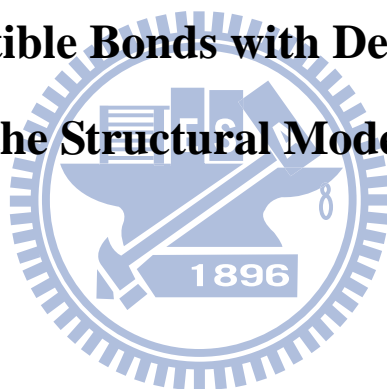


國立交通大學資訊管理研究所

碩士論文

評估信用風險之可轉換公司債評價模型：結構式模型

**Pricing Convertible Bonds with Default Risk under
the Structural Model**



研究生：蘇柏屹

指導教授：戴天時博士

評估信用風險之可轉換公司債評價模型：結構式模型

**Pricing Convertible Bonds with Default Risk under
the Structural Model**

研究生：蘇柏屹

Student : Po-Yi Su

指導教授：戴天時博士

Advisor : Dr. Tian-Shyr Dai



Submitted to Institute Information Management
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in
Information Management
July 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年七月

摘要

近年來討論 convertible bond pricing 的論文如 Hung & Wang(2002)和 Chamber & Lu(2007)，都使用樹狀結構模擬股價和短利的變化，而信用風險計算都是參照 Jarrow and Turnbull (1995)提出的縮減式模型(Reduced model)，股價高低並不影響公司違約機率。本研究考慮股價對違約機率的影響，以結構式信用風險模型 (Structural Model)與首次通過模型(First passage time model)評價違約機率，當股價越高，公司資產相對越高，而違約機率應該越低，使評價模型更貼近市場真實狀況。

本研究先探討股價變動、利率為常數的一因子模型，透過股價樹(CRR Tree)來模擬股價變動，建構可轉債評價模型之樹狀結構，透過倒推法(Backward Induction)，求出可轉債期初價格；再討論股價變動、利率變動的二因子模型，

透過利率樹(Hull-White Tree)來模擬利率變動，並將股價樹與利率樹結合成可轉債評價模型之樹狀結構，透過倒推法，求出可轉債期初價格。此外，本研究參考 Brenen & Schwartz (1980)提出的可轉換公司債評價模型，當債券持有人決定將手中可轉債轉換成股票後，因股權稀釋，股價應該向下做微幅修正，可轉換公司債價格也會隨之下降，使評價更精確。

關鍵字：可轉換公司債、股價、公司資產、違約機率、結構式模型、違約門檻、首次通過模型

Abstract

Recently, many convertible bond pricing papers, like Hung and Wang(2002) and Chamber and Lu(2007), use the tree structure to modeled the evolution of stock price and the short rate. The default risk is model by Jarrow and Turnbull (1995) default intensity model and the stock price process is irrelevant to the default probability. Indeed, the stock price (or equity value) provides a key information in measuring the credit risk under the structural model, and we try to build the relationship of stock price and default probability.

First,in our one factor model, we use CRR tree to model the stock price's process and assume that short rate is constant. The Black and Cox(1976) first passage model is used to model the default event. We price convertible bond by the backward induction on the resulting tree model. In our two factor model, we model the stock price and the interest rate by CRR tree and Hull-White tree, and merge these two tree structures and the default process into one tree model for pricing convertible bonds.

We also follow Brennan & Schwartz(1980) assumptions to adjust the stock price after convertible bonds converted into stock. At last, sensitivity analyses are given to analyze the effect of the related parameters like the stock price volatility.

Keyword : Convertible Bond ∙ Stock Price ∙ Firm Value ∙ Default Probability ∙ Structure Model ∙ Default Boundary ∙ First Passage Model

誌謝

首先要感謝我的指導教授戴天時老師，老師常常犧牲個人時間來教導我們，從升碩一暑假開始密集地 meeting，帶領我們這群新手慢慢踏入財務工程領域裡。從一開始報告的「企業金融的十二堂課」、「Matlab 初階與進階」到後來的「期貨與選擇權」等，無形之中漸漸地學了很多東西，也提升了自己的知識與能力。

老師縝密的邏輯思考能力總是能發現自己看不到的邏輯死角，本身在撰寫論文過程中有遇到疑難雜症也多虧了老師的幫忙才能順利解決；老師對學術研究的熱忱與執著的態度也深深影響我們，使我們在做研究時更抱著嚴謹的態度。此外老師對學生也非常平易近人，教學也非常認真，從老師身上真的學到很多知識與態度，真的很感謝老師這麼辛苦教導我們。

再來要感謝的是財工 lab 的朋友們。在寫論文的過程中，常常與可轉債三人組的 Maxey 和 Kevin 一起討論，有時遇到問題或是程式寫不出來，多虧了 Maxey 和 Kevin 的指點才能順利解決。還有小建、大炮、婷瑱，大家一起趕論文，一起討論，一起報告，一起紓解壓力等，在做論文過程中慢慢培養出革命情感，多虧了大家的幫忙才能順利完成論文。

最後要感謝我的父母和家人，有了你們的支持與關心，我才能夠完成碩士學業。

蘇柏屹 謹誌

國立交通大學資訊管理研究所

中華民國九十九年七月

符號說明

V_t ：在 t 時間點的公司資產價值

σ_{V_t} ：在 t 時間點公司資產為 V_t 時資產的波動度

D ：到期日 T 必須償還的負債

E_t ：在 t 時間點的股東權益

r_f ：無風險利率

$r_t(t)$ ：在 t 時間點的無風險短期利率

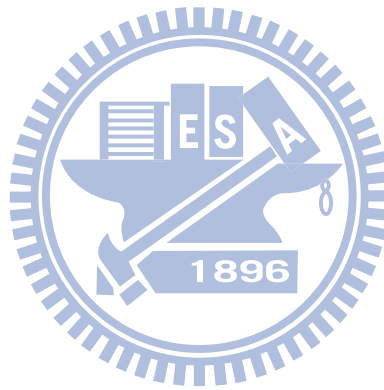
$r_t^*(t)$ ：在 t 時間點的有風險短期利率

σ_S ：股價波動度

σ_r ：利率波動度

γ ：違約門檻的變動率

ρ ：股價與利率相關係數



目錄

第一章	緒論	1
第一節	研究動機.....	1
第二節	研究架構.....	2
第二章	文獻回顧	3
第一節	樹狀模型的介紹.....	3
第二節	信用風險評價模型.....	7
第三節	Briys 公司債模型.....	10
第三章	研究方法	12
第一節	一因子模型違約機率計算.....	12
第二節	一因子評價模型.....	14
第三節	二因子模型違約機率計算.....	16
第四節	內生決定回收比率(Recovery Rate).....	17
第五節	二因子評價模型.....	18
第六節	調整轉換後股價.....	21
第四章	實驗結果與分析	23
第一節	一因子模型數值結果.....	23
第二節	一因子敏感度分析.....	28
第三節	二因子模型數值結果.....	32
第四節	二因子敏感度分析.....	57
第五章	結論與建議	61
第一節	研究結論.....	61
第二節	後續建議.....	61
	文獻參考	62

表目錄

表 3.1	六條分支機率調整方法.....	19
表 3.2	九條分支機率調整方法.....	20
表 4.1	最末期節點紀錄之資訊.....	23
表 4.2	中間期數節點紀錄之資訊.....	23
表 4.3	一因子模型各期節點公司資產.....	25
表 4.4	一因子模型各期節點公司資產波動度.....	25
表 4.5	一因子模型各期節點違約機率.....	25
表 4.6	一因子模型各期節點分支機率.....	26
表 4.7	一因子模型各期條件違約機率.....	26
表 4.8	一因子模型有風險利率.....	27
表 4.9	一因子模型可轉債價格.....	27
表 4.10	一因子模型無風險利率敏感度分析.....	28
表 4.11	一因子模型回收比率敏感度分析.....	29
表 4.12	一因子模型股價波動度敏感度分析.....	30
表 4.13	一因子模型期初股價敏感度分析.....	31
表 4.14	二因子模型 Case1 利率樹比較.....	35
表 4.15	二因子模型 Case1 各期節點公司資產.....	36
表 4.16	二因子模型 Case1 各期節點公司資產波動度.....	36
表 4.17	二因子模型 Case1 各期節點違約機率.....	37
表 4.18	二因子模型 Case1 各期節點回收比率.....	38
表 4.19	二因子模型 Case1 各期節點分支機率.....	38
表 4.20	二因子模型 Case1 每期違約機率比較.....	38
表 4.21	二因子模型 Case1 有風險利率.....	39
表 4.22	二因子模型 Case1 可轉債價格比較.....	39
表 4.23	二因子模型十元樹之利率樹.....	42
表 4.24	二因子模型十元樹之各期節點公司資產.....	43
表 4.25	二因子模型十元樹之各期節點公司資產波動度.....	43
表 4.26	二因子模型十元樹之各期節點違約機率.....	44
表 4.27	二因子模型十元樹之各節點回收比率.....	45
表 4.28	二因子模型十元樹之各節點分支機率.....	46
表 4.29	二因子模型十元樹每期違約機率比較.....	46
表 4.30	二因子模型十元樹有風險利率.....	47
表 4.31	二因子模型十元樹可轉債價格.....	47
表 4.32	二因子模型 Case2 利率樹比較.....	49
表 4.33	二因子模型 Case2 股價樹.....	49
表 4.34	二因子模型 Case2 各期節點公司資產.....	50

表 4.35	二因子模型 Case2 各期節點公司資產波動度.....	52
表 4.36	二因子模型 Case2 各期節點違約機率.....	53
表 4.37	二因子模型 Case2 各期節點回收比率.....	54
表 4.38	二因子模型 Case2 前三期節點分支機率.....	55
表 4.39	二因子模型 Case2 每期違約機率比較.....	55
表 4.40	二因子模型 Case2 有風險利率.....	56
表 4.41	二因子模型 Case2 前三期可轉債價格.....	56
表 4.42	二因子模型 Case2 可轉債價格比較.....	56
表 4.43	二因子模型 Case2 相關係數敏感度分析.....	57
表 4.44	二因子模型 Case2 利率波動度敏感度分析.....	58
表 4.45	二因子模型 Case2 股票波動度敏感度分析.....	59
表 4.46	二因子模型 Case2 期初股價敏感度分析.....	60



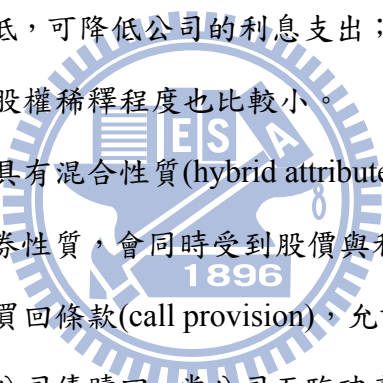
圖目錄

圖 2.1	CRR 股價樹.....	3
圖 2.2	BDT 利率樹.....	4
圖 2.3	Hull-White 利率樹變動機率	5
圖 2.4	Hull-White 利率樹	6
圖 2.5	CRR 股價樹機率爆掉示意圖.....	6
圖 2.6	Stair Tree.....	7
圖 2.7	Intensity Model 求違約機率	9
圖 3.1	股東權益樹.....	12
圖 3.2	公司資產樹.....	14
圖 3.3	違約機率與股價結合成樹狀結構.....	15
圖 3.4	可轉債違約時期望價值.....	17
圖 3.5	二因子模型七元樹.....	19
圖 3.6	二因子模型十元樹.....	21
圖 4.1	省略違約分支.....	24
圖 4.2	一因子模型樹狀結構範例.....	24
圖 4.3	一因子模型可轉債價格隨期數增加收斂.....	28
圖 4.4	一因子模型無風險利率敏感度分析.....	29
圖 4.5	一因子模型回收比率敏感度分析.....	30
圖 4.6	一因子模型股價波動度敏感度分析.....	31
圖 4.7	一因子模型期初股價敏感度分析.....	31
圖 4.8	省略違約分支.....	33
圖 4.9	二因子模型七元樹狀結構範例.....	34
圖 4.10	二因子模型 Case1 可轉債價格隨期數增加收斂.....	40
圖 4.11	省略違約分支.....	40
圖 4.12	二因子模型十元樹狀結構範例.....	41
圖 4.13	二因子模型 Case2 可轉債價格隨期數增加收斂.....	57
圖 4.14	二因子模型 Case2 相關係數敏感度分析.....	58
圖 4.15	二因子模型 Case2 利率波動度敏感度分析.....	58
圖 4.16	二因子模型 Case2 股票波動度敏感度分析.....	59
圖 4.17	二因子模型 Case2 期初股價敏感度分析.....	60

第一章 緒論

第一節 研究動機

可轉換公司債(Convertible Bond, CB)是一種同時具有股權與債權雙重性質的衍生性金融商品。它可以是一個選擇權，當股票上漲時，允許債券持有人，在特定期間裡，以事先約定好的轉換比例將手中債券轉成股票成為股東，分享股價上漲時的好處；它也可以是一個債券，當股價下跌時，債券持有人可享有定期債息。對於發行公司而言，多了一募集資金管道，如果直接發行新股，會產生股權稀釋及稅盾效果減少；直接發行公司債，則會造成利息支出過大。發行可轉換公司債，因債息較一般債券低，可降低公司的利息支出；此外債券持有人也不一定



會把可轉債轉成股票，對股權稀釋程度也比較小。

然而可轉換公司債因具有混合性質(hybrid attributes)，當股價高時會偏向股權性質，股價低時偏向債券性質，會同時受到股價與利率兩種因素影響。另外，可轉換公司債大多設有附買回條款(call provision)，允許發行公司在到期日前可依事先約定價格將可轉換公司債贖回。當公司面臨破產時，發行的可轉換公司債可能會有無法償還現象，所以評價時也必須要把信用風險考慮進去。由此可知，評價可轉換公司債是一項非常複雜的工作，其中包括股價因素、利率因素、信用風險等評價時都必須要考量進去。

Hung and Wang (2002)提出可轉換公司債評價方法，利用Jarrow and Turnbull (1995)計算信用風險，再將Cox, Ross, and Rubinstein的股價模型、Black-Derman-Toy的利率模型及信用風險結合成二元樹，利用後推法(Backward Induction)計算可轉換公司債的價值。Chambers & Lu (2007)延伸其模型，並考慮股價和利率的相關性對可轉換債評價的影響。

以上的模型均假設發行公司的股價高低並不影響公司發生違約的機率，同一

期股價高低其違約機率都是一樣，這並不符合一般市場常理，且之前模型有股價上漲機率為負的問題。本研究以結構式模型(Structural Model)出發，進而延伸到首次通過模型(First passage time model)，試圖改善前述模型缺點，用股價推論出公司資產價值決定違約機率。本研究亦採用Brennan & Schwartz(1977,1980)的設定，處理可轉債轉換後因股權稀釋而造成股價下跌的問題。

第二節 研究架構

本論文結構如下：

第二章 文獻回顧與探討

了解過去文獻中評價可轉換公司債信用風險的方法，主要包括結構式模型(Structural Model)與縮減式模型(Reduced Model)，並探討過去學者提出對可轉換公司債評價模型之發展。

第三章 研究方法

建構可轉換公司債評價模型。首先先討論一因子模型，透過每個節點中股票價格與股價波動度逆推出公司資產與公司資產波動度，再求出各節點股價相對應的違約機率，利用倒推法求出可轉債價格。再延伸到股價與利率兩因子的樹狀模型，並考慮可轉換公司債轉換前後對股價稀釋的影響，建立出接近市場價格的模型。

第四章 實證結果與分析

利用以建立模型，實際驗證市場資料，並對可能影響可轉換公司債價格之因子作敏感度分析，以解釋模型與真實市場誤差。

第五章 結論與建議

綜合本篇研究之結論，以及本研究中所面臨到的困難及待改進之處。

第二章 文獻回顧

第一節 樹狀模型的介紹

本節介紹在研究方法中會使用到的樹狀結構。主要有下列四種：

Cox-Ross-Rubinstein(1985)所提出的股價樹，Black-Derman-Toy(1986)所提出的利率樹，Hull and White(1994)所提出的利率樹，以及Dai(2009)提出的Stair tree。

• Cox-Ross-Rubinstein(1985)

根據Cox-Ross-Rubinstein(CRR)股價樹模型，假設時間 $t = 0$ 的股價為 S ，每期間隔 $\Delta t = T/n$ ，股價上漲幅度 $u = e^{\sigma_s \sqrt{\Delta t}}$ 、下跌幅度 $d = 1/u$ ，無風險利率 r_f 。

在風險中立機率測度下，股價上漲機率 $p = \frac{e^{r_f \Delta t} - d}{u - d}$ 。在 $t + \Delta t$ 時，股價有 p 的機率上漲到 S_u ， $1-p$ 的機率下跌到 S_d 。其股價樹如圖2.1所示：

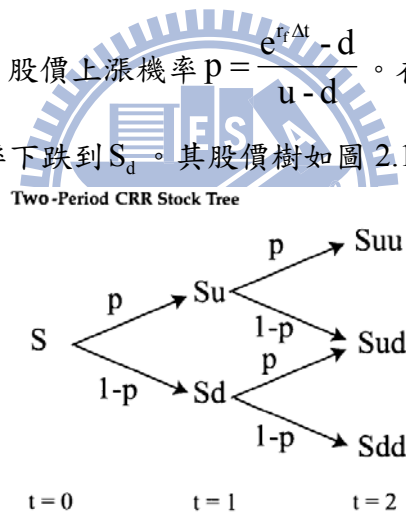


圖 2.1 CRR 股價樹

• Black-Derman-Toy(1986)

根據Black-Derman-Toy(BDT)利率樹模型，假設利率波動度 σ_r ，利率上漲機率為 $\pi = 1/2$ 。由市場上可觀察到無風險零息債券殖利率 $Z(t)$ ，而BDT tree同一期利率每往上一個節點均乘上 $e^{2\sigma_r \sqrt{\Delta t}}$ ，折現後之期望值要等於債券殖利率的關係，去求得BDT tree每個節點的利率，即：

$$\begin{aligned}
R_u &= R_d e^{2\sigma_r \sqrt{\Delta t}} \\
e^{-Z(\Delta t)\Delta t} &= e^{-R_0 \Delta t} \\
e^{-Z(2\Delta t)2\Delta t} &= e^{-R_0 \Delta t} (\pi e^{-R_u \Delta t} + (1-\pi) e^{-R_d \Delta t})
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

透過解聯立方程式(2.1.1)可以得到 R_d 與 σ_r 。其利率樹如圖2.2所示：

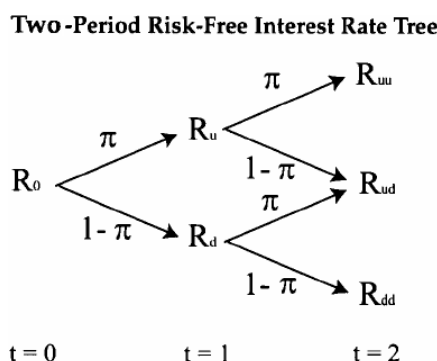


圖 2.2 BDT 利率樹

• **Hull and White(1994)**

根據Hull and White(1994)提出的Hull-White Model，其模型假設瞬時利率的隨機過程為

$$dr(t) = a(b(t) - r)dt + \sigma_r dz_r \quad \text{or} \quad dr(t) = (\theta(t) - ar)dt + \sigma_r dz_r \tag{2.1.2}$$

其中 a 為均數復迴歸率， σ_r 為利率的波動度，此二參數皆為固定常數； $b(t)$ 為利率的長期水準。

接著利用兩階段方法建立利率三元樹將連續型的Hull and White短期模型改為離散時間型(discrete time)的隨機過程，也就是將瞬間短期利率 r_t 轉換成模擬距到期日為 Δt 的零息利率 $R(t, t + \Delta t)$ ，其中 Δt 為利率樹每期時間的間隔，此零息利率的隨機過程為：

$$dR(t, t + \Delta t) = (\theta(t) + aR(t, t + \Delta t))dt + \sigma_r dz_r \tag{2.1.3}$$

第一階段

建立期初利率值為零， $\theta(t)$ 為零，並且對稱於 $R^*(t) = 0$ 的三元樹，此 $R^*(t)$ 的隨機過程為：

$$dR^*(t) = -aR^*(t)dt + \sigma_r dz_{R^*} \tag{2.1.4}$$

其中 $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$ 服從期望值為 $-aR^*(t)\Delta t$ ，變異數為 $\sigma_r\Delta t$ 的常態分配。

定義 $\Delta R^* = \sigma_r\sqrt{3\Delta t}$ 為利率樹的間距，任一節點 (i, j) 代表時間為 $i\Delta t$ ，利率 $R^*(t)$ 為的 $j\Delta R^*$ 節點，利率 $R^*(t)$ 在下一期上漲的機率為 P_u ，持平的機率為 P_m ，下降的機率為 P_d 。並設置利率上界 $\max_j = 0.184/(a\Delta t)$ 和利率下界 $\min_j = -0.184/(a\Delta t)$ ，當利率碰觸到利率下界時，其下期的變動走勢為圖2.3 (b)；當利率碰觸到利率上界時，其下期的變動走勢為圖2.3 (c)；當利率未碰觸到上界與下界時，其下期的變動走勢為圖2.3 (a)，此項設定使利率表視出有均數回歸 (mean reversion) 的特性。再利用一階與二階常態分配的動差函數和機率總和為一的三個方程式解出 P_u 、 P_m 、 P_d 的機率值。

