

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

子空間方法用於階數未知的盲道判別

Subspace Method for Blind Channel Identification with Unknown  
Channel Order



研究生: 林炘嶽  
指導教授: 林清安 教授

中華民國九十三年七月

子空間方法用於階數未知的盲道判別

Subspace Method for Blind Channel Identification with Unknown  
Channel Order

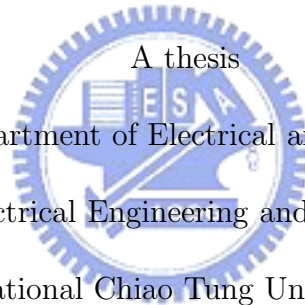
研 究 生: 林炘鋐      Student: Chiung-Chin Lin

指導教授: 林清安      Advisor: Ching-An Lin

國 立 交 通 大 學

電機與控制工程學系

碩 士 論 文



A thesis

Submitted to Department of Electrical and Control Engineering

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Electric and Control Engineering

June 2004

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十三年七月

# 子空間方法用於階數未知的盲道判別

研究生: 林昶欒      指導教授: 林清安

國立交通大學電機與控制工程學系

## 摘 要

本篇論文提出了兩套判斷步驟, 對於一個階數  $M$  但未知的盲道判別問題來說, 只要假設一個大於實際階數  $M$  的階數  $M'$ , 稱為過估測階數, 以  $M'$  來取代未知的  $M$ , 便可利用子空間方法的基本架構, 配合判斷步驟, 將過估測階數還原成實際階數, 得到一組通道參數估測, 與實際的通道參數相差一純量倍數。



# Subspace Method for Blind Channel Identification with Unknown Channel Order

Student: Chiung-Chin Lin      Advisor: Ching-An Lin

Department of Electrical and control Engineering National  
Chiao-Tung University

## Abstract

Subspace method for blind channel identification of communication channels usually require that the channel order is known. This requirement is not realistic in practice. We propose algorithms for the determination of channel order, when only an upper bound of the channel order is known, so that the subspace method can be used for channel identification.



## 誌謝

首先要感謝我的指導教授林清安教授, 有他的細心教導與指引研究的方向, 才使本論文得以順利完成。還要感謝口試委員鄧清政教授與林昇甫教授, 給予了許多寶貴的建議及指導, 讓本論文更加完整。在此, 還要感謝實驗室的學長, 幫忙解決了許多研究方面的疑問, 同學間的互相扶持與幫助, 亦給予了很大的力量。

最後要感謝我的家人、朋友與女友, 在我灰心疲累之餘, 給予精神上的鼓勵與支持, 使我能全心全意的專注於課業與研究。



# 目錄

中文摘要 .....	i
英文摘要 .....	ii
誌謝 .....	iii
表目錄 .....	vi
第一章 緒論 .....	1
第二章 盲道判別—子空間方法 .....	2
2.1 盲道判別的數學模型 .....	2
2.2 子空間的分解 .....	4
2.3 子空間方法的通道估測 .....	6
2.4 子空間方法的變型 .....	9
2.5 子空間方法的限制與缺點 .....	11
第三章 階數過估測的子空間方法盲道判別 .....	12
3.1 階數過估測子空間方法的引理推導 .....	12
3.2 階數過估測子空間方法的流程 .....	14
3.3 利用過估測階數 $M'$ 還原通道階數 $M$ .....	17
3.4 還原通道階數 $M$ 之方法的變型 .....	20
第四章 判斷通道參數估測結果正確性的方法 .....	23
4.1 通道的設定 .....	23
4.2 判斷方法一 .....	24
4.3 判斷方法二 .....	26
第五章 模擬結果 .....	29

5.1 判斷方法一的模擬結果 .....	30
5.2 判斷方法二的模擬結果 .....	34
5.3 判斷方法三的模擬結果 .....	39
5.4 判斷方法四的模擬結果 .....	43
第六章 結論 .....	49
參考文獻 .....	50



# 表目錄

表5.1.1	$N = 10, T = 500, SNR = 10dB$	30
表5.1.2	$N = 10, T = 500, SNR = 20dB$	30
表5.1.3	$N = 10, T = 500, SNR = 30dB$	30
表5.1.4	$N = 10, T = 1000, SNR = 10dB$	31
表5.1.5	$N = 10, T = 1000, SNR = 20dB$	31
表5.1.6	$N = 10, T = 1000, SNR = 30dB$	31
表5.1.7	$N = 15, T = 500, SNR = 10dB$	32
表5.1.8	$N = 15, T = 500, SNR = 20dB$	32
表5.1.9	$N = 15, T = 500, SNR = 30dB$	32
表5.1.10	$N = 15, T = 1000, SNR = 10dB$	33
表5.1.11	$N = 15, T = 1000, SNR = 20dB$	33
表5.1.12	$N = 15, T = 1000, SNR = 30dB$	33
表5.1.13	$N = 15, T = 500, SNR = 10dB$	34
表5.1.14	$N = 15, T = 500, SNR = 20dB$	34
表5.1.15	$N = 15, T = 500, SNR = 30dB$	34
表5.1.16	$N = 15, T = 1000, SNR = 10dB$	35
表5.1.17	$N = 15, T = 1000, SNR = 20dB$	35
表5.1.18	$N = 15, T = 1000, SNR = 30dB$	35
表5.1.19	$N = 20, T = 500, SNR = 10dB$	36
表5.1.20	$N = 20, T = 500, SNR = 20dB$	36
表5.1.21	$N = 20, T = 500, SNR = 30dB$	36



表5.1.22	$N = 20, T = 1000, SNR = 10dB$	37
表5.1.23	$N = 20, T = 1000, SNR = 20dB$	37
表5.1.24	$N = 20, T = 1000, SNR = 30dB$	37
表5.2.1	$N = 10, T = 500, SNR = 10dB$	39
表5.2.2	$N = 10, T = 500, SNR = 20dB$	39
表5.2.3	$N = 10, T = 500, SNR = 30dB$	39
表5.2.4	$N = 10, T = 1000, SNR = 10dB$	40
表5.2.5	$N = 10, T = 1000, SNR = 20dB$	40
表5.2.6	$N = 10, T = 1000, SNR = 30dB$	40
表5.2.7	$N = 15, T = 500, SNR = 10dB$	41
表5.2.8	$N = 15, T = 500, SNR = 20dB$	41
表5.2.9	$N = 15, T = 500, SNR = 30dB$	41
表5.2.10	$N = 15, T = 1000, SNR = 10dB$	42
表5.2.11	$N = 15, T = 1000, SNR = 20dB$	42
表5.2.12	$N = 15, T = 1000, SNR = 30dB$	42
表5.2.13	$N = 15, T = 500, SNR = 10dB$	43
表5.2.14	$N = 15, T = 500, SNR = 20dB$	43
表5.2.15	$N = 15, T = 500, SNR = 30dB$	43
表5.2.16	$N = 15, T = 1000, SNR = 10dB$	44
表5.2.17	$N = 15, T = 1000, SNR = 20dB$	44
表5.2.18	$N = 15, T = 1000, SNR = 30dB$	44
表5.2.19	$N = 20, T = 500, SNR = 10dB$	45
表5.2.20	$N = 20, T = 500, SNR = 20dB$	45
表5.2.21	$N = 20, T = 500, SNR = 30dB$	45

表5.2.22 $N = 20, T = 1000, SNR = 10dB$ .....	46
表5.2.23 $N = 20, T = 1000, SNR = 20dB$ .....	46
表5.2.24 $N = 20, T = 1000, SNR = 30dB$ .....	46



# 第一章 緒論

通訊系統在傳輸過程中，只要得知通道參數，就能利用輸出與通道參數的關係，將輸入端傳送的訊號還原出來。通常會利用訓練的方式來求得通道參數，作法是由輸入端週期的傳送一組已知的訊號，稱為訓練訊號 (training signal)，利用輸出端接收到的輸出訊號與訓練訊號的關係，便可以求得通道參數。

但是，通道並非是一成不變的，一旦通道改變，必須再次經由週期的傳送訓練訊號的過程，來求得新的通道參數，於是，傳輸效率便因而降低。然而，盲道判別是一類不需要訓練訊號便可以得到通道參數的方法，適用於需要高傳輸率的通訊系統，而在所有盲道判別方法中，子空間方法能提供不錯的效能以及較精確的結果。



## 第二章 盲道判別—子空間方法

盲道判別是利用輸出訊號的統計特性為起點，經過一連串的推導與運算，達成通道參數估測的最終目的。現今，已有相當多種的方法被提出，用以解決盲道判別問題。這個章節，將介紹一種名為子空間的方法 (subspace method)，它的基本架構是使用輸出的二階統計特性—相關矩陣 (autocorrelation matrix)，在適當的假設條件下，由輸出的相關矩陣分解得兩個子空間，利用這兩個子空間互補的特性，來處理盲道判別問題 [1]。

### 2.1 盲道判別的數學模型

考慮一個數位通訊系統，通道個數為  $L$ 、通道階數為  $M$ ，如下列式子所示

$$y_i(n) = \sum_{k=0}^M h_i(k)x(n-k) + w_i(n), \quad i = 1, \dots, L \quad (2.1)$$

其中  $y_i(n)$  為第  $i$  個通道的輸出， $x(n)$  為輸入， $w_i(n)$  為雜訊，令  $\mathbf{h}_i = [h_i(0) \cdots h_i(M)]$  為第  $i$  個通道之參數。

將  $L$  個通道的輸出排成一個行向量  $\mathbf{y}(n) = [y_1(n) \cdots y_L(n)]^T$ ，則  $\mathbf{y}(n)$  表示如下

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{k=0}^M \mathbf{h}(k)x(n-k) + \mathbf{w}(n) \quad (2.2)$$
$$\mathbf{h}(k) = \begin{bmatrix} h_1(k) \\ \vdots \\ h_L(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(n) = \begin{bmatrix} w_1(n) \\ \vdots \\ w_L(n) \end{bmatrix}$$

接著，依序將  $N$  個時間的所有通道的輸出堆疊如  $\mathbf{Y}_N(n) = [\mathbf{y}(n) \cdots \mathbf{y}(n-N+1)]^T$

$$\mathbf{Y}_N(n) = \tau_N(h)\mathbf{X}_{M+N}(n) + \mathbf{W}_N(n) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{X}_{M+N}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ \vdots \\ x(n-M-N+1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_N(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(n) \\ \vdots \\ \mathbf{w}(n-N+1) \end{bmatrix}$$

$$\tau_N(h) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \cdots & \mathbf{h}(M) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{h}(0) & \cdots & \mathbf{h}(M) & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}(0) & \cdots & \mathbf{h}(M) \end{bmatrix}$$

在子空間方法的盲道判別問題中，通道參數未知、輸入訊號更是欲加以重建的目標，唯一已知且可利用的資訊，僅有輸出  $\mathbf{y}(n)$ 。一般的做法是利用之前提及的通道輸出堆疊而成的  $\mathbf{Y}_N(n)$ ，計算  $\mathbf{Y}_N(n)$  之相關矩陣 (autocorrelation matrix),  $\mathbf{R}_y = \mathbf{E}[\mathbf{Y}_N(n)\mathbf{Y}_N^H(n)]$ ，以輸出  $\mathbf{Y}_N(n)$  的二階統計特性開始著手。子空間方法的盲道判別正是以維度為  $LN \times LN$  的  $\mathbf{R}_y$  矩陣為基礎。

在開始處理盲道判別問題之前，通常會有下列的假設

**H1)** 輸入訊號  $x(n)$  與雜訊  $\mathbf{w}(m)$  互相獨立,  $\forall m, n$ 。

**H2)**  $w_i(n)$  是一個平均值為零，變異係數  $\sigma^2$  的白色雜訊,  $i = 1, \dots, L$ 。

**H3)** 輸出重疊的數量必須大於通道的階數，即  $N > M$ 。

**H4)**  $\mathbf{h}(z) = \sum_{k=0}^M \mathbf{h}(k)z^{-k}$ ,  $\mathbf{h}(z)$  中的每一個元素，不能存在相同的零點，即  $\mathbf{h}(z) \neq 0, \forall z \neq 0$ 。

有了上述條件之後，便可以由輸出的二階統計特性開始，一步一步往下推演

$$\mathbf{Y}_N(n) = \tau_N(h)\mathbf{X}_{M+N}(n) + \mathbf{W}_N(n)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_y &= \mathbf{E}[\mathbf{Y}_N(n)\mathbf{Y}_N^H(n)] \\ &= \tau_N(h)\mathbf{R}_x\tau_N^H(h) + \mathbf{R}_w \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中,  $\mathbf{R}_x = \mathbf{E}[\mathbf{X}_{M+N}(n)\mathbf{X}_{M+N}^H(n)]$ ,  $\mathbf{R}_w = \mathbf{E}[\mathbf{W}_N(n)\mathbf{W}_N^H(n)]$

根據 **H2**,  $\mathbf{R}_w = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}$  為維度  $LN \times LN$  的矩陣，而  $\mathbf{R}_y$  可表示為

$$\mathbf{R}_y = \tau_N(h)\mathbf{R}_x\tau_N^H(h) + \sigma^2 \cdot \mathbf{I} \quad (2.5)$$

$\mathbf{R}_x$  是輸入訊號  $\mathbf{X}_{M+N}(n)$  的二階統計特性，是一個維度  $(M+N) \times (M+N)$  厄米特矩陣，且具有正定 (positive definition) 的特性，通常情況下假設為滿秩但是未知。

定理 1: 若矩陣  $\tau_N(h)$  滿足下列條件, 則矩陣  $\tau_N(h)$  為滿秩 [1]。(詳細證明請參照 [2])

1.  $h(z)$  中的每一個元素, 沒有共同的零點。
2.  $N$  必須大於通道階數  $M$ 。
3.  $h(z)$  中至少有一個元素其階數為  $M$ 。

## 2.2 子空間的分解

對於一個 SIMO 的盲道判別問題, 通道階數  $M$ , 加上 **H3** 及 **H4** 的假設, 自然滿足定理 1 的三個條件, 所以  $\tau_N(h)$  為一個行滿秩的矩陣, 其維度為  $LN \times (M + N)$ , 秩數  $M + N$ 。仔細觀察 (2.5) 中  $\tau_N(h)\mathbf{R}_x\tau_N^H(h)$  的組成,  $\mathbf{R}_x$  滿秩, 秩數  $M + N$ ;  $\tau_N(h)$  為行滿秩, 秩數亦為  $M + N$ , 所以,  $\tau_N(h)\mathbf{R}_x\tau_N^H(h)$  應是維度  $LN \times LN$ , 秩數  $M + N$  的矩陣, 並具有半正定 (semi-positive definition) 的特性, 且為厄米特矩陣。

根據上段之敘述, 可將  $\tau_N(h)\mathbf{R}_x\tau_N^H(h)$  分解如下

$$\begin{aligned}\tau_N(h)\mathbf{R}_x\tau_N^H(h) &= \mathbf{E} \text{diag}(\lambda'_1 \cdots \lambda'_{M+N} \ 0 \cdots 0) \mathbf{E}^H \\ &= \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^H\end{aligned}\quad (2.6)$$

其中,  $\lambda'_1 \geq \cdots \geq \lambda'_{M+N} > 0$ ,  $\mathbf{E}$  為相對應的特徵向量所構成的矩陣。將 (2.5) 改寫為

