國 立 交 通 大 學

資 訊 管 理 研 究 所

碩 士 論 文

在 Hull-White 隨機利率下評價保證最低提領給付保險附約

Pricing Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit under Hull-White Interest Rate Model

研 究 生： 楊凱旭

指導教授： 戴天時 博士

中 華 民 國 九 十 九 年 六 月

在 Hull-White 隨機利率下評價保證最低提領給付保險附約

Pricing Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit under Hull-White Interest Rate Model

研究生：楊凱旭　　Student：Kai-Hsu Yang
指導教授：戴天時博士　　Advisor：Dr. Tian-Shry Dai

國立交通大學
資訊管理研究所
碩士論文

A Thesis
Submitted to Institute of Information Management
College of Management
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science in Information Management
June 2010
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年六月

在 Hull-White 隨機利率下評價保證最低提領給付保險附約

學生：楊凱旭　　　　　　　　指導教授：戴天時 博士

國立交通大學資訊管理研究所

中華民國九十九年六月

摘要

附保證的保險商品在市場上有越來越熱門的趨勢，該保險商品結合投資和保險的觀念，能夠作為未來退休生活的退休金規劃或是生涯規劃，是能保障老年生活的一項投資選擇，本文以分析 Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit --GMWB 商品，延續 Milevsky and Salisbury (2006)的討論，利用立體三元樹模型，考慮利率隨機性，在 Hull-White Interest Rate Model 的基礎下，建置出模擬帳戶價值變動路徑的樹狀模型，進而以更貼近實務的方式來進行 GMWB 商品的評價。

關鍵字：最低保證提領附約、隨機利率、變額年金、違約門檻

Pricing Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit under Hull-White Interest Rate Model

Student：Kai-Hsu Yang Advisor：Dr. Tian-Shry Dai

Graduate Institute of Information Management

National Chiao Tung University

June 2010

Abstract

The insurance contract with guaranteed withdrawals has become more popular recently. This product can meet the customer's investment and insurance requirements so the customer can deal with the retirement financial plan better. This paper extends Milevsky and Salisbury (2006) assumptions, by pricing the Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit (GMWB) with Hull-White Stochastic Interest Rate. To fit the real world market better, we construct a three-dimensional trinomial-tree structure to pricing the GMWB and the policyholder receives withdrawal benefits not continuously but discretely. In our model, we can also discuss the effect of accumulation period on pricing GMWB.

Keywords: Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits, Stochastic Interest Rate, Default Boundary, Variable Annuity

誌謝

首先我要感謝我的指導教授戴天時老師。戴天時老師總是不遺餘力地教導著我們，尤其不管多晚只要我們論文上有問題，老師總是會給我們幫助，老師真的是站在最前線跟我們一起打拼論文，老師驚人的邏輯思考能力總能發現我的邏輯不完善的地方，並且修正它，另外老師的 group meeting 的方式，打團體戰的方式，讓我很深刻的體驗到團體的力量，發揮一加一大於二的效果。老師對學術研究的認真、嚴謹的態度也讓我覺得這才是論文品質的源頭，很慶幸能成為老師的指導學生，從戴老師這學習到的知識與態度真的使我受益良多。

感謝王釧茹學姊，只要有問題去問她，學姊總是能夠安排時間讓我去與他討論，並且很用心的提供我一些想法，也解開我的疑惑。謝謝學姊，學姊給我的許多建議與想法都能讓這篇論文更趨於完善。同時，也要感謝這兩年來大家一起走過來的財務工程實驗室的成員，彥君、育廷、婷瑱、柏屹和竑廷，大家有問題總能互相討論、互相學習，當然還有財金所的洪敏誠，沒有他的幫忙，我沒辦法完成這篇論文，謝謝他，也感謝曾經幫忙過我的好朋友們，謝謝你們。

最後要感謝我的父母及家人，是他們提供的環境讓我能夠沒有後顧之憂，感謝她們給我的提醒與關心，也是因為她們一直在背後支持我，我才能完成順利這篇論文。

楊凱旭　謹誌

國立交通大學資訊管理研究所

中華民國九十九年六月

目錄

圖目錄

表目錄

第一章 緒論

第一節 研究動機與背景

保證最低提領給付保險附約(Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit; GMWB)是變額年金保險(Variable annuities; VA)的另一種新型態，此商品提供了長期投資的需求以及保證報酬，由於本身又是保險契約，是保單的一種，在稅賦上也有某種程度的優惠，非常適合長期的生涯規劃，或是老年的退休理財規劃的保戶。

GMWB 的運作模式是以保戶的帳戶投資風險性資產，故帳戶價值的高低會與標的資產的投資報酬連動，並保證保戶每年能夠於此投資帳戶中提領固定的保證提領額度，在期末帳戶若還有剩餘價值，則保戶能參加獲利，全數歸給保戶，可選擇一次領回，或是將此金額年金化。

GMWB 保戶在期初躉繳一筆保費，此筆金額存入帳戶，即為投資標的資產的本金，在契約期間主要分成兩個時期，分別為保證遞延期和保證提領期，在遞延期，帳戶價值通常會以兩種方式進行累積，一種為複利增值(roll-up)，另一種為鎖高機制(ratchet)。

複利增值以保險公司訂定的年複利增加，在遞延期滿之時的帳戶價值若是低於年複利增加的價值，則帳戶價值即調整為年複利增加的價值，反之，若遞延期滿時帳戶價值高於年複利增加的價值，則不須要調整，意即遞延期滿的帳戶價值至少有年複利增加的價值。

鎖高機制則是以在遞延期間帳戶價值的最大值來鎖定報酬，以遞延期間帳戶價值的最大值來當做遞延期滿時的帳戶價值。

保證提領期保戶可依契約不同的提領模式來進行提領。在提領期間，帳戶價值會因保戶的提領而下降，也會因市場的波動而上下震盪，若是投資績效不好，導致在提領期滿之前帳戶價值已經無法支付保證的提領金額時，保險公司必須自

行吸收此虧損，這就是保險公司所要承擔的風險，保險公司承擔保戶的下方風險故要收取等價的保費(公平費用率)，此保費則從帳戶中扣除。

若是提領期滿之時，帳戶價值經過市場波動震盪和保戶提領以及保費收取而還有剩餘價值，那麼將全數歸給保戶，即為保戶在此商品期間投資的獲利。

由於此保證商品是一長期保險商品的設計，所以當利率波動之時，對 GMWB 商品的評價會產生某種程度的影響，若帳戶投資的標的資產與利率有關，那麼投資標的價值對利率的敏感度也是會影響帳戶價值高低的重要因素。因此本文將考慮利率與帳戶的相關性，利用 Hull-White 的利率模型，來對 GMWB 進行評價，以符合實務上的運作模式。

第二節 研究目的

本文研究目的為能以更接近實務的方式，考慮隨機利率並以樹狀結構進行 GMWB 商品評價，由於現有的 GMWB 評價模型有以下限制，本研究希望能針對不同的缺點進行改善：

一、利率隨機性的假設

放寬利率為固定常數的假設，考慮能夠和市場結合的利率模型來計算公平費用率，並討論帳戶價值與利率的相關性以貼近實務。

二、連續提領過程

目前現有的文獻使用連續提領模式以簡化模型，然而實務上 GMWB 固定年金的提領模式為每年提領時間點才做提領的動作，是屬離散提領，樹狀結構的特性使可精確模擬離散提領所造成的帳戶價值變化，使評價結果更能符合真實市場報價。

三、未加入遞延期

現有的 GMWB 評價模型假設提領過程為即期提領，意即保戶購買商品之後立刻進入提領期，並且在這段時間內需繳交保費，但實務上的商品設計並非如此。

實務上保戶購買商品之後有一段遞延期，在此期間內依照商品契約內容不同，而決定此期間的帳戶累積機制，通常有保本、複利增值、以及鎖高機制，在此期間內保戶不能提領，但須繳交保費，而遞延期結束後即為提領期，提領期所能提領的金額取決於遞延期滿的帳戶價值高低。

本研究希望能將此遞延期加入模型中，以更能符合實務上的做法。

第三節 研究架構

本文的研究架構可分為五個章節，第一章為緒論分為三節：1. 研究動機與背景；2. 研究目的；3. 研究架構。第二章為文獻探討分為兩部分：1. GMWB 評價模型；2. DFPM-HWT 模型。第三章為研究方法分為三大項：1. GMWB 的模型基礎假設 ；2. 建構 DFPM-HWT 樹狀結構模型；3. DFPM-HWT 應用在 GMWB 的評價。第四章為模型數值分析結果與討論。第五章為結論與後續研究建議。

第二章 文獻探討

第一節　GMWB 評價模型

1.　Milevsky and Salisbury (2006)的靜態提領情境設定下，假設 GMWB 投資標的資產符合幾何布朗運動，其隨機過程為：

$$dS_t = \mu S_t d_t + \sigma S_t dB_t$$

令帳戶價值為 W_t，假設此商品價值波動為連續型，並無遞延期而保證提領比例為 g，保證提領期為 $T=1/g$，表示投保人支付躉繳保費 W_0 後即開始進行提領。假設帳戶服從對數常態，則帳戶價值的隨機過程為：

$$dW_t = \begin{cases} (\mu-\alpha)W_t dt - \gamma_t dt + \sigma W_t dB_t & , W_t > 0 \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

$$W_0 = w_0$$

其中 γ_t 為帳戶的提領率，w_0 表示時間點 0 的帳戶價值，在此為躉繳保費。

如假設靜態提領的前提下，表示保戶每期只可提領固定金額 $G=gw_0$，不可任意更改且不能提前解約，則隨機過程可改寫為：

$$dW_t = \begin{cases} (\mu-\alpha)W_t dt - G dt + \sigma W_t dB_t & , W_t > 0 \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

$$W_0 = w_0$$

解微分方程式可得：

$$W_T = w_0 e^{(\mu-\alpha-(1/2)\sigma^2)T+\sigma B_T} \times \max\left[0, \left(1-\frac{1}{T}\int_0^T e^{-(\mu-\alpha-(1/2)\sigma^2)s-\sigma B_s} ds\right)\right]$$

$$g = G / w_0 \ , \quad T = 1/g$$

期中每期保戶可提領的固定年金在大 T 時間點時的價值為：

$$w_0 g \int_0^T e^{rt} dt$$

故時間點 0 時 GMWB 的價值為：

$$e^{-rT}E_Q[W_T]+\frac{w_0 g}{r}(1-e^{-rT})$$

其中，$E^Q[\cdot]$代表在風險中立機率測度

依照公平原則，時間點 0 時 GMWB 的價格應當等於期初的躉繳保費，故：

$$w_0=e^{-rT}E_Q[W_T]+\frac{w_0 g}{r}(1-e^{-rT})$$

定義一個新的隨機過程：

$$Y_t=e^{-(r-\alpha-(1/2)\sigma^2)t-\sigma B_t}, Y_0=1, \mathrm{Y}=Y_T$$

$$A=\frac{1}{T}\int_0^T Y_t dt$$

$$W_T=w_0\frac{\max[1-A,0]}{\mathrm{Y}}$$

原式可被改寫為：

$$1=e^{-r/g}E_Q[\frac{\max[1-A,0]}{\mathrm{Y}}]+\frac{g}{r}(1-e^{-r/g})$$

GMWB 可以拆解為亞式賣權(quanto Asian put)加上確定期的確定年金(generic term-certain annuity)，利用 SDE 求解出每年提領固定金額與不固定金額下的公平費用率 α

