國 立 交 通 大 學

物 理 研 究 所

碩 士 論 文

不均向膨脹宇宙 Bianchi type I 的空間穩定性研究

Stability conditions for the Bianchi type I anisotropically inflating universe

研 究 生： 李傳睿

指導教授： 高文芳 教授

中 華 民 國 九 十 九 年 七 月

不均向膨脹宇宙 Bianchi type I 的空間穩定性研究

Stability conditions for the Bianchi type I anisotropically inflating universe

研　究　生：	李傳睿	Student:	Chuan - Ruei Lee
指 導 教 授：	高文芳	Advisor:	W. F. Kao

國 立 交 通 大 學
物　理　研　究　所
碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Institute of Physics
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in
Physics
July, 2010
Hsinchu City, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年七月

不均向膨脹宇宙 Bianchi type I 的空間穩定性研究

學生： 李傳睿　　　　　　　　　　　　　　　　指 導 教 授： 高文芳

國立交通大學物理研究所

摘　　要

根據哈伯的觀測,宇宙是一個動態的宇宙, 因此,瞭解宇宙是如何從最初始的狀態演化成現在的狀態，就是一個很重要的問題。

如果宇宙無毛猜想是正確的，所有不均向膨脹的宇宙最後都會演化成 de Sitter 時空，但是這個猜想只得到部分證實。

在先前的論文 [1] 中，在由里奇張量跟里奇純量構成的二次項的重力理論裡，已經找到一組Bianchi type I 時空的不均向膨脹解，我們將在論文中呈現正確的解。我們可以對場方程式做微擾的方式，證實這個解是不穩定的。但是這篇論文也將以論文 [1] 的動態系統分析方式，重現這個不均向膨脹解的穩定性探討，並探討這兩者之間的關聯 。

Stability conditions for the Bianchi type I
anisotropically inflating universe

Student: Chuan-Ruei Lee   Advisor: W. F. Kao

Submitted to Institute of Physics
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The evolution detail of an anisotropically expanding universe is an interesting research focus lately. The no hair conjecture, proved partially by Robert Wald, states that all anisotropically expanding universes will tend to an isotropic de Sitter space.

A class of anisotropically expanding solutions are found in ref. [1] for a gravity model with second-order correction terms derived from all possible combinations of the Ricci curvature tensor and Ricci scalar. We will present the correct expanding solutions in this paper. These solutions can be shown to be unstable by perturbing the field equations. Conventional approach by dynamical system analysis used in ref. [1] will be reviewed carefully and compared with the perturbation method mentioned earlier in this paper.

致　謝

首先要感謝我父母一直很支持我的選擇，謝謝我哥帶領我走進物理這條路，讓我找到自己眞正的興趣。過程中眞的是有些辛苦。

感謝林貴林老師跟整個團隊的學長姐跟同學，讓碩一的我體驗到什麼叫做做研究，以及如何把課本中的知識應用到實際的情況；感謝宗哲學長帶著完全不會程式的我學 C++ 跟 Root；感謝令威學長總是給我指導；感謝貝禎學姐的耐心；感謝佳均學姊教導我高能宇宙射線的一些背景知識。感謝這一年的大家讓我知道什麼叫做物理。

感謝高文芳老師，在我因爲興趣來到這研究團隊時給予我指導，帶領我一窺進入廣義相對論以及宇宙學的大門，並且給予我們正面的鼓勵。感謝團隊的每一個人，在每次的聊天討論給予我很大的動力。感謝家銘學長，總是給予我最好的建議以及不厭其煩的回答問題；感謝英程學長的耐心教導；感謝育誠、俊憲、Tuan、益弘學長的討論；感謝理策學長跟我去運動並且教導我很多天文的背景知識；感謝韋嵐跟我去運動跟吃晚餐，總是只有我們兩個留研究室。

感謝物理所開課的老師，感謝所上一起打球的學長跟同學，感謝柏翰學長、德明學長、平翰學長，這是我在物理所除了研究的成就感之外，最快樂的事情。

這篇論文中證明穩定性的部分，感謝英程學長跟育誠的計算；推導 Barrow 論文中的宇宙學動態系統方法，感謝英程學長、Tuan、育誠以及俊憲的推導；計算動態系統特徵值的部分，感謝益弘學長的檔案參考。

Contents

Chapter 1

介紹

1.1 背景

當我們試圖了解宇宙是如何從一個初始狀態演化至現在的狀態時，會有著許多困難。首先，做這研究的背景知識是要用到廣義相對論，而由於廣義相對論雖然預測出奇點的存在，但卻無法預測奇點中會出現什麼東西，或是如何描述奇點的事件，因此被認爲是個不完整的理論；再加上廣義相對論跟量子力學的結合存在著矛盾，比如說，如果我們想要把粒子的位置測得夠精準，那光子的能量就必須被提高，但如果光子的能量提高，時空的扭曲就會變大，我們就無法保證位置都可以一直很小；而類似的問題是，在普朗克尺度之下，所有定律包括廣義相對論都會失效，因此普遍認爲廣義相對論有待被修正。

高階修正項 (Higher derivative terms) 被認爲可視作是一個在一些能量尺度下，對於愛因斯坦重力理論的微擾修正。例如，平常時空曲率 R 小時，高階修正項作用不大，但如果在時空曲率 R 無限大的奇點，原本貢獻不大的高階修正項此時會有著極大的影響，因此可被視爲是一種修正。 同樣的道理，高階修正項問題在早期宇宙以及接近普朗克尺度時的研究中都是非常的重要 [3][4]。我們知道原本從 Hilbert-Einstein's Action 出發即可推導出愛因斯坦場方程式，因此，在這篇論文中，我們會將由里奇張量跟里奇純量構成的高階修正項放進 Hilbert-Einstein's Action 中，來推導出全新的重力場方程式。

再來，雖然我們都用均勻且均向來描述現在的宇宙，但是並沒有強烈的理由限制早期宇宙也是一個均向的狀態。而因爲現在宇宙中有許多的結構，因此比起均向的初始狀態，早期宇宙爲不均向的時空似乎更爲自然，另一方面，宇宙微波背景輻射 Cosmic microwave background radiation (CMBR) 的不均向性也是一個被證實的現象，在某些尺度看，其在早期宇宙是有著巨大尺度的波動 (Large scale fluctuations) ，而且這些不同方向的波動程度是比觀測的準確性還大，這些波動被視爲可能是現在宇宙的“種子” 。雖然 CMB 呈現的是早期宇宙物質的分布狀況，而我們討論的是時空本身，但是由於物質分布跟時空扭曲是互相關聯，因此這仍然是一個間接的理由去認爲我們的宇宙一開始是一個不均向的初始狀態。

於是，我們用均勻但不均向的 Bianchi type I 時空來做這個研究，看看早期爲不均向狀態的宇宙，搭配著有著高階修正項的新重力理論，能否演化至穩定的 de Sitter 時空。

而爲什麼我們會認爲宇宙會演化至 de Sitter時空？由於 de Sitter 時空在廣義相對論中是一個眞空解，而我們的宇宙是一個正在膨脹的宇宙，造成了物質分布密度相對來說越來越低；再者，對於愛因斯坦重力理論的宇宙無毛定理指出，如果物質 (Matter sources) 滿足強能量限制 (Strong energy condition) 跟主能量限制 (Dominate energy condition))，正的宇宙常數將會把 Bianchi 空間 (spaces) 趨向於 de Sitter 時空，因此，我們普遍認爲宇宙會演化至

de Sitter 時空。所以，在 [1] 這篇論文 Lagrange 出發的全新重力理論被提出後，證明在這新理論下，一個初始狀態爲不均向 Bianchi type I 度規的宇宙是否會趨向於 de Sitter 時空就是一個很重要的問題 [4]。

在這篇論文中，場方程式的膨脹解已經被找到，一組會趨向於 de Sitter 時空，另一組不會。我們會在章節 3.5 確認無毛定理的能量條件，在第四章證明了不會趨向於 de Sitter 時空的這組不均向解，在 Bianchi type I 模型是不穩定的。這意味著在這全新重力理論下，一個初始狀態爲 Bianchi type I 度規的宇宙最後 (Large-time scale) 會趨向於 de Sitter 時空。而我們的目標則是希望能繼續證明 Bianchi type I - IX 的不均向解都是不穩定的，也就是全部的 Bianchi types 都會演化至 de Sitter 時空 (細節請見章節 1.3 無毛定理)。

1.2 廣義相對論概述

1.2.1 基本觀念

由愛因斯坦 (Albert Einstein) 在 1915 發展出的廣義相對論，不但統一了牛頓的萬有引力跟狹義相對論，而且還預測出黑洞的存在、重力波以及重力透鏡等現象。

一.狹義相對論的原則:

1.物理定律在不同的慣性座標下都擁有同樣的形式。

2.光速的恆定。 光速在真空中是個定值 $c = 3 \times 10^8\ m/s$，而且跟光源及觀察者的相對運動無關。

3.沒有一個座標是特別的，所有的座標系都是相等的。 沒有一個實驗能測量出物體的絕對運動速率，測量到的只是觀察者及物體的相對速度。

狹義相對論是建立在慣性座標的基礎上，說明物理定律在羅倫茲轉換下都有著不變量，也就是會保有同樣的形式。因爲是定義在沒有加速度的運動上，因此我們一定需要一個數學架構及理論，不但能符合狹義相對論，更能完整描述加速度運動。而在設法也能描述加速度運動的同時，根據愛因斯坦的電梯思想實驗，因此狹義相對論勢必會跟重力有所連結，因爲重力的加速度就是一個定值，也就是會有個加速度的座標 (下面的等效原理會提到)。

二.廣義相對論的原則:

1.廣義協變性原則: 狹義相對論指出物理定律在慣性座標轉換下必須是不變量，廣義相對論則是推廣到，物理定律不管是在任何座標轉換下都會保有同樣的形式，座標系統對於方程式而言並不會有任何影響，也就是方程式跟座標是互相獨立的。這是很直觀可以想到的，因爲我們存在的時空是什麼樣子，應該跟我們取的座標系無關。物理定律必須被寫成廣義協變的形式。

2.等效原理。 牛頓第二運動定律，

$$F = ma$$

裡面的 m 如果是在加速度系統中被測量，被稱爲是'慣性質量'，定義爲一個物體對於其運動狀態的抵抗。但如果 m 是在一個重力場由天平測得，那就會被稱作是'重力質量'。而我們會發現

一個巧合，兩個的數值會是相等的。

根據愛因斯坦的電梯思想實驗，我們知道，慣性質量會等於重力質量。重力跟加速度會是等效的，因爲一個均勻的加速度可以產生一個均勻的重力場，我們不能分辨這個運動是重力造成的或是加速度造成的，因爲就跟狹義相對論中的相對速度一樣，加速度也是一個相對的量。所以在試圖創建一個滿足狹義相對論，又能描述加速度運動的理論時，勢必會討論到重力場。

1.2.2 廣義相對論

爲了方便想像，於是我們試著用等效原理來描述地球附近的重力場(或者說，任何不均勻的重力場)，但是，就會發現有很多問題。雖然在很小的區域中 (locally) 的重力場是幾乎平行的，但是在大一點的尺度下，重力場就不會是均勻的了。根據等效原理，加速度可以產生眞正的重力場，但是我們發現很難去找到一個很合理的加速度場去產生這種不均勻的重力場。同樣的，很難去想一個合理的解釋來解釋地球繞著太陽的公轉。事實上，這些問題不只存在於空間的區域，也發生在時間的區域，例如，一個剛體的座標系在地球的重力場中自由落下，這個座標系就無法在大尺度的時空區域中保持慣性 [5]。等效原理在大尺度下失效了，於是我們發現等效原理只在 ***局部性 (local)*** 的區域中成立，或者，一個‘時空’的小區域中。

另一個問題是**座標轉換下的慣性定律**。我們相信所有的物體都必須遵守慣性定律：沒有額外的外力作用的物體，會保持當下的運動狀態而且維持一定的速度。現在這邊有個狹義相對論的思想實驗：一個物體跟一個觀察者都在同樣的慣性座標中，所以後者會認爲前者是在做一個慣性運動。但如果把觀察者換成是在一個加速度的座標系中，並且觀察在原本慣性座標系中的物體，有些事情發生了：這個物體‘看’起來不遵守慣性定律了，因爲它運動的**軌跡**變成了曲線(加速度是一個相對的物理量，而加速度運動的軌跡是曲線)，同樣的，星球的公轉看起來也是不遵守慣性定律。這裡面一定有些錯誤發生，因爲慣性定律應該是在所有座標系都成立，而且跟我們取的座標系無關，物體本身一定得遵守慣性定律。

關於第一段提到局部 (local) 的特性，在想到地球上的現象時就有了一個想法：我們是在一個局部平坦，但是整體來看是個彎曲的空間中。舉例來說，一張紙上的三角形三角總和我們知道是 180 度，但是如果我們將地球上的三個國家用三條線連起來，成一個三角形，我們會發現其三角總和將會大於 180 度。這是一個暗示，因爲三角形的三角總和在平坦的面上是 180 度，但在彎曲的面上將會超過 180 度。這個現象暗示了 **幾何特性 (geometric property)** 是可以被量測到的，而且是有方法可以去量測我們存在的時空的維度，就像上述的例子：一個球的表面不是歐式空間 (Euclidean space)，但是在局部時，歐式幾何會是個很好的近似。這些現象提供了關於更高維度的足夠資訊。另一方面，當想到測地線 (geodesics) 時，關於第二段慣性定律的問題，也有了別的想法：如果一個最短的曲線，在沿著這條曲線前進，其與之相切的向量都會保持平行的話，就被定義爲‘測地線’，而測地線也被定義爲，在黎曼流面 (Riemannian manifold) 上局部的兩點間，有著‘固定的速度’且被參數化的最短路徑。因爲慣性定律的定義，我們可以很明顯的看出，測地線的概念跟慣性定律的觀念其實是一樣的。

愛因斯坦告訴我們，分析局部性及慣性定律的問題之後，唯一可以解決問題的想法就是***幾何 (geometry)***。**微分幾何 (Differential geometry)** 用一種合理的方式完美的描述了我們存在的時空， **測地線 (Geodesics)** 則解釋了慣性運動的問題：是幾何造成了運動軌跡的改變，讓原本遵守著慣性定律的運動，看起來不像是慣性運動。畢竟，在物理定律裡，我們相信任何物體都必須遵守著慣性定律。

而在一個均勻、大尺度，而且沒有任何物體的時空中，很直觀的可以相信，物體‘看’起來一定是遵守著慣性定律的。但如果是有物質存在的地方，比如說星球、星系甚至星團，一定就像我們看地球繞太陽的公轉一樣，似乎沒有遵守著慣性定律。因此，我們有了這個結論：是物質扭曲了時空，而扭曲的時空有其幾何特性，這些幾何特性則造成了物體運動行爲的改變，也就是說，這些運動行爲的改變就是我們以爲的加速度 (或者說，重力，或者說，只是物體在遵守慣性定律下，順著時空的彎曲自然移動的軌跡)，其表現出幾何特性而且可以被局部的量測。物質含有越多的質量，時空因爲物質而造成的扭曲就越大。牛頓的萬有引力只是慣性運動在扭曲時空中表現出的運動行爲，小尺度的時空扭曲造成我們以爲的重力 (加速度)，大尺度的時空扭曲則決定了物質分佈的集中程度。

廣義相對論用時空的幾何特性，完美的描述了重力，這個理論不但完全符合狹義相對論，而且能處理狹義相對論中未考慮的加速度運動。狹義相對論跟牛頓的萬有引力被完美的結合了。

1.3 宇宙無毛定理

從宇宙無毛推論 (Cosmic no-hair conjecture) 到宇宙無毛定理 (Cosmic no-hair theorem)，只有在一些比較特殊的例子有被成功證明，整體而言其實還並沒有一個很完整的證明，但是這些例子都有一個共同的特性：「對一個幾何被定義的時空，跟有物理動機特性的能量-動量張量而言，重力場場方程式解出的所有的解都會趨向於一個曲率是常數的時空。」[6] 我們可暫時稱之爲廣義的宇宙無毛推論。

在 [7] 中被引用的 [8] 是第一篇關於宇宙無毛推論的論文，指出「每一個行爲在大尺度下滿足自然均勻情況的世界，都會趨向於 de Sitter 時空。」第一個對 de Sitter 時空做穩定性研究的則是 [9]。Gibbons 跟 Hawking 在 1977 年提出的宇宙無毛推論 [10]，大致上來說，表示愛因斯坦方程式解出的一個膨脹宇宙的解，如果有著正的宇宙常數，那這個解在很長的時間後，將會趨近於 de Sitter 的解。這個理論暗示了此一行爲可以被視爲是 de Sitter 時空的穩定性問題。無毛 (No hair) 是說它並沒有其他很複雜的特徵。

Gibbons 跟 Hawking 在 1977 年提出的宇宙無毛推論後，在 1983 年，Wald 證明了一部分 [11]，將 ‘推論’ 中的一部分變成 ‘定理’：證明出在**愛因斯坦的重力理論**中，如果滿足強能量條件跟主能量條件，Bianchi type I - VIII 都會趨向於 de Sitter 時空。

其後，在一些包含由里奇張量跟里奇純量構成二次項 (quadratic terms) 的**全新重力理論**出現後，一個幾何被定義的時空是否也會趨向 de Sitter 時空就是個很重要的問題，一些像 Type I, II, VI_h 的不會趨向於 de Sitter 時空的不均向解被找了出來，也被認爲是違反、打破廣義無毛定理的膨脹解 [1]。但根據 Hawking 的推論，解出的不均向，也就是不會趨向於 de Sitter 時空的解都被認爲應該是不穩定的，也就是最後整個系統都還是會趨向於 de Sitter 時空。

之前被認爲是打破廣義無毛定理的 Type I (此篇論文) 跟 II 的不均向解已經被證明出是不穩定的 [4]。我們希望能繼續證明 Bianchi type I - IX 的不均向解都是不穩定的，也就是全部的 Bianchi type 都會趨向 de Sitter 時空。

type II

度規型式如下:

$$ds^2{}_{II} = -dt^2 + e^{2bt}[dx + \frac{a}{2}(zdy - ydz)]^2 + e^{bt}(dy^2 + dz^2) \tag{1.1}$$

解出的不均向解爲

$$a^2 = \frac{11 + 8\Lambda(11\alpha + 3\beta)}{30\beta}, \qquad b^2 = \frac{8\Lambda(\alpha + 3\beta) + 1}{30\beta} \tag{1.2}$$

type VI$_h$

度規型式如下:

$$ds^2{}_{VI_h} = -dt^2 + dx^2 + e^{2(rt+ax)}[e^{-2(st+a\tilde{h}x)}dy^2 + e^{+2(st+a\tilde{h}x)}dz^2] \tag{1.3}$$

解出的不均向解爲

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{8\beta s^2 + (3 + \tilde{h}^2)(1 + 8\Lambda\alpha) + 8\Lambda\beta(1 + \tilde{h}^2)}{8\beta\tilde{h}^2}, \\ a^2 &= \frac{8\beta s^2 + 8\Lambda(3\alpha + \beta) + 3}{8\beta\tilde{h}^2} \end{aligned} \tag{1.4}$$

而在 [2] 中被證明爲不穩定的 Type I 的不均向解 (部分推導放在第五章), 我們也在第四章用微擾方式證明出不穩定。

type I

度規型式如下:

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)dy^2 + a_3^2(t)dz^2 \tag{1.5}$$

解出的不均向解爲

$$\begin{aligned} &[a^2 + b^2 + c^2 = \Lambda,\ ab + bc + ac = \Lambda] \\ &[a^2 + b^2 + c^2 = \frac{-1 - 8\alpha\Lambda}{2\beta},\ ab + bc + ac = \frac{1 + 8\alpha\Lambda + 4\beta\Lambda}{2\beta}] \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.4 能量和動量

當處理一個物理系統, 我們沒有必要去處理每一個個別粒子的能量 - 動量 (Energy-momentum)。取而代之的是, 如果我們以一個巨觀的角度來看, 將整個系統考慮成一個理想

狀態的流體，那將會是非常有用而且方便的，因爲這個流體本身就會有一個整體的 四維速度 (Four-velocity) 跟連續 (Continuum) 的性質。

四維能量 - 動量 (Stress-energy 張量) $T^{\mu\nu}$ 代表 '四維動量 p^{μ} 通過 x^{ν}爲定值的面的流量 (flux) ', 所以 T^{00} 代表 '能量 p^0 在時間 x^0 的方向的流量' ，T^{ii} 代表 '能量 p^i 在座標 x^i 方向的流量' 。對於 T^{00} 的變動，空間座標的部分並不會改變；而對於 T^{ii}，它的變動代表在鄰近元素之間被施加的力 (Forces) 。我們定義 T^{00} 爲靜止參考座標的能量密度 (Energy density) ρ，而 T^{ii} 以物理角度來看則是壓力 p_{x_i}。

在相對論中，觀察者在哪個參考座標示非常重要的，尤其是所謂的靜止座標 (Rest frame)，因爲我們在分析相對運動時，需要一個基準。另一方面，如果在處理流體問題時，流體有著均向的特性，那將會簡單許多，因此我們定義完美流體 (perfect fluid) 有著兩個量：在靜止座標系時的能量密度 ρ 跟在均向靜止座標系的壓力 p。如果完美流體在一個座標系是均向的，而且在別的座標系也是保持著均向，那這個流體在共動座標 (Comoving coordinates) 中就是靜止的。

能量 - 動量張量

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_{\mu}U_{\nu} + pg_{\mu\nu} \tag{1.7}$$

將一個指標 (index) 移至上標，變成

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

無毛定理中，關於能量這部分進一步的計算過程被放在章節 3.5 中。

1.5 Friedmann Robertson-Walker 度規

由於均勻且均向的特性，我們通常用 Robertson-Walker 度規去描述我們的宇宙。

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2 d\Omega^2] \tag{1.9}$$

這邊這個膨脹宇宙是空間均勻的，但是是隨著時間在演化，而這個相對距離的函數 a(t) 被稱爲尺度因子 (Scale factor)。κ 是空間的曲率，可以爲任何值，但是在描述我們宇宙的形狀時，通常是考慮以下的三個值:

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \text{if closed 3-sphere} \\ 0, & \text{if Euclidean space} \\ -1, & \text{if open 3-hyperboloid} \end{cases} \tag{1.10}$$

用 RW 度規去推導出章節 1.4 中的能量 - 動量張量，如此一來我們可以找出，以下型式的愛因斯坦方程式的確切的解:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \tag{1.11}$$

(1.11) 的 00 部分爲

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{1.12}$$

用 (1.12)，(1.11) 的 ij 部分會變成

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} \tag{1.13}$$

(1.12) 和 (1.13) 被稱做 Friedmann 方程式，代表均勻且均向空間的膨脹。如果 (1.9) 符合 Friedmann 方程式，則被稱爲 Friedmann-Robertson-Walker 度規。

1.6 De Sitter 時空

關於最對稱的空間，一個最常見的例子就是歐式空間 (Euclidean spaces) $\mathbb{R}^n$ 和球狀空間 $\mathbb{S}^n$。曲率在每個地方都是一樣的 (經過平移後的不變量爲均勻)，而且在每個方向也都是一樣的 (經過旋轉後的不變量爲均向)。

對於任何一個最對稱的 n - 維度流面 (manifold)，

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu} =& \frac{R}{n(n-1)}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \\ =& \kappa(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \end{aligned} \tag{1.14}$$

De Sitter 時空是一個正曲率 ($\kappa > 0$)，最對稱而且符合羅倫茲轉換的時空。在廣義相對論中， de sitter 解是一個眞空解。

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{1.15}$$

滿足 $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ with $T_{\mu\nu} = 0$ 。

一個膨脹 de Sitter 宇宙的加速是被宇宙常數 (Cosmological constant) Λ 所決定，因爲物質 (Matter sources) 被忽略。我們的宇宙極有可能是會趨向於 de sitter 宇宙。

Chapter 2

Bianchi 模型

2.1 序言

黎曼流面 (Riemannian manifold) (M, g^M) 是一個平滑可微分的流面 M，有著正的內積 (inner product) 度規 g^M，其定義如下

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1\cdots n} g_{ik} dx_i dx_k \ , \tag{2.1}$$

這是其在 M 的任何相切空間上的 line element 的平方，而且每個相切空間都是一個歐式空間 (Euclidean space) $\mathbb{R}^n$，n 是有限的。有了度規，我們就可以去定義像是長度、角度、面積跟一些向量場計算的幾何特性。

如果一個物理系統在經過可微分的轉換後，有一些不變量，這就是對稱。兩個度規空間 (M, g^M) 跟 (N, g^N) 之間，一對一而且等距的映射 (one-to-one and distance-preserving map) 稱做 *isometry*，其被定義爲

$$The\ line\ elements\ d_N(f(a), f(b)) = d_M(a, b),\ for\ any\ a,\ b\ \in\ M. \tag{2.2}$$

因此這也是一種對稱，一個度規空間對自己做 isometry 被稱爲 *motion*，所有可能的 motions 而成的集合 (set) 就形成一個 *group*。現在我們用有限維度的李群 (Lie group)，就如同包含某些參數的轉換一樣，來描述連續的 motions。[12][13][14]

而我們想要呈現的是，在 line elements 是不變量 (2.2) 的 isometric 轉換下，所有可能形式的 ds^2 。事實上， Bianchi type 模型有九種，我們會將這九種類型放在章節 2.6。

2.2 李代數和李群

大部分的物理空間都是可微的流面，而李群 (*Lie group*) 也是一個可微的流面。它代表數學物理中，平滑變化的組對稱 (smoothly varying families symmetries)，而且它的局部性結構由 '無限小的群 (infinitesimal groups)' 所掌握，這些無限小的群就是李代數 (*Lie algebras*)。李代數提供了無限小轉換的觀念，這些觀念在處理連續狀況時是必要的，而李代數之所以可以被定義，是因爲李群在各個點都有相切的空間。

一個群 G_i 由無限小的轉換所產生

$$X_\alpha f = \sum_{r}^{1\cdots n} \xi_r^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_r}, \quad where\ \alpha = 1, 2, \cdots, n \tag{2.3}$$

由 r 無限小的轉換所產生的李群爲

$$G_r = (X_1 f, X_2 f, \cdots X_n f) \tag{2.4}$$

這邊 n 是 n 維的空間 $\mathbb{S}^n$ ，而且 $r \leq \frac{n(n+1)}{2}$。

2.3 Killing 方程式

Killing 方程式保持了流面上任意兩點間的距離，而且我們可以利用它來推導出在 isometric 轉換下所有可能的 ds^2。推導的過程如下:

根據上面的觀念，我們知道，當一個像 (2.3) 般無限小的轉換作用在 ds^2 上面，其結果必定等於零，因爲距離 ds^2 必須是個不變量。

對於先前定義的 $ds^2 = \sum_{i,k}^{1\cdots n} a_{ik} dx_i dx_k$,

$$\begin{aligned} X(ds^2) =& \sum_{i,k} X(a_{ik}) dx_i dx_k + \sum_{r,k} X(a_{rk}) dx_r dx_k + \sum_{i,r} X(a_{ir}) dx_r dx_i \\ =& \sum_{i,k,r} \xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} dx_i dx_k + \sum_{r,k} a_{rk} d\xi_r dx_k + \sum_{i,r} a_{ir} d\xi_r dx_i \\ =& \sum_{i,k} \{ \sum_r (\xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{rk} \frac{\xi_r}{\partial x_i} + a_{ir} \frac{\xi_r}{\partial x_k}) \} dx_i dx_k \\ =& 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

因此這些函數 ξ_r 一定得滿足

$$\sum_r (\xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{rk} \frac{\xi_r}{\partial x_i} + a_{ir} \frac{\xi_r}{\partial x_k}) = 0 \tag{2.6}$$

這邊 $i, k = 1, 2 \cdots, n$，而 (2.6) 就是 Killing 方程式。

2.4 G_3 的 Motions

這個章節我們論證，如果一個像 (2.4) 的群被給定，是否有任何一個空間 $\mathbb{S}^n$ 會存在。因爲當一個由轉換所產生的群產生時，我們需要一個容許像 (2.4) 一樣，一個 motions 中的群的空間。

用一個線性組合來取代 $X_1 f, X_2 f, X_3 f$ [14]

$$[X_\alpha, X_\beta] f = \sum_\gamma c_{\alpha\beta\gamma} X_\gamma f \tag{2.7}$$