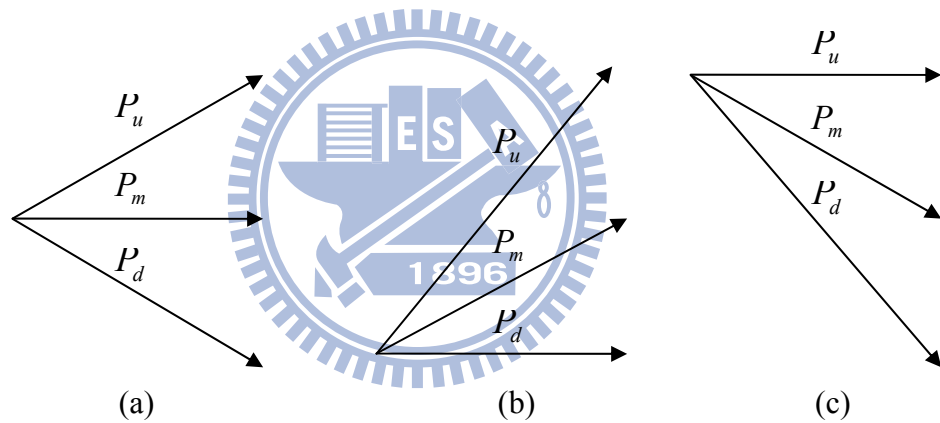


圖 2.3 Hull-White 利率樹變動機率

第二階段

在第一階段求出的利率樹和當時市場所觀察到的利率期間結構未必一致，因此，第二階段主要是要調整 $R^*(t)$ 樹上的節點都能符合期初市場上的利率期間結構，並將 $R^*(t)$ 三元樹轉換成 $r(t)$ 三元樹。定義 $\alpha_i \equiv \alpha(i\Delta t) = r(i\Delta t) - R^*(i\Delta t)$ ，並定義 $Q_{i,j}$ 為在利率走到節點 (i, j) 時支付一元，否則報酬為零的商品現值。運用 α_i 與 $Q_{i,j}$ 讓 $r(t)$ 三元樹符合期初市場上的利率期間結構的特性，以前推法 (Forward induction) 求出下列公式：

$$\alpha_i = \frac{\ln \sum_{j=-n_i}^{n_i} Q_{m,j} e^{-j\Delta R^* \Delta t} - \ln P_{i+1}}{\Delta t} \quad (2.1.5)$$

其中 P_{i+1} 為在 $(i, j)\Delta t$ 到期的零息債券價格， n_i 為三元樹在 $i\Delta t$ 時變數 j 的最大值。

求出 α_i 後可推出下列公式：

$$Q_{i+1,j} = \sum_k Q_{i,k} q(k, j) \exp[-(\alpha_i + k\Delta R)\Delta t] \quad (2.1.6)$$

其中 $q(k, j)$ 為節點 (i, k) 走到節點 $(i+1, j)$ 的機率。

由(2.1.7)算出每一期的 α_i ，再運用一開始給定的 a 和 σ_r 等固定常數，就可以求出與市場上利率期間結構一致的利率樹。其利率樹如圖2.4所示：

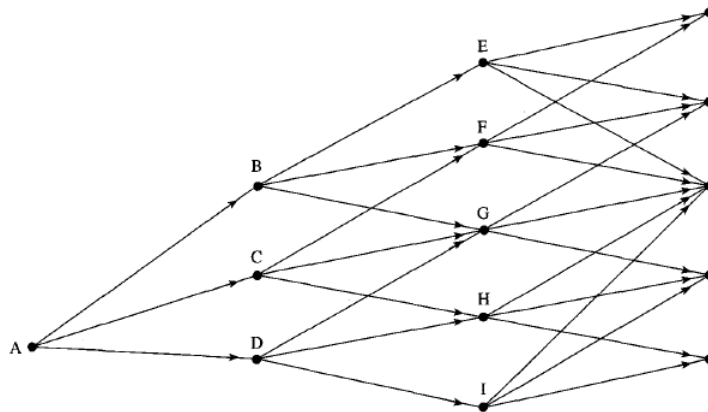


圖 2.4 Hull-White 利率樹

• Dai(2009)

當CRR樹下一期的期望值比當期的值乘以上漲的幅度還大時就會發生機率超過1的問題。以圖2.5為例，可以看出當股價期望值大於上漲價格時，上漲機率會大於1，而下跌機率會變成負數。

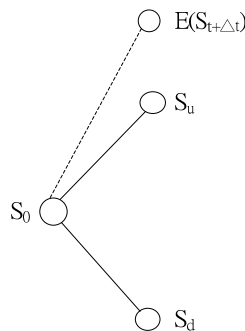


圖 2.5 CRR 股價樹機率爆掉示意圖

本論文使用Dai(2009)的stair tree來解決此問題，以CRR樹為主要架構，當發生上述情況時就改以三元樹的方式去展開樹狀節點。使得機率符合介於0到1的條件。並且三個節點的期望值折現也會等於目前節點的值。

參考下圖，假設

$$\beta \equiv \hat{\mu} - \mu, \alpha \equiv \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t}, \gamma \equiv \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t} \quad (2.1.7)$$

其中 $\mu = (r - \sigma^2 / 2)\Delta t$, $\hat{\mu} = \ln(S_m / S_0)$, $\beta \in [-\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t}]$ ，再根據下列三個等式，用Cramer's rule可以解出三元樹的機率

$$\begin{aligned} P_u \alpha + P_m \beta + P_d \gamma &= 0 \\ P_u \alpha^2 + P_m \beta^2 + P_d \gamma^2 &= \sigma^2 \Delta t \\ P_u + P_m + P_d &= 1 \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

其Stair tree如圖2.6所示：

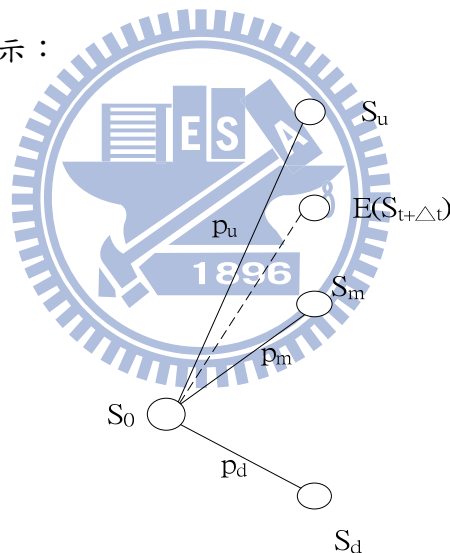


圖 2.6 Stair Tree

第二節 信用風險評價模型

對於可轉換公司債之信用風險評價模型，文獻中主要分為兩大方向：結構式模型(Structural Model)與縮減式模型(Reduced Model)。

(一) 結構式模型(Structural Model)

• Merton (1974)

提出公司資產模型(Firm Value Model)，假設公司資產價值服從一個隨機過

程，將股權視為以公司資產價值為標的物，以公司負債為履約價格的買權。公司是否發生信用風險根據公司價值與負債之相對高低而決定，因此可將公司的資本結構納入考量。但是Merton模型有一些基本限制：(1)公司只發行一種債券，且沒有支付任何債息；(2)假設利率為常數；(3)無任何破產成本與稅盾效果；(4)公司只有在債券到期日才會發生信用風險。

根據結構式模型，股東權益在時間點 T 的價值可表示為：

$$E_T = \max(V_T - D, 0) \quad (2.2.1)$$

經由 BS 公式可將股東權益目前價值表示為：

$$E_0 = V_0 N(d_1) - De^{-rT} N(-d_2) \quad (2.2.2)$$

其中違約機率(Default probability)為(2.2.2)式中的 d_2 ：

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T} \quad (2.2.3)$$

對(2.2.2)式做 Itô's Lemma 可推得：

$$\sigma_E E_0 = \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V V_0 \quad (2.2.4)$$

• Black and Cox (1976)

提出首次通過時間模型(First Passage Time Model)，目的是在改進Merton (1974)沒考慮到期日前破產的可能性，所以Black and Cox (1976)在到期日前設下一破產邊界 B_t ：

$$B_t = Ke^{-\gamma(T-t)} \quad (2.2.5)$$

K 與 γ 都是外生給定的常數。一旦公司在時間點 t 的資產價值低於此一邊界 B_t ，公司便立刻面臨破產清算的狀況，因此，包括了到期日前違約的情形。

Brennan & Schwartz(1977,1980)利用結構式模型對可轉換公司債做評價，假設股價與利率服從隨機過程，使用 Itô's Lemma 導出 PDE(partial differential equation)，並找出其界限條件(Boundary Condition)，再用數值方法去解 PDE。該模型的缺點是隨機過程的參數都是外生給定，其利率期限結構無法符合現在的

市場利率曲線。

(二) 縮減式模型(Reduced Model)

• Jarrow and Turnbull (1995)

提出違約密度模型(Intensity Model)，假設有一個違約過程(Default process)，每一個時點上均有違約的可能性，未來可能發生違約與不違約兩種情況，其違約機率為 μ_t ，違約機率由風險溢酬(Credit Spread)逆推而出，其回復比率(Recovery rate)為 δ 。在模型化這個違約過程後，即可以用以評價債券或衍生性商品的違約風險。

首先建立BDT利率樹，假設利率上漲跟下跌的機率相等，也就是 $\Pi=1/2$ ，接著利用求得的隨機利率加入Intensity Model來推出這兩期間的違約機率。如圖2.7所示：

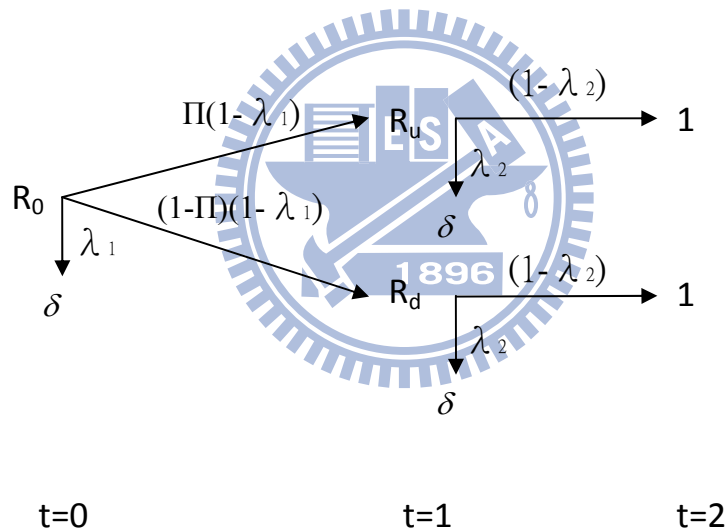


圖 2.7 Intensity Model 求違約機率

其中 λ_1 、 λ_2 為兩段時間的違約機率， δ 為公司債違約的回收率。 Z_i^* 為 $t=0$ 到 $t=i+1$ 之間的有風險公司債利率。利用面額為 1 的有風險債券在 $t=0$ 的價值等於 $t=1$ 時間點的債券期望值用無風險利率折現到 $t=0$ 時求得違約機率。即

$$e^{-Z_0^*} = [1(1 - \lambda_1) + \delta\lambda_1]e^{-R_0} \tag{2.2.6}$$

$$e^{-2Z_1^*} = \{[1(1 - \lambda_2) + \delta\lambda_2]e^{-R_u} \pi(1 - \lambda_1) + [1(1 - \lambda_2) + \delta\lambda_2]e^{-R_d} (1 - \pi)(1 - \lambda_1) + \delta\lambda_1\}e^{-R_0} \tag{2.2.7}$$

在(2.2.6)式中可以直接解出 λ_1 ，再代入(2.2.7)可推得 λ_2 以此類推。

Hung and Wang (2002)利用縮減式模型評價可轉換公司債，延伸Jarrow and Turnbull (1995)的方法，推導出違約機率。再將違約機率、股價(CRR Tree)和利率(BDT Tree)結合成樹狀結構，利用此樹狀結構評價可轉換公司債。

Chambers & Lu(2007)則是改進Hung and Wang(2002)的模型，考慮股價和利率之相關係數 ρ ，重新定義風險中立測度，並且將六元樹簡化至五元樹去評價可轉換公司債。

第三節 Briys公司債模型

• Briys and Varenne(1997)

提出評價公司債的封閉解，引用Hull and White (1990)之利率期間結構模型來描述利率的變動，並假設 B_t 為 t 時間點的違約門檻、 F 為公司所有債務的票面價值、 $P(t, T)$ 為到期日 T 面值1元的無風險零息債券在時間點 t 的價值，也就是折現因子、 α 為公司債務維持水平、 f_1 為當違約發生在到期日之前可拿到的剩餘比例、 f_2 為當違約發生在到期日可拿到的剩餘比例、 D_0 為目前的公司債價值、 A_0 為目前的公司資產價值、 σ_A 為公司資產波動度、 σ_P 為折現因子波動度、 ρ 為資產與折現因子的相關係數。其封閉解如下：

$$B_t = \alpha FP(t, T) \quad (2.3.1)$$

$$D_0 = FP(0, T) \left[1 - P_E(l_0, 1) + P_E\left(q_0, \frac{l_0}{q_0}\right) - (1 - f_1)l_0 \left(N(-d_3) + \frac{N(-d_4)}{q_0} \right) - (1 - f_2)l_0 \left(N(d_3) - N(d_1) + \frac{N(d_4) - N(d_6)}{q_0} \right) \right] \quad (2.3.2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln l_0 + \Sigma(T)/2}{\sqrt{\Sigma(T)}} = d_2 + \sqrt{\Sigma(T)}$$

$$d_3 = \frac{\ln q_0 + \Sigma(T)/2}{\sqrt{\Sigma(T)}} = d_4 + \sqrt{\Sigma(T)}$$

$$d_5 = \frac{\ln q_0^2 / l_0 + \Sigma(T)/2}{\sqrt{\Sigma(T)}} = d_6 + \sqrt{\Sigma(T)}$$

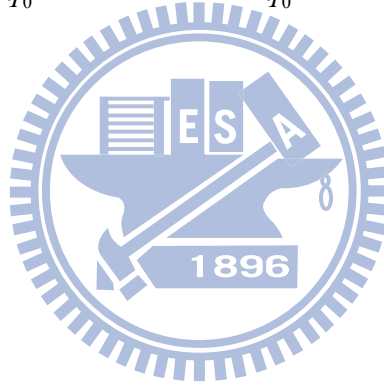
$$\Sigma(T) = \int_0^T [(\rho\sigma_A + \sigma_p(t, T))^2 + (1 - \rho^2)\sigma_A^2] dt$$

$$l_0 = \frac{A_0}{FP(0, T)}$$

$$q_0 = \frac{A_0}{\alpha FP(0, T)}$$

$$P_E(l_0, 1) = -l_0 N(-d_1) + N(-d_2)$$

$$P_E(q_0, \frac{l_0}{q_0}) = -q_0 N(-d_5) + \frac{l_0}{q_0} N(-d_6)$$



第三章 研究方法

本研究依據結構式模型(Structural Model)，並試圖建構股價與違約機率的關連。當股價越高，公司資產也會越高，因為公司資產等於負債加上股東權益，股東權益等於股價乘上流通在外股數；而公司資產越高，代表公司碰到違約界限的機率也就越低，也就是公司越不容易發生違約事件。本章先討論利率為常數的一因子模型，再延伸到利率服從Hull-White Tree的二因子模型。

第一節 一因子模型違約機率計算

首先建構CRR股價樹，由於股東權益 E_t 可以由股價 S_t 乘以外流通股數 NS 表示 $E_t = S_t \times NS$ ，股東權益波動度 σ_{E_t} 則等於股價波動度 σ_{S_t} ，因此我們可以把股價樹轉換成股東權益樹，如圖3.1所示

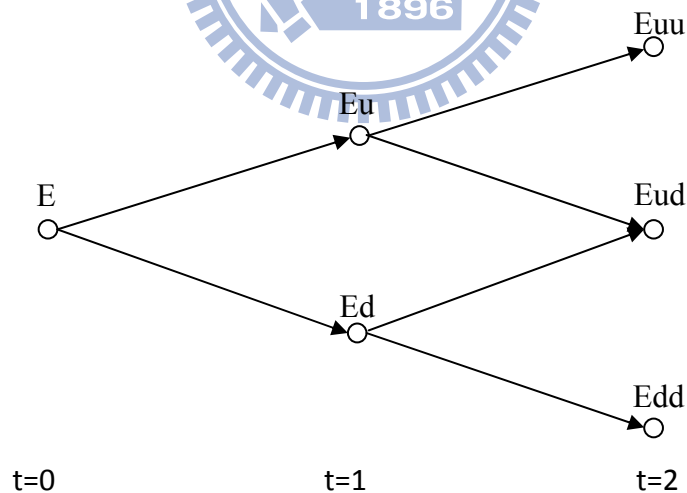


圖 3.1 股東權益樹

根據首次通過時間模型給定破產邊界： $B_t = Ke^{-\gamma(T-t)}$ ，其中 K 、 γ 都是外生給定常數，公司資產一旦碰到這個破產邊界就會發生違約。而在Merton模型中採用vanilla call option，違約事件只會發生在到期日 T 。本研究為了配合使用首次

通過模型，讓公司在到期日 T 之前只要公司資產碰到破產邊界就會發生違約事件，採用 Kunitomo and Ikeda(1991)提出了向下失效障礙選擇權(Down and Out Barrier Option)，把公司資產視為股價，向下失效買權價格當作股東權益，障礙門檻則表示成破產邊界。

接著從股權與股權波動度 E_t 、 σ_{E_t} 去推得公司資產與公司資產波動度 V_t 、 σ_{V_t} ，透過滿足 down-and-out call option 與 Ito's Lemma 兩條限制式(3.1.1)做規劃求解求得：

$$\left\{ \begin{array}{l} E_t = V_t \left\{ N(d_1) - \left(\frac{B_t}{V_t} \right)^{\{2(r_f - \gamma)/\sigma_{V_t}^2\} + 1} N(d_2) \right\} - \\ De^{-r_f(T-t)} \left\{ N(d_3) - \left(\frac{B_t}{V_t} \right)^{\{2(r_f - \gamma)/\sigma_{V_t}^2\} - 1} N(d_4) \right\} \text{ Fit } \sigma_{V_t} \text{ \& } V_t \\ \sigma_{E_t} E_t = \frac{\partial E_t}{\partial V_t} \sigma_{V_t} V_t \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

where

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + (r_f - \kappa + \sigma_{V_t}^2/2)(T-t)}{\sigma_{V_t} \sqrt{(T-t)}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{B_t^2}{V_t D}\right) + (r_f - \kappa + \sigma_{V_t}^2/2)(T-t)}{\sigma_{V_t} \sqrt{(T-t)}}$$

$$d_3 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + (r_f - \kappa - \sigma_{V_t}^2/2)(T-t)}{\sigma_{V_t} \sqrt{(T-t)}}, \quad d_4 = \frac{\ln\left(\frac{B_t^2}{V_t D}\right) + (r_f - \kappa - \sigma_{V_t}^2/2)(T-t)}{\sigma_{V_t} \sqrt{(T-t)}}$$

其中 κ 代表公司支付債息與股利，本文假設公司沒有支付任何股利與債息，所以 $\kappa = 0$ 。

透過上述方法，可將股價樹轉成公司資產樹，如圖 3.2 所示

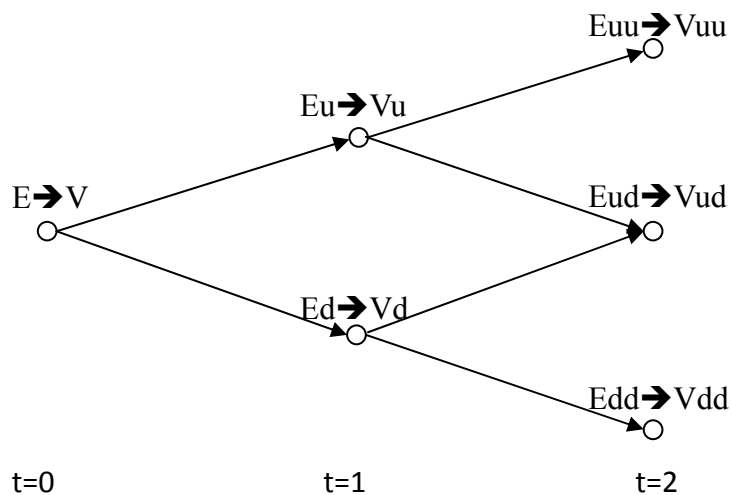


圖 3.2 公司資產樹

得到 V_t 、 σ_{V_t} 後，代入 First Passage Time Distribution 得到從時間點 t 到 $t + \Delta t$ 之間的違約機率。假設時間點 $t \geq 0$ ， $s = t + \Delta t$ ；時間點 τ 是第一次當公司資產碰到破產邊界的時間， $\tau = \inf\{t \geq 0 : V_t \leq B_t\}$ 。根據反射定理(Reflection Principle)可知從時間點 t 到時間點 s 之間的違約機率為：

$$P(\tau \leq s | F_t) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{B_t}{V_t}\right) - (r - \kappa - \gamma - \frac{1}{2}\sigma_{V_t}^2)(s-t)}{\sigma_{V_t}\sqrt{(s-t)}}\right) + \left(\frac{B_t}{V_t}\right)^{2*} \exp\left\{2* \left(\frac{r - \gamma - \frac{1}{2}\sigma_{V_t}^2}{\sigma_{V_t}^2}\right)\right\} N\left(\frac{\ln\left(\frac{B_t}{V_t}\right) + (r - \kappa - \gamma - \frac{1}{2}\sigma_{V_t}^2)(s-t)}{\sigma_{V_t}\sqrt{(s-t)}}\right) \quad (3.1.2)$$

