)。

接下來我們要從初始值限制方程和 Raychaudhuri 方程得到均於超曲面上的 K 和 $\dot{K}$ (在普通力學中，要解決一個動力學問題，往往需要給定所謂的初始條件，即一組動力學變量及其時間導數在初始時刻的空間分佈。廣義相對論動力學中的初值問題，指的就是給定一個類空超曲面 Σ 及其上滿足約束條件的 h_{ij}、 K_{ij} 及物質分佈，求解 h_{ij} 和 K_{ij} 在整個時空流形上的分佈)。由上式可得，

$$R_{abcd} h^{ac} h^{bd} = R_{abcd} (g^{ac} + n^a n^c)(g^{bd} + n^b n^d) = R + 2R_{ac} n^a n^c = 2G_{ac} n^a n^c \tag{A.1.6}$$

再由方程式 (A.1.2) 、 (A.1.6)：

$$G_{ab} n^a n^b = \Lambda + 8\pi T_{ab} n^a n^b = \frac{1}{2}(R + 2R_{ac} n^a n^c) \tag{A.1.7}$$

用上 Gauss-Codacci 方程式：

$$^{(3)}R_{abc}{}^{d} = h_a{}^{f} h_b{}^{g} h_c{}^{k} h^{d}_{j} R_{fgk}{}^{j} - K_{ac} K_b{}^{d} + K_{bc} K_a{}^{d} \tag{A.1.8}$$

假設 $b = d$，

$$
\begin{aligned}
^{(3)}R_{abc}{}^{b} =& ^{(3)}R_{ac} \\
=& h_a{}^{f} h_b{}^{g} h_c{}^{k} h^{d}_{j} R_{fgk}{}^{j} - K_{ac} K + K_{bc} K_a{}^{b} \\
=& h_a{}^{f} (g_b{}^{g} + n_b n^{g}) h_c{}^{k} (g^{b}_{j} + n^{b} n_j) R_{fgk}{}^{j} - K_{ac} K + K_{bc} K_a{}^{b} \\
=& h_a{}^{f} h_c{}^{k} (R_{fbk}{}^{b} + R_{fbk}{}^{j} n^{b} n_j + R_{fgk}{}^{b} n^{b} n_g - R_{fgk}{}^{j} n^{g} n_j) - K_{ac} K + K_{bc} K_a{}^{b} \\
=& h_a{}^{f} h_c{}^{k} (R_{fbk}{}^{b} + R_{fbk}{}^{j} n^{b} n_j) - K_{ac} K + K_{bc} K_a{}^{b} \\
=& (g_a{}^{f} + n_a n^{f})(g_c{}^{k} + n_c n^{k})(R_{fk} + R_{fbk}{}^{j} n^{b} n_j) - K_{ac} K + K_{bc} K_a{}^{b} \\
=& R_{ac} + R_{ak} n_c n^{k} + R_{fc} n_a n^{f} + R_{fk} n_a n^{f} n_c n^{k} + R_{abc}{}^{j} n^{b} n_j \\
&+ (R_{abk}{}^{j} n_c n^{k} n^{b} n_j + 2 R_{fbc}{}^{j} n_a n^{f} n^{b} n_j) - K_{ac} K + K_{bc} K_a{}^{b}
\end{aligned} \tag{A.1.9}
$$

(A.1.9) 同乘 g^{ac} 得到，

$$^{(3)}R_{ac} g^{ac} = {}^{(3)}R = R + 2 R_{ak} n^{a} n^{k} - K^{2} + K_b{}^{a} K_a{}^{b} \tag{A.1.10}$$

(A.1.10) 改寫成：

$$R + 2 R_{ak} n^{a} n^{k} = {}^{(3)}R + K^{2} - K_b{}^{a} K_a{}^{b} \tag{A.1.11}$$

(A.1.11) 代入 (A.1.7)，

$$2 G_{ac} n^{a} n^{c} = {}^{(3)}R_{ac} + K^{2} - K_{ab} K^{ab} \tag{A.1.12}$$

由 (A.1.12) 再用上方程式 (A.1.2)，

$$K^2 = 2\Lambda + 16\pi T_{ab}n^a n^b + K_{ab}K^{ab} - {}^{(3)}R$$

$$= 2\Lambda + 16\pi T_{ab}n^a n^b + (\frac{1}{3}Kh_{ab} + \sigma_{ab})(\frac{1}{3}Kh^{ab} + \sigma^{ab}) - {}^{(3)}R \qquad \text{(A.1.13)}$$

其中 $h_{ab}h^{ab} = 3$ 和 $\sigma_{ab}h^{ab} = 0$ 得到 K^2，

$$K^2 = 3\Lambda + \frac{3}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab} - \frac{3}{2}{}^{(3)}R + 24\pi T_{ab}n^a n^b \qquad \text{(A.1.14)}$$

$\dot{K}$ 的計算可由 Raychaudhuri 方程 $\dot{K} = -\frac{1}{3}K^2 - \sigma^{ca}\sigma_{ca} + \omega^{ca}\omega_{ca} - R_{cd}n^c n^d$ 和 (A.1.4) 得出。

其中，Raychaudhuri 方程是 expansion scalar θ 隨 proper time 的變化 (expansion scalar θ 描述測地線匯集或發散的趨勢)(在我們本篇中，所討論的宇宙情況是 $\theta = K$)。

$$\dot{K} = \Lambda - \frac{1}{3}K^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - 8\pi(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T)n^a n^b \qquad \text{(A.1.15)}$$

${}^{(3)}R$ 是均勻超平面的純量曲率，$\dot{K}$ 是 K 對 proper time 的微分(沿著宇宙學流體的世界線)。 ${}^{(3)}R$ 可由空間對稱群的李代數的結構常數張量 $C^a_{\ bc}$ 給定，如下式：

$${}^{(3)}R = -C^a_{\ ab}C^{c\ b}_{\ c} + \frac{1}{2}C^a_{\ bc}C^{c\ b}_{\ a} - \frac{1}{4}C_{abc}C^{abc} \qquad \text{(A.1.16)}$$

接下來把 ${}^{(3)}R$ 用另外的形式表示。我們從其反對稱的性質 $C^c_{\ ab} = -C^c_{\ ba}$ 將 $C^c_{\ ab}$ 表示成：

$$C^c_{\ ab} = M^{cd}\epsilon_{dab} + \delta^c_{\ [a}A_{b]} \qquad \text{(A.1.17)}$$

其中 $A_a \equiv C^b_{\ ba}$、$M^{ab} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{acd}(C^b_{\ cd} - \delta^b_{\ c}A_d)$ 且 $M^{cd} = M^{dc}$ 、 $M^{ab}A_b = 0$ 。於是，可以用張量 M^{ab} 和 dual vector A_a 來計算。