(2.6) 變成

$$X_\alpha(a_{ik}) + \sum_r (a_{ir} \frac{\xi_r^{(\alpha)}}{\partial x_k} + a_{kr} \frac{\xi_r^{(\alpha)}}{\partial x_i}) = 0, \quad where\ \alpha, i, k = 1, 2, \cdots, n \tag{2.8}$$

將 (2.8) 中的指標 (index) 從 α 換成 β，並且在前面加一個運算符 (operator)。

$$X_\beta[X_\alpha(a_{ik}) + \sum_r (a_{ir}\frac{\xi_r^{(\alpha)}}{\partial x_k} + a_{kr}\frac{\xi_r^{(\alpha)}}{\partial x_i})] = 0$$
$$X_\alpha[X_\beta(a_{ik}) + \sum_r (a_{ir}\frac{\xi_r^{(\beta)}}{\partial x_k} + a_{kr}\frac{\xi_r^{(\beta)}}{\partial x_i})] = 0 \tag{2.9}$$

很明顯的，(2.9) 中的兩個式子相減會是 identity。

另一方面，根據 (2.7)，我們知道

$$X_\alpha(\xi_r^{(\beta)}) - X_\beta(\xi_r^{(\alpha)}) = \sum_r c_{\alpha\beta\gamma}\xi_r^{(\gamma)} \tag{2.10}$$

接著將 (2.10) 對 x_k 微分

$$\begin{aligned} & X_\alpha(\frac{\partial\xi_r^{(\beta)}}{\partial x_k}) - X_\beta(\frac{\partial\xi_r^{(\alpha)}}{\partial x_k}) \\ = & \sum_\gamma c_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\xi_r^{(\gamma)}}{\partial x_k} + \sum_s (\frac{\partial\xi_r^{(\alpha)}}{\partial x_s}\frac{\partial\xi_s^{(\beta)}}{\partial x_k} - \frac{\partial\xi_s^{(\alpha)}}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_r^{(\beta)}}{\partial x_s}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

經過一些很直接的計算，(2.11) 會變成一個 identity。將這個結果跟 (2.10)比較，可以看出 a_{ik} 的整個微分方程系統是可積分的 。因此因爲 a_{ik} 在一個點的初始值在鄰近區域中都會保持一樣，我們成功的定義 G_n 爲幾組在 $\mathbb{S}^n$ 中的 motions (families of motions) 。當然，係數 a_{ik} 可以被想成就是度規 g_{ik}。

2.5 Bianchi 型態 I

Bianchi type I 像 (2.7) 的線性組合爲

$$[X_1, X_2]f = [X_1, X_3]f = [X_2, X_3]f = 0 \tag{2.12}$$

對於以下的空間而言，這邊有個例子 [14]

$$ds^2 = dx_1^2 + \alpha dx_2^2 + 2\beta dx_2 dx_3 + \gamma dx_3^2 \tag{2.13}$$

假設 $X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}$, $X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_3}$ and $X_3 f = \xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3\frac{\partial f}{\partial x_3}$

Killing 方程式會變成

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0, \\
&\alpha \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = 0 \\
&\beta \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = 0 \\
&\frac{1}{2}\alpha' \xi_1 = 0 \\
&\frac{1}{2}\gamma' \xi_1 = 0 \\
&\beta' \xi_1 = 0
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

從 (2.14) 中最後三個方程式，可以得到 α, β, γ 爲常數，因爲根據我們的定義及假設，ξ_1 不會等於零。我們得到這個結論：在 Bianchi type I 模型中，曲率等於零。

2.6 九種 Bianchi 型態

$$
\begin{aligned}
I:\ & [X_1,X_2]f=[X_1,X_3]f=[X_2,X_3]f=0\\
& \quad ds^2=-\,dt^2+a_1^2(t)dx^2+a_2^2(t)dy^2+a_3^2(t)dz^2\\[1em]
II:\ & [X_1,X_2]f=[X_1,X_3]f=0,\ [X_2,X_3]f=X_1f\\
& \quad ds^2=-\,dt^2+a_1^2(t)(dx+zdy)^2+a_2^2(t)dy^2+a_3^2(t)dz^2\\[1em]
III:\ & [X_1,X_2]f=0,\ [X_1,X_3]f=X_1f,\ [X_2,X_3]f=0\\
& \quad ds^2=-\,dt^2+e^{-2z}(a_1^2(t)(coshzdx+sinhzdy)^2+a_2^2(t)(sinhzdx+coshzdy)^2)\\
& \qquad\qquad +a_3^2(t)dz^2\\[1em]
IV:\ & [X_1,X_2]f=0,\ [X_1,X_3]f=X_1f,\ [X_2,X_3]f=X_1f+X_2f\\
& \quad ds^2=-\,dt^2+e^{-2z}(a_1^2(t)(dx+zdy)^2+a_2^2(t)dy^2)+a_3^2(t)dz^2\\[1em]
V:\ & [X_1,X_2]f=0,\ [X_1,X_3]f=X_1f,\ [X_2,X_3]f=X_2f\\
& \quad ds^2=-\,dt^2+e^{-2z}(a_1^2(t)dx^2+a_2^2(t)dy^2)+a_3^2(t)dz^2\\[1em]
VI:\ & [X_1,X_2]f=0,\ [X_1,X_3]f=X_1f,\ [X_2,X_3]f=hX_2f,\ (h\neq 0.1)\\
& \quad ds^2=-\,dt^2+a_1^2(t)(coshzdx+sinhzdy)^2+a_2^2(t)(sinhzdx+coshzdy)^2\\
& \qquad\qquad +a_3^2(t)dz^2\\[1em]
VII:\ & [X_1,X_2]f=0,[X_1,X_3]f=X_2f,\ [X_2,X_3]f=-X_1f+hX_2f,\ (0\leq h<2)\\
& \quad ds^2=-\,dt^2+a_1^2(t)(coszdx+sinzdy)^2+a_2^2(t)(sinzdx-coszdy)^2\\[1em]
VIII:\ & [X_1,X_2]f=X_1f,[X_1,X_3]f=2X_2f,\ [X_2,X_3]f=X_3f\\
& \quad ds^2=-\,dt^2+a_1^2(t)(coshzdx-sinhz\ sinhx\ dy)^2+a_2^2(t)(sinhzdx-coshz\ sinhx\ dy)^2\\
& \qquad\qquad +a_3^2(t)(dz+coshxdy)^2\\[1em]
IX:\ & [X_1,X_2]f=X_3f,\ [X_2,X_3]f=X_1f,\ [X_3,X_1]f=X_2f\\
& \quad ds^2=-\,dt^2+a_1^2(t)(coszdx+sinz\ sinx\ dy)^2+a_2^2(t)(-sinzdx+cosz\ sinx\ dy)^2\\
& \qquad\qquad +a_3^2(t)(dz+cosxdy)^2
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Chapter 3

Bianchi 型態 I 模型

3.1 前言

在廣義相對論中，變數 (dynamical variable) 是度規 $g_{\mu\nu}$。對於一個表示成，由 Lagrange density $\mathcal{L}$ 對整個時空積分的 action S，

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} L \tag{3.1}$$

因爲 S 在座標轉換下必須是個不變量，所以 Lagrange density $\mathcal{L}$ 必須是個跟參考座標無關的純量，而且要包含變數 (dynamic variable) 的二階微分，不可以有更高次的微分項，因爲運動方程式在確定一個物理狀態時，只需要第一階跟第二階的微分就已經足夠。對里奇張量做縮減 (contraction) 得到的里奇純量滿足這些特性，因此著名的 Einstein-Hilbert action 爲下列的型式：

$$S_H = \int d^n x \sqrt{-g} R \tag{3.2}$$

Barrow 跟 Hervik 從原本表現出不均向爆漲的 Einstein - Hilbert action 出發，研究了一個增加二階項里奇曲率項的新重力理論，並且列出了一些關於這個新理論，簡單的宇宙的解[1][15][16]。

這個理論中，四維的重力 action 是

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \alpha R^2 + \ \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - 2\Lambda) \tag{3.3}$$

對這個 action 做變分，就可以得到愛因斯坦方程式 [17]。

$$G_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

這邊 $T_{\mu\nu}$ 是代表物質 (matter sources) 的能量 - 動量張量，我們會假設其爲零。而愛因斯坦張量 (Einstein tensor) 是

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu}/2 \ , \tag{3.5}$$

$\Phi_{\mu\nu}$ 這個張量則是從二階項里奇曲率項來的

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu\nu} = {} & 2\alpha R(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu}) + (2\alpha + \beta)(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu \nabla_\nu) R \\ & + \beta\Box(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) + 2\beta(R_{\mu\sigma\nu\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R_{\sigma\rho}) R^{\sigma\rho} \ ,\end{aligned} \tag{3.6}$$

而且我們可以看出 $\Phi_{\mu\nu}=0$ if $\alpha=\beta=0$。

另一方面，Bianchi type I 的度規是:

$$ds^2=-b^2(t)dt^2+a_1^2(t)dx^2+a_2^2(t)dy^2+a_3^2(t)dz^2\ , \tag{3.7}$$

這邊相對距離的函數 $a_i(t)$ 是個時間的函數，被稱做尺度因子 (scale factor)。爲了方便，我們可以將度規跟反度規 (inverse metric) 寫成下面的形式:

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} -b^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2(t) & 6 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^2(t) \end{pmatrix},\ g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \frac{1}{-b^2(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1^2(t)} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_2^2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3^2(t)} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

對於 (3.3) 中的四維重力 action，我們可以得到

$$\sqrt{-g}=b(t)a_1(t)a_2(t)a_3(t) \tag{3.9}$$

而在這篇論文中，我們會考慮以下較爲簡單的度規型式:

$$ds^2=-dt^2+a_1^2(t)dx^2+a_2^2(t)dy^2+a_3^2(t)dz^2 \tag{3.10}$$

3.2 基本計算

3.2.1 克里斯托夫符號 (Christoffel Components)

克里斯托夫符號 (Christoffel components) 代表相切空間中跟鄰近點的向量之間的關係。由度規所構成的公式如下:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma}+\partial_\nu g_{\sigma\mu}-\partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{3.11}$$

不等於零的克里斯托夫符號 (Christoffel components) 爲:

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{11}&=a_0(t)a_0'(t)\\ \Gamma^0_{22}&=a_1(t)a_1'(t)\\ \Gamma^0_{33}&=a_2(t)a_2'(t)\\ \Gamma^1_{10}&=\frac{a_0(t)}{a_0'(t)}\\ \Gamma^2_{20}&=\frac{a_1(t)}{a_1'(t)}\\ \Gamma^3_{30}&=\frac{a_2(t)}{a_2'(t)}\end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2.2 黎曼張量 (Riemann tensor)

黎曼張量提供我們關於流面曲率的所有資訊。只有如果 (if and only if) 度規是平坦的，它才會等於零。黎曼張量的最後兩個指標 (indices) 是反對稱的。我們可以用這個公式得到黎曼張量:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \tag{3.13}$$

不等於零的黎曼張量爲

$$\begin{aligned}
R^{0}_{110} &= -a_0(t)a_0''(t)\\
R^{0}_{220} &= -a_1(t)a_1''(t)\\
R^{0}_{330} &= -a_2(t)a_2''(t)\\
R^{1}_{010} &= -\frac{a_0''(t)}{a_0(t)}\\
R^{1}_{221} &= -\frac{a_1(t)a_0'(t)a_1'(t)}{a_0(t)}\\
R^{1}_{331} &= -\frac{a_2(t)a_0'(t)a_2'(t)}{a_0(t)}\\
R^{2}_{020} &= -\frac{a_1''(t)}{a_1(t)}\\
R^{2}_{121} &= \frac{a_0(t)a_0'(t)a_1'(t)}{a_1(t)}\\
R^{2}_{332} &= -\frac{a_2(t)a_1'(t)a_2'(t)}{a_1(t)}\\
R^{3}_{030} &= -\frac{a_2''(t)}{a_2(t)}\\
R^{3}_{131} &= \frac{a_0(t)a_0'(t)a_2'(t)}{a_2(t)}\\
R^{3}_{232} &= \frac{a_1(t)a_1'(t)a_2'(t)}{a_2(t)}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.2.3 里奇張量 (Ricci tensor)

里奇張量是黎曼張量的縮減 (contraction)，是對稱的。我們可以由以下公式得到所有的里奇張量:

$$R_{\sigma\nu} = R^{\rho}_{\sigma\rho\nu} \tag{3.15}$$

不爲零的里奇張量爲:

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{a_0''(t)}{a_0(t)} - \frac{a_1''(t)}{a_1(t)} - \frac{a_2''(t)}{a_2(t)} \\
R_{11} &= a_0(t)(\frac{a_0'(t)a_1'(t)}{a_1(t)} + \frac{a_0'(t)a_2'(t)}{a_2(t)} + a_0''(t)) \\
R_{22} &= a_1(t)(\frac{a_0'(t)a_1'(t)}{a_0(t)} + \frac{a_1'(t)a_2'(t)}{a_2(t)} + a_1''(t)) \\
R_{33} &= a_2(t)(\frac{a_0'(t)a_2'(t)}{a_0(t)} + \frac{a_1'(t)a_2'(t)}{a_1(t)} + a_2''(t))
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

3.2.4 里奇純量 (Ricci tensor)

里奇純量是里奇張量取跡 (trace) 而得到的。根據公式

$$R = R^{\mu}_{\mu} \ , \tag{3.17}$$

我們可以得到里奇純量

$$
\begin{aligned}
R =& \frac{1}{a_0(t)a_1(t)a_2(t)} 2(a_0(t)a_1'(t)a_2'(t) + a_2(t)a_0'(t)a_1'(t) + a_2(t)a_1(t)a_0''(t) \\
&+ a_2(t)a_0'(t)a_1''(t) + a_1(t)a_0'(t)a_2'(t) + a_1(t)a_0'(t)a_2''(t))
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

3.2.5 愛因斯坦張量 (Einstein tensor)

愛因斯坦張量可以被視爲是 trace - reversed 的里奇張量，由於里奇張量跟度規的對稱性，所以它也是對稱的。

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \ , \tag{3.19}$$

不爲零的愛因斯坦張量爲

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{1}{a_0(t)a_1(t)a_2(t)}(a_0(t)a_1'(t)a_2'(t) + a_1(t)a_0'(t)a_2'(t) + a_2(t)a_0'(t)a_1'(t)) \\
G_{11} &= -\frac{1}{a_1(t)a_2(t)}(a_0^2(t)a_1'(t)a_2'(t) + a_0^2(t)a_1''(t)a_2(t) + a_0^2(t)a_1(t)a_2''(t)) \\
G_{22} &= -\frac{1}{a_0(t)a_2(t)}(a_1^2(t)a_0'(t)a_2'(t) + a_1^2(t)a_0''(t)a_2(t) + a_1^2(t)a_0(t)a_2''(t)) \\
G_{33} &= -\frac{1}{a_0(t)a_1(t)}(a_2^2(t)a_0'(t)a_1'(t) + a_2^2(t)a_0''(t)a_1(t) + a_2^2(t)a_0(t)a_1''(t))
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

3.3 場方程式的推導

3.3.1 對尺度因子 (Scale factors) 做變分

我們創建一個模型，可以被用在 Einstein - Hilbert action 跟包含更高階衍生項的 action，來推導出場方程式 [3][18][19][20]。爲了方便，我們將 (3.8) 寫成

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^2(t) \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

並且用哈伯參數 (Hubble parameter)

$$H_i = \frac{\dot{a}_i(t)}{a_i(t)} \tag{3.22}$$

來重新定義之前的基本計算。因此，像哈伯參數這樣膨脹的比率被定義了，而現在時期的哈伯參數就是哈伯常數 (Hubble constant)。

結果，(3.16) 變成

$$\begin{aligned} R_0^0 &= \frac{1}{2}\dot{B}H_1 + B(H_1^2 + \dot{H}_1) \\ R_1^1 &= \frac{1}{2}\dot{B}H_1 + B(H_1^2 + \dot{H}_1 + H_1H_2 + H_1H_3) \\ R_2^2 &= \frac{1}{2}\dot{B}H_2 + B(H_2^2 + \dot{H}_2 + H_1H_2 + H_2H_3) \\ R_3^3 &= \frac{1}{2}\dot{B}H_3 + B(H_3^2 + \dot{H}_3 + H_1H_3 + H_2H_3)\ , \end{aligned} \tag{3.23}$$

(3.18) 變成

$$\begin{aligned} R = R_\mu^\mu =& B(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1H_2 + H_2H_3 + H_1H_3) \\ &+ \frac{1}{2}\dot{B}(H_1 + H_2 + H_3) \end{aligned} \tag{3.24}$$

(3.24) 的等號右邊跟 x_i 無關，因爲 Bianchi type I 的度規是均勻的。

然後， (3.20) 變成

$$\begin{aligned} G^{00} &= H_1H_2 + H_2H_3 + H_1H_3 \\ G^{11} &= -g^{11}(H_2^2 + \dot{H}_2 + H_3^2 + \dot{H}_3 + H_2H_3) \\ G^{22} &= -g^{22}(H_1^2 + \dot{H}_1 + H_3^2 + \dot{H}_3 + H_1H_3) \\ G^{33} &= -g^{33}(H_1^2 + \dot{H}_1 + H_2^2 + \dot{H}_2 + H_1H_2) \end{aligned} \tag{3.25}$$

在 Bianchi type I 模型中，(3.3) 的 Lagrange 會變成

$$\begin{aligned} L =& 2(\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + H_1H_2 + H_2H_3 + H_1H_3) \\ &+ 4\alpha(\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + H_1H_2 + H_2H_3 + H_1H_3)^2 \\ &+ \beta((\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2)^2 + (\dot{H}_1 + H_1^2 + H_1H_2 + H_1H_3)^2 \\ &+ (\dot{H}_2 + H_2^2 + H_2H_1 + H_2H_3)^2) + (\dot{H}_3 + H_3^2 + H_3H_1 + H_3H_2)^2) \end{aligned} \tag{3.26}$$

我們用 [18] 中的方法來推導場方程式。 [21]–[25]

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}L = \frac{a_1(t)a_2(t)a_3(t)}{\sqrt{B}}L = VL \tag{3.27}$$

對 *scale factor* B 做變分

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial B} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{B}}) =&0\\ =&[-\frac{1}{2}VL + V\frac{\partial L}{\partial B}] - \frac{d}{dt}[V\frac{\partial L}{\partial\dot{B}}]\\ =&[-\frac{1}{2}VL + V\frac{\delta L}{\delta B}] - [\dot{V}\frac{\partial L}{\partial\dot{B}} + V\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{B}}]\\ =&[-\frac{1}{2}VL + V\frac{\partial L}{\partial B}] - [(H_1 + H_2 + H_3)\frac{\partial L}{\partial\dot{B}} + V\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{B}}]\end{aligned} \tag{3.28}$$

經過一些下面的代數轉換

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial B} &= H_i\frac{\partial L}{2\partial H_i} + \dot{H}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{H}_i},\\ \frac{\partial L}{\partial\dot{B}} &= \frac{H_i\partial L}{2\partial\dot{H}_i}\ ,\end{aligned} \tag{3.29}$$

(3.28) 會變成

$$V[-L + H_i\frac{\partial L}{\partial H_i} + 2\dot{H}_i\frac{\partial L}{2\partial\dot{H}_i} - 3H\frac{H_i\partial L}{\partial\dot{H}_i} - \frac{d}{dt}\frac{H_i\partial L}{\partial\dot{H}_i}] = 0\ , \tag{3.30}$$

這邊 $3H = H_1 + H_2 + H_3$。

最後，場方程式 $D_0\mathcal{L}$ 可以表示成

$$D_0\mathcal{L} = L + H_i(\frac{d}{dt} + 3H)L^i - H_iL_i - \dot{H}_iL^i = 0\ , \tag{3.31}$$

這邊 $L_i = \delta L/\delta H_i$，$L^i = \delta L/\delta\dot{H}_i$，$3H = \sum_{i=1}^{n} H_i$。

對 *scale factor* a_i 做變分

原本應該是要對 a_i 做變分，但是我們會換成對 H_i 做變分。下面我們會拿原本對 a_2 做變分的來當例子。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_2} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a_2}}) + \frac{d^2}{dt^2}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{a_2}}) = 0 \\
&\quad = V[\frac{L}{a_2} + \frac{\partial L}{\partial a_2} - (\partial_0 + 3H)\frac{\partial L}{\partial \dot{a_2}} \\
&\qquad + (\partial_0^2 + 2 \cdot 3H\partial_0 + \dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + 2H_2H_3)\frac{\partial L}{\partial \ddot{a_2}}]
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

經過下面的一些代數轉換

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a_2} &= \frac{\partial L}{\partial H_2}\frac{\partial H_2}{\partial a_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_2}\frac{\partial \dot{H}_2}{\partial a_2} = -\frac{H_2}{a_2}L_2 - \frac{1}{a_2}[\dot{H}_2 - H_2^2]L^2 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{a_2}} &= \frac{\partial L}{\partial H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \dot{a_2}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_2}\frac{\partial \dot{H}_2}{\partial a_2} = \frac{L_2}{a_2} - \frac{2}{a_2}H_2L^2 \\
\frac{\partial L}{\partial \ddot{a_2}} &= \frac{L^2}{a_2} \ ,
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

(3.32) 變成

$$
\begin{aligned}
&\frac{L}{a_2} + [-\frac{H_2}{a_2}L_2 - \frac{1}{a_2}[\dot{H}_2 - H_2^2]L^2] \\
&+ [-\frac{1}{a_2}(\partial_0 + 3H)L_2 + (\partial_0 + 3H)\frac{2}{a_2}H_2L^2 - L_2\partial_0\frac{1}{a_2}] \\
&+ [\frac{1}{a_2}(\partial_0^2 + 2 \cdot 3H\partial_0 + \dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + 2H_2H_3)L^2 \\
&+ L^2\partial_0^2(\frac{1}{a_2}) + 2\partial_0(\frac{1}{a_2})\partial_0(L^2) + 2 \cdot 3H \cdot L^2 \cdot \partial_0(\frac{1}{a_2})] = 0
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

另一方面，從 (3.32) 跟 (3.34) 我們知道

$$
\begin{aligned}
&(\partial_0 + 3H)\frac{2}{a_2}H_2L^2 \\
&\quad = -2\frac{H_2^2L^2}{a_2} + 2\frac{\dot{H}_2L^2}{a_2} + \frac{2}{H_2(\partial_0L^2)}a_2 + 2\frac{3H \cdot H_2L^2}{a_2} \ ,
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

而且這邊我們用以下這個式子

$$
\begin{aligned}
(\partial_0 + H_i)^2L &= (\partial_0 + H_i)(\partial_0 + H_j)L \\
&= \partial_0^2L + \partial_0(H_jL) + H_i\partial_0L + H_iH_jL \\
&= (\partial_0^2 + \dot{H}_j + 2H_i\partial_0 + H_iH_j)L \ ,
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

則 (3.34) 變成

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a_2}(\partial_0^2 + 2\cdot 3H\partial_0 + \dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + 2H_2H_3)L^2 \\
=&\frac{1}{a_2}[L - (\partial_0 + 3H)L_2 + [(\partial_0 + 3H)^2 + 3H\cdot\partial_0]L^2] \\
=&0
\end{aligned} \tag{3.37}$$

終於，我們得到場方程式 $D_1\mathcal{L}$ 爲

$$L - (\partial_0 + 3H)L_2 + [(\partial_0 + 3H)^2]L^2 = 0 \tag{3.38}$$

我們可以將對 H_i, $i = 1, 2, 3$ 做變分而得到的三條場方程式相加，結合成一條方程式如下:

$$3L + (\frac{d}{dt} + 3H)^2 \sum_{i=1}^{n} L^i - (\frac{d}{dt} + 3H) \sum_{i=1}^{n} L_i = 0 \tag{3.39}$$

這邊 $L_i = \delta L/\delta H_i$, $L^i = \delta L/\delta \dot{H}_i$, $3H = \sum_{i=1}^n H_i$。

3.3.2 對 $g^{\mu\nu}$ 做變分

這邊有另外一個方法來推導場方程式，就是用最小作用量原理 (principle of least action) [26]。在廣義相對論中，度規 $g_{\mu\nu}$ 是定義在四維流面上的變數 (dynamic variable) 。因此，不像上個章節 3.3.1 用 Euler - Lagrange 方程式， 我們會把 S 中的度規做微小的變化。而爲了方便計算，對反度規的變分 (variations) 會取代對度規的變分，並且假設這些變分在邊界上會消失。

從 (3.3)，我們知道

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}L = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}(R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - 2\Lambda) \tag{3.40}$$

$$L = R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - 2\Lambda \tag{3.41}$$

設

$$\begin{aligned}
\delta S_1 =&\delta \int d^4x\sqrt{-g}(R), \\
\delta S_2 =&\alpha\ \delta \int d^4x\sqrt{-g}(R^2), \\
\delta S_3 =&\beta\ \delta \int d^4x\sqrt{-g}(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) \\
\delta S_4 =&2\beta\ \delta \int d^4x\sqrt{-g}\Lambda\ ,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

如此一來，我們可以分別計算

$$
\begin{aligned}
\delta S_1 &= \int d^4x[(\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}(\delta R)] \\
&= \int d^4x[(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) \;{}^{1}R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu})] \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}[(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} + \bigtriangledown_\sigma \bigtriangledown^\sigma (g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) \;{}^{2} - \bigtriangledown_\mu \bigtriangledown_\nu (\delta g^{\mu\nu})] \;{}^{3} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

腳註的細節計算會被放在附錄A (Appendix A)。

$$
\begin{aligned}
\delta S_2 =&\alpha \int d^4x[\delta\sqrt{-g}R^2) + \sqrt{-g}(2R\delta R)] \\
=&\alpha \int d^4x[(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})R^2 + \sqrt{-g}(2R)(\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu})] \\
=&\alpha \int d^4x\sqrt{-g}[(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})R^2 + 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) + 2Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu})] \\
=&\alpha \int d^4x\sqrt{-g}[R(G_{\mu\nu} + R_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} + 2R(\bigtriangledown_\sigma \bigtriangledown^\sigma (g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \bigtriangledown_\mu \bigtriangledown_\nu (\delta g^{\mu\nu})] \\
=&\alpha \int d^4x\sqrt{-g}[R(G_{\mu\nu} + R_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \alpha[0 - (0 - \int d^4x\sqrt{-g} \bigtriangledown_\sigma \bigtriangledown^\sigma (2R)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}] \\
&\quad - \alpha[0 - (0 - \int d^4x\sqrt{-g} \bigtriangledown_\mu \bigtriangledown_\nu (2R)\delta g^{\mu\nu} \\
=&\ \alpha \int d^4x\sqrt{-g}[R(G_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}) + g_{\mu\nu}\Box(2R) - \bigtriangledown_\mu \bigtriangledown_\nu (2R)]\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta S_3 =& \delta\ (\beta \int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) \\
=& \beta \int d^4x[(\delta\sqrt{-g})\ \ {}^{1}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}(\delta R^{\mu\nu})\ \ {}^{4} + \sqrt{-g}\delta(R_{\mu\nu})R^{\mu\nu}] \\
=& \beta \int d^4x\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\sigma\rho}R^{\sigma\rho}\delta g^{\mu\nu} + 2g^{\mu\sigma}R_{\sigma\rho}R_{\mu\nu}\delta g^{\nu\rho} + 2R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\ \ {}^{5}) \\
=& \beta \int d^4x\sqrt{-g}[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\sigma\rho}R^{\sigma\rho}\delta g^{\mu\nu} + 2g^{\mu\sigma}R_{\sigma\rho}R_{\mu\nu}\delta g^{\nu\rho}\ \ {}^{6} + 2(-\bigtriangledown_\alpha \bigtriangledown_\nu R^\alpha_\nu\ \ {}^{7} \\
&+ \frac{1}{2}\Box R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\bigtriangledown_\alpha \bigtriangledown_\beta R^{\alpha\beta}\ \ {}^{8})] \\
=& \beta \int d^4x\sqrt{-g}[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\sigma\rho}R^{\sigma\rho}\delta g_{\mu\nu} + 2R_{\mu\sigma\nu\rho}R^{\sigma\rho} + \bigtriangledown_\mu \bigtriangledown_\nu R - 2\bigtriangledown^\rho \bigtriangledown_\mu R_{\rho\nu} \\
&+ 2(-\bigtriangledown^\sigma \bigtriangledown_\nu R_{\sigma\mu} + \frac{1}{2}\Box R_{\mu\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\Box R)] \\
=& \beta \int d^4x\sqrt{-g}[-2\bigtriangledown^\sigma \bigtriangledown_\nu R_{\sigma\mu} + \Box R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\sigma\rho}R^{\sigma\rho} \\
&+ 2R_{\mu\sigma\nu\rho}R^{\sigma\rho} - \bigtriangledown_\mu \bigtriangledown_\nu R + 2\bigtriangledown^\rho \bigtriangledown_\mu R_{\rho\nu}]
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