第二節 一因子評價模型

在加入違約機率後，為了維持風險中立機率測度，CRR中的上漲機率 p 必須調整為 $\tilde{p} = \frac{e^{(r_f + \lambda_{i,j}^*)\Delta t} - d}{u - d}$ ，在 \tilde{p} 機率測度下，股價隨機過程會具有martingale性質，證明如下：

$$\begin{aligned} & e^{-r_f \Delta t} [0(1 - e^{-\lambda_{i,j}^* \Delta t}) + Su\tilde{p}e^{-\lambda_{i,j}^* \Delta t} + Sd(1 - \tilde{p})e^{-\lambda_{i,j}^* \Delta t}] = \\ & e^{-r_f \Delta t} \left[Su \frac{e^{(r_f + \lambda_{i,j}^*)\Delta t} - d}{u - d} e^{-\lambda_{i,j}^* \Delta t} + Sd \frac{u - e^{(r_f + \lambda_{i,j}^*)\Delta t}}{u - d} e^{-\lambda_{i,j}^* \Delta t} \right] \quad (3.2.1) \\ & = e^{-r_f \Delta t} \left[S \frac{ue^{r_f \Delta t} - e^{-\lambda_{i,j}^* \Delta t}}{u - d} + S \frac{e^{-\lambda_{i,j}^* \Delta t} - de^{r_f \Delta t}}{u - d} \right] = S \end{aligned}$$

其中 r_f 為無風險利率， $\lambda_{i,j}^*$ 為第 i 期第 j 個節點的違約強度(Default Intensity)。違約強度與違約機率(Default Probability)不同，利用指數分配的累積機率函數可以從違約機率去逆推違約強度 $\lambda^* = -\ln(1-\lambda)/\Delta t$ ，其中 λ^* 為違約強度， λ 為違約機率。

將違約機率與股價結合成樹狀結構，如圖 3.3 所示：

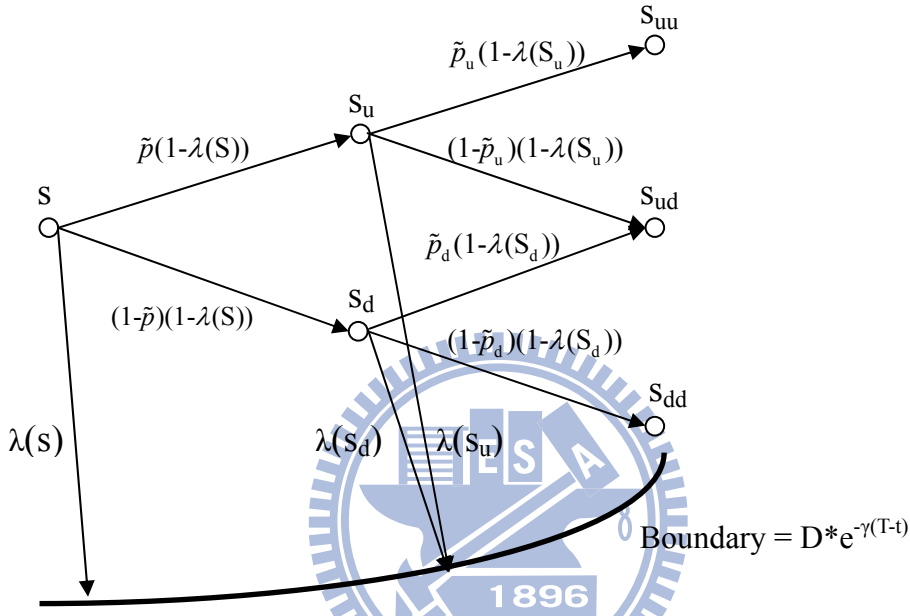


圖 3.3 違約機率與股價結合成樹狀結構

每個節點 CB value = $\max[\min(\text{hold}, \text{call}), \text{conversion value}]$ ，透過倒推法 (Backward Induction) 可求得期初可轉債價格。以圖 3.3 的 S_u 點為例，假設可轉債的轉換比例為 q ，公司贖回債券價格為 CP ，可轉債面值為 F ，回收比例 (Recovery Rate) 為 δ 。到期日 S_{uu} 點的 conversion value = $S_{uu} * q$ ，不轉換則拿到面值 F ， S_{uu} 點的可轉債價格 $CB_{uu} = \max(F, S_{uu} * q)$ ，相同的 $CB_{ud} = \max(F, S_{ud} * q)$ ，到期日其它點亦同。到期日前 S_u 點的可轉債價格可寫成 $CB_u = \max[\min(\text{hold}, CP), q * S_u]$ ，其中 $\text{hold} = (\tilde{p}_u(1-\lambda(S_{uu})) * CB_{uu} + (1-\tilde{p}_u)(1-\lambda(S_{uu})) * CB_{ud} + \lambda(S_u) * \delta F) e^{-r_f \Delta t}$ ，到期日前其他點亦然。

第三節 二因子模型違約機率計算

如同一因子模型違約機率計算，但由於二因子模型中利率是浮動的，本文一因子模型中down-and-out call option評價公式利率是假設為固定常數。所以本文二因子模型改套用Briys Model的債券評價公式。

透過滿足Briys Model的債券評價公式與Ito's Lemma兩條限制式(3.3.1)去做規劃求解求得 V_t 、 σ_{V_t} 。

$$\begin{cases} E_t = V_L - D_t \\ \sigma_{E_t} E_t = N(x) \sigma_{V_t} V_t \end{cases} \Rightarrow \text{Fit } V_t \text{ \& } \sigma_{V_t}$$

$$D_t = FP(t, T) \left[1 - P_E(l_t, 1) + P_E\left(q_t, \frac{l_t}{q_t}\right) - (1 - f_1) l_t \left(N(-d_3) + \frac{N(-d_4)}{q_t} \right) - (1 - f_2) l_t \left(N(d_3) - N(d_1) + \frac{N(d_4) - N(d_6)}{q_t} \right) \right] \quad (3.3.1)$$

其中

$$V_L = V_t + \text{Tax Benefit} - \text{Bankruptcy Cost}$$

$$d_1 = \frac{\ln l_t + \Sigma(T)/2}{\sqrt{\Sigma(T)}} = d_2 + \sqrt{\Sigma(T)} \quad d_3 = \frac{\ln q_t + \Sigma(T)/2}{\sqrt{\Sigma(T)}} = d_4 + \sqrt{\Sigma(T)}$$

$$d_5 = \frac{\ln q_t^2 / l_t + \Sigma(T)/2}{\sqrt{\Sigma(T)}} = d_6 + \sqrt{\Sigma(T)}$$

$$\Sigma(T) = \int_0^T [(\rho \sigma_A + \rho_p(t, T))^2 + (1 - \rho^2) \sigma_A^2] dt$$

$$\rho_p(t, T) = \sigma_r \int_t^T \exp\left(-\int_t^u ads\right) du$$

$$l_t = \frac{V_t}{FP(t, T)} \quad q_t = \frac{V_t}{\alpha FP(t, T)}$$

$$P_E(l_t, 1) = -l_t N(-d_1) + N(-d_2) \quad P_E\left(q_t, \frac{l_t}{q_t}\right) = -q_t N(-d_3) + \frac{l_t}{q_t} N(-d_6)$$

Briys Model透過 f_1 與 f_2 兩個參數調整破產成本(Bankruptcy Cost)，本文假設稅盾效益與破產成本為零，令 $\text{Tax Benefit} = \text{Bankruptcy Cost} = 0$ ，因此 $\text{levered firm value}(V_L) = \text{firm's asset value}(V_t)$ ， f_1 與 f_2 均設為1。

得到 V_t 、 σ_{V_t} 後，代入(3.1.2)式算出從時間點 t 到 $t + \Delta t$ 之間的違約機率。

第四節 內生決定回收比率(Recovery Rate)

Briys Model透過 α 參數調整對債權人的保護程度。 α 越高，違約門檻越高，公司倒閉機率越高，但是公司倒閉時債權人拿回的價值越多； α 越低則相反。此時可轉債回收比率是跟 α 有關的內生決定值。

當公司發生違約事件時，一張可轉換公司債在時間點 t 到時間點 $t+\Delta t$ 違約時所貢獻的期望價值為

$$F_D = \frac{\int_t^{t+\Delta t} p(\tau)[B_\tau - SB_\tau]^+ e^{-r_t \tau} d\tau}{N_C} \quad (3.4.1)$$

上述式子可用數值積分來近似如下： $\frac{\sum p(\tau_i)[B_{\tau_i} - SB_{\tau_i}]^+ e^{-r_t \tau_i} d\tau}{N_C}$ ，也就是在時間

點 t 到時間點 $t+\Delta t$ 之間再切成若干個時間點 $\tau_i = \frac{i \times \Delta t}{n}$ ； $p(\tau_i)$ 代表每個瞬時時間點 τ_i 的違約機率，代(3.1.2)式可求得； B_{τ_i} 代表瞬時時間點 τ_i 的違約門檻； SB_{τ_i} 代表瞬時時間點 τ_i 違約時所支付的普通債券(Straight Bond)； r_t 為時間點 t 到時間點 $t+\Delta t$ 的利率； N_C 為可轉換公司債發行數量。

公司違約時可轉換公司債的期望價值也就是債權人可以拿回的剩餘價值，如圖3.4所示

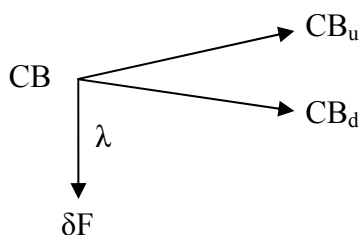


圖 3.4 可轉債違約時期望價值

其中 CB 為可轉換公司債本期價格，下一期可能價格上升至 CB_u 或下跌至 CB_d ，亦或發生違約事件，只能拿回 δF ；其中 δ 為回收比率， F 為債券面值， λ 為違約機率。也就是說當發生違約事件時 $F_D = \lambda \delta F$ ，移項後可得到回收比率(Recovery

$$\text{Rate}) \delta = \frac{F_D}{\lambda F} = \alpha \times (\text{discount factor}) \circ$$

第五節 二因子評價模型

由於Briys Model假設短期利率服從Hull-White利率模型，本文二因子利率樹採用Hull-White利率模型，與Chamber & Lu(2007)採用BDT利率模型不同。

如同一因子評價模型，CRR中的上漲機率 p 必須調整為 $\tilde{p} = \frac{e^{(R_{i,j} + \lambda_{i,j}^*)\Delta t} - d}{u - d}$ ，在 \tilde{p} 機率測度下，股價隨機過程會具有martingale性質，證明如下：

$$\begin{aligned} & e^{-R_{i,j}\Delta t} [0(1 - e^{-\lambda_{i,j}^*\Delta t}) + Su\tilde{p}e^{-\lambda_{i,j}^*\Delta t} + Sd(1 - \tilde{p})e^{-\lambda_{i,j}^*\Delta t}] = \\ & e^{-R_{i,j}\Delta t} \left[Su \frac{e^{(R_{i,j} + \lambda_{i,j}^*)\Delta t} - d}{u - d} e^{-\lambda_{i,j}^*\Delta t} + Sd \frac{u - e^{(R_{i,j} + \lambda_{i,j}^*)\Delta t}}{u - d} e^{-\lambda_{i,j}^*\Delta t} \right] \quad (3.5.1) \\ & = e^{-R_{i,j}\Delta t} \left[S \frac{ue^{R_{i,j}\Delta t} - e^{-\lambda_{i,j}^*\Delta t}}{u - d} + S \frac{e^{\lambda_{i,j}^*\Delta t} - de^{R_{i,j}\Delta t}}{u - d} \right] = S \end{aligned}$$

其中 $R_{i,j}$ 為第 i 期第 j 個節點的利率， $\lambda_{i,j}^*$ 為第 i 期第 j 個節點的違約強度。

將違約機率、Hull-White tree和CRR tree結合成一個樹狀結構，並且考慮股價和利率之間存在相關性 ρ ， ρ 是一個外生變數。透過 ρ 可以推導出樹狀結構走到下一期的六個分支機率 $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ ，其推導證明如下。

Hull-White tree期望值為 $E(R) = P_u R_u + P_m R_m + P_d R_d$ ，變異數為

$V(R) = P_u R_u^2 + P_m R_m^2 + P_d R_d^2 - E(R)^2$ ，其中 R_u, R_m, R_d 分別代表利率上漲、持平、下跌； P_u, P_m, P_d 代表利率上漲、持平、下跌的機率。

CRR tree期望值為 $E(S) = \tilde{p}S_u + (1 - \tilde{p})S_d$ ，變異數為

$V(S) = \tilde{p}S_u^2 + (1 - \tilde{p})S_d^2 - E(S)^2$ ，其中 S_u, S_d 分別代表股價上漲、下跌； $\tilde{p}, (1 - \tilde{p})$ 代表股價上漲、下跌機率。

接著要調整六條分支機率，本文調整方式採用Brigo and Mercurio (2006) 在附錄F. Approximating Diffusions with Trees中提到先將邊際機率相乘，再利用 ε 調

整符合限制；Hull and White(1994)也提過類似的聯合機率配適方法。調整方法如表3.1：

R/S	R_u	R_m	R_d
S_u	$p_1 = \tilde{p} \times P_u + \varepsilon$	$p_3 = \tilde{p} \times P_m$	$p_5 = \tilde{p} \times P_d - \varepsilon$
S_d	$p_2 = (1 - \tilde{p}) \times P_u - \varepsilon$	$p_4 = (1 - \tilde{p}) \times P_m$	$p_6 = (1 - \tilde{p}) \times P_d + \varepsilon$

表 3.1 六條分支機率調整方法

調整六條分支機率後，利用 $\rho = \frac{E(RS) - E(S)E(R)}{\sqrt{V(S)}\sqrt{V(R)}}$ 等式來解未知數 ε ，即可得

到 $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ 。

其中 $E(RS) = p_1 S_u R_u + p_2 S_d R_u + p_3 S_u R_m + p_4 S_d R_m + p_5 S_u R_d + p_6 S_d R_d$ ， ρ 為已知常數。

將違約機率、利率與股價及六條分支機率結合成七元樹，如圖 3.5 所示：

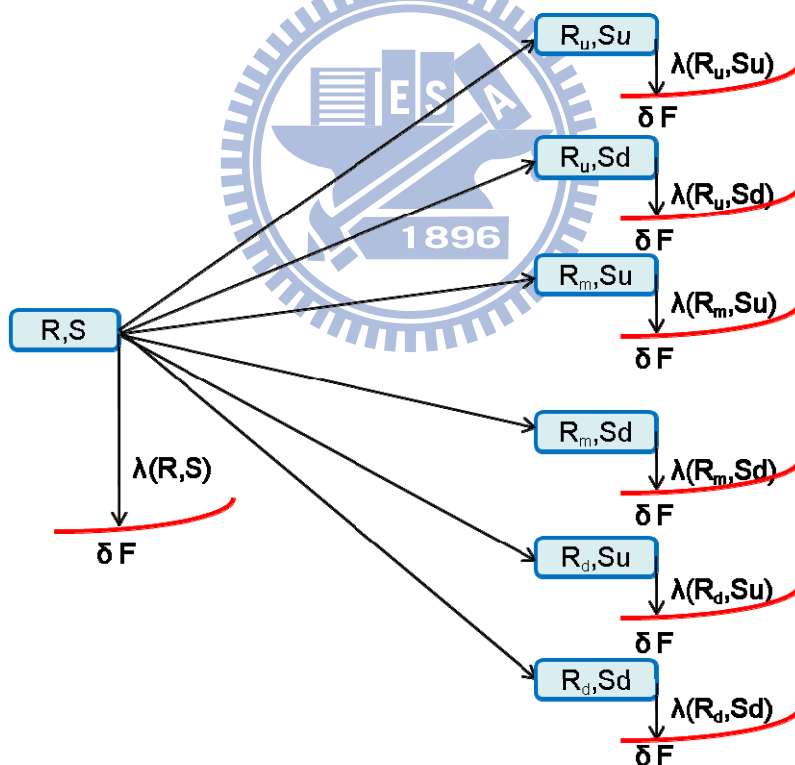


圖 3.5 二因子模型七元樹

曾右仲(2009)證明當利率或違約機率太大時 $\tilde{p} = \frac{e^{(R_j + \lambda_{i,j}^*)\Delta t} - d}{u - d}$ 會有機率大於 1 的情形發生，本文採 Dai(2009)的 Stair tree 來解決此問題。此處因為有違約分支，所以要改寫(2.1.7)式， $\mu = (r + \lambda^* - \sigma_s^2 / 2)\Delta t$ ，其中 r 代表各節點利率， λ^* 為各節

點的違約密度， σ_s 為股價波動度。

重新結合 Hull-White tree、Stair tree 與違約機率成為新的樹狀結構，透過 ρ 可以推導出樹狀結構走到下一期的九個分支機率 $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9$ ，其推導證明如下。

Hull-White tree 期望值為 $E(R) = P_u R_u + P_m R_m + P_d R_d$ ，變異數為

$V(R) = P_u R_u^2 + P_m R_m^2 + P_d R_d^2 - E(R)^2$ ，其中 R_u, R_m, R_d 分別代表利率上漲、持平、下跌； P_u, P_m, P_d 代表利率上漲、持平、下跌的機率。

Stair tree 期望值為 $E(S) = \tilde{p}_u S_u + \tilde{p}_m S_m + \tilde{p}_d S_d$ ，變異數為

$V(S) = \tilde{p}_u S_u^2 + \tilde{p}_m S_m^2 + \tilde{p}_d S_d^2 - E(S)^2$ ，其中 S_u, S_m, S_d 分別代表股價上漲、持平、下跌； $\tilde{p}_u, \tilde{p}_m, \tilde{p}_d$ 代表股價上漲、持平、下跌機率。

接著要調整九條分支機率，透過加或減一個極小誤差值 ε 來調整。調整方法如表 3.2：

R/S	R_u	R_m	R_d
S_u	$p_1 = \tilde{p}_u \times P_u + \varepsilon$	$p_4 = \tilde{p}_u \times P_m$	$p_7 = \tilde{p}_u \times P_d - \varepsilon$
S_m	$p_2 = \tilde{p}_m \times P_u$	$p_5 = \tilde{p}_m \times P_m$	$p_8 = \tilde{p}_m \times P_d$
S_d	$p_3 = \tilde{p}_d \times P_u - \varepsilon$	$p_6 = \tilde{p}_d \times P_m$	$p_9 = \tilde{p}_d \times P_d + \varepsilon$

表 3.2 九條分支機率調整方法

調整九條分支機率後，利用 $\rho = \frac{E(RS) - E(S)E(R)}{\sqrt{V(S)}\sqrt{V(R)}}$ 等式來解未知數 ε ，即可得

到 $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9$ 。

其中

$$E(RS) = p_1 S_u R_u + p_2 S_m R_u + p_3 S_d R_u + p_4 S_u R_m + p_5 S_m R_m + p_6 S_d R_m + p_7 S_u R_d + p_8 S_m R_d + p_9 S_d R_d$$

， ρ 為已知常數。

將違約機率、利率與股價及九條分支機率結合成十元樹，如圖 3.6 所示：

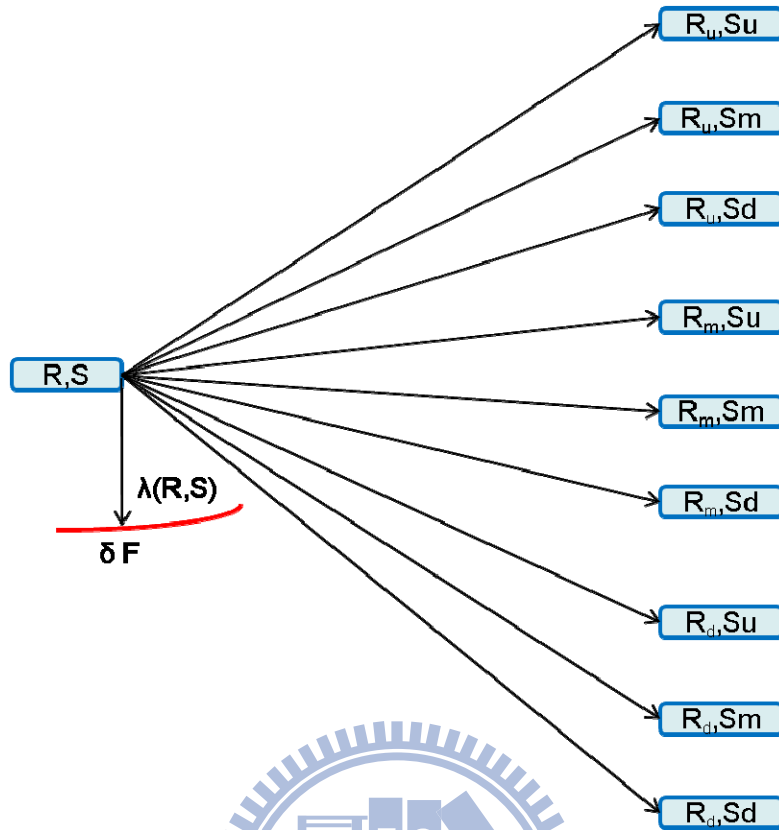


圖 3.6 二因子模型十元樹

建立好二因子樹狀結構後，利用倒推法計算可轉換公司債價格。

第六節 調整轉換後股價

Brennan & Schwartz(1980)假設公司資產 V 是由三種有價證券組成：

$$V = N_B B + N_C C + N_O S^{BC} \quad (3.6.1)$$

其中 B 為公司普通債券(Straight Bond)的市場價值； N_B 為公司普通債券發行數量； C 為可轉換公司債的市場價值； N_C 為可轉換公司債發行數量； S^{BC} 為轉換前公司股價， N_O 為轉換前公司在外股票流通張數。

本文在假設可轉債持有者一但決定將手中可轉債轉成股票時，所有可轉債持有人都會將手中可轉債全部轉成股票，轉換後公司資本結構則調整為：

$$V = N_B B + (N_O + \Delta N) S^{AC} \quad (3.6.2)$$

其中 q (Conversion Ratio) 為可轉換公司債轉換比例， $\Delta N = N_C * q$ 為轉換後股票

增加張數。將(3.6.2)式移項後可得到轉換後股價價格為：

$$S^{AC} = \frac{V - N_B B}{(N_O + \Delta N)} \quad (3.6.3)$$

此時轉換價值應該等於：

$$\text{Conversion value} = q * S^{AC} \quad (3.6.4)$$

由此可知，轉換後的股價不等於轉換前股價。因為在公司資產中，可轉換公司債價值流向股東權益，但是同時也增加股票張數，產生稀釋作用，公司資本結構改變，負債減少股東權益增加。