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_y &= \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^H + \sigma^2 \cdot \mathbf{I} \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{\Lambda} + \sigma^2 \cdot \mathbf{I})\mathbf{E}^H\end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{E} \begin{bmatrix} \lambda'_1 + \sigma^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda'_{M+N} + \sigma^2 & & \\ & & & \sigma^2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \sigma^2 \end{bmatrix} \mathbf{E}^H \quad (2.7)$$



再加上  $\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_{M+N} > 0$ ，對角矩陣  $\text{diag}(\lambda'_1 \dots \lambda'_{M+N})$  的逆矩陣存在，兩邊再同時右乘  $\text{diag}(\lambda'_1 \dots \lambda'_{M+N})^{-1}$

$$\tau_N(h) \mathbf{R}_x \tau_N^H(h) \mathbf{S} \text{diag}(\lambda'_1 \dots \lambda'_{M+N})^{-1} = \mathbf{S}$$

根據 **H3**、**H4** 與定理一，矩陣  $\tau_N(h)$  行滿秩，秩數為  $M+N$ ，矩陣  $\mathbf{S}$  的維度為  $LN \times (M+N)$ 、秩數亦是  $M+N$ ，由上列之推導，矩陣  $\mathbf{S}$  的行向量可表示為矩陣  $\tau_N(h)$  行向量的線性組合， $\text{Range}(\mathbf{S}) = \text{Range}(\tau_N(h))$  得証。又因為訊號子空間與雜訊子空間互為正交補集的性質，可以歸結出矩陣  $\tau_N(h)$  與  $\mathbf{G}$  的行向量相互垂直的結果，此結果在子空間方法的盲道判別中是一個相當重要的關鍵。

## 2.3 子空間方法的通道估測

利用矩陣  $\tau_N(h)$  的行向量與雜訊子空間中的所有向量互相垂直的性質，可得到如下的式子

$$\mathbf{g}_i^H \tau_N(h) = 0, \quad i = 1, \dots, LN - M - N \quad (2.9)$$

根據 (2.9)，再令

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^{LN-M-N} |\mathbf{g}_i^H \tau_N(h)|^2 \\ J &= \sum_{i=1}^{LN-M-N} \mathbf{g}_i^H \tau_N(h) \tau_N^H(h) \mathbf{g}_i \end{aligned} \quad (2.10)$$

盲道判別的目的在於通道參數的估測，觀察 (2.10)，通道參數被包含在矩陣  $\tau_N(h)$  中，欲從 (2.10) 直接判別出來似乎並不容易，所以，必須將 (2.10) 的結構加以修改，讓通道參數能夠獨立出來，以便通道參數的判別。

引理 1： $\mathbf{v}(0), \dots, \mathbf{v}(N-1)$  是  $N$  個維度為  $L \times 1$  的任意向量，並將  $\mathbf{v}(0), \dots, \mathbf{v}(N-1)$  堆疊成維度  $LN \times 1$  的行向量  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}^T(0) \dots \mathbf{v}^T(N-1)]^T$ ，再令  $\nu_{M+1}$  為維度  $L(M+1) \times (M+N)$



的矩陣

$$\nu_{M+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(0) & \cdots & \mathbf{v}(N-1) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{v}(0) & \cdots & \mathbf{v}(N-1) \end{bmatrix}$$

若矩陣  $\tau_N(h)$  與行向量  $\mathbf{V}$  內的元素皆為實數，則矩陣  $\tau_N(h)$  與行向量  $\mathbf{V}$  會有下列的結構關係

$$\mathbf{V}^T \tau_N(h) = \mathbf{H}^T \nu_{M+1}, \quad \mathbf{H} = [\mathbf{h}^T(0) \cdots \mathbf{h}^T(M)]^T$$

證明：令列向量  $\mathbf{P} = \mathbf{V}^T \tau_N(h)$ ，維度  $1 \times (M+N)$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}^T(0) \cdots \mathbf{v}^T(N-1)] \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \cdots & \mathbf{h}(M) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{h}(0) & \cdots & \mathbf{h}(M) \end{bmatrix}$$

令  $\mathbf{v}^T(i) = \tilde{\mathbf{v}}(i)$ ,  $i = 0, \dots, N-1$

$$\mathbf{P} = [\tilde{\mathbf{v}}(0) \cdots \tilde{\mathbf{v}}(N-1)] \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \cdots & \mathbf{h}(M) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{h}(0) & \cdots & \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

仔細觀察 (2.11) 的  $\tilde{\mathbf{v}}(0)$  與  $\mathbf{h}(j)$ ，發現二者具有摺合積分的型式，將 (2.11) 取  $Z$  轉換可得

$$\mathbf{P}(z) = \tilde{\mathbf{v}}(z) \mathbf{h}(z)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{v}}(i) z^{-i}$$

$$\mathbf{h}(z) = \sum_{j=0}^M \mathbf{h}(j) z^{-j}$$

因為摺合積分具有交換律，可將(2.11) 的  $\tilde{\mathbf{v}}(i)$  與  $\mathbf{h}(j)$  角色相互對調 (2.11) 可改寫如下

$$\mathbf{P} = [\tilde{\mathbf{h}}(0) \cdots \tilde{\mathbf{h}}(M)] \begin{bmatrix} \mathbf{v}(0) & \cdots & \mathbf{v}(N-1) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{v}(0) & \cdots & \mathbf{v}(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}(j) = \mathbf{h}^T(j), \quad j = 0, \dots, M$$

由 (2.11) 與 (2.12),  $\mathbf{V}^T \tau_N(h) = \mathbf{H}^T \nu_{M+1}$  得証。

同理, 考慮矩陣  $\tau_N(h)$  與行向量  $\mathbf{V}$  內的元素為複數的情形,  $\tau_N(h)$  與  $\mathbf{V}$  具有下列的關係

$$\mathbf{V}^H \tau_N(h) = \overline{\mathbf{H}^H \nu_{M+1}}, \quad \mathbf{H} = [\mathbf{h}^T(0) \cdots \mathbf{h}^T(M)]^T$$

根據引理 1 ,

$$\begin{aligned} |\mathbf{g}_i^H \tau_N(h)|^2 &= \mathbf{g}_i^H \tau_N(h) \tau_N^H(h) \mathbf{g}_i \\ &= \mathbf{H}^H \Gamma_i \Gamma_i^H \mathbf{H} \end{aligned}$$

$$\mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_i(0) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_i(N-1) \end{bmatrix}, \quad \Gamma_i = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_i(0) & \cdots & \mathbf{g}_i(N-1) & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \mathbf{g}_i(0) & \cdots & \mathbf{g}_i(N-1) \end{bmatrix}$$

所以, (2.10) 可以改寫如下

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^{LN-M-N} \mathbf{H}^H \Gamma_i \Gamma_i^H \mathbf{H} \\ &= \mathbf{H}^H \left( \sum_{i=1}^{LN-M-N} \Gamma_i \Gamma_i^H \right) \mathbf{H} \\ J &= \mathbf{H}^H \mathbf{Q} \mathbf{H}, \quad \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{LN-M-N} \Gamma_i \Gamma_i^H \end{aligned} \quad (2.13)$$

考慮 (2.13), 若在理想情況下, 可以得知實際的相關矩陣  $\mathbf{R}_y$ , 則  $J = \mathbf{H}^H \mathbf{Q} \mathbf{H} = 0$ ,  $\mathbf{Q}$  是一個秩數為  $L(M+1) - 1$  的矩陣, 滿足  $J = 0$  的向量  $\mathbf{H}$  即為真實的通道參數, 或是與之差一倍數。但是, 實際的情況, 相關矩陣  $\mathbf{R}_y$  無法確切得知, 通常的做法是使用  $\hat{\mathbf{R}}_y = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \mathbf{Y}_N(n) \mathbf{Y}_N^H(n)$  來近似  $\mathbf{R}_y$ ,  $T$  愈大, 代表  $\hat{\mathbf{R}}_y$  包含的資料量愈大, 愈接近實際的  $\mathbf{R}_y$ , 既然  $\hat{\mathbf{R}}_y$  是近似值, 由  $\hat{\mathbf{R}}_y$  所衍生的雜訊子空間內的所有向量  $\hat{\mathbf{g}}_i$  亦僅為近似值, 所以, (2.9) 不會剛好等於零向量, 矩陣  $\mathbf{Q}$  的秩數不再是  $L(M+1) - 1$ , 而是  $J \neq 0$ , 但  $J \approx 0$ 。

考慮利用近似的  $\hat{\mathbf{R}}_y$  來處理盲道的問題, 由  $\hat{\mathbf{R}}_y$  的雜訊子空間取一個向量  $\hat{\mathbf{g}}_i$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{g}}_i^H \tau_N(h) &\approx 0 \\ J &= \sum_{i=1}^{LN-M-N} |\hat{\mathbf{g}}_i^H \tau_N(h)|^2 \geq 0 \\ J &= \mathbf{H}^H \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{H} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

實際情況下,  $J \approx 0$ , 使得  $J$  愈趨近於零的  $\hat{\mathbf{H}}$ , 會是愈好的通道參數估測, 但是,  $\hat{\mathbf{H}}$  的長度亦會左右  $J$  的值, 並且爲了避免  $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$  的發生, 給予  $\hat{\mathbf{H}}$  長度等於 1 的限制, 即  $\|\hat{\mathbf{H}}\| = 1$ , 於此限制條件之下, 找尋一組  $\hat{\mathbf{H}}$ , 滿足  $J = \mathbf{H}^H \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{H}$  爲最小, 該組  $\hat{\mathbf{H}}$  就是盲道判別問題所欲估測出的通道參數, 或是相差一純量倍數  $\alpha$ 。

觀察 (2.14), 因爲實際通道參數  $\mathbf{H}$  不爲零向量, 即  $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$ , 得知  $\hat{\mathbf{Q}}$  爲半正定, 且是一個厄米特矩陣, 可正交對角化, 所有特徵向量彼此獨立並垂直, 特徵值皆大於或等於 0, 由 (2.14), 在  $\|\hat{\mathbf{H}}\| = 1$  的限制下, 明顯可以看出, 滿足  $J = \mathbf{H}^H \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{H}$  爲最小值的  $\hat{\mathbf{H}}$ , 必須是矩陣  $\hat{\mathbf{Q}}$  的最小特徵值所對應的特徵向量, 且長度等於 1。

從一開始, 建立輸入訊號經通道, 並受雜訊干擾至輸出訊號的數學式, 通道個數  $L$  與通道階數  $M$  已知, 給予 **H1** ~ **H4** 四個假設, 僅利用輸出訊號的二階統計特性  $\mathbf{R}_y$ , 分出兩個互爲正交補集的子空間, 其一爲訊號子空間, 另一爲雜訊子空間, 利用兩個子空間相互正交的特性, 並在適當條件的限制之下, 可以估測出一組通道參數  $\hat{\mathbf{H}}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}$  與真實通道參數  $\mathbf{H}$  相差一純量倍數  $\alpha$ 。

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(0) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}(M) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} = \alpha \hat{\mathbf{H}}$$

## 2.4 子空間方法的變型

子空間方法除了利用雜訊子空間內的向量與  $\tau_N(h)$  的行向量相互垂直的特性來處理盲道判別之外, 尚可利用訊號子空間內的向量爲  $\tau_N(h)$  的行向量線性組合而成的特性, 將 (2.10) 稍加改寫

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \sum_{i=1}^{M+N} |\hat{\mathbf{s}}_i^H \tau_N(h)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{M+N} \hat{\mathbf{s}}_i^H \tau_N(h) \tau_N^H(h) \hat{\mathbf{s}}_i \\ &= \sum_{i=1}^{M+N} \mathbf{H}^H \hat{\Theta}_i \hat{\Theta}_i^H \mathbf{H} \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_i(0) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{s}}_i(N-1) \end{bmatrix}, \quad \hat{\Theta}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_i(0) & \cdots & \hat{\mathbf{s}}_i(N-1) & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \hat{\mathbf{s}}_i(0) & \cdots & \hat{\mathbf{s}}_i(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \mathbf{H}^H \left( \sum_{i=1}^{M+N} \hat{\Theta}_i \hat{\Theta}_i^H \right) \mathbf{H} \\ &= \mathbf{H}^H \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{H} \end{aligned} \quad (2.15)$$

相同的，給予  $\|\hat{\mathbf{H}}\| = 1$  的限制條件，矩陣  $\hat{\mathbf{Q}}$  的最大特徵值所對應的特徵向量即是估測的通道參數，長度為 1，並與真實通道參數相差一純量倍數， $\mathbf{H} = \alpha \hat{\mathbf{H}}$ 。

$\hat{\mathbf{G}}$  是一個行滿秩的矩陣，擁有  $LN - M - N$  個彼此線性獨立的行向量，由矩陣  $\hat{\mathbf{G}}$  所展延的雜訊子空間是一個  $LN - M - N$  維的空間，在 (2.14) 的推導過程中，利用了矩陣  $\hat{\mathbf{G}}$  的所有行向量來構成矩陣  $\hat{\mathbf{Q}}$ ，可視為從  $LN - M - N$  維的雜訊子空間中選取了  $LN - M - N$  個線性獨立向量來完成 (2.14)，同理，(2.15) 是從  $M + N$  維的訊號子空間中選取了  $M + N$  個線性獨立向量推導而得，兩式包含了完整的雜訊與訊號子空間的資訊。然而，子空間方法必須具備完整的雜訊或是訊號子空間的資訊才能處理盲道判別的問題嗎？答案是不一定，在適當的條件之下，僅需要子空間內部分幾個獨立的向量，便可以達到通道參數估測的目的。

假設由矩陣  $\mathbf{R}_y$  之雜訊子空間內，任意取出一個  $LN \times 1$  的向量  $\mathbf{g}_0$ ， $\mathbf{g}_0$  與矩陣  $\tau_N(h)$  的行向量空間垂直，又根據引理 1

$$\mathbf{g}_0^H \tau_N(h) = \mathbf{H}^H \mathbf{\Gamma}_0 = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0(0) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_0(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0(0) & \cdots & \mathbf{g}_0(N-1) & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \mathbf{g}_0(0) & \cdots & \mathbf{g}_0(N-1) \end{bmatrix}$$

因為  $\tau_N(h)$  秩數  $M + N$ ，(2.16) 包含了  $M + N$  個線性方程式與  $L(M + 1)$  個未知數，如果  $M + N < L(M + 1)$ ，則無法得到唯一解，即無法唯一估測出通道參數。再從雜訊子空間中選取  $P - 1$  個線性獨立的向量，每一個雜訊子空間內的向量都可以與矩陣  $\tau_N(h)$  表示成 (2.16) 的型

式, 可以提供  $M + N$  個線性方程式, 只要  $P(M + N) \geq L(M + 1)$ , 就可以唯一決定出一組通道參數估測, 與真實的通道參數相差一純量倍數  $\alpha$ 。很直覺的, 使用數量愈多的線性獨立向量所推得的 (2.14) 或 (2.15), 由於所包含的資訊愈完整, 所估測出來的通道參數也就愈準確。