將方程式 (A.1.17) 代入方程式 (A.1.16) ，我們得到 ${}^{(3)}R$:

$$
\begin{aligned}
{}^{(3)}R =& - C^{a}_{\ ab}C^{c\ b}_{\ c} + \frac{1}{2}C^{a}_{\ bc}C^{c\ b}_{\ a} - \frac{1}{4}C_{abc}C^{abc} \\
=& - A_bA^b + \frac{1}{2}(M^{ad}\epsilon_{dbc} + \delta^{a}{}_{[b}A_{c]})(M^{cf}\epsilon_{fa}^{\ \ b} + \delta^{c}{}_{[a}A^{b]}) \\
& - \frac{1}{4}(M_a^{\ d}\epsilon_{dbc} + \delta_{a[b}A_{c]})(M^{af}\epsilon_f^{\ bc} + \delta^{a[b}A^{c]}) \\
=& - A_bA^b + (\frac{1}{2}M^{ad}M^{cf}\epsilon_{dbc}\epsilon_{fa}^{\ \ b} - \frac{1}{4}M_a^{\ d}M^{af}\epsilon_{dbc}\epsilon_f^{\ bc}) \\
& + (\frac{1}{2}\delta^{a}{}_{[b}A_{c]}\delta^{c}{}_{[a}A^{b]} - \frac{1}{4}\delta_{a[b}A_{c]}\delta^{a[b}A^{c]}) \\
& + (\frac{1}{2}M^{ad}\epsilon_{dbc}\delta^{c}{}_{[a}A^{b]} + \frac{1}{2}M^{cf}\epsilon_{fa}^{\ \ b}\delta^{a}{}_{[b}A_{c]} - \frac{1}{4}M_a^{\ d}\epsilon_{dbc}\delta^{a[b}A_{c]} - \frac{1}{4}M^{af}\epsilon_f^{\ bc}\delta_{a[b}A_{c]}) \\
=& - A_bA^b + (A) + (B) + (C)
\end{aligned}
$$

其中 (A)、(B)、(C) 為:

$$
\begin{aligned}
(A) =& \frac{1}{2}M^{ad}M^{cf}\epsilon_{dbc}\epsilon_{fa}^{\ \ b} - \frac{1}{4}M_a^{\ d}M^{af}\epsilon_{dbc}\epsilon_f^{\ bc} \\
=& \frac{1}{2}M^{ad}M^{cf}(-\delta_{df}\delta_{ca} + \delta_{da}\delta_{cf}) - \frac{1}{4}M_a^{\ d}M^{af}(2\delta_{df}) \\
=& \frac{1}{2}(-M^{ad}M_{ad} + M^{a}_{\ a}M^{c}_{\ c}) - \frac{1}{2}M_{af}M^{af} \\
=& - M^{ad}M_{ad} + \frac{1}{2}(M^{a}_{\ a})^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(B) =& \frac{1}{2}\delta^{a}{}_{[b}A_{c]}\delta^{c}{}_{[a}A^{b]} - \frac{1}{4}\delta_{a[b}A_{c]}\delta^{a[b}A^{c]} \\
=& \frac{1}{8}(\delta^{a}_{\ b}A_c - \delta^{a}_{\ c}A_b)(\delta^{c}_{\ a}A^b - \delta^{c}_{\ b}A^a) - \frac{1}{16}(\delta_{ab}A_c - \delta_{ac}A_b)(\delta^{ab}A^c - \delta^{ac}A^b) \\
=& \frac{1}{8}\left(\begin{array}{l} A_aA^a - A_bA^b - \delta^{a}_{\ a}A_bA^b + A_aA^a - \frac{1}{2}\delta^{a}_{\ a} \\ A_cA^c + \frac{1}{2}A_aA^a + \frac{1}{2}A_aA^a - \frac{1}{2}\delta^{c}_{\ c}A_bA^b \end{array} \right) \\
=& -\frac{1}{2}A_aA^a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(C) =& \frac{1}{4}[M^{ad}\epsilon_{dbc}(\delta^{c}_{\ a}A^b - \delta^{c}_{\ b}A^a) + M^{cf}\epsilon_{fa}{}^{b}(\delta^{a}_{\ b}A_c - \delta^{a}_{\ c}A_b)] \\
& - \frac{1}{8}[M_a{}^{d}\epsilon_{dbc}(\delta^{ab}A_c - \delta^{ac}A_b) + M^{af}\epsilon_f{}^{bc}(\delta_{ab}A_c - \delta_{ac}A_b)] \\
=& \frac{1}{4}(M^{ad}\epsilon_{dba}A^b - M^{ad}\epsilon_{dbb}A^a M^{cf}\epsilon_{fa}{}^{a}A_c - M^{cf}\epsilon_{fc}{}^{b}A_b) \\
& - \frac{1}{8}(M_a{}^{d}\epsilon_{dac}A_c - M_a{}^{d}\epsilon_{dba}A_b + M^{af}\epsilon_f{}^{ac}A_c - M^{af}\epsilon_f{}^{ba}A_b) \\
=& (\text{對稱})(\text{反對稱}) = 0
\end{aligned}
$$

最後得到，

$$^{(3)}R = -\frac{3}{2}A_bA^b - (M_{ab}M^{ab} - \frac{1}{2}M^2) \tag{A.1.18}$$

如果要 $^{(3)}R$ 是正數，則必須遵守 $M_{ab}M^{ab} < \frac{1}{2}M^2$。然而，經由 M_{ab} 的計算，只有 type IX 才會符合 $M_{ab}M^{ab} < \frac{1}{2}M^2$。因此，除 type IX 之外，所有的 Bianchi 模型，我們有：

$$^{(3)}R \leq 0 \tag{A.1.19}$$

現在我們來考慮非 type IX 的 Bianchi 模型。將主能量條件、強能量條件、不等式 (A.1.19) 用於 K^2 、 $\dot{K}$ ，先由方程式 $K^2 = 3\Lambda + \frac{3}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab} - \frac{3}{2}{}^{(3)}R + 24\pi T_{ab}n^an^b$ 得出下式：

$$\frac{3}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab} = K^2 - 3\Lambda + \frac{3}{2}{}^{(3)}R - 24\pi T_{ab}n^an^b \leq K^2 - 3\Lambda \tag{A.1.20}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sigma_{ab}\sigma^{ab} \leq \frac{2}{3}(K^2 - 3\Lambda) \tag{A.1.21}$$

$$\dot{K} = \Lambda - \frac{1}{3}K^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - 8\pi(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T)n^an^b \leq \Lambda - \frac{1}{3}K^2 \leq 0 \tag{A.1.22}$$

$$\dot{K} \leq \Lambda - \frac{1}{3}K^2 \leq 0 \tag{A.1.23}$$

由 $K^2 \geq 3\Lambda$ 可以看出 K 在演化的過程中，不會經過零。也就是 K 在某時間是大於零，則一直大於零下去(某時間的宇宙是膨脹，則會一直膨脹下去)。也就是：

$$K \geq (3\Lambda)^{\frac{1}{2}} \tag{A.1.24}$$

然而，方程式 (A.1.23) 也隱含了：

$$\frac{1}{K^2 - 3\Lambda}\frac{dK}{d\tau} \leq -\frac{1}{3} \tag{A.1.25}$$

對這個不等式積分，我們可以得到

$$K \leq \frac{(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}}{\tanh(\frac{\tau}{\alpha})} \tag{A.1.26}$$