第四章 實驗結果與分析

第一節 一因子模型數值結果

本研究一因子模型假設一虛擬之可轉換公司債，以下為參數設定：

期初股價(S_0) = 30、股價波動率(σ_S) = 0.4、到期日(T) = 6、時間間隔(Δt) = 1、債券面額(F) = 100、轉換比率(CR) = 2、債券贖回價格(CP) = 113、無風險利率(r_f) = 0.05、違約門檻折現率(γ) = 0.05、資產回收率(δ) = 0.4、假設流通在外股數(NS) = 10000、普通債券張數(NB) = 9800、可轉換公司債張數(NC) = 200、公司在到期日償還的負債(D) = $F \cdot (NB + NC) = 1000000$ ，本研究違約門檻(B_t) = $De^{-\gamma(T-t)}$ 。

本節在此作一因子模型範例，符號定義如下：

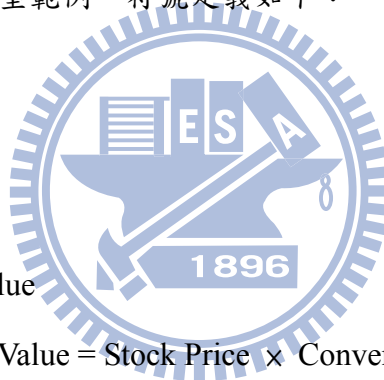
St : Stock Price

F : Face Value

CP : Call Price

RV : Rollback Value

CV : Conversion Value = Stock Price \times Conversion Ratio



在最後一期節點紀錄之資訊如表 4.1 所示

St	MAX [min(F , CP) , CV]
----	----------------------------

表 4.1 最末期節點紀錄之資訊

中間期數節點紀錄之資訊如表 4.2 所示

St
RV
MAX[min(RV , CP) , CV]

表 4.2 中間期數節點紀錄之資訊

為了圖片簡潔，繪圖省略違約之分支，如圖 4.1

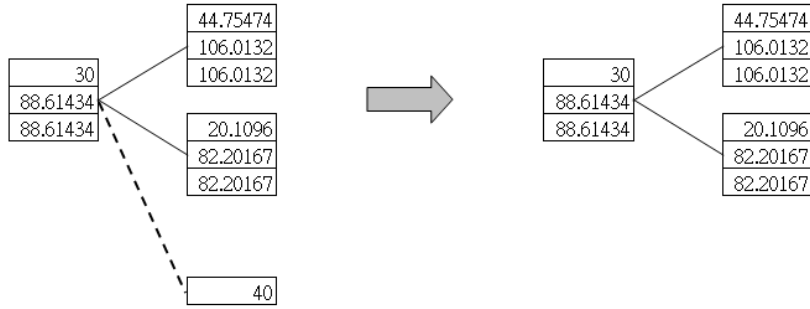


圖 4.1 省略違約分支

一因子模型樹狀結構如圖 4.2

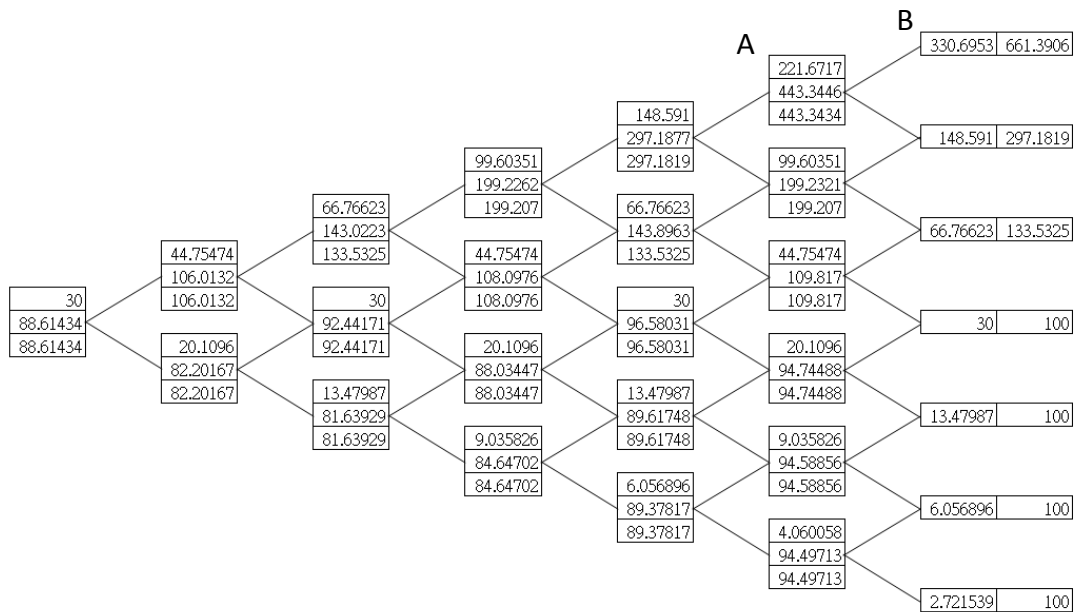


圖 4.2 一因子模型樹狀結構範例(不討論股權稀釋)

節點 B 的可轉債價值為 $\text{Max}(\min(100, 113), 330.69529 * 2) = 661.39058$ 。

節點 A 的可轉債價值為 $\text{Max}(\min(443.34455, 113), 221.67168 * 2) = 443.34336$ ，其中 A 點 Rollback value =

$$e^{-0.05 * 1} (611.3906 * (1 - 0.000031120) * 0.463916 + 297.1819 * (1 - 0.000031120) * 0.536084 + 0.000031120 * 40) = 443.34455$$

此虛擬可轉換公司債各節點公司資產與公司資產波動度如表 4.3 與表 4.4

t=0	t=1	t=2
V(S) = 1040818.221	V(Su) = 1222061.991 V(Sd) = 974434.3482	V(Su ²) = 1481514.291 V(S) = 1112505.887 V(Sd ²) = 949644.6042
t=3	t=4	t=5
V(Su ³) = 1854827.482	V(Su ⁴) = 2390568.539	V(Su ⁵) = 3167946.254

$V(Su) = 1305315.581$ $V(Sd) = 1059357.391$ $V(Sd^3) = 949574.3469$	$V(Su^2) = 1571837.922$ $V(S) = 1203987.92$ $V(Sd^2) = 1038972.131$ $V(Sd^4) = 965012.3996$	$V(Su^3) = 1947260.673$ $V(Su) = 1398728.375$ $V(Sd) = 1152262.372$ $V(Sd^3) = 1041546.108$ $V(Sd^5) = 991805.3339$
---	--	---

表 4.3 一因子模型各期節點公司資產

$t=0$	$t=1$	$t=2$
$\sigma_V(S) = 0.115293907$	$\sigma_V(Su) = 0.145977272$ $\sigma_V(Sd) = 0.08208865$	$\sigma_V(Su^2) = 0.179673145$ $\sigma_V(S) = 0.107264415$ $\sigma_V(Sd^2) = 0.056547258$
$t=3$	$t=4$	$t=5$
$\sigma_V(Su^3) = 0.214576826$ $\sigma_V(Su) = 0.136837934$ $\sigma_V(Sd) = 0.07575636$ $\sigma_V(Sd^3) = 0.038002932$	$\sigma_V(Su^4) = 0.248610102$ $\sigma_V(Su^2) = 0.169834635$ $\sigma_V(S) = 0.0995985$ $\sigma_V(Sd^2) = 0.051863797$ $\sigma_V(Sd^4) = 0.025095735$	$\sigma_V(Su^5) = 0.279893237$ $\sigma_V(Su^3) = 0.204601907$ $\sigma_V(Su) = 0.127982505$ $\sigma_V(Sd) = 0.069805285$ $\sigma_V(Sd^3) = 0.034700204$ $\sigma_V(Sd^5) = 0.016374009$

表 4.4 一因子模型各期節點公司資產波動度

此虛擬可轉換公司債各節點違約機率如表 4.5

$t=0$	$t=1$	$t=2$
$\lambda(S) = 0.00377293$	$\lambda(Su) = 0.002532338$ $\lambda(Sd) = 0.007079485$	$\lambda(Su^2) = 0.001292359$ $\lambda(S) = 0.004955785$ $\lambda(Sd^2) = 0.009379439$
$t=3$	$t=4$	$t=5$
$\lambda(Su^3) = 0.000505367$ $\lambda(Su) = 0.002875508$ $\lambda(Sd) = 0.006787491$ $\lambda(Sd^3) = 0.010210402$	$\lambda(Su^4) = 0.000150313$ $\lambda(Su^2) = 0.001507447$ $\lambda(S) = 0.004761347$ $\lambda(Sd^2) = 0.008240454$ $\lambda(Sd^4) = 0.010635978$	$\lambda(Su^5) = 0.000031120$ $\lambda(Su^3) = 0.000658778$ $\lambda(Su) = 0.003135185$ $\lambda(Sd) = 0.006624109$ $\lambda(Sd^3) = 0.009363021$ $\lambda(Sd^5) = 0.010965002$

表 4.5 一因子模型各期節點違約機率

由表4.3、表4.4、表4.5可看出股價越高時，公司資產越高，違約機率越低；
股價越低時，公司資產越低，違約機率越高。此結果與本研究所預期結果一致。

此虛擬可轉換公司債各節點分支機率如表4.6

節點	\tilde{p}_u	\tilde{p}_d	節點	\tilde{p}_u	\tilde{p}_d
(1,1)	0.46857	0.53143	(5,1) A	0.463916	0.536084
(2,1)	0.466972	0.533028	(5,2)	0.465656	0.534344
(2,2)	0.472848	0.527152	(5,3)	0.469846	0.530154
(3,1)	0.46538	0.53462	(5,4)	0.474356	0.525644
(3,2)	0.470097	0.529903	(5,5)	0.477481	0.522519
(3,3)	0.47584	0.52416	(6,1) B	0.463763	0.536237
(4,1)	0.464371	0.535629	(6,2)	0.464567	0.535433
(4,2)	0.467414	0.532586	(6,3)	0.467748	0.532252
(4,3)	0.472469	0.527531	(6,4)	0.472257	0.527743
(4,4)	0.476924	0.523076	(6,5)	0.475819	0.524181
			(6,6)	0.477911	0.522089

表 4.6 一因子模型各期節點分支機率

其中節點(1,1)的分支機率

$$\tilde{p}_u = \frac{e^{(r_f + \lambda(S)^*)\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{(0.05 + 0.00378006)1} - 0.6703}{1.4918 - 0.6703} = 0.46857$$

，其中 r_f 為無風險利率，

$$\lambda(S)^* = -\ln(1 - \lambda(S))/\Delta t = 0.00378006$$

， u 為股價上漲幅度 $u = e^{(\sigma_s^* \sqrt{\Delta t})}$ ， $d = 1/u$ ； $\tilde{p}_d = 1 - \tilde{p}_u = 0.53143$ 。

把同一期每個節點違約機率乘上其條件機率後加總，可得到一整期的條件違約機率，再將一期違約機率轉成條件違約機率，如表4.7所示

$\lambda_1=0.00377293$	$\lambda_2=0.00494882$	$\lambda_3=0.00538885$
$\lambda_4=0.00526054$	$\lambda_5=0.00523928$	$\lambda_6=0.00534785$

表 4.7 一因子模型各期條件違約機率

其中 λ_2 計算方法如下：假設節點(1,1)的存活機率為1，走到下一期節點(2,1)與節點(2,2)的機率分別是0.46857與0.53143，走到(2,1)的機率為 $(1-0.00377293)*0.46857$ ，走到(2,2)的機率為 $(1-0.00377293)*0.53143$ 。Structural model算出來的 unconditional default probability會等於Reduced model所算出來的 unconditional default probability，也就是 $(1-0.00377293)*0.46857*0.002532338+(1-0.00377293)*0.53143*0.007079485 = (1-\lambda_1)*\lambda_2$ ，可以逆推 λ_2 。

從每一期違約機率與回收比率，透過 Reduced Model 可以逆推有風險利率，如表 4.8 所示

$R_0^* = 0.05226632589$	$R_1^* = 0.05257887760$	$R_2^* = 0.05273357684$
$R_3^* = 0.05275963233$	$R_4^* = 0.05274632158$	$R_5^* = 0.05272515973$

表 4.8 一因子模型有風險利率

透過 $e^{-R_0^* \times \Delta t} = e^{-r_f \times \Delta t} [\lambda_1 \times \delta + (1 - \lambda_1)]$ 可以推出 R_0^* ，其中 r_f 為無風險利率；再透過 $e^{-R_1^* \times 2\Delta t} = e^{-r_f \times \Delta t} [\lambda_1 \times \delta + (1 - \lambda_1) e^{-r_f \times \Delta t} [\lambda_2 \times \delta + (1 - \lambda_2)]]$ 可推出 R_1^* 。

接著調整轉換後股價，以圖 4.2 的 A 點為例。A 點轉換前股價 S_{bc} 為 221.67168，其轉換價值 (Conversion value) 為 $221.67168 \times 2 = 443.34336$ 。轉換後股價計算方式如 (3.6.3) 式， $S_{ac} = (3167946.25418 - 9800 \times 100 \times e^{-0.05 \times 1}) / (10000 + 2 \times 200) = 214.97514$ ，轉換價值 (Conversion value) 為 $214.97514 \times 2 = 429.95028$ 。實際轉換價值會因為股票張數增加對股價產生稀釋作用，使轉換價格下降。此虛擬可轉債價格如表 4.9 所示

本模型	88.614343451
本模型(調整轉換後股價)	88.128632736113180

表 4.9 一因子模型可轉債價格

調整轉換後股價，使轉換價格下降，可轉債價格也會下降，其結果與預期相符。

由於 Cox-Ross-Rubinstein (1985) 的文章中證明，當切割期數 n 趨近於無窮大時，股價會滿足對數常態分配。因此 CB 價格會隨著期數切割越細而收斂，如圖 4.3 所示

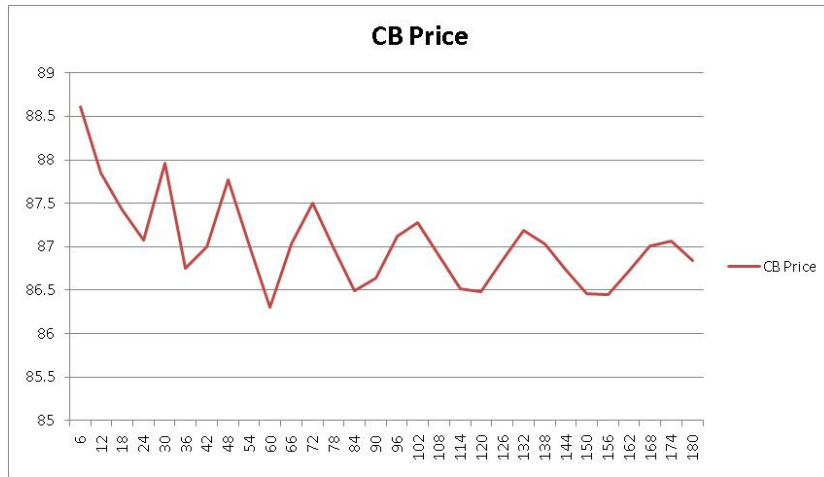


圖 4.3 一因子模型可轉債價格隨期數增加收斂

第二節 一因子敏感度分析

• 無風險利率敏感度分析

r_f	n=6	n=9
0.01	103.4956	100.8705
0.02	100.2652	96.80371
0.03	96.23531	93.06843
0.04	92.41573	89.62933
0.05	88.61434	86.38571
0.06	84.62762	82.95778
0.07	80.58572	79.08103
0.08	77.32311	75.06781
0.09	73.63572	70.42963
0.1	70.35199	73.76896

表 4.10 一因子模型無風險利率敏感度分析

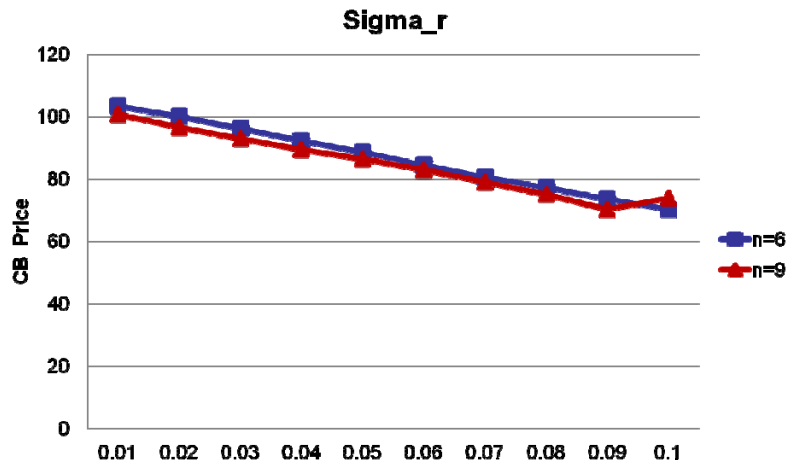


圖 4.4 一因子模型無風險利率敏感度分析

由於利率會影響可轉債評價時期望報酬的折現值，由表 4.10 與圖 4.4 可看出利率波動度約高，可轉債價格越低。

• 回收比率敏感度分析

delta	n=6	n=9
0	87.6880	86.2131
0.1	87.9196	86.2562
0.2	88.1512	86.2994
0.3	88.3828	86.3425
0.4	88.6143	86.3857
0.5	88.8459	86.4289
0.6	89.0775	86.4720
0.7	89.3091	86.5152
0.8	89.5407	86.5583
0.9	89.7723	86.6015

表 4.11 一因子模型回收比率敏感度分析

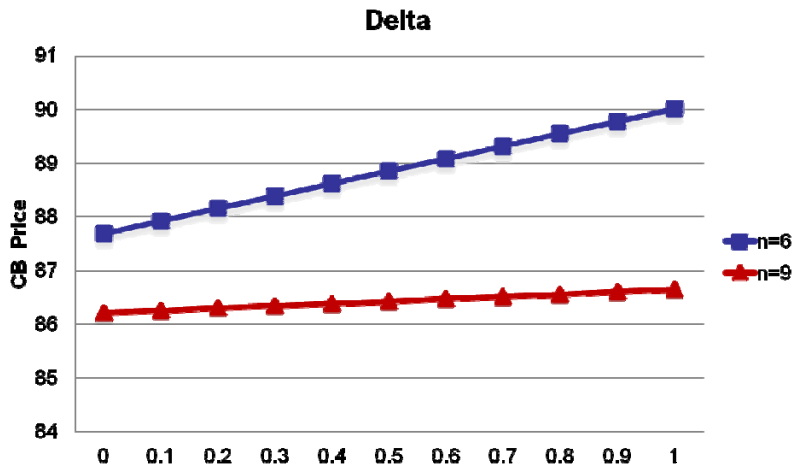


圖 4.5 一因子模型回收比率敏感度分析

回收比率為公司發生違約事件時，可轉債持有人可拿回債券票面價值的比例。由表 4.11 與圖 4.5 可得知當回收比例越高，發生違約事件時可轉債持有人拿回的票面價值比例越高，可轉債價格也就越高；反之亦然。

• 股價波動度敏感度分析

Sigma_s	n=6	n=9
0.1	75.1357	75.3633
0.15	77.8906	78.0745
0.2	80.5085	79.9812
0.25	82.5136	82.5389
0.3	84.3251	85.2171
0.35	86.1916	86.5374
0.4	88.6143	86.3857
0.45	89.8055	88.5823
0.5	87.8414	89.9696

表 4.12 一因子模型股價波動度敏感度分析

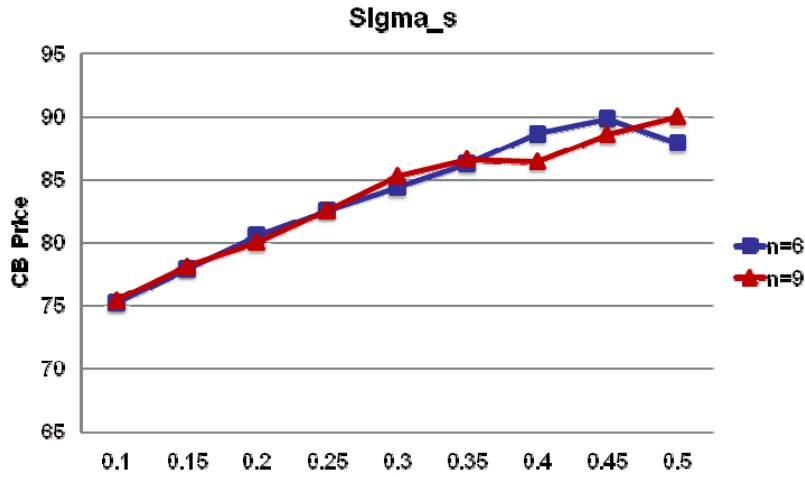


圖 4.6 一因子模型股價波動度敏感度分析

由於可轉債具有買權性質，股價波動度越高(標的物波動度越高)，可轉債(買權)價格也就越高。因此可以推論股價波動度與可轉債價格應該是成正相關，本研究所做的股價波動度分析也得到相同結論。

• 期初股價敏感度分析

S_0	n=6	n=9
5	71.4210	73.4194
10	72.7246	74.5266
15	75.6821	76.3094
20	78.8372	79.4830
25	81.5133	84.5897
30	88.6143	86.3857