## 2.5 子空間方法的限制與缺點

至此, 大致介紹了子空間方法用於盲道判別的基本架構, 然而, 在先前推導過程中, 有著雜訊  $w(n)$  必須為白色雜訊的限制, 即  $\mathbf{R}_w = \sigma^2 \mathbf{I}$ , 倘若在實際盲道問題中, 雜訊並非如白色雜訊如此單純的話, 該如何處理呢? 考慮雜訊的二階統計特性  $\mathbf{R}_w = \sigma^2 \underline{\mathbf{R}}_w \neq \sigma^2 \mathbf{I}$ , 而且  $\mathbf{R}_w$  滿秩並已知 (可相差一純量倍數) 的情況, 令  $\mathbf{W}_w = \underline{\mathbf{R}}_w^{-1/2}$ , (2.4) 可利用  $\mathbf{W}_w$  巧妙地將雜訊部分化成白色雜訊,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{R}}_y &= \mathbf{W}_w \mathbf{R}_y \mathbf{W}_w^H \\ &= \mathbf{W}_w \tau_N(h) \mathbf{R}_x \tau_N^H(h) \mathbf{W}_w^H + \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.17)$$

因為矩陣  $\mathbf{R}_w$  滿秩, 則  $\mathbf{W}_w$  也是滿秩的矩陣, 所以  $\mathbf{W}_w \tau_N(h)$  亦滿秩, 秩數  $M + N$ , 根據先前的推導, 假設  $\underline{\mathbf{g}}_i, i = 1, \dots, LN - M - N$  是矩陣  $\underline{\mathbf{R}}_y$  對應雜訊部分的特徵向量,  $\underline{\mathbf{g}}_i$  與  $\mathbf{W}_w \tau_N(h)$  的行向量會互相垂直

$$\underline{\mathbf{g}}_i^H \mathbf{W}_w \tau_N(h) = 0 \quad (2.18)$$

(2.18) 與 (2.9) 具有相似的架構, (2.9) 的  $\mathbf{g}_i$  與 (2.18) 的  $\mathbf{W}_w^H \underline{\mathbf{g}}_i$  扮演相同的角色, 接下來的步驟, 就與白色雜訊的理想情況之推導過程相類似。但對於  $\mathbf{R}_w$  未知或具有其他型式的情況, 子空間方法可能會無法處理, 或是需要作適當的修改與變化, 這部分不是本文的重點, 且已有部分文獻作這方面的探討, 如 [8], 將不在此贅述。

再者, 通道階數  $M$  必須已知是子空間方法的另一個限制, 但在實際的盲道估測問題中, 通道階數常常無法得知, 這部分的探討, 將於下一章闡述。

# 第三章 階數過估測的子空間方法盲道判別

對於盲道判別問題，子空間方法是一個不錯的方式，可以得到相當準確的估測結果，但是，通道階數  $M$  必須確切知道是它的缺點之一，一般在處理盲道判別問題之前，會先將未知的通道參數估測出來，再利用子空間方法來做通道參數的判別。在這個章節，將介紹一個不需要事先估測階數的方法，一開始先行假設通道階數為  $M'$ ，只要  $M' > M$ ，稱為過估測 (overestimation)，便可以一步一步將通道階數由  $M'$  還原為  $M$ ，而得到一組階數為  $M$  的通道參數估測 [7]。此方法是利用子空間方法的基本架構並稍加改變。

## 3.1 階數過估測子空間方法的引理推導

考慮一個 SIMO 的盲道判別問題，通道個數  $L$ ，通道階數  $M$  但未知， $N > M$ ，給予 **H1** ~ **H4** 的假設，系統數學式如第二章所示

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_N(n) &= \tau_N(h) \mathbf{X}_{M+N}(n) + \mathbf{W}_N(n) \\ \mathbf{R}_y &= \tau_N(h) \mathbf{R}_x \tau_N^H(h) + \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned}$$

相同的，由輸出的相關矩陣  $\mathbf{R}_y$  分得雜訊與訊號兩個子空間，任意取出雜訊子空間內的一個向量  $\mathbf{g}$ ， $\mathbf{g} = [\mathbf{g}^T(0) \cdots \mathbf{g}^T(N-1)]^T$ ，令

$$\mathbf{g}^H = \tilde{\mathbf{g}}$$

$$[\mathbf{g}^H(0) \cdots \mathbf{g}^H(N-1)] = [\tilde{\mathbf{g}}(0) \cdots \tilde{\mathbf{g}}(N-1)]$$

所以  $\tilde{\mathbf{g}}$  滿足

$$\tilde{\mathbf{g}} \tau_N(h) = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

(3.1) 式取  $Z$  轉換

$$\tilde{\mathbf{g}}(z) \mathbf{h}(z) = 0, \quad \forall z \neq 0 \tag{3.2}$$

$$\tilde{\mathbf{g}}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{g}}(k) z^{-k}, \quad \mathbf{h}(z) = \sum_{k=0}^M \mathbf{h}(k) z^{-k}$$

將所有維度為  $1 \times L$  的分式轉移函數 (rational transfer function) 所組成之集合定為  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}$  是一個  $L$  維的向量空間, 再將所有滿足  $\mathbf{p}(z)\mathbf{h}(z) = 0, \forall z \neq 0$  且維度  $1 \times L$  的分式轉移函數  $\mathbf{p}(z)$  組成之集合定為  $\mathcal{B}$ , 則  $\mathcal{B}$  是向量空間  $\mathcal{F}$  的一個  $L - 1$  維子空間。

由於雜訊子空間的基底與  $\mathcal{B}$  內維度  $1 \times L$ 、階數小於或等於  $N - 1$  的  $\tilde{\mathbf{g}}(z)$  具有一對一的關係, 所以, 只要  $N > M$  的條件成立, 子空間  $\mathcal{B}$  必然存在一組多項式向量的基底, 階數最大為  $N - 1$ , 也就是說, 若  $N > M$ , 利用  $\mathbf{R}_y$  的雜訊子空間可以決定出  $\mathcal{B}$ 。

再者, 將向量空間  $\mathcal{F}$  中另一個子空間定為  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}$  與  $\mathcal{B}$  互為正交補空間, 是一個  $1$  維的子空間。子空間  $\mathcal{S}$  是所有維度  $L \times 1$  的分式轉移函數  $\mathbf{f}(z)$  之集合,  $\mathbf{f}(z)$  滿足

$$\tilde{\mathbf{g}}(z) \mathbf{f}(z) = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{g}}(z) \in \mathcal{B}, \quad \forall \mathbf{f}(z) \in \mathcal{S} \quad (3.3)$$

比較 (3.2) 與 (3.3), 不難發現子空間  $\mathcal{S}$  內的向量與  $\mathbf{h}(z)$  具有線性關係

$$\mathcal{S} = \{ r(z) \mathbf{h}(z) \mid r(z) \text{ 是一個純量分式轉移函數} \}$$

由於子空間  $\mathcal{S}$  可從子空間  $\mathcal{B}$  推得,  $\mathcal{B}$  亦可由  $\mathbf{R}_y$  的雜訊子空間決定, 因此,  $\mathbf{R}_y$  的雜訊子空間可以唯一決定出分式轉移函數  $\mathbf{h}(z)$  所屬於的一維子空間  $\mathcal{S}$ , 接下來, 只剩下從子空間  $\mathcal{S}$  中找出  $\mathbf{h}(z)$  的工作。

定義 1: 在子空間  $\mathcal{S}$  中, 如果能找到唯一一組(可相差一純量倍數) 最小階數的多項式向量  $\mathbf{f}(z)$ , 滿足  $\mathbf{f}(z) \neq 0, \forall z \neq 0$  的條件, 則稱此組多項式向量  $\mathbf{f}(z)$  為子空間  $\mathcal{S}$  的最小多項式基底。子空間  $\mathcal{S}$  內的所有多項式向量都可表示成

$$\mathcal{S} = \{ r(z) \mathbf{f}(z) \mid r(z) \text{ 是一個純量多項式} \}$$

$\mathbf{h}(z)$  為子空間  $\mathcal{S}$  內的一個多項式向量, 又根據 H4,  $\mathbf{h}(z) \neq 0, \forall z \neq 0$ , 所以  $\mathbf{h}(z)$  即是  $\mathcal{S}$  的最小多項式基底。子空間  $\mathcal{S}$  內的所有向量皆可表示成

$$\mathcal{S} = \{ r(z) \mathbf{h}(z) \mid r(z) \text{ 是一個純量多項式} \}$$



引理 2：在 **H4** 成立且  $N > M$  的條件下，如果  $M' = \deg(f(z)) > M$

$$\tilde{\mathbf{g}} \tau_N(f) = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{f}(k) = \begin{bmatrix} f_1(k) \\ \vdots \\ f_L(k) \end{bmatrix}, \quad \tau_N(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(0) & \cdots & \mathbf{f}(M') & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \mathbf{f}(0) & \cdots & \mathbf{f}(M') \end{bmatrix}$$

滿足 (3.4) 的解，必定為  $\mathbf{f}(z) = \mathbf{r}(z)\mathbf{h}(z)$  的型式，且  $\mathbf{r}(z)$  是一個純量多項式，階數  $M' - M$ ，即  $\deg(\mathbf{r}(z)) = M' - M$  [6]。

證明：(⇒) 假設 (3.4) 成立，取  $Z$  轉換如下

$$\tilde{\mathbf{g}}(z)\mathbf{f}(z) = \mathbf{0}, \quad \forall z \neq 0 \quad (3.5)$$

由 (3.5)， $\tilde{\mathbf{g}}(z)$  與  $\mathbf{f}(z)$  具有正交的特性，且  $\tilde{\mathbf{g}}(z)$  是子空間  $\mathcal{B}$  內的多項式向量，階數小於或等於  $N - 1$ ，又  $\mathcal{S}$  與  $\mathcal{B}$  互為正交補空間，因此， $\mathbf{f}(z)$  必定屬於子空間  $\mathcal{S}$



其中， $\mathbf{r}(z)$  是階數  $M' - M$  的純量多項式。

(⇐) 如果  $\mathbf{f}(z)$  是子空間  $\mathcal{S}$  的一個多項式向量， $\mathbf{f}(z) = \mathbf{r}(z)\mathbf{h}(z)$ ，又  $\tilde{\mathbf{g}}(z)$  是屬於  $\mathcal{B}$  且階數小於或等於  $N - 1$  的多項式向量，由於  $\mathcal{B}$  為  $\mathcal{S}$  的正交補空間， $\tilde{\mathbf{g}}(z)\mathbf{f}(z) = \mathbf{0}$ ，經過逆轉換之後，便可以得到  $\tilde{\mathbf{g}} \tau_N(f) = \mathbf{0}$ 。

## 3.2 階數過估測子空間方法的流程

由於通道階數  $M$  未知，無法決定 (2.3) 中矩陣  $\tau_N(h)$  的維度，在實際的運算上，第二章介紹的子空間方法並不可行。所以，必須重新建立一個有別於 (2.3) 的數學模型。重新考慮盲道判別問題如下，通道個數  $L$ ，假定一個已知的  $M'$  當作通道階數，以  $M'$  取代  $M$ ，如果  $M' < M$ ，在建構數學模型時，因為某部分通道參數資料的流失，造成不可逆的破壞，導致通道參數無法估測。而若



$M' > M$ ，建構出的數學模型內含所有通道參數的資料，讓  $N$  大於  $M'$ ，將盲道判別的數學式改寫如下

$$\mathbf{Y}_N(n) = \tau_N(f)\mathbf{X}_{M'+N}(n) + \mathbf{W}_N(n) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{f}(k) = \begin{bmatrix} f_1(k) \\ \vdots \\ f_L(k) \end{bmatrix}, \quad \tau_N(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(0) & \cdots & \mathbf{f}(M') & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{f}(0) & \cdots & \mathbf{f}(M') \end{bmatrix}$$

根據引理 2，過估測的通道參數  $\mathbf{f}$  與真實的通道參數  $\mathbf{h}$  具有下列關係

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{r}(z)\mathbf{h}(z) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{k=0}^{M'} \mathbf{f}(k)z^{-k}, \quad \mathbf{h}(z) = \sum_{k=0}^M \mathbf{h}(k)z^{-k}$$

其中的  $\mathbf{r}(z)$  是階數  $M' - M$  的純量多項式，亦即  $\mathbf{f}(z)$  的所有元素間，有著  $M' - M$  個共同的零點，根據 [2]，矩陣  $\tau_N(f)$  並非行滿秩，秩數為  $M+N$ ，具有  $M' - M$  維的零空間 (null space)。

相同的，由輸出  $\mathbf{Y}_N(n)$  的二階統計特性  $\mathbf{R}_y$  著手

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_y &= \tau_N(f) \mathbf{R}_x \tau_N^H(f) + \mathbf{R}_w \\ &= \tau_N(f) \mathbf{R}_x \tau_N^H(f) + \sigma^2 \cdot \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.8)$$

相關矩陣  $\mathbf{R}_x$  維度  $(M' + N) \times (M' + N)$ ，通常情況下為滿秩、正定的厄米特矩陣，秩數  $M' + N$ ，但矩陣  $\tau_N(f)$  秩數  $M + N$ ，所以， $\tau_N(f) \mathbf{R}_x \tau_N^H(f)$  維度  $LN \times LN$ ，秩數  $M + N$ ，是一個半正定的厄米特矩陣。將 (3.8) 改寫如下

$$\mathbf{R}_y = [\mathbf{S} \quad \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_{M+N} & & & \\ & & & \sigma^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}^H \\ \mathbf{G}^H \end{bmatrix}$$

其中,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{M+N} > \sigma^2$ , 矩陣  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 \cdots \mathbf{s}_{M+N}]$  維度  $LN \times (M+N)$ , 而矩陣  $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1 \cdots \mathbf{g}_{LN-M-N}]$  維度  $LN \times (LN-M-N)$ 。

在通道階數過估測的盲道判別問題中, 同樣可以由  $\mathbf{R}_y$  分解出兩個子空間,  $\mathbf{S}$  的行向量所展延的訊號子空間, 以及  $\mathbf{G}$  的行向量展延的雜訊子空間, 兩空間互為正交補空間。但是, 由於通道階數  $M$  未知, 無法確定  $\mathbf{S}$  與  $\mathbf{G}$  的維度, 不過, 可以確定的是, 矩陣  $\tau_N(f)$  所擁有的  $M+N$  個線性獨立行向量, 亦是訊號子空間的一組基底, 即  $Range(\tau_N(f)) = Range(\mathbf{S})$ 。所以, 雜訊子空間內的所有向量會正交於矩陣  $\tau_N(f)$  的行向量, 可得到

$$\mathbf{g}_i^H \tau_N(f) = 0, \quad i = 1, \dots, LN - M - N \quad (3.9)$$

依照第二章通道階數已知的情況的作法, 令

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^{LN-M-N} |\mathbf{g}_i^H \tau_N(f)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{LN-M-N} \mathbf{g}_i^H \tau_N(f) \tau_N^H(f) \mathbf{g}_i \\ J &= \sum_{i=1}^{LN-M-N} \mathbf{F}^H \boldsymbol{\Gamma}_i \boldsymbol{\Gamma}_i^H \mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^H \left( \sum_{i=1}^{LN-M-N} \boldsymbol{\Gamma}_i \boldsymbol{\Gamma}_i^H \right) \mathbf{F} = \mathbf{F}^H \mathbf{Q} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{f}^T(0) \cdots \mathbf{f}^T(M')]^T, \quad \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{LN-M-N} \boldsymbol{\Gamma}_i \boldsymbol{\Gamma}_i^H$$

但是, 在  $M$  未知的情況下, (3.10) 無法處理, 所幸, 在適當條件之下, 欲利用 (3.10) 判別出通道參數  $\mathbf{F}$  並非一定要使用矩陣  $\mathbf{G}$  的所有行向量, 因此, 將(3.10)的  $M$  以  $M'$  取代, 改寫如下