其中，$\alpha \equiv (\frac{3}{\Lambda})^{\frac{1}{2}}$

$$(3\Lambda)^{\frac{1}{2}} \leq K \leq \frac{(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}}{\tanh(\frac{\tau}{\alpha})}$$

$$0 \leq \sigma^{ab}\sigma_{ab} \leq \frac{2\Lambda}{\sinh^2(\frac{\tau}{\alpha})}$$

$$0 \leq T_{ab}n^a n^b \leq \frac{\Lambda}{8\pi}\frac{1}{\sinh^2(\frac{\tau}{\alpha})}$$

$${}^{(3)}R \to 0$$

於是， K 值將介於下限 $(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$ 和時間尺度 α 以指數接近於 $(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$ 的上限 $\frac{(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}}{\tanh(\frac{\tau}{\alpha})}$ 這個小區間內。於是，我們發現 K 值將快速的接近 $(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$ 。回到 K^2 ，我們從方程式 (A.1.21)、 (A.1.26) 得到：

$$0 \leq \sigma^{ab}\sigma_{ab} \leq \frac{2}{3}(K^2 - 3\Lambda) \leq \frac{2\Lambda}{\sinh^2(\frac{\tau}{\alpha})} \tag{A.1.27}$$

由上式也可以看出均勻超曲面的 shear 會快速的接近於零。相同地，方程式 (A.1.14) 和方程式 (A.1.26) 也隱含了物質能量密度被限制：

$$T_{ab}n^a n^b = \frac{1}{8\pi}(\frac{1}{3}K^2 - \Lambda - \frac{1}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab} + \frac{1}{2}{}^{(3)}R) \leq \frac{1}{8\pi}(\frac{1}{3}K^2 - \Lambda) \leq \frac{\Lambda}{8\pi}\frac{1}{\sinh^2(\frac{\tau}{\alpha})} \tag{A.1.28}$$

$$T_{ab}n^a n^b \leq \frac{\Lambda}{8\pi}\frac{1}{\sinh^2(\frac{\tau}{\alpha})} \tag{A.1.29}$$

於是由 $\sinh^2(\frac{\tau}{\alpha})$ 可以看出，所有的 $T_{ab}n^a n^b$ 將快速的接近於零。

$$T_{ab} \to 0$$

$$\sigma_{ab} \to 0$$

$$K \to (3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$$

最後，當 $\sigma_{ab} \to 0$ 時 $K \to (3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$ ，這件事隱含著與時間有關的空間度規在演化終期將會近似於：

$$
\begin{aligned}
K_{ab} \equiv & \frac{1}{2}\frac{\partial h_{ab}}{\partial \tau} \\
= & \frac{1}{3}Kh_{ab} + \sigma_{ab} \\
\rightarrow & \frac{1}{3}(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}h_{ab}
\end{aligned}
$$

$$
h_{ab}(\tau) = e^{\frac{2(\tau-\tau_0)}{\alpha}}h_{ab}(\tau_0) \tag{A.1.30}
$$

這是一個按比例增加的的度規。然而，卻導致空間曲率 ${}^{(3)}R_{ab}$ 將趨向於零。於是我們結論出：初始膨脹非 type IX 的 Bianchi 宇宙，在演化時間 $\tau \gg \alpha$ 情況下，其空間上，將會趨向於以常數膨脹率 $K = (3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$ 均向地膨脹成一個平坦的空間(按比例增加的度規，卻能導致空間平滑，可見各方向已經均向)。也就是接近於 de Sitter 時空。再一次強調，宇宙在演化終期不必是 de Sitter ，但我們卻得到是 de Sitter 的結論。

A.2 Field equation

$$S = -\int d^4x \sqrt{g}\mathcal{L} \tag{A.2.1}$$

其中 $g = -det\, g_{\mu\nu}$、$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\epsilon\phi^2 R + \frac{1}{2}\partial_a\partial^a\phi + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$

$$\delta S = -\int d^4x \left[\begin{array}{l} +\delta\sqrt{g}\left[\frac{1}{2}\epsilon\phi^2 R + \frac{1}{2}\partial_a\partial^a\phi + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \right] \\ + \sqrt{g}\left[\begin{array}{l} -\epsilon\phi R\delta\phi + \phi^2 R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \phi^2 g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ +\partial_a\phi\partial^a\delta\phi + 2\alpha R\left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right) \\ +\beta\left(R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta R^{\mu\nu}\right) + \delta\left(\partial_a\phi\partial^a\phi\right) \end{array}\right] \end{array}\right]$$

其中 $\delta\left(\partial_a\phi\partial^a\phi\right) = \left(\delta\partial_a\phi\right)\left(\partial^a\phi - \partial_a\phi\right) = 2\left(\delta\partial_a\phi\right)\left(\partial^a\phi\right)$、$\delta\sqrt{g} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$

$$= -\int d^4x \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{4}\epsilon\phi^2 R\sqrt{g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\alpha\sqrt{g}g_{\mu\nu}R^2\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\beta R_{\sigma\rho}R^{\sigma\rho} \\ \sqrt{g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sqrt{g}g_{\mu\nu}\partial_a\phi\partial^a\phi\delta g^{\mu\nu} + \epsilon\phi\sqrt{g}R\delta\phi \\ +\frac{1}{2}\epsilon\sqrt{g}\phi^2 R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon\sqrt{g}\left(R_{\mu\nu}\Box\phi^2 - \nabla_\mu\nabla^\nu\phi^2\right)\delta g^{\mu\nu} \\ +2\alpha\sqrt{g}RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + 2\alpha\sqrt{g}\left(g_{\mu\nu}\Box R - \nabla_\mu\nabla_\nu R\right)\delta g^{\mu\nu} \\ +\beta\left(R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta R^{\mu\nu}\right) - \partial_a\left(\sqrt{g}\partial^a\phi\right)\delta\phi \end{array}\right] = 0 \tag{A.2.2}$$

其中 $-\partial_a\left(\sqrt{g}\partial^a\phi\right)\delta\phi = -\sqrt{g}D_a\partial^a\phi\delta\phi$

$\epsilon\phi R - D_a\partial^a\phi = 0 \rightarrow$ 對 ϕ 變分

由 $R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=\delta g^{\mu\nu}\left(-\nabla_a\nabla_\nu R^a_{\ \mu}+\frac{1}{2}\Box R_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_a\nabla_b R^{ab}\right)$

得出 field equation：

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\epsilon\phi^2 R_{\mu\nu}-\tfrac{1}{4}\epsilon\phi^2 R g_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}\alpha g_{\mu\nu}R^2-\tfrac{1}{2}\beta R_{\sigma\rho}R^{\sigma\rho}g_{\mu\nu}-\tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}\partial_a\phi\partial^a\phi\\
&+\tfrac{1}{2}\epsilon\left(R_{\mu\nu}\Box\phi^2-\nabla_\mu\nabla^\nu\phi^2\right)+2\alpha\left(RR_{\mu\nu}+g_{\mu\nu}\Box R-\nabla_\mu\nabla_\nu R\right)+2\beta R^a_{\ \nu}R_{a\mu}\\
&+2\beta(-\nabla_a\nabla_\nu R^a_{\ \mu}+\tfrac{1}{2}\Box R_{\mu\nu}+\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_a\nabla_b R^{ab})=0
\end{aligned}
\tag{A.2.3}
$$