表 4.13 一因子模型期初股價敏感度分析

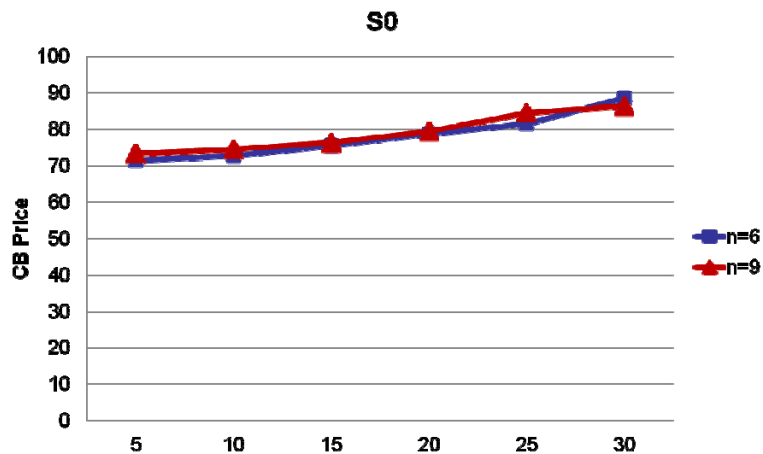


圖 4.7 一因子模型期初股價敏感度分析

因股價會影響可轉債的轉換價值，由表 4.13 與圖 4.7 可看出期初股價越高，可轉債價格也就越高。

第三節 二因子模型數值結果

本文二因子模型與 Chambers & Lu(2007)一樣用 Hung and Wang(2002)之數據，來檢驗是否合理。Chambers & Lu(2007)提供兩個例子，一個是虛擬之債券，另一個是真實存在之可轉換公司債。

• Case1：虛擬之可轉換公司債

此虛擬債券為三年到期，無利息及股利發放之可轉換公司債，並帶有買回條款，以下為參數設定：

期初股價(S_0) = 30、股價波動率(σ_S) = 0.23、到期日(T) = 3、時間間隔(Δt) = 1、債券面額(F) = 100、轉換比率(CR) = 3、債券贖回價格(CP) = 105、股價與利率相關係數(ρ) = -0.1、無風險利率 $R_0 = R_1 = R_2 = 0.1$ 、有風險利率 $R_0^* = R_1^* = R_2^* = 0.15$ 。

本研究自行假設參數：

利率波動率(σ_r) = 0.01、利率均數復迴歸率(a) = 0.1、流通在外股數(NS) = 10000、普通債券張數(NB) = 9800、可轉換公司債張數(NC) = 200、公司在到期日償還的負債(D) = $F \cdot (NB + NC) = 1000000$ 、公司債務維持水平(α) = 1、違約門檻(B_t) = $\alpha FP(t, T)$ 。

本節在此做二因子模型二元樹狀結構範例，符號定義如同一因子模型範例；在最後一期節點紀錄之資訊如同一因子模型範例表 4.1；中間期數節點紀錄之資訊一因子模型範例表 4.2。

為了圖片簡潔，繪圖省略違約之分支，如圖 4.8

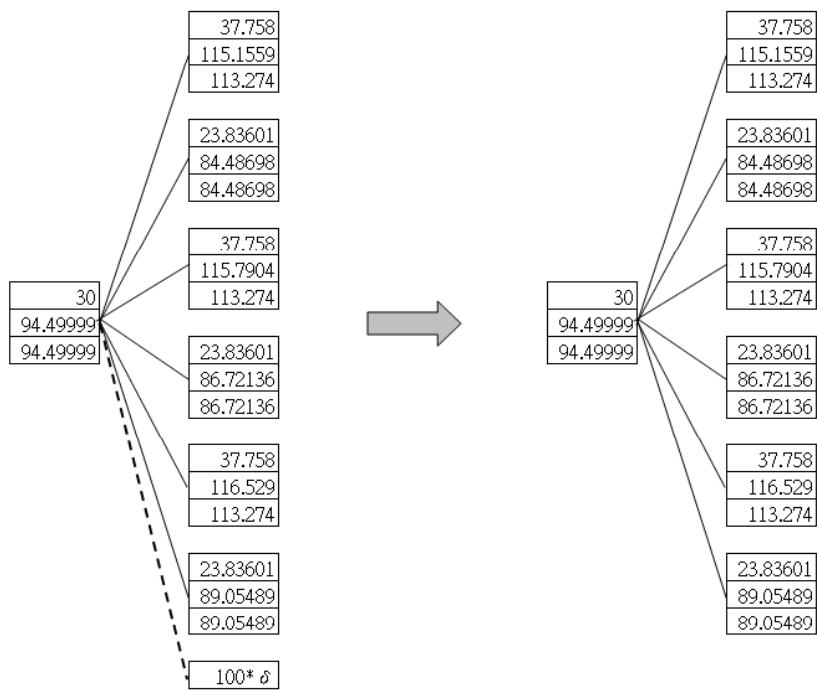


圖 4.8 省略違約分支

二因子模型七元樹狀結構如圖 4.9 所示



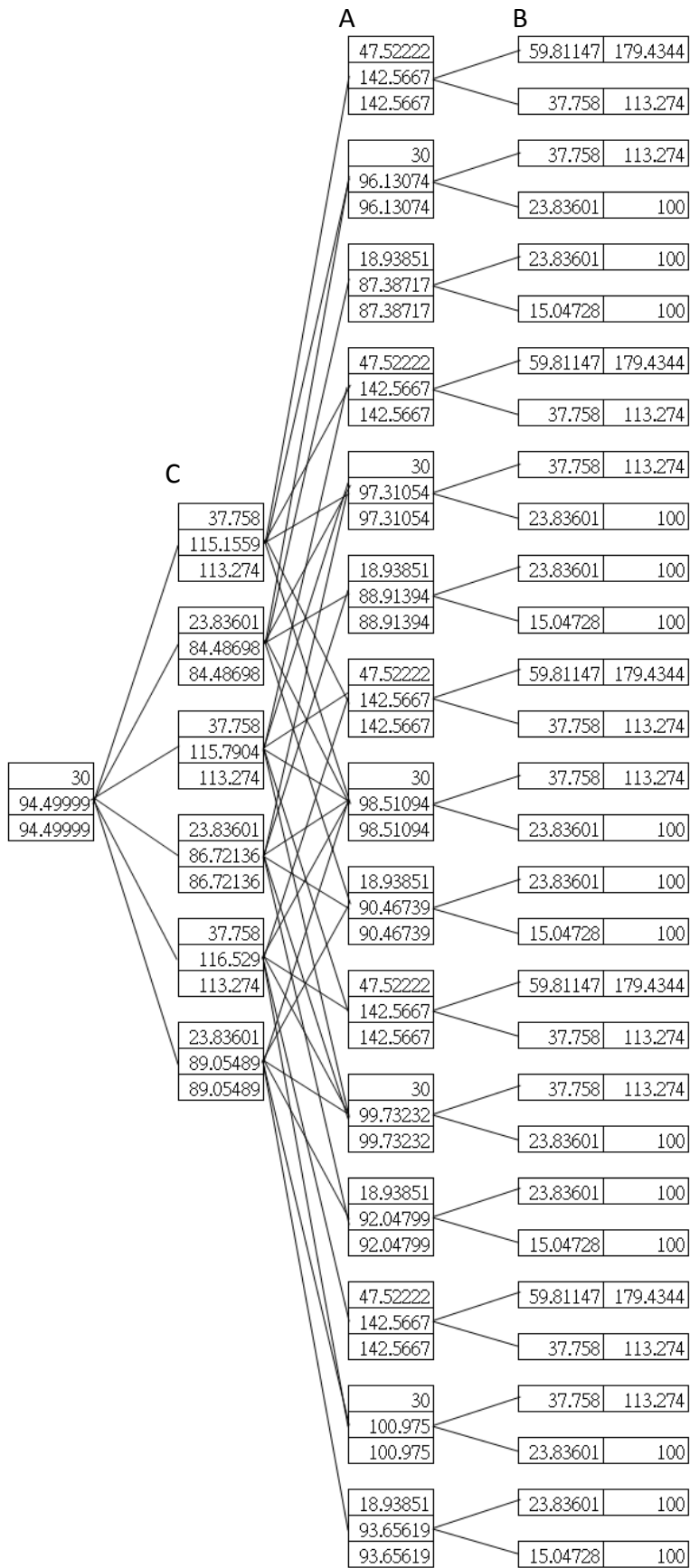


圖 4.9 二因子模型七元樹狀結構範例(不討論股權稀釋)

節點 B 的可轉債價值為 $\text{Max}(\min(100,105),59.81147*3) = 179.4344$ 。

節點 A 的可轉債價值為 $\text{Max}(\min(142.566666541169,105),47.52222*3) = 142.566658649503$ ，其中 Rollback value = $e^{-0.1348*1} (179.4343*(1-1.033e-07)* 0.753769 + 113.274*(1-1.033e-07)* 0.246231 + 1.033e-07*100*0.874) = 142.566666541169$ 。

節點 C 的可轉債價值為 $\text{Max}(\min(115.1558526,105), 37.7580*3) = 113.2740$ ，其中 Rollback value = $e^{-0.1174*1} (142.5666*(1-1.846e-07)* 0.073434 + 96.1307*(1-1.846e-07)*0.048232 + 142.5666*(1-1.846e-07)*0.466963 + 97.3105*(1-1.846e-07)*0.189704 + 142.5666*(1-1.846e-07)*0.170714 + 98.5109*(1-1.846e-07)*0.050953 + 1.846e-07*100*0.792) = 115.15585$ 。

由於本模型採用 Hull-White 利率模型，與 Chambers & Lu(2007)所採用的 BDT 利率模型不同，首先比較利率樹數據，如表 4.14 所示。

	t=1	t=2	t=3
HW	$R_0 = 0.10$	$R_u = 0.1099$ $R_d = 0.09$	$R_{uu} = 0.1209$ $R_{ud} = 0.099$ $R_{dd} = 0.081$
CL	$R_0 = 0.10$	$R_u = 0.1099$ $R_d = 0.09$	$R_{uu} = 0.1213$ $R_{ud} = 0.0993$ $R_{dd} = 0.0813$
本模型	$R_0 = 0.10$	$R_u = 0.1174$ $R_m = 0.1000$ $R_d = 0.0827$	$R_{uu} = 0.1348$ $R_u = 0.1175$ $R_m = 0.1002$ $R_d = 0.0829$ $R_{dd} = 0.0655$

表 4.14 二因子模型 Case1 利率樹比較

接下來列出本模型各期節點的公司資產與公司資產波動度，如表 4.15 與 4.16 所示

	t=1	t=2	t=3
本模型	$V(R,S)=1040818.2$	$V(R_u,S_u)=1169662.7$ $V(R_u,S_d)=1030442.7$	$V(R_{uu},S_u^2)=1349094.1$ $V(R_{uu},S)=1173871.9$

		$V(R_m, Su)=1196162.9$ $V(R_m, Sd)=1056943.0$ $V(R_d, Su)=1223549.8$ $V(R_d, Sd)=1084329.9$	$V(R_{uu}, Sd^2)=1063256.9$ $V(R_u, Su^2)=1364361.8$ $V(R_u, S)=1189139.6$ $V(R_u, Sd^2)=1078524.7$ $V(R_m, Su^2)=1379896.3$ $V(R_m, S)=1204674.1$ $V(R_m, Sd^2)=1094059.2$ $V(R_d, Su^2)=1395702.2$ $V(R_d, S)=1220480.0$ $V(R_d, Sd^2)=1109865.1$ $V(R_{dd}, Su^2)=1411784.2$ $V(R_{dd}, S)=1236562.0$ $V(R_{dd}, Sd^2)=1125947.1$
--	--	--	--

表 4.15 二因子模型 Case1 各期節點公司資產

	t=1	t=2	t=3
本模型	$\sigma_V(R, S)=0.066293$	$\sigma_V(R_u, Su)=0.074246$ $\sigma_V(R_u, Sd)=0.053203$ $\sigma_V(R_m, Su)=0.072601$ $\sigma_V(R_m, Sd)=0.051869$ $\sigma_V(R_d, Su)=0.070976$ $\sigma_V(R_d, Sd)=0.050559$	$\sigma_V(R_{uu}, Su^2)=0.081018$ $\sigma_V(R_{uu}, S)=0.058779$ $\sigma_V(R_{uu}, Sd^2)=0.040967$ $\sigma_V(R_u, Su^2)=0.080111$ $\sigma_V(R_u, S)=0.058025$ $\sigma_V(R_u, Sd^2)=0.040387$ $\sigma_V(R_m, Su^2)=0.079209$ $\sigma_V(R_m, S)=0.057276$ $\sigma_V(R_m, Sd^2)=0.039813$ $\sigma_V(R_d, Su^2)=0.078312$ $\sigma_V(R_d, S)=0.056535$ $\sigma_V(R_d, Sd^2)=0.039246$ $\sigma_V(R_{dd}, Su^2)=0.077420$ $\sigma_V(R_{dd}, S)=0.055799$ $\sigma_V(R_{dd}, Sd^2)=0.038686$

表 4.16 二因子模型 Case1 各期節點公司資產波動度

本模型的各期節點的違約機率，如表 4.17 所示。

	t=1	t=2	t=3
本模型	$\lambda(R, S)=3.455e-07$	$\lambda(R_u, Su)=1.846e-07$ $\lambda(R_u, Sd)=8.692e-07$ $\lambda(R_m, Su)=2.111e-07$	$\lambda(R_{uu}, Su^2)=1.033e-07$ $\lambda(R_{uu}, S)=5.958e-07$ $\lambda(R_{uu}, Sd^2)=1.856e-06$

		$\lambda(R_m, S_d) = 9.484e-07$ $\lambda(R_d, S_u) = 2.404e-07$ $\lambda(R_d, S_d) = 1.032e-06$	$\lambda(R_u, S_u^2) = 1.120e-07$ $\lambda(R_u, S) = 6.278e-07$ $\lambda(R_u, S_d^2) = 1.920e-06$ $\lambda(R_m, S_u^2) = 1.212e-07$ $\lambda(R_m, S) = 6.610e-07$ $\lambda(R_m, S_d^2) = 1.985e-06$ $\lambda(R_d, S_u^2) = 1.310e-07$ $\lambda(R_d, S) = 6.954e-07$ $\lambda(R_d, S_d^2) = 2.050e-06$ $\lambda(R_{dd}, S_u^2) = 1.414e-07$ $\lambda(R_{dd}, S) = 7.310e-07$ $\lambda(R_{dd}, S_d^2) = 2.117e-06$
--	--	---	---

表 4.17 二因子模型 Case1 各期節點違約機率

由表 4.15、表 4.16、表 4.17 可以看出，利率相同時(公司違約門檻一樣)，股價越高(公司資產越高)，違約機率越低，反之亦然；而股價相同時，利率越高(公司違約門檻越低)，違約機率越低，反之亦然。

本模型回收比率為內生給定，各期節點回收比率如表 4.18 所示。

	t=1	t=2	t=3
HW	0.32	0.32	0.32
CL	0.32	0.32	0.32
本模型	$\delta(R, S) = 0.741$	$\delta(R_u, S_u) = 0.792$ $\delta(R_u, S_d) = 0.792$ $\delta(R_m, S_u) = 0.819$ $\delta(R_m, S_d) = 0.819$ $\delta(R_d, S_u) = 0.846$ $\delta(R_d, S_d) = 0.846$	$\delta(R_{uu}, S_u^2) = 0.874$ $\delta(R_{uu}, S) = 0.874$ $\delta(R_{uu}, S_d^2) = 0.874$ $\delta(R_u, S_u^2) = 0.889$ $\delta(R_u, S) = 0.889$ $\delta(R_u, S_d^2) = 0.889$ $\delta(R_m, S_u^2) = 0.905$ $\delta(R_m, S) = 0.905$ $\delta(R_m, S_d^2) = 0.905$ $\delta(R_d, S_u^2) = 0.920$ $\delta(R_d, S) = 0.920$ $\delta(R_d, S_d^2) = 0.920$ $\delta(R_{dd}, S_u^2) = 0.937$ $\delta(R_{dd}, S) = 0.937$ $\delta(R_{dd}, S_d^2) = 0.937$

表 4.18 二因子模型 Case1 各期節點回收比率

由於本模型將公司債務維持水平(α)設為 1，因此回收比率(δ)就會等於折現因子。

各節點分支機率如表 4.19 所示

節點	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
(1,1)	0.097983	0.068683	0.446255	0.220412	0.125144	0.041523
(2,1) C	0.073434	0.048232	0.466963	0.189704	0.170714	0.050953
(2,2)	0.073435	0.048232	0.466964	0.189703	0.170714	0.050953
(2,3)	0.098004	0.068662	0.446334	0.220333	0.125163	0.041504
(2,4)	0.098005	0.068662	0.446335	0.220332	0.125163	0.041504
(2,5)	0.125393	0.096274	0.412784	0.243883	0.090428	0.031238
(2,6)	0.125393	0.096274	0.412785	0.243881	0.090429	0.031238
(3,1) A	0.753769	0.246231				
(3,2)	0.753771	0.246229				
(3,3)	0.753774	0.246226				
(3,4)	0.711427	0.288573				
(3,5)	0.711428	0.288572				
(3,6)	0.711431	0.288569				
(3,7)	0.669811	0.330189				
(3,8)	0.669813	0.330187				
(3,9)	0.669816	0.330184				
(3,10)	0.628910	0.371090				
(3,11)	0.628912	0.371088				
(3,12)	0.628915	0.371085				
(3,13)	0.588712	0.411288				
(3,14)	0.588713	0.411287				
(3,15)	0.588717	0.411283				

表 4.19 二因子模型 Case1 各期節點分支機率

把同一期每個節點違約機率乘上其條件機率後加總，可得到一整期的違約機率，再轉成條件違約機率，本模型就可與 Chambers & Lu(2007)以 Reduced Model 算出的條件違約機率比較，如表 4.20 所示。

HW	$\lambda_1=0.0717$	$\lambda_2=0.0735$	$\lambda_3=0.0755$
CL	$\lambda_1=0.0717214$	$\lambda_2=0.0774391$	$\lambda_3=0.0843733$
本模型	$\lambda_1=3.45493e-07$	$\lambda_2=4.53957e-07$	$\lambda_3=5.61967e-07$

表 4.20 二因子模型 Case1 每期違約機率比較

由於本模型有許多自行假設參數，這些假設參數會影響計算出的違約機率，與之前文獻有些差距。

求出每一期違約機率與各節點回收比率後，可以透過 Reduced Model 逆推有風險利率，如表 4.21 所示

CL	$R_0^* = 0.15$	$R_1^* = 0.15$	$R_2^* = 0.15$
本模型	$R_0^* = 0.10000008955$	$R_1^* = 0.10000007242$	$R_2^* = 0.10000004313$

表 4.21 二因子模型 Case1 有風險利率

接著調整轉換後股價，以圖 4.9 的 A 點為例。A 點轉換前股價 S_{bc} 為 47.52222，其轉換價值 (Conversion value) 為 $47.52222 * 3 = 142.56666$ 。轉換後股價計算方式如 (3.6.3) 式， $S_{ac} = (1169662.708668 - 9800 * 100 * e^{-0.1348 * 1}) / (10000 + 3 * 200) = 37.115251$ ，轉換價值 (Conversion value) 為 $37.115251 * 3 = 111.345153$ 。實際轉換價值會因為股票張數增加對股價產生稀釋作用，使轉換價格下降。

本模型求得可轉債價格與之前文獻比較，如表 4.22 所示。

	CB Price
Huang and Wang	90
Chambers and Lu	93.15353
本模型	94.499989204148620
本模型(調整轉換後股價)	93.427192115699700

表 4.22 二因子模型 Case1 可轉債價格比較

本模型由於利率樹、違約機率和回收比率與之前文獻不同，所求得可轉債價格較之前文獻高，但是調整轉換後股價可轉債的價格會下降。

如同一因子模型，CB 價格會隨著期數切割越細而收斂，如圖 4.10 所示

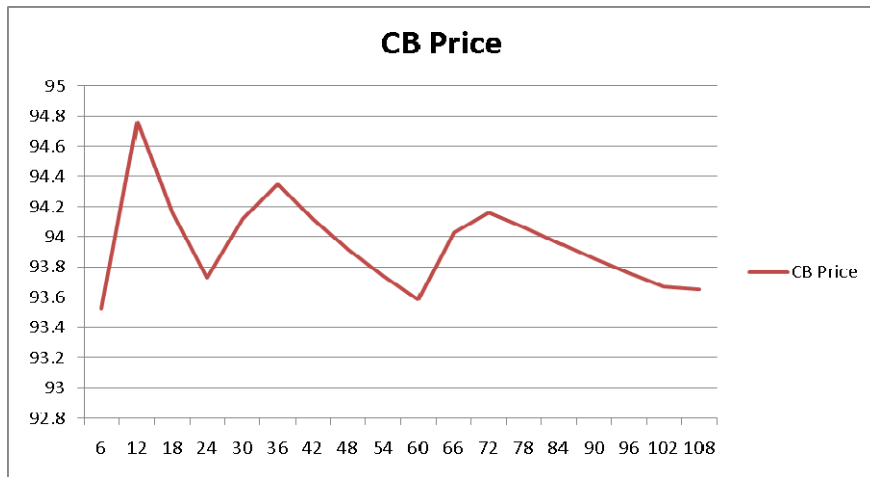


圖 4.10 二因子模型 Case1 可轉債價格隨期數增加收斂

二因子模型十元樹狀結構範例之參數設定如同二因子模型七元樹狀結構範例，只將 σ_r 調整成 0.02，令無風險利率 $R_0 = R_1 = R_2 = 0.2$ 。符號定義如同一因子模型範例；在最後一期節點紀錄之資訊如同一因子模型範列表 4.1；中間期數節點紀錄之資訊一因子模型範列表 4.2。