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{F}^H \left( \sum_{i=1}^{LN-M'-N} \boldsymbol{\Gamma}_i \boldsymbol{\Gamma}_i^H \right) \mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^H \mathbf{Q} \mathbf{F}, \quad \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{LN-M'-N} \boldsymbol{\Gamma}_i \boldsymbol{\Gamma}_i^H \end{aligned} \quad (3.11)$$

由於矩陣  $\tau_N(f)$  的秩數  $M+N$ , 觀察 (3.9), 可得到  $M+N$  個線性方程式且帶有  $L(M'+1)$  個未知數, 假設從矩陣  $\mathbf{G}$  中取出  $P$  個向量, 每個向量都可以表示成如 (3.9) 的關係式, 總共可提

供  $P(M+N)$  個線性方程式來解  $L(M'+1)$  個未知數，只要  $P(M+N) \geq L(M'+1)$ ，就可以利用 (3.11) 來判別通道參數。因為  $N > M'$ ， $M \geq 1$ ，則  $(M+N) \geq (M'+1)$ ，很明顯的，如果  $P \geq L$ ，一定可滿足  $P(M+N) \geq L(M'+1)$ 。也就是說，只要  $LN - M' - N \geq L$ ，(3.11) 就可用以處理通道參數過估測的盲道判別問題。

### 3.3 利用過估測階數 $M'$ 還原通道階數 $M$

回顧一下，在通道階數過估測的盲道判別問題中，過估測的通道參數  $\mathbf{f}$  與真實的通道參數  $\mathbf{h}$  具有(3.7)的關係，即  $\mathbf{f}(z) = \mathbf{h}(z) r(z)$ ，其中  $r(z)$  是階數  $M' - M$  的純量多項式 [6]。取其逆轉換，表示如下

$$\mathbf{f}(n) = \sum_{k=0}^M \mathbf{h}(k) r(n-k) \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(k) &= 0, \quad \forall k > M \\ r(k) &= 0, \quad \forall k > M' - M \end{aligned}$$

利用 (3.12) 的摺合積分關係，將  $\mathbf{F}$  改寫

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(0) \\ \mathbf{f}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(M') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & & & 0 \\ \mathbf{h}(1) & \mathbf{h}(0) & & \\ \vdots & \mathbf{h}(1) & \ddots & \mathbf{h}(0) \\ \mathbf{h}(M) & \vdots & \ddots & \mathbf{h}(1) \\ & \mathbf{h}(M) & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ \vdots \\ r(M' - M) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

將 (3.13) 中由  $\mathbf{h}(i)$ ， $i = 1, \dots, M$  所組成的矩陣令為  $\Phi$ ，矩陣  $\Phi$  的維度為  $L(M'+1) \times (M' - M + 1)$ ，很明顯的， $\Phi$  為行滿秩，又  $r(0), \dots, r(M' - M)$  是  $M' - M + 1$  個亂數 (random variable)，因此，所有可能的  $\mathbf{F}$  可以構成一個  $M' - M + 1$  維的空間，此空間內的所有向量都會滿足 (3.11) 等於零， $J = \mathbf{F}^H \mathbf{Q} \mathbf{F} = 0$ ，換句話說，矩陣  $\mathbf{Q}$  擁有一個  $M' - M + 1$  維的零空間， $\dim(\text{null}(\mathbf{Q})) = M' - M + 1$ 。

令維度  $L(M' + 1) \times (M' - M + 1)$  的矩陣  $\mathbf{Q}_0$  為矩陣  $\mathbf{Q}$  的零空間

$$\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{M'-M}] = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0(0) & \mathbf{q}_1(0) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(0) \\ \mathbf{q}_0(1) & \mathbf{q}_1(1) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{q}_0(M') & \mathbf{q}_1(M') & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(M') \end{bmatrix}$$

$\mathbf{q}_i$ ,  $i = 0, \dots, M' - M$  是維度  $L(M' + 1) \times 1$  的向量, 而  $\mathbf{q}_i(j)$ ,  $i = 0, \dots, M' - M$ ,  $j = 0, \dots, M'$  是維度  $L \times 1$  的向量。矩陣  $\mathbf{Q}_0$  中的每個行向量  $\mathbf{q}_i$  都可表示成 (3.13) 的型式

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i(0) \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i(M') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \mathbf{h}(M) & \ddots & \mathbf{h}(0) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i(0) \\ \vdots \\ r_i(M' - M) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

仔細觀察 (3.14) 的結構, 發現矩陣  $\mathbf{Q}_0$  中的每一個向量  $\mathbf{q}_i$  的最末  $L$  個元素所形成的向量, 都會等於  $\mathbf{h}(M)$  乘上某個倍數, 即  $\mathbf{q}_i(M') = \mathbf{h}(M) r_i(M' - M)$ , 利用這個特點, 令

$$\kappa^H = \frac{\mathbf{q}_{M'-M}^H(M') [\mathbf{q}_0(M') \cdots \mathbf{q}_{M'-M-1}(M')]}{\mathbf{q}_{M'-M}^H(M') \mathbf{q}_{M'-M}(M')} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{Q}_1^* = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{M'-M-1}] - \mathbf{q}_{M'-M} \cdot \kappa^H \quad (3.16)$$

$\kappa^H$  代表的是向量  $\mathbf{q}_0(M'), \dots, \mathbf{q}_{M'-M-1}(M')$  分別在  $\mathbf{q}_{M'-M}(M')$  上的投影量與  $\mathbf{q}_{M'-M}(M')$  長度的比值, 而  $\mathbf{Q}_1^*$  是將向量  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{M'-M-1}$  分別扣除  $\mathbf{q}_{M'-M}$  乘上相對應的比值  $\kappa^H$  而得, 所以,  $\mathbf{Q}_1^*$  會是一個維度  $L(M' + 1) \times (M' - M)$  的矩陣, 且最末  $L$  列的元素皆為零, 接著, 移除掉矩陣  $\mathbf{Q}_1^*$  最末  $L$  個元素皆為零的列, 所得的矩陣令為  $\mathbf{Q}_1$ , 維度  $LM' \times (M' - M)$ , 注意, 矩陣  $\mathbf{Q}_1$  的每個行向量依舊具有 (3.14) 的結構, 可表示成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \mathbf{h}(M) & \ddots & \mathbf{h}(0) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}_i(0) \\ \vdots \\ \tilde{r}_i(M' - M - 1) \end{bmatrix}$$

重複 (3.15) 與 (3.16) 的步驟  $M' - M$  次，並在每一次的過程中將最末  $L$  個零列拿掉，最後將得到

$$\mathbf{Q}_{M'-M} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \tilde{r}(0) \quad (3.17)$$

向量  $\mathbf{Q}_{M'-M}$  維度  $L(M+1) \times 1$ ，正是通道階數過估測  $M'$  的情況下，最終估測得到的一組階數為  $M$  的通道參數，並與真實的通道參數相差一未知的純量倍數  $\tilde{r}(0)$  [7]。

然而，在矩陣  $\mathbf{Q}_0$  中，並非僅有所有行向量的最末  $L$  個元素所成的向量具有比例關係，其最初  $L$  個元素所成的向量亦具有類似的比例關係，同樣可由 (3.14) 觀察得之。因此，(3.15) 與 (3.16) 可以修改如下

$$\underline{\kappa}^H = \frac{\mathbf{q}_{M'-M}^H(0) [\mathbf{q}_0(0) \cdots \mathbf{q}_{M'-M-1}(0)]}{\mathbf{q}_{M'-M}^H(0) \mathbf{q}_{M'-M}(0)} \quad (3.18)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}_1^* = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{M'-M-1}] - \mathbf{q}_{M'-M} \cdot \underline{\kappa}^H \quad (3.19)$$

其中， $\underline{\mathbf{Q}}_1^*$  是一個維度  $L(M'+1) \times (M'-M)$  的矩陣，其最初  $L$  列的元素皆為零。將矩陣  $\underline{\mathbf{Q}}_1^*$  的最初  $L$  個零列拿掉後令為  $\underline{\mathbf{Q}}_1$ ，其維度為  $LM' \times (M'-M)$ 。相同的， $\underline{\mathbf{Q}}_1$  的每個行向量仍具有類似 (3.14) 的結構，同樣的，重複 (3.18) 與 (3.19) 的步驟  $M' - M$  次，並在每一次的過程中去除掉最初  $L$  個零列，直到獲得

$$\underline{\mathbf{Q}}_{M'-M} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \tilde{r}(0) \quad (3.20)$$

(3.20) 與 (3.17) 相類似，維度  $L(M+1) \times 1$  的向量  $\underline{\mathbf{Q}}(M'-M)$  亦是估測所得的一組階數為  $M$  的通道參數，並與真實的通道參數相差一未知的純量倍數  $\tilde{r}(0)$ 。

在盲道判別問題中，如果通道階數  $M$  未知，單純的子空間方法無法處理，轉而先行假設通道階數  $M'$ ， $M' > M$ ，以  $M'$  來取代  $M$ ，稱為過估測。由 (3.11) 與 (3.13)，得知 (3.11) 的  $\mathbf{Q}$  擁有  $M' - M + 1$  維的零空間  $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{M'-M}]$ ，真實的通道參數  $\mathbf{h}(0), \dots, \mathbf{h}(M)$  便隱匿在行向量  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{M'-M}$  的特殊結構中。由於矩陣  $\mathbf{Q}_0$  每一個行向量的最末或最初  $L$  個元素所形成的維

度  $L \times 1$  向量彼此間具有比例關係，將矩陣  $\mathbf{Q}_0$  最後一個行向量  $\mathbf{q}_{M'-M}$  取出，利用向量  $\mathbf{q}_{M'-M}$  與其餘的向量  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{M'-M-1}$  做行運算，使得  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{M'-M-1}$  最末或最初  $L$  列元素皆為零，並將最末或最初  $L$  個零列移除，得到一個維度  $LM' \times (M' - M)$  的新矩陣，這個新矩陣的每一個行向量最末或最初  $L$  個元素所形成的向量間亦存在比例關係，重複上述的步驟  $M' - M$  次，每重複一次，維度即減少一行及  $L$  列，直到求得一個維度  $L(M + 1) \times 1$  的向量，即為估測所得之  $M$  階的通道參數，成功的將過估測階數  $M'$  還原成真實的階數  $M$ 。

### 3.4 還原通道階數 $M$ 方法的變形

考慮階數過估測  $M'$  與  $M$  相差較大的情況，若利用先前提及的方法，一次僅消去  $L$  列，要達到將過估測階數  $M'$  還原成  $M$  的目標，勢必要經過多次重複對消的步驟。在實際的例子中，對消的過程必定會有誤差產生，多次重複對消步驟的做法定會造成誤差的持續累積，可能會導致估測所得之通道參數過度偏離真實通道參數的狀況。

仔細想想，由矩陣  $\mathbf{Q}_0$  開始，利用最後一個行向量作行運算，將其餘向量的最末  $L$  個元素削減為零，並拿掉最末  $L$  的零列，得到新矩陣  $\mathbf{Q}_1$ ，重複  $M' - M$  次這樣的步驟，直到求得  $\mathbf{Q}_{M'-M} = [\mathbf{h}^T(0) \cdots \mathbf{h}^T(M)]^T \tilde{\mathbf{r}}(0)$ ，上述的過程可以表示為

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_0(0) & \mathbf{q}_1(0) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(0) \\ \mathbf{q}_0(1) & \mathbf{q}_1(1) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{q}_0(M') & \mathbf{q}_1(M') & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(M') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{M'-M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(M) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \alpha \quad (3.21)$$

也就是說，存在一組係數  $\gamma = [\gamma_0 \cdots \gamma_{M'-M}]^T$ ，使得  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{M'-M}$  最末  $L(M' - M)$  個元素形成的向量經線性組合後為零向量

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_0(M+1) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(M+1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{q}_0(M') & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(M') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{M'-M} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

由 (3.22) 求解出該組係數  $\gamma$ ，即可得一組階數為  $M$  的通道參數估測如下

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_0(0) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{q}_0(M) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{M'-M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \cdot \alpha \quad (3.23)$$

如何利用 (3.22) 來求解  $\gamma = [\gamma_0 \cdots \gamma_{M'-M}]^T$ ，令

$$\mathbf{Q}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0(M+1) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(M+1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{q}_0(M') & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(M') \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_T \gamma = \mathbf{0} \Rightarrow \gamma^H \mathbf{Q}_T^H \mathbf{Q}_T \gamma = 0$$

矩陣  $\mathbf{Q}_T^H \mathbf{Q}_T$  存在一個特徵值為零，其所對應的特徵向量即可當作該組係數  $\gamma$ ，滿足 (3.22)。

同理，由  $\mathbf{Q}_0$  開始，經由  $M' - M$  次重複將最初  $L$  列削減為零並移除的過程可以表示為

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_0(0) & \mathbf{q}_1(0) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(0) \\ \mathbf{q}_0(1) & \mathbf{q}_1(1) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{q}_0(M') & \mathbf{q}_1(M') & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(M') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_0 \\ \underline{\gamma}_1 \\ \vdots \\ \underline{\gamma}_{M'-M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \cdot \alpha \quad (3.24)$$

所以，同樣存在一組係數  $\underline{\gamma} = [\underline{\gamma}_0 \cdots \underline{\gamma}_{M'-M}]^T$ ，使得  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{M'-M}$  最初  $L(M' - M)$  個元素所形成的向量經線性組合後為  $\mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_0(0) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{q}_0(M' - M - 1) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(M' - M - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_0 \\ \vdots \\ \underline{\gamma}_{M'-M} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

由 (3.25) 求得此組係數  $\underline{\gamma}$ ，通道參數可估測如下

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_0(M' - M) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(M' - M) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{q}_0(M') & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(M') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_0 \\ \vdots \\ \underline{\gamma}_{M'-M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \cdot \underline{\alpha} \quad (3.26)$$

同樣的，利用 (3.25) 求解  $\underline{\gamma} = [\underline{\gamma}_0 \cdots \underline{\gamma}_{M'-M}]^T$ ，令

$$\mathbf{Q}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0(0) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{q}_0(M' - M - 1) & \cdots & \mathbf{q}_{M'-M}(M' - M - 1) \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{Q}_H \underline{\gamma} = \mathbf{0} \Rightarrow \underline{\gamma}^H \mathbf{Q}_H^H \mathbf{Q}_H \underline{\gamma} = 0$$

矩陣  $\mathbf{Q}_H^H \mathbf{Q}_H$  存在一個特徵值為零，其所對應的特徵向量即可當作該組係數  $\underline{\gamma}$ ，滿足 (3.25)。

使用 *SVD* 的方式來求解係數  $\gamma$  或  $\underline{\gamma}$ ，雖然 *SVD* 計算量大，再加上  $M'$  與  $M$  差距愈大的話，所需的計算量又會愈大，但是，由於僅需一次的計算流程就可以將階數由  $M'$  還原至  $M$ ，得到一組估測的通道參數，將可避免誤差被重複累積的情形發生，得到較準確的估測結果。





# 第四章 判斷通道參數估測結果正確性的方法

對於通道階數  $M$  未知的盲道判別問題，處理的方法已於第三章說明，其中，將過估測的階數  $M'$  還原至  $M$  的關鍵，在於 (3.11) 中矩陣  $\mathbf{Q}$  的零空間  $\mathbf{Q}_0$ ，在  $\mathbf{Q}_0$  維度決定的同時，通道階數  $M$  也連帶被決定。如果，所決定的  $\mathbf{Q}_0$  維度正確，將可以得到一組階數無誤的通道參數估測，但若  $\mathbf{Q}_0$  的維度判斷錯誤，會造成估測所得的通道階數與事實不符，即誤判斷的情況發生。