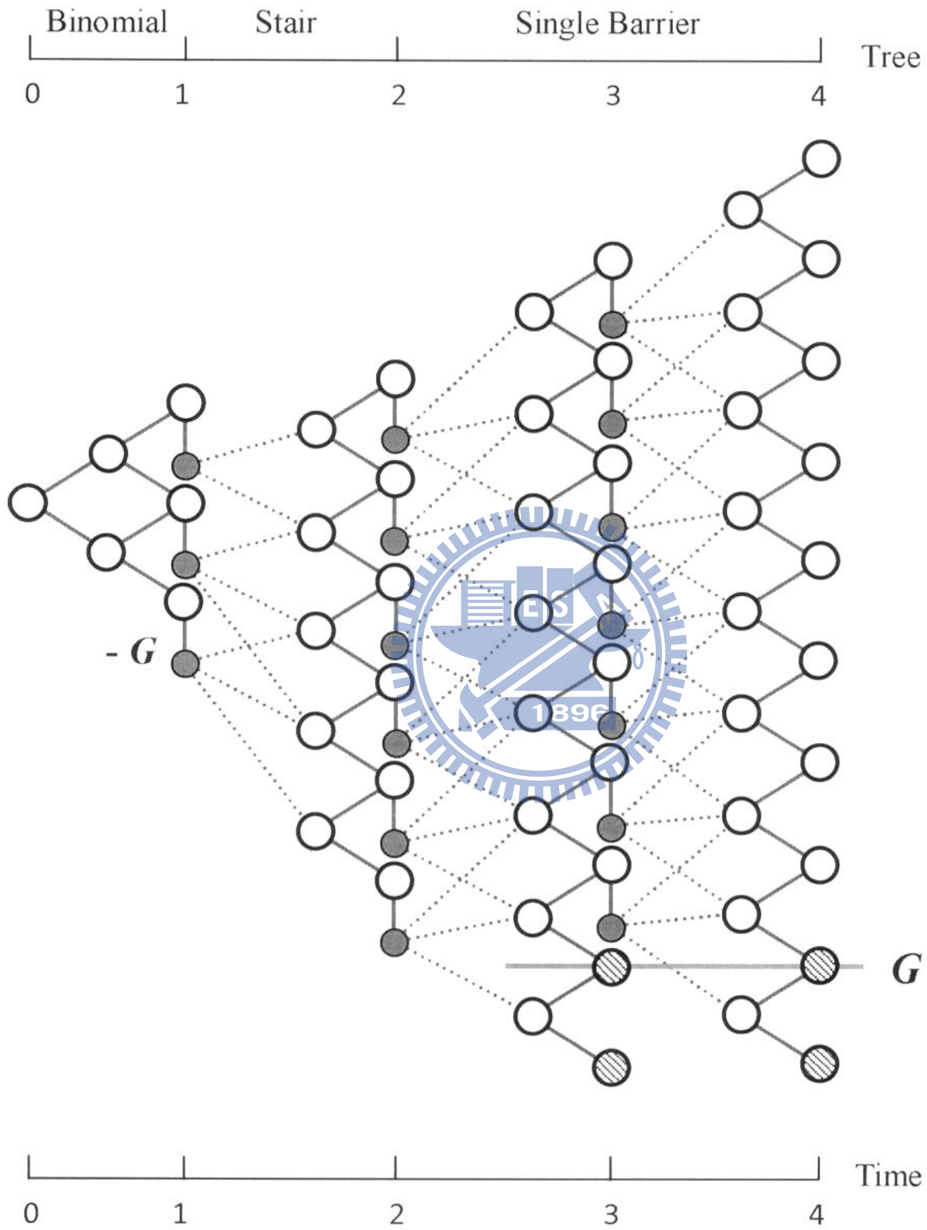
2. 吳蕙君(2009)延續 Milevsky and Salisbury (2006)的靜態提領情境設定下，將 GMWB 選擇權部分視為每年配發定額現金股利的股票選擇權，保證提領金額 G 會讓帳戶價值在每年年末下降 G 的額度，且帳戶價值歸 0 時表示無法繼續投資，故此股票選擇權有障礙選擇權特性，為每年年末為檢查點的離散型單一向下失效障礙選擇權，期初價格為 W_0，障礙選擇權的 barrier 為 G，履約價格為 G。

故 GMWB 的價格等於障礙選擇權加上固定年金，在固定年金部分：

在 $\sum_{t=1}^{T}Ge^{-rt}=G\frac{e^{-r}(1-e^{-rT})}{(1-e^{-r})}=G\frac{(1-e^{-rT})}{(e^{-r}-1)}$ 障礙選擇權的部分：

利用 Dai and Lyuu(2010)提出的 Bino-trinomial tree(BTT)來分段建構，提領時間點

下降 G 的高度，傳統 CRR 會不能 combine，所以利用 BTT 模型介紹的三元樹架構來解決這個問題，那麼會碰到 barrier G 節點的期數再用 Single-Barrier Option 的 BTT 來連接，最後再以 backward induction 求算之：



(摘自 吳蕙君 以樹狀模型評價保證最低提領給付保險附約(2009) 圖 3.2.7)

『圖 2.1』障礙選擇權接點示意圖

3. 林思瑜(2009)延續 Milevsky and Salisbury(2006)的架構下，討論利率隨機性，以及跳躍資產模型對 GMWB 評價的影響，考慮市場資訊的 BGM 利率模型，給

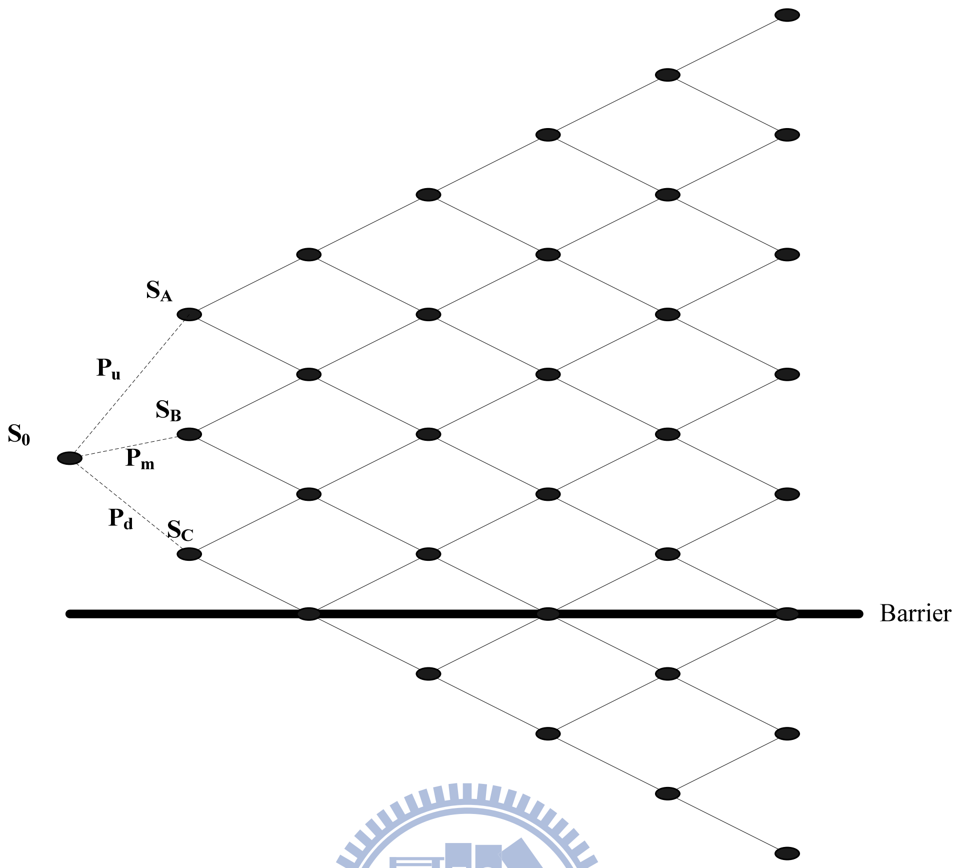
定參數下利用蒙地卡羅模擬法來計算公平費用率。

本研究欲在 GMWB 評價模型上做條件的放寬以及改善，針對 Milevsky and Salisbury (2006)以及吳蕙君(2009)的部分考慮隨機利率性的條件，並且利用樹狀結構的模型針對林思瑜(2009)的部分蒙地卡羅模擬法在計算效率上的問題做改善，以及加入遞延期，以更符合實務做法。

第二節　DFPM-HWT 模型

1. Hull and White(1994)提出利率三元樹狀結構的建構方法，此方法將連續型 Hull and White 短期模型改為離散時間型，藉由市場上的零息利率，建構出能正確反應市場狀況的利率結構，主要分成兩階段，第一階段先建構不包含市場利率結構資訊的短期利率樹狀結構，第二階段將第一階段的樹狀結構進行調整，以符合市場利率期間結構。