腳註的細節計算會被放在附錄A (Appendix A)。

*在我們的模型中， $R_{ij}=0$, $i \neq j$, 因此在經過一些改變指標 (change index) 的計算， $-2\bigtriangledown^\sigma \bigtriangledown_\nu R_{\sigma\mu} + 2\bigtriangledown^\rho \bigtriangledown_\mu R_{\rho\nu}$ 可以被消掉。

將 $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box R$ 寫成 $g_{\mu\nu}\Box R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box R$， (3.45) 變成

$$
\begin{aligned}
&\beta \int d^4x\sqrt{-g}[(g_{\mu\nu}\Box - \bigtriangledown_\mu\bigtriangledown_\nu)R + \Box(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) + 2(R_{\mu\sigma\nu\rho}R^{\sigma\rho} \\
&- \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R_{\sigma\rho}R^{\sigma\rho}) - 2g_{\mu\nu}\Lambda]\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta S_4 =& 2\int d^4x(\delta\sqrt{-g})\Lambda \\
=& \int d^4x[(-\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})\Lambda \\
=& -\int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\Lambda\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

最後，場方程式爲

$$
\begin{aligned}
\delta S =& \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 + \delta S_4 \\
=& 2\alpha R(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu}) + (2\alpha + \beta)(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu \nabla_\nu) R \\
&+ \beta \Box (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) + 2\beta (R_{\mu\sigma\nu\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R_{\sigma\rho}) R^{\sigma\rho} - 2 g_{\mu\nu} \Lambda
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

3.3.3 場方程式

章節 3.3.1 跟章節 3.3.2 得到的結果必須是一樣的，根據 (3.31)、 (3.39) 跟 (3.48)，展開後的場方程式爲:

$D_0\mathcal{L}$:

$$
\begin{aligned}
&2H_1H_2 + 2H_1H_2 + 2H_1H_3 + \alpha(-4H_1^4 - 4H_2^4 - 4H_3^4 + 8H_1^2H_2H_3 + 8H_1H_2^2H_3 \\
&+ 8H_1H_2H_3^2 - 4H_1^2H_2^2 - 4H_2^2H_3^2 - 4H_1^2H_3^2) + \beta(-4H_1^4 - 4H_2^4 - 4H_3^4 + 2H_1^3H_2 \\
&+ 2H_1H_2^3 + 2H_2^3H_3 + 2H_2H_3^3 + 2H_1^3H_3 + 2H_1H_3^3 - 4H_1^2H_2^2 - 4H_2^2H_3^2 - 4H_1^2H_3^2) \\
&= 2\Lambda
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

$D_1\mathcal{L}$:

$$
\begin{aligned}
&4H_1^4 + 4H_2^4 + 4H_3^4 + 2H_1H_2 + 2H_2H_3 + 2H_1H_3 + \alpha(4H_1^4 + 4H_2^4 + 4H_3^4 \\
&+ 4H_1^2H_2^2 + 4H_2^2H_3^2 + 4H_1^2H_3^2 - 8H_1^2H_2H_3 - 8H_1H_2^2H_3 - 8H_1H_2H_3^2) \\
&+ \beta(2H_1^4 + 2H_2^4 + 2H_3^4 + 4H_1^2H_2^2 + 4H_2^2H_3^2 + 4H_1^2H_3^2 + 2H_1^3H_2 + 2H_1H_2^3 \\
&+ 2H_2^3H_3 + 2H_2H_3^3 + 2H_1^3H_3 + 2H_1H_3^3) = 6\Lambda
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

3.4 膨脹解 (Inflating solutions)

爲了計算方便，我們用 BH 解 (Barrow and Hervik solutions) 的設定來解這個問題。因此我們設定

$$
\frac{\dot{a_1}(t)}{a_1(t)} = a, \ \frac{\dot{a_2}(t)}{a_2(t)} = b, \ \frac{\dot{a_3}(t)}{a_3(t)} = c \tag{3.51}
$$

如此一來，Scale factor $\dot{a_i}(t)$ 會得到 $Exp(kt)$ 的型式，k 是常數，而且 $k = a\ or\ b\ or\ c$。章節 3.3.3 的場方程式會變成

$D_0\mathcal{L}$:

$$
\begin{aligned}
&2ab + 2ac + 2bc + \alpha(-4a^4 - 4a^2b^2 - 4b^4 + 8a^2bc + 8ab^2c - 4a^2c^2 + 8abc^2 - 4b^2c^2 - 4c^4) + \\
&\beta(-2a^4 + 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 - 2b^4 + 2a^3c + 2a^2bc + 2ab^2c + 2b^3c - 4a^2c^2 + 2abc^2 - 4b^2c^2 + \\
&2ac^3 + 2bc^3 - 2c^4) = 2\Lambda
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

$D_1\mathcal{L}$:

$$4a^2+4b^2+4c^2+2ab+2ac+2bc+\alpha(4a^4+4a^2b^2+4b^4-8a^2bc-8ab^2c+4a^2c^2-8abc^2+4b^2c^2+4c^4)+\beta(2a^4-2a^3b+4a^2b^2-2ab^3+2b^4-2a^3c-2a^2bc-2ab^2c-2b^3c+4a^2c^2-2abc^2+4b^2c^2-2ac^3-2bc^3+2c^4)=6\Lambda \tag{3.53}$$

接下來我們可以解 (3.52) and (3.53) 這兩條方程式來得到膨脹解。

Method I

令

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=x\\ ab+bc+ac&=y\ , \end{aligned} \tag{3.54}$$

這樣可以把 (3.52) 跟 (3.53) 簡化成兩個代數而已的方程式，比較好解:

$$\begin{aligned} 2y+2\alpha(-2x^2+2y^2)+\beta(-2x^2+2xy)&=2\Lambda\\ 4x+2y+4\alpha(x-y)(x+y)+2\beta x(x-y)&=6\Lambda \end{aligned} \tag{3.55}$$

於是我們可以得到，均勻但不均向的 Bianchi type I 時空中，新的兩組解。

$$\begin{aligned} &[a^2+b^2+c^2=\Lambda,\ ab+bc+ac=\Lambda]\\ &[a^2+b^2+c^2=\frac{-1-8\alpha\Lambda}{2\beta},\ ab+bc+ac=\frac{1+8\alpha\Lambda+4\beta\Lambda}{2\beta}] \end{aligned} \tag{3.56}$$

解第一組解的 BH 解 $a,\ b,\ c$

$$a=H_1=\sqrt{\frac{\Lambda}{3}},\ b=H_2=\sqrt{\frac{\Lambda}{3}},\ c=H_3=\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \tag{3.57}$$

可以看到這組解很明顯的是 de Sitter 時空的解，而且這個結果跟 (1.15) 是完全相同的。 第二組不會趨向於 de Sitter 時空的解很明顯的是不均向的

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=\frac{-1-8\alpha\Lambda}{2\beta}\\ ab+bc+ac=\frac{1+8\alpha\Lambda+4\beta\Lambda}{2\beta} \end{cases} \tag{3.58}$$

Method II

用 [16] 中的度規來計算，並且令

$$\begin{aligned} a=&b_0-2\sigma_+\\ b=&b_0+(\sigma_++\sqrt{3}\sigma_-)\\ c=&b_0+(\sigma_+-\sqrt{3}\sigma_-)\ , \end{aligned} \tag{3.59}$$

則我們可以得到一組跟 (3.58) 相等的解:

$$b_0^2 = \frac{1+8\alpha\rho+8\beta\rho}{18\beta}$$
$$\sigma_+^2+\sigma_-^2 = -\frac{1+8\alpha\rho+2\beta\rho}{9\beta} \tag{3.60}$$

(3.56) 我們列出了 Bianchi type I 的兩組解，而(3.60) 這組解很明顯的跟 [16] 解出的解不同。宇宙無毛定理指出，如果物質 (matter sources) 遵守強能量條件跟主能量條件，則對於一個有著正的宇宙常數的膨脹宇宙，愛因斯坦方程式解出的解，在大尺度時間會演化趨向至 de Sitter 時空。因此，我們會對在 Bianchi type I 時空， (3.56) 中的第二組或 (3.58) 這組不會趨向於 de Sitter 時空的解做微擾，來證明它的穩定性，以及確認它的能量條件狀況。

3.5 能量條件

首先，因爲愛因斯坦方程式並沒有明確的指出物質 (matter sources) 或是非重力場的分佈狀態，而我們關心的卻是，在宇宙現在的狀態，有哪些眞實具體的物質 $T^{\mu\nu}$ 可以給我們愛因斯坦方程式的解。不然，如果不考慮物質 $T^{\mu\nu}$ ，每一個 $G^{\mu\nu}$ 都一定會遵守愛因斯坦方程式。

即使愛因斯坦方程式的物質能量部分是不同的物質 (Sources)，但其方程式的特性都一定得滿足。所以爲了方便，我們可以用一些能量條件來限制 $T^{\mu\nu}$。而這些能量條件當然是跟選擇哪個座標系無關的，爲了滿足不變量的特性，這些能量條件是用從 $T^{\mu\nu}$ 產生的純量所構成。

而是爲什麼會需要這些能量條件呢？這些能量條件可以防止一些‘不眞實的’，或是‘不物理的’情況，比如說限制任何速度一定小於光速，或是一些在奇點理論 (Singularity theorem) 中的應用。但是這些條件實際上跟能量守恆定律 $D_\mu T^\mu_\nu = 0$ 並無關係。 接下來我們會考慮一些物質能量源爲理想流體的例子。

將 (3.4) 中的 $-\Phi^\mu_\nu$ 當作 能量 - 動量張量:

$$G^\mu_\nu + \Lambda g^\mu_\nu = -\Phi^\mu_\nu = T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

接下來我們介紹四種能量條件，並且試著去證實，宇宙無毛定理中提到的能量條件是否符合。

1.強能量條件
Strong Energy Condition (SEC): $\rho + P \geq 0$ & $\rho + P_1 + P_2 + P_3 \geq 0$

2.弱能量條件
Weak Energy Condition (WEC): $\rho + P \geq 0$ & $\rho \geq 0$

3.零能量條件

Null Energy Condition (NEC): $\rho + P \geq 0$

4.主能量條件
Dominant Energy Condition (DEC): $\rho \geq |P|$

$$\begin{aligned}
P1 =& \alpha[-2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)(a^2-b^2-c^2+ab-bc+ac)] \\
&+\beta[-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)(a^2-3b^2-3c^2-4bc)-\frac{1}{2}(a^2+ab+ac)^2 \\
&-\frac{1}{2}(b^2+ab+bc)^2-\frac{1}{2}(c^2+ac+bc)^2] \\
P2 =& \alpha[-2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)(b^2-a^2-c^2+ab+bc-ac)] \\
&+\beta[-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)(b^2-3a^2-3c^2-4ac)-\frac{1}{2}(a^2+ab+ac)^2 \\
&-\frac{1}{2}(b^2+ab+bc)^2-\frac{1}{2}(c^2+ac+bc)^2] \\
P1 =& \alpha[-2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)(c^2-a^2-b^2+bc+ac-ab)] \\
&+\beta[-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)(c^2-3a^2-3b^2-4ab)-\frac{1}{2}(a^2+ab+ac)^2 \\
&-\frac{1}{2}(b^2+ab+bc)^2-\frac{1}{2}(c^2+ac+bc)^2]
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\rho = -\frac{1}{2}(ab+bc+ac-a^2-b^2-c^2) \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
\rho + P_1 + P_2 + P_3 &= \rho + P \\
&= ab+bc+ac-a^2-b^2-c^2 \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{1}{2}(-ab-bc-ac+a^2+b^2+c^2) \\
\geq& \frac{1}{3}(ab+bc+ac-a^2-b^2-c^2) = |P_1+P_2+P_3|
\end{aligned} \tag{3.65}$$

要滿足宇宙無毛定理，需要滿足主能量條件 (DEC) 跟強能量條件 (SEC) [1]。經過計算，(3.56) 中的第一組解會滿足這兩個條件，然而，對於 Bianchi I 中 (3.58) 的解，如果 $\rho = -ab-bc-ac+a^2+b^2+c^2 < 3|(ab+bc+ac)-(a^2+b^2+c^2)| = |P|$ ，DEC 將會被違反，而如果 $\rho + P_1 + P_2 + P_3 = ab+bc+ac-a^2-b^2-c^2 < 0$，則 SEC 將會被違反。在下一個章節我們會用微擾的方式，證明 Bianchi type I 時空中 (3.58) 的膨脹解是不穩定的 (unstable) 。結果，我們將會證實宇宙無毛定理。

Chapter 4

穩定性

因爲 Bianchi type I 度規是個空間不均向的時空，因此我們對 (3.52) 跟 (3.53) 做微擾時，是對 H_i 而不是對 $b(t)$ 做。另外，由於早期宇宙中有著各式各樣的微擾型態，因此我們可以假設一個便於我們計算的型態，這是很合理的。

爲了方便計算，我們將 Bianchi type I 度規中的 a_i 寫成 $a_i = \exp[H_i A_i(t)]$，而微擾型態則寫成 $\delta A_i(t) \equiv k_i \exp[vt]$，這邊 k_i 是一個初始常數，可以消掉座標間的差異，而 v 是一個代表膨脹或是縮減的常數。如果 $v > 0$，膨脹解就是不穩定的 (unstable)，因爲微擾項 $\delta A_i(t)$ 在大尺度時間下 $(t > 0)$ 將會一直存在不會消失 [23][24]。其實，我們也可以假設微擾項的型態爲上述提到的各種線性組合，也就是 $\delta A_i = \sum_j^i k_j \exp[vt]$。

透過這些假設，我們可以將場方程式中的 δH_i 跟 $\delta \dot{H_i}$ 寫成 $\delta \dot{A_i}(t)$ 跟 $\delta \ddot{A_i}(t)$。另外，因爲如果 $\dot{A_i}(t) = 1$，哈伯參數 $H_i = \frac{\dot{a_i}(t)}{a_i(t)}$ 就會等於 BH 解，因此我們知道 $A_i(t) = t$。也就是說，原本由哈伯參數表示的場方程式 $D_{0,\,1}L(H_i, \dot{H_i} \cdots)$ 可以寫成由微擾項中的$A(t)$ 表示，變成 $D_{0,\,1}L(\dot{A_i}(t), \ddot{A_i}(t) \cdots)$。接下來，$\delta \dot{A_i}(t)$ 跟 $\delta \ddot{A_i}(t)$ 可以寫成用 $\delta A_i(t)$ 來表示，如此一來我們就可以創建一個矩陣 [4] 來對 Bianchi type I 時空中不均向的解做穩定性的分析。

根據微分的定義:

$$\frac{D_i L(x + \Delta x) - D_i L(x)}{\Delta x} = \frac{\partial D_i L}{\partial x} \equiv \frac{\delta D_i L}{\delta x} \tag{4.1}$$

這邊 $x \to \dot{A_i}(t) \cdots$

因此我們可以根據以下步驟得到微擾後的場方程式

Method I

1. 將每個場方程式中的變數 x 寫成 $x + \Delta x$。

2. 讓 $D_i L(x + \Delta x) - D_i L(x) = 0$。

3. 讓 $\dot{A_i}(t) = 1$。

4. 將每個 $\delta \dot{A_i}(t), \delta \ddot{A_i}(t) \cdots$ 的項寫成用 $\delta A_i(t)$ 來表示。

5. 微擾項爲 $\delta A_i(t)$ 的場方程式可以被整理成一個矩陣。

6. 爲了得到 v 的 nontrivial solutions，我們必須得到這個矩陣的行列式 (Determint)，並且讓它等於零。

Method II

根據 (4.1)，上面的第一個跟第二個步驟可以直接用 $\frac{\partial D_i L}{\partial x}\delta x$ 來計算。

最後，δDL 可以被整理成 [27] [28]

$$\delta DL = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A_1(t) \\ \delta A_2(t) \\ \delta A_3(t) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

4.1 微擾

我們必須找三個方程式來決定 (4.2) 裡面矩陣的元素。爲了簡化過程，我們從跡方程式 (Trace equation) 開始，並且發現

$$\begin{aligned} & -\delta R + \delta\Phi = 0 \\ \Rightarrow & -\delta R + 2(3\alpha + \beta)\delta\Box R = 0 \\ \Rightarrow & \delta R[-1 - 2v(v + a + b + c)(3\alpha + \beta)] = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

我們可以根據 (4.3) 分析兩種狀況，並且解 v 的值

Case I($\delta R \neq 0$)

如此一來，$-1 - 2v(v + a + b + c)(3\alpha + \beta)$ 必須等於零，因此

$$v = \frac{-a - b - c \pm \sqrt{(a + b + c)^2 - \frac{2}{3\alpha+\beta}}}{2} \tag{4.4}$$

Case II($\delta R = 0$)

在這個情況中，求矩陣行列式 (Determint) 的過程比較簡單，因此我們選擇 $\delta R = 0$，D_0L (3.52) 跟 D_1L (3.53) 來創建這個矩陣。用以下的過程

$$
\begin{aligned}
\delta L &= L_i \delta H_i + L^i \delta \dot{H}_i \ , \\
\delta L_i &= L_{ij} \delta H_j + L_i^j \delta \dot{H}_j \ , \\
\delta L^i &= L_j^i \delta H_j + L^{ij} \delta \dot{H}_j \ ,
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

就可以得到矩陣中的所有元素:

$$
\begin{aligned}
\delta R =& R_i \delta H_i + R^i \delta \dot{H}_i \\
=& (R_1 + vR^1)\delta A_1 + (R_2 + vR^2)\delta A_2 + (R_3 + vR^3)\delta A_3 \\
=& (4a + 2b + 2c + 2v)\delta A_1 + (2a + 4b + 2c + 2v)\delta A_2 + (2a + 2b + 4c + 2v)\delta A_3 \\
=& A\delta A_1 + B\delta A_2 + C\delta A_3 \\
=& 0
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(D_0L) =& L_i \delta H_i + L^i \delta \dot{H}_i + H_i(L_j^i \delta \dot{H}_j + L^{ij} \delta \ddot{H}_j) + (3H)L^i \delta H_i + H_i L^i (\delta 3H) \\
& + H_i 3H(L_j^i \delta H_j + L^{ij} \delta \dot{H}_j) - L_i \delta H_i - H_i(L_{ij} \delta H_j + L_i^j \delta \dot{H}_j) - L^i \delta \dot{H}_i \\
=& \delta A_1[L_1 + vL^1 + a(vL_1^1 + v^2 L^{11}) + b(vL_1^2 + v^2 L^{21}) + c(vL_1^3 + v^2 L^{31}) \\
& + (a + b + c)L^1 + aL^1 + bL^2 + cL^3 + a(a + b + c)(L_1^1 + vL^{11}) \\
& + b(a + b + c)(L_1^2 + vL^{21} + c(a + b + c)(L_1^3 + vL^{31}) - L_1 \\
& - a(L_1 1 + vL_1^1) - L_1 - b(L_2 1 + vL_2^1) - L_1 - c(L_3 1 + vL_3^1) - vL^1] \\
=& D\delta A_1 + E\delta A_2 + F\delta A_3 \\
=& 0
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(D_1L) =& L_i \delta H_i + L^i \delta \dot{H}_i + L_j^1 \delta \ddot{H}_j + 2(3H)(L_j^1 \delta \dot{H}_j + L^{1j} \delta \ddot{H}_j) + (\delta \dot{H}_1 \\
& + \delta \dot{H}_2 + \delta \dot{H}_3)L^1 + 2(3H)(\delta H_1 + \delta H_2 + \delta H_3)L^1 + (3H)^2(L_j^1 \delta H_j \\
& + L^{1j} \delta \dot{H}_j) - L_{1j} \delta \dot{H}_j - L_1^j \delta \ddot{H}_j - (\delta H_1 + \delta H_2 + \delta H_3)L_1 \\
& - (H_1 + H_2 + H_3)(L_{1j} \delta H_j + L_1^j \delta \dot{H}_j) \\
=& \delta A_1[2(a + b + c + v)L^1 + [v^2 + (a + b + c)(a + b + c + 2v)] \\
& (L_1^1 + vL^{11}) - (a + b + c + v)(L_{11} + vL_1^1)] \\
& + \delta A_2[(L_2 - L_1) + (2a + 2b + 2c + v)L^1 + vL^2 + [v^2 + (a + b \\
& + c)(a + b + c + 2v)](L_2^1 + vL^{12}) - (a + b + c + v)(L_{12} + vL_1^2)] \\
& + \delta A_3[(L_3 - L_1) + (2a + 2b + 2c + v)L^1 + vL^3 + [v^2 + (a + b + c) \\
& (a + b + c + 2v)](L_3^1 + vL^{13}) - (a + b + c + v)(L_{13} + vL_1^3)] \\
=& G\delta A_1 + H\delta A_2 + I\delta A_3 \\
=& 0
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

計算的細節被放在附錄B (Appendix B)。

4.2 穩定性分析

(4.2) 中矩陣的行列式 (Determint) 爲

$$Det\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
=&-8\alpha ab(a-b)(2a-b-c)[2a+2b+2c \\
&+\alpha(8a^3+16a^2b+16ab^2+8b^3+16a^2c+24abc+16b^2c+16ac^2+16bc^2+8c^3) \\
&+\beta(6a^3+4a^2b+4ab^2+6b^3+4a^2c-6abc+4b^2c+4ac^2+4bc^2+6c^3) \\
&+v[1+\alpha(4a^2+4b^2+4c^2+4ab+4bc+4ac)+\beta(3a^2-4ab+3b^2-4ac-4bc+3c^2)] \\
&-2v^2\beta(a+b+c)-v^3\beta \\
=&0\ ,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

經由解 (4.9)，我們可以得到二組有意義的 v 的解。

1. $a=b=c$, 這個解很明顯是 de Sitter 的解，

2.

$$\begin{aligned}
&[2a+2b+2c+\alpha(8a^3+16a^2b+16ab^2+8b^3+16a^2c+24abc+16b^2cc \\
&+16ac^2+16bc^2+8c^3)+\beta(6a^3+4a^2b+4ab^2+6b^3+4a^2c-6abc \\
&+4b^2c+4ac^2+4bc^2+6c^3)+v[1+\alpha(4a^2+4b^2+4c^2+4ab+4bc+4ac) \\
&+\beta(3a^2-4ab+3b^2-4ac-4bc+3c^2)]-2v^2\beta(a+b+c)-v^3\beta=0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

第二組解，可以用 (3.58)

$$4\alpha(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)+2\beta(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=-1 \tag{4.11}$$

來簡化 (4.10)，於是我們可以得到

$$\begin{aligned}
&\beta[2(a+b+c)(a^2-ab+b^2-ac-bc+c^2)+v(a^2+b^2+c^2-4ab-4ac-4bc) \\
&-2v^2(a+b+c)-v^3]=0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

所以 v 的值爲

$$\begin{cases} v=-a-b-c \\ v_{\pm}=-\frac{1}{2}(a+b+c\pm\sqrt{9a^2+9b^2+9c^2-6ab-6ac-6bc}) \end{cases}$$

$\because$

$$9a^2+9b^2+9c^2-6ab-6ac-6bc-(a+b+c)^2 = 4(a-b)^2+4(a-c)^2+4(b-c)^2 \geq 0 \tag{4.13}$$

$\therefore$

$$v_- = -\frac{1}{2}(a+b+c-\sqrt{9a^2+9b^2+9c^2-6ab-6ac-6bc}) \geq 0 \tag{4.14}$$

我們發現當 $a=b=c$ 時，v_- 會等於零，但是這個其實就是 de Sitter 的解。因此，當膨脹解 (3.58) 不趨向 de Sitter 時空時，對於微擾項爲 $\delta A_i = \sum_j^i k_j \exp[vt]$ 解出的 v_- 會一直大於零，這代表微擾在大尺度時間之下會一直存在， 而且這組不會趨向於 de Sitter 時空的解是個不穩定的解。一來因爲微擾有各式各樣的形式，二來因爲只要有一個 v 的解是不穩定，那這個不均向的解 (3.58) 就是不穩定的，因此我們只要在一種微擾項找出一個不穩定的解，就證明了這組不均向的解是不穩定的。

這邊列出所有解出的特徵值爲

$$v = 0 \tag{4.15}$$

(上式爲四重根)

$$v = -a-b-c \tag{4.16}$$

(上式爲三重根)

$$v_\pm = -\frac{1}{2}(a+b+c \pm \sqrt{9a^2+9b^2+9c^2-6ab-6ac-6bc}) \tag{4.17}$$

Chapter 5

動態系統方法

5.1 動態系統 (Dynamical systems)

如果一個物理系統，在某一個時間點的狀態可以被一個狀態空間 X 中的一個元素 x 來描述，而且其演化狀況是由一自主的微分方程系統來表示：

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{5.1}$$

這邊 $f(x) = (f_1(x), \cdots f_n(x))$，動態系統故名思義就是一個隨著時間有變化的物理系統，那我們就可以用動態系統來研究它的演化狀況；可以分爲連續的跟不連續的。如果

$$\psi'(x) = f(\psi(t))\,, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

那 ψ 的 image 就稱爲這個微分方程系統的 orbit，而元素 x 沿著這條 orbit 的運動就可以描述這個系統的演化狀況。可以看出 $f(x)$ 是跟這條 orbit 相切的，因此可以被視爲是點在這個狀態空間移動的速度。

要用動態系統來判斷系統的穩定性，就要將上述的微分方程系統做線性化 (Linearization)。這邊先介紹平衡點 (Equilibrium point) 的觀念：如果有一點 a 可以使 $f(a) = 0$，那 a 就是平衡點。而 f 的線性近似 (泰勒一階展開) 則是

$$f(x) \approx (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{x=a}(x-a) \tag{5.3}$$

如果我們設 $u = x - a$，則 (5.3) 變成

$$u' = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{x=a} u \tag{5.4}$$

稱爲這個微分方程在平衡點 a 的線性化。而將 (5.1) 寫成 (5.4) 有什麼好處呢？如果這個微分方程系統有很多個變數，很多條方程式，

$$\begin{aligned} u' =& (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{x=a} u \\ &. \\ &. \\ &. \\ v' =& (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{x=a} v \end{aligned} \tag{5.5}$$

那我們就可以將這些方程式寫成矩陣的運算:

$$X' = AX \tag{5.6}$$

然後用

$$Det(A - \Lambda) = 0 \tag{5.7}$$

求出這個系統的特徵值 (Eigenvalue)。

比如以下的例子 [30]:

$$\begin{aligned} &\dot{A} = f, \\ &\dot{B} = g = (\frac{\partial g}{\partial A})_0 A + (\frac{\partial g}{\partial B})_0 B \end{aligned} \tag{5.8}$$

則我們可用這個矩陣求出這個系統的特徵值來判斷穩定性:

$$\begin{aligned} &Det\begin{pmatrix} (\frac{\partial f}{\partial A})_0 - \lambda & (\frac{\partial f}{\partial B})_0 \\ (\frac{\partial g}{\partial A})_0 & (\frac{\partial g}{\partial B})_0 - \lambda \end{pmatrix} \\ &=0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

求出的 λ 就是特徵值。因爲我們看的是整個系統，因此整個系統中只要有一個 λ 是大於零，那這個系統就是不穩定 (unstable)；如果全部的 λ 都是小於零，這個系統就是個穩定 (stable) 的系統。而且解出的特徵值 Λ 其實就是第四章微擾方法算出的 v，因爲，雖然概念不同，但是我們可以發現兩個方法都是用到泰勒一階展開，而計算過程其實是非常相似的。

5.2 簡介

我們用動態系統來研究宇宙的演化情形，章節 5.4 - 5.6 我們會推導 [2] 中的方程式，採用的模型是初始條件爲不均向的 Bianchi type I 度規，章節 5.7 則從我們一開始的度規 (3.10) 出發，用同樣的原理來計算這個系統的穩定性。考慮的是二階重力理論 (Quadratic theories of gravity)，四維的 action 是:

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}(R + \alpha R^2 + \ \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - 2\Lambda) \tag{5.10}$$

我們將各個可以表現出其幾何特性的參數提出，搭配不同次方的變數 H，可以定義如下的 Expansion - normalised variables。

$$
\begin{aligned}
&B = \frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2},\ \chi = \frac{\beta}{3\alpha+\beta},\\
&Q = \frac{\dot{H}}{H^2},\ Q_2 = \frac{\ddot{H}}{H^3},\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2},\\
&\Sigma_\pm = \frac{\sigma_\pm}{H},\quad \Sigma_{\pm 1} = \frac{\dot{\sigma}_\pm}{H^2},\quad \Sigma_{\pm 2} = \frac{\ddot{\sigma}_\pm}{H^3}\\
&\Sigma^2 = {\Sigma_+}^2 + {\Sigma_-}^2 = -\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)}\ ,
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

我們定義的動態時間變數 (Dynamical time variable) τ 爲

$$
\frac{d\tau}{dt} = H \tag{5.12}
$$

5.3 基本運算

Bianchi type I 的度規爲以下的形式:

$$
ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)dy^2 + a_3^2(t)dz^2\ , \tag{5.13}
$$

里奇張量爲:

$$
\begin{aligned}
&R^0{}_0 = 3\dot{H} + 3H^2 + \sigma^a{}_b\sigma_a{}^b\\
&R^a{}_b = \dot{\sigma}^a{}_b + \dot{H}\delta^a_b + 3H(\sigma^a{}_b + H\delta^a_b) +^{(3)} R^a{}_b
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

里奇純量爲

$$
R = 6\dot{H} + 12H^2 + \sigma^a{}_b\sigma_a{}^b +^{(3)} R \tag{5.15}
$$

這邊 $u^a = (1,0,0,0)$，$H_i = \frac{\dot{a}_i(t)}{a_i(t)}$，$H = \frac{H_1+H_2+H_3}{3}$

$$
\sigma^a{}_b = \begin{pmatrix} H_1 - H & 0 & 0\\ 0 & H_2 - H & 0\\ 0 & 0 & H_3 - H \end{pmatrix} \tag{5.16}
$$

$$
\therefore \sigma_+ = -\frac{H_1}{3} + \frac{H_2+H_3}{6},\ \sigma_- = \frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}} \tag{5.17}
$$

$$
\therefore \sigma^a{}_b\sigma_a{}^b = 6\sigma_+^2 + 6\sigma_-^2 \tag{5.18}
$$

$$
{}^{(3)}R^a{}_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(n_{11}^2) & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}(n_{11}^2) & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(n_{11}^2) \end{pmatrix} \tag{5.19}
$$

5.4 場方程式

於是，我們可以推導出 [2] 裡面 (9), (10), (12), (14), (15) 的場方程式:

$$B' = \frac{dB}{d\tau} = \frac{d}{dt}[\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2}]\frac{dt}{d\tau} = -\frac{2\dot{H}}{(3\alpha+\beta)H^3}\frac{1}{H} = -2QB \tag{5.20}$$

$$\Omega'_\Lambda = \frac{d}{d\tau}(\frac{\Lambda}{3H^2}) = \frac{dt}{d\tau}\frac{1}{dt}(\frac{\Lambda}{3H^2}) = -\frac{2\Lambda\dot{H}}{3H^4} = -2Q\Omega_\Lambda \tag{5.21}$$

$$Q' = \frac{d}{d\tau}(\frac{\dot{H}}{H^2}) = \frac{dt}{d\tau}\frac{1}{dt}(\frac{\dot{H}}{H^2}) = \frac{\ddot{H}}{H^3} - 2\frac{\dot{H}^2}{H^4} = Q_2 - 2Q^2 \tag{5.22}$$

$$\Sigma'_\pm = \frac{d}{d\tau}(\frac{\sigma_\pm}{H}) = \frac{dt}{d\tau}\frac{1}{dt}(\frac{\sigma_\pm}{H}) = \frac{\dot{\sigma}_\pm}{H^2} - \frac{\sigma_\pm\dot{H}}{H^3} = \Sigma_{\pm1} - Q\Sigma_\pm \tag{5.23}$$

$$\Sigma'_{\pm1} = \frac{d}{d\tau}(\frac{\dot{\sigma}_\pm}{H^2}) = \frac{dt}{d\tau}\frac{1}{dt}(\frac{\dot{\sigma}_\pm}{H^2}) = \frac{\ddot{\sigma}_\pm}{H^3} - 2\frac{\dot{\sigma}_\pm\dot{H}}{H^4} = \Sigma_{\pm2} - 2Q\Sigma_{\pm1} \tag{5.24}$$

而 [2] 裡面的 (11)，首先，根據 [29] 中的 (1.96)：

$$\dot{n}_{\alpha\beta} = -Hn_{\alpha\beta} + 2\sigma^{\mu}{}_{(\alpha}n_{\beta)\mu} + 2\varepsilon^{\mu\nu}{}_{(\alpha}n_{\beta)\mu}\Omega_\nu \tag{5.25}$$

再來，對於 class A 的模型而言 $(a_\alpha = 0)$,

$$\sigma_{\alpha\beta} = diag(\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{33}),\ \Omega_\alpha = 0 \tag{5.26}$$

再加上[2]中,

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= diag(-2\sigma_+,\ \sigma_+ + \sqrt{3}\sigma_-,\ \sigma_+ + \sqrt{3}\sigma_-), \\ n_{\alpha\beta} &= diag(n_{11},\ 0,\ 0) \end{aligned} \tag{5.27}$$

而 Bianchi type I， $n_{\alpha\beta} = diag(0,\ 0,\ 0)$，所以我們從 (5.25) 可以得到

$$\dot{n}_{11} = -Hn_{11} - 4\sigma_+ n_{11} \tag{5.28}$$

所以就可以推導出

$$\begin{aligned} N' &= \frac{d}{d\tau}(\frac{n_{11}}{\sqrt{3}H}) \\ &= \frac{\dot{n}_{11}}{\sqrt{3}H^2} - \frac{\dot{H}n_{11}}{\sqrt{3}H^3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}H^2}(-Hn_{11} - 4\sigma_+ n_{11}) - \frac{\dot{H}n_{11}}{\sqrt{3}H^3} \\ &= -(Q + 1 + 4\Sigma_+)N \end{aligned} \tag{5.29}$$

其餘的方程式，從 (5.10) 的 Action 出發，用 (3.48) 這個公式，並且根據

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial H_i} &= \frac{\partial \dot{H}}{\partial \dot{H}_i} = \frac{1}{3}, \\
\frac{\sigma^i{}_i}{\partial H_j} &= \frac{\partial \dot{\sigma}^i{}_i}{\partial H_j} = \delta^i{}_j - \frac{1}{3} \\
a_i \frac{\partial n_{11}}{\partial a_j} &= \theta_i n_{11} \\
\theta_i &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

我們可以推導出場方程式。其中由 R 推導出的部分:

$$
-2(G^i{}_i + \Lambda g^i{}_i) \tag{5.31}
$$

R^2推導出的部分:

$$
\begin{aligned}
&R^2 - R(16\dot{H} + 4\dot{\sigma}^i{}_i) - (16H + 4\sigma^i{}_i)(\dot{R} + 3HR) + (12\dot{H} + 36H^2)R + 24H\dot{R} \\
&+ 4\ddot{R} - 2R\theta_i(n_{11})^2
\end{aligned} \tag{5.32}
$$

$R^\mu{}_\nu R^\nu{}_\mu$推導出的部分:

$$
\begin{aligned}
&R^\mu{}_\nu R^\nu{}_\mu - R^0{}_0(4\dot{H} + 4\dot{\sigma}^i{}_i) - (4H + 4\sigma^i{}_i)(\dot{R}^0{}_0 + 3HR^0{}_0) + (6\dot{H} + 18H^2)R^0{}_0 \\
&+ 12H\dot{R}^0{}_0 + 2\ddot{R}^0{}_0[\Sigma_j - (2\dot{H} + 2\dot{\sigma}^j{}_j + 6\dot{H}\delta^i{}_j)R^j{}_j - (2H + 2\sigma^j{}_j + 6\dot{H}\delta^i{}_j) \\
&(\dot{R}^j{}_j + 3HR^j{}_j) + (6\dot{H} + 18H^2)R^j{}_j\delta^i{}_j + 12H\dot{R}^j{}_j\delta^i{}_j + 2\ddot{R}^j{}_j\delta^i{}_j] + 2R^1{}_1\theta_i(n_{11})^2 \\
&- 2R^2{}_2\theta_i(n_{11})^2 - 2R^3{}_3\theta_i(n_{11})^2
\end{aligned} \tag{5.33}
$$

利用場方程式的跡方程式 (trace equation) 我們可以推導出 [2] 的 (13) 式:

$$
\begin{aligned}
0 =& - R + 4\Lambda + 2(3\alpha + \beta)\Box R \\
=& - R + 4\Lambda - 2(3\alpha + \beta)(\ddot{R} + 3H\dot{R}) \\
=& - 6\dot{H} - 12H^2 - 6\sigma_+{}^2 - 6\sigma_-{}^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{n}_{11})^2 + 4\Lambda - 2(3\alpha + \beta)(\ddot{R} + 3H\dot{R}) \\
=& - 6\dot{H} - 12H^2 - 6\sigma_+{}^2 - 6\sigma_-{}^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{n}_{11})^2 + 4\Lambda - 2(3\alpha + \beta)[6 + 24H\ddot{H} \\
&+ 24\dot{H}^2 + 12\dot{\sigma}_+^2 + 12\dot{\sigma}_-^2 + 12\sigma_+\ddot{\sigma}_+ + 12\sigma_-\ddot{\sigma}_- - n_{11}\ddot{n}_{11} - (\dot{n}_{11})^2] + 3H \\
&(6\ddot{H} + 24H\dot{H} + 12\sigma_+\dot{\sigma}_+ + 12\sigma_-\dot{\sigma}_- - n_{11}\dot{n}_{11})
\end{aligned} \tag{5.34}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\dddot{H}}{H^4} =& - 7Q_2 - 4Q^2 - 2\Sigma_1{}^2 - 2\Sigma \cdot \Sigma_2 + (1 + 4\Sigma_+)^2 N^2 - \frac{1}{2}(Q + 4\Sigma_{+1})N^2 \\
&- 12Q - 6\Sigma \cdot \Sigma_1 - \frac{3}{2}(1 + 4\Sigma_+)N^2 + B(-\frac{1}{2}Q - 1 - \frac{1}{2}\Sigma^2 + \frac{1}{8}N^2 + \Omega_\Lambda)
\end{aligned} \tag{5.35}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_2{}' =& -3\frac{\ddot{H}}{H^5}+\frac{\dddot{H}}{H^4} = -3QQ_2 - 7Q_2 - 4Q^2 - 12Q - 6\Sigma\cdot\Sigma_1 - 2\Sigma_1{}^2 - 2\Sigma\cdot\Sigma_2 \\
&+ (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}Q + 2\Sigma_+ + 16\Sigma_+{}^2 - 2\Sigma_{+1})^2 N^2 + B(-\frac{1}{2}Q - 1 - \frac{1}{2}\Sigma^2 + \frac{1}{8}N^2 \\
&+ \Omega_\Lambda)
\end{aligned} \tag{5.36}
$$

經過計算後，可得到 (5.36) 等於 [2] 中的 (13) – (18)/4，也就是我們可以經過線性組合推導出 [2] 中的 (13)。接下來剩餘的式子推導過程如下：原本的場方程式型式我們得知是這個形式

$$
G^i{}_i + \Phi^i{}_i + \Lambda g^i{}_i = 0 \tag{5.37}
$$

利用下面的組合可以推導出 [2] 的 (16) 式:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{H^3}[2(G^1{}_1+\Phi^1{}_1+\Lambda g^1{}_1) - (G^2{}_2+\Phi^2{}_2+\Lambda g^2{}_2) - (G^3{}_3+\Phi^3{}_3+\Lambda g^3{}_3)] = 0 \\
&= -6[\Sigma_{+1}+3\Sigma_+ - N^2] - 6\alpha[\Sigma_+(12Q_2 + 84Q + 72 + 24\Sigma\cdot\Sigma_1 + 36\Sigma^2) \\
&\quad + \Sigma_{+1}(12Q + 24 + 12\Sigma^2) + N^2(3N^2 - 12Q - 24 - 12\Sigma_-{}^2 - 3\Sigma_+ \\
&\quad - 3\Sigma_{+1} + 12\Sigma_+{}^2)] - 6\beta[\Sigma_+(3Q_2 + 21Q + 18 + 24\Sigma\cdot\Sigma_1 + 36\Sigma^2) + \\
&\quad \Sigma_{+1}(-3 + 12\Sigma^2) + \Sigma_{+2}(-6 - 3Q) - \Sigma'_{+2} + N^2(9N^2 - 4Q - 8 - 16\Sigma_+ \\
&\quad - 16\Sigma_{+1} + 64\Sigma_+{}^2)
\end{aligned} \tag{5.38}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Sigma'_{+2} =& B[\Sigma_{+1} + 3\Sigma_+ - N^2] + \frac{1}{\chi}[\Sigma_+(4Q_2 + 28Q + 24 + 8\Sigma\cdot\Sigma_1 + 12\Sigma^2) \\
&+ \Sigma_{+1}(4Q + 8 + 4\Sigma^2) + N^2(N^2 - 4Q - 8 - 4\Sigma_-{}^2 - \Sigma_+ - \Sigma_{+1} \\
&+ 4\Sigma_+{}^2)] + [\Sigma_+(-Q_2 - 7Q - 6 + 16\Sigma\cdot\Sigma_1 + 24\Sigma^2) + \Sigma_{+1}(-4Q \\
&- 11 + 8\Sigma^2) + \Sigma_{+2}(-6 - 3Q) + N^2(8N^2 - 15\Sigma_+ - 15\Sigma_{+1} + 4\Sigma_-{}^2 \\
&+ 60\Sigma_+{}^2)
\end{aligned} \tag{5.39}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Sigma'_{+2} =& \Sigma_{+2}(-6 - 3Q) + \frac{\Sigma_{+1}}{\chi}[B - 11\chi + 8 + 4Q(1-\chi) + 4\Sigma^2(1+2\chi)] \\
&+ \frac{\Sigma_+}{\chi}[3B + (4-\chi)(Q_2 + 7Q + 6) + (4+8\chi)(3\Sigma^2 + 2\Sigma\cdot\Sigma_1)] - \frac{N^2}{\chi} \\
&[B + 8 + 4Q - (1+8\chi)N^2 + 4(1-\chi)\Sigma_-{}^2 + (1+15\chi)(\Sigma_+ + \Sigma_{+1} \\
&- 4\Sigma_+{}^2)]
\end{aligned} \tag{5.40}
$$

接著利用下面的組合可推導出 [2] 的 (17) 式:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{H^3}[({G^2}_2+{\Phi^2}_2+\Lambda {g^2}_2)-({G^3}_3+{\Phi^3}_3+\Lambda {g^3}_3)]=0\\
&=2\sqrt{3}(\Sigma_{-1}+3\Sigma_-)+2\sqrt{3}\alpha[\Sigma_-[12Q_2+84Q+72+24\Sigma\cdot\Sigma_1+36\Sigma^2\\
&\quad+(-3+24\Sigma_+)N^2)]+\Sigma_{-1}(12Q+24+12\Sigma^2-3N^2)]+2\sqrt{3}\beta\\
&\quad[\Sigma_-[3Q_2+21Q+18+24\Sigma\cdot\Sigma_1+36\Sigma^2]+\Sigma_{-1}(-3+12\Sigma^2)\\
&\quad+\Sigma_{-2}(-6-3Q)-\Sigma'_{-2}]
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Sigma'_{-2}=&B(\Sigma_{-1}+3\Sigma_-)+\frac{1}{\chi}[\Sigma_-[4Q_2+28Q+24+8\Sigma\cdot\Sigma_1+12\Sigma^2+(-1\\
&+8\Sigma_+)N^2]+\Sigma_{-1}(4Q+8+4\Sigma^2-N^2)]+[\Sigma_-[-Q_2-7Q-6\\
&+16\Sigma\cdot\Sigma_1+24\Sigma^2+(1-8\Sigma_+)N^2]+\Sigma_{-1}(-4Q-11+8\Sigma^2+N^2)\\
&+\Sigma_{-2}(-6-3Q)]
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Sigma'_{-2}=&\Sigma_{-2}(-6-3Q)+\frac{\Sigma_{-1}}{\chi}[B-11\chi+8+4Q(1-\chi)+4\Sigma^2(1+2\chi)]\\
&+\frac{\Sigma_-}{\chi}[3B+(4-\chi)(Q_2+7Q+6)+(4+8\chi)(3\Sigma^2+2\Sigma\cdot\Sigma_1)]\\
&-\frac{(1-\chi)N^2}{\chi}(\Sigma+\Sigma_{-1}-8\Sigma_-\Sigma_+)
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

而這些方程式有以下這條限制式:

$$
\begin{aligned}
0=&B(1-\Omega_\Lambda-\Sigma^2-N^2)+12Q-2Q^2+4Q_2-(4-\chi)(3+2Q)\Sigma^2-6\\
&(1+2\chi)\Sigma^4-\chi({\Sigma_1}^2-2\Sigma\cdot\Sigma_2)+4(2+\chi)(\Sigma\cdot\Sigma_1)+4N^2[\frac{1}{2}(1+8\chi)N^2\\
&+1+(1+15\chi){\Sigma_+}^2+8\Sigma_++(1-\chi){\Sigma_-}^2]
\end{aligned}
\tag{5.44}
$$

附註: 上述式子中跟N^2有關的項係數都差了4倍, 這是因爲 [2] 中推導用的關係是 ${}^3R=-2(n_{11})^2$, 而我們用的關係是根據 [29] 中,

$$
\begin{aligned}
{}^3R&=-\frac{1}{2}{b_\mu}^\mu-6a_\mu a^\mu\\
b_{\alpha\beta}&=2n^\mu_\alpha n_{\mu\beta}-({n_\mu}^\mu)n_{\alpha\beta}\\
\Rightarrow{}^3R&=-\frac{1}{2}(n_{11})^2
\end{aligned}
\tag{5.45}
$$

而 [2] 的 (18) 式, 則是從 ${G^0}_0+{\Phi^0}_0+\Lambda {g^0}_0$ 直接得到。

5.5 膨脹解

有了這些 EOM，我們就可以來解這些 EOM 的解。首先，由 (5.20) 可判斷出，B 可以爲零或一常數。如果 B 爲一常數，我們可以利用 (5.36) 跟 (5.44) 來解出 Ω_Λ。在 Bianchi type I 中，

$$Q = \Sigma_{\pm 1} = \Sigma_{\pm 2} = N = 0 \tag{5.46}$$

將 (5.11) 的 Σ^2 代入 (5.36) 跟 (5.44) 直接解聯立可以得到

(i)

$$B = constant, \quad \Omega_\Lambda = \frac{18\chi - B}{8(2\chi + 1)} \tag{5.47}$$

(ii)

$$B = 0, \quad \Omega_\Lambda = constant = \frac{18\chi}{8(2\chi + 1)} \tag{5.48}$$

如果將 Bianchi type I 的度規寫成:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2bt}[e^{-4\sigma_+ t}dx^2 + e^{2(\sigma_+ + \sqrt{3}\sigma_-)t}dy^2 + +e^{2(\sigma_+ - \sqrt{3}\sigma_-)t}dz^2] \tag{5.49}$$

則我們可以將此度規跟原本的度規 (5.13) 做一比較，得到新的關係式:

$$\begin{aligned} H_1 &= b - 2\sigma_+ \\ H_2 &= b + (\sigma_+ + \sqrt{3}\sigma_-) \\ H_1 &= b + (\sigma_+ - \sqrt{3}\sigma_-) \\ H &= (H_1 + H_2 + H_3)/3 = b \end{aligned} \tag{5.50}$$

接著利用 (5.11) 的 Σ^2 跟 (5.47) 就可以解出滿足這些 EOM 的解。首先從 (5.47) 出發，

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{\Lambda}{3b^2} = \frac{18\chi - B}{8(2\chi + 1)} \tag{5.51}$$

我們可以解出

$$b^2 = \frac{1 + 8\Lambda(\alpha + \beta)}{18\beta} \tag{5.52}$$

接著用 (5.52) 搭配 (5.11) 的 Σ^2

$$\begin{aligned} \Sigma^2 =& {\Sigma_+}^2 + {\Sigma_-}^2 \\ =& \frac{1}{9H^2}({H_1}^2 + {H_2}^2 + {H_3}^2 - H_1H_2 - H_2H_3 - H_1H_3) \\ =& \frac{1}{9b^2}[(b - 2\sigma_+)^2 + (b + \sigma_+ + \sqrt{3}\sigma_-)^2 + (b + \sigma_+ - \sqrt{3}\sigma_-)^2 - (b - 2\sigma_+) \\ & (b + \sigma_+ + \sqrt{3}\sigma_-) - (b + \sigma_+ + \sqrt{3}\sigma_-)(b + \sigma_+ + \sqrt{3}\sigma_-) - (b - 2\sigma_+) \\ & (b + \sigma_+ + \sqrt{3}\sigma_-)] \\ =& -\frac{2(4 - \chi) + B}{4(2\chi + 1)} \end{aligned} \tag{5.53}$$

可以解出

$$\sigma_+{}^2+\sigma_-{}^2=-\frac{1+2\Lambda(4\alpha+\beta)}{9\beta} \tag{5.54}$$

因此不均向的膨脹解就是

$$\begin{aligned} b^2 =& \frac{1+8\Lambda(\alpha+\beta)}{18\beta} \\ \sigma_+{}^2+\sigma_-{}^2 =& -\frac{1+2\Lambda(4\alpha+\beta)}{9\beta} \end{aligned} \tag{5.55}$$

5.6 比較：回到原始的變數，哈伯參數

這個章節不會從 (5.11) 的變數出發，我們會回到最原本的度規 (5.13) 開始，由原始的變數 H_i 來做這個穩定性的問題、計算以及用動態系統來求特徵值。用這方法的話，就要把 EOM 寫成好解出特徵值的形式，比如 (5.4)、(5.20) - (5.24) 跟 (5.29)。而經過一些計算及嘗試，我們發現以下 (5.57) - (5.66) H_i 函數的關係，發現這些關係都可以寫成滿足動態系統所需要的型式，因此可以用這些關係來解特徵值。

我們重新定義動態時間變數 (dynamical time variable) τ (5.12) 爲

$$\frac{d\tau}{dt}=\frac{H_1+H_2+H_3}{3}=H \tag{5.56}$$

有了這些基本的運算，我們就可以來推導場方程式。根據 (5.56)，我們發現以下的關係：

$$\begin{aligned} f_1' =& (\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2})' \\ =& \frac{d(1/(3\alpha+\beta)H^2)}{d\tau} \\ =& \frac{d}{dt}[\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2}]\frac{dt}{d\tau} \\ =& -\frac{2H'}{(3\alpha+\beta)H^3}(\frac{1}{H}) \\ =& -2\frac{H'}{H^2}(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2}) \\ =& -2\frac{H'}{H^2}(f_1) \end{aligned} \tag{5.57}$$

$$
\begin{aligned}
f_2' =& (\frac{\Lambda}{3H^2})' \\
=& \frac{d}{d\tau}(\frac{\Lambda}{3H^2}) \\
=& \frac{dt}{d\tau}\frac{1}{dt}(\frac{\Lambda}{3H^2}) \\
=& -\frac{2\Lambda H'}{3H^4} \\
=& -2(\frac{H'}{H^2})(\frac{\Lambda}{3H^2}) \\
=& -2(\frac{H'}{H^2})(f_2)
\end{aligned} \tag{5.58}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3' =& (\frac{H'}{H^2})' \\
=& \frac{d}{d\tau}(\frac{H'}{H^2}) \\
=& \frac{dt}{d\tau}\frac{1}{dt}(\frac{H'}{H^2}) \\
=& \frac{H''}{H^3} - 2\frac{H'^2}{H^4} \\
=& \frac{H''}{H^3} - 2(\frac{H'}{H^2})^2 \\
=& \frac{H''}{H^3} - 2(f_3)^2
\end{aligned} \tag{5.59}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4' =& ((-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})/H)' \\
=& \frac{d}{d\tau}((-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})/H) \\
=& \frac{dt}{d\tau}\frac{1}{dt}((-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})/H) \\
=& (-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})'/H^2 \\
& - (-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})H'/H^3 \\
=& (-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})'/H^2 \\
& - \frac{H'}{H^2}(-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})/H \\
=& (-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})'/H^2 - \frac{H'}{H^2}(f_4)
\end{aligned} \tag{5.60}
$$

$$
\begin{aligned}
f_5' =&((\frac{H_2 - H_3}{2\sqrt{3}})/H)' \\
=&\frac{d}{d\tau}((\frac{H_2 - H_3}{2\sqrt{3}})/H) \\
=&\frac{dt}{d\tau}\frac{1}{dt}((\frac{H_2 - H_3}{2\sqrt{3}})/H) \\
=&(\frac{H_2 - H_3}{2\sqrt{3}})'/H^2 - (\frac{H_2 - H_3}{2\sqrt{3}})H'/H^3 \\
=&(\frac{H_2 - H_3}{2\sqrt{3}})'/H^2 - (\frac{H'}{H^2})(f_5)
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$

$$
\begin{aligned}
f_6' =&((-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})'/H^2)' \\
=&\frac{d}{d\tau}(-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})'/H^2) \\
=&\frac{dt}{d\tau}\frac{1}{dt}(-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})'/H^2) \\
=&(-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})''/H^3 \\
&- 2(-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})'H'/H^4 \\
=&(-\frac{H_1}{3} + \frac{H_2 + H_3}{6})''/H^3 - 2\frac{H'}{H^2}(f_6)
\end{aligned}
\tag{5.62}
$$

$$
\begin{aligned}
f_7' =&((\frac{H_2 - H_3}{2\sqrt{3}})'/H^2)' \\
=&\frac{d}{d\tau}((\frac{H_2 - H_3}{2\sqrt{3}})'/H^2) \\
=&\frac{dt}{d\tau}\frac{1}{dt}((\frac{H_2 - H_3}{2\sqrt{3}})'/H^2) \\
=&(\frac{H_2 - H_3}{2\sqrt{3}})''/H^3 - 2(\frac{H_2 - H_3}{2\sqrt{3}})'H'/H^4 \\
=&(\frac{H_2 - H_3}{2\sqrt{3}})''/H^3 - 2(\frac{H'}{H^2})(f_7)
\end{aligned}
\tag{5.63}
$$

$$
\begin{aligned}
f_8' =&((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})''/H^3)' \\
=&((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})''/H^3)(-6-3(\frac{H'}{H^2})) \\
&+\frac{((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})'/H^2)}{\chi}[(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2}) \\
&-11\chi+8+4(\frac{H'}{H^2})(1-\chi)+4(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)})(1+2\chi)] \\
&+\frac{((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})/H)}{\chi}[3(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2}) \\
&+(4-\chi)((\frac{H''}{H^3})+7(\frac{H'}{H^2})+6) \\
&+(4+8\chi)(3(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)})+2(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)})^{\frac{1}{2}} \\
&((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})'/H^2))][(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2}) \\
&+8+4(\frac{H'}{H^2})+4(1-\chi)((\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}})/H)^2 \\
&+(1+15\chi)(((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})/H) \\
&+((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})'/H^2) \\
&-4((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})/H))^2)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow (f_8)' =&(f_8)(-6-3(\frac{H'}{H^2})) \\
&+\frac{((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})'/H^2)}{\chi}[(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2}) \\
&-11\chi+8+4(\frac{H'}{H^2})(1-\chi)+4(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)}) \\
&(1+2\chi)]+\frac{((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})/H)}{\chi} \\
&[3(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2})+(4-\chi)((\frac{H''}{H^3}) \\
&+7(\frac{H'}{H^2})+6)+(4+8\chi)(3(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2\left(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\left(-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6}\right)'/H^2\right)\Big)\Big]\\
&\Big[\left(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2}\right)+8+4\left(\frac{H'}{H^2}\right)\\
&+4(1-\chi)\left(\left(\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}}\right)/H\right)^2+(1+15\chi)\\
&\left(\left(\left(-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6}\right)/H\right)\right.\\
&+\left(\left(-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6}\right)'/H^2\right)\\
&-4\left(\left(-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6}\right)/H\right)^2\Big)\Big]
\end{aligned}
\tag{5.64}
$$

$$
\begin{aligned}
f_9' =&\left(\left(\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}}\right)''/H^3\right)'\\
=&\left(\left(\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}}\right)''/H^3\right)\left(-6-3\left(\frac{H'}{H^2}\right)\right)\\
&+\frac{\left(\left(\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}}\right)'/H^2\right)}{\chi}\Big[\left(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2}\right)\\
&-11\chi+8+4\left(\frac{H'}{H^2}\right)(1-\chi)+4\left(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)}\right)(1+2\chi)\Big]\\
&+\frac{\left(\left(\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}}\right)/H\right)}{\chi}\Big[3\left(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2}\right)\\
&+(4-\chi)\left(\left(\frac{H''}{H^3}\right)+7\left(\frac{H'}{H^2}\right)+6\right)\\
&+(4+8\chi)\Big(3\left(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)}\right)+2\left(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\left(\left(-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6}\right)'/H^2\right)\Big)\Big]\left(\left(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right.\\
&+\left(\left(\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}}\right)'/H^2\right)-8\left(\left(\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}}\right)'/H^2\right)\\
&\left.\left(\left(-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6}\right)/H\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f_9' =&(f_9)(-6-3(\frac{H'}{H^2}))\\
&+\frac{((\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}})'/H^2)}{\chi}[(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2})\\
&-11\chi+8+4(\frac{H'}{H^2})(1-\chi)+4(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)})(1+2\chi)]\\
&+\frac{((\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}})/H)}{\chi}[3(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2})\\
&+(4-\chi)((\frac{H''}{H^3})+7(\frac{H'}{H^2})+6)\\
&+(4+8\chi)(3(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)})+2(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)})^{\frac{1}{2}}\\
&((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})'/H^2))][(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)})^{\frac{1}{2}}\\
&+((\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}})'/H^2)-8((\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}})'/H^2)\\
&((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})/H))
\end{aligned}
\tag{5.65}
$$

$$
\begin{aligned}
{f_{10}}' =&(\frac{H''}{H^3})'\\
=&-3(\frac{H'}{H^2})(\frac{H''}{H^3})\\
&-7(\frac{H''}{H^3})-4(\frac{H'}{H^2})^2\\
&-12(\frac{H'}{H^2})-6(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)})^{\frac{1}{2}}((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})'/H^2)\\
&-2((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})'/H^2)^2\\
&-2(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)})^{\frac{1}{2}}((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})''/H^3)\\
&+(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2})(-\frac{1}{2}(\frac{H'}{H^2})-1\\
&-\frac{1}{2}(-\frac{2(4-\chi)+(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2})}{4(2\chi+1)})+(\frac{\Lambda}{3H^2}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow {f_{10}}' =& -3(\frac{H'}{H^2})(f_{10}) - 7(f_{10}) - 4(\frac{H'}{H^2})^2 \\
& -12(\frac{H'}{H^2}) - 6(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)})^{\frac{1}{2}}((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})' \\
& /H^2) - 2((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})'/H^2)^2 \\
& -2(-\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)})^{\frac{1}{2}}((-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})''/H^3) \\
& +(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2})(-\frac{1}{2}(\frac{H'}{H^2})-1 \\
& \\
& -\frac{1}{2}(-\frac{2(4-\chi)+(\frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2})}{4(2\chi+1)})+(\frac{\Lambda}{3H^2}))
\end{aligned}
\tag{5.66}
$$