在理想狀況下，可輕易的由矩陣  $\mathbf{Q}$  得到其零空間  $\mathbf{Q}_0$ ，但在實際計算過程中，正確的決定  $\mathbf{Q}_0$  並不容易且十分關鍵，關乎最後估測結果的正確與否。所以，接下來將對如何判別  $\mathbf{Q}_0$  的正確性，亦即通道參數估測的正確性來討論。

## 4.1 通道的設定

給予一組已知的通道參數如下：

- 通道個數  $L = 4$
- 通道階數  $M = 4$
- 通道參數



$$\mathbf{h}_1 = [(-0.049, 0.359), (0.482, -0.569), (-0.556, 0.587), (1.0, 0.0), (-0.171, 0.061)]$$

$$\mathbf{h}_2 = [(0.443, -0.0364), (1.0, 0.0), (0.921, -0.194), (0.189, -0.208), (-0.087, -0.054)]$$

$$\mathbf{h}_3 = [(-0.211, -0.322), (-0.199, 0.918), (1.0, 0.0), (-0.284, -0.524), (0.136, -0.19)]$$

$$\mathbf{h}_4 = [(0.417, 0.030), (1.0, 0.0), (0.873, 0.145), (0.285, 0.309), (-0.049, 0.161)]$$

考慮一個白色輸入源 (**white source**)  $x(n)$ ，經過此通道並受到白色雜訊  $\mathbf{w}(n)$  的干擾，得到輸出  $\mathbf{y}(n)$ 。轉而站在輸出  $\mathbf{y}(n)$  的角度來看問題，假設通道個數  $L = 4$ ，通道參數  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{h}_4$  未

知,  $\mathbf{H1} \sim \mathbf{H4}$  成立, 如果通道階數  $M$  已知為 4, 可利用第二章闡述的子空間方法, 估測得一組通道參數, 與  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{h}_4$  相差一純量倍數。若通道階數  $M$  未知, 先行假設一個過估測階數  $M'$ ,  $M'$  必須大於  $M$ , 利用第三章的方法, 只要決定出正確  $\mathbf{Q}_0$  的維度, 就可將  $M'$  還原成  $M$ , 得到一組正確的通道參數估測, 至於, 如何判斷  $\mathbf{Q}_0$  維度是否正確呢? 以下將介紹兩種類別的判斷方法, 分別於 4.2 及 4.3 說明之。

## 4.2 判斷方法—第一類

根據 (3.14), 矩陣  $\mathbf{Q}_0$  內所有向量的最末  $L$  個元素所形成的向量與  $\mathbf{h}(M)$  成比例, 因此, 當  $\mathbf{Q}_0$  的維度決定正確時, 可得到一組通道參數估測  $\hat{\mathbf{H}} = [\hat{\mathbf{h}}^T(0) \cdots \hat{\mathbf{h}}^T(M)]^T$ ,  $\hat{\mathbf{h}}(M)$  與  $\mathbf{q}_0(M'), \dots, \mathbf{q}_{M'-M}(M')$  會存在比例關係 [7]。

假設選取一個估計零空間  $\hat{\mathbf{Q}}_0$ , 其維度為  $L(M'+1) \times b$ , 當  $b > M' - M + 1$ , 由於  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  的行向量個數過多, 導致重複過多次的行運算消滅步驟, 破壞了原有類似 (3.14) 的結構性, 所得的通道參數估測之階數會小於  $M$ , 且最末  $L$  個元素形成的向量與  $\mathbf{q}_0(M'), \dots, \mathbf{q}_{M'-M}(M')$  的比例關係不復存在。當  $b = M' - M + 1$ , 由  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  可解得一組通道參數估測, 階數為  $M$ , 且  $\hat{\mathbf{h}}(M)$  與  $\mathbf{q}_0(M'), \dots, \mathbf{q}_{M'-M}(M')$  兩兩成比例。而當  $b < M' - M + 1$  時,  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  的行向量個數不足, 估測而得通道的階數會大於  $M$ , 真實的通道參數藏於其中, 具有如下的結構

$$\hat{\mathbf{Q}}_{b-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \mathbf{h}(M) & \ddots & \mathbf{h}(0) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}(0) \\ \vdots \\ \tilde{r}(M' - M - b + 1) \end{bmatrix}$$

由於  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-1}$  的最末  $L$  的元素等於  $\mathbf{h}(M) \cdot \tilde{r}(M' - M - b + 1)$ , 又  $\mathbf{q}_0(M'), \dots, \mathbf{q}_{M'-M}(M')$  亦與  $\mathbf{h}(M)$  兩兩成比例, 所以比例關係依舊存在。綜合以上的討論, 將  $\mathbf{Q}_0$  維度正確性的判別方法整理、說明如下。

考慮一個盲道判別問題, 通道個數  $L$ , 通道階數  $M$  但未知, 使用過估測階數  $M'$  取代  $M$ , 得

到矩陣  $\mathbf{Q}$ ，其擁有  $M' - M + 1$  維的零空間，令為  $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{M'-M}]$ ，但是  $M$  未知，實際情況下無法確定  $\mathbf{Q}_0$  的維度。而在模擬過程中，加入雜訊影響的考慮，且相關矩陣  $\mathbf{R}_y$  無法準確得知，通常以估測值  $\hat{\mathbf{R}}_y = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \mathbf{Y}_N(n) \mathbf{Y}_N^H(n)$  來近似，所以，並無法得到  $\mathbf{Q}$  擁有  $M' - M + 1$  個特徵值為零的理想結果，導致了決定矩陣  $\mathbf{Q}$  的零空間  $\mathbf{Q}_0$  的不確定性。接著，由選取矩陣  $\mathbf{Q}$  的零空間開始，驗證正確與否，直到解得一組階數  $M$  通道參數估測的過程，分為四個步驟

步驟一：將矩陣  $\mathbf{Q}$  的特徵值由小到大排列，找到第  $b + 1$  個特徵值明顯大於前面  $b$  個特徵值，顯然第  $b + 1$  個特徵值並非對應零空間的特徵值， $b + 1 > M' - M + 1$ ，將前面  $b$  個特徵值所對應的特徵向量依序排列成爲矩陣，令爲矩陣  $\mathbf{Q}$  的估計零空間  $\hat{\mathbf{Q}}_0 = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{b-1}]$ ，經過  $b - 1$  次重複 (3.15) 與 (3.16)，並於每一次過程中拿掉最末  $L$  個零列，得到一維度  $L(M' - b + 2) \times 1$  的向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-1}$ ， $\hat{\mathbf{Q}}_{b-1} = [\hat{\mathbf{Q}}_{b-1}(0)^T \cdots \hat{\mathbf{Q}}_{b-1}(M' - b + 1)^T]^T$ 。

步驟二：令

$$\delta = \frac{\hat{\mathbf{Q}}_{b-1}(M' - b + 1)^H \mathbf{q}_0(M')}{\hat{\mathbf{Q}}_{b-1}(M' - b + 1)^H \hat{\mathbf{Q}}_{b-1}(M' - b + 1)} \quad (4.1)$$

$$E = \frac{|\mathbf{q}_0(M') - \hat{\mathbf{Q}}_{b-1}(M' - b + 1) \cdot \delta|}{|\mathbf{q}_0(M')|} \quad (4.2)$$

利用 (4.1) 及 (4.2) 來檢驗  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-1}(M' - b + 1)$  與  $\mathbf{q}_0(M')$  成比例與否。如果  $E$  趨近於零，則  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-1}(M' - b + 1)$  與  $\mathbf{q}_0(M')$  具比例關係，代表  $b = M' - M + 1$ ，行向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-1}$  即是一組階數爲  $M$  的通道參數估測，步驟停止。反之，若  $E$  不趨近零，則  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-1}(M' - b + 1)$  與  $\mathbf{q}_0(M')$  無比例關係，代表  $b > M' - M + 1$ ，繼續進行步驟三。

步驟三：將  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  的所有行向量中，相對應矩陣  $\mathbf{Q}$  之特徵值最大的那個向量拿掉，得到新的估計零空間  $\hat{\mathbf{Q}}_{0,-1} = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{b-2}]$ ，由  $\hat{\mathbf{Q}}_{0,-1}$  可解出一行向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-2}$ ，檢驗  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-2}$  最末  $L$  個元素形成之向量與  $\mathbf{q}_0(M')$  的比例關係，將 (4.1) 及 (4.2) 中  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-1}(M' - b + 1)$  用  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-2}$  最末  $L$  個元素取代，求  $E$ ，進行步驟四。

步驟四：若  $E$  趨近於零，則  $b - 1 = M' - M + 1$ ， $\hat{\mathbf{Q}}_{0,-1}$  是矩陣  $\mathbf{Q}$  的  $M' - M + 1$  維零空間，可解得一組階數為  $M$  的通道參數估測  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-2}$ ，步驟停止。倘若  $E$  不趨近零，重複步驟三，直到  $E$  趨近零時，步驟停止。假設步驟三重複第  $a$  次時，選取  $\hat{\mathbf{Q}}_{0,-a} = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{b-a-1}]$  為矩陣  $\mathbf{Q}$  的估計零空間，由  $\hat{\mathbf{Q}}_{0,-a}$  解得一行向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-a-1}$ ，得到  $E$  趨近於零的結果，則階數為  $M$  的通道參數估測正是行向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{b-a-1}$ 。

將上述的判別步驟定為判斷方法一。而對於過估測階數  $M'$  與  $M$  相差較大的情況，為了避免重複多次 (3.15) 與 (3.16) 的運算所造成的誤差累積，利用 (3.22) 與 (3.23) 來取代重複進行 (3.15) 與 (3.16) 運算的部分，將其定為判斷方法二。必須說明的是，在理想狀況下，利用 (3.22) 衍生出矩陣  $\mathbf{Q}_T^H \mathbf{Q}_T$ ，選擇矩陣  $\mathbf{Q}_T^H \mathbf{Q}_T$  等於零的特徵值所對應的特徵向量為係數  $\gamma$ ；然而，實際情況，矩陣  $\mathbf{Q}_T^H \mathbf{Q}_T$  應以估測值  $\hat{\mathbf{Q}}_T^H \hat{\mathbf{Q}}_T$  表示，而其特徵值並不會出現剛好等於零的值，應變的做法是選擇矩陣  $\hat{\mathbf{Q}}_T^H \hat{\mathbf{Q}}_T$  最接近零的特徵值所對應的特徵向量當作係數  $\hat{\gamma}$ 。

經由判斷方法一或判斷方法二的步驟，可對所決定的矩陣  $\mathbf{Q}$  的估計零空間作正確與否的判斷，如果正確，由所決定的估計零空間解得之行向量即是一組階數  $M$  的通道參數估測；如果不正確，將會一步一步往正確的零空間進行修正，最終得到一組  $M$  階的通道參數估測。

### 4.3 判斷方法—第二類

由於矩陣  $\mathbf{Q}$  的零空間  $\mathbf{Q}_0$  內的每一個行向量都具有 (3.14) 的結構，可經由 (3.15) 及 (3.16) 的行運算將最末  $L$  列消滅為零並去掉，重複多次上述的運算，直到解得一個行向量，此行向量即是一組估測的通道參數，與實際通道階數相差一純量倍數。相同，矩陣  $\mathbf{Q}_0$  亦可經由每次重複 (3.18) 及 (3.19) 的行運算將最初  $L$  列消去，直到解得一個行向量，亦為一組估測的通道參數，且與實際通道參數相差一純量倍數。

假設選取估計零空間  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  的維度  $L(M' + 1) \times b$ ，經重複  $b - 1$  次 (3.15) 與 (3.16) 的運算之後，得到一行向量，令為  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}$ ，經重複  $b - 1$  次 (3.18) 與 (3.19) 的運算後，亦得到一行向

量，令為  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}$ 。如果  $b = M' - M + 1$ ，則

$$\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \alpha_L, \quad \hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \alpha_U$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1} = \frac{\alpha_L}{\alpha_U} \hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}$$

所以，向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}$  與  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}$  平行，具比例關係。如果  $b > M' - M + 1$ ，會因為重複過多次的行運算，破壞了原有類似 (3.14) 的結構，向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}$  與  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}$  不平行，不具比例關係。而當  $b < M' - M + 1$  時

$$\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \mathbf{h}(M) & \ddots & \mathbf{h}(0) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}_L(0) \\ \vdots \\ \tilde{r}_L(M' - M - b + 1) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \mathbf{h}(M) & \ddots & \mathbf{h}(0) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \mathbf{h}(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}_U(0) \\ \vdots \\ \tilde{r}_U(M' - M - b + 1) \end{bmatrix}$$

由於  $\tilde{r}_L(0), \dots, \tilde{r}_L(M' - M - b + 1)$  與  $\tilde{r}_U(0), \dots, \tilde{r}_U(M' - M - b + 1)$  必定不會完全相同，向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}$  與  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}$  不平行，不具比例關係。

綜合以上三種情況的討論，如同 4.2 一樣，考慮一個盲道判別問題，通道個數  $L$ ，通道階數  $M$  但未知，假設過估測階數  $M'$ ，將通道參數估測結果正確與否的判斷方法，分步驟說明：

步驟一：將矩陣  $\mathbf{Q}$  的特徵值由小到大排列，找到第  $b + 1$  個特徵值明顯比前面  $b$  個特徵值大，顯然第  $b + 1$  個特徵值並非對應零空間的特徵值， $b + 1 > M' - M + 1$ ，將前面  $b$  個最小的特徵值對應的特徵向量依序排成矩陣，令為  $\mathbf{Q}$  的估計零空間  $\hat{\mathbf{Q}}_0 = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{b-1}]$ 。由  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  經過重複  $b - 1$  次 (3.15) 與 (3.16) 的運算後，得行向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}$ ，由  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  經過重複  $b - 1$  次 (3.18) 與 (3.19) 的運算後，得行向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}$ 。

步驟二：令

$$\delta = \frac{\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}^H \hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}}{\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}^H \hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}} \quad (4.3)$$

$$E = \frac{|\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1} - \hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1} \cdot \delta|}{|\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}|} \quad (4.4)$$

求  $E$ 。若  $E$  趨近於零，向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}$  與  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}$  相差一純量倍數， $b = M' - M + 1$ ，行向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}$  或  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}$  正是一組階數為  $M$  的通道參數估測，步驟停止。若  $E$  不趨近於零，則進行步驟三。

步驟三：將  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  最後一個行向量去掉，產生一個新的估計零空間，令為  $\hat{\mathbf{Q}}_{0,-1} = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{b-2}]$ ，矩陣  $\hat{\mathbf{Q}}_{0,-1}$  經過重複  $b - 2$  次 (3.15) 與 (3.16) 的運算後，得行向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-2}$ ，矩陣  $\hat{\mathbf{Q}}_{0,-1}$  經過重複  $b - 2$  次 (3.18) 與 (3.19) 的運算後，得行向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-2}$ ，把 (4.3) 與 (4.4) 的  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}$  與  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}$  用  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-2}$  與  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-2}$  取代，求  $E$ 。