此式子，已經可以拿來做計算；其中，部分項轉換後也可以得到 [5] Barrow equation (2、3、4)。

Field equation for $\mu=\nu=0$:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\epsilon\phi^2\left(R_{00}-\tfrac{1}{2}Rg_{00}\right)+\tfrac{1}{2}\alpha g_{00}R^2-\tfrac{1}{2}\beta R_{\sigma\rho}R^{\sigma\rho}g_{00}-\tfrac{1}{4}g_{00}\dot{\phi}^2+\\
&\tfrac{1}{2}\epsilon\left(R_{00}\Box\phi^2-\nabla_0\nabla^0\phi^2\right)+2\alpha\left(RR_{00}+g_{00}\Box R-\nabla_0\nabla_0 R\right)+\\
&2\beta R^a_{\ 0}R_{a0}+2\beta(-\nabla_a\nabla_0 R^a_{\ 0}+\tfrac{1}{2}\Box R_{00}+\tfrac{1}{2}g_{00}\nabla_a\nabla_b R^{ab})=0
\end{aligned}
\tag{A.2.4}
$$

if $\frac{1}{2}\epsilon\phi^2=1$

加入 Λ 項後，上式將會是我們的 B equation。

Field equation for $\mu=\nu=1$:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\epsilon\phi^2\left(R_{11}-\tfrac{1}{2}Rg_{11}\right)+\tfrac{1}{2}\alpha g_{11}R^2-\tfrac{1}{2}\beta R_{\sigma\rho}R^{\sigma\rho}g_{11}-\tfrac{1}{4}g_{11}\dot{\phi}^2+\\
&\tfrac{1}{2}\epsilon\left(R_{11}\Box\phi^2-\nabla_1\nabla^1\phi^2\right)+2\alpha\left(RR_{11}+g_{11}\Box R-\nabla_1\nabla_1 R\right)+\\
&2\beta R^a_{\ 1}R_{a1}+\beta(-\nabla_a\nabla_0 R^a_{\ 0}+\tfrac{1}{2}\Box R_{00}+\tfrac{1}{2}g_{11}\nabla_a\nabla_b R^{ab})=0
\end{aligned}
\tag{A.2.5}
$$

if $\frac{1}{2}\epsilon\phi^2=1$

加入 Λ 項後，上式將會是我們的 a_1 equation

A.3 B equation and a_i equation

B equation：

$$\mathcal{L} + H_i\left(\frac{d}{dt}\mathcal{L}^i + 3H\mathcal{L}^i\right) - H_i\mathcal{L}_i - \dot{H}_i\mathcal{L}^i = 0 \tag{A.3.1}$$

先展開每個 Lagrangian 的幾何表示：

1. $\mathcal{L} \quad = R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu}{}_{v} R^{\nu}{}_{\mu} - 2\Lambda$

2. $H_i\left(\frac{d}{dt}\mathcal{L}^i\right) \quad = H_i\left[4\alpha\dot{R} + 2\beta\left(\dot{R}^0{}_0 + \dot{R}^i{}_i\right)\right]$

3. $H_i\left(3H\mathcal{L}^i\right) = 3HH_i\left[2 + 4\alpha R + 2\beta\left(R^0{}_0 + R^i{}_i\right)\right]$

4. $-H_i\mathcal{L}_i \quad = -H_i\left[\ 2\left(3H + H_i\right) + 4\alpha R\left(3H + H_i\right) + 2\beta\left(2R^0{}_0 H_i + R^{i'}{}_{i'} H_{i'} + 9H^2 H_i\right)\ \right]$

其中，$i' = 1 \sim 3$。

5. $-\dot{H}_i\mathcal{L}^i \quad = -\dot{H}_i\left[2 + 4\alpha R + 2\beta\left(R^0{}_0 + R^i{}_i\right)\right]$

再將 Bianchi type I space 空間性質代入每個幾何表示裡。

列出每一部份的 Largrangian density 在 Bianchi type I space 下的量，其中 $i \neq j$ 、腳標的 $i' = 1 \sim 3$:

$$\mathcal{L} = R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu}_{\ v} R^{\nu}_{\ \mu} - 2\Lambda \tag{A.3.2}$$

$$\mathcal{L}_i = 2\left(3H + H_i\right) + 4\alpha R\left(3H + H_i\right) + 2\beta\left(2R^0_{\ 0} H_i + R^{i'}_{\ i'} H_{i'} + 9H^2 H_i\right) \tag{A.3.3}$$

$$\mathcal{L}^i = 2 + 4\alpha R + 2\beta\left(R^0_{\ 0} + R^i_{\ i}\right) \tag{A.3.4}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}_i = 2\left(3\dot{H} + \dot{H}_i\right) + 4\alpha\left(3H\dot{R} + H_i\dot{R} + 3\dot{H}R + \dot{H}_i R\right) + 2\beta(\dot{R}^{i'}_{\ i'} \\ H_{i'} + R^{i'}_{\ i'}\dot{H}_{i'} + 9H^2\dot{H}_i + 2\dot{R}^0_0 H_i + 2R^0_0\dot{H}_i + 18H\dot{H}H_i) \end{aligned} \tag{A.3.5}$$

$$\dot{\mathcal{L}}^i = 4\alpha\dot{R} + 2\beta\left(\dot{R}^0_{\ 0} + \dot{R}^i_{\ i}\right) \tag{A.3.6}$$

$$\ddot{\mathcal{L}}^i = 4\alpha\ddot{R} + 2\beta\left(\ddot{R}^0_{\ 0} + \ddot{R}^i_{\ i}\right) \tag{A.3.7}$$

把 Largrangian density 的 Ricci tensor 和 scalar curvature 用哈伯 factor 表示 :

$$\dot{R} = 2\left(2H_i\dot{H}_i + \ddot{H}_i + \dot{H}_i H_j\right) \tag{A.3.8}$$

$$\ddot{R} = 2\left(2\dot{H}_i^{\ 2} + 2H_i\ddot{H}_i + H_i^{(3)} + \ddot{H}_i H_j + \dot{H}_i\dot{H}_j\right) \tag{A.3.9}$$

$$\dot{R}^0_{\ 0} = 2H_i\dot{H}_i + \ddot{H}_i \tag{A.3.10}$$

$$\ddot{R}^0_{\ 0} = 2\left(\dot{H}_i^{\ 2} + H_i\ddot{H}_i\right) + H_i^{(3)} \tag{A.3.11}$$

$$\dot{R}^i_{\ i} = 2\left(H_i\dot{H}_i + \dot{H}_i H_j\right) + \ddot{H}_i \tag{A.3.12}$$

$$\ddot{R}^i_{\ i} = 2\left(\dot{H}_i^{\ 2} + H_i\ddot{H}_i + \ddot{H}_i H_j + \dot{H}_i\dot{H}_j\right) + H_i^{(3)} \tag{A.3.13}$$

其中 $3\dot{H} \equiv \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3$

整理上面五個部份的計算，把有 α、β 的放在一起，就是第三章所列出的 B equation。

接下來計算 a_i equation in Bianchi type I space ，

a_i equation：

$$\mathcal{L} + \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{L}^i + 3H\frac{d}{dt}\mathcal{L}^i + \frac{d}{dt}\left(3H\mathcal{L}^i\right) + (3H)^2\mathcal{L}^i - \left(\frac{d}{dt}\mathcal{L}_i + 3H\mathcal{L}_i\right) = 0 \tag{A.3.14}$$