如此一來，我們就有了十條用哈伯參數 H_i 表示，而且滿足動態系統的方程式。爲了接下來的運算方便，根據 (5.57) - (5.66)，我們將會定義以下的變數，並且發現我們找到的方程式跟 (5.11) 之間的關係：

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{(3\alpha+\beta)H^2} = f_1, \\
\Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3H^2} = f_2, \\
Q &= \frac{H'}{H^2} = f_3, \\
\Sigma_\pm &= \frac{\sigma_\pm}{H} = f_{4,5}, \\
\Sigma_{\pm 1} &= \frac{\dot{\sigma}_\pm}{H^2} = f_{6,7}, \\
\Sigma_{\pm 2} &= \frac{\ddot{\sigma}_\pm}{H^3} = f_{8,9} \\
Q_2 &= \frac{H''}{H^3} = f_{10}, \\
\chi &= \frac{\beta}{3\alpha+\beta}, \\
\Sigma^2 &= {\Sigma_+}^2 + {\Sigma_-}^2 = -\frac{2(4-\chi)+B}{4(2\chi+1)}
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

如果寫得詳細點，其中

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{+} =&(-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})/H \\
\Sigma_{-} =&(\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}})/H \\
\Sigma_{+1} =&(-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})'/H^2 \\
\Sigma_{-1} =&(\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}})'/H^2 \\
\Sigma_{+2} =&(-\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6})''/H^3 \\
\Sigma_{-2} =&(\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}})''/H^3
\end{aligned}
\tag{5.68}
$$

這邊的 shear 張量為

$$
\sigma^a{}_b = \begin{pmatrix} H_1-H & 0 & 0 \\ 0 & H_2-H & 0 \\ 0 & 0 & H_3-H \end{pmatrix}
\tag{5.69}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \sigma_+ =& -\frac{H_1}{3}+\frac{H_2+H_3}{6}, \\
\sigma_- =& \frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}
\tag{5.70}
$$

里奇張量為:

$$
\begin{aligned}
R^0{}_0 =&3H'+3H^2+\sigma^a{}_b\sigma_a{}^b \\
R^a{}_b =&\dot{\sigma}^a{}_b+H'\delta^a{}_b+3H(\sigma^a{}_b+H\delta^a{}_b)+^{(3)}R^a{}_b
\end{aligned}
\tag{5.71}
$$

里奇純量為

$$
R =6H'+12H^2+\sigma^a{}_b\sigma_a{}^b+^{(3)}R
\tag{5.72}
$$

如此定義的話，(5.67) 就會變成 (5.11) 的變數，而 (5.57) - (5.66) 就會變成原本推導 [2] 中的 EOM，也就是前幾章節的 (5.20) - (5.24)、(5.29)、(5.36)、(5.40) 以及 (5.43)，其中 (5.57) - (5.63) 就是 (5.20) - (5.24)，(5.64) 跟 (5.65) 是 (5.40) 跟 (5.43)，(5.66) 是 (5.36)。由變數 H_i 表示的場方程式經過前章節的疊加，再經過 (5.67) 的變數轉換之後，就可以得到 (5.36)、(5.40) 以及 (5.43)。也就是我們這個小節採取用原始的變數 H_i 來找出 EOM，看出 [2] 中 EOM 原始變數的本質，而這些乍看之下複雜的場方程式，只要經過 (5.67) 的變數變

換，(5.57) - (5.66) 就可以變換成 [2] 中簡易型式的場方程式。如此一來，這十條方程式再搭配用幾何變數找出的 (5.29) 就可以用 (5.3) - (5.7) 的方法解出特徵值。

$$
\begin{aligned}
f_1' =& (\frac{\partial f_1}{\partial x_j})_{x=a} f_1 \\
&. \\
&. \\
&. \\
f_{11}' =& (\frac{\partial f_{11}}{\partial x_j})_{x=a} f_{11}
\end{aligned}
\tag{5.73}
$$

那我們就可以將這些方程式寫成矩陣的運算:

$$X' = AX \tag{5.74}$$

然後用

$$Det(A - \Lambda) = 0 \tag{5.75}$$

求出特徵值來判斷穩定性。

5.7 穩定性

要判斷這個系統的穩定性，我們就要求它的特徵值，如果有任何一個特徵值是大於零的，那這個系統就是個不穩定的，如果全部的特徵值都小於零，那這個系統才是一個穩定的系統。用動態系統來寫 (5.20) - (5.24) 及 (5.29) 這些 EOM，可以比較容易求得特徵值。

比如從 (5.20) 跟 (5.21) 可以很明顯判斷出特徵值 $= 0$，(5.29) 的特徵值則是 $-(1 + 4\Sigma_+)$。而 (5.46) 代入 (5.23) 變成:

$$\Sigma_\pm{}' = -Q\Sigma_\pm + \Sigma_{\pm 1} = \Sigma_{\pm 1} \tag{5.76}$$

根據 (5.11) 跟 [29] 中的 (6.5)，(5.76) 變成:

$$\Sigma_\pm{}' = (\frac{\sigma_\pm}{H})' = \frac{-3H\sigma_\pm}{H^2} = \frac{-3\sigma_\pm}{H} = \Sigma_{\pm 1} \tag{5.77}$$

$$\Rightarrow (\frac{\sigma_\pm}{H})' = -3(\frac{\sigma_\pm}{H}) \tag{5.78}$$

所以 (5.23) 解出的特徵值是 -3。同理 (5.24) 變成:

$$\Sigma'_{\pm1} = \Sigma_{\pm2} \tag{5.79}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow & -3(\frac{\sigma_\pm}{H})' \\
&= \frac{\ddot{\sigma}_\pm}{H^3} \\
&= \frac{(-3H\sigma_+)'}{H^3} \\
&= \frac{-3}{H^3}(\dot{H}\sigma_\pm + H\dot{\sigma}_\pm) \\
&= \frac{-3}{H^3}(\dot{H}\sigma_\pm - 3H^2\sigma_\pm) \\
&= 9(\frac{\sigma_\pm}{H})
\end{aligned} \tag{5.80}
$$

這邊倒數第二個等號用的是在 Bianchi type I 中，$Q = \frac{\dot{H}}{H^2} = 0$。所以很明顯的，(5.24) 解出的特徵值也是 -3。

不過這樣只能個別求出某方程式的特徵值，如果我們要求整個系統全部的特徵值，就要按照 (5.3) - (5.7) 的方法。首先我們有十一個變數 B、Ω'_Λ、N、Q、Q_2、Σ_+、Σ_-、Σ_{+1}、Σ_{-1}、Σ_{+2}、Σ_{-2}，十一條動態系統的方程式:

$$B' = -2QB \tag{5.81}$$

$$\Omega'_\Lambda = -2Q\Omega_\Lambda \tag{5.82}$$

$$Q' = Q_2 - 2Q^2 \tag{5.83}$$

$$\Sigma'_\pm = \Sigma_{\pm1} - Q\Sigma_\pm \tag{5.84}$$

$$\Sigma'_{\pm1} = \Sigma_{\pm2} - 2Q\Sigma_{\pm1} \tag{5.85}$$

$$N' = -(Q + 1 + 4\Sigma_+)N \tag{5.86}$$

$$
\begin{aligned}
{Q_2}' = & -3\frac{\ddot{H}}{H^5} + \frac{\dddot{H}}{H^4} = -3QQ_2 - 7Q_2 - 4Q^2 - 12Q - 6\Sigma\cdot\Sigma_1 - 2{\Sigma_1}^2 - 2\Sigma\cdot\Sigma_2 \\
& + (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}Q + 2\Sigma_+ + 16{\Sigma_+}^2 - 2\Sigma_{+1})^2 N^2 + B(-\frac{1}{2}Q - 1 - \frac{1}{2}\Sigma^2 + \frac{1}{8}N^2 \\
& + \Omega_\Lambda)
\end{aligned} \tag{5.87}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Sigma'_{+2} = & \Sigma_{+2}(-6 - 3Q) + \frac{\Sigma_{+1}}{\chi}[B - 11\chi + 8 + 4Q(1-\chi) + 4\Sigma^2(1+2\chi)] \\
& + \frac{\Sigma_+}{\chi}[3B + (4-\chi)(Q_2 + 7Q + 6) + (4+8\chi)(3\Sigma^2 + 2\Sigma\cdot\Sigma_1)] - \frac{N^2}{\chi} \\
& [B + 8 + 4Q - (1+8\chi)N^2 + 4(1-\chi){\Sigma_-}^2 + (1+15\chi)(\Sigma_+ + \Sigma_{+1} \\
& - 4{\Sigma_+}^2)]
\end{aligned} \tag{5.88}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Sigma'_{-2} =& \Sigma_{-2}(-6-3Q) + \frac{\Sigma_{-1}}{\chi}[B - 11\chi + 8 + 4Q(1-\chi) + 4\Sigma^2(1+2\chi)] \\
&+ \frac{\Sigma_{-}}{\chi}[3B + (4-\chi)(Q_2 + 7Q + 6) + (4+8\chi)(3\Sigma^2 + 2\Sigma\cdot\Sigma_1)] \\
&- \frac{(1-\chi)N^2}{\chi}(\Sigma + \Sigma_{-1} - 8\Sigma_{-}\Sigma_{+})
\end{aligned} \tag{5.89}
$$

要證明這個動態系統的穩定性，就要在平衡點將動態系統做線性化 (linearization)，因此分別將 (5.81) - (5.89) 等號右邊的函數對十一個變數微分，我們可以整理成一個矩陣系統 $X' = AX$，其中 A 是一個 11×11 的矩陣：

$$
A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,11} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{11,1} & \cdots & A_{11,11} \end{pmatrix} \tag{5.90}
$$

爲了方便表示，我們將 (5.81) - (5.89) 等號右邊的函數以 g_1 - g_{11} 來表示，比如 $g_1 = -2QB$，以此類推。於是我們可以列出 (5.90) 中的每個元素。

$$
\begin{aligned}
A_{1,1} &= \frac{\partial g_1}{\partial_B} = -2Q, \\
A_{1,2} &= \frac{\partial g_1}{\partial_{\Omega_\Lambda}} = 0, \\
A_{1,3} &= \frac{\partial g_1}{\partial_N} = 0, \\
A_{1,4} &= \frac{\partial g_1}{\partial_Q} = -2B, \\
A_{1,5} &= \frac{\partial g_1}{\partial_{Q_2}} = 0, \\
\\
A_{1,6} &= \frac{\partial g_1}{\partial_{\Sigma_+}} = 0, \\
A_{1,7} &= \frac{\partial g_1}{\partial_{\Sigma_-}} = 0, \\
A_{1,8} &= \frac{\partial g_1}{\partial_{\Sigma_{+1}}} = 0, \\
A_{1,9} &= \frac{\partial g_1}{\partial_{\Sigma_{-1}}} = 0, \\
A_{1,10} &= \frac{\partial g_1}{\partial_{\Sigma_{+2}}} = 0, \\
A_{1,11} &= \frac{\partial g_1}{\partial_{\Sigma_{-2}}} = 0
\end{aligned} \tag{5.91}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{2,1} &= \frac{\partial g_2}{\partial_B} = 0, \\
A_{2,2} &= \frac{\partial g_2}{\partial_{\Omega_\Lambda}} = -2Q, \\
A_{2,3} &= \frac{\partial g_2}{\partial_N} = 0, \\
A_{2,4} &= \frac{\partial g_2}{\partial_Q} = -2\Omega_\Lambda, \\
A_{2,5} &= \frac{\partial g_2}{\partial_{Q_2}} = 0, \\
A_{2,6} &= \frac{\partial g_2}{\partial_{\Sigma_+}} = 0, \\
A_{2,7} &= \frac{\partial g_2}{\partial_{\Sigma_-}} = 0, \\
A_{2,8} &= \frac{\partial g_2}{\partial_{\Sigma_{+1}}} = 0, \\
A_{2,9} &= \frac{\partial g_2}{\partial_{\Sigma_{-1}}} = 0, \\
A_{2,10} &= \frac{\partial g_2}{\partial_{\Sigma_{+2}}} = 0, \\
A_{2,11} &= \frac{\partial g_2}{\partial_{\Sigma_{-2}}} = 0
\end{aligned}
\tag{5.92}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{3,1} &= \frac{\partial g_3}{\partial_B} = 0, \\
A_{3,2} &= \frac{\partial g_3}{\partial_{\Omega_\Lambda}} = 0, \\
A_{3,3} &= \frac{\partial g_3}{\partial_N} = 0, \\
A_{3,4} &= \frac{\partial g_3}{\partial_Q} = -4Q, \\
A_{3,5} &= \frac{\partial g_3}{\partial_{Q_2}} = 1, \\
A_{3,6} &= \frac{\partial g_3}{\partial_{\Sigma_+}} = 0, \\
A_{3,7} &= \frac{\partial g_3}{\partial_{\Sigma_-}} = 0, \\
A_{3,8} &= \frac{\partial g_3}{\partial_{\Sigma_{+1}}} = 0, \\
A_{3,9} &= \frac{\partial g_3}{\partial_{\Sigma_{-1}}} = 0, \\
A_{3,10} &= \frac{\partial g_3}{\partial_{\Sigma_{+2}}} = 0, \\
A_{3,11} &= \frac{\partial g_3}{\partial_{\Sigma_{-2}}} = 0
\end{aligned}
\tag{5.93}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{4,1} &= \frac{\partial g_4}{\partial_B} = 0, \\
A_{4,2} &= \frac{\partial g_4}{\partial_{\Omega_\Lambda}} = 0, \\
A_{4,3} &= \frac{\partial g_4}{\partial_N} = 0, \\
A_{4,4} &= \frac{\partial g_4}{\partial_Q} = -\Sigma_+, \\
A_{4,5} &= \frac{\partial g_4}{\partial_{Q_2}} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{4,6} &= \frac{\partial g_4}{\partial_{\Sigma_+}} = -Q, \\
A_{4,7} &= \frac{\partial g_4}{\partial_{\Sigma_-}} = 0, \\
A_{4,8} &= \frac{\partial g_4}{\partial_{\Sigma_{+1}}} = 1, \\
A_{4,9} &= \frac{\partial g_4}{\partial_{\Sigma_{-1}}} = 0, \\
A_{4,10} &= \frac{\partial g_4}{\partial_{\Sigma_{+2}}} = 0, \\
A_{4,11} &= \frac{\partial g_4}{\partial_{\Sigma_{-2}}} = 0
\end{aligned}
\tag{5.94}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{5,1} &= \frac{\partial g_5}{\partial_B} = 0, \\
A_{5,2} &= \frac{\partial g_5}{\partial_{\Omega_\Lambda}} = 0, \\
A_{5,3} &= \frac{\partial g_5}{\partial_N} = 0, \\
A_{5,4} &= \frac{\partial g_5}{\partial_Q} = -\Sigma_-, \\
A_{5,5} &= \frac{\partial g_5}{\partial_{Q_2}} = 0, \\
A_{5,6} &= \frac{\partial g_5}{\partial_{\Sigma_+}} = 0, \\
A_{5,7} &= \frac{\partial g_5}{\partial_{\Sigma_-}} = -Q, \\
A_{5,8} &= \frac{\partial g_5}{\partial_{\Sigma_{+1}}} = 0, \\
A_{5,9} &= \frac{\partial g_5}{\partial_{\Sigma_{-1}}} = 1, \\
A_{5,10} &= \frac{\partial g_5}{\partial_{\Sigma_{+2}}} = 0, \\
A_{5,11} &= \frac{\partial g_5}{\partial_{\Sigma_{-2}}} = 0
\end{aligned}
\tag{5.95}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{6,1} &= \frac{\partial g_6}{\partial_B} = 0, \\
A_{6,2} &= \frac{\partial g_6}{\partial_{\Omega_\Lambda}} = 0, \\
A_{6,3} &= \frac{\partial g_6}{\partial_N} = 0, \\
A_{6,4} &= \frac{\partial g_6}{\partial_Q} = -2\Sigma_{+1}, \\
A_{6,5} &= \frac{\partial g_6}{\partial_{Q_2}} = 0, \\
A_{6,6} &= \frac{\partial g_6}{\partial_{\Sigma_+}} = 0, \\
A_{6,7} &= \frac{\partial g_6}{\partial_{\Sigma_-}} = 0, \\
A_{6,8} &= \frac{\partial g_6}{\partial_{\Sigma_{+1}}} = -2Q, \\
A_{6,9} &= \frac{\partial g_6}{\partial_{\Sigma_{-1}}} = 0, \\
A_{6,10} &= \frac{\partial g_6}{\partial_{\Sigma_{+2}}} = 1, \\
A_{6,11} &= \frac{\partial g_6}{\partial_{\Sigma_{-2}}} = 0
\end{aligned} \tag{5.96}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{7,1} &= \frac{\partial g_7}{\partial_B} = 0, \\
A_{7,2} &= \frac{\partial g_7}{\partial_{\Omega_\Lambda}} = 0, \\
A_{7,3} &= \frac{\partial g_7}{\partial_N} = 0, \\
A_{7,4} &= \frac{\partial g_7}{\partial_Q} = -2\Sigma_{-1}, \\
A_{7,5} &= \frac{\partial g_7}{\partial_{Q_2}} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{7,6} &= \frac{\partial g_7}{\partial_{\Sigma_+}} = 0,\\
A_{7,7} &= \frac{\partial g_7}{\partial_{\Sigma_-}} = 0,\\
A_{7,8} &= \frac{\partial g_7}{\partial_{\Sigma_{+1}}} = 0,\\
A_{7,9} &= \frac{\partial g_7}{\partial_{\Sigma_{-1}}} = -2Q,\\
A_{7,10} &= \frac{\partial g_7}{\partial_{\Sigma_{+2}}} = 0,\\
A_{7,11} &= \frac{\partial g_7}{\partial_{\Sigma_{-2}}} = 1
\end{aligned}
\tag{5.97}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{8,1} &= \frac{\partial g_8}{\partial_B} = 0,\\
A_{8,2} &= \frac{\partial g_8}{\partial_{\Omega_\Lambda}} = 0,\\
A_{8,3} &= \frac{\partial g_8}{\partial_N} = -1 - Q - 4\Sigma_+,\\
A_{8,4} &= \frac{\partial g_8}{\partial_Q} = -N,\\
A_{8,5} &= \frac{\partial g_8}{\partial_{Q_2}} = 0,\\
A_{8,6} &= \frac{\partial g_8}{\partial_{\Sigma_+}} = -4N,\\
A_{8,7} &= \frac{\partial g_8}{\partial_{\Sigma_-}} = 0,\\
A_{8,8} &= \frac{\partial g_8}{\partial_{\Sigma_{+1}}} = 0,\\
A_{8,9} &= \frac{\partial g_8}{\partial_{\Sigma_{-1}}} = 0,\\
A_{8,10} &= \frac{\partial g_8}{\partial_{\Sigma_{+2}}} = 0,\\
A_{8,11} &= \frac{\partial g_8}{\partial_{\Sigma_{-2}}} = 0
\end{aligned}
\tag{5.98}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{9,1} &= \frac{\partial g_9}{\partial_B} = -\frac{3}{4}(1 - \frac{N^2}{3} + \frac{2Q}{3} + {\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2 - \Omega_\Lambda),\\
A_{9,2} &= \frac{\partial g_9}{\partial_{\Omega_\Lambda}} = \frac{3B}{4},\\
A_{9,3} &= \frac{\partial g_9}{\partial_N} = \frac{BN}{2} - 2N(1+2Q) + N^3(1+8\chi) + 2N(8(2\Sigma_+ - \Sigma_{+1})\\
&\qquad + {\Sigma_-}^2(1-\chi) + 5{\Sigma_+}^2(13+3\chi) + \frac{1}{2}N^2(1+8\chi)),\\
A_{9,4} &= \frac{\partial g_9}{\partial_Q} = -\frac{B}{2} - 2N^2 - \frac{9Q}{2} - \frac{9(2+Q)}{2} - 3Q_2 - \frac{1}{2}({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(4-\chi),\\
A_{9,5} &= \frac{\partial g_9}{\partial_{Q_2}} = -3(2+Q),\\
A_{9,6} &= \frac{\partial g_9}{\partial_{\Sigma_+}} = -\frac{3B\Sigma_+}{2} - \Sigma_+1(4-\chi) - \frac{1}{4}(6\Sigma_+ + 4Q\Sigma_+ + 2\Sigma_{+2})(4-\chi)\\
&\qquad - 6\Sigma_+({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(1+2\chi) + N^2(16 + 10\Sigma_+(13+3\chi)),\\
A_{9,7} &= \frac{\partial g_9}{\partial_{\Sigma_-}} = -\frac{3B\Sigma_-}{2} + 2N^2\Sigma_-(1-\chi) - \Sigma_{-1}(4-\chi) - \frac{1}{4}(6\Sigma_- + 4Q\Sigma_-\\
&\qquad + 2\Sigma_{-2})(4-\chi) - 6\Sigma_-({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(1+2\chi),\\
A_{9,8} &= \frac{\partial g_9}{\partial_{\Sigma_{+1}}} = -8N^2 - \Sigma_+(4-\chi) - \frac{1}{2}\Sigma_{+1}(8+\chi),\\
A_{9,9} &= \frac{\partial g_9}{\partial_{\Sigma_{-1}}} = -\Sigma_-(4-\chi) - \frac{1}{2}\Sigma_{-1}(8+\chi),\\
A_{9,10} &= \frac{\partial g_9}{\partial_{\Sigma_{+2}}} = -\frac{1}{2}\Sigma_+(4-\chi),\\
A_{9,11} &= \frac{\partial g_9}{\partial_{\Sigma_{-2}}} = -\frac{1}{2}\Sigma_-(4-\chi)
\end{aligned}
\tag{5.99}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{10,1} &= \frac{\partial g_{10}}{\partial_B} = -\frac{4N^2}{\chi} + \frac{3\Sigma_+}{\chi} + \frac{\Sigma_{+1}}{\chi}, \\
A_{10,2} &= \frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Omega_\Lambda}} = 0, \\
A_{10,3} &= \frac{\partial g_{10}}{\partial_N} = \frac{32N^3(1+8\chi)}{\chi} - \frac{8N(8+B+4Q-4N^2(1+8\chi))}{\chi} \\
&\qquad - \frac{8N(4{\Sigma_-}^2(1-\chi)+(\Sigma_+ - 4{\Sigma_+}^2+\Sigma_{+1})(1+15\chi))}{\chi}, \\
A_{10,4} &= \frac{\partial g_{10}}{\partial_Q} = -3\Sigma_{+2} - \frac{16N^2}{\chi} + \frac{4\Sigma_{+1}(1-\chi)}{\chi} + \frac{7\Sigma_+(4-\chi)}{\chi}, \\
A_{10,5} &= \frac{\partial g_{10}}{\partial_{Q_2}} = \frac{\Sigma_+(4-\chi)}{\chi}, \\
A_{10,6} &= \frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Sigma_+}} = \frac{8\Sigma_+\Sigma_{+1}(1+2\chi)}{\chi} + \frac{4\Sigma_+(6\Sigma_+ + 2\Sigma_{+1})(1+2\chi)}{\chi} \\
&\qquad - \frac{4N^2(1-8\Sigma_+)(1+15\chi)}{\chi} + \frac{3B+(6+7Q+Q_2)(4-\chi)}{\chi} \\
&\qquad + \frac{4(3({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{\chi} + \frac{2(\Sigma_-\Sigma_-1+\Sigma_+\Sigma_+1))(1+2\chi)}{\chi}, \\
A_{10,7} &= \frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Sigma_-}} = -\frac{32N^2\Sigma_-(1-\chi)}{\chi} + \frac{4(6\Sigma_- + 2\Sigma_{-1})\Sigma_+(1+2\chi)}{\chi} \\
&\qquad + \frac{8\Sigma_-\Sigma_+1(1+2\chi)}{\chi}, \\
A_{10,8} &= \frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Sigma_{+1}}} = \frac{8{\Sigma_+}^2(1+2\chi)}{\chi} - \frac{4N^2(1+15\chi)}{\chi} + \frac{8+B+4Q(1-\chi)}{\chi} \\
&\qquad + \frac{-11\chi+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)(1+2\chi)}{\chi}, \\
A_{10,9} &= \frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Sigma_{-1}}} = \frac{8\Sigma_-\Sigma_+(1+2\chi)}{\chi}, \\
A_{10,10} &= \frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Sigma_{+2}}} = -3(2+Q), \\
A_{10,11} &= \frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Sigma_{-2}}} = 0
\end{aligned}
\tag{5.100}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{11,1} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial_B} = \frac{3\Sigma_-}{\chi} + \frac{\Sigma_{-1}}{\chi},\\
A_{11,2} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Omega_\Lambda}} = 0,\\
A_{11,3} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial_N} = -\frac{8N(\Sigma_- + \Sigma_{-1} - 8\Sigma_-\Sigma_+)(1-\chi)}{\chi},\\
A_{11,4} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial_Q} = -3\Sigma_{-2} + \frac{4\Sigma_{-1}(1-\chi)}{\chi} + \frac{7\Sigma_-(4-\chi)}{\chi},\\
A_{11,5} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial_{Q_2}} = \frac{\Sigma_-(4-\chi)}{\chi},\\
A_{11,6} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Sigma_+}} = \frac{32N^2\Sigma_-(1-\chi)}{\chi} + \frac{8\Sigma_{-1}\Sigma_+(1+2\chi)}{\chi} + \frac{4\Sigma_-(6\Sigma_+ + 2\Sigma_{+1})(1+2\chi)}{\chi},\\
A_{11,7} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Sigma_-}} = -\frac{4N^2(1-8\Sigma_+)(1-\chi)}{\chi} + \frac{8\Sigma_-\Sigma_{-1}(1+2\chi)}{\chi}\\
&\qquad + \frac{4\Sigma_-(6\Sigma_- + 2\Sigma_{-1})(1+2\chi)}{\chi} + \frac{3B + (6 + 7Q + Q2)(4-\chi)}{\chi}\\
&\qquad + \frac{4(3({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2) + 2(\Sigma_-\Sigma_{-1} + \Sigma_+\Sigma_{+1}))(1+2\chi)}{\chi},\\
A_{11,8} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Sigma_{+1}}} = \frac{8\Sigma_-\Sigma_+(1+2\chi)}{\chi},\\
A_{11,9} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Sigma_{-1}}} = -\frac{4N^2(1-\chi)}{\chi} + \frac{8{\Sigma_-}^2(1+2\chi)}{\chi} + \frac{8 + B + 4Q(1-\chi) - 11\chi}{\chi}\\
&\qquad + \frac{4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(1+2\chi)}{\chi},\\
A_{11,10} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Sigma_{+2}}} = 0,\\
A_{11,11} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Sigma_{-2}}} = -3(2+Q)
\end{aligned}
\tag{5.101}
$$