2. Dai and Lyuu(2010)提出的 Bino-trinomial tree(BTT)能夠處理在評價障礙選擇權時，因為違約門檻會隨切割期數不同有擺盪的現象，沒辦法與樹狀結構的節點重合，導致評價出現誤差，也就是非線性誤差的問題。此方法首先在已知門檻值的狀況下，建構一個節點能與門檻值重合的二元樹(CRR)，以解決非線性誤差，並在原時間點到 CRR 第一期的結點連接時，建立出比二元樹多一自由度的三元樹，尋找原始點適合的三個連接點，示意圖如下：



『圖 2.2』BTT 接點示意圖

S_0點必須尋找適合的三個連接點使其一階與二階動差能逼近在對數常態下的平均數以及變異數，且此三點連接的路徑機率總合為 1。

已知 CRR 樹同一期節點兩兩間距$2\sigma\sqrt{\Delta t}$，分別定義：

$$\beta \equiv \hat{u} - u$$

$$\alpha \equiv \hat{u} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} - u = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$\gamma \equiv \hat{u} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} - u = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}$$

其中 $u = (r - \sigma^2/2)\Delta t$ ，$\hat{u} = \ln(S_B/S_0) - \ln(S_0/S_0) = \ln(S_B/S_0)$ ，$\beta \in [-\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t})$。

則：

$$P_u \cdot \alpha + P_m \cdot \beta + P_d \cdot \gamma = 0$$
$$P_u \cdot \alpha^2 + P_m \cdot \beta^2 + P_d \cdot \gamma^2 = \sigma^2 \Delta t$$
$$P_u + P_m + P_d = 1$$

再利用 Cramer's Rule 即能分別求解出機率 P_u 、 P_m 、 P_d ，完成接點。

3. 陳博宇(2009) 提出的 DFPM-HWT 數值方法為 Briys and Varenne (1997) 評價模型的延伸。討論公司資產有離散跳躍情形的負債，以及在考慮有違約風險和利率隨機性之下的公司負債價值。此樹狀結構以 Hull and White 的利率結構模型為基礎，在此基礎之下建構資產的變動過程，在資產與利率變動交互影響的部分利用正交化的方法來做轉換，將彼此相關的利率與資產轉換成新的兩獨立變數，而為了處理公司負債的違約門檻可能造成的非線性誤差，以及資產發生離散跳躍的情形，故以 BTT 的造樹方法來接點。

第三章 研究方法

本文欲將 DFPM-HWT 數值方法應用在 GMWB 商品的評價上，討論在隨機利率下的公平費用率。第一節首先提出 GMWB 模型的基礎假設。第二節則介紹如何建構評價 GMWB 的立體樹狀結構。第三節討論樹狀結構的評價過程。

第一節　GMWB 模型的基礎假設

此 GMWB 模型的基礎假設延續 Milevsky and Salisbury(2006)的設計，假設 GMWB 所投資的標的資產符合幾何布朗運動：

$$dS_t = \mu S_t d_t + \sigma S_t dB_t$$

其中

S_t：標的資產在時間點 t 的價格

μ：標的資產的平均報酬

σ：標的資產的波動度

B_t：標準布朗運動

此時討論的資產價值尚未考慮到保費扣除的部分，考慮到帳戶價值會隨著時間有預期報酬的增加以外，還有公平費用率的收取，若假設公平費用率是連續收取，且保戶不能提前解約，則我們可以將帳戶的隨機過程改為：

$$dW_t = (\mu - \alpha) W_t dt + \sigma W_t dB_t$$
$$W_0 = w_0$$

其中 α 即為公平費用率，w_0 為期初躉繳保費

GMWB 商品還有保證提領金額的因素會導致帳戶價值的變化，保證提領金額 G(在此為期初躉繳保費乘以保證提領率 g，即為 w_0*g)，會讓帳戶價值在提領時間點時下降 G 的金額。

在提領期結束後，若帳戶還有剩餘價值，則獲利全歸保戶所有，但若是在提領期間帳戶價值因提領或是投資失利而歸 0，那麼在提領期結束時保戶就沒有辦法獲得多餘報酬，這樣的特性可將此視為一個選擇權，一個期初價格為 w_0，履約價格為 G，期長為 w_0/G，barrier 為 G 的向下失效且配發股利的股票障礙選擇權。故 GMWB 商品契約即為一個配發股利的股票選擇權，再加上定期定額的保證提領年金。

第二節　建構 DFPM-HWT 樹狀結構模型

由於帳戶價值與利率這兩個隨機過程具有相關性，在運用樹狀結構模型進行評價時，必須要有兩個過程變動的聯合機率才能運算，然而在有相依性的狀態下要建構兩隨機過程的聯合機率並不容易，所以先採用正交化的方法，將利率和帳戶價值這兩個變數轉變成兩個互相獨立的變數。之後利用 Hull and White (1990) 所提出三元利率樹的特性產生能代表利率的新變數 Y(t)，並引用 Dai and Lyuu(2010)所提出 BTT (Bino-trinomial tree)的建樹方法建立具有違約門檻性質的新變數 X(t)來代表 GMWB 隱含的障礙選擇權的部分，之後結合這兩個三元樹創造出立體空間的樹狀結構，基於已經經過正交化的過程，聯合機率會等於邊際機率相乘，最後經由後推法(Backward induction)即可評價出 GMWB 所隱含障礙選擇權的價值。

接下來將介紹建構此模型的步驟:

一、正交化

帳戶價值 W_t 符合幾何布朗運動：

$$dW(t)=(r(t)-\alpha)W(t)dt+\sigma W(t)dB_1(t)$$

$$\frac{dW(t)}{W(t)}=(r(t)-\alpha)dt+\sigma dB_1(t)$$

$$d\ln W(t)=[(r(t)-\alpha)-\frac{\sigma^2}{2}]dt+\sigma dB_1(t) \qquad (3.1.1)$$

利率為 Hull and White (1990) 的 extended Vasicek model

$$dr(t)=(\theta(t)-a\cdot r(t))dt+\eta dB_2(t) \qquad (3.1.2)$$

其中，a 為均數復迴歸率，η 為利率的波動度，此二參數皆為固定常數，b(t)為利率的長期水準： $\theta(t)=a\cdot b(t)$

改寫(3.1.1)：

$$d\ln W(t)=[(r(t)-\alpha)-\frac{\sigma^2}{2}]dt+\sigma dB_1(t)$$

$$d\ln W(t)=[(r(t)-\alpha)-\frac{\sigma^2}{2}]dt+\sigma[\rho dB_2(t)+\sqrt{1-\rho^2}dZ(t)] \qquad (3.1.3)$$

$$dB_1(t)=\rho dB_2(t)+\sqrt{1-\rho^2}dZ(t)$$

其中 Z(t)與 B_2(t)為互相獨立的布朗運動，ρ 為帳戶價值與利率變動的相關性

接下來將(3.1.2)與(3.1.3)用矩陣的方式表示：

$$\begin{bmatrix} d\ln W(t) \\ dr(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (r(t)-\alpha)-\frac{\sigma^2}{2} \\ \theta(t)-a\cdot r(t) \end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\sigma & \rho\sigma \\ 0 & \eta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dZ(t) \\ dB_2(t) \end{bmatrix}$$

求出 $\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\sigma & \rho\sigma \\ 0 & \eta \end{bmatrix}$ 的反矩陣：

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\sigma & \rho\sigma \\ 0 & \eta \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(\sqrt{1-\rho^2})\sigma\eta}\begin{bmatrix} \eta & -\rho\sigma \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma \end{bmatrix}$$

再將等式左右同乘上反矩陣：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\ln W(t)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} - \dfrac{\rho dr(t)}{\eta\sqrt{1-\rho^2}} \\ \dfrac{dr(t)}{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(r(t)-\alpha)-\dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} - \dfrac{\rho(\theta(t)-ar(t))}{\eta\sqrt{1-\rho^2}} \\ \dfrac{(\theta(t)-ar(t))}{\eta} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ(t) \\ dB_2(t) \end{bmatrix}$$

其中 θ(t)則能利用 Hull and White (2005) $\hat{\theta}(t) = \frac{\alpha(t+1)-\alpha(t)}{\Delta t} + a\cdot\alpha(t+1)$ 估計之、$\alpha(t)$ 為 Hull-White tree 的調整因子，又令兩新變數 X(t)和 Y(t)：

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ dY(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{d\ln W(t)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} - \dfrac{\rho dr(t)}{\eta\sqrt{1-\rho^2}} \\ \dfrac{dr(t)}{\eta} \end{bmatrix}$$

分別從 0 積分到 t：

$$X(t) = X(0) + \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{\ln\frac{W(t)}{W(0)}}{\sigma} - \rho\left[\frac{r(t)-r(0)}{\eta}\right]\right) \quad 、Y(t) = Y(0) + \frac{r(t)-r(0)}{\eta}$$

令 X(0) = 0、Y(0) = 0

則 $\quad W(t) = W(0)\exp\{\sigma(\sqrt{1-\rho^2}\cdot X(t) + \rho\cdot[Y(t)])\}$ (3.1.4)

由(3.1.4)就可以利用建構 X(t)和 Y(t)兩個獨立的隨機過程來表示出帳戶 W(t)的過程。分別建構 X(t)和 Y(t)的樹狀結構，再加以結合，即可進行評價。

二、造樹過程參數的給定

X(t)和 Y(t)的隨機過程：

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ dY(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(r(t)-\alpha)-\dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} - \dfrac{\rho(\theta(t)-ar(t))}{\eta\sqrt{1-\rho^2}} \\ \dfrac{(\theta(t)-ar(t))}{\eta} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ(t) \\ dB_2(t) \end{bmatrix} \qquad (3.1.5)$$

已知 X(t)和 Y(t)的隨機過程之後，就可以開始樹狀結構的建立，但是在 X(t)