展開後：

$$\mathcal{L} + \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{L}^i + 2(3H)\frac{d}{dt}\mathcal{L}^i + \mathcal{L}^i\frac{d}{dt}(3H) + (3H)^2\mathcal{L}^i - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_i - 3H\mathcal{L}_i = 0 \tag{A.3.15}$$

計算：

1. $\mathcal{L} = R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu}{}_{v} R^{\nu}{}_{\mu} - 2\Lambda$

2. $\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{L}^i = 4\alpha\ddot{R} + 2\beta\left(\ddot{R}^0{}_0 + \ddot{R}^i{}_i\right)$

3. $2(3H)\frac{d}{dt}\mathcal{L}^i = 6H\left[4\alpha\dot{R} + 2\beta\left(\dot{R}^0{}_0 + \dot{R}^i{}_i\right)\right]$

4. $\mathcal{L}^i\frac{d}{dt}(3H) = 3\dot{H}\left[2 + 4\alpha R + 2\beta\left(R^0{}_0 + R^i{}_i\right)\right]$

5. $(3H)^2\mathcal{L}^i = (3H)^2\left[2 + 4\alpha R + 2\beta\left(R^0{}_0 + R^i{}_i\right)\right]$

6. $\frac{d}{dt}\mathcal{L}_i = 2\left(3\dot{H} + \dot{H}_i\right) + 4\alpha\left[\dot{R}(3H + H_i) + R\left(3\dot{H} + \dot{H}_i\right)\right] +$
   $2\beta(\dot{R}^{i'}{}_{i'}H_{i'} + R^{i'}{}_{i'}\dot{H}_{i'} + 9H^2\dot{H}_i + 2\dot{R}^0_0 H_i + 2R^0_0\dot{H}_i + 18H\dot{H}H_i)$

7. $-3H\mathcal{L}_i = -6H\left[\ 3H + H_i + 2\alpha R(3H + H_i) + \beta\left(2R^0{}_0 H_i + R^{i'}{}_{i'}H_{i'} + 9H^2 H_i\right)\ \right]$

假設 $i = 1$，整理上面的計算，把有 α、β 的放在一起，就是第三章所列出的 a_1 equation。

A.4 B perturbation equation and a_i perturbation equation

在我們做微擾的方法中，我們用了 Euler perturbation 的方法，將 B equation、 a_i equation 裡的哈伯 factor 做擾動，得到了如下面的一長串方程；但是我們可以利用程式，只蒐集我們想要的項，所以步驟是利用程式快速的做代數上的變換，再利用程式收集我們要的項，於是我們就可以快速的得到微擾方程。這些快速得到微擾方程的起因，都緣起於我們將場方程利用我們的方法，換成多項式代數方程，不僅迴避掉較複雜的共變微分，在利用程式時也簡化了程式碼(只要做代數變換和搜集)。

將 B equation 和 a_i equation 做以下處理，就會得到 B perturbation equation 和 a_i perturbation equation :

$$H_i \to H_i + v\delta A_i \quad \dot{H}_i \to \dot{H}_i + v^2\delta A_i \quad \ddot{H}_i \to \ddot{H}_i + v^3\delta A_i \quad H_i^{(3)} \to H_i^{(3)} + v^4\delta A_i$$

B perturbation equation :

在計算完成後，我們將算好的 B perturbation equation 做各階微擾和來源的分類(無 α、β 項表示未修正的時空張量分量，而有 α、β 分別表示高階 Ricci 、 scalar 修正項重力理論的修正) :

$$\begin{aligned}
&B^{p}_{Ai} + \tfrac{1}{2}B^{p}_{AiAj} + \alpha(B^{p\alpha}_{Ai} + \tfrac{1}{2}B^{p\alpha}_{AiAj} + B^{p\alpha}_{Ai^2} + B^{p\alpha}_{Ai^3} + B^{p\alpha}_{Ai^2Aj} + B^{p\alpha}_{A1A2A3} + B^{p\alpha}_{Ai^4} \\
&+\tfrac{1}{2}B^{p\alpha}_{Ai^2Aj^2} + \tfrac{1}{2}B^{p\alpha}_{Ai^2AjAk}) + \beta(B^{p\beta}_{Ai} + \tfrac{1}{2}B^{p\beta}_{AiAj} + B^{p\beta}_{Ai^2} + B^{p\beta}_{Ai^3} + \tfrac{1}{2}B^{p\beta}_{Ai^2Aj} + B^{p\beta}_{A1A2A3} \\
&+B^{p\beta}_{Ai^4} + \tfrac{1}{2}B^{p\beta}_{Ai^2Aj^2} + B^{p\beta}_{Ai^3Aj} + \tfrac{1}{2}B^{p\beta}_{Ai^2AjAk}) = 0
\end{aligned} \tag{A.4.1}$$

其中:

$$B^{p}_{Ai} = v\ H_j\delta A_i$$

$$B^{p}_{AiAj} = v^2\ \delta A_i\delta A_j$$

$$B^{p\alpha}_{Ai} = \begin{bmatrix} +12v^3H + 4v^2\left(H_i^2 + 3H_iH_j + H_jH_k - 3\dot{H}\right) \\ -4v(2H_i^3 + H_j^2H_i - H_j^2H_k - 2H_1H_2H_3 \\ -3H_j\dot{H}_i - 3H_j\dot{H}_j - 2H_i\dot{H}_i - 2H_k\dot{H}_j - 3\ddot{H}) \end{bmatrix}\delta A_i$$

$$B^{p\alpha}_{AiAj} = \begin{bmatrix} +4v^4 + 4v^3\,(3H_i + 3H_j + 4H_k) + 4v^2(3\dot{H}_i + \\ 3\dot{H}_j + 2H_iH_j + 2H_iH_k + 2H_jH_k + 2\dot{H}_k + H_k^2) \end{bmatrix}\delta A_i\delta A_j$$

$$B^{p\alpha}_{Ai^2} = \left[\ 2v^4 + 4v^3\,(2H_i + 3H_j) + 2v^2(-6H_i^2 - H_j^2 + H_jH_k + 2\dot{H}_1)\ \right]\delta A_i^2$$