有了線性化的矩陣，我們就要找出平衡點，再將平衡點代入 A，才是在平衡點做的線性化過程。將 Bianchi type I 的特性 (5.46) 分別代入，(5.81) - (5.89) 變成

$$B' = 0, \tag{5.102}$$
$$\Omega'_\Lambda = 0, \tag{5.103}$$
$$N' = 0, \tag{5.104}$$
$$Q' = Q_2, \tag{5.105}$$
$$\begin{aligned} Q'_2 &= -6Q_2 - \frac{3}{4}({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(4-\chi) - \frac{3}{2}({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)^2(1+2\chi) \\ &\quad - \frac{3}{4}B(1 + {\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2 - \Omega_\Lambda), \end{aligned} \tag{5.106}$$
$$\Sigma'_+ = 0, \tag{5.107}$$
$$\Sigma'_- = 0, \tag{5.108}$$
$$\Sigma'_{+1} = 0, \tag{5.109}$$
$$\Sigma'_{-1} = 0, \tag{5.110}$$
$$\Sigma'_{+2} = \frac{\Sigma_+(3B + (6+Q_2)(4-\chi) + 12({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(1+2\chi))}{\chi}, \tag{5.111}$$
$$\Sigma'_{-2} = \frac{\Sigma_-(3B + (6+Q_2)(4-\chi) + 12({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(1+2\chi))}{\chi} \tag{5.112}$$

由於 (5.46)，從 (5.105) 我們看得出 $Q_2 = 0$，因此代入 (5.106)、(5.111) 跟 (5.112) 變成

$$\begin{aligned} Q'_2 &= -\frac{3}{4}({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(4-\chi) - \frac{3}{2}({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)^2(1+2\chi) \\ &\quad - \frac{3}{4}B(1 + {\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2 - \Omega_\Lambda), \end{aligned} \tag{5.113}$$
$$\Sigma'_{+2} = \frac{\Sigma_+(3B + 6(4-\chi) + 12({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(1+2\chi))}{\chi}, \tag{5.114}$$
$$\Sigma'_{-2} = \frac{\Sigma_-(3B + 6(4-\chi) + 12({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(1+2\chi))}{\chi} \tag{5.115}$$

令 (5.113) - (5.115) 等於零並且解聯立，我們就可以求出平衡點，平衡點如下

$$B = B, \tag{5.116}$$
$$\Omega_\Lambda = \frac{\Sigma^2}{2} + 1, \tag{5.117}$$
$$N = 0, \tag{5.118}$$
$$Q = 0, \tag{5.119}$$
$$Q2 = 0, \tag{5.120}$$
$$\Sigma_+ = \Sigma_+, \tag{5.121}$$
$$\Sigma_- = \Sigma_-, \tag{5.122}$$
$$\Sigma_{+1} = 0, \tag{5.123}$$
$$\Sigma_{-1} = 0, \tag{5.124}$$
$$\Sigma_{+2} = 0, \tag{5.125}$$
$$\Sigma_{-2} = 0, \tag{5.126}$$
$$\chi = (B + 4\Sigma^2 + 8)/(2(1 - 4\Sigma^2)) \tag{5.127}$$
$$\tag{5.128}$$

有了平衡點，我們就將平衡點代入 (5.90) 的矩陣，也就是 (5.91) - (5.101) 的方程式，我們可以得到在平衡點做線性化的矩陣 A，(5.91) - (5.101) 變成：

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= (\frac{\partial g_1}{\partial_B})_0 = 0, \\
A_{1,2} &= (\frac{\partial g_1}{\partial_{\Omega_\Lambda}})_0 = 0, \\
A_{1,3} &= (\frac{\partial g_1}{\partial_N})_0 = 0, \\
A_{1,4} &= (\frac{\partial g_1}{\partial_Q})_0 = -2B, \\
A_{1,5} &= (\frac{\partial g_1}{\partial_{Q_2}})_0 = 0, \\
A_{1,6} &= (\frac{\partial g_1}{\partial_{\Sigma_+}})_0 = 0, \\
A_{1,7} &= (\frac{\partial g_1}{\partial_{\Sigma_-}})_0 = 0, \\
\\
A_{1,8} &= (\frac{\partial g_1}{\partial_{\Sigma_{+1}}})_0 = 0, \\
A_{1,9} &= (\frac{\partial g_1}{\partial_{\Sigma_{-1}}})_0 = 0, \\
A_{1,10} &= (\frac{\partial g_1}{\partial_{\Sigma_{+2}}})_0 = 0, \\
A_{1,11} &= (\frac{\partial g_1}{\partial_{\Sigma_{-2}}})_0 = 0
\end{aligned} \tag{5.129}$$

$$
\begin{aligned}
A_{2,1} &= (\frac{\partial g_2}{\partial_B})_0 = 0,\\
A_{2,2} &= (\frac{\partial g_2}{\partial_{\Omega_\Lambda}})_0 = 0,\\
A_{2,3} &= (\frac{\partial g_2}{\partial_N})_0 = 0,\\
A_{2,4} &= (\frac{\partial g_2}{\partial_Q})_0 = -2(\frac{\Sigma^2}{2}+1),\\
A_{2,5} &= (\frac{\partial g_2}{\partial_{Q_2}})_0 = 0,\\
A_{2,6} &= (\frac{\partial g_2}{\partial_{\Sigma_+}})_0 = 0,\\
A_{2,7} &= (\frac{\partial g_2}{\partial_{\Sigma_-}})_0 = 0,\\
A_{2,8} &= (\frac{\partial g_2}{\partial_{\Sigma_{+1}}})_0 = 0,\\
A_{2,9} &= (\frac{\partial g_2}{\partial_{\Sigma_{-1}}})_0 = 0,\\
A_{2,10} &= (\frac{\partial g_2}{\partial_{\Sigma_{+2}}})_0 = 0,\\
A_{2,11} &= (\frac{\partial g_2}{\partial_{\Sigma_{-2}}})_0 = 0
\end{aligned}
\tag{5.130}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{3,1} &= (\frac{\partial g_3}{\partial_B})_0 = 0,\\
A_{3,2} &= (\frac{\partial g_3}{\partial_{\Omega_\Lambda}})_0 = 0,\\
A_{3,3} &= (\frac{\partial g_3}{\partial_N})_0 = 0,\\
A_{3,4} &= (\frac{\partial g_3}{\partial_Q})_0 = 0,\\
A_{3,5} &= (\frac{\partial g_3}{\partial_{Q_2}})_0 = 1,\\
A_{3,6} &= (\frac{\partial g_3}{\partial_{\Sigma_+}})_0 = 0,\\
A_{3,7} &= (\frac{\partial g_3}{\partial_{\Sigma_-}})_0 = 0,\\
A_{3,8} &= (\frac{\partial g_3}{\partial_{\Sigma_{+1}}})_0 = 0,\\
A_{3,9} &= (\frac{\partial g_3}{\partial_{\Sigma_{-1}}})_0 = 0,\\
A_{3,10} &= (\frac{\partial g_3}{\partial_{\Sigma_{+2}}})_0 = 0,\\
A_{3,11} &= (\frac{\partial g_3}{\partial_{\Sigma_{-2}}})_0 = 0
\end{aligned}
\tag{5.131}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{4,1} &= (\frac{\partial g_4}{\partial_B})_0 = 0,\\
A_{4,2} &= (\frac{\partial g_4}{\partial_{\Omega_\Lambda}})_0 = 0,\\
A_{4,3} &= (\frac{\partial g_4}{\partial_N})_0 = 0,\\
A_{4,4} &= (\frac{\partial g_4}{\partial_Q})_0 = -\Sigma_+,\\
A_{4,5} &= (\frac{\partial g_4}{\partial_{Q_2}})_0 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{4,6} &= (\frac{\partial g_4}{\partial_{\Sigma_+}})_0 = 0,\\
A_{4,7} &= (\frac{\partial g_4}{\partial_{\Sigma_-}})_0 = 0,\\
A_{4,8} &= (\frac{\partial g_4}{\partial_{\Sigma_{+1}}})_0 = 1,\\
A_{4,9} &= (\frac{\partial g_4}{\partial_{\Sigma_{-1}}})_0 = 0,\\
A_{4,10} &= (\frac{\partial g_4}{\partial_{\Sigma_{+2}}})_0 = 0,\\
A_{4,11} &= (\frac{\partial g_4}{\partial_{\Sigma_{-2}}})_0 = 0
\end{aligned}
\tag{5.132}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{5,1} &= (\frac{\partial g_5}{\partial_B})_0 = 0,\\
A_{5,2} &= (\frac{\partial g_5}{\partial_{\Omega_\Lambda}})_0 = 0,\\
A_{5,3} &= (\frac{\partial g_5}{\partial_N})_0 = 0,\\
A_{5,4} &= (\frac{\partial g_5}{\partial_Q})_0 = -\Sigma_-,\\
A_{5,5} &= (\frac{\partial g_5}{\partial_{Q_2}})_0 = 0,\\
A_{5,6} &= (\frac{\partial g_5}{\partial_{\Sigma_+}})_0 = 0,\\
A_{5,7} &= (\frac{\partial g_5}{\partial_{\Sigma_-}})_0 = 0,\\
A_{5,8} &= (\frac{\partial g_5}{\partial_{\Sigma_{+1}}})_0 = 0,\\
A_{5,9} &= (\frac{\partial g_5}{\partial_{\Sigma_{-1}}})_0 = 1,\\
A_{5,10} &= (\frac{\partial g_5}{\partial_{\Sigma_{+2}}})_0 = 0,\\
A_{5,11} &= (\frac{\partial g_5}{\partial_{\Sigma_{-2}}})_0 = 0
\end{aligned}
\tag{5.133}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{6,1} &= (\frac{\partial g_6}{\partial_B})_0 = 0, \\
A_{6,2} &= (\frac{\partial g_6}{\partial_{\Omega_\Lambda}})_0 = 0, \\
A_{6,3} &= (\frac{\partial g_6}{\partial_N})_0 = 0, \\
A_{6,4} &= (\frac{\partial g_6}{\partial_Q})_0 = 0, \\
A_{6,5} &= (\frac{\partial g_6}{\partial_{Q_2}})_0 = 0, \\
A_{6,6} &= (\frac{\partial g_6}{\partial_{\Sigma_+}})_0 = 0, \\
A_{6,7} &= (\frac{\partial g_6}{\partial_{\Sigma_-}})_0 = 0, \\
A_{6,8} &= (\frac{\partial g_6}{\partial_{\Sigma_{+1}}})_0 = 0, \\
A_{6,9} &= (\frac{\partial g_6}{\partial_{\Sigma_{-1}}})_0 = 0, \\
A_{6,10} &= (\frac{\partial g_6}{\partial_{\Sigma_{+2}}})_0 = 1, \\
A_{6,11} &= (\frac{\partial g_6}{\partial_{\Sigma_{-2}}})_0 = 0
\end{aligned}
\tag{5.134}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{7,1} &= (\frac{\partial g_7}{\partial_B})_0 = 0, \\
A_{7,2} &= (\frac{\partial g_7}{\partial_{\Omega_\Lambda}})_0 = 0, \\
A_{7,3} &= (\frac{\partial g_7}{\partial_N})_0 = 0, \\
A_{7,4} &= (\frac{\partial g_7}{\partial_Q})_0 = 0, \\
A_{7,5} &= (\frac{\partial g_7}{\partial_{Q_2}})_0 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{7,6} &= (\frac{\partial g_7}{\partial_{\Sigma_+}})_0 = 0,\\
A_{7,7} &= (\frac{\partial g_7}{\partial_{\Sigma_-}})_0 = 0,\\
A_{7,8} &= (\frac{\partial g_7}{\partial_{\Sigma_{+1}}})_0 = 0,\\
A_{7,9} &= (\frac{\partial g_7}{\partial_{\Sigma_{-1}}})_0 = 0,\\
A_{7,10} &= (\frac{\partial g_7}{\partial_{\Sigma_{+2}}})_0 = 0,\\
A_{7,11} &= (\frac{\partial g_7}{\partial_{\Sigma_{-2}}})_0 = 1
\end{aligned}
\tag{5.135}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{8,1} &= (\frac{\partial g_8}{\partial_B})_0 = 0,\\
A_{8,2} &= (\frac{\partial g_8}{\partial_{\Omega_\Lambda}})_0 = 0,\\
A_{8,3} &= (\frac{\partial g_8}{\partial_N})_0 = -1 - 4\Sigma_+,\\
A_{8,4} &= (\frac{\partial g_8}{\partial_Q})_0 = 0,\\
A_{8,5} &= (\frac{\partial g_8}{\partial_{Q_2}})_0 = 0,\\
A_{8,6} &= (\frac{\partial g_8}{\partial_{\Sigma_+}})_0 = 0,\\
A_{8,7} &= (\frac{\partial g_8}{\partial_{\Sigma_-}})_0 = 0,\\
A_{8,8} &= (\frac{\partial g_8}{\partial_{\Sigma_{+1}}})_0 = 0,\\
A_{8,9} &= (\frac{\partial g_8}{\partial_{\Sigma_{-1}}})_0 = 0,\\
A_{8,10} &= (\frac{\partial g_8}{\partial_{\Sigma_{+2}}})_0 = 0,\\
A_{8,11} &= (\frac{\partial g_8}{\partial_{\Sigma_{-2}}})_0 = 0
\end{aligned}
\tag{5.136}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{9,1} &= (\frac{\partial g_9}{\partial_B})_0 = -\frac{3}{4}({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2 + \frac{1}{2}(-{\Sigma_-}^2 - {\Sigma_+}^2)),\\
A_{9,2} &= (\frac{\partial g_9}{\partial_{\Omega_\Lambda}})_0 = \frac{3B}{4},\\
A_{9,3} &= (\frac{\partial g_9}{\partial_N})_0 = 0,\\
A_{9,4} &= (\frac{\partial g_9}{\partial_Q})_0 = -9 - \frac{B}{2} - \frac{1}{2}({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(4 - \frac{8 + B + 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)}{2(1 - 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2))}),\\
A_{9,5} &= (\frac{\partial g_9}{\partial_{Q_2}})_0 = -6,\\
A_{9,6} &= (\frac{\partial g_9}{\partial_{\Sigma_+}})_0 = -\frac{3B\Sigma_+}{2} - \frac{3}{2}\Sigma_+(4 - \frac{8 + B + 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)}{2(1 - 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2))})\\
&\qquad - 6\Sigma_+({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(1 + \frac{8 + B + 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)}{1 - 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)}),\\
A_{9,7} &= (\frac{\partial g_9}{\partial_{\Sigma_-}})_0 = -\frac{3B\Sigma_-}{2} - \frac{3}{2}\Sigma_-(4 - \frac{8 + B + 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)}{2(1 - 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2))})\\
&\qquad - 6\Sigma_-({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)(1 + \frac{8 + B + 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)}{1 - 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)}),\\
A_{9,8} &= (\frac{\partial g_9}{\partial_{\Sigma_{+1}}})_0 = -\Sigma_+(4 - \frac{8 + B + 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)}{2(1 - 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2))}),\\
A_{9,9} &= (\frac{\partial g_9}{\partial_{\Sigma_{-1}}})_0 = -\Sigma_-(4 - \frac{8 + B + 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)}{2(1 - 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2))}),\\
A_{9,10} &= (\frac{\partial g_9}{\partial_{\Sigma_{+2}}})_0 = -\frac{1}{2}\Sigma_+(4 - \frac{8 + B + 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)}{2(1 - 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2))}),\\
A_{9,11} &= (\frac{\partial g_9}{\partial_{\Sigma_{-2}}})_0 = -\frac{1}{2}\Sigma_-(4 - \frac{8 + B + 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2)}{2(1 - 4({\Sigma_-}^2 + {\Sigma_+}^2))})
\end{aligned}
\tag{5.137}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{10,1} &= (\frac{\partial g_9}{\partial_B})_0 = \frac{6\Sigma_+(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)},\\
A_{10,2} &= (\frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Omega_\Lambda}})_0 = 0,\\
A_{10,3} &= (\frac{\partial g_{10}}{\partial_N})_0 = 0,\\
A_{10,4} &= (\frac{\partial g_{10}}{\partial_Q})_0 = \frac{14\Sigma_+(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))(4-\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))})}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)},\\
A_{10,5} &= (\frac{\partial g_{10}}{\partial_{Q_2}})_0 = \frac{2\Sigma_+(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))(4-\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))})}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)},\\
A_{10,6} &= (\frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Sigma_+}})_0 = \frac{48{\Sigma_+}^2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))(1+\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)})}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}\\
&\quad + \frac{1}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))\\
&\quad (3B+6(4-\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))})+12({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)\\
&\quad (1+\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)})),\\
A_{10,7} &= (\frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Sigma_-}})_0 = \frac{48\Sigma_-\Sigma_+(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))(1+\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)})}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)},\\
A_{10,8} &= (\frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Sigma_{+1}}})_0 = \frac{16{\Sigma_+}^2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))(1+\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)})}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}\\
&\quad + \frac{1}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))\\
&\quad (8+B-\frac{11(8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))}{2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))}+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)\\
&\quad (1+\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)})),\\
A_{10,9} &= (\frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Sigma_{-1}}})_0 = \frac{16\Sigma_-\Sigma_+(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))(1+\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)})}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)},\\
A_{10,10} &= (\frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Sigma_{+2}}})_0 = -6,\\
A_{10,11} &= (\frac{\partial g_{10}}{\partial_{\Sigma_{-2}}})_0 = 0
\end{aligned}
\tag{5.138}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{11,1} &= (\frac{\partial g_{11}}{\partial_B})_0 = \frac{6\Sigma_-(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)},\\
A_{11,2} &= (\frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Omega_\Lambda}})_0 = 0,\\
A_{11,3} &= (\frac{\partial g_{11}}{\partial_N})_0 = 0,\\
A_{11,4} &= (\frac{\partial g_{11}}{\partial_Q})_0 = \frac{14\Sigma_-(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))(4-\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))})}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)},\\
A_{11,5} &= (\frac{\partial g_{11}}{\partial_{Q_2}})_0 = \frac{2\Sigma_-(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))(4-\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))})}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)},\\
A_{11,6} &= (\frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Sigma_+}})_0 = \frac{48\Sigma_-\Sigma_+(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))(1+\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)})}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)},\\
A_{11,7} &= (\frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Sigma_-}})_0 = \frac{48{\Sigma_-}^2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))(1+\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)})}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}\\
&\quad +\frac{1}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))\\
&\quad (3B+6(4-\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))})+12({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)\\
&\quad (1+\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)})),\\
A_{11,8} &= (\frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Sigma_{+1}}})_0 = \frac{16\Sigma_-\Sigma_+(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))(1+\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)})}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)},\\
A_{11,9} &= (\frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Sigma_{-1}}})_0 = \frac{16{\Sigma_-}^2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))(1+\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)})}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}\\
&\quad +\frac{1}{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))\\
&\quad (8+B-\frac{11(8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))}{2(1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2))}\\
&\quad +4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)(1+\frac{8+B+4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)}{1-4({\Sigma_-}^2+{\Sigma_+}^2)})),\\
A_{11,10} &= (\frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Sigma_{+2}}})_0 = 0,\\
A_{11,11} &= (\frac{\partial g_{11}}{\partial_{\Sigma_{-2}}})_0 = -6
\end{aligned}
\tag{5.139}
$$

最後，爲了求特徵值，我們計算 $Det\ (A-\lambda I)=0$ 來求這個動態系統的特徵值 λ，求出如下：

$$
\begin{aligned}
&4 \times [\lambda = -3],\ 2 \times [\lambda = 0],\\
&\lambda = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{9-2B}),\ \lambda = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{9-2B}), \lambda = -1 - 4\Sigma_+,\\
&\lambda_- = \frac{3}{2}(-1 - \sqrt{1 + 8{\Sigma_-}^2 + 8{\Sigma_+}^2}),\ \lambda = \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{1 + 8{\Sigma_-}^2 + 8{\Sigma_+}^2})
\end{aligned} \tag{5.140}
$$

這邊是用十一個變數組成的十一條動態系統方程式 (5.81) - (5.89) 求出的特徵值。但是如果是在 Bianchi type I 宇宙，根據 (5.46)，變數 N 等於零，也就是 (5.86) 會直接等於零，所以如果一開始就用除了 (5.86) 剩下的十條方程式來求特徵值，則會解出除了 $\lambda = -1 - 4\Sigma_+$ 以外的十個特徵值。

而不管是用 11×11 或 10×10 的矩陣，解出的特徵值經過 (5.68) 的代數轉換，我們可以發現這些特徵值當中的

$$
\lambda_- = \frac{3}{2}(-1 - \sqrt{1 + 8{\Sigma_-}^2 + 8{\Sigma_+}^2}) \tag{5.141}
$$

其實就是微擾方法中，微擾項裡代表膨脹或是縮減的項 (4.14)

$$
v_- = -\frac{1}{2}(a + b + c - \sqrt{9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6ab - 6ac - 6bc}) \geq 0
$$

證明如下：

將

$$
\begin{aligned}
\Sigma^2 =& ({H_1}^2 + {H_2}^2 + {H_3}^2 - H_1H_2 - H_2H_3 - H_1H_3)/(9H^2)\\
=& (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)/[9(\frac{a+b+c}{3})^2]
\end{aligned} \tag{5.142}
$$

代入後：

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{2}(-1 - \sqrt{1 + 8{\Sigma_-}^2 + 8{\Sigma_+}^2})\\
&= \frac{3}{2}(-1 - \sqrt{1 + 8(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)/[9(\frac{a+b+c}{3})^2]})\\
&= \frac{3}{2}(-1 - \sqrt{1 + 8(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)/(a+b+c)^2})\\
&= \frac{3}{2}(-1 - \frac{1}{a+b+c}\sqrt{(a+b+c)^2 + 8((a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca))})
\end{aligned}
$$

乘以 $H = (a+b+c)/3$，得到

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & -\frac{1}{2}(a + b + c - \sqrt{9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6ab - 6ac - 6bc})\\
& = (4.14)\\
& = v_-
\end{aligned} \tag{5.143}
$$

兩者的數值經過轉換後是完全一樣的，因此我們用動態方法解出的特徵值，其實就是微擾方法中，微擾項裡代表膨脹或是縮減的項 v 。而這個特徵值 (5.141) 跟 (4.14) 的 v_- 都會一直大於零 (如果等於零，會變成 de Sitter 的解)。我們知道，如果有任何一個計算出的特徵值或是 v 大於零，代表的就是這個系統的不穩定。再加上 (5.141) 中的 $\Sigma_-^2 + 8\Sigma_+^2$ 就是關係著 (5.55) 的不均向解，因此在新的重力理論 [2] 中， Bianchi type I 宇宙的不均向膨脹解都是不穩定的，也就是這個宇宙最後還是會演化至穩定的狀態，也就是 de Sitter 時空。

Chapter 6

微擾方法跟動態系統的連結

6.1 特徵值的轉換

雖然兩種方法解出的值並不完全一樣，但都可以解出同樣代表不穩定的特徵值，代表其中勢必有某種連結。因此，這章就來探討兩種方法之間的關係。首先，我們先證明動態系統算出的某些特徵值經過轉換後，會跟微擾方法中微擾項裡，代表膨脹或縮減的項 v 相等。

(4.14) 會等於 (5.141)，在上一節已經證明，剩下的就是 (5.140) 中的 $\lambda = -3$:

$$
\begin{aligned}
& -3 \times [H = (a+b+c)/3] \\
& = -a - b - c \\
& = (4.16)
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

其餘的差別則是 $\lambda = 0$ 跟 $\lambda = -3$ 的數目不同，以及動態系統會多出 $\lambda = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{9-2B})$ 這兩個特徵值，不過這兩個都不是代表不穩定的解，也就是說，它們是不會影響結果的特徵值。總結一句話就是，比較兩個方法解出的值，除了代表不穩定的特徵值外，其它的值都大同小異，而不一樣的值，又不會影響結果。

6.2 基本原理

我們可以發現，其實兩個方法的基本原理是一樣的：兩者都是用到一階展開。根據微分的定義跟微擾的做法，我們發現，在做微擾時其實就是在做場方程式的一階展開，而動態系統方法中的線性化過程，就是一階展開。

$$
D_iL(x+\Delta x) - D_iL(x) = \frac{\partial D_iL}{\partial x}\Delta x \equiv \frac{\delta D_iL}{\delta x}\Delta x \tag{6.2}
$$