的 drift 項有未知參數 α，如此一來便不能建構樹狀結構，故我們採取先給值後調整的方法，利用 Bisection 法來近似參數 α。

規則如下：

計算後的障礙選擇權價值+固定年金 > 起始的躉繳保費

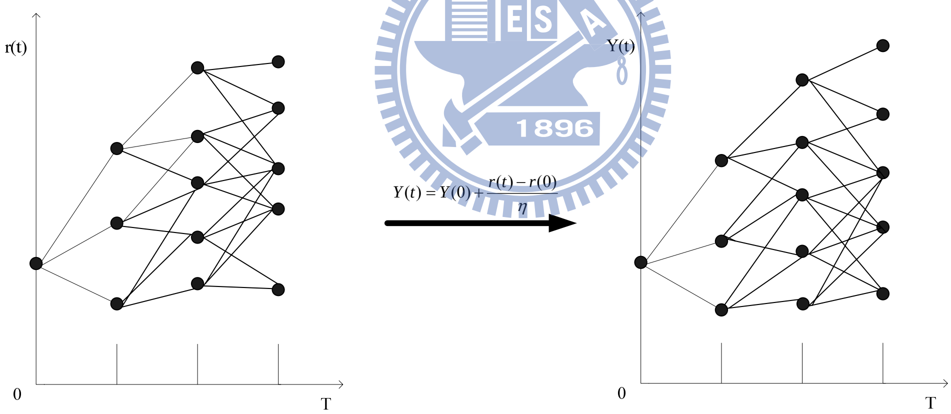
➔α 調升

計算後的障礙選擇權價值+固定年金 < 起始的躉繳保費

➔α 調降

三、建構 Y 變數的三元樹狀結構

因為$r(t)=r(0)+Y(t)\cdot\eta$，所以只需要將 r(t)也就是利率樹的部分建立完成之後，再經過簡單的移項以及調整，就可以生成新的變數 Y(t)的樹狀結構。由於是一對一的對應關係，Y(t)的變動機率則與相對應點的 r(t)相同。



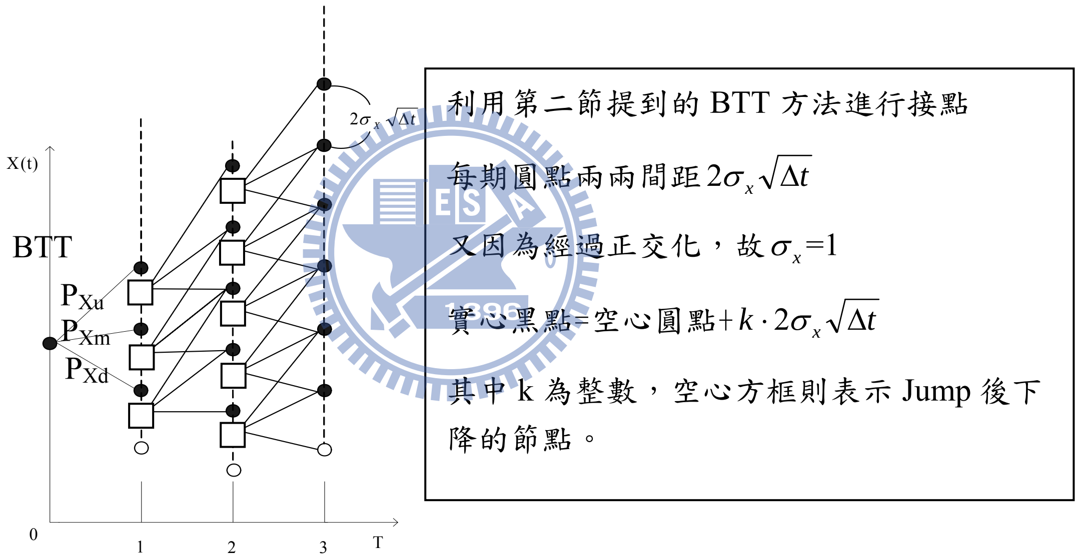
『圖 3.1』HW-tree 轉換 Y 座標

四、建構 X 變數的三元樹

由於 GMWB 商品可視為一年金和一離散的障礙選擇權的組合，所以要處理非線性誤差的問題，使用 Dai and Lyuu(2010)所提出 BTT (Bino-trinomial tree)的建樹方法。先建立起每個時間每個不同利率下 X(t)的違約門檻，並且生成格子點，間距是$2\sigma_X\sqrt{\Delta t}$，再進行接點的動作。

在此必須注意帳戶在提領時間點的節點，由於提領的關係帳戶價值要下降 G 的金額，但此建樹方法是在 log 平面上，所以處理提領時間點的 Jump 的問題時，要將 X(t)的坐標轉換到真實世界的維度才能計算。首先建立好 X(t)樹和 Y(t)樹之後，將 Y(t)轉為 r(t)，將 X(t)經由 $W(t)=W(0)\exp\{\sigma(\sqrt{1-\rho^2}\cdot X(t)+\rho\cdot[\frac{r(t)-r(0)}{\eta}])\}$ 轉換到真實世界 W(t)的維度，再處理 Jump 的部分，向下下降 G 的高度，即為 W(t)-G，在計算完 Jump 之後，利用 $X(t)=X(0)+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{\ln\frac{W(t)}{W(0)}}{\sigma}-\rho[\frac{r(t)-r(0)}{\eta}])$ 將其再轉換為 X(t)的坐標維度，其後繼續進行樹狀結構的接點。

以分別給定每一期不同的 Y 坐標下 X 的樹狀結構來舉例，如下圖：



『圖 3.2』節點發生 Jump 時的接點

其中空心圓點表示不同期數的違約門檻值，可由下列式子得到

第一期的違約門檻值：$X(t)=X(0)+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{\ln(\frac{G}{W(0)})}{\sigma}-\rho[\frac{r(1)-r(0)}{\eta}])$

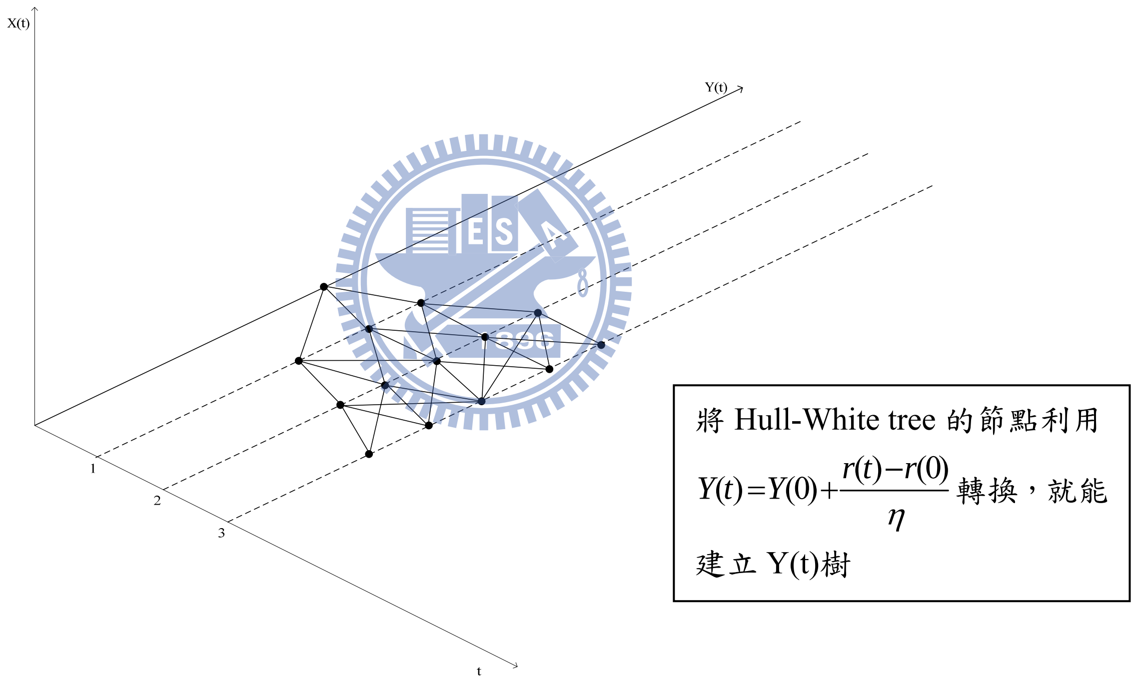
第二期的違約門檻值：$X(t)=X(0)+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{\ln(\frac{G}{W(0)})}{\sigma}-\rho[\frac{r(2)-r(0)}{\eta}])$

第三期的違約門檻值：$X(t)=X(0)+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{\ln(\frac{G}{W(0)})}{\sigma}-\rho\left[\frac{r(3)-r(0)}{\eta}\right]\right)$

五、結合 X(t)樹和 Y(t)樹

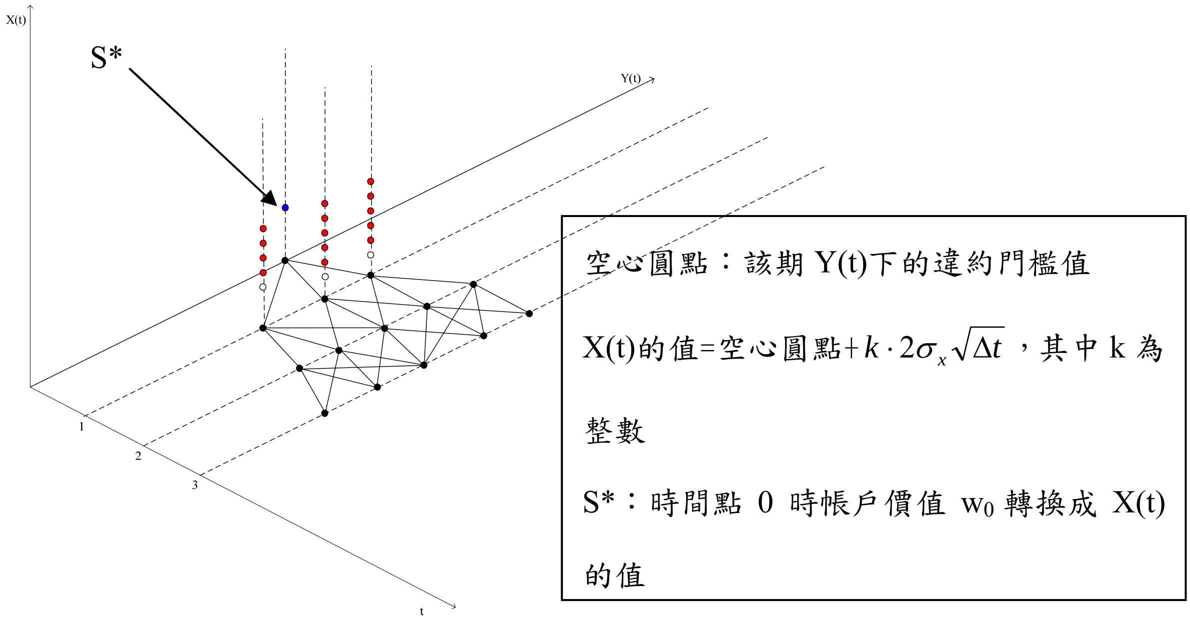
再建立結合兩個樹狀結構之前，必須了解建樹的先後順序，本文帳戶價值的違約門檻跟利率有關，所以在結合 X(t)和 Y(t)時要先建立 Y(t)的樹狀結構，X(t)的樹狀結構才能在此基礎上建立起來。分成下列幾個步驟