$$B^{p\alpha}_{Ai^3} = \left[\ 4v^4 - 8v^3H_i\ \right]\delta A_i^3$$

$$
\begin{aligned}
B^{p\alpha}_{Ai^2Aj} &= \left[\ 12v^4 + 4v^3(H_k - H_j)\ \right] \delta A_i^2 \delta A_j \\
B^{p\alpha}_{A1A2A3} &= \left[\ 24v^4 + 24v^3 H\ \right] \delta A_1 \delta A_2 \delta A_3 \\
B^{p\alpha}_{Ai^4} &= -2v^4\ \delta A_i^4 \\
B^{p\alpha}_{Ai^2Aj^2} &= -2v^4\ \delta A_i^2 \delta A_j^2 \\
B^{p\alpha}_{Ai^2AjAk} &= 4v^4\ \delta A_i^2 \delta A_j \delta A_k \\
B^{p\beta}_{Ai} &= \left[\begin{array}{l} +v^3\,(3H + H_i) + v^2\left(2H_i^2 + 4H_iH_j + H_jH_k - 2\dot{H}_i - \dot{H}_j\right) \\ +v(-4H_i^3 + H_j^3 + 3H_i^2H_j - 4H_j^2H_i + H_j^2H_k + \ddot{H}_j + 2H_1 \\ H_2H_3 + 12H\dot{H} + 4H_j\dot{H}_i\ddot{H}_i + 2H_k\dot{H}_j) \end{array} \right] \delta A_i \\
B^{p\beta}_{AiAj} &= \left[\begin{array}{l} +v^4 + 12v^3H + v^2(4\dot{H}_i + 4\dot{H}_j - 8H_iH_j + \\ 3H_i^2 + 3H_j^2 + 2H_iH_k + 2H_jH_k + 2\dot{H}_k + H_k^2) \end{array} \right] \delta A_i \delta A_j \\
B^{p\beta}_{Ai^2} &= \left[\ v^4 + 12v^3H + v^2(-6H_i^2 + 5\dot{H}_i + 3H_iH_j - 2H_j^2 + \tfrac{1}{2}H_jH_k)\ \right] \delta A_i^2 \\
B^{p\beta}_{Ai^3} &= \left[\ 2v^4 + v^3\,(-4H_i + H_j)\ \right] \delta A_i^3 \\
B^{p\beta}_{Ai^2Aj} &= \left[\ 4v^4 + v^3(3H_i - 4H_j + H_k)\ \right] \delta A_i^2 \delta A_j \\
B^{p\beta}_{A1A2A3} &= \left[\ 6v^4 + 6v^3 H\ \right] \delta A_1 \delta A_2 \delta A_3 \\
B^{p\beta}_{Ai^4} &= -v^4\ \delta A_i^4 \\
B^{p\beta}_{Ai^2Aj^2} &= -2v^4\ \delta A_i^2 \delta A_j^2 \\
B^{p\beta}_{Ai^3Aj} &= v^4\ \delta A_i^3 \delta A_j \\
B^{p\beta}_{Ai^2AjAk} &= v^4\ \delta A_i^2 \delta A_j \delta A_k \\
3H\dot{H} &= H_1\dot{H}_1 + H_2\dot{H}_2 + H_3\dot{H}_3
\end{aligned}
$$

a_i perturbation equation :

在計算完成後，我們將算好的 a_i perturbation equation 做各階微擾和來源的分類 (無 α、β 項表示未修正的時空張量分量，而有 α、β 分別表示高階 Ricci 、 scalar 修正項重力理論的修正) :

$$
\begin{aligned}
& a^{p}_{i(Aj)} + \tfrac{1}{2} a^{p}_{i(AjAk)} + a^{p}_{i(Aj^2)} + \alpha(a^{p\alpha}_{i(Ai)} + a^{p\alpha}_{i(Aj)} + a^{p\alpha}_{i(AiAj)} + \tfrac{1}{2} a^{p\alpha}_{i(AjAk)} + a^{p\alpha}_{i(Ai^2)} \\
& + a^{p\alpha}_{i(Aj^2)} + a^{p\alpha}_{i(Ai^3)} + a^{p\alpha}_{i(Aj^3)} + a^{p\alpha}_{i(Ai^2Aj)} + a^{p\alpha}_{i(AiAj^2)} + a^{p\alpha}_{i(Aj^2Ak)} + a^{p\alpha}_{i(A1A2A3)} \\
& + a^{p\alpha}_{i(AjAk^3)} + a^{p\alpha}_{i(Ai^3Aj)} + a^{p\alpha}_{i(Ai^4)} + a^{p\alpha}_{i(Aj^4)} + a^{p\alpha}_{i(Ai^2Aj^2)} + \tfrac{1}{2} a^{p\alpha}_{i(Aj^2Ak^2)} + \tfrac{1}{2} a^{p\alpha}_{i(Ai^2AjAk)}) \\
& + \beta(a^{p\beta}_{i(Ai)} + a^{p\beta}_{i(Aj)} + a^{p\beta}_{i(AiAj)} + \tfrac{1}{2} a^{p\beta}_{i(AjAk)} + a^{p\beta}_{i(Ai^2)} + a^{p\beta}_{i(Aj^2)} + a^{p\beta}_{i(Ai^3)} + a^{p\beta}_{i(Aj^3)} \\
& + a^{p\beta}_{i(Ai^2Aj)} + a^{p\beta}_{i(AiAj^2)} + a^{p\beta}_{i(Aj^2Ak)} + a^{p\beta}_{i(A1A2A3)} + a^{p\beta}_{i(Ai^4)} + a^{p\beta}_{i(Aj^4)} + \tfrac{1}{2} a^{p\beta}_{i(Aj^2Ak^2)} \\
& + a^{p\beta}_{i(Ai^3Aj)} + a^{p\beta}_{i(AiAj^3)} + a^{p\beta}_{i(Aj^3Ak)} + \tfrac{1}{2} a^{p\beta}_{i(Ai^2AjAk)} + a^{p\beta}_{i(AiAj^2Ak)}) = 0
\end{aligned}
\tag{A.4.2}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
a^{p}_{i(Aj)} &= 3vH\ \delta A_j \\
a^{p}_{i(AjAk)} &= v^2\ \delta A_j \delta A_k \\
a^{p\alpha}_{i(Ai)} &= \begin{bmatrix} +4v^4 + 24v^3 H + 4v^2(-H_i^2 + H_j^2 + H_i H_j + H_j H_k \\ +6\dot{H} + \dot{H}_i) + 4v(-2H_i^3 - H_j^2 H_i - 3H_j H_i^2 - 2H_1 H_2 \\ H_3 + H_j \dot{H}_i + H_j \dot{H}_k + H_j \dot{H}_j - 2H_i \dot{H}_i + 3\ddot{H} + \ddot{H}_i) \end{bmatrix} \delta A_i \\
a^{p\alpha}_{i(Aj)} &= \begin{bmatrix} +4v^4 + 4v^3 (H_i + 3H_j + 2H_k) + 4v^2(H_i H_j + 3H_j^2 \\ +H_k H_i + 4H_j H_k + 2H_k^2 + 2\dot{H}_i + 5\dot{H}_j + 3\dot{H}_k) \\ +4v(-H_i^3 - H_j^2 H_i + 2H_j^3 - H_k H_i^2 + 3H_j^2 H_k \\ +3H_j H_k^2 + H_k^3 + 2H_j \dot{H}_i + 2H_k \dot{H}_i + H_i \dot{H}_j \\ +4H_k \dot{H}_j + H_i \dot{H}_k + 4H_j \dot{H}_k - H_i \dot{H}_i + 6H_j \dot{H}_j \\ +4H_k \dot{H}_k + 2\ddot{H}_i + 3\ddot{H}_j + 2\ddot{H}_k) \end{bmatrix} \delta A_j \\
a^{p\alpha}_{i(AiAj)} &= \begin{bmatrix} +20v^4 + 4v^3 (H_i + 3H_j + 3H_k) + 4v^2(-3H_i^2 \\ -2H_i H_j - 2H_k H_i + 3\dot{H}) \end{bmatrix} \delta A_i \delta A_j \\
a^{p\alpha}_{i(AjAk)} &= \begin{bmatrix} +28v^4 + 8v^3 (H_i + 4H_j + 4H_k) + 4v^2(-H_i^2 \\ +3H_j^2 - 6H_j H_k + 3H_k^2 + 2\dot{H}_i + 4\dot{H}_j + 4\dot{H}_k) \end{bmatrix} \delta A_j \delta A_k \\
a^{p\alpha}_{i(Ai^2)} &= \begin{bmatrix} +14v^4 + 4v^3 (-2H_i + H_j) + 2v^2(-6H_i^2 - 6H_i \\ H_j - H_j^2 - H_j H_k - 2\dot{H}_i) \end{bmatrix} \delta A_i^2
\end{aligned}
$$