差別在於，兩者開始的場方程式不一樣，微擾方法是從 $\delta R = 0$, (3.52) $D_0\mathcal{L}$ 跟 (3.53) $D_1\mathcal{L}$ 出發，對 H_i 做一階展開，而動態系統是由十一條動態系統場方程式 (5.81) - (5.89) 來計算，對十一個幾何變數做一階展開；也就是前者是對 H_i 做變分，後者則是對十一個幾何變數 B、Ω_Λ、N、Q、Q_2、Σ_+、 Σ_-、Σ_{+1}、Σ_{-1}、Σ_{+2}、 Σ_{-2} 做變分，根據 Chain Rule 以及 (5.67) 、 (5.68)，我們可以得到 δH_i 跟 δ‘幾何變數’之間的關係:

$$
\begin{aligned}
\delta B =&\frac{\delta B}{\delta H_i}\delta H_i \\
=&\frac{-18}{(3\alpha+\beta)(H_1+H_2+H)^3}(\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3) \\
=&-\frac{2}{3(3\alpha+\beta)H^3}(\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3)
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta \Omega_\Lambda =&\frac{\delta \Omega_\Lambda}{\delta H_i}\delta H_i \\
=&\frac{-6}{(H_1+H_2+H_3)^3}(\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3) \\
=&\frac{-2}{9H^3}(\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3)
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta Q =&\frac{\delta Q}{\delta H_i}\delta H_i \\
=&[-\frac{6\dot{H}_1+6\dot{H}_2+6\dot{H}_3}{(H_1+H_2+H_3)^3}](\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3) \\
&+\frac{3}{(H_1+H_2+H_3)^2}(\delta\dot{H}_1+\delta\dot{H}_2+\delta\dot{H}_3) \\
=&(-\frac{2\dot{H}_1+2\dot{H}_2+2\dot{H}_3}{9H^3})(\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3) \\
&+\frac{1}{3H^2}(\delta\dot{H}_1+\delta\dot{H}_2+\delta\dot{H}_3)
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta Q_2 =&\frac{\delta Q_2}{\delta H_i}\delta H_i \\
=&[-\frac{27\ddot{H}_1+27\ddot{H}_2+27\ddot{H}_3}{(H_1+H_2+H)^3}](\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3) \\
&-\frac{27}{(H_1+H_2+H)^3}(\delta\ddot{H}_1+\delta\ddot{H}_2+\delta\ddot{H}_3) \\
=&[-\frac{\ddot{H}_1+\ddot{H}_2+\ddot{H}_3}{H^3}(\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3) \\
&-\frac{1}{H^3}(\delta\ddot{H}_1+\delta\ddot{H}_2+\delta\ddot{H}_3)
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Sigma_+ =& \frac{\delta\Sigma_+}{\delta H_i}\delta H_i \\
=& [\frac{H_1}{(H_1+H_2+H_3)^2} - \frac{H_2}{2(H_1+H_2+H_3)^2} \\
& - \frac{H_3}{2(H_1+H_2+H_3)^2} - \frac{1}{H_1+H_2+H_3}]\delta H_1 \\
& + [\frac{H_1}{(H_1+H_2+H_3)^2} - \frac{H_2}{2(H_1+H_2+H_3)^2} \\
& - \frac{H_3}{2(H_1+H_2+H_3)^2} + \frac{1}{2(H_1+H_2+H_3)}]\delta H_2 \\
& + [\frac{H_1}{(H_1+H_2+H_3)^2} - \frac{H_2}{2(H_1+H_2+H_3)^2} \\
& - \frac{H_3}{2(H_1+H_2+H_3)^2} + \frac{1}{2(H_1+H_2+H_3)}]\delta H_3 \\
& + \frac{3}{(H_1+H_2+H_3)^2}(-\delta\dot{H}_1 + \delta\dot{H}_2 + \delta\dot{H}_3) \\
=& [\frac{H_1}{9H^2} - \frac{H_2}{18H^2} - \frac{H_3}{18H^2} - \frac{1}{3H}]\delta H_1 \\
& + [\frac{H_1}{9H^2} - \frac{H_2}{18H^2} - \frac{H_3}{18H^2} + \frac{1}{6H}]\delta H_2 \\
& + [\frac{H_1}{9H^2} - \frac{H_2}{18H^2} - \frac{H_3}{18H^2} + \frac{1}{6H}]\delta H_3 \\
& + \frac{1}{3H^2}(-\delta\dot{H}_1 + \delta\dot{H}_2 + \delta\dot{H}_3)
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Sigma_- =& \frac{\delta((\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}})/(\frac{H_1+H_2+H_3}{3}))}{\delta H_i}\delta H_i \\
=& (-\frac{3\sqrt{3}(H_2-H_3)}{2(H_1+H_2+H_3)^2})\delta H_1 \\
& + (-\frac{3\sqrt{3}(H_2-H_3)}{2(H_1+H_2+H_3)^2} + \frac{3\sqrt{3}}{2(H_1+H_2+H_3)})\delta H_2 \\
& + (-\frac{3\sqrt{3}(H_2-H_3)}{2(H_1+H_2+H_3)^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2(H_1+H_2+H_3)})\delta H_3 \\
=& (-\frac{\sqrt{3}(H_2-H_3)}{6H^2})\delta H_1 \\
& + (-\frac{\sqrt{3}(H_2-H_3)}{6H^2} + \frac{\sqrt{3}}{2H})\delta H_2 \\
& + (-\frac{\sqrt{3}(H_2-H_3)}{6H^2} - \frac{\sqrt{3}}{2H})\delta H_3
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Sigma_{+1} =& \frac{\delta\Sigma_{+1}}{\delta H_i}\delta H_i \\
=& [\frac{6\dot{H}_1}{(H_1+H_2+H_3)^3} - \frac{3\dot{H}_2}{(H_1+H_2+H_3)^3} \\
& - \frac{3\dot{H}_3}{(H_1+H_2+H_3)^3}](\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3) \\
& + \frac{3}{(H_1+H_2+H_3)^2}[-\delta\dot{H}_1 + \frac{1}{2}(\delta\dot{H}_2+\delta\dot{H}_3)] \\
=& [\frac{2\dot{H}_1}{9H^2} - \frac{\dot{H}_2}{9H^2} - \frac{\dot{H}_3}{9H^2}](\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3) \\
& + \frac{1}{3H^2}[-\delta\dot{H}_1 + \frac{1}{2}(\delta\dot{H}_2+\delta\dot{H}_3)]
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Sigma_{-1} =& \frac{\delta((\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}})'/(\frac{H_1+H_2+H_3}{3}))^2}{\delta H_i}\delta H_i \\
=& -\frac{9\sqrt{3}(\dot{H}_2-\dot{H}_3)}{(H_1+H_2+H_3)^3}(\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3) \\
& + \frac{9\sqrt{3}}{2(H_1+H_2+H_3)^2}(\delta\dot{H}_2-\delta\dot{H}_3) \\
=& -\frac{9\sqrt{3}(\dot{H}_2-\dot{H}_3)}{3H^3}(\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3) \\
& + \frac{\sqrt{3}}{2H^2}(\delta\dot{H}_2-\delta\dot{H}_3)
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Sigma_{+2} =& \frac{\delta\Sigma_{+2}}{\delta H_i}\delta H_i \\
=& [-\frac{9\ddot{H}_1}{(H_1+H_2+H_3)^3} + \frac{9\ddot{H}_2}{2(H_1+H_2+H_3)^3} \\
& + \frac{9\ddot{H}_3}{2(H_1+H_2+H_3)^3}](\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3) \\
& + \frac{9}{(H_1+H_2+H_3)^3}[-\delta\dot{H}_1 + \frac{1}{2}(\delta\dot{H}_2+\delta\dot{H}_3)] \\
=& [-\frac{\ddot{H}_1}{3H^3} + \frac{\ddot{H}_2}{6H^3} + \frac{\ddot{H}_3}{6H^3}](\delta H_1+\delta H_2+\delta H_3) \\
& + \frac{1}{3H^3}[-\delta\dot{H}_1 + \frac{1}{2}(\delta\dot{H}_2+\delta\dot{H}_3)]
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Sigma_{-2} =& \frac{\delta((\frac{H_2-H_3}{2\sqrt{3}})''/(\frac{H_1+H_2+H_3}{3}))^3}{\delta H_i}\delta H_i \\
=& -\frac{81\sqrt{3}(\ddot{H}_2-\ddot{H}_3)}{2(H_1+H_2+H_3)^4}(\delta H1+\delta H2+\delta H3) \\
& + \frac{27\sqrt{3}}{2(H_1+H_2+H_3)^3}(\delta\ddot{H}_2-\delta\ddot{H}_3) \\
=& -\frac{\sqrt{3}(\ddot{H}_2-\ddot{H}_3)}{2H^4}(\delta H1+\delta H2+\delta H3) \\
& + \frac{\sqrt{3}}{2H^3}(\delta\ddot{H}_2-\delta\ddot{H}_3)
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

我們發現，在動態系統中的線性化過程，其實就是將組合過後的場方程式 (3.48)，對不同幾何變數做一階展開。基本原理跟微擾方法其實是一致的，而且對幾何變數的變分可以完全的轉換至微擾方法的對 H_i 變分，也就是 δH_i。至於爲什麼會解出大同小異的特徵值，則是因爲起始的場方程式不同 (見章節 5.4 場方程式)，動態系統所用的場方程式是由不同指標的場方程式 (3.48) 組合而成，因此自然解出的特徵值會跟微擾方法有些許的不同，但是代表不穩定的特徵值 λ_- (5.141)，或者說 (4.14) 的 v_-，則是本來就存在 Bianchi type I 宇宙的場方程式中，因此不管場方程式怎麼組合，兩個方法都一定會解出這個特徵值，代表不均向解的不穩定。

Chapter 7

結論

在第三章，全新重力理論中 [2] 場方程式的膨脹解已經被找到 (3.56) ，其中一組解 (3.57) 會趨向於 de Sitter 時空，而另一組 (3.58) 不會。而且，gravitational action 爲 (3.3) 的膨脹解 (3.58)，有著不同於 [1] 的形式。

在第四章，我們對場方程式做微擾後，證明了微擾項一定會有一個 $v_- > 0$ (4.14)，代表在新重力理論下， Bianchi type I space **宇宙的不均向膨脹**，也就是不會趨向於 de Sitter 時空的解是**不穩定**的；雖然如果 $a = b = c$ 的話， v_- (4.14) 會等於零，但這意味著 (3.57) 將主導這個系統的演化。也就是不管如何，在大尺度時間之下，這個系統的解仍然是會趨向於穩定而且均向的解，也就是 de Sitter 時空；而早期宇宙的初始狀態，也的確有可能爲不均向。

在第五章，我們用原始的哈伯參數 H_i 來計算動態系統，找出用 H_i 變數跟 [2] 之間的關係，發現了第四章微擾方法跟第五章動態系統的結果是相同的：微擾項中的 v_- (4.14) 其實就是動態系統的特徵值 λ_- (5.141)，兩者的數值經過轉換後是完全一樣的。一個初始狀態爲不均向 Bianchi type I 度規的宇宙將會演化至穩定的 de Sitter 宇宙，我們用兩種不同的方法證實了**宇宙無毛定理** (Cosmic no-hair theory)。

第六章，我們探討了微擾方法跟動態方法的基本原理，發現兩者其實概念是一樣的，只是由於爲了方便計算，造成兩者過程些許的不同，因此解出大同小異的特徵值。而代表不均向解不穩定的特徵值 (5.141)，或者說 (4.14) 的 v_- 本來就是存在於 Bicnahi type I 宇宙的場方程式中，因此不管場方程式怎麼組合，兩者都一定會解出此解，證實 Bianchi type I 宇宙會演化至 de Sitter 時空。

在**愛因斯坦重力理論**中，根據霍金的推論，任何一個幾何被定義的時空，演化都應該會趨向於 de Sitter 時空，而 Wald 證明了一部分 [11]：證明出在滿足強能量條件跟主能量條件下，Bianchi type I - VIII 都會趨向於 de Sitter 時空。因此，根據這個推論，如果一個時空解出了不均向，也就是不會趨向於 de Sitter 時空的解，都應該是不穩定的，這樣這個時空才會演化至穩定的狀態，也就是 de Sitter 時空；因此我們希望在**全新的重力理論**中 [1] ，證明 Bianchi type I - IX 在不均向的膨脹都是不穩定的，也就是希望證明這九種型態都會趨向 de Sitter 時空，目前已經證明了 type I (此篇論文) 跟 II [4]。

Appendix A

對 $g^{\mu\nu}$ 做變分

1.

根據 [31]

$$\begin{aligned}\delta(lnDetM) \equiv& lnDet(M+\delta M) - lnDetM = ln\frac{Det(M+\delta M)}{Det(M)} = lnDetM^{-1}(M+\delta M) \\ &= lnDet(1+M^{-1}\delta M) \rightarrow ln(1+TrM^{-1}\delta M) \rightarrow TrM^{-1}\delta M\end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{DetM}\delta(DetM) = Tr(M^{-1}\delta M) \tag{A.2}$$

而且 $\because$

$$\begin{aligned}&g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \\ &\delta g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda}\delta g_{\lambda\nu} = 0 \\ &g^{\mu\lambda}\delta g_{\lambda\nu} = -g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\lambda} \\ &\delta^{\lambda}_{\rho}\delta g_{\lambda\nu} = -g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\lambda} = \delta g_{\rho\nu}\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} =& g^{\mu\nu}(-g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma}) \\ =& g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}g_{\mu\nu}(-g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma}) \\ =& \delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\sigma}(-g_{\mu\nu}\delta g^{\rho\sigma})\end{aligned} \tag{A.4}$$

$\therefore$

$$\delta g = g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = -g(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) \tag{A.5}$$

現在設 $DetM = Det(g_{\mu\nu}) = g$，再用 (A.2) 跟 (A.5)

$$\Rightarrow \delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = \frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{A.6}$$

2.

公式

$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$

$$R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\rho}\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} \tag{A.7}$$

根據 [5]

$$\begin{aligned}
&\bigtriangledown_{\lambda}\phi = \bigtriangledown_{\lambda}(T^{\rho}_{\nu\mu}A^{\nu}B^{\mu}C_{\rho}) = (T^{\rho}_{\nu\mu}A^{\nu}B^{\mu}C_{\rho})_{,\lambda}\\
\Rightarrow & T^{\rho}_{\nu\mu,\lambda}A^{\nu}B^{\mu}C_{\rho} + T^{\rho}_{\nu\mu}(A^{\nu}{}_{,\lambda}B^{\mu}C_{\rho} + A^{\nu}B^{\mu}{}_{,\lambda}C_{\rho} + A^{\nu}B^{\mu}C_{\rho,\lambda})\\
= & T^{\rho}_{\nu\mu,\lambda}A^{\nu}B^{\mu}C_{\rho} + T^{\rho}_{\nu\mu}[(A^{\nu}{}_{;\lambda} - A^{\sigma}\Gamma^{\nu}_{\sigma\lambda})B^{\mu}C_{\rho} + A^{\nu}(B^{\mu}{}_{;\lambda} - B^{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda})C_{\rho}\\
&+ A^{\nu}B^{\mu}(C^{\rho}{}_{;\lambda} - C^{\sigma}\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda})]\\
\Rightarrow & \bigtriangledown_{\lambda}(\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) = T^{\rho}_{\nu\mu,\lambda} - T^{\rho}_{\sigma\mu}T^{\sigma}_{\lambda\nu}\cdots
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$\therefore$

$$\bigtriangledown_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) = \partial_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) + \delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
\bigtriangledown_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) - \bigtriangledown_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}) = & \partial_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\\
& - \partial_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}) - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\\
= & \delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

推導

$$\begin{aligned}
\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = & \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}[\bigtriangledown_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) - \bigtriangledown_{\nu}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu})]\\
= & \int d^4x\sqrt{-g}\bigtriangledown_{\sigma}[g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}) - g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu})]\\
= & \int_{\infty}^{\infty} d\bar{V}\sqrt{-g}\bigtriangledown_{\sigma}[g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}) - g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu})]\\
= & 0
\end{aligned} \tag{A.11}$$

這邊

$\because \bigtriangledown_{\lambda}g^{\mu\nu} = 0$, $\therefore \bigtriangledown_{\lambda}(g^{\mu\nu}f^{\alpha}) = 0 + g^{\mu\nu}\bigtriangledown_{\lambda}(f^{\alpha})$
3.

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} = & \delta R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} = [\bigtriangledown_{\sigma}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}) - \bigtriangledown_{\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\sigma\mu})]\\
= & -\frac{1}{2}[g_{\lambda\nu}\bigtriangledown_{\sigma}\bigtriangledown_{\mu}(\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\mu}\bigtriangledown_{\sigma}\bigtriangledown_{\mu}(\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\bigtriangledown_{\sigma}\bigtriangledown^{\sigma}(\delta g^{\alpha\beta})]\\
& - [-\frac{1}{2}[g_{\lambda\sigma}\bigtriangledown_{\nu}\bigtriangledown_{\mu}(\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\mu}\bigtriangledown_{\nu}\bigtriangledown_{\sigma}(\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\sigma\alpha}g_{\mu\beta}\bigtriangledown_{\nu}\bigtriangledown^{\sigma}(\delta g^{\alpha\beta})]
\end{aligned} \tag{A.12}$$

這邊 $-g_{\sigma\alpha}g_{\mu\beta}\bigtriangledown_\nu\bigtriangledown^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})=-g_{\mu\beta}\bigtriangledown_\nu\bigtriangledown_\alpha(\delta g^{\alpha\beta})$，(A.12) 變成

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}[g_{\lambda\nu}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown_\mu(\delta g^{\lambda\sigma})+g_{\lambda\mu}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown_\mu(\delta g^{\lambda\sigma})-g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})]+\frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}\bigtriangledown_\nu\bigtriangledown_\mu(\delta g^{\lambda\sigma})$$

改一下指標 (Change index)

$$=-\frac{1}{2}[2g_{\lambda\mu}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown_\nu(\delta g^{\lambda\sigma})-g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})]+\frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}\bigtriangledown_\nu\bigtriangledown_\mu(\delta g^{\lambda\sigma}) \tag{A.13}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=&-g^{\mu\nu}g_{\lambda\mu}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown_\nu(\delta g^{\lambda\sigma})+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})\\ &+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}\bigtriangledown_\nu\bigtriangledown_\mu(\delta g^{\lambda\sigma}) \end{aligned} \tag{A.14}$$

這邊 $g^{\mu\nu}g_{\lambda\mu}=\delta^\nu_\lambda$，$g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}=\delta^\mu_\alpha$，$g^{\mu\nu}\bigtriangledown_\nu=\bigtriangledown^\mu$，因此 (A.14) 變成

$$-\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown_\lambda(\delta g^{\lambda\sigma})+\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})+\frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}\bigtriangledown_\mu\bigtriangledown^\mu(\delta g^{\lambda\sigma}) \tag{A.15}$$

改一下指標 (Change index)

$$=-\bigtriangledown_\mu\bigtriangledown_\nu(\delta g^{\mu\nu})+\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown^\sigma(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) \tag{A.16}$$

4.

$$\begin{aligned} &\beta\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}(\delta R^{\mu\nu})\\ =&\beta\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}R_{\sigma\rho})\\ =&\beta\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}[\delta(g^{\mu\sigma})g^{\nu\rho}R_{\sigma\rho}+g^{\mu\sigma}(\delta g^{\nu\rho})R_{\sigma\rho}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\delta(R_{\sigma\rho})]\\ =&\beta\int d^4x\sqrt{-g}[g^{\nu\rho}R_{\sigma\rho}R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\sigma})+g^{\mu\sigma}R_{\sigma\rho}R_{\mu\nu}(\delta g^{\nu\rho})+R^{\sigma\rho}\delta(R_{\sigma\rho})]\\ =&\beta\int d^4x\sqrt{-g}(2g^{\mu\sigma}R_{\sigma\rho}R_{\mu\nu}\delta g^{\nu\rho}+R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{A.17}$$

5.

$$\begin{aligned} &2\beta\int d^4x\sqrt{-g}R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\\ =&2\beta\int d^4x\sqrt{-g}R^{\mu\nu}[-g_{\lambda\mu}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown_\nu(\delta g_{\lambda\sigma})+\frac{1}{2}g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})+\frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}\bigtriangledown_\nu\bigtriangledown^\mu(\delta g^{\lambda\sigma})]\\ =&2\beta\int d^4x\sqrt{-g}[-R^\nu_\lambda\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown_\nu(\delta g^{\lambda\sigma})+\frac{1}{2}R_{\alpha\beta}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})+\frac{1}{2}R_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}\bigtriangledown_\nu\bigtriangledown^\mu(\delta g^{\lambda\sigma})] \end{aligned} \tag{A.18}$$

這邊

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{2}R_{\alpha\beta}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})\\
=&\int d^4x\sqrt{-g}[\bigtriangledown_\sigma(R_{\alpha\beta}\bigtriangledown^\sigma\delta g^{\alpha\beta})-\bigtriangledown^\sigma\delta g^{\alpha\beta}\bigtriangledown_\sigma R_{\alpha\beta}]\\
=&-\int d^4x\sqrt{-g}(\bigtriangledown^\sigma\bigtriangledown_\sigma(R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta})-\bigtriangledown^\sigma\bigtriangledown_\sigma R_{\alpha\beta})(\delta g^{\alpha\beta})\\
=&\int_\infty^\infty d\bar{V}\bigtriangledown^\sigma[\bigtriangledown_\sigma(R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta})]\\
=&0
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

做兩次分部積分 (Intergration by parts)， (A.18) 變成

$$
=2\beta\int d^4x\sqrt{-g}[-\bigtriangledown_\alpha\bigtriangledown_\nu R^\alpha_\nu+\frac{1}{2}\Box R_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\bigtriangledown_\alpha\bigtriangledown_\beta R^{\alpha\beta}]
\tag{A.20}
$$

6.

根據 [26]，

$$
\begin{aligned}
0=&\bigtriangledown_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu}+\bigtriangledown_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu}+\bigtriangledown_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}\\
=&g^{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}(\bigtriangledown_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu}+\bigtriangledown_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu}+\bigtriangledown_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu})\\
=&\bigtriangledown^\mu R_{\rho\mu}-\bigtriangledown_\rho R+\bigtriangledown^\nu R_{\rho\nu}
\end{aligned}
\tag{A.21}
$$

$$
\therefore\bigtriangledown^\mu R_{\rho\mu}=\frac{1}{2}\bigtriangledown^\rho R
\tag{A.22}
$$

根據 [28]，

$$
\begin{aligned}
2R_{\mu\alpha}R^\alpha_\nu=&2R_{\mu\sigma\nu\rho}R^{\sigma\rho}-2[\bigtriangledown_\mu,\bigtriangledown_\sigma]R^\sigma_\nu\\
=&2R_{\mu\sigma\nu\rho}R^{\sigma\rho}-(2g^{\sigma\rho}\bigtriangledown_\mu\bigtriangledown_\sigma R_{\rho\nu}-2g^{\sigma\rho}\bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown_\mu R_{\rho\nu})\\
=&2R_{\mu\sigma\nu\rho}R^{\sigma\rho}-(2\bigtriangledown_\mu\bigtriangledown^\rho R_{\rho\nu}-2\bigtriangledown^\rho\bigtriangledown_\mu R_{\rho\nu})\\
=&2R_{\mu\sigma\nu\rho}R^{\sigma\rho}-(\bigtriangledown_\mu\bigtriangledown_\nu R-2\bigtriangledown^\rho\bigtriangledown_\mu R_{\rho\nu})
\end{aligned}
\tag{A.23}
$$

7.

$$
-\bigtriangledown_\alpha\bigtriangledown_\nu R^\alpha_\mu=-\bigtriangledown_\alpha\bigtriangledown_\nu R_{\sigma\mu}g^{\alpha\sigma}=-\bigtriangledown^\sigma\bigtriangledown_\nu R_{\sigma\mu}
\tag{A.24}
$$

8.

$$
\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\bigtriangledown_\alpha\bigtriangledown_\beta R^{\alpha\beta}=\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\bigtriangledown_\alpha\bigtriangledown^\alpha R=\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\Box R
\tag{A.25}
$$

9.

公式

根據 (A.5)，而且

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_{\lambda}g_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\partial_{\lambda}ln(-g) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\lambda}(\sqrt{-g}) \tag{A.26}$$

$$\Rightarrow \bigtriangledown_{\mu}V^{\mu} = \partial_{\mu}V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}V^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}V^{\mu}) \tag{A.27}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}\int d\bar{V}\sqrt{-g}A_{\beta}\bigtriangledown_{\sigma}B^{\sigma} = \int d\bar{V}\sqrt{-g}\bigtriangledown_{\sigma}(A_{\beta}B^{\sigma}) - \sqrt{-g}B^{\sigma}\bigtriangledown_{\sigma}(A_{\beta})\\ =&\partial_{\sigma}(\sqrt{-g}A_{\beta}B^{\sigma}) - \sqrt{-g}B^{\sigma}\bigtriangledown_{\sigma}(A_{\beta})\\ =&0 - \sqrt{-g}B^{\sigma}\bigtriangledown_{\sigma}(A_{\beta})\\ =&-\sqrt{-g}B^{\sigma}\bigtriangledown_{\sigma}(A_{\beta})\end{aligned} \tag{A.28}$$

推導

$$\begin{aligned}\int d^4x\sqrt{-g}f\bigtriangledown_{\sigma}\bigtriangledown^{\sigma}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) =&0 - \int d^4x\sqrt{-g}\bigtriangledown^{\sigma}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})\bigtriangledown_{\sigma}f\\ =&0 - (-\int d^4x(\bigtriangledown_{\sigma}\bigtriangledown^{\sigma}f)\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})\\ =&\int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\Box f\delta g^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{A.29}$$

這邊 $\Box = g_{\mu\nu}\bigtriangledown^{\mu}\bigtriangledown^{\nu} = g^{\mu\nu}\bigtriangledown_{\mu}\bigtriangledown_{\nu}$。 (A.29) 用了兩次分部積分 (Intergration by parts)，而且 $\because f$ 是個純量， $\therefore \bigtriangledown_{\sigma}f = \partial_{\sigma}f$。

Appendix B

微擾

$$
\begin{aligned}
L_1 =& 2H_1 + H_2 + H_3 + 4\alpha(2H_1 + H_2 + H_3)(H_i^2 + \dot{H}_i + H_iH_j) \\
&+ \beta[2H_1(H_i^2 + \dot{H}_i) + (2H_1 + H_2 + H_3)(H_1^2 + \dot{H}_1 + H_1H_2 + H_1H_3) \\
&+ H_2(H_2^2 + \dot{H}_2 + H_1H_2 + H_2H_3) + H_3(H_3^2 + \dot{H}_3 + H_1H_3 + H_2H_3)]
\end{aligned} \tag{B.1}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{11} =& 2 + 8\alpha(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3) \\
&+ 4\alpha(2H_1 + H_2 + H_3)^2 + \beta[2(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3) + 4H_1^2 \\
&+ 2(H_1^2 + \dot{H}_1 + H_1H_2 + H_1H_3) + (2H_1 + H_2 + H_3)^2 + H_2^2 + H_3^2]
\end{aligned} \tag{B.2}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{12} =& 1 + 4\alpha(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3) \\
&+ 4\alpha(2H_1 + H_2 + H_3)(2H_2 + H_1 + H_3) + \beta[(H_1^2 + \dot{H}_1 + H_1H_2 \\
&+ H_1H_3) + 4H_1H_2 + (H_2^2 + \dot{H}_2 + H_1H_2 + H_2H_3) + H_2(2H_2 + H_1 \\
&+ H_3) + H_3^2]
\end{aligned} \tag{B.3}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{13} =& 1 + 4\alpha(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3) \\
&+ 4\alpha(2H_1 + H_2 + H_3)(2H_3 + H_1 + H_2) + \beta[(H_1^2 + \dot{H}_1 + H_1H_2 \\
&+ H_1H_3) + H_1(2H_1 + H_2 + H_3) + 4H_1H_3 + (H_3^2 + \dot{H}_3 + H_1H_3 \\
&+ H_2H_3) + H_3(2H_3 + H_1 + H_2) + H_2^2]
\end{aligned} \tag{B.4}
$$

$$L_1^1 = 4\alpha(2H_1 + H_2 + H_3) + \beta[2H_1 + (2H_1 + H_2 + H_3)] \tag{B.5}$$

$$L_1^2 = 4\alpha(2H_1 + H_2 + H_3) + \beta[2H_1 + H_2] \tag{B.6}$$

$$L_1^3 = 4\alpha(2H_1 + H_2 + H_3) + \beta[2H_1 + H_3] \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned} L_2 =& 2H_2 + H_1 + H_3 + 4\alpha(2H_2 + H_1 + H_3)(H_i^2 + \dot{H}_i + H_iH_j) \\ &+ \beta[2H_2(H_i^2 + \dot{H}_i) + (2H_2 + H_1 + H_3)(H_2^2 + \dot{H}_2 + H_1H_2 + H_2H_3) \\ &+ H_1(H_1^2 + \dot{H}_1 + H_1H_2 + H_1H_3) + H_3(H_3^2 + \dot{H}_3 + H_1H_3 + H_2H_3)] \end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned} L_{21} =& 1 + 4\alpha(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3) \\ &+ 4\alpha(2H_2 + H_1 + H_3)(2H_1 + H_1 + H_2) + \beta[(H_1^2 + \dot{H}_1 + H_1H_2 \\ &+ H_1H_3) + 4H_1H_2 + (H_2^2 + \dot{H}_2 + H_1H_2 + H_2H_3) + H_1(2H_1 + H_2 \\ &+ H_3) + H_2(2H_2 + H_1 + H_3) + H_3^2] \end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned} L_{22} =& 2 + 8\alpha(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3) \\ &+ 4\alpha(2H_2 + H_1 + H_3)^2 + \beta[2(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3) + H_1^2 \\ &+ 2(H_2^2 + \dot{H}_2 + H_1H_2 + H_2H_3) + (2H_2 + H_1 + H_3)^2 + 4H_2^2 + H_3^2] \end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned} L_{23} =& 1 + 4\alpha(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3) \\ &+ 4\alpha(2H_2 + H_1 + H_3)(2H_3 + H_1 + H_2) + \beta[(H_2^2 + \dot{H}_2 + H_1H_2 \\ &+ H_2H_3) + H_2(2H_2 + H_1 + H_3) + 4H_2H_3 + (H_3^2 + \dot{H}_3 + H_1H_3 \\ &+ H_2H_3) + H_3(2H_3 + H_1 + H_2) + H_1^2] \end{aligned} \tag{B.11}$$