(1)在 t、Y(t)平面上建立 Y(t)樹，如下圖：



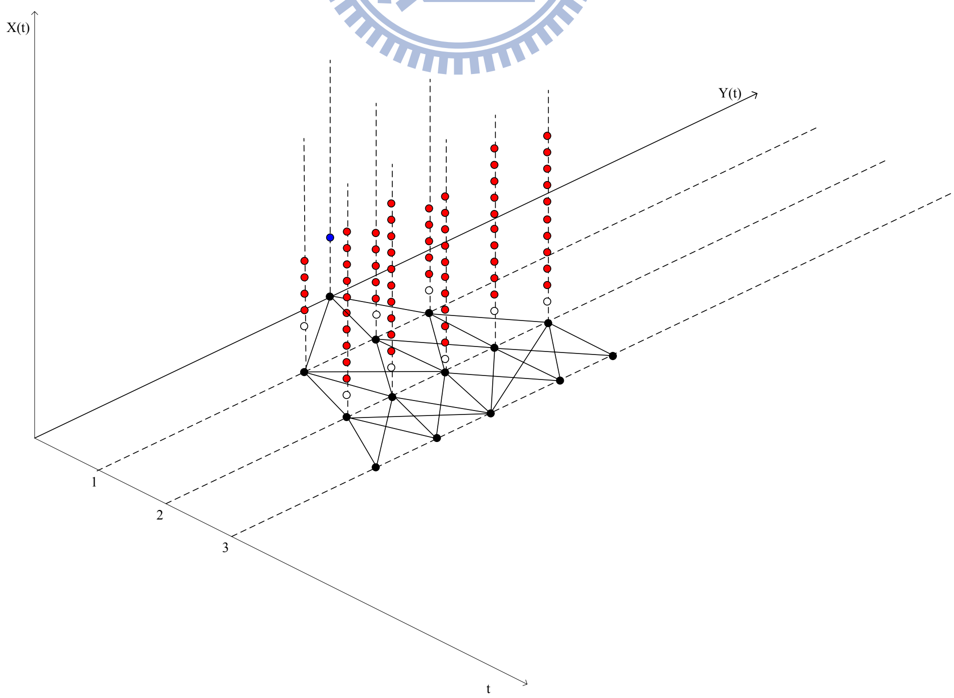
『圖 3.3』結合 X(t)樹和 Y(t)樹步驟一

(2) 建立不同 Y(t)下的違約門檻值，並向上生成 X(t)的柱子，如下圖：



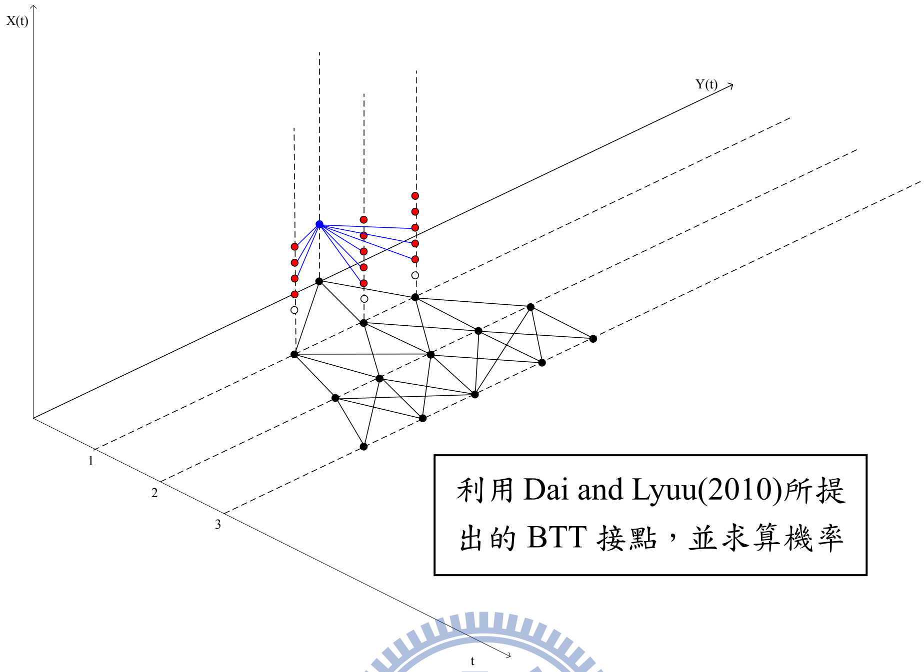
『圖 3.4』結合 X(t)樹和 Y(t)樹步驟二

(3)將所有 Y(t)都生成 X(t)的柱子，如下圖：



『圖 3.5』結合 X(t)樹和 Y(t)樹步驟三

(4) BTT 找點(為了畫面簡潔只保留第一期的節點)，如下圖：



『圖 3.6』結合 X(t)樹和 Y(t)樹步驟四

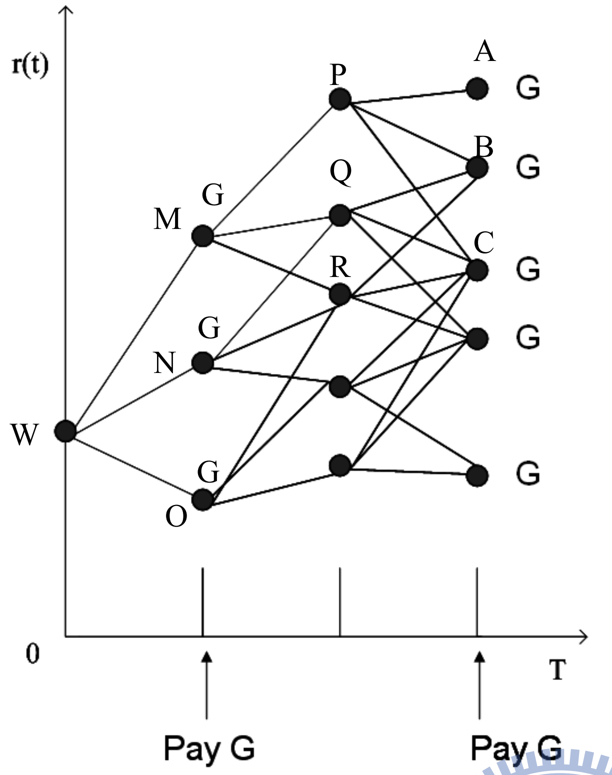
透過上面步驟(1)到(4)即可完成 X(t)與 Y(t)樹狀結構的結合(為了畫面並未把 Jump 的節點加入圖片中)，建構完樹狀結構後則利用後推法(Backward induction)進行評價。

第三節 DFPM-HWT 應用在 GMWB 的評價

GMWB 被我們分為一個固定提領金額的部分以及配發股利的股票選擇權。

(1) 固定金額提領的部分

在 Hull-White tree 下評價固定年金



『圖 3.7』年金折現示意圖

假設在時間點 1 與時間點 3 是提領時間點，故在後推法年金折現的部分先將時間點 1 與時間點 3 的報酬都放上 G，從時間點 3 折現到時間點 2 與時間點 2 折現到時間點 1 都依照標準的步驟來折現，以時間點 3 折現到時間點 2 為例：

A 點的價值*由點 P 走到點 A 的機率 +

B 點的價值*由點 P 走到點 B 的機率 +

C 點的價值*由點 P 走到點 C 的機率

總合在以 P 點的利率折現，就能算出 P 點的價值，以此類推也能利用 P、Q、R 三點計算出 M 點的價值。當計算完 M、N、O 三點價值之後，由於是要提領的時間點，所以再折回第 0 個時間點時要將本來的價值加上 G 再折現，即為：

(M 點的價值+G)*由點 W 走到點 M 的機率 +

(N 點的價值+G)*由點 W 走到點 N 的機率 +

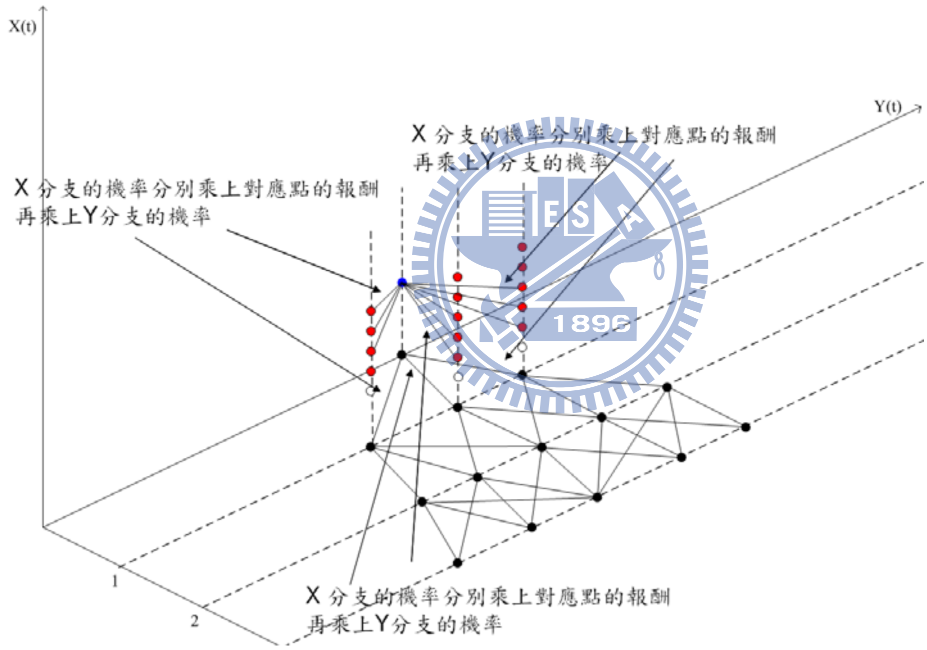
(O 點的價值酬+G)*由點 W 走到點 O 的機率

總合再以 W 點的利率折現，就能算出 W 點的價值，此價值即是 GMWB 的固定提領年金的折現值。

也就是說在計算年金的時候以一般後推法計算，將該節點的價值取期望值後做折現，與一般後推法不同的是，若該節點處在需要支付年金的年期，則必須加上該年金的價值之後再做後推法，反覆動作到時間點 0，即能計算出固定提領年金在時間點 0 的價值。