步驟四：如果  $E$  趨近於零，則  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-2}$  或  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-2}$  正是一組階數為  $M$  的通道參數估測，步驟停止。如果  $E$  不趨近於零，重複步驟三，直到求得  $E$  趨近於零的結果，步驟停止。假設步驟三重複第  $a$  次時，矩陣  $\mathbf{Q}$  的估計零空間  $\hat{\mathbf{Q}}_{0,-a} = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{b-a-1}]$ ，可解得行向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-a-1}$  與  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-a-1}$ ，將 (4.3) 與 (4.4) 的  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}$  與  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}$  用  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-a-1}$  與  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-a-1}$  取代，得到  $E$  趨近於零的結果，則  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-a-1}$  或  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-a-1}$  正是一組階數為  $M$  的通道參數估測。

將上述的步驟定為判斷方法三。而對於過估測階數  $M'$  與  $M$  相差較大的情況，為了避免誤差的重複累積，利用 (3.22) 與 (3.23) 來取代重複進行 (3.15) 與 (3.16) 的運算，利用 (3.25) 與 (3.26) 取代重複進行 (3.18) 與 (3.19) 的運算，將其定為判斷方法四。

同樣的，經由判斷方法三或判斷方法四的步驟，亦可正確的決定出矩陣  $\mathbf{Q}$  的零空間，得到一組階數為  $M$  的通道參數估測。



## 第五章 模擬結果

利用 4.1 通道個數  $L = 4$ ，通道階數  $M = 4$  的例子，給予一白色輸入源經過此通道，並考慮受到白色雜訊的影響，得到輸出訊號。在假設階數未知的情況下，令過估測階數  $M'$ ， $M' > M$ ， $N > M'$ ，由輸出訊號開始進行盲道判別動作的模擬。模擬的重點在於比較估測階數正確與估測階數不正確時的差異，目的在於驗證 4.2 與 4.3 的判斷方法，是否真能確保在通道參數估測過程中，通道階數可以由  $M'$  還原至  $M$ ，得到一組階數無誤的估測結果。

模擬過程中，輸出  $\mathbf{y}(n)$  的相關矩陣  $\mathbf{R}_y$  是用  $\hat{\mathbf{R}}_y = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \mathbf{Y}_N^H(n) \mathbf{Y}_N(n)$  來近似， $T$  愈大，代表所包含的資料量愈多， $\hat{\mathbf{R}}_y$  會愈近似  $\mathbf{R}_y$ ，估測結果會愈準確，但相對的所需計算量會愈大。再者，雜訊的大小，亦會對模擬結果造成影響，訊號雜訊比 (signal to noise ratio, SNR) 代表訊號相對於雜訊的比值，訊號雜訊比愈大，雜訊造成的誤差程度愈小，反之，訊號雜訊比愈小，雜訊會造成愈大程度的誤差。將  $SNR$  定義如下 [4]

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{E[\|\mathbf{Y}_N(n)\|^2]}{E[\|\mathbf{W}_N(n)\|^2]}$$

以下，以表格型式列出  $T = 500$  與  $T = 1000$  分別對應  $SNR$  值  $10dB$ ， $20dB$  和  $30dB$ ，對於不同的過估測階數  $M'$ ，以及所選取的矩陣  $\mathbf{Q}$  的估計零空間維度變動情形下的模擬結果。表格中的第一列，代表不同的過估測階數  $M'$ ，而第一行的  $+4 \sim -4$ ，代表的是選取的估計零空間的維度與  $M' - M + 1$  的差值，令為  $d$ ，而其餘的元素，正是對於各種不同條件下所求得的  $E$  值。

## 5.1 判斷方法一的模擬結果

d	M'	5	6	7	8	9
+4		0.95989	0.99413	0.98172	0.92818	0.95399
+3		0.97421	0.89375	0.93246	0.96991	0.9579
+2		0.61342	0.74359	0.77083	0.78183	0.7154
+1		0.31243	0.26924	0.60082	0.6859	0.75354
0		0.045311	0.056013	0.080231	0.09385	0.11492
-1			0.055935	0.072733	0.089704	0.098017
-2				0.056537	0.11241	0.13193
-3					0.054014	0.10549
-4						0.057225

表5.1.1  $N = 10, T = 500, SNR = 10dB$

d	M'	5	6	7	8	9
+4		0.9987	0.99361	0.98769	0.96609	0.95127
+3		0.95275	0.96764	0.99093	0.96593	0.96549
+2		0.52685	0.72243	0.68994	0.72045	0.70994
+1		0.27451	0.22462	0.6669	0.90613	0.9248
0		0.0093657	0.014315	0.01794	0.02462	0.028609
-1			0.012204	0.022559	0.027079	0.030599
-2				0.014385	0.031483	0.04645
-3					0.016838	0.040724
-4						0.016969

表5.1.2  $N = 10, T = 500, SNR = 20dB$

d	M'	5	6	7	8	9
+4		0.99894	0.99423	0.98916	0.97742	0.95665
+3		0.93377	0.95365	0.9686	0.97531	0.97039
+2		0.4943	0.76768	0.74885	0.65541	0.7249
+1		0.27464	0.22166	0.65358	0.94722	0.9492
0		0.0030337	0.0052483	0.0062292	0.0078557	0.0090741
-1			0.0038638	0.0077332	0.0084259	0.0099575
-2				0.0051144	0.010383	0.013401
-3					0.0051591	0.01374
-4						0.0080428

表5.1.3  $N = 10, T = 500, SNR = 30dB$



d	M'	5	6	7	8	9
+4		0.99429	0.99589	0.9599	0.9477	0.96087
+3		0.99038	0.91678	0.96849	0.96544	0.9728
+2		0.54823	0.8068	0.70183	0.72983	0.74584
+1		0.31114	0.25815	0.56367	0.78886	0.80573
0		0.025359	0.038633	0.053065	0.060381	0.081314
-1			0.028583	0.053618	0.061528	0.063297
-2				0.034779	0.082982	0.10832
-3					0.040514	0.087299
-4						0.053526

表5.1.4  $N = 10, T = 1000, SNR = 10dB$

d	M'	5	6	7	8	9
+4		0.99873	0.99753	0.99214	0.97666	0.95055
+3		0.94444	0.9612	0.99001	0.95213	0.97436
+2		0.48595	0.81136	0.6741	0.7239	0.72973
+1		0.27392	0.26081	0.6337	0.91651	0.90895
0		0.0073328	0.011246	0.012819	0.017421	0.018162
-1			0.0085557	0.01554	0.018976	0.022084
-2				0.0090582	0.025197	0.030549
-3					0.013355	0.025925
-4						0.017666

表5.1.5  $N = 10, T = 1000, SNR = 20dB$

d	M'	5	6	7	8	9
+4		0.99827	0.99587	0.99139	0.96287	0.96623
+3		0.93424	0.95827	0.98637	0.94411	0.97316
+2		0.53538	0.76488	0.78893	0.69216	0.74748
+1		0.25446	0.2273	0.66095	0.92553	0.9294
0		0.0022046	0.0038161	0.003862	0.005564	0.0063724
-1			0.0027165	0.0050064	0.0057501	0.0072258
-2				0.0029323	0.0077683	0.0092865
-3					0.0036974	0.0080778
-4						0.0042852

表5.1.6  $N = 10, T = 1000, SNR = 30dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.96311	0.94848	0.95058	0.95783	0.95762
+3		0.93337	0.94763	0.95381	0.8809	0.91114
+2		0.7953	0.77666	0.83224	0.79294	0.73563
+1		0.66512	0.71599	0.64085	0.7368	0.66774
0		0.18682	0.28194	0.33017	0.37042	0.34295
-1		0.11579	0.12116	0.1466	0.16706	0.23468
-2		0.1612	0.16388	0.18968	0.16395	0.22245
-3		0.1661	0.17493	0.23308	0.19346	0.235
-4		0.12877	0.16149	0.22134	0.1937	0.23139

表5.1.7  $N = 15, T = 500, SNR = 10dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.97318	0.9586	0.96123	0.96671	0.96271
+3		0.96009	0.95936	0.94161	0.96054	0.93416
+2		0.59855	0.70964	0.75203	0.6763	0.73927
+1		0.91063	0.89795	0.91791	0.88291	0.88464
0		0.026369	0.036518	0.094523	0.27482	0.26908
-1		0.034008	0.034693	0.039333	0.045766	0.049095
-2		0.046781	0.049917	0.06545	0.078476	0.079319
-3		0.036854	0.070635	0.087979	0.11829	0.096031
-4		0.037613	0.076385	0.052692	0.12141	0.10936

表5.1.8  $N = 15, T = 500, SNR = 20dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.96402	0.96836	0.96626	0.94787	0.95944
+3		0.9787	0.9477	0.95504	0.94106	0.95583
+2		0.65696	0.66124	0.73149	0.63869	0.80524
+1		0.94973	0.91005	0.90265	0.90805	0.89776
0		0.0086522	0.0094914	0.011937	0.021491	0.034677
-1		0.010476	0.010085	0.013485	0.013975	0.014907
-2		0.018612	0.020232	0.017257	0.017899	0.023352
-3		0.014593	0.029469	0.029879	0.031455	0.041523
-4		0.010426	0.014776	0.018545	0.037245	0.059038

表5.1.9  $N = 15, T = 500, SNR = 30dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.94356	0.96644	0.95509	0.95171	0.96507
+3		0.95039	0.94887	0.94784	0.92157	0.92675
+2		0.69448	0.75515	0.71822	0.77549	0.69288
+1		0.79548	0.77357	0.80094	0.75169	0.77908
0		0.1087	0.22377	0.34242	0.42402	0.39297
-1		0.065322	0.078366	0.081494	0.10965	0.14064
-2		0.13924	0.13421	0.12198	0.16083	0.14218
-3		0.073697	0.14132	0.14441	0.20517	0.16788
-4		0.082106	0.10131	0.14506	0.1607	0.18467

表5.1.10  $N = 15, T = 1000, SNR = 10dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.95551	0.94622	0.96607	0.96085	0.96
+3		0.9752	0.94838	0.94751	0.94765	0.95457
+2		0.74135	0.7101	0.67155	0.70337	0.78326
+1		0.89987	0.90979	0.88058	0.89443	0.88813
0		0.021387	0.024357	0.032602	0.095815	0.25487
-1		0.021615	0.024275	0.027708	0.030993	0.036948
-2		0.032713	0.040001	0.038283	0.051184	0.060437
-3		0.031617	0.039873	0.082971	0.088069	0.076563
-4		0.025242	0.044483	0.048648	0.076933	0.067934

表5.1.11  $N = 15, T = 1000, SNR = 20dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.94288	0.9581	0.9552	0.94147	0.96751
+3		0.94562	0.94735	0.96622	0.944	0.94963
+2		0.64602	0.73977	0.7584	0.66963	0.69134
+1		0.93638	0.91664	0.91104	0.89798	0.90633
0		0.0064439	0.0067744	0.0076128	0.009835	0.024874
-1		0.0063447	0.0080632	0.0087294	0.010706	0.011892
-2		0.0095593	0.011276	0.015694	0.015769	0.015464
-3		0.014457	0.014617	0.02167	0.021043	0.027429
-4		0.0079224	0.01193	0.013818	0.024695	0.023673

表5.1.12  $N = 15, T = 1000, SNR = 30dB$

## 5.2 判斷方法二的模擬結果

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.95988	0.94957	0.962	0.95314	0.95727
+3		0.97548	0.94771	0.94039	0.91176	0.91852
+2		0.74992	0.75668	0.75766	0.75152	0.73855
+1		0.08711	0.091767	0.086092	0.12341	0.10628
0		0.068486	0.090722	0.089057	0.1053	0.11019
-1		0.082097	0.08884	0.099893	0.10271	0.1081
-2		0.099893	0.15956	0.11487	0.14132	0.15752
-3		0.096566	0.17128	0.16243	0.14519	0.14422
-4		0.12055	0.18635	0.12993	0.15697	0.21107

表5.1.13  $N = 15, T = 500, SNR = 10dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.95007	0.94663	0.94473	0.94183	0.94199
+3		0.98526	0.97891	0.96845	0.95901	0.94704
+2		0.78577	0.78597	0.78252	0.78418	0.78399
+1		0.030558	0.034477	0.036477	0.033038	0.034555
0		0.019596	0.02535	0.030206	0.02817	0.032353
-1		0.020205	0.027526	0.026967	0.028494	0.029214
-2		0.030123	0.034919	0.036723	0.04228	0.048965
-3		0.038038	0.058502	0.045841	0.064064	0.070657
-4		0.04003	0.039876	0.048263	0.068457	0.076901

表5.1.14  $N = 15, T = 500, SNR = 20dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.94842	0.94553	0.94449	0.94293	0.94088
+3		0.98901	0.98223	0.9698	0.95488	0.94363
+2		0.78872	0.78745	0.78816	0.78565	0.7874
+1		0.023298	0.023179	0.020995	0.021543	0.025676
0		0.0067948	0.0076891	0.0080446	0.010041	0.0098445
-1		0.0076252	0.007389	0.011105	0.0081648	0.0094138
-2		0.01027	0.011018	0.014208	0.012744	0.013558
-3		0.019801	0.012143	0.015696	0.019174	0.012066
-4		0.010414	0.0097429	0.011694	0.021588	0.020507

表5.1.15  $N = 15, T = 500, SNR = 30dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.95327	0.95142	0.94867	0.95048	0.94712
+3		0.97612	0.95548	0.94237	0.93513	0.93346
+2		0.7699	0.76318	0.76672	0.76776	0.76819
+1		0.06242	0.065912	0.071453	0.069298	0.076063
0		0.048155	0.055496	0.065977	0.071611	0.076655
-1		0.046659	0.055326	0.055885	0.06981	0.075294
-2		0.085613	0.099645	0.087468	0.099729	0.10437
-3		0.13989	0.09795	0.12398	0.13281	0.099318
-4		0.073546	0.09306	0.10557	0.13933	0.13447

表5.1.16  $N = 15, T = 1000, SNR = 10dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.94865	0.94613	0.94322	0.94397	0.94339
+3		0.9878	0.98147	0.97139	0.95528	0.945
+2		0.78607	0.78709	0.78567	0.78637	0.78446
+1		0.028276	0.026696	0.027346	0.026834	0.031817
0		0.019976	0.019847	0.018659	0.021053	0.023222
-1		0.016261	0.015719	0.020016	0.020524	0.025892
-2		0.023259	0.027144	0.028362	0.028162	0.030168
-3		0.029416	0.034903	0.046735	0.036508	0.040687
-4		0.033854	0.033984	0.029784	0.055415	0.059742

表5.1.17  $N = 15, T = 1000, SNR = 20dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.94857	0.94578	0.94466	0.94513	0.94224
+3		0.98761	0.98044	0.97177	0.96195	0.94363
+2		0.7884	0.78774	0.78776	0.7875	0.78802
+1		0.023387	0.020635	0.01966	0.022046	0.02166
0		0.0049324	0.0057077	0.006425	0.006139	0.0059645
-1		0.0049023	0.0055715	0.0063288	0.0068057	0.0071203
-2		0.0074079	0.0079894	0.0077516	0.010222	0.008342
-3		0.007869	0.010851	0.012188	0.011294	0.015925
-4		0.0085786	0.0086014	0.016143	0.015309	0.015143