為了圖片簡潔，繪圖省略違約之分支，如圖 4.11

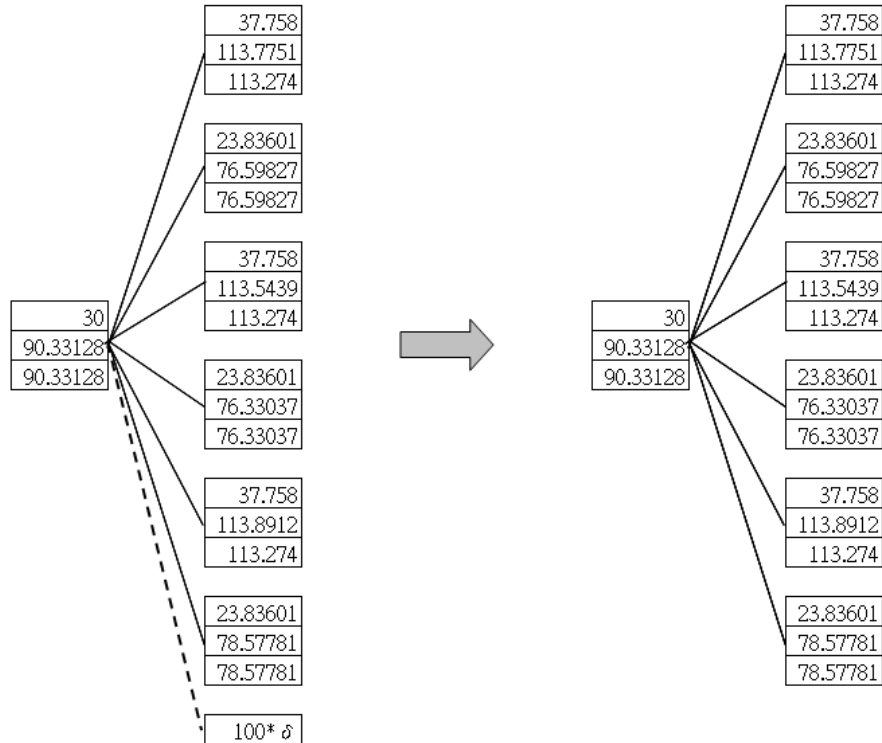


圖 4.11 省略違約分支

二因子模型十元樹狀結構如圖 4.12 所示

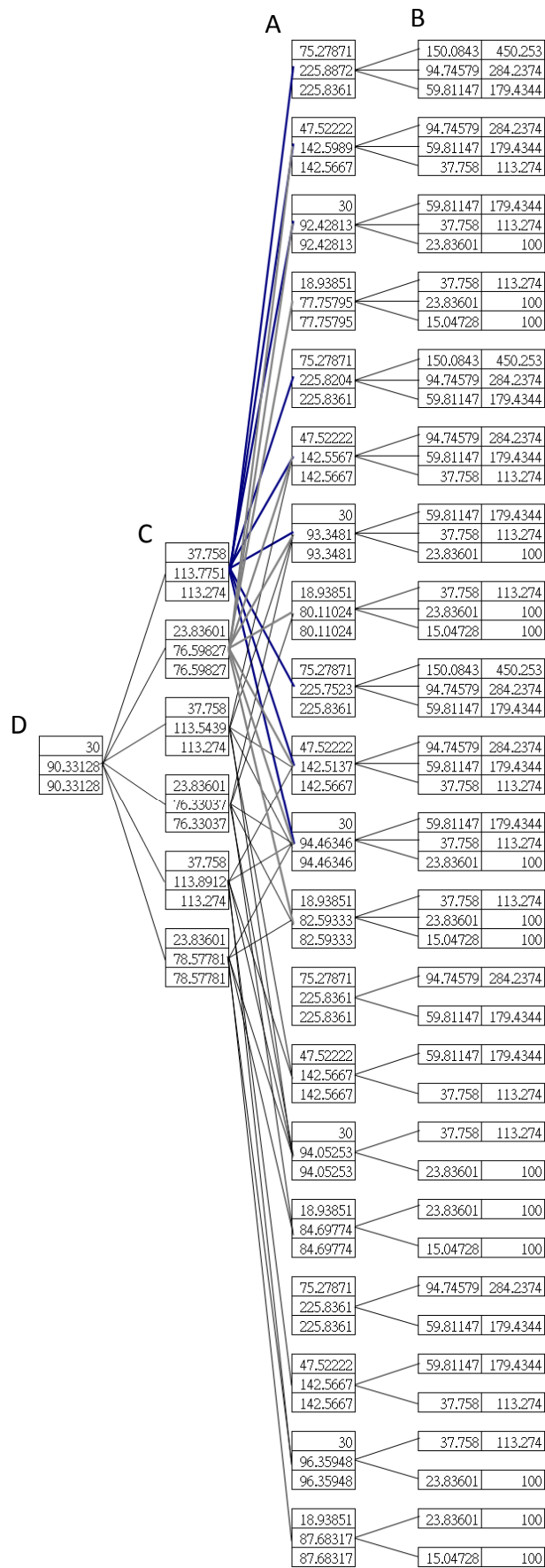


圖 4.12 二因子模型十元樹狀結構範例

節點 B 的可轉債價值為 $\text{Max}(\text{min}(100,105), 150.0843*3) = 450.25301$ 。

節點 A 的可轉債價值為 $\text{Max}(\text{min}(225.8872,105), 75.27871*3) = 225.836135$ ，

Rollback value = $e^{-0.2700*1}(450.2530*0.140*(1-2.630e-09)+$
 $284.2373*0.749*(1-2.630e-09)+179.4343*0.110*(1-2.630e-09)+2.630e-09*0.763*10$
 $0) = 225.8872$ 。

節點 C 的可轉債價值為 $\text{Max}(\text{min}(113.7751,105), 37.7580*3) = 113.2740$ ，其中

Rollback value = $e^{-0.2348*1}(225.8361*(1-6.280e-08)*0.012 +$
 $142.5666*(1-6.280e-08)*0.090 + 92.4281*(1-6.280e-08)*0.018 +$
 $225.8361*(1-6.280e-08)*0.067 + 142.5666*(1-6.280e-08)*0.462 +$
 $93.3480*(1-6.280e-08)*0.127 + 225.8361*(1-6.280e-08)*0.022 +$
 $142.5666*(1-6.280e-08)*0.194 + 94.4634*(1-6.280e-08)*0.004 +$
 $6.280e-08*100*0.792) = 113.7751$ 。

二因子模型十元樹之利率樹如表 4.23 所示

t=1	t=2	t=3
$R_0 = 0.2000$	$R_u = 0.2348$	$R_{uu} = 0.2700$
	$R_m = 0.2002$	$R_u = 0.2354$
	$R_d = 0.1656$	$R_m = 0.2007$
		$R_d = 0.1661$
		$R_{dd} = 0.1314$

表 4.23 二因子模型十元樹之利率樹

二因子模型十元樹之各節點的公司資產與公司資產波動度，如表 4.24

與表 4.25 所示

t=1	t=2	t=3
$V(R,S) = 848811$	$V(R_u, S_u) = 1004748$	$V(R_{uu}, S_u^4) = 1516163$
	$V(R_u, S_d) = 865528$	$V(R_{uu}, S_u^2) = 1238598$
	$V(R_m, S_u) = 1047416$	$V(R_{uu}, S) = 1063376$
	$V(R_m, S_d) = 908196$	$V(R_{uu}, S_d^2) = 952761$
	$V(R_d, S_u) = 1092986$	$V(R_u, S_u^4) = 1543071$
	$V(R_d, S_d) = 953766$	$V(R_u, S_u^2) = 1265506$
		$V(R_u, S) = 1090283$

		$V(R_u, Sd^2) = 979669$ $V(R_m, Su^4) = 1570926$ $V(R_m, Su^2) = 1293362$ $V(R_m, S) = 1118139$ $V(R_m, Sd^2) = 1007524$ $V(R_d, Su^4) = 1599764$ $V(R_d, Su^2) = 1322199$ $V(R_d, S) = 1146977$ $V(R_d, Sd^2) = 1036362$ $V(R_{dd}, Su^4) = 1629619$ $V(R_{dd}, Su^2) = 1352054$ $V(R_{dd}, S) = 1176831$ $V(R_{dd}, Sd^2) = 1066217$
--	--	--

表 4.24 二因子模型十元樹之各期節點公司資產

t=1	t=2	t=3
$\sigma_V(R, S) = 0.081290$	$\sigma_V(R_u, Su) = 0.086432$ $\sigma_V(R_u, Sd) = 0.063340$ $\sigma_V(R_m, Su) = 0.082912$ $\sigma_V(R_m, Sd) = 0.060364$ $\sigma_V(R_d, Su) = 0.079455$ $\sigma_V(R_d, Sd) = 0.057480$	$\sigma_V(R_{uu}, Su^4) = 0.114196$ $\sigma_V(R_{uu}, Su^2) = 0.088245$ $\sigma_V(R_{uu}, S) = 0.064887$ $\sigma_V(R_{uu}, Sd^2) = 0.045718$ $\sigma_V(R_u, Su^4) = 0.112205$ $\sigma_V(R_u, Su^2) = 0.086369$ $\sigma_V(R_u, S) = 0.063286$ $\sigma_V(R_u, Sd^2) = 0.044462$ $\sigma_V(R_m, Su^4) = 0.110215$ $\sigma_V(R_m, Su^2) = 0.084509$ $\sigma_V(R_m, S) = 0.061709$ $\sigma_V(R_m, Sd^2) = 0.043233$ $\sigma_V(R_d, Su^4) = 0.108229$ $\sigma_V(R_d, Su^2) = 0.082666$ $\sigma_V(R_d, S) = 0.060158$ $\sigma_V(R_d, Sd^2) = 0.042030$ $\sigma_V(R_{dd}, Su^4) = 0.106246$ $\sigma_V(R_{dd}, Su^2) = 0.080840$ $\sigma_V(R_{dd}, S) = 0.058631$ $\sigma_V(R_{dd}, Sd^2) = 0.040853$

表 4.25 二因子模型十元樹之各期節點公司資產波動度

二因子模型十元樹之各節點的違約機率，如表 4.26 所示。

t=1	t=2	t=3
$\lambda(R,S) = 1.009e-07$	$\lambda(R_u, Su) = 6.280e-08$ $\lambda(R_u, Sd) = 4.302e-07$ $\lambda(R_m, Su) = 8.714e-08$ $\lambda(R_m, Sd) = 5.330e-07$ $\lambda(R_d, Su) = 1.186e-07$ $\lambda(R_d, Sd) = 6.518e-07$	$\lambda(R_{uu}, Su^4) = 2.630e-09$ $\lambda(R_{uu}, Su^2) = 5.277e-08$ $\lambda(R_{uu}, S) = 3.839e-07$ $\lambda(R_{uu}, Sd^2) = 1.397e-06$ $\lambda(R_u, Su^4) = 3.445e-09$ $\lambda(R_u, Su^2) = 6.318e-08$ $\lambda(R_u, S) = 4.319e-07$ $\lambda(R_u, Sd^2) = 1.508e-06$ $\lambda(R_m, Su^4) = 4.477e-09$ $\lambda(R_m, Su^2) = 7.524e-08$ $\lambda(R_m, S) = 4.842e-07$ $\lambda(R_m, Sd^2) = 1.623e-06$ $\lambda(R_d, Su^4) = 5.774e-09$ $\lambda(R_d, Su^2) = 8.911e-08$ $\lambda(R_d, S) = 5.408e-07$ $\lambda(R_d, Sd^2) = 1.744e-06$ $\lambda(R_{dd}, Su^4) = 7.390e-09$ $\lambda(R_{dd}, Su^2) = 1.050e-07$ $\lambda(R_{dd}, S) = 6.019e-07$ $\lambda(R_{dd}, Sd^2) = 1.868e-06$

表 4.26 二因子模型十元樹之各期節點違約機率

二因子模型十元樹之各節點回收比率如表 4.27 所示。

t=1	t=2	t=3
$\delta(R,S) = 0.549$	$\delta(R_u, Su) = 0.627$ $\delta(R_u, Sd) = 0.627$ $\delta(R_m, Su) = 0.670$ $\delta(R_m, Sd) = 0.670$ $\delta(R_d, Su) = 0.715$ $\delta(R_d, Sd) = 0.715$	$\delta(R_{uu}, Su^4) = 0.763$ $\delta(R_{uu}, Su^2) = 0.763$ $\delta(R_{uu}, S) = 0.763$ $\delta(R_{uu}, Sd^2) = 0.763$ $\delta(R_u, Su^4) = 0.790$ $\delta(R_u, Su^2) = 0.790$ $\delta(R_u, S) = 0.790$ $\delta(R_u, Sd^2) = 0.790$ $\delta(R_m, Su^4) = 0.818$ $\delta(R_m, Su^2) = 0.818$ $\delta(R_m, S) = 0.818$ $\delta(R_m, Sd^2) = 0.818$ $\delta(R_d, Su^4) = 0.847$

		$\delta(R_d, Su^2) = 0.847$ $\delta(R_d, S) = 0.847$ $\delta(R_d, Sd^2) = 0.847$ $\delta(R_{dd}, Su^4) = 0.877$ $\delta(R_{dd}, Su^2) = 0.877$ $\delta(R_{dd}, S) = 0.877$ $\delta(R_{dd}, Sd^2) = 0.877$
--	--	---

表 4.27 二因子模型十元樹之各節點回收比率

由於本模型將公司債務維持水平(α)設為 1，因此回收比率(δ)就會等於折現因子。

二因子模型十元樹之各節點分支機率如表 4.28 所示

節點	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉
(1,1) D	0.145	0.021	0.613	0.053	0.161	0.005			
(2,1) C	0.012	0.090	0.018	0.067	0.462	0.127	0.022	0.194	0.004
(2,2)	0.012	0.090	0.018	0.067	0.462	0.127	0.022	0.194	0.004
(2,3)	0.021	0.613	0.053	0.161	0.005	0.021			
(2,4)	0.021	0.613	0.053	0.161	0.005	0.021			
(2,5)	0.048	0.545	0.111	0.112	0.009	0.048			
(2,6)	0.048	0.545	0.111	0.112	0.009	0.048			
(3,1) A	0.140	0.749	0.110						
(3,2)	0.140	0.749	0.110						
(3,3)	0.140	0.749	0.110						
(3,4)	0.140	0.749	0.110						
(3,5)	0.103	0.747	0.148						
(3,6)	0.103	0.747	0.148						
(3,7)	0.103	0.747	0.148						
(3,8)	0.103	0.747	0.148						
(3,9)	0.071	0.735	0.192						
(3,10)	0.071	0.735	0.192						
(3,11)	0.071	0.735	0.192						
(3,12)	0.071	0.735	0.192						
(3,13)	0.832	0.167							
(3,14)	0.832	0.167							
(3,15)	0.832	0.167							
(3,16)	0.832	0.167							
(3,17)	0.745	0.254							
(3,18)	0.745	0.254							

(3,19)	0.745	0.254							
(3,20)	0.745	0.254							

表 4.28 二因子模型十元樹之各節點分支機率

A 節點分支機率計算方式如下：先算出

$$\beta = \ln(94.7457/75.2787) - (0.2700 - 0.23^2/2) = -0.0135, \alpha = -0.0135 + 2 \times 0.23 = 0.4465,$$

$$\gamma = -0.0135 - 2 \times 0.23 = -0.4735, \text{ 透過(2.1.8)式解方程式即可得三條分支機率。}$$

C 節點分支機率計算方式如下：跟 A 節點一樣，先算出股價三條分支機率

$$\tilde{p}_u = 0.10262, \tilde{p}_m = 0.74779, \tilde{p}_d = 0.14959, \text{ 再跟 Hull-White tree 三條分支機率}$$

$$P_u = 0.12167, P_m = 0.65667, P_d = 0.22167 \text{ 結合成九條分支，透過表 3.2 調整，由}$$

$$\rho = \frac{E(RS) - E(S)E(R)}{\sqrt{V(S)}\sqrt{V(R)}} \text{ 等式可解 } \varepsilon = -0.028867, \text{ 代回表 3.2 即可求得九條分支機率。}$$

D 節點分支機率計算方式如下：由 CRR tree 兩條分支機率

$$\tilde{p}_u = 0.91985, \tilde{p}_d = 0.08015 \text{ 與 Hull-White tree 三條分支機率}$$

$$P_u = 0.16667, P_m = 0.66667, P_d = 0.16667 \text{ 結合成六條分支，透過表 3.1 調整，由}$$

$$\rho = \frac{E(RS) - E(S)E(R)}{\sqrt{V(S)}\sqrt{V(R)}} \text{ 等式可解 } \varepsilon = -0.00784, \text{ 代回表 3.1 即可求得六條分支機率。}$$

把同一期每個節點違約機率乘上其條件機率後加總，可得到一整期的違約機率，再轉成條件違約機率，本模型就可與 Chambers & Lu(2007)以 Reduced Model 算出的條件違約機率比較，如表 4.29 所示

$\lambda_1 = 1.00864388e-07$	$\lambda_2 = 1.22886471e-07$	$\lambda_3 = 1.55222154e-07$
------------------------------	------------------------------	------------------------------

表 4.29 二因子模型十元樹每期違約機率比較

其中 λ_2 計算方法如下：假設假設節點(1,1)的存活機率為 1，走到下一期節點六條分之機率如表 4.28 的節點(1,1)所示，分支機率乘以第 0 到 1 期不違約的機率就是走到第 1 期各節點的機率，再乘上第 1 到 2 期違約機率加總可得到一整期違約機率，令 $\lambda_2' = 0.145 \times (1 - 1.009e-07) \times 6.280e-08 + 0.021 \times (1 - 1.009e-07) \times 4.302e-07 + 0.613 \times (1 - 1.009e-07) \times 8.714e-08 + 0.161 \times (1 - 1.009e-07) \times 5.330e-07 + 0.161 \times (1 - 1.009e-07) \times 1.186e-07 + 0.005 \times (1 - 1.009e-07) \times 6.518e-07$ 。Structural model

算出來的 unconditional default probability 會等於 Reduced model 所算出來的 unconditional default probability，也就是 $[P_u(1-\lambda_1)+P_m(1-\lambda_1)+P_d(1-\lambda_1)]\lambda_2=\lambda_2'$ 來求出 λ_2 ，其中 P_u 、 P_m 、 P_d 分別為 Hull-White tree 走到下期利率上漲、持平、下跌機率。

求出每一期違約機率與各節點回收比率後，可以透過 Reduced Model 逆推有風險利率，如表 4.30 所示

$R_0^* = 0.20000004550$	$R_1^* = 0.20000003685$	$R_2^* = 0.20000002284$
-------------------------	-------------------------	-------------------------

表 4.30 二因子模型十元樹有風險利率

透過 $e^{-R_0^* \times \Delta t} = e^{-R_0^* \times \Delta t} [\delta \lambda_1 + (1-\lambda_1)]$ 等式可以推得 R_0^* ，

$e^{-R_1^* \times 2\Delta t} = e^{-R_0^* \times \Delta t} [\delta \lambda_1 + e^{-R_u \times \Delta t} P_u(1-\lambda_1) [\lambda_2 \times \delta + (1-\lambda_2)] + e^{-R_m \times \Delta t} P_m(1-\lambda_1) [\lambda_2 \times \delta + (1-\lambda_2)] + e^{-R_d \times \Delta t} P_d(1-\lambda_1) [\lambda_2 \times \delta + (1-\lambda_2)]]$ 等式可以逆推 R_1^* 。

接著調整轉換後股價，以圖 4.12 的 B 點為例。A 點轉換前股價 S_{bc} 為 75.278711，其轉換價值(Conversion value)為 $75.278711 \times 3 = 225.836135$ 。轉換後股價計算方式如(3.6.3)式， $S_{ac} = (1516163 - 9800 \times 100 \times e^{-0.270004 \times 1}) / (10000 + 3 \times 200) = 72.457985$ ，轉換價值(Conversion value)為 $72.457985 \times 3 = 217.373955$ 。實際轉換價值會因為股票張數增加對股價產生稀釋作用，使轉換價格下降，如表 4.31 所示

本模型	90.326410819779230
本模型(調整轉換後股價)	88.353342620851500

表 4.31 二因子模型十元樹可轉債價格

• Case2：Lucent 可轉換公司債

此可轉換公司債為六年到期，無利息及股利發放，並帶有買回條款，在滿三、四、五年時，可以事先預定之價格買回，以下為參數設定：

期初股價(S_0) = 15.006、股價波動率(σ_s) = 0.353836、到期日(T) = 6、時間間隔(Δt) = 1、債券面額(F) = 100、轉換比率(CR) = 5.07524、債券贖回價格(CP) =

94.205(t=3~4)、96.098(t=4~5)、98.030(t=5~6)、股價與利率相關係數(ρ) = -0.1、無風險利率 $R_0 = 0.05969$ 、 $R_1 = 0.06209$ 、 $R_2 = 0.06373$ 、 $R_3 = 0.06455$ 、 $R_4 = 0.06504$ 、 $R_5 = 0.06554$ 、有風險利率 $R_0^* = 0.0611$ 、 $R_1^* = 0.0646$ 、 $R_2^* = 0.0663$ 、 $R_3^* = 0.0678$ 、 $R_4^* = 0.0683$ 、 $R_5^* = 0.06894$ 。

本研究自行假設參數：

利率波動率(σ_r) = 0.01、利率均數復迴歸率(a) = 0.1、流通在外股數(NS) = 10000、普通債券張數(NB) = 9800、可轉換公司債張數(NC) = 200、公司在到期日償還的負債(D) = $F \cdot (NB + NC) = 1000000$ 、公司債務維持水平(α) = 1、違約門檻(B_t) = $\alpha FP(t, T)$ 。