(2) 障礙選擇權

由於經過正交化後，聯合變動機率等於兩個邊際機率相乘：



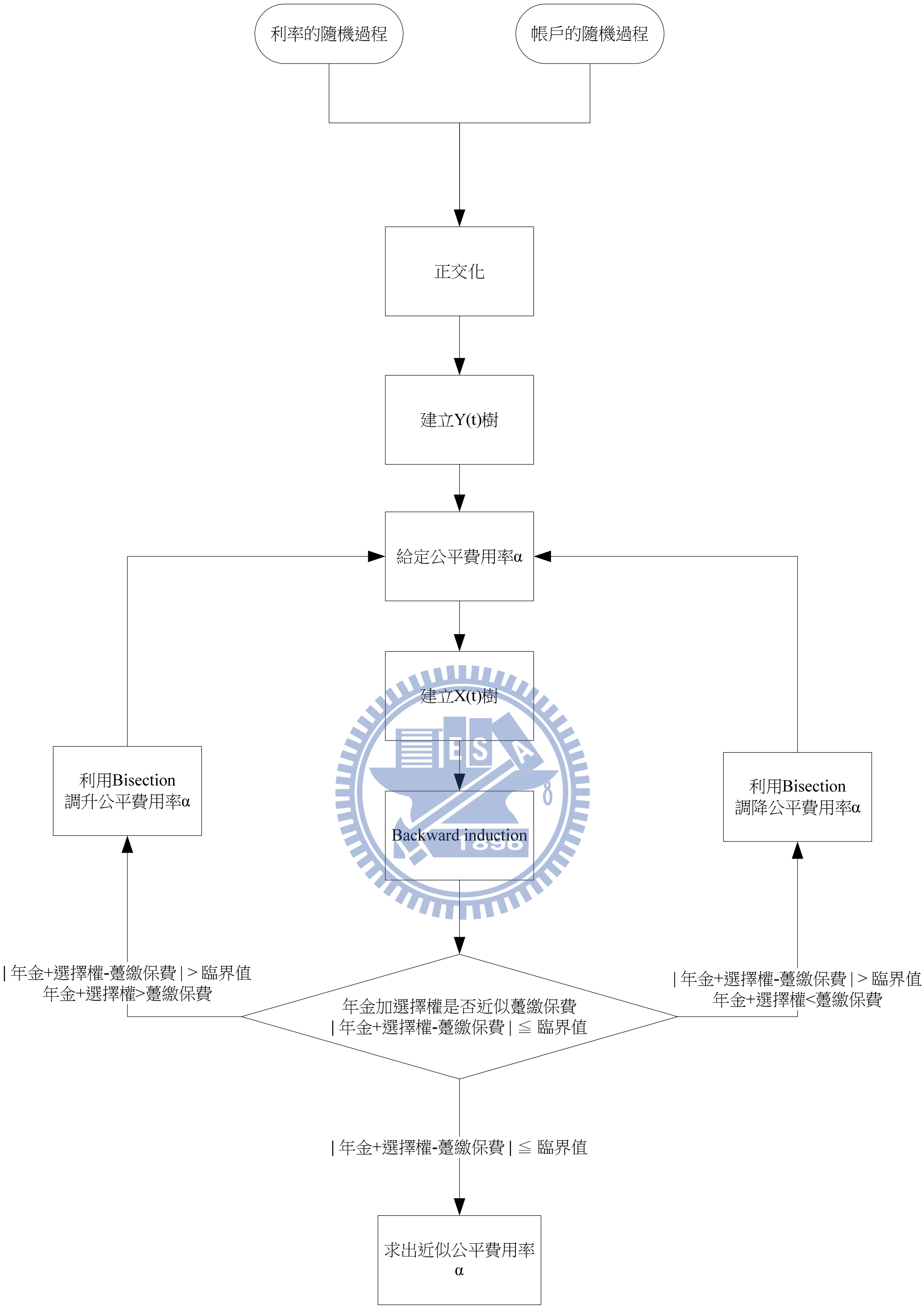
『圖 3.8』障礙選擇權折現示意圖

將此樹狀結構延展到最後一期，會得到一個 X(t)的平面，此 X(t)平面上的每一個點的報酬即為 X(t)-G，有了最後一期的報酬之後，就可以開始進行障礙選擇權的評價。利用 Backward induction 將報酬分別取期望值然後再折現的過程當中，X 樹的分支機率能夠利用 BTT 的接點求得，Y 樹由於和 Hull-White tree 是屬於一對一的對應關係，故 Y 樹分支變動的機率即為 Hull-White tree 節點變動的機率，

又因為 X 樹和 Y 樹已經過正交化，聯合變動機率就等於個別邊際機率相乘。折現就以該期的 Y 利用 $r(t)=r(0)+Y(t)\cdot\eta$ 計算出 r 再進行折現，此步驟不斷循環，到時間點 0 時，即為選擇權的價格。

則 GMWB 的價值就是上述的固定年金的折現值加上選擇權的價值。這個價值依照公平原則下要等於起始的躉繳保費,所以要調整公平費用率讓這個價值等於起始的躉繳保費，以逆推公平費用率。

評價流程如下：


利率的隨機過程
帳戶的隨機過程
正交化
建立Y(t)樹
給定公平費用率α
建立X(t)樹
Backward induction
利用Bisection
調升公平費用率α
利用Bisection
調降公平費用率α
|年金+選擇權-躉繳保費|＞臨界值
年金+選擇權>躉繳保費
|年金+選擇權-躉繳保費|＞臨界值
年金+選擇權<躉繳保費
年金加選擇權是否近似躉繳保費
|年金+選擇權-躉繳保費|≦臨界值
|年金+選擇權-躉繳保費|≦臨界值
求出近似公平費用率
α

『圖 3.9』評價流程圖

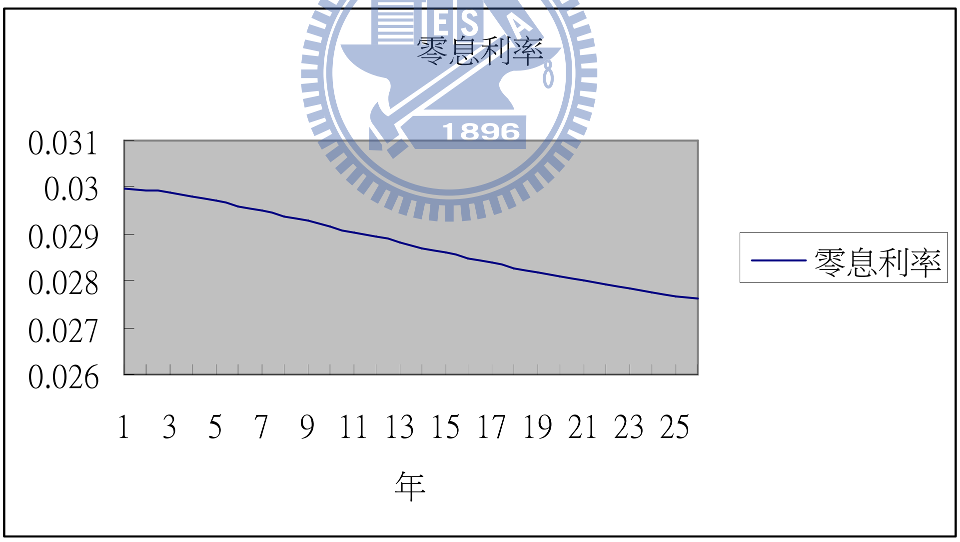
第四章 模型數值分析結果與討論

本章欲討論 DFPM-HWT 數值方法應用在 GMWB 商品的評價的結果，包含即期提領、加入遞延期，以及在不同條件參數下對於公平保費的影響。

第一節　利率設定

欲利用 DFPM-HWT 來評價 GMWB，需要市場上的零息利率當作參數，在此提供一組零息利率，如下：

利用 Vasicek model 起始短利 0.03，θ=0.003，利率的波動度 η=0.01，均數迴歸率為 0.1，利用公式反推來零息利率，如下圖：



『圖 4.1』零息利率

第二節　收斂情形

期初躉繳保費 W0=100，假設即期提領，保證提領金額 G 為 5，帳戶的波動度 σ=0.2，期長 20 年，帳戶與利率的相關係數 ρ=-0.25，討論在不同切割期數下，