$$L_2^1 = 4\alpha(2H_2 + H_1 + H_3) + \beta[2H_2 + H_1] \tag{B.12}$$
$$L_2^2 = 4\alpha(2H_2 + H_1 + H_3) + \beta[2H_2 + (2H_2 + H_1 + H_3)] \tag{B.13}$$
$$L_2^3 = 4\alpha(2H_2 + H_1 + H_3) + \beta[2H_2 + H_3] \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned} L_3 =& 2H_3 + H_1 + H_2 + 4\alpha(2H_3 + H_1 + H_2)(H_i^2 + \dot{H}_i + H_iH_j) + \beta[2H_3(H_i^2 \\ &+ \dot{H}_i) + H_1(H_1^2 + \dot{H}_1 + H_1H_2 + H_1H_3) + H_2(H_2^2 + \dot{H}_2 + H_1H_2 \\ &+ H_2H_3) + (2H_3 + H_1 + H_2)(H_3^2 + \dot{H}_3 + H_1H_3 + H_2H_3)] \end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned} L_{31} =& 1 + 4\alpha(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3) \\ &+ 4\alpha(2H_3 + H_1 + H_2)(2H_1 + H_2 + H_3) + \beta[(H_1^2 + \dot{H}_1 + H_1H_2 \\ &+ H_1H_3) + H_1(2H_1 + H_2 + H_3) + 4H_1H_3 + (H_3^2 + \dot{H}_3 + H_1H_3 \\ &+ H_2H_3) + H_3(2H_3 + H_1 + H_2) + H_2^2] \end{aligned} \tag{B.16}$$

$$
\begin{aligned}
L_{32} =&1 + 4\alpha(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3) \\
&+ 4\alpha(2H_3 + H_1 + H_2)(2H_2 + H_1 + H_3) + \beta[(H_2^2 + \dot{H}_2 + H_1H_2 \\
&+ H_2H_3) + H_2(2H_2 + H_1 + H_3) + 4H_2H_3 + (H_3^2 + \dot{H}_3 + H_1H_3 \\
&+ H_2H_3) + H_3(2H_3 + H_1 + H_2) + H_1^2]
\end{aligned} \tag{B.17}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{33} =&2 + 8\alpha(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3) \\
&+ 4\alpha(2H_3 + H_1 + H_2)^2 + \beta[2(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3) + H_1^2 \\
&+ 2(H_3^2 + \dot{H}_3 + H_1H_3 + H_2H_3) + (2H_3 + H_1 + H_2)^2 + 4H_3^2 + H_2^2]
\end{aligned} \tag{B.18}
$$

$$L_3^1 = 4\alpha(2H_3 + H_1 + H_2) + \beta[2H_3 + H_1] \tag{B.19}$$
$$L_3^2 = 4\alpha(2H_3 + H_1 + H_2) + \beta[2H_3 + H_2] \tag{B.20}$$
$$L_3^3 = 4\alpha(2H_3 + H_1 + H_2) + \beta[2H_3 + (2H_3 + H_1 + H_2)] \tag{B.21}$$

$$
\begin{aligned}
L^1 =&1 + 4\alpha(H_i^2 + \dot{H}_i + H_iH_j) \\
&+ \beta(H_i^2 + \dot{H}_i + H_1H_2 + H_1^2 + \dot{H}_1 + H_1H_3)
\end{aligned} \tag{B.22}
$$
$$L_1^1 =4\alpha(H_1^2 + H_2 + H_3) + \beta(4H_1 + H_2 + H_3) \tag{B.23}$$
$$L_2^1 =4\alpha(H_2^2 + H_1 + H_3) + \beta(2H_2 + H_1) \tag{B.24}$$
$$L_3^1 =4\alpha(H_3^2 + H_1 + H_2) + \beta(2H_3 + H_1) \tag{B.25}$$
$$L^{11} =4\alpha + 2\beta \tag{B.26}$$
$$L^{12} =L^{13} = 4\alpha + \beta \tag{B.27}$$

$$
\begin{aligned}
L^2 =&1 + 4\alpha(H_i^2 + \dot{H}_i + H_iH_j) + \beta(H_i^2 \\
&+ \dot{H}_i + H_1H_2 + H_2^2 + \dot{H}_2 + H_2H_3)
\end{aligned} \tag{B.28}
$$
$$L_1^2 =1 + 4\alpha(2H_1 + H_2 + H_3) + \beta(2H_1 + H_2) \tag{B.29}$$
$$L_2^2 =1 + 4\alpha(2H_2 + H_1 + H_3) + \beta(4H_2 + H_1 + H_3) \tag{B.30}$$
$$L_3^2 =1 + 4\alpha(2H_3 + H_1 + H_2) + \beta(2H_3 + H_2) \tag{B.31}$$
$$L^{21} =L^{23} = 4\alpha + \beta \tag{B.32}$$
$$L^{22} =4\alpha + 2\beta \tag{B.33}$$

$$
\begin{aligned}
L^3 =&1 + 4\alpha(H_i^2 + \dot{H}_i + H_iH_j) \\
&+ \beta(H_i^2 + \dot{H}_i + H_1H_3 + H_3^2 + \dot{H}_3 + H_2H_3)
\end{aligned}
\tag{B.34}
$$

$$L_1^3 =1 + 4\alpha(2H_1 + H_2 + H_3) + \beta(2H_1 + H_3) \tag{B.35}$$

$$L_2^3 =1 + 4\alpha(2H_2 + H_1 + H_3) + \beta(2H_2 + H_3) \tag{B.36}$$

$$L_3^3 =1 + 4\alpha(2H_3 + H_1 + H_2) + \beta(4H_3 + H_1 + H_2) \tag{B.37}$$

$$L^{31} =L^{32} = 4\alpha + \beta \tag{B.38}$$

$$L^{33} =4\alpha + 2\beta \tag{B.39}$$

將 (B.1)∽(B.39) 用 BH solutions 來表示:

$$
\begin{aligned}
L_1 =&2a + b + c + 4\alpha(2a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac) \\
&+ \beta[2a(a^2 + b^2 + c^2) + (2a + b + c)(a^2 + ab + ac) \\
&+ b(b^2 + ab + bc) + c(c^2 + ac + bc)]
\end{aligned}
\tag{B.40}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{11} =&2 + 8\alpha(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac) \\
&+ 4\alpha(2a + b + c)^2 + \beta[2(a^2 + b^2 + c^2) + 4a^2 \\
&+ 2(a^2 + ab + ac) + (2a + b + c)^2 + b^2 + c^2]
\end{aligned}
\tag{B.41}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{12} =&1 + 4\alpha(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac) \\
&+ 4\alpha(2a + b + c)(2b + a + c) + \beta[(a^2 + ab \\
&+ ac) + 4ab + (b^2 + ab + bc) + b(2b + a + c) + c^2]
\end{aligned}
\tag{B.42}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{13} =&1 + 4\alpha(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac) \\
&+ 4\alpha(2a + b + c)(2c + a + b) + \beta[(a^2 + ab \\
&+ ac) + a(2a + b + c) + 4ac + (c^2 + ac \\
&+ bc) + c(2c + a + b) + b^2]
\end{aligned}
\tag{B.43}
$$

$$L_1^1 =4\alpha(2a + b + c) + \beta[2a + (2a + b + c)] \tag{B.44}$$

$$L_1^2 =4\alpha(2a + b + c) + \beta[2a + b] \tag{B.45}$$

$$L_1^3 =4\alpha(2a + b + c) + \beta[2a + c] \tag{B.46}$$

$$
\begin{aligned}
L_2 =& 2b + a + c + 4\alpha(2b + a + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac) \\
& + \beta[2b(a^2 + b^2 + c^2) + a(a^2 + ab + ac) + (2b + a + c)(b^2 + ab + bc) \\
& c(c^2 + ac + bc))]
\end{aligned}
\tag{B.47}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{21} =& 1 + 4\alpha(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac) \\
& + 4\alpha(2b + a + c)(2a + b + c) + \beta[(a^2 + ab \\
& + ac) + 4ab + (b^2 + ab + bc) + a(2a + b \\
& + c) + b(2b + a + c) + c^2]
\end{aligned}
\tag{B.48}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{22} =& 2 + 8\alpha(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac) \\
& + 4\alpha(2b + a + c)^2 + \beta[2(a^2 + b^2 + c^2) + a^2 \\
& + 2(b^2 + ab + bc) + (2b + a + c)^2 + 4b^2 + c^2]
\end{aligned}
\tag{B.49}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{23} =& 1 + 4\alpha(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac) \\
& + 4\alpha(2b + a + c)(2c + a + b) + \beta[(b^2 + ab \\
& + bc) + b(2b + a + c) + 4bc + (c^2 + ac \\
& + bc) + c(2c + a + b) + a^2]
\end{aligned}
\tag{B.50}
$$

$$
L_2^1 = 4\alpha(2b + a + c) + \beta[2b + a] \tag{B.51}
$$

$$
L_2^2 = 4\alpha(2b + a + c) + \beta[2b + (2b + a + c)] \tag{B.52}
$$

$$
L_2^3 = 4\alpha(2b + a + c) + \beta[2b + c] \tag{B.53}
$$

$$
\begin{aligned}
L_3 =& 2c + a + b + 4\alpha(2c + a + b)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac) \\
& + \beta[2c(a^2 + b^2 + c^2) + a(a^2 + ab + ac) + b(b^2 + ab + bc) \\
& + (2c + a + b)(c^2 + ac + bc)]
\end{aligned}
\tag{B.54}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{31} =& 1 + 4\alpha(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc) + 4\alpha(2c + a + b)(2a + b + c) \\
& + \beta[(a^2 + ab + ac) + a(2a + b + c) + 4ac + (c^2 + ac + bc) \\
& + c(2c + a + b) + b^2]
\end{aligned}
\tag{B.55}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{32} =& 1 + 4\alpha(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc) + 4\alpha(2c+a+b)(2b+a+c) \\
&+ \beta[(b^2+ab+bc) + b(2b+a+c) + 4bc + (c^2+ac+bc) \\
&+ c(2c+a+b) + a^2]
\end{aligned} \tag{B.56}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{33} =& 2 + 8\alpha(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc) + 4\alpha(2c+a+b)^2 \\
&+ \beta[2(a^2+b^2+c^2) + a^2 + 2(c^2+ac+bc) \\
&+ (2c+a+b)^2 + 4c^2 + b^2]
\end{aligned} \tag{B.57}
$$

$$L_3^1 = 4\alpha(2c+a+b) + \beta[2c+a] \tag{B.58}$$
$$L_3^2 = 4\alpha(2c+a+b) + \beta[2c+b] \tag{B.59}$$
$$L_3^3 = 4\alpha(2c+a+b) + \beta[2c+(2c+a+b)] \tag{B.60}$$

$$L^1 = 1 + 4\alpha(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac) + \beta(2a^2+b^2+c^2+ab+ac) \tag{B.61}$$

$$L_1^1 = 4\alpha(a^2+b+c) + \beta(4a+b+c) \tag{B.62}$$
$$L_2^1 = 4\alpha(b^2+a+c) + \beta(2b+a) \tag{B.63}$$
$$L_3^1 = 4\alpha(c^2+a+b) + \beta(2c+a) \tag{B.64}$$
$$L^{11} = 4\alpha + 2\beta \tag{B.65}$$
$$L^{12} = L^{13} = 4\alpha + \beta \tag{B.66}$$

$$L^2 = 1 + 4\alpha(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac) + \beta(a^2+b^2+c^2+ab+b^2+bc) \tag{B.67}$$
$$L_1^2 = 1 + 4\alpha(2a+b+c) + \beta(2a+b) \tag{B.68}$$
$$L_2^2 = 1 + 4\alpha(2b+a+c) + \beta(4b+a+c) \tag{B.69}$$
$$L_3^2 = 1 + 4\alpha(2c+a+b) + \beta(2c+b) \tag{B.70}$$
$$L^{21} = L^{23} = 4\alpha + \beta \tag{B.71}$$
$$L^{22} = 4\alpha + 2\beta \tag{B.72}$$

$$L^3 = 1 + 4\alpha(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac) + \beta(a^2+b^2+c^2+ac+c^2+bc) \tag{B.73}$$

Appendix C

誘發重力 (Induced gravity)

C.1 爆漲 (Inflation)

雖然在研究早期宇宙時，大霹靂理論 (Big-Bang cosmology) 在很多方面都非常的成功，但仍然是有很多問題。而爆漲理論可以回答這些問題，包括宇宙的起源 (Origin of the universe)、平坦 (flatness) 跟視界 (horizon) 問題，解釋了爲什麼宇宙看起來是均勻、均向而且在大尺度 ($> 10^8$) 是平坦的，不過這個理論仍然是得靠實際的觀測來證實。

爆漲理論指出，在早期宇宙的一個極短時間內，一定有個加速的膨脹，而且這個加速膨脹可以是因爲高階修正的純重力理論 (Higher derivative pure gravity) 或是被一個的純量場 (Scalar field with a constant potential) 所誘發 [20]-[22] and [24][25]。

C.2 純量場的誘發重力

跟章節 3.5 同樣的理由，在我們的宇宙中，什麼樣的物質會給出愛因斯坦方程式的解是個有趣的問題。事實上，我們可以想像各種不同的 energy sources $T^{\mu\nu}$ ，例如純量場 (Scalar field) 或電磁場 (Electromagnetic fields)，這邊就討論在爆漲的機制下，純量場誘發早期宇宙一個極短時間加速膨漲的例子[32][33][34][35]。

C.2.1 對尺度因子 (Scale factors) 做變分

我們考慮以下的例子 [21][22][23]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\epsilon\phi^2\sqrt{-g}L = \frac{1}{2}\epsilon\phi^2\frac{a_1(t)a_2(t)a_3(t)}{\sqrt{B}}L = \frac{1}{2}\epsilon\phi^2 VL \tag{C.1}$$

對尺度因子 *(scale factor)* B 做變分

過程跟章節 3.3.2 類似，不過 Lagrange 改變了

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}}) =& 0 \\
=& \frac{1}{2}\epsilon\phi^2[-\frac{1}{2}VL + V\frac{\partial L}{\partial B}] - \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\epsilon\phi^2 V\frac{\partial L}{\partial \dot{B}}] \\
=& \frac{1}{2}\epsilon\phi^2[-\frac{1}{2}VL + V\frac{\delta L}{\delta B}] \\
& - [\epsilon\phi\dot{\phi}V\frac{\partial L}{\partial \dot{B}} + \frac{1}{2}\epsilon\phi^2\dot{V}\frac{\partial L}{\partial \dot{B}} + \frac{1}{2}\epsilon\phi^2 V\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{B}}] \\
=& \frac{1}{2}\epsilon\phi^2[-\frac{1}{2}VL + V\frac{\partial L}{\partial B}] \\
& - [\epsilon\phi\dot{\phi}V\frac{\partial L}{\partial \dot{B}} + \frac{1}{2}\epsilon\phi^2(H_1 + (H_2 + (H_3)\frac{\partial L}{\partial \dot{B}} + \frac{1}{2}\epsilon\phi^2 V\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{B}}]
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

經過一些代數轉換

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial B} &= H_i\frac{\partial L}{2\partial H_i} + \dot{H}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{H}_i}, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{B}} &= \frac{H_i\partial L}{2\partial \dot{H}_i}
\end{aligned}
\tag{C.3}
$$

(C.2) 變成

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\epsilon\phi^2 V[-L + H_i\frac{\partial L}{\partial H_i} + 2\dot{H}_i\frac{\partial L}{2\partial \dot{H}_i} - 3H\frac{H_i\partial L}{\partial \dot{H}_i} - \frac{d}{dt}\frac{H_i\partial L}{\partial \dot{H}_i}] \\
&= 2\epsilon\phi\dot{\phi}V\frac{\partial L}{\partial B}
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

這邊 $3H = H_1 + H_2 + H_3$.

場方程式 $D_0\mathcal{L}$ 變成:

$$
D_0\mathcal{L} = L + H_i(\frac{d}{dt} + 3H)L^i - H_iL_i - \dot{H}_iL^i = 0 \tag{C.5}
$$

Where $L_i = \delta L/\delta H_i, L^i = \delta L/\delta \dot{H}_i, 3H = \sum_{i=1}^n H_i$.

對 scale factor a_i 做變分

原本是對 a_i 做變分，現在改成對 H_i 做變分。 這邊我們用對 a_2 變分爲例子。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_2} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a_2}}) + \frac{d^2}{dt^2}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{a_2}}) = 0 \\
&= \frac{1}{2}\epsilon\phi^2 V[\frac{L}{a_2} + \frac{\partial L}{\partial a_2} - (\partial_0 + 3H)\frac{\partial L}{\partial \dot{a_2}} \\
&\quad + (\partial_0^2 + 2\cdot 3H\partial_0 + \dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + 2H_2H_3)\frac{\partial L}{\partial \ddot{a_2}}]
\end{aligned} \tag{C.6}
$$

經過一些代數轉換

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a_2} &= \frac{\partial L}{\partial H_2}\frac{\partial H_2}{\partial a_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_2}\frac{\partial \dot{H}_2}{\partial a_2} = -\frac{H_2}{a_2}L_2 - \frac{1}{a_2}[\dot{H}_2 - H_2^2]L^2 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{a_2}} &= \frac{\partial L}{\partial H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \dot{a_2}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_2}\frac{\partial \dot{H}_2}{\partial a_2} = \frac{L_2}{a_2} - \frac{2}{a_2}H_2L^2 \\
\frac{\partial L}{\partial \ddot{a_2}} &= \frac{L^2}{a_2}
\end{aligned} \tag{C.7}
$$

(C.6) 變成

$$
\begin{aligned}
&\frac{L}{a_2} + [-\frac{H_2}{a_2}L_2 - \frac{1}{a_2}[\dot{H}_2 - H_2^2]L^2] \\
&+ [-\frac{1}{a_2}(\partial_0 + 3H)L_2 + (\partial_0 + 3H)\frac{2}{a_2}H_2L^2 - L_2\partial_0\frac{1}{a_2}] \\
&+ [\frac{1}{a_2}(\partial_0^2 + 2\cdot 3H\partial_0 + \dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + 2H_2H_3)L^2 \\
&+ L^2\partial_0^2(\frac{1}{a_2}) + 2\partial_0(\frac{1}{a_2})\partial_0(L^2) + 2\cdot 3H\cdot L^2\cdot \partial_0(\frac{1}{a_2})] = 0
\end{aligned} \tag{C.8}
$$

而在 (C.6) 跟 (C.8) 中，我們發現

$$
\begin{aligned}
&(\partial_0 + 3H)\frac{2}{a_2}H_2L^2 \\
&= -2\frac{H_2^2L^2}{a_2} + 2\frac{\dot{H}_2L^2}{a_2} + \frac{2}{H_2(\partial_0 L^2)}a_2 + 2\frac{3H\cdot H_2L^2}{a_2}
\end{aligned} \tag{C.9}
$$

而且我們可以用

$$
\begin{aligned}
(\partial_0 + H_i)^2 L =& (\partial_0 + H_i)(\partial_0 + H_j)L \\
&= \partial_0^2 L + \partial_0(H_jL) + H_i\partial_0 L + H_iH_jL \\
&= (\partial_0^2 + \dot{H}_j + 2H_i\partial_0 + H_iH_j)L
\end{aligned} \tag{C.10}
$$

則 (C.8) 的其他部分會等於零，除了 $[\frac{1}{a_2}(\partial_0^2+2\cdot 3H\partial_0+\dot{H}_2+H_2^2+\dot{H}_3+H_3^2+2H_2H_3)L^2]$, so (C.8) becomes

$$\Rightarrow \frac{1}{a_2}[L-(\partial_0+3H)L_2+[(\partial_0+3H)^2+3H\cdot\partial_0]L^2]==0 \tag{C.11}$$

現在場方程式 $D_1\mathcal{L}$ 爲

$$\Rightarrow L-(\partial_0+3H)L_2+[(\partial_0+3H)^2]L^2=0 \tag{C.12}$$

我們可以將三條分別對 $H_i, i=1,2,3$ 變分的場方程式相加，結合成一條：

$$3L+(\frac{d}{dt}+3H)^2\sum_{i=1}^{n}L^i-(\frac{d}{dt}+3H)\sum_{i=1}^{n}L_i=0 \tag{C.13}$$

這邊 $L_i=\delta L/\delta H_i, L^i=\delta L/\delta\dot{H}_i, 3H=\sum_{i=1}^{n}H_i$。

C.2.2 對 $g^{\mu\nu}$ 做變分

過程跟章節 3.3.2 類似，但是 Lagrange 改變

$$L=-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2R+\alpha R^2+\beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+V(\phi) \tag{C.14}$$

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}L=\int d^4x\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2R+\alpha R^2+\beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+V(\phi)) \tag{C.15}$$

設

$$\begin{aligned}\delta S_1 =&\delta\int d^4x\sqrt{-g}(R),\\ \delta S_2 =&\delta\alpha\int d^4x\sqrt{-g}(R^2),\\ \delta S_3 =&\delta\beta\int d^4x\sqrt{-g}(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})\\ \delta S_4 =&\delta(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)\\ \delta S_5 =&\delta V(\phi)\end{aligned} \tag{C.16}$$

這邊 δS_2 跟 δS_3 對 $g^{\mu\nu}$ 做的變分跟章節 3.3.2 一樣，但其他項有改變

$$\begin{aligned}
\delta S_1 =& \int d^4x[\delta\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2 R) + \sqrt{-g}(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2\delta R)] \\
=& \int d^4x[(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2 R) + \sqrt{-g}(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2)(\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu})] \\
=& \int d^4x(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2)[(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma\nabla^\sigma(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\mu\nabla_\nu(\delta g^{\mu\nu})] \\
=& \int d^4x\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2 G_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} \\
&+ [0 - (0^{\;9} - \int d^4x\sqrt{-g}\,\nabla_\sigma\nabla^\sigma(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}] \\
&- [0 - (0 - \int d^4x\sqrt{-g}\,\nabla_\mu\nabla_\nu(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2)\delta g^{\mu\nu}] \\
=& \int d^4x\sqrt{-g}[(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2)G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2) - \nabla_\mu\nabla_\nu(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2)]\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{C.17}$$

*註腳的細節被放在附錄 A (Appendix A)。

另外一方面，我們還得考慮對 ϕ 做的變分。

$$\delta S_1 = \sqrt{-g}\epsilon\phi R\delta\phi \tag{C.18}$$

$$\begin{aligned}
\delta S_4 =& \delta(\frac{\sqrt{-g}}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) \\
=& -\sqrt{-g}\partial^\mu\phi\partial_\mu(\delta\phi) \\
=& -\sqrt{-g}D_\mu\partial^\mu\phi\delta\phi
\end{aligned} \tag{C.19}$$

這邊 $\partial_\mu(\sqrt{-g}A^\mu) = D_\mu A^\mu$,

$$\delta S_5 = \sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi \tag{C.20}$$

因此，EOM 會變成

對度規做變分:

$$\begin{aligned}
\delta S =& \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 + \delta S_4 + \delta S_5 \\
=& 2\alpha R(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}) + (2\alpha+\beta)(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)R \\
&+ \beta\Box(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) + 2\beta(R_{\mu\sigma\nu\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R_{\sigma\rho})R^{\sigma\rho} \\
&+ (-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2)G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2) - \nabla_\mu\nabla_\nu(-\frac{1}{2}\epsilon\phi^2) - 2g_{\mu\nu}\Lambda
\end{aligned} \tag{C.21}$$

對 ϕ 做變分：

$$\epsilon\phi R - D_\mu\partial^\mu\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \tag{C.22}$$

很明顯的，如果我們設 ϕ 爲一常數，場方程式會變回 (3.48)。

參考文獻

[1] J. D. Barrow, S. Hervik, *Anisotropically inflating universes*, Phys. Rev. D 73, 023007 (2006).

[2] J. D. Barrow, S. Hervik, *Evolution of universes in quadratic theories of gravity*, Phys. Rev. D 74, 124017 (2006).

[3] W. F. Kao, *Anisotropic higher derivative gravity and inflationary universe*, Phys. Rev. D74, 043522 (2006).

[4] W. F. Kao, Ing-Chen Lin, *Stability conditions for the Bianchi type II anisotropically inflating universes*, Phys. Rev. D 73, 023007 (2009).

[5] Bernard F. Schutz, *"A First Course in General Relativity"*, Cambridge (1985).

[6] Hans -J¨urgen Schmidt, *Lectures on Mathematical Cosmology* (2004).

[7] Barrow, J. G¨otz, *Newtonian no - hair theorems*, Class. Quant. Grav. 6, 1253. 122, 123 (1989)

[8] Weyl, H.: , Handbuch der Philosophie, chapter "Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft", Oldenburg. 122 (1927)

[9] Hoyle, F., Narlikar, J.: , *Mach's Principle and the Creation of Matter*, Proc. R. Soc. Lond. A 273, 1. 123 (1963)

[10] Gibbons, G. and Hawking, S.: *Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation*, Phys. Rev. D 15, 2738—2751 (1977)

[11] Robert M. Wald, *Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant*, Phys. Rev. D 28, 2118—2120 (1983)

[12] Luigi Bianchi, *On the three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions*, Soc. Ital. Sci. Mem. di Mat. 11, 267 (1898).

[13] Luigi Bianchi, *The Bianchi classification of 3-dimensional Lie algebras* (1918).

[14] Member Luigi Bianchi, *Essay of "on the three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions"* (1898).

[15] J. D. Barrow and A. C. Ottewill, *The stability of general relativistic cosmological theory*, J. Phys. A: Math. Gen. 16 2757 (1983).

[16] J. D. Barrow, S Hervik, *Simple types of anisotropic inflation*, Phys. Rev. D 81, 023513 (2010).

[17] S. Deser and B. Tekin, *Energy in generic higher curvature gravity theories*, Phys. Rev. D 67, 084009 (2003).

[18] W.F. Kao, *Anisotropic perturbation of de Sitter Space*, Eur. Phys. J. C 53 (2008) 87 [SPIRES].

[19] W. F. Kao and U. L. Pen, *Generalized FRW metric and redundancy in the generalized Einstein equations*, Phys. Rev. D 44, 3974 (1991).

[20] W. F.Kao, Ue-Li Pen, Pengjie Zhang, *Friedmann equation and stability of inflationary higher derivative gravity*, Phys. Rev. D 63 (2001).

[21] 高孟聰, *The Study of Bianchi Type - IV and VIII cosmology model*, 交通大學物理所碩士論文 (2007).

[22] 柯勝藍, *A Study on the Bianchi IX model universe*, 交通大學物理所碩士論文 (2007).

[23] 林勤倫, *The study of Bianchi type VI cosmology mode*, 交通大學物理所碩士論文 (2007).

[24] 林君睿, *The study of Bianchi Type II model*, 交通大學物理所碩士論文 (2007).

[25] A. Dobado, A. L. Maroto, *Inflationless inflatoin*, Phys. Rev. D 52, 1895 (1995).

[26] Sean Carroll, *"Spacetime and Geometry: An introduction to general relativity"*, Addison Wesley (2004).

[27] W. F. Kao, I. C. Lin, *Anisotropically inflating universes in a scalar-tensor theory*, Phys. Rev. D 79, 043001 (2009).

[28] 林英程, *Stability analysis of the Bianchi spaces*, 交通大學物理所碩士論文 (2008).

[29] J. Wainwright and G.F.R. Ellis, *"Dynamical systems in cosmology"*, Cambridge. (1997)

[30] A. V. Toporensky and P. V. Tretyakov, *De Sitter Stability in quadratic gravity*, International Journal of Modern Physics D, Vol. 16, No. 6 (2007) 1075—1085

[31] Steven Weinberg, *"Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity"*, John Wiley and Sons, Inc. (1972).

[32] Singh and Anil K. Agrawal, *Bianchi type-II, VIII, and IX in certain new theories of gravitation*, Astrophysics and space. Science, V191, N1 (1991).

[33] W. F. Kao, *Kaluza-Klein induced gravity inflation*, Phys. Rev. D 62 (2000).

[34] A. Zee, *Broken-symmetric theory of gravity*, phys. Rev. Lett. 42, 417-421 (1979).

[35] F. S. Accetta, D. J. Zoller and M.S. Turner, *Induced-gravity inflation*, Phys. Rev. D 31, 3046 (1985)