本模型與之前文獻利率樹比較，如表 4.32 所示。

	t=1	t=2	t=3
CL	$R_0 = 0.05969$	$R_u = 0.0709403$ $R_d = 0.05808$	$R_{uu} = 0.08114$ $R_{ud} = 0.0664319$ $R_{dd} = 0.0543898$
	t=4	t=5	t=6
	$R_{uuu} = 0.0893761$ $R_{uud} = 0.0731752$ $R_{udd} = 0.0599109$ $R_{ddd} = 0.049051$	$R_{uuuu} = 0.0985016$ $R_{uuud} = 0.0806464$ $R_{uudd} = 0.0660279$ $R_{uddd} = 0.0540592$ $R_{dddd} = 0.04426$	$R_{uuuuu} = 0.110334$ $R_{uuuud} = 0.0903339$ $R_{uuudd} = 0.0739593$ $R_{uuddd} = 0.0605529$ $R_{udddd} = 0.0495766$ $R_{ddddd} = 0.04059$
本模型	t=1	t=2	t=3
	$R_0 = 0.05969$	$R_u = 0.08186$ $R_m = 0.06454$ $R_d = 0.04722$	$R_{uu} = 0.10183$ $R_u = 0.08451$ $R_m = 0.06719$ $R_d = 0.04987$ $R_{dd} = 0.03255$
	t=4	t=5	t=6
	$R_{uu} = 0.10202$ $R_u = 0.08470$ $R_m = 0.06738$ $R_d = 0.05006$ $R_{dd} = 0.03274$	$R_{uu} = 0.10223$ $R_u = 0.08491$ $R_m = 0.06759$ $R_d = 0.05027$ $R_{dd} = 0.03295$	$R_{uu} = 0.10352$ $R_u = 0.08620$ $R_m = 0.06888$ $R_d = 0.05156$ $R_{dd} = 0.03424$

表 4.32 二因子模型 Case2 利率樹比較

本模型股價樹如表 4.33 所示

t=1	t=2	t=3
Su = 21.376 Sd = 10.534	Su ² = 30.451 S = 15.006 Sd ² = 7.394	Su ³ = 43.378 Su = 21.376 Sd = 10.534 Sd ³ = 5.191
t=4	t=5	t=6
Su ⁴ = 61.793 Su ² = 30.451 S = 15.006 Sd ² = 7.394 Sd ⁴ = 3.644	Su ⁵ = 88.025 Su ³ = 43.378 Su = 21.376 Sd = 10.534 Sd ³ = 5.191 Sd ⁵ = 927239.6	Su ⁶ = 125.394 Su ⁴ = 61.793 Su ² = 30.451 S = 15.006 Sd ² = 7.394 Sd ⁴ = 3.644 Sd ⁶ = 1.795

表 4.33 二因子模型 Case2 股價樹

本模型的每一期各節點的公司資產與公司資產波動度，如表 4.34 與表 4.35

所示

	t=1	t=2	t=3
本模型	V(R,S)=824926.7	V(R _u ,Su)=880529.7 V(R _u ,Sd)=772106.6 V(R _m ,Su)=929539.4 V(R _m ,Sd)=821116.3 V(R _d ,Su)=982151.3 V(R _d ,Sd)=873728.2	V(R _{uu} ,Su ²)=981867.0 V(R _{uu} ,S)=827416.0 V(R _{uu} ,Sd ²)=751304.1 V(R _u ,Su ²)=1023431.4 V(R _u ,S)=868980.4 V(R _u ,Sd ²)=792868.5 V(R _m ,Su ²)=1067554.8 V(R _m ,S)=913103.8 V(R _m ,Sd ²)=836991.9 V(R _d ,Su ²)=1114386.3 V(R _d ,S)=959935.3 V(R _d ,Sd ²)=883823.3 V(R _{dd} ,Su ²)=1164082.6 V(R _{dd} ,S)=1009631.6 V(R _{dd} ,Sd ²)=933519.7
	t=4	t=5	t=6

$V(R_{uu}, Su^3)=1176462.3$ $V(R_{uu}, Su)=956443.6$ $V(R_{uu}, Sd)=848020.5$ $V(R_{uu}, Sd^3)=794590.7$ $V(R_u, Su^3)=1212151.1$ $V(R_u, Su)=992132.3$ $V(R_u, Sd)=883709.3$ $V(R_u, Sd^3)=830279.5$ $V(R_m, Su^3)=1249557.6$ $V(R_m, Su)=1029538.9$ $V(R_m, Sd)=921115.8$ $V(R_m, Sd^3)=867686.0$ $V(R_d, Su^3)=1288761.8$ $V(R_d, Su)=1068743.0$ $V(R_d, Sd)=960320.0$ $V(R_d, Sd^3)=906890.2$ $V(R_{dd}, Su^3)=1329847.1$ $V(R_{dd}, Su)=1109828.3$ $V(R_{dd}, Sd)=1001405.2$ $V(R_{dd}, Sd^3)=947975.4$	$V(R_{uu}, Su^4)=1434833.6$ $V(R_{uu}, Su^2)=1121412.1$ $V(R_{uu}, S)=966961.1$ $V(R_{uu}, Sd^2)=890849.1$ $V(R_{uu}, Sd^4)=853341.9$ $V(R_u, Su^4)=1462163.8$ $V(R_u, Su^2)=1148742.3$ $V(R_u, S)=994291.3$ $V(R_u, Sd^2)=918179.4$ $V(R_u, Sd^4)=880672.2$ $V(R_m, Su^4)=1490408.8$ $V(R_m, Su^2)=1176987.3$ $V(R_m, S)=1022536.3$ $V(R_m, Sd^2)=946424.4$ $V(R_m, Sd^4)=908917.2$ $V(R_d, Su^4)=1519598.7$ $V(R_d, Su^2)=1206177.3$ $V(R_d, S)=1051726.3$ $V(R_d, Sd^2)=975614.3$ $V(R_d, Sd^4)=938107.1$ $V(R_{dd}, Su^4)=1549764.9$ $V(R_{dd}, Su^2)=1236343.4$ $V(R_{dd}, S)=1081892.4$ $V(R_{dd}, Sd^2)=1005780.5$ $V(R_{dd}, Sd^4)=968273.3$	$V(R_{uu}, Su^5)=1781916.6$ $V(R_{uu}, Su^3)=1335440.9$ $V(R_{uu}, Su)=1115422.1$ $V(R_{uu}, Sd)=1006999.1$ $V(R_{uu}, Sd^3)=953569.3$ $V(R_{uu}, Sd^5)=927239.6$ $V(R_u, Su^5)=1797669.8$ $V(R_u, Su^3)=1351194.1$ $V(R_u, Su)=1131175.4$ $V(R_u, Sd)=1022752.3$ $V(R_u, Sd^3)=969322.5$ $V(R_u, Sd^5)=942992.8$ $V(R_m, Su^5)=1813698.3$ $V(R_m, Su^3)=1367222.6$ $V(R_m, Su)=1147203.8$ $V(R_m, Sd)=1038780.7$ $V(R_m, Sd^3)=985350.9$ $V(R_m, Sd^5)=959021.2$ $V(R_d, Su^5)=1830006.7$ $V(R_d, Su^3)=1383531.1$ $V(R_d, Su)=1163512.3$ $V(R_d, Sd)=1055089.2$ $V(R_d, Sd^3)=1001659.4$ $V(R_d, Sd^5)=975329.7$ $V(R_{dd}, Su^5)=1846600.2$ $V(R_{dd}, Su^3)=1400124.5$ $V(R_{dd}, Su)=1180105.7$ $V(R_{dd}, Sd)=1071682.6$ $V(R_{dd}, Sd^3)=1018252.8$ $V(R_{dd}, Sd^5)=991923.1$
---	--	--

表 4.34 二因子模型 Case2 各期節點公司資產

	t=1	t=2	t=3
本模型	$\sigma_V(R, S)=0.064365$	$\sigma_V(R_u, Su)=0.085899$ $\sigma_V(R_u, Sd)=0.048274$ $\sigma_V(R_m, Su)=0.081370$ $\sigma_V(R_m, Sd)=0.0453934$ $\sigma_V(R_d, Su)=0.077011$ $\sigma_V(R_d, Sd)=0.042660$	$\sigma_V(R_{uu}, Su^2)=0.109736$ $\sigma_V(R_{uu}, S)=0.064171$ $\sigma_V(R_{uu}, Sd^2)=0.034826$ $\sigma_V(R_u, Su^2)=0.105280$ $\sigma_V(R_u, S)=0.061102$ $\sigma_V(R_u, Sd^2)=0.033001$

			$\sigma_V(R_m, Su^2)=0.100928$ $\sigma_V(R_m, S)=0.058149$ $\sigma_V(R_m, Sd^2)=0.031261$ $\sigma_V(R_d, Su^2)=0.096687$ $\sigma_V(R_d, S)=0.055312$ $\sigma_V(R_d, Sd^2)=0.029604$ $\sigma_V(R_{dd}, Su^2)=0.092559$ $\sigma_V(R_{dd}, S)=0.052590$ $\sigma_V(R_{dd}, Sd^2)=0.028028$
	t=4	t=5	t=6
	$\sigma_V(R_{uu}, Su^3)=0.130465$ $\sigma_V(R_{uu}, Su)=0.079081$ $\sigma_V(R_{uu}, Sd)=0.043953$ $\sigma_V(R_{uu}, Sd^3)=0.023116$ $\sigma_V(R_u, Su^3)=0.126624$ $\sigma_V(R_u, Su)=0.076237$ $\sigma_V(R_u, Sd)=0.042178$ $\sigma_V(R_u, Sd^3)=0.022122$ $\sigma_V(R_m, Su^3)=0.122833$ $\sigma_V(R_m, Su)=0.073467$ $\sigma_V(R_m, Sd)=0.040465$ $\sigma_V(R_m, Sd^3)=0.021168$ $\sigma_V(R_d, Su^3)=0.119097$ $\sigma_V(R_d, Su)=0.070772$ $\sigma_V(R_d, Sd)=0.038813$ $\sigma_V(R_d, Sd^3)=0.020253$ $\sigma_V(R_{dd}, Su^3)=0.115417$ $\sigma_V(R_{dd}, Su)=0.068152$ $\sigma_V(R_{dd}, Sd)=0.037221$ $\sigma_V(R_{dd}, Sd^3)=0.019375$	$\sigma_V(R_{uu}, Su^4)=0.152384$ $\sigma_V(R_{uu}, Su^2)=0.096081$ $\sigma_V(R_{uu}, S)=0.054910$ $\sigma_V(R_{uu}, Sd^2)=0.029371$ $\sigma_V(R_{uu}, Sd^4)=0.015110$ $\sigma_V(R_u, Su^4)=0.149536$ $\sigma_V(R_u, Su^2)=0.093795$ $\sigma_V(R_u, S)=0.053401$ $\sigma_V(R_u, Sd^2)=0.028497$ $\sigma_V(R_u, Sd^4)=0.014641$ $\sigma_V(R_m, Su^4)=0.146702$ $\sigma_V(R_m, Su^2)=0.091544$ $\sigma_V(R_m, S)=0.051926$ $\sigma_V(R_m, Sd^2)=0.027646$ $\sigma_V(R_m, Sd^4)=0.014186$ $\sigma_V(R_d, Su^4)=0.143884$ $\sigma_V(R_d, Su^2)=0.089329$ $\sigma_V(R_d, S)=0.050485$ $\sigma_V(R_d, Sd^2)=0.026819$ $\sigma_V(R_d, Sd^4)=0.013744$ $\sigma_V(R_{dd}, Su^4)=0.141083$ $\sigma_V(R_{dd}, Su^2)=0.087149$ $\sigma_V(R_{dd}, S)=0.049077$ $\sigma_V(R_{dd}, Sd^2)=0.026015$ $\sigma_V(R_{dd}, Sd^4)=0.013316$	$\sigma_V(R_{uu}, Su^5)=0.174793$ $\sigma_V(R_{uu}, Su^3)=0.114934$ $\sigma_V(R_{uu}, Su)=0.067810$ $\sigma_V(R_{uu}, Sd)=0.037014$ $\sigma_V(R_{uu}, Sd^3)=0.019262$ $\sigma_V(R_{uu}, Sd^5)=0.009761$ $\sigma_V(R_u, Su^5)=0.173261$ $\sigma_V(R_u, Su^3)=0.113594$ $\sigma_V(R_u, Su)=0.066866$ $\sigma_V(R_u, Sd)=0.036444$ $\sigma_V(R_u, Sd^3)=0.018949$ $\sigma_V(R_u, Sd^5)=0.009598$ $\sigma_V(R_m, Su^5)=0.171730$ $\sigma_V(R_m, Su^3)=0.112262$ $\sigma_V(R_m, Su)=0.065931$ $\sigma_V(R_m, Sd)=0.035881$ $\sigma_V(R_m, Sd^3)=0.018640$ $\sigma_V(R_m, Sd^5)=0.009438$ $\sigma_V(R_d, Su^5)=0.170199$ $\sigma_V(R_d, Su^3)=0.110939$ $\sigma_V(R_d, Su)=0.065007$ $\sigma_V(R_d, Sd)=0.035327$ $\sigma_V(R_d, Sd^3)=0.018337$ $\sigma_V(R_d, Sd^5)=0.009280$ $\sigma_V(R_{dd}, Su^5)=0.168670$ $\sigma_V(R_{dd}, Su^3)=0.109624$ $\sigma_V(R_{dd}, Su)=0.064093$ $\sigma_V(R_{dd}, Sd)=0.034780$

			$\sigma_V(R_{dd}, Sd^3)=0.018038$
			$\sigma_V(R_{dd}, Sd^5)=0.009125$

表 4.35 二因子模型 Case2 各期節點公司資產波動度

接下來列出本模型的每一期各節點的違約機率，如表 4.36 所示。

	t=1	t=2	t=3
本模型	$\lambda(R, S)=0.00200$	$\lambda(R_u, Su)=0.00139$ $\lambda(R_u, Sd)=0.00256$ $\lambda(R_m, Su)=0.00150$ $\lambda(R_m, Sd)=0.00267$ $\lambda(R_d, Su)=0.00162$ $\lambda(R_d, Sd)=0.00277$	$\lambda(R_{uu}, Su^2)=0.00086$ $\lambda(R_{uu}, S)=0.00201$ $\lambda(R_{uu}, Sd^2)=0.00308$ $\lambda(R_u, Su^2)=0.00095$ $\lambda(R_u, S)=0.00211$ $\lambda(R_u, Sd^2)=0.00316$ $\lambda(R_m, Su^2)=0.00104$ $\lambda(R_m, S)=0.00221$ $\lambda(R_m, Sd^2)=0.00323$ $\lambda(R_d, Su^2)=0.00113$ $\lambda(R_d, S)=0.00231$ $\lambda(R_d, Sd^2)=0.00330$ $\lambda(R_{dd}, Su^2)=0.00122$ $\lambda(R_{dd}, S)=0.00240$ $\lambda(R_{dd}, Sd^2)=0.00337$
	t=4	t=5	t=6
	$\lambda(R_{uu}, Su^3)=0.00053$ $\lambda(R_{uu}, Su)=0.00157$ $\lambda(R_{uu}, Sd)=0.00272$ $\lambda(R_{uu}, Sd^3)=0.00359$ $\lambda(R_u, Su^3)=0.00058$ $\lambda(R_u, Su)=0.00165$ $\lambda(R_u, Sd)=0.00279$ $\lambda(R_u, Sd^3)=0.00363$ $\lambda(R_m, Su^3)=0.00064$ $\lambda(R_m, Su)=0.00172$ $\lambda(R_m, Sd)=0.00286$ $\lambda(R_m, Sd^3)=0.00368$ $\lambda(R_d, Su^3)=0.00070$ $\lambda(R_d, Su)=0.00180$ $\lambda(R_d, Sd)=0.00292$ $\lambda(R_d, Sd^3)=0.00372$	$\lambda(R_{uu}, Su^4)=0.00029$ $\lambda(R_{uu}, Su^2)=0.00114$ $\lambda(R_{uu}, S)=0.00231$ $\lambda(R_{uu}, Sd^2)=0.00331$ $\lambda(R_{uu}, Sd^4)=0.00396$ $\lambda(R_u, Su^4)=0.00031$ $\lambda(R_u, Su^2)=0.00119$ $\lambda(R_u, S)=0.00237$ $\lambda(R_u, Sd^2)=0.00335$ $\lambda(R_u, Sd^4)=0.00398$ $\lambda(R_m, Su^4)=0.00034$ $\lambda(R_m, Su^2)=0.00125$ $\lambda(R_m, S)=0.00242$ $\lambda(R_m, Sd^2)=0.00339$ $\lambda(R_m, Sd^4)=0.00400$ $\lambda(R_d, Su^4)=0.00037$	$\lambda(R_{uu}, Su^5)=0.00014$ $\lambda(R_{uu}, Su^3)=0.00077$ $\lambda(R_{uu}, Su)=0.00189$ $\lambda(R_{uu}, Sd)=0.00299$ $\lambda(R_{uu}, Sd^3)=0.00376$ $\lambda(R_{uu}, Sd^5)=0.00422$ $\lambda(R_u, Su^5)=0.00014$ $\lambda(R_u, Su^3)=0.00079$ $\lambda(R_u, Su)=0.00192$ $\lambda(R_u, Sd)=0.00301$ $\lambda(R_u, Sd^3)=0.00378$ $\lambda(R_u, Sd^5)=0.00422$ $\lambda(R_m, Su^5)=0.00015$ $\lambda(R_m, Su^3)=0.00082$ $\lambda(R_m, Su)=0.00195$ $\lambda(R_m, Sd)=0.00304$

	$\lambda (R_{dd}, Su^3)=0.00076$ $\lambda (R_{dd}, Su)=0.00188$ $\lambda (R_{dd}, Sd)=0.00299$ $\lambda (R_{dd}, Sd^3)=0.00376$	$\lambda (R_d, Su^2)=0.00130$ $\lambda (R_d, S)=0.00248$ $\lambda (R_d, Sd^2)=0.00342$ $\lambda (R_d, Sd^4)=0.00402$ $\lambda (R_{dd}, Su^4)=0.00040$ $\lambda (R_{dd}, Su^2)=0.00135$ $\lambda (R_{dd}, S)=0.00253$ $\lambda (R_{dd}, Sd^2)=0.00346$ $\lambda (R_{dd}, Sd^4)=0.00404$	$\lambda (R_m, Sd^3)=0.00379$ $\lambda (R_m, Sd^5)=0.00423$ $\lambda (R_d, Su^5)=0.00016$ $\lambda (R_d, Su^3)=0.00084$ $\lambda (R_d, Su)=0.00198$ $\lambda (R_d, Sd)=0.00306$ $\lambda (R_d, Sd^3)=0.00381$ $\lambda (R_d, Sd^5)=0.00424$ $\lambda (R_{dd}, Su^5)=0.00017$ $\lambda (R_{dd}, Su^3)=0.00086$ $\lambda (R_{dd}, Su)=0.00201$ $\lambda (R_{dd}, Sd)=0.00309$ $\lambda (R_{dd}, Sd^3)=0.00382$ $\lambda (R_{dd}, Sd^5)=0.00425$
--	--	--	--

表 4.36 二因子模型 Case2 各期節點違約機率

本模型回收比率為內生給定，各期節點回收比率如表 4.37 所示。

本模型	t=1	t=2	t=3
	$\delta (R, S)=0.675$	$\delta (R_u, Su)=0.667$ $\delta (R_u, Sd)=0.667$ $\delta (R_m, Su)=0.716$ $\delta (R_m, Sd)=0.716$ $\delta (R_d, Su)=0.768$ $\delta (R_d, Sd)=0.768$	$\delta (R_{uu}, Su^2)=0.677$ $\delta (R_{uu}, S)=0.677$ $\delta (R_{uu}, Sd^2)=0.677$ $\delta (R_u, Su^2)=0.719$ $\delta (R_u, S)=0.719$ $\delta (R_u, Sd^2)=0.719$ $\delta (R_m, Su^2)=0.763$ $\delta (R_m, S)=0.763$ $\delta (R_m, Sd^2)=0.763$ $\delta (R_d, Su^2)=0.810$ $\delta (R_d, S)=0.810$ $\delta (R_d, Sd^2)=0.810$ $\delta (R_{dd}, Su^2)=0.860$ $\delta (R_{dd}, S)=0.860$ $\delta (R_{dd}, Sd^2)=0.860$
	t=4	t=5	t=6
	$\delta (R_{uu}, Su^3)=0.743$ $\delta (R_{uu}, Su)=0.743$ $\delta (R_{uu}, Sd)=0.743$ $\delta (R_{uu}, Sd^3)=0.743$	$\delta (R_{uu}, Su^4)=0.817$ $\delta (R_{uu}, Su^2)=0.817$ $\delta (R_{uu}, S)=0.817$ $\delta (R_{uu}, Sd^2)=0.817$	$\delta (R_{uu}, Su^5)=0.902$ $\delta (R_{uu}, Su^3)=0.902$ $\delta (R_{uu}, Su)=0.902$ $\delta (R_{uu}, Sd)=0.902$