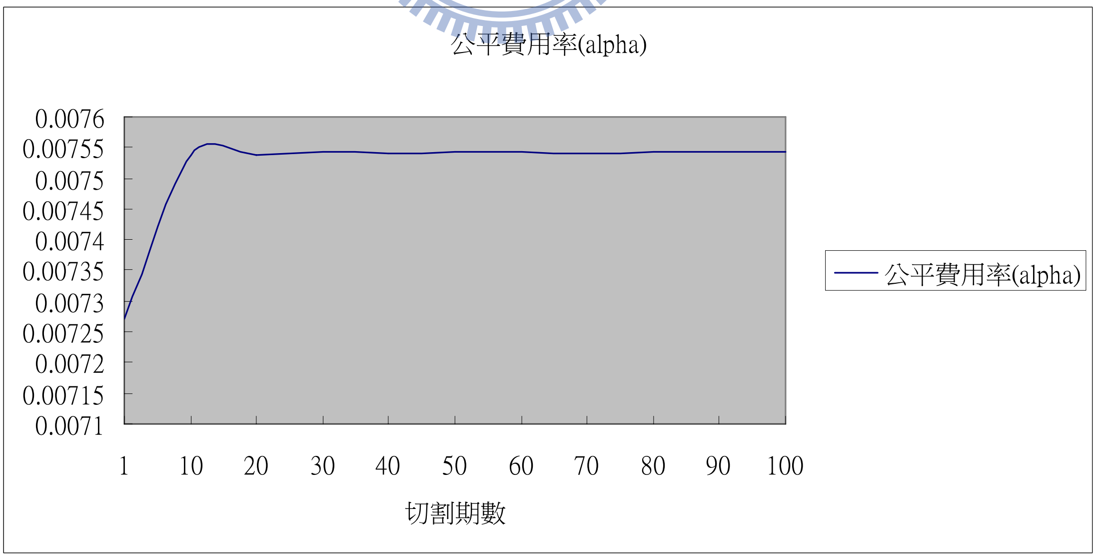
公平保費為 0 情形下的商品價值：

表4.1　不同切割期數的比較

切割期數	DFPH with HW-Tree
1	107.121176
10	107.333877
20	107.334942
30	107.335997
40	107.335730
50	107.335882
60	107.335835
70	107.335693
80	107.335771
90	107.335841
100	107.335977

由表可以看出結果不會因為切割期數而有大幅度震盪，表示模型能夠有效處理非線性誤差所造成的問題。

針對上述結果所推算的公平費用率，利用圖形表示，如下：



『圖 4.2』公平費用率收斂圖

由上圖可知每年期數切割超過 10 期之後，圖形漸趨平緩。而且切割期數超

過 10 期之後，公平保費的差距更是小於十萬分之一，可證明公平保費能夠隨著切割期數增加而有效的收斂。

第三節　　即期提領

本節欲討論在沒有遞延期，也就是保戶即期提領的狀況，與假設利率為常數的吳蕙君(2009)，以及Yang(2010)所提出的分析解做比較。

參數設定：期初躉繳保費W0=100，保證提領金額G為5，帳戶的波動度分別為σ=0.2和σ=0.3，期長20年

針對吳蕙君(2009)及Yang(2010)的個別參數設定如下：

(a) 吳蕙君(2009)的參數設定

假設利率(r)為常數，r = 0.05，故將本篇方法Zero rate參數設為水平線，都等於0.05，相關係數ρ=0，利率的波動度為0.01，均數迴歸率為0.1。

(b) Yang(2010)的參數設定

帳戶與利率的相關係數ρ=-0.25

隨機利率：利用Vasicek model，起始短利r_0 = 0.03，利率的波動度η= 0.01，均數迴歸率為0.1，θ=0.003

與吳蕙君(2009)的結果及Yang(2010)所提出的分析解做比較，整理如下表：

表4.2 不同模型及波動度的比較

constant interest rate

	σ = 0.2	σ = 0.3
吳蕙君	0.0028	0.0075
本篇方法	0.003002	0.007676

HW model

	σ = 0.2	σ = 0.3

Yang	0.00751	0.01434
本篇方法	0.007542	0.015723

其中吳蕙君(2009)假設利率為常數，以帳戶與利率的相關係數設為0，公平費用率相當接近，結果較高的原因是由於本篇方法使用Hull and White Model，放寬了利率為常數的假設，考慮了利率隨機性的因素，也就加入了利率變動的風險，但因為帳戶與利率的相關係數為0，所以利率變動對帳戶價值較無影響力，故與吳蕙君所算出的公平費用率差異不大。

又 Yang(2010)利用 reciprocal gamma distribution，在帳戶波動度分別為 0.2、0.3 時，算出 GMWB 的分析解為 0.0075 以及 0.01434。在相同的參數設定之下，本篇方法分別為 0.007542 以及 0.015723，答案略高的原因是公式解模型中假定保證提領金額連續支付，樹狀模型中假定離散支付保證提領金額，在每年年底才從保戶的帳戶價值中扣除保證提領金額，所以假定 GMWB 可拆成一個年金加上選擇權，那麼離散支付模型的帳戶價值波動度較連續支付模型為大，選擇權價值也比較高，故收取的保費較高。

但是會影響結果不同的因素可能有很多，包含帳戶價值與利率的相關性，利率的波動度，其後將以敏感度分析討論之。

本來模型中保戶每年提領固定年金 G，在此討論若是每年付一次 G、每年付兩次 G/2、每年付 4 次 G/4…的狀況：

零息利率：利用 Vasicek model 起始短利 0.03，θ=0.003 利率的波動度 η=0.01，均數回歸率為 0.1，利用公式反推零息利率，期初躉繳保費 W0=100，保證提領金額 G 為 5，期長 20 年，帳戶與利率的相關係數 ρ=-0.25，每年切 64 期：

帳戶的波動度為 σ=0.2，結果整理如下表：

表4.3 波動度為0.2 每年提領次數的比較

一年付幾次 G	公平保費	公平保費為 0 時的價值	在公平保費率下時年金價值	在公平保費率下時 option value

1	0.007543	107.33579	74.90694	32.42885
2	0.007602	107.242322	75.439605	31.80272
4	0.007637	107.199133	75.707111	31.49202
8	0.007653	107.176896	75.841158	31.33574
16	0.00766	107.165525	75.908255	31.25727
32	0.007666	107.159934	75.941822	31.21811
64	0.007667	107.157202	75.95861	31.19859

帳戶的波動度為 $\sigma=0.3$，結果整理如下表：

表4.4 波動度為0.3 每年提領次數的比較

一年付幾次 G	公平保費	公平保費為 0 時的價值	在公平保費率下時年金價值	在公平保費率下時 option value
1	0.015720	114.517727	74.906940	39.610787
2	0.015823	114.324615	75.439605	38.885010
4	0.015879	114.230510	75.707111	38.523399
8	0.015908	114.181825	75.841158	38.340667
16	0.015923	114.157796	75.908255	38.249541
32	0.015928	114.145806	75.941822	38.203984
64	0.015933	114.140009	75.958610	38.181399

由上表可以看得出來每年支付的次數越多，公平保費也越高，是因為提領次數增加會讓帳戶價值因支付保證提領金額而提前下降，所以公平保費(收費等於公平費用率乘上帳戶價值，並採連續收取)因帳戶價值提前下降而減少的部分需靠提高公平費用率彌補。

第四節　遞延期提領

本節欲討論加入遞延期的保本機制之後，帳戶價值的變化，以及公平保費依照遞延期期長或是總保險期長攤銷的不同。

以期初躉繳保費 W0=100，保證提領比率 5%，帳戶的波動度為 σ=0.2，期長 30 年，前 10 年為遞延期，後 20 年為提領期，帳戶與利率的相關係數 ρ=-0.25。

另外遞延期的機制為保本機制，帳戶價值在遞延期滿若是高於 100，則以該值來計算提領金額，若是低於 100，則以 100 計算，以保證在遞延期滿時帳戶價值最少有 100，來保障保戶至少能夠在提領期滿時回收成本。

則公平保費為 0 的情況下，商品的價值如下表：

表4.5 加入遞延期切割期數的比較

切割期數	DFPH with HW-Tree
1	116.373665
4	117.221369
8	116.553834
12	116.307604
16	116.891871
20	116.593500

針對上表中的值推算出的公平費用率的結果如下表：

表4.6 遞延期的保費收取

切割期數	保費收取遞延期長 共 10 年	保費收取總保險期長 共 30 年
1	0.025186	0.009628
4	0.026747	0.010176
8	0.025436	0.009700
12	0.025150	0.009556
16	0.026219	0.009958
20	0.025692	0.009758

在上述結果之中，保費的收取依照總保險期長 30 年攤銷約略是依照遞延期長 10 年攤銷的三倍。

第五節　敏感度分析

本節欲討論不同參數的變化之下對於公平保費的影響，主要有利率波動度，帳戶波動度，以及相關係數的改變。

(a) 提領期長

利率期間結構：

以利用 Vasicek model，起始短利 $r_0 = 0.03$，利率的波動度 $\eta = 0.01$，均數迴歸率為 0.1，θ=0.003，利率與帳戶的相關係數為-0.25，帳戶波動度為 σ=0.2

假設即期提領，期初躉繳保費 W0=100，結果如下表：

表4.7 提領期長對公平保費的影響

提領期長	公平費用率
1	0.139954
5	0.042761
10	0.018817
20	0.007542
25	0.005447

由表可知，當提領期長越長，公平保費越低，這是因為不管哪種提領期長，提領總額都為 100，在保證額度都相同的狀況下，攤銷的時間越長，公平保費越低。

(b) 帳戶波動度

利率期間結構：

以利用 Vasicek model，起始短利 $r_0 = 0.03$，利率的波動度 $\eta = 0.01$，均數迴歸率為 0.1，θ=0.003，利率與帳戶的相關係數為-0.25，假設即期提領，期初躉繳保費 W0=100，帳戶波動度分別為 0.1、0.2、0.3，結果如下表：

表4.8 帳戶波動度對公平保費的影響

提領期長	σ=0.1	σ=0.2	σ=0.3
1	0.041602	0.139954	0.255737

5	0.011292	0.042761	0.078812
10	0.004028	0.018817	0.036890
20	0.001307	0.007542	0.015723
25	0.000887	0.005447	0.011593

由上表可以看得出來，公平保費會因為帳戶波動度上升而有很明顯的變高，有這種現象是因為 GMWB 商品能拆解成一個障礙選擇權加上一個固定年金，那麼在帳戶波動度變大的時候，選擇權的價格就會變高，自然收取的公平保費就要提高。由結果可見帳戶的波動度的改變對於公平保費有很顯著的影響。

(c) 相關係數

利率期間結構：

以利用 Vasicek model，起始短利 $r_0 = 0.03$，利率的波動度 $\eta = 0.01$，均數迴歸率為 0.1，$\theta=0.003$，帳戶波動度為 $\sigma=0.2$，假設即期提領，期初躉繳保費 W0=100，利率與帳戶的相關係數分別為-0.2、0、0.2，結果如下表：