表5.1.18  $N = 15, T = 1000, SNR = 30dB$

d	M'	15	16	17	18	19
+4		0.96281	0.96323	0.95545	0.95919	0.95197
+3		0.84545	0.84395	0.83051	0.78434	0.82553
+2		0.74255	0.73882	0.74134	0.73933	0.73901
+1		0.10439	0.094031	0.10712	0.10941	0.11875
0		0.12692	0.11186	0.11568	0.10042	0.12672
-1		0.10305	0.10396	0.088813	0.13318	0.11082
-2		0.12944	0.12632	0.12407	0.13485	0.15219
-3		0.12711	0.14504	0.17116	0.17906	0.14443
-4		0.15013	0.16539	0.19607	0.19268	0.17856

表5.1.19  $N = 20, T = 500, SNR = 10dB$

d	M'	15	16	17	18	19
+4		0.94683	0.94714	0.94801	0.946	0.94639
+3		0.87294	0.86888	0.85972	0.86139	0.8543
+2		0.78039	0.78188	0.78155	0.78141	0.77964
+1		0.036581	0.030656	0.043339	0.042264	0.039802
0		0.027578	0.02857	0.035093	0.031743	0.032629
-1		0.029295	0.031874	0.030463	0.0277	0.032569
-2		0.035601	0.03304	0.040879	0.039593	0.032995
-3		0.04398	0.046204	0.050596	0.057006	0.052894
-4		0.069093	0.070728	0.057206	0.073575	0.060567

表5.1.20  $N = 20, T = 500, SNR = 20dB$

d	M'	15	16	17	18	19
+4		0.94668	0.94615	0.94669	0.94404	0.94406
+3		0.87499	0.86925	0.86529	0.8585	0.86301
+2		0.7842	0.78448	0.78406	0.7833	0.78355
+1		0.017968	0.017133	0.018991	0.021938	0.021066
0		0.010584	0.012569	0.011004	0.010207	0.010891
-1		0.0077208	0.0092956	0.0078766	0.011324	0.012704
-2		0.011181	0.0123	0.01602	0.013024	0.012502
-3		0.026039	0.017016	0.017228	0.016234	0.019621
-4		0.022935	0.028511	0.023115	0.0234	0.025647

表5.1.21  $N = 20, T = 500, SNR = 30dB$

d	M'	15	16	17	18	19
+4		0.95459	0.94991	0.94627	0.9484	0.95087
+3		0.8521	0.85503	0.84477	0.85402	0.83364
+2		0.76839	0.75298	0.75972	0.75806	0.76012
+1		0.074133	0.077453	0.089788	0.080785	0.090645
0		0.06736	0.053448	0.070397	0.085746	0.089756
-1		0.06807	0.069387	0.080326	0.084972	0.096997
-2		0.085431	0.095652	0.10241	0.11999	0.10713
-3		0.12656	0.088754	0.11889	0.12317	0.11154
-4		0.1228	0.11447	0.1209	0.14873	0.13793

表5.1.22  $N = 20, T = 1000, SNR = 10dB$

d	M'	15	16	17	18	19
+4		0.94659	0.94595	0.94622	0.94719	0.94526
+3		0.8765	0.87016	0.86346	0.86001	0.85594
+2		0.78381	0.78227	0.78297	0.77862	0.78051
+1		0.023556	0.029039	0.026951	0.027796	0.031097
0		0.020669	0.020607	0.025017	0.020779	0.026123
-1		0.018651	0.021122	0.022075	0.028928	0.030159
-2		0.02654	0.026901	0.027347	0.02668	0.027356
-3		0.039754	0.037274	0.04791	0.042197	0.056219
-4		0.066284	0.049855	0.062408	0.043624	0.053021

表5.1.23  $N = 20, T = 1000, SNR = 20dB$

d	M'	15	16	17	18	19
+4		0.94569	0.94609	0.94618	0.94485	0.94472
+3		0.87608	0.87103	0.86035	0.86217	0.86248
+2		0.78416	0.78475	0.78348	0.78448	0.78466
+1		0.015411	0.016978	0.017218	0.01941	0.016989
0		0.0071508	0.0075155	0.005557	0.0072823	0.0082876
-1		0.0071865	0.0055209	0.0073819	0.0073069	0.0082829
-2		0.0063839	0.0081549	0.0087494	0.0089918	0.012347
-3		0.011909	0.012133	0.011827	0.013069	0.012329
-4		0.021463	0.017797	0.017783	0.017717	0.020431

表5.1.24  $N = 20, T = 1000, SNR = 30dB$



判斷方法一與判斷方法二的關鍵在於所選取的矩陣  $\mathbf{Q}$  的估計零空間維度小於或等於  $M' - M + 1$  時，估測而得的通道參數最末  $L$  個元素，應與零空間內任一向量最末  $L$  個元素具比例關係，即  $E$  趨近於零；而若所選取的估計零空間維度大於  $M' - M + 1$  時，其比例關係被破壞， $E$  不趨近於零。假設給予判斷  $E$  趨近零與否的臨界標準，若  $E \leq 0.03$ ，則說  $E$  趨近於零，若  $E \geq 0.1$ ，則說  $E$  不趨近於零。

依照上述的標準，經由判斷方法一的步驟，對於  $M = 4$ ,  $5 \leq M' \leq 10$ ,  $T = 500$ ,  $SNR = 20dB$  的情況，可如預期的作出正確的判別，若提高  $T$  值或  $SNR$  值，更能提高鑑別度。再者，比較判斷方法一與方法二在  $M'$  與  $M$  相差較大的狀況下的表現，觀察在  $M = 4$ ,  $M' = 13$  或  $14$ ,  $T = 1000$ ,  $SNR = 20dB$  的情況，方法一在矩陣  $\mathbf{Q}$  的零空間維度決定正確時，所求得的  $E$  值並不趨近於零，誤判斷情形發生，原因正是  $M'$  與  $M$  相差過大，重複過多次計算的過程，導致誤差一次次持續累積終至過大而造成誤判斷；而判斷方法二在零空間維度選擇正確時，求得的  $E$  值趨近於零，驗證了判斷方法二可避免誤差被重複累積的優點。

可是，仔細觀察由判斷方法二得到的結果數據，原本  $+1$  欄位內的  $E$  值應該是不趨近於零的，卻出現了接近零的數值，嚴重導致階數誤判斷的情形發生。至於誤判斷發生的原因，推測是矩陣  $\mathbf{Q}$  非對應零空間的特徵值中最小的一個與對應零空間的特徵值中最大的一個，其數值並無明顯的差距，若選取估計零空間維度  $M' - M + 2$ ，比實際零空間大一個維度，非對應零空間之最小特徵值對應的特徵向量會被包含在估計零空間中，經由 (3.22) 與 (3.23) 的運算，利用  $SVD$  求解係數  $\gamma$ ，該特徵向量與實際零空間的差異被分攤到係數  $\gamma$  的每一個元素，由於差異並不大的緣故，造成非對應零空間的最小特徵值被誤判為對應零空間的特徵值，因而導致零空間的誤判。

綜觀判斷方法一與判斷方法二的模擬結果，判斷方法一在  $M'$  與  $M$  差距 6 以下，給予  $T = 500$ ,  $SNR = 20dB$  的條件，就是個良好的判斷機制，若增加  $T$  值或提高  $SNR$ ，更能因為誤差的降低而適用於  $M'$  更高的情況，反之，在  $SNR = 10dB$  的情況，由於雜訊的干擾較大，所造成的誤差在計算過程中被重複累積，終至過大而失去判斷能力。至於，原本試圖用以處理  $M'$  與  $M$  相差較大情形的判斷方法二，因為零空間誤判的發生，導致判斷能力喪失的結果。



### 5.3 判斷方法三的模擬結果

d	M'	5	6	7	8	9
+4		0.22534	0.40471	0.43142	0.38664	0.34293
+3		0.82795	0.62138	0.62677	0.65228	0.5343
+2		0.62643	0.46461	0.61424	0.451	0.45295
+1		0.22559	0.24487	0.48346	0.63946	0.62806
0		0.25781	0.50588	0.63727	0.66849	0.68596
-1			0.13599	0.13046	0.13731	0.18605
-2				0.53495	0.49537	0.27968
-3					0.43552	0.52687
-4						0.49756

表 5.2.1  $N = 10, T = 500, SNR = 10dB$

d	M'	5	6	7	8	9
+4		0.36616	0.40735	0.23607	0.4823	0.38861
+3		0.62812	0.5103	0.5394	0.54097	0.434
+2		0.70052	0.58026	0.63817	0.48226	0.55788
+1		0.23659	0.22829	0.52434	0.9061	0.93762
0		0.033079	0.029705	0.038245	0.038922	0.03638
-1			0.055666	0.092281	0.076829	0.083158
-2				0.72384	0.3151	0.17192
-3					0.41119	0.51227
-4						0.46829

表 5.2.2  $N = 10, T = 500, SNR = 20dB$

d	M'	5	6	7	8	9
+4		0.48811	0.37327	0.23363	0.45172	0.34475
+3		0.66858	0.53033	0.41408	0.58236	0.44797
+2		0.73306	0.56	0.58247	0.53452	0.54318
+1		0.23624	0.23001	0.59073	0.94773	0.93252
0		0.005683	0.0062767	0.0068362	0.0070725	0.0077726
-1			0.056793	0.12196	0.070626	0.060407
-2				0.63637	0.22266	0.1956
-3					0.42384	0.55858
-4						0.38751

表 5.2.3  $N = 10, T = 500, SNR = 30dB$

d	M'	5	6	7	8	9
+4		0.14343	0.54139	0.501	0.46258	0.42224
+3		0.79655	0.69859	0.60537	0.63753	0.49888
+2		0.72425	0.51347	0.36947	0.50374	0.46841
+1		0.24706	0.23445	0.55141	0.78922	0.76598
0		0.09355	0.13907	0.46824	0.67799	0.78986
-1			0.086924	0.11761	0.086698	0.096066
-2				0.57862	0.3691	0.21164
-3					0.31501	0.53618
-4						0.48841

表5.2.4  $N = 10, T = 1000, SNR = 10dB$

d	M'	5	6	7	8	9
+4		0.37557	0.3685	0.22955	0.43648	0.34281
+3		0.6651	0.44622	0.5862	0.64227	0.42406
+2		0.67296	0.56601	0.53552	0.48953	0.59671
+1		0.25127	0.22715	0.5975	0.95652	0.94709
0		0.019006	0.021195	0.021967	0.02358	0.023442
-1			0.053013	0.092326	0.091802	0.076449
-2				0.82317	0.33763	0.21482
-3					0.25378	0.49825
-4						0.37267

表5.2.5  $N = 10, T = 1000, SNR = 20dB$

d	M'	5	6	7	8	9
+4		0.40507	0.373	0.19508	0.52676	0.36464
+3		0.60721	0.49854	0.51295	0.6203	0.49116
+2		0.73227	0.60357	0.67678	0.52674	0.55526
+1		0.23239	0.23263	0.58508	0.96639	0.96184
0		0.0040895	0.0044777	0.0046276	0.0050045	0.0050402
-1			0.044248	0.10903	0.06798	0.086893
-2				0.51169	0.26349	0.27137
-3					0.31754	0.46434
-4						0.45047

表5.2.6  $N = 10, T = 1000, SNR = 30dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.38514	0.44289	0.39045	0.42006	0.4383
+3		0.70208	0.68161	0.72658	0.68306	0.67269
+2		0.46382	0.23208	0.38549	0.37261	0.37151
+1		0.55687	0.55384	0.6006	0.55102	0.39425
0		0.67842	0.75731	0.82429	0.7605	0.64442
-1		0.62491	0.84255	0.81692	0.8626	0.82019
-2		0.24209	0.46397	0.60089	0.6635	0.71165
-3		0.52259	0.61635	0.69653	0.71377	0.66322
-4		0.3725	0.32365	0.45081	0.66291	0.63755

表5.2.7  $N = 15, T = 500, SNR = 10dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.45957	0.42778	0.39874	0.4265	0.42037
+3		0.65553	0.67959	0.70665	0.67965	0.7617
+2		0.59936	0.50295	0.5301	0.53856	0.40812
+1		0.93427	0.93307	0.89151	0.79399	0.78871
0		0.03417	0.041411	0.067736	0.31517	0.3292
-1		0.090076	0.073244	0.072494	0.10888	0.098889
-2		0.17553	0.24575	0.33441	0.29844	0.38641
-3		0.51886	0.69652	0.82468	0.49499	0.62629
-4		0.40277	0.35253	0.36655	0.62486	0.73797

表5.2.8  $N = 15, T = 500, SNR = 20dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.50082	0.54358	0.44789	0.39546	0.48627
+3		0.72793	0.72942	0.58407	0.67592	0.76274
+2		0.5865	0.48689	0.62052	0.44676	0.38482
+1		0.95982	0.97233	0.95861	0.94151	0.93032
0		0.0074561	0.008124	0.0089848	0.01294	0.015234
-1		0.063547	0.062511	0.042396	0.038034	0.043224
-2		0.20854	0.16311	0.13528	0.23499	0.38009
-3		0.70127	0.61053	0.48406	0.6139	0.48609
-4		0.48492	0.42397	0.56345	0.61206	0.65818

表5.2.9  $N = 15, T = 500, SNR = 30dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.45105	0.38997	0.4021	0.45772	0.41737
+3		0.63999	0.6992	0.68451	0.69076	0.6868
+2		0.46107	0.37246	0.3935	0.36583	0.51056
+1		0.69991	0.73245	0.62702	0.59936	0.59658
0		0.81383	0.86903	0.92013	0.89845	0.82149
-1		0.16622	0.3527	0.43217	0.65762	0.80963
-2		0.23046	0.25046	0.35789	0.47053	0.5814
-3		0.58183	0.43864	0.56467	0.6883	0.65267
-4		0.34626	0.47557	0.45152	0.65849	0.61639

表5.2.10  $N = 15, T = 1000, SNR = 10dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.53406	0.43846	0.39375	0.48437	0.41393
+3		0.74518	0.74186	0.62286	0.70932	0.70258
+2		0.39409	0.54768	0.40737	0.37995	0.53772
+1		0.95694	0.93371	0.92862	0.87403	0.83383
0		0.02602	0.026256	0.029118	0.046578	0.18283
-1		0.044011	0.053285	0.053944	0.074259	0.090944
-2		0.18173	0.13705	0.14754	0.21422	0.29666
-3		0.76911	0.74666	0.57239	0.58619	0.55881
-4		0.33987	0.3884	0.49048	0.52101	0.65976

表5.2.11  $N = 15, T = 1000, SNR = 20dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.44107	0.46789	0.44239	0.44622	0.3927
+3		0.84616	0.73591	0.61272	0.70465	0.69813
+2		0.54744	0.60127	0.51222	0.48901	0.55964
+1		0.97303	0.94419	0.91417	0.9284	0.91153
0		0.0048498	0.005204	0.0053294	0.0057758	0.0098878
-1		0.050075	0.052052	0.039761	0.070551	0.053546
-2		0.11609	0.13845	0.12407	0.13112	0.22831
-3		0.51342	0.46442	0.55122	0.46428	0.62601
-4		0.40875	0.47238	0.44094	0.60956	0.60117

表5.2.12  $N = 15, T = 1000, SNR = 30dB$

## 5.4 判斷方法四的模擬結果

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.12962	0.12695	0.11796	0.10942	0.1352
+3		0.30234	0.3155	0.27148	0.24609	0.23302
+2		0.054946	0.056472	0.065213	0.065333	0.066626
+1		0.039331	0.04382	0.043958	0.055214	0.04979
0		0.067299	0.090978	0.12608	0.22368	0.27951
-1		0.24551	0.29093	0.36398	0.2487	0.30767
-2		0.49923	0.40474	0.44535	0.40229	0.66819
-3		0.58667	0.56335	0.64216	0.72435	0.65642
-4		0.39354	0.51277	0.63824	0.65842	0.63876