$\delta (R_u, Su^3)=0.778$	$\delta (R_{uu}, Sd^4)=0.817$	$\delta (R_{uu}, Sd^3)=0.902$
$\delta (R_u, Su)=0.778$	$\delta (R_u, Su^4)=0.8442$	$\delta (R_{uu}, Sd^5)=0.902$
$\delta (R_u, Sd)=0.778$	$\delta (R_u, Su^2)=0.8442$	$\delta (R_u, Su^5)=0.917$
$\delta (R_u, Sd^3)=0.778$	$\delta (R_u, S)=0.8442$	$\delta (R_u, Su^3)=0.917$
$\delta (R_m, Su^3)=0.816$	$\delta (R_u, Sd^2)=0.8442$	$\delta (R_u, Su)=0.917$
$\delta (R_m, Su)=0.816$	$\delta (R_u, Sd^4)=0.8442$	$\delta (R_u, Sd)=0.917$
$\delta (R_m, Sd)=0.816$	$\delta (R_m, Su^4)=0.872$	$\delta (R_u, Sd^3)=0.917$
$\delta (R_m, Sd^3)=0.816$	$\delta (R_m, Su^2)=0.872$	$\delta (R_u, Sd^5)=0.917$
$\delta (R_d, Su^3)=0.855$	$\delta (R_m, S)=0.872$	$\delta (R_m, Su^5)=0.933$
$\delta (R_d, Su)=0.855$	$\delta (R_m, Sd^2)=0.872$	$\delta (R_m, Su^3)=0.933$
$\delta (R_d, Sd)=0.855$	$\delta (R_m, Sd^4)=0.872$	$\delta (R_m, Su)=0.933$
$\delta (R_d, Sd^3)=0.855$	$\delta (R_d, Su^4)=0.902$	$\delta (R_m, Sd)=0.933$
$\delta (R_{dd}, Su^3)=0.896$	$\delta (R_d, Su^2)=0.902$	$\delta (R_m, Sd^3)=0.933$
$\delta (R_{dd}, Su)=0.896$	$\delta (R_d, S)=0.902$	$\delta (R_m, Sd^5)=0.933$
$\delta (R_{dd}, Sd)=0.896$	$\delta (R_d, Sd^2)=0.902$	$\delta (R_d, Su^5)=0.950$
$\delta (R_{dd}, Sd^3)=0.896$	$\delta (R_d, Sd^4)=0.902$	$\delta (R_d, Su^3)=0.950$
	$\delta (R_{dd}, Su^4)=0.932$	$\delta (R_d, Su)=0.950$
	$\delta (R_{dd}, Su^2)=0.932$	$\delta (R_d, Sd)=0.950$
	$\delta (R_{dd}, S)=0.932$	$\delta (R_d, Sd^3)=0.950$
	$\delta (R_{dd}, Sd^2)=0.932$	$\delta (R_d, Sd^5)=0.950$
	$\delta (R_{dd}, Sd^4)=0.932$	$\delta (R_{dd}, Su^5)=0.966$
		$\delta (R_{dd}, Su^3)=0.966$
		$\delta (R_{dd}, Su)=0.966$
		$\delta (R_{dd}, Sd)=0.966$
		$\delta (R_{dd}, Sd^3)=0.966$
		$\delta (R_{dd}, Sd^5)=0.966$

表 4.37 二因子模型 Case2 各期節點回收比率

由於本模型將公司債務維持水平(α)設為 1，因此回收比率(δ)就會等於折現因子。

本模型前三期各節點分支機率如表 4.38 所示

節點	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
(1,1)	0.068987	0.097678	0.333685	0.332980	0.097855	0.068811
(2,1)	0.050396	0.071270	0.349740	0.306926	0.132462	0.089204
(2,2)	0.050615	0.071051	0.350901	0.305765	0.132851	0.088815
(2,3)	0.070058	0.096608	0.337964	0.328702	0.098923	0.067743
(2,4)	0.070346	0.096320	0.339112	0.327554	0.099209	0.067456

(2,5)	0.092359	0.129306	0.316337	0.340329	0.073034	0.048631
(2,6)	0.092728	0.128937	0.317435	0.339231	0.073239	0.048426
(3,1)	0.484106	0.402560	0.014990	0.011676	0.063040	0.023626
(3,2)	0.485676	0.400990	0.015037	0.011629	0.063186	0.023479
(3,3)	0.487150	0.399515	0.015081	0.011585	0.063324	0.023342
(3,4)	0.050808	0.070858	0.351927	0.304738	0.133194	0.088472
(3,5)	0.051025	0.070641	0.353079	0.303586	0.133579	0.088087
(3,6)	0.051222	0.070443	0.354124	0.302541	0.133928	0.087737
(3,7)	0.070598	0.096067	0.340117	0.326548	0.099460	0.067206
(3,8)	0.070889	0.095776	0.341277	0.325389	0.099748	0.066917
(3,9)	0.071145	0.095521	0.342294	0.324371	0.100002	0.066664
(3,10)	0.093051	0.128614	0.318396	0.338270	0.073419	0.048247
(3,11)	0.093431	0.128235	0.319524	0.337142	0.073629	0.048036
(3,12)	0.093753	0.127912	0.320483	0.336182	0.073808	0.047858
(3,13)	0.025478	0.061188	0.012266	0.014400	0.422248	0.464418
(3,14)	0.025621	0.061045	0.012311	0.014355	0.423751	0.462915
(3,15)	0.025739	0.060927	0.012348	0.014317	0.424992	0.461674

表 4.38 二因子模型 Case2 前三期節點分支機率

把同一期每個節點違約機率乘上其條件機率後加總，可得到一整期的違約機率，再轉成條件違約機率，本模型就可與 Chambers & Lu(2007)以 Reduced Model 算出的條件違約機率比較，如表 4.39 所示，其求法如同二因子十元樹

HW	$\lambda_1=0.0021$	$\lambda_2=0.0053$	$\lambda_3=0.0040$
	$\lambda_4=0.0078$	$\lambda_5=0.0049$	$\lambda_6=0.0061$
CL	$\lambda_1=0.00207207$	$\lambda_2=0.00537085$	$\lambda_3=0.00424289$
	$\lambda_4=0.00817737$	$\lambda_5=0.00558215$	$\lambda_6=0.00703698$
本模型	$\lambda_1=0.00200286$	$\lambda_2=0.00208431$	$\lambda_3=0.00216211$
	$\lambda_4=0.00223604$	$\lambda_5=0.00230628$	$\lambda_6=0.00237290$

表 4.39 二因子模型 Case2 每期違約機率比較

求出每一期違約機率與各節點回收比率後，可以透過 Reduced Model 逆推有風險利率，如表 4.40 所示，其求法如同二因子十元樹

CL	$R_0^* = 0.0611$	$R_1^* = 0.0646$	$R_2^* = 0.0663$
	$R_3^* = 0.0678$	$R_4^* = 0.0683$	$R_5^* = 0.06894$
本模型	$R_0^* = 0.06034140745$	$R_1^* = 0.06266559216$	$R_2^* = 0.06421509425$
	$R_3^* = 0.06493231960$	$R_4^* = 0.06530729822$	$R_5^* = 0.06567784734$

表 4.40 二因子模型 Case2 有風險利率

本模型前三期各節點可轉債價格如表 4.41 所示

t=1	t=2	t=3
CB(R,S)=91.4203	CB(R _u ,S _u)=113.9013 CB(R _u ,S _d)=75.3599 CB(R _m ,S _u)=115.2250 CB(R _m ,S _d)=78.9844 CB(R _d ,S _u)=116.7645 CB(R _d ,S _d)=82.9577	CB(R _{uu} ,S _u ²)=154.5993 CB(R _{uu} ,S)=86.3786 CB(R _{uu} ,S _d ²)=69.8895 CB(R _u ,S _u ²)=154.6092 CB(R _u ,S)=88.3489 CB(R _u ,S _d ²)=73.7313 CB(R _m ,S _u ²)=154.6205 CB(R _m ,S)=90.5569 CB(R _m ,S _d ²)=77.8313 CB(R _d ,S _u ²)=154.6335 CB(R _d ,S)=92.9668 CB(R _d ,S _d ²)=82.1419 CB(R _{dd} ,S _u ²)=154.6483 CB(R _{dd} ,S)=95.4859 CB(R _{dd} ,S _d ²)=86.6248

表 4.41 二因子模型 Case2 前三期可轉債價格

本模型求得可轉債價格與之前文獻比較，如表 4.42 所示。

Market	88.706
Huang and Wang	90.4633
Chambers and Lu	90.8351
本模型	91.420264677157400
本模型(調整轉換後股價)	89.223349212370450

表 4.42 二因子模型 Case2 可轉債價格比較

本模型由於外生給定違約門檻，所求得違約機率較低而回收比較高，評價結果可轉債價格也較高，調整轉換後股價可轉債價格會下降。

CB 價格會隨著期數切割越細而收斂，如圖 4.13 所示

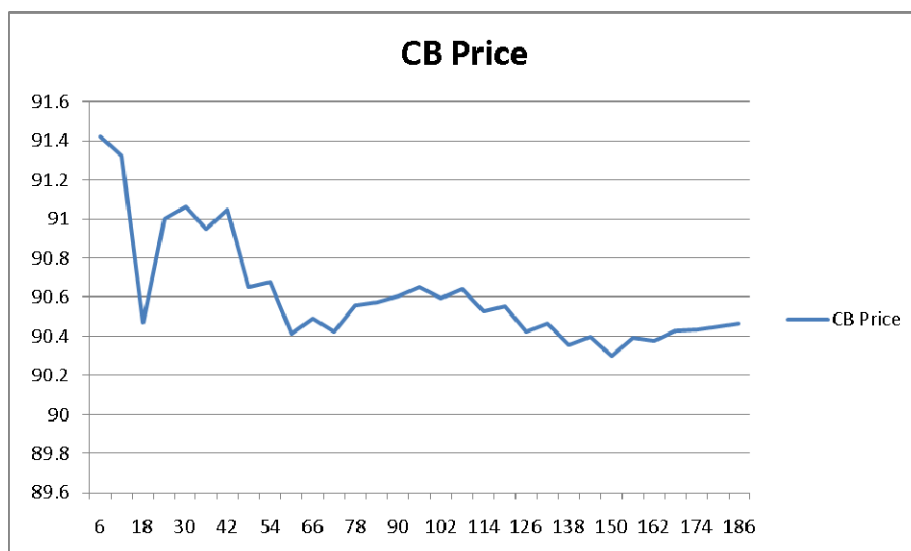


圖 4.13 二因子模型 Case2 可轉債價格隨期數增加收斂

第四節 二因子敏感度分析

本文二因子模型只針對 Lucent 可轉換公司債作敏感度分析。

• 相關係數敏感度分析

rho	n=6	n=12
-0.7	90.3782	90.2313
-0.6	90.5516	90.4164
-0.5	90.7250	90.6001
-0.4	90.8986	90.7825
-0.3	91.0723	90.9637
-0.2	91.2462	91.1436
-0.1	91.4203	91.3223
0	91.5945	91.5000
0.1	91.7690	91.6767
0.2	91.9437	91.8524
0.3	92.1188	92.0271
0.4	92.2941	92.2009
0.5	92.4698	92.3739
0.6	92.6460	92.5460
0.7	92.8226	92.7172

表 4.43 二因子模型 Case2 相關係數敏感度分析

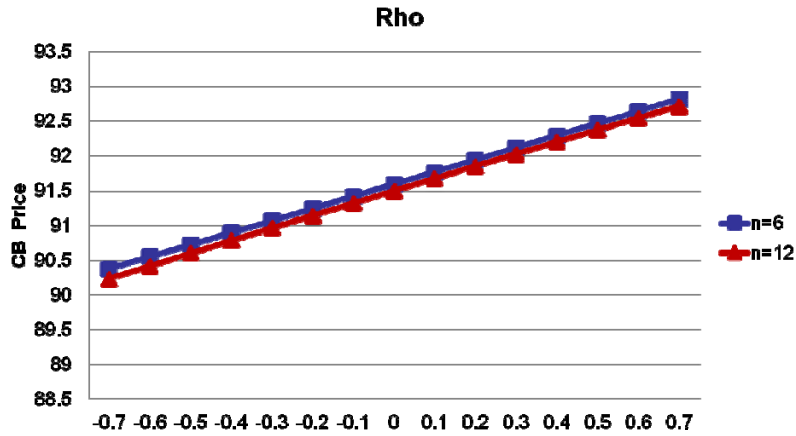


圖 4.14 二因子模型 Case2 相關係數敏感度分析

從表 4.43 與圖 4.14 可以看出相關係數與可轉債價格成正相關，此結果與 Chambers(2007)的相關係數敏感度分析結果一致。

• 利率波動度敏感度分析

sigma_r	rho=0.3	rho=0.2	rho=0.1	rho=-0.1	rho=-0.2	rho=-0.3
0.01	92.1188	91.9437	91.7690	91.4203	91.2462	91.0723
0.015	92.3777	92.1172	91.8557	91.3332	91.0720	90.8108
0.02	92.4983	92.1737	91.84854	91.1950	90.8660	90.5351
0.025	92.6116	92.2267	91.84032	91.0608	90.6667	90.2692
0.03	92.7280	92.2849	91.83931	90.9378	90.4805	90.0181
0.035	92.8308	92.3328	91.83123	90.8139	90.2966	89.7723
0.04	92.8825	92.3467	91.80487	90.6813	90.1077	89.5256

表 4.44 二因子模型 Case2 利率波動度敏感度分析

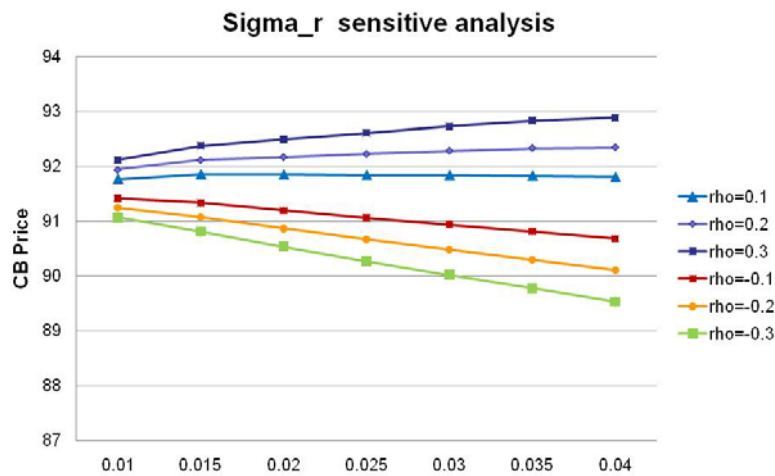


圖 4.15 二因子模型 Case2 利率波動度敏感度分析

從表 4.44 與圖 4.15 可以看出當相關係數為負時，可轉債隨利率波動度上升

而降，且相關係數越小可轉債價格越低；相關係數為正時，可轉債價格會微幅上升，相關係數越小可轉債價格也是越低。

• 股價波動度敏感度分析

sigma_s	rho=0.3	rho=0.2	rho=0.1	rho=-0.1	rho=-0.2	rho=-0.3
0.2	83.7905	83.6305	83.4696	83.1454	82.9821	82.8180
0.3	88.9575	88.7840	88.6098	88.2593	88.0829	87.9054
0.4	94.8087	94.6350	94.4618	94.1174	93.9462	93.7757
0.5	100.6446	100.4816	100.3184	99.9912	99.8272	99.6630
0.6	106.6431	106.4970	106.3507	106.0577	105.9109	105.7640
0.7	112.4058	112.2806	112.1553	111.9045	111.7789	111.6533
0.8	117.5605	117.4562	117.3518	117.1428	117.0383	116.9337
0.9	121.9457	121.8600	121.7743	121.6027	121.5169	121.4311
1	125.5588	125.4889	125.4190	125.2791	125.2091	125.1391

表 4.45 二因子模型 Case2 股票波動度敏感度分析

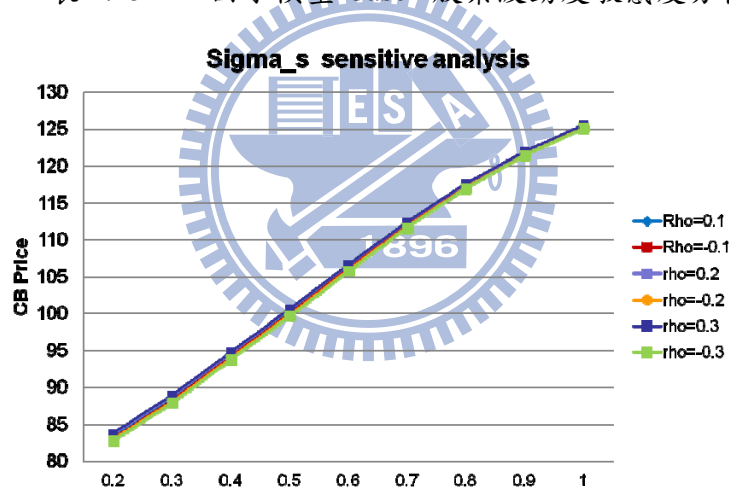


圖 4.16 二因子模型 Case2 股票波動度敏感度分析

從表 4.45 與圖 4.16 可以看出無論相關係數為正或負，股價波動度越高，可轉債價格也就越高，因為股價波動度會影響可轉債轉換價格使可轉債價格上升。

• 期初股價敏感度分析

S ₀	n=6	n=9
5	68.4418	68.4532
10	76.7898	76.8413
15	91.3952	91.2973
20	111.5723	110.2679
25	132.4513	132.6956

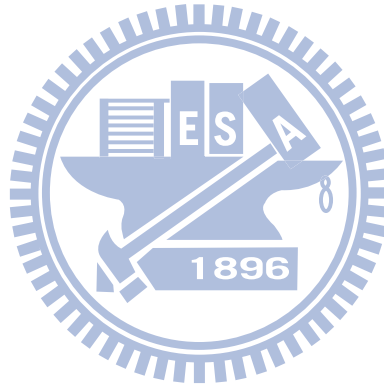
30	155.5525	155.3291
----	----------	----------

表 4.46 二因子模型 Case2 期初股價敏感度分析



圖 4.17 二因子模型 Case2 期初股價敏感度分析

因股價會影響可轉債的轉換價值，由表 4.46 與圖 4.17 可看出期初股價越高，可轉債價格也就越高。



第五章 結論與建議

第一節 研究結論

本研究在一因子模型成功建立了違約機率與股價之間的關係，讓股價越高對應的違約機率越低，改善了以往 Reduced Model 股價與違約機率不相關的缺點；在二因子模型中，建立了違約機率與股價和利率之間的關係，利率相同時，股價越高違約機率越低，股價相同時利率約高違約機率越低。

第二節 後續建議

本研究算出的可轉債價格與 Chambers (2007) 的可轉債價格比較，Case1 與 Case2 的結果都高於 Chambers (2007)，其主要原因是因為本研究的違約門檻都是外生給定常數，違約門檻設定不好，產生的違約機率低於 Reduced Model 所求的違約機率。由於 Structural Model 是以股價角度出發去評價違約機率，而 Reduced Model 是以利率角度出發去評價違約機率，如果可以透過內生給定違約門檻使每一期 Structural Model 所求的違約機率能夠等於 Reduced Model 所求的違約機率，就能夠改善 Structural Model 評價的違約機率過高或過低問題。

本研究在調整可轉債轉換後股價，做了過於簡化的假設：假設一但發生轉換時，所有債券持有人都會把手中所有可轉債全部轉成股票。但是實際上可轉債持有人會去觀察市場上其他可轉債持有人的動作才決定是否將手中可轉債轉換成股票，如果在這裡可以加上賽局觀念去模擬可轉債持有人行為，就能讓可轉債評價模型更為完善。

文獻參考

英文文獻

- [1] Black, F. and J.C. Cox (1976) "Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions, " *Journal of Finance* 31, 351-367.
- [2] Brennan, M.J., and E.S. Schwartz (1977) "Convertible Bonds Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion," *The Journal of Finance*, 32, 5, 1699-1715.
- [3] Brennan, M.J. and E.S. Schwartz (1980) "Analyzing Convertible Securities," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, XV, 4,907-929.
- [4] Briys, E., and De Varenne, F.(1997) "Valuing Risky Fixed Rate Debt : An Extension, " *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 32, 239-248,
- Crosbie, P. and Bohn, J. (2003) "Modeling Default Risk, White Paper by Moody's KMV. "
- [5] Chambers, D.R. and Q. Lu. (2007) "A Tree Model for Pricing Convertible Bonds with Equity, Interest Rate, and Default Risk, " *The Journal of Derivatives*, 4 (Summer 2007), 25–46.
- [6] Cox, J.C., S.A. Ross and M. Rubinstein. (1979) "Option pricing: A Simplified Approach, " *Journal of Financial Economics*, 7 (September 1979), 229–263.
- [7] Crosbie, P. and Bohn, J. (2003) "Modeling Default Risk, White Paper by Moody's KMV. "
- [8] Dai, T.S., and Lyuu, Y.D. (2006) "The Bino-Trinomial Tree : a Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing. ", *Journal of derivatives* 17, 7-24.
- [9] Hull, J., and A. White (1994c) "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models. ", *The Journal of Derivatives* 2, 37-47.

- [10] Hull, J., and A. White (1996) "Using Hull-White Interest-Rate Trees. ", Journal of derivatives, 3, 26-36
- [11] Hull, J.(2006) "Options, Futures, and Other Derivatives 6Th. " Englewood Cliffs, NJ Prentice-Hall.
- [12] Hung, M.W. and J.Y. Wang. (2002) "Pricing Convertible Bond Subject to Default Risk. " Journal of derivative, pp. 75-87.
- [13] Ikeda, M., and N. Kuintomo (1992) "Pricing Options with Curved Boundaries," Mathematical Finance, 2, 275–298.
- [14] Jarrow, R. A. and S. M. Turnbull (1995) "Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. " Journal of Finance 3, 93-115.
- [15] Merton, R.C. (1974) "On the Pricing of Corporate Debt: Te Risk Structure of interest. "Journal of Finance, 449-470
- [16] Tsiveriotis, K., and C. Fernandes(1998) "Valuing convertible bonds with credit risk, " Journal of Fixed Income 8, 95-102
- [17] 利菟怡 (2007) "Pricing Convertible Bonds with Default Risk: A KMV Approach"

中文文獻

- [1] 郭翔宇(2009), “考慮信用風險之可轉換公司債二因子樹狀評價模型” 台灣大學財務金融研究所碩士論文
- [2] 曾右仲(2009), “利用三因子樹狀模型評價可轉換公司債” 台灣大學財務金融研究所碩士論文