$$a^{p\alpha}_{i(Aj^2)} = \left[\begin{array}{l} +22v^4 + 4v^3\,(H_i + 6H_j + 4H_k) + 2v^2(-H_i^2 \\ +6H_j^2 + 6H_jH_k + 3H_k^2 + 2\dot{H}_i + 6\dot{H}_j + 4\dot{H}_k) \end{array}\right]\delta A_j^2$$

$$a^{p\alpha}_{i(Ai^3)} = \left[\, -4v^4 - 4v^3(2H_i + H_j) \,\right]\delta A_i^3$$

$$a^{p\alpha}_{i(Aj^3)} = \left[\, 12v^4 + 4v^3\,(2H_j + H_k) \,\right]\delta A_j^3$$

$$a^{p\alpha}_{i(Ai^2Aj)} = \left[\, 4v^4 - 4v^3\,(3H_i + H_j + H_k) \,\right]\delta A_i^2\delta A_j$$

$$a^{p\alpha}_{i(AiAj^2)} = \left[\, 8v^4 - 4v^3H_i \,\right]\delta A_i\delta A_j^2$$

$$a^{p\alpha}_{i(Aj^2Ak)} = \left[\, 24v^4 + 12v^3\,(H_i + H_k) \,\right]\delta A_j^2\delta A_k$$

$$a^{p\alpha}_{i(A1A2A3)} = \left[\, 16v^4 - 8v^3H_i \,\right]\delta A_1\delta A_2\delta A_3$$

$$a^{p\alpha}_{i(AjAk^3)} = 4v^4\ \delta A_j\delta A_k^3$$

$$a^{p\alpha}_{i(Ai^3Aj)} = -4v^4\ \delta A_i^3\delta A_j$$

$$a^{p\alpha}_{i(Ai^4)} = -2v^4\ \delta A_i^4$$

$$a^{p\alpha}_{i(Aj^4)} = 2v^4\ \delta A_j^4$$

$$a^{p\alpha}_{i(Ai^2Aj^2)} = -2v^4\ \delta A_i^2\delta A_j^2$$

$$a^{p\alpha}_{i(Aj^2Ak^2)} = 6v^4\ \delta A_j^2\delta A_k^2$$

$$a^{p\alpha}_{i(Ai^2AjAk)} = -4v^4\ \delta A_i^2\delta A_j\delta A_k$$

$$a^{p}_{i(Aj^2)} = v^2\ \delta A_j^2$$

$$a^{p\beta}_{i(Ai)} = \left[\begin{array}{l} 2v^4 + 12v^3H + v^2(-2H_i^2 + 5H_iH_j + H_j^2 + 2H_jH_k \\ +6\dot{H}_i + 3\dot{H}_j) + v(-4H_i^3 - H_j^3 - 3H_i^2H_j - H_j^2H_k + \\ 2H_1H_2H_3 + 5H_j\dot{H}_i + 2H_i\dot{H}_j + H_k\dot{H}_j + 4\ddot{H}_i + \ddot{H}_j - \\ 4H_i\dot{H}_i - H_j\dot{H}_j) \end{array}\right]\delta A_i$$

$$a^{p\beta}_{i(Aj)} = \left[\begin{array}{l} v^4 + v^3\,(H_i + 3H_j + 2H_k) + v^2(H_i^2 - H_iH_j + 4H_j^2 \\ +H_iH_k + 4H_jH_k + 2H_k^2 + 3\dot{H}_i + 6\dot{H}_j + 3\dot{H}_k) + \\ v(-H_i^3 - 3H_iH_j^2 + 4H_j^3 + H_i^2H_k - 2H_1H_2H_3 + 3H_j^2 \\ H_k - H_k^2H_i + 4H_k^2H_j + H_k^3 + 2H_j\dot{H}_i + 4H_k\dot{H}_i - H_i\dot{H}_j \\ +4H_k\dot{H}_j + H_i\dot{H}_k + 4H_j\dot{H}_k + 4\ddot{H}_i + 3\ddot{H}_j + 2\ddot{H}_k \\ +5H_i\dot{H}_i + 8H_j\dot{H}_j + 4H_k\dot{H}_k) \end{array}\right]\delta A_j$$

$$a^{p\beta}_{i(AiAj)} = \left[\begin{array}{l} +8v^4 + v^3\,(7H_i + H_j + 5H_k) + v^2(-3H_i^2 - 3H_j^2 \\ +2H_iH_k - 2H_jH_k - H_k^2 + 5\dot{H}_i - \dot{H}_j + \dot{H}_k) \end{array}\right]\delta A_i\delta A_j$$

$$a^{p\beta}_{i(AjAk)} = \left[\begin{array}{l} +7v^4 + 2v^3\,(H_1 + 4H_2 + 4H_3) + v^2(H_1^2 - 2H_1H_2 \\ +3H_2^2 - 2H_1H_3 + 8H_2H_3 + 3H_3^2 + 12\dot{H}) \end{array} \right] \delta A_j \delta A_k$$

$$a^{p\beta}_{i(Ai^2)} = \left[\begin{array}{l} +7v^4 + v^3\,(-4H_i + 5H_j) + v^2(-6H_i^2 - 3H_iH_j + \\ \frac{1}{2}H_jH_k - 2\dot{H}_i + \dot{H}_j) \end{array} \right] \delta A_i^2$$

$$a^{p\beta}_{i(Aj^2)} = \left[\begin{array}{l} +6v^4 + v^3\,(-H_i + 8H_j + 4H_k) + v^2(-3H_iH_j + 6 \\ H_j^2 - H_kH_i + 3H_jH_k + 2H_k^2 + \dot{H}_i + 4\dot{H}_j + 2\dot{H}_k) \end{array} \right] \delta A_j^2$$

$$a^{p\beta}_{i(Ai^3)} = \left[-2v^4 - v^3(4H_i + H_j) \right] \delta A_i^3$$

$$a^{p\beta}_{i(Aj^3)} = \left[4v^4 + v^3\,(-H_1 + 4H_2 + H_3) \right] \delta A_j^3$$

$$a^{p\beta}_{i(Ai^2Aj)} = \left[6v^4 + v^3\,(-3H_i + H_j) \right] \delta A_i^2 \delta A_j$$

$$a^{p\beta}_{i(AiAj^2)} = \left[-v^3\,(H_j + H_k) \right] \delta A_i \delta A_j^2$$

$$a^{p\beta}_{i(Aj^2Ak)} = \left[6v^4 + v^3\,(-H_i + 3H_j + 4H_k) \right] \delta A_j^2 \delta A_k$$

$$a^{p\beta}_{i(A1A2A3)} = \left[6v^4 + 2v^3\,(H_i - H_j) \right] \delta A_1 \delta A_2 \delta A_3$$