表5.2.13  $N = 15, T = 500, SNR = 10dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.16835	0.17081	0.18547	0.18358	0.2049
+3		0.56199	0.52502	0.50078	0.4398	0.38537
+2		0.049146	0.047711	0.047282	0.047599	0.046183
+1		0.029041	0.024587	0.02117	0.020999	0.02036
0		0.017386	0.016132	0.021104	0.019972	0.023983
-1		0.35774	0.2952	0.30133	0.38866	0.33772
-2		0.36264	0.41754	0.40424	0.31766	0.51007
-3		0.51215	0.47357	0.47882	0.55055	0.65208
-4		0.46511	0.60024	0.48262	0.60319	0.56031

表5.2.14  $N = 15, T = 500, SNR = 20dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.17928	0.18007	0.19004	0.1939	0.19776
+3		0.58161	0.54277	0.48624	0.45955	0.40274
+2		0.051783	0.050076	0.049237	0.049969	0.050081
+1		0.03144	0.027071	0.024572	0.023367	0.021641
0		0.0020906	0.0023284	0.0021723	0.0018755	0.0017852
-1		0.34748	0.34524	0.34108	0.33511	0.25573
-2		0.37428	0.32048	0.50843	0.52656	0.38859
-3		0.44235	0.41482	0.47821	0.44776	0.62072
-4		0.41798	0.53701	0.5443	0.58545	0.63716

表5.2.15  $N = 15, T = 500, SNR = 30dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.137	0.14387	0.15144	0.16152	0.17134
+3		0.4505	0.41069	0.37085	0.32795	0.27192
+2		0.040753	0.040975	0.044185	0.042957	0.042471
+1		0.02448	0.021652	0.026752	0.02666	0.033967
0		0.057295	0.062756	0.060515	0.040293	0.073567
-1		0.27036	0.27915	0.28882	0.32	0.27467
-2		0.38819	0.4556	0.40002	0.55239	0.54913
-3		0.47009	0.55326	0.65776	0.64288	0.6617
-4		0.32957	0.5521	0.53727	0.72186	0.721

表5.2.16  $N = 15, T = 1000, SNR = 10dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.16727	0.17433	0.19046	0.18823	0.19217
+3		0.58107	0.52584	0.48929	0.42526	0.40194
+2		0.051861	0.050068	0.051178	0.049702	0.048639
+1		0.031618	0.026229	0.023002	0.022497	0.021177
0		0.0090606	0.0088787	0.01076	0.0093219	0.010499
-1		0.32549	0.2804	0.33998	0.31011	0.28211
-2		0.29972	0.41751	0.45121	0.44719	0.37457
-3		0.44023	0.3891	0.43481	0.5685	0.55416
-4		0.31118	0.51256	0.57183	0.61597	0.58716

表5.2.17  $N = 15, T = 1000, SNR = 20dB$

d	M'	10	11	12	13	14
+4		0.17334	0.1776	0.18476	0.1955	0.18817
+3		0.58231	0.57069	0.49629	0.45675	0.4089
+2		0.054474	0.049792	0.049003	0.04968	0.050211
+1		0.032959	0.027719	0.025239	0.023251	0.022521
0		0.0012747	0.0010608	0.0010505	0.0010903	0.0010449
-1		0.32355	0.32131	0.32982	0.34906	0.31555
-2		0.44799	0.37593	0.56137	0.45855	0.42963
-3		0.46098	0.34519	0.39656	0.45599	0.45682
-4		0.35312	0.47747	0.56768	0.62258	0.60556

表5.2.18  $N = 15, T = 1000, SNR = 30dB$

d	M'	15	16	17	18	19
+4		0.08876	0.083226	0.093911	0.093572	0.093041
+3		0.099447	0.084632	0.096012	0.10263	0.082961
+2		0.091507	0.094876	0.10837	0.079211	0.10222
+1		0.079791	0.073732	0.079765	0.083836	0.087985
0		0.33654	0.37916	0.33681	0.42983	0.37838
-1		0.43849	0.34122	0.37155	0.36981	0.43264
-2		0.67395	0.63472	0.62811	0.57902	0.62886
-3		0.73812	0.74438	0.64685	0.71624	0.72516
-4		0.65974	0.73642	0.71875	0.78912	0.79052

表5.2.19  $N = 20, T = 500, SNR = 10dB$

d	M'	15	16	17	18	19
+4		0.13078	0.1339	0.13706	0.13299	0.13652
+3		0.12592	0.12501	0.12051	0.11133	0.11202
+2		0.035018	0.033947	0.034544	0.034736	0.035994
+1		0.01298	0.013392	0.013332	0.013793	0.014232
0		0.026355	0.025915	0.026514	0.029385	0.022337
-1		0.28818	0.32696	0.35429	0.33045	0.27678
-2		0.57014	0.4901	0.38002	0.48239	0.49959
-3		0.56099	0.5367	0.63832	0.68816	0.72789
-4		0.74222	0.74251	0.67321	0.70335	0.69444

表5.2.20  $N = 20, T = 500, SNR = 20dB$

d	M'	15	16	17	18	19
+4		0.13125	0.13666	0.14089	0.13676	0.14377
+3		0.15062	0.13986	0.12596	0.133	0.11311
+2		0.032201	0.032653	0.032432	0.034299	0.033815
+1		0.013564	0.012856	0.013343	0.014032	0.013531
0		0.0024615	0.0025713	0.0022019	0.0025056	0.0025296
-1		0.3737	0.2696	0.34838	0.22707	0.36002
-2		0.4576	0.39917	0.22983	0.39951	0.31831
-3		0.51201	0.46653	0.47609	0.55704	0.4369
-4		0.6712	0.52448	0.80193	0.67093	0.53797

表5.2.21  $N = 20, T = 500, SNR = 30dB$

d	M'	15	16	17	18	19
+4		0.10607	0.10355	0.10354	0.11118	0.10668
+3		0.082428	0.085815	0.076437	0.081596	0.081797
+2		0.060466	0.062102	0.059656	0.057566	0.057797
+1		0.044708	0.046804	0.045695	0.054788	0.043082
0		0.13605	0.18526	0.21277	0.20277	0.25253
-1		0.27917	0.32636	0.33915	0.36044	0.28824
-2		0.52739	0.651	0.57497	0.58278	0.59641
-3		0.70025	0.75031	0.74811	0.70146	0.76227
-4		0.65501	0.7302	0.7829	0.74449	0.74074

表5.2.22  $N = 20, T = 1000, SNR = 10dB$

d	M'	15	16	17	18	19
+4		0.12879	0.13819	0.14146	0.14067	0.13635
+3		0.14921	0.14035	0.1179	0.12366	0.1227
+2		0.031805	0.033393	0.033014	0.033967	0.035528
+1		0.013009	0.012997	0.013307	0.01355	0.013729
0		0.014442	0.012496	0.013978	0.012699	0.011428
-1		0.32404	0.34999	0.2842	0.34208	0.38149
-2		0.44345	0.58189	0.48642	0.26479	0.34187
-3		0.44535	0.61763	0.47476	0.57175	0.68427
-4		0.69152	0.73411	0.69813	0.7002	0.75023

表5.2.23  $N = 20, T = 1000, SNR = 20dB$

d	M'	15	16	17	18	19
+4		0.13283	0.13739	0.13165	0.14255	0.1384
+3		0.13593	0.13315	0.12498	0.12554	0.11073
+2		0.031581	0.032279	0.033874	0.034271	0.034057
+1		0.014001	0.013484	0.013529	0.013667	0.013903
0		0.001155	0.0011701	0.0012584	0.0011557	0.001111
-1		0.34751	0.33962	0.36852	0.35151	0.35067
-2		0.52019	0.48532	0.53268	0.30106	0.29087
-3		0.58041	0.54407	0.51385	0.50672	0.49223
-4		0.68198	0.65942	0.71974	0.74855	0.57962

表5.2.24  $N = 20, T = 1000, SNR = 30dB$



判斷方法三與判斷方法四的關鍵在於由所選取的矩陣  $\mathbf{Q}$  的零空間，經由(3.15) 與 (3.16) 以及 (3.18) 與 (3.19)，或是 (3.22) 與 (3.23) 以及 (3.25) 與 (3.26) 的運算，各求得一行向量，假若所選取的零空間維度剛好等於  $M' - M + 1$ ，由兩行向量求得的  $E$  值會趨近於零。相反的，若選取的零空間維度不等於  $M' - M + 1$ ，會得到不趨近於零的  $E$  值。

判斷方法三在判斷步驟中，如同判斷方法一需經過多次重複 (3.15) 與 (3.16) 的運算，得到一行向量，再加上必須多次重複 (3.18) 與 (3.19) 的運算，求得另一行向量，由這兩個行向量來計算  $E$  值，由於運算的次數相對變多，誤差被重複累積的情況當然愈加嚴重，所以，同樣不適用於  $M'$  與  $M$  相差較大的情況，且判別的效能會較判斷方法一差。

而由判斷方法四的模擬結果中發現，零空間誤判的情形依舊存在，而且更加嚴重。但考慮選取的估計零空間維度若小於  $M' - M + 1$ ，即表中  $-1 \sim -4$  的欄位，其求得的  $E$  值表現正常，不趨近於零，配合估計零空間維度等於  $M' - M + 1$  時得到  $E$  值趨近零的結果，利用這兩個不同情況下  $E$  值明顯的差異，即可作為一個良好的判斷機制，所以，將判斷方法四的判別步驟修改如下

步驟一：將矩陣  $\mathbf{Q}$  的特徵值由小到大排列，找到第  $c + 1$  個特徵值明顯大於前面  $c$  個，顯然的第  $c + 1$  個特徵值並非對應零空間的特徵值， $c + 1 > M' - M + 1$ ，選取一個介於 1 與  $c$  之間的整數  $b$ ， $1 < b \leq c$ ，將第 1 到第  $b$  個特徵值所對應的特徵向量依序排列成矩陣，令為矩陣  $\mathbf{Q}$  的估計零空間  $\hat{\mathbf{Q}}_0 = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{b-1}]$ ，透過 (3.22) 與 (3.23)，可由  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  求得一行向量，令為  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}$ ；透過 (3.25) 與 (3.26)，可由  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  求得一行向量，令為  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}$ 。

步驟二：令

$$\delta = \frac{\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}^H \hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}}{\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}^H \hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}} \quad (5.1)$$

$$E = \frac{|\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1} - \hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1} \cdot \delta|}{|\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}|} \quad (5.2)$$

求  $E$ 。若  $E$  趨近於零，則  $b \geq M' - M + 1$ ，回到步驟一，重新選取一個更小的整數作為新的  $b$  值，重新開始判別步驟。若  $E$  不趨近於零，則  $b$  可能小於  $M' - M + 1$ ，亦可能大於

$M' - M + 1$  , 進行步驟三。

步驟三：從矩陣  $\mathbf{Q}$  餘下的特徵值中再選取一個最接近零的特徵值，將其所對應的特徵向量與  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  合併，得到一個新的估計零空間  $\hat{\mathbf{Q}}_{0,1} = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{b-1} \mathbf{q}_b]$  , 利用 (3.22) 與 (3.23) 以及 (3.25) 與 (3.26), 由  $\hat{\mathbf{Q}}_{0,1}$  分別求得兩行向量, 令為  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b}$  與  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b}$  , 將 (5.1) 與 (5.2) 的  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b-1}$  和  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b-1}$  用  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b}$  和  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b}$  取代, 求  $E$  , 進行步驟四。

步驟四：如果  $E$  趨近零, 得知  $b < M' - M + 1$  ,  $b+1 = M' - M + 1$  , 行向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b}$  或  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b}$  是一組階數為  $M$  的通道參數估測, 步驟停止。如果  $E$  不趨近零, 重複步驟三, 直到求得  $E$  趨近零的結果, 步驟停止。假設步驟三重複第  $a$  次時, 矩陣  $\mathbf{Q}$  的估計零空間  $\hat{\mathbf{Q}}_{0,a} = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{b+a-1}]$  , 解得兩行向量  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b+a-1}$  與  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b+a-1}$  , 得到  $E$  趨近零的結果, 則  $\hat{\mathbf{Q}}_{L,b+a-1}$  或  $\hat{\mathbf{Q}}_{U,b+a-1}$  即是一組階數  $M$  的通道參數估測。假若發生估計零空間由  $\hat{\mathbf{Q}}_0 = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{b-1}]$  擴張至  $\hat{\mathbf{Q}}_{0,c-b} = [\mathbf{q}_0 \cdots \mathbf{q}_{c-1}]$  , 皆求得  $E$  不趨近零的情形, 代表  $b > M' - M + 1$  , 回到步驟一, 重新選取一個更小的整數作為新的  $b$  值, 重新進行判別步驟。



## 第六章 結論

綜合 [6]與 [7]的論述，提出了一套判別步驟，即判斷方法一，針對一個階數未知的盲道判別問題，只要假設一個大於實際階數的過估測階數，就能利用該套步驟，得到一組階數與實際相符的通道參數估測，與實際的通道參數相差一純量倍數。但該套步驟並不適用於過估測階數與實際階數相差較大的情形。所以，提出了另一套判別步驟，即判斷方法四，來解決過估測階數與實際階數不能相差太多的限制，雖然，付出了計算量增大的代價，卻成功的得到了良好的判斷機制。

然而，當過估測階數與實際階數相差愈大，在進行判別步驟的過程中，計算量的需求愈大，使得盲道判別問題在運算方面的負擔愈形加重，所以，如何能有效減少計算量並保有原來的判別機制，是值得繼續努力的方向。



## 參考文獻

- [1] E. Moulines, P. Duhamel, J. Cardoso, and S. Mayrargue, “Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 516-525, February 1995.
- [2] E. Serpedin and G. Giannakis, “A Simple Proof of a Known Blind Channel Identifiability Result,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, pp. 591-593, February 1999.
- [3] L. Tong, G. Xu, and T. Kailath, “Blind identification and equalization of multipath channels,” in *Proc. Int. Conf. Commun.*, pp. 1513-1517, June 1992.
- [4] L. Tong, G. Xu, and T. Kailath, “Fast blind equalization via antenna arrays,” in *Proc. ICASSP*, vol. 4, pp. 272-275, 1993.
- [5] Y. Li and Z. Ding, “Blind channel identification based on second order cyclostationary statistics,” in *Proc. ICASSP*, vol. 4, pp. 81-84, 1993.
- [6] K. Abed-Meraim, P. Loubaton, and E. Moulines, “A Subspace algorithm for certain blind identification problems,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 43, pp. 499-511, February 1997.
- [7] X. Li, and H. H. Fan, “Blind channel identification: Subspace tracking method without rank estimation,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, pp. 2372-2382, October 2001.

- [8] K. Abed-Meraim, Y. Hua, P. Loubaton and E. Moulines, “Subspace method for blind identification of multichannel FIR systems in noise field with unknown spatial covariance,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 4, pp. 135-137, May 1997.
- [9] T. Kailath, *Linear Systems*, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1980.
- [10] Z. Ding and Y. Li, *Blind equalization and identification*, Marcel Dekker, Inc. 2001.