$$a^{p\beta}_{i(Ai^4)} = -v^4\ \delta A_i^4$$

$$a^{p\beta}_{i(Aj^4)} = v^4\ \delta A_j^4$$

$$a^{p\beta}_{i(Aj^2Ak^2)} = 2v^4\ \delta A_j^2 \delta A_k^2$$

$$a^{p\beta}_{i(Ai^3Aj)} = -v^4\ \delta A_i^3 \delta A_j$$

$$a^{p\beta}_{i(AiAj^3)} = -H_i v^4\ \delta A_i \delta A_j^3$$

$$a^{p\beta}_{i(Aj^3Ak)} = v^4\ \delta A_j^3 \delta A_k$$

$$a^{p\beta}_{i(Ai^2AjAk)} = v^4\ \delta A_i^2 \delta A_j \delta A_k$$

$$a^{p\beta}_{i(AiAj^2Ak)} = -v^4\ \delta A_i \delta A_j^2 \delta A_k$$

A.5 Bianchi type I metric

Bianchi space 是個均勻，但不同向的空間。改用 Bianchi space，也解決 FRW space 是否能凝聚星系的問題。

Bianchi 模型討論予許不同運動方式的空間是長什麼樣子。首先，先說明何為運動。在一個 Riemannian space 裡，也就是在空間 M 裡，任一點 P 都有一個度規 $g(p)$ ，可以將該點的任兩個向量 μ、ν 送到實數空間。度規 決定了空間的幾何性質，不同的度規代表不同的 Riemannian space 。給定度規，空間裡才有距離。考慮兩個 Riemannian space $(M\ ,\ g_1)$ 和 $(N\ ,\ g_2)$，兩者之間有一個映射 $f\ :\ M \longrightarrow N$，$f$ 滿足：

$$g_2(f(\mu), f(\nu))\ |_{f(P)} = g_1(\mu, \nu)\ |_P \qquad \forall \mu, \nu \in M \tag{A.5.1}$$

稱作保距映射，M、N 則稱作同測。假使此映射為 $f\ :\ M \longrightarrow M$，則稱此映射 f 為空間的運動。例如：$f : (x, y) \longrightarrow (x+2, y)$ 就可想做將空間所有的點，往 x 方向推 2 個基本單位，好像是點在空間中運動了。

再來，定義任意三維空間的度規：

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{A.5.2}$$

定義運動算符：

$$X(f) = \xi^i f_{,i} \tag{A.5.3}$$

當空間允許這個運動 X 時，這個空間被 X 作用不會改變，寫成數學形式：

$$X(ds^2) = 0 \tag{A.5.4}$$

展開：

$$\begin{aligned} X(ds^2) &= X(g_{ij})dx^i dx^j + g_{ij}dX(x^i)dx^j + g_{ij}dx^i dX(x^j) \\ &= \left[g_{ij,k}k\xi^k + g_{kj}\xi^k_{\ ,i} + g_{ik}\xi^k_{\ ,j}\right] dx^i dx^j = 0 \end{aligned} \tag{A.5.5}$$

得到：

$$g_{ij,k}k\xi^k + g_{kj}\xi^k_{\ ,i} + g_{ik}\xi^k_{\ ,j} = 0 \tag{A.5.6}$$

此式子稱為 Killing equation。

現在，我們在三維空間的一平面：

$$ds^2 = dx_1^2 + a_{22}dx_2^2 + 2a_{23}dx_2dx_3 + a_{23}dx_3^2 \tag{A.5.7}$$

我們有${}^{(a)}\xi^1 = 0$，其中 ${}^{(a)}\xi^i$ 代表 X_a 的 ξ 係數。由 Killing equation 可得出：

$$a_{22}{}^{(a)}\xi^2{}_{,1} + a_{23}{}^{(a)}\xi^3{}_{,1} = 0 \tag{A.5.8}$$

$$a_{23}{}^{(a)}\xi^2{}_{,1} + a_{33}{}^{(a)}\xi^3{}_{,1} = 0 \tag{A.5.9}$$

因為 $a_{22}a_{33} - a_{23}^2 \neq 0$，可以得到 ${}^{(a)}\xi^2{}_{,1} = {}^{(a)}\xi^3{}_{,1} = 0$，也就是 ${}^{(a)}\xi^i$ 與 X_1 無關。

考慮一種運動 $[X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = 0$ ，也就是 Bianchi type I space 中允許的運動。其中，在 $[X_2, X_3] = 0$ 情況下，令 $X_2 = \partial_2$ 和 $X_3 = \partial_3$ ，則 Killing equation 會給出 $a_{ij,2} = a_{ij,3} = 0$，這代表 a_{ij} 只可能是 x_1 的函數與 x_2 、 x_3 無關。同理，最後我們可判定，在 $[X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = 0$ 情況下， a_{ij} 與 x_1 、 x_2 、 x_3 無關。考慮時間維度的話，Bianchi type I 度規表示為：

$$ds_I^2 = -B(t)dt^2 + a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)dy^2 + a_3^2(t)dz^2 \tag{A.5.10}$$

Reference

[1] R.W. Wald, *Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant, Phys. Rev.* **D 28** (1983) 2118.

[2] W.F. Kao, *Bianchi type-I space and the stability of the inflationary Friedmann-Robertson-Walker solution, Phys. Rev.* D 64, 107301 (2001).

[3] W.F. Kao, *Scalar-tensor theory and the anisotropic perturbations of the inflationary universe, Eur. Phys. J. C* 65 3-4 (2010).

[4] W.F. Kao and Ing-Chen Lin, *Stability conditions for the Bianchi type II anisotropically inflating universes ,J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP01(2009)022.

[5] J.D. Barrow and S. Hervik, *Anisotropically inflating universes, Phys. Rev.* **D 73** (2006) 023007.

[6] W.F. Kao and Ing-Chen Lin, *Anisotropically inflating universes in a scalar-tensor theory,Phys. Rev.* **D 79** (2009) 043001.

[7] J.D. Barrow and S. Hervik, *Simple Types of Anisotropic Inflation, Phys. Rev.* **D 81** (2010) 023513.

[8] J.D. Barrow and S. Hervik, *Evolution of universes in quadratic theories of gravity, Phys. Rev.* **D 74** (2006) 124017.

[9] W.F. Kao, *Anisotropic higher derivative gravity and inflationary universe, Phys. Rev.* D 74, 043522 (2006).

[10] W.F. Kao, Ue-Li Pen, Pengjie Zhang, *Friedmann equation and stability of inflationary higher derivative gravity,Phys. Rev.* **D 63** (2001) 127301.

[11] N.Kaloper, *Lorentz Chern-Simons terms in Bianchi cosmologies and the cosmic no hair conjecture,Phys. Rev.* **D 44** (1991) 2380.

[12] 柯勝藍, *A study on the Bianchi IX Model Universe*, 交通大學物理所碩士論文 (2007).

[13] 高孟聰, *The study of Bianchi type-IV and VIII cosmology model*, 清華大學物理系碩士論文 (2007).

[14] 林勤倫, *The Study of Bianchi Type VI cosmology model*,交通大學物理所碩士論文 (2007).

[15] 林君睿, *The study of Bianchi Type II model*, 交通大學物理所碩士論文 (2007).

[16] 林英程, *Stability analysis of the Bianchi spaces*, 清華大學物理系碩士論文 (2008).