表4.9 相關係數對公平保費的影響

提領期長	ρ=-0.2	ρ=0	ρ=0.2
1	0.14043	0.141846	0.142578
5	0.042944	0.044205	0.045319
10	0.019073	0.020127	0.021152
20	0.007732	0.008484	0.009210
25	0.00561	0.006246	0.006862

由表可看出相關係數改變對公平保費的影響，相關係數越高，公平保費越高。

(d) 利率波動度

利率期間結構：

以利用 Vasicek model，起始短利 $r_0 = 0.03$，均數迴歸率為 0.1，$\theta=0.003$，帳戶波動度為 $\sigma=0.2$，假設即期提領，期初躉繳保費 W0=100，分別討論利率與帳戶

的相關係數為正及為負的情況，結果如下：

(a) **以相關係數為正**

表 4.10.1 相關係數為正及利率波動度對公平保費的影響(1)

	ρ=0.1		ρ=0.2		ρ=0.3		ρ=0.4	
提領期長	η= 0.01	η= 0.02	η= 0.01	η= 0.02	η= 0.01	η= 0.02	η= 0.01	η= 0.02
1	0.142334	0.14325	0.142578	0.144043	0.142578	0.144531	0.142151	0.144653
5	0.044769	0.046906	0.045319	0.048035	0.046051	0.049347	0.0466	0.050446
10	0.020641	0.023639	0.021152	0.024658	0.021674	0.025671	0.022174	0.026654
20	0.00885	0.012508	0.00921	0.013251	0.009567	0.013971	0.009915	0.014667
25	0.006557	0.010279	0.006862	0.010921	0.007159	0.011539	0.007452	0.012134

表4.10.2 相關係數為正及利率波動度對公平保費的影響(2)

	ρ=0.5		ρ=0.6		ρ=0.7		ρ=0.8	
提領期長	η= 0.01	η= 0.02	η= 0.01	η= 0.02	η= 0.01	η= 0.02	η= 0.01	η= 0.02
1	0.148193	0.151123	0.138916	0.142029	0.141724	0.145386	0.143005	0.147278
5	0.047272	0.051666	0.047852	0.05278	0.048447	0.053909	0.049042	0.055054
10	0.022681	0.027625	0.023175	0.028571	0.023663	0.029498	0.024152	0.030414
20	0.01026	0.015341	0.010599	0.015997	0.010931	0.016635	0.011261	0.017252
25	0.007741	0.012708	0.008025	0.013263	0.008304	0.0138	0.008578	0.014316

由上表可知當帳戶與利率的相關係數大於0時，利率波動度上升，公平保費也會跟著增加，且提領期長越長，增加的幅度越大，以ρ=0.5為例，提領期長為10年，利率波動度上升導致公平保費上升的比率為21.8%；提領期長20年則為49.5%，提領期長25年更是上升到64.2%，由此可知提領期長越長，利率波動對公平保費的影響越大。

(b) 相關係數為負

表4.10.3 相關係數為負及利率波動度對公平保費的影響(1)

	ρ=-0.1	ρ=-0.2	ρ=-0.3	ρ=-0.4

提領期長	η= 0.01	η= 0.02	η= 0.01	η= 0.02	η= 0.01	η= 0.02	η= 0.01	η= 0.02
1	0.14126	0.141113	0.14043	0.139746	0.139343	0.138123	0.137891	0.136084
5	0.043591	0.044525	0.042944	0.043274	0.042493	0.042212	0.041846	0.040918
10	0.019604	0.021529	0.019073	0.020441	0.018555	0.019342	0.018008	0.018198
20	0.008112	0.01094	0.007732	0.010112	0.007349	0.009255	0.006957	0.008364
25	0.005933	0.008913	0.00561	0.008187	0.005284	0.007429	0.00495	0.006638

表4.10.4 相關係數為負及利率波動度對公平保費的影響(2)

	ρ=-0.5		ρ=-0.6		ρ=-0.7		ρ=-0.8	
提領期長	η= 0.01	η= 0.02	η= 0.01	η= 0.02	η= 0.01	η= 0.02	η= 0.01	η= 0.02
1	0.142944	0.140686	0.133301	0.130762	0.134912	0.131836	0.13501	0.131348
5	0.041321	0.039746	0.04071	0.038477	0.040125	0.037207	0.039536	0.035919
10	0.017471	0.017041	0.016924	0.015845	0.016367	0.014624	0.015808	0.013371
20	0.00656	0.007439	0.00656	0.006477	0.005747	0.005476	0.005332	0.004441
25	0.004612	0.005809	0.004267	0.004944	0.003919	0.00404	0.003564	0.003101

表中同樣的相關係數下，相鄰上色的格子比未著色的格子大，由表中著色的區域分佈可發現相關係數與利率波動度以及提領期長對於公平保費有不同的影響趨勢，若相關係數越小，則利率波動度上升使的保費變小的力量則會變大。

而提領期長變長以及利率波動度上升對公平保費則是正向的影響。換言之，提領期長越長，利率波動度上升使得保費變大的力量越大。

值得一提的是綜合相關係數正與負的結果來看，提領期長越長，利率波動度對於公平保費的影響越大，也證實了隨機利率對於長期間的GMWB商品來說，是評價商品時的重要角色，更是個不可排除的因素。

(e) 遞延期間不同保證型式之分析

利率期間結構：

以利用 Vasicek model，起始短利 $r_0 = 0.03$，均數迴歸率為 0.1，θ=0.003，帳戶波動度為 σ=0.2，期初躉繳保費 W0=100，利率與帳戶的相關係數為-0.25，利率波動度為 0.01，提領期長為 20 年

保費收取期長: T = 遞延期間(T1)+提領期間 20 年(T2)

結果如下：

表4.11 不同遞延期間以及累積方式的比較

遞延期間	保本	複利(0.03)
5	0.014050	0.016396
10	0.011702	0.020508
15	0.009541	0.022501
20	0.007835	0.030101
35	0.004630	0.034230

由上表可看出當遞延期間的長短以及帳戶累積方式的不同，對公平保費有不同的影響，以保本來說，遞延期間越長，收取的公平保費越低；若是複利增值來說，遞延期間越長，收取的公平保費越高，這是因為遞延期越長，複利增值的帳戶累積方式價值會較遞延期短的帳戶價值高，故應該收取較高的保費。

又第一個部分是即期提領，沒有保本的問題，因為一定保本(帳戶從100開始跳動)，所以提領期長越短，攤銷的期間越短，保費越高。

第二個部分是加入遞延期來討論提領期長為20年的保費，因為加入了遞延期，所以帳戶價值在遞延期滿之時有可能低於100，但因為保本機制會把遞延期滿帳戶價值拉到100，這樣來說的話對公平保費應該是正面的影響，也就是有保本的話公平保費應該要收取較高。

另一方面是有關於保費的攤銷期間，攤銷期間越長，保費越低，所以對公平保費的影響跟保本的部分是兩個反向力量的拉扯，其實是沒辦法確定公平保費會較即期提領20年期的高還是會低。

第五章 結論與後續研究發展

第一節　結論

本文將 GMWB 商品拆解成一個障礙選擇權加上固定年金，並且利用 DFPM-HWT 來評價，應用樹狀結構來評價，模擬離散提領，不僅能解決非線性誤差的問題，也具有 Hull-White 利率結構與市場利率配合的優點，更重要的是，能夠將隨機利率加入 GMWB 的評價當中，使得計算出來的價格能夠更貼近市場。

從實驗結果也說明了當提領期長越長，利率波動度對公平保費的影響越大，證實利率隨機性對於像 GMWB 這樣長年期的商品來說是重要的考量因素，若評價過程中假設利率為固定常數則將低估其風險，這樣的結果當然有失準確性。

另一方面也放寬現有評價模型當中 GMWB 商品都為即期提領的限制，以加入遞延期後的評價模式能夠更貼近實務。

第二節　後續研究建議

本文利用 DFPM-HWT 來評價 GMWB 商品，放寬了利率隨機性、離散提領、以及加入遞延期的數個假設，但尚有許多方面能夠更加精進，提供幾個面向做參考：

一、 遞延期的鎖高機制

遞延期的帳戶累積的過程當中，通常有鎖高機制、保本策略、複利增值三種，若是能夠加入鎖高機制的帳戶累積制度，那麼將能夠使 GMWB 的評價模型更為完善。

二、 加入生存率

依照契約不同，GMWB 中保戶的生存或死亡會影響保險合約的存續，以及年金的支付，若是能延伸加入生存率的模型，在 GMWB 評價時更全面，使得定價能夠更為正確。

參考文獻

中文文獻

[1]杜宛珮, “運用在信用風險模型的創新數值方法DFPM”,國立交通大學,碩士論文,民國96年。

[2]鍾明璋, “隨機利率下信用風險之衡量-使用創新之立體樹狀模型”,國立交通大學,碩士論文,民國97年。

[3]陳博宇, “在Hull-white隨機利率下信用風險之衡量-運用創新的數值方法”,國立交通大學,碩士論文,民國98年。

[4]吳蕙君, “以樹狀模型評價保證最低提領給付保險附約”,國立台灣大學,碩士論文,民國98年。

[5]林思瑜, “隨機利率下附保證提領保險商品評價”,國立台灣大學,碩士論文,民國98年。

英文文獻

[1] Dai, T.S., and Lyuu, Y.D., “The Bino-Trinomial Tree: A Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing ." *Journal of Derivatives*, (2010) 17:7--24.

[2] Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivatives 6Th. Englewood Cliffs,* NJ Prentice-Hall, 2006.

[3] Hull, J., and A. White, *Hull-White on Derivatives-A Compilation of Articles* , Risk Books, 2005.

[4] Hull, J., and A. White, “Using Hull-White Interest-Rate Trees,” *Journal of derivatives*, 3, 26-36, 1996.

[5] Hull, J., and A. White, “Pricing Interest-Rate-Derivative Securities,” *The Review*

of Financial Studies, 3, 573-592, 1990.

[6] London, J., *Modeling Derivatives in C++*, Wiley Finance, 2004.

[7] Milevsky, M. and Salisbury, T.S. "Financial valuation of guaranteed minimum withdrawal benefits", *Insurance: Mathematics and Economics*, 38 (2006), 21-38

[8] Peng J., Leung K.S. and Kwok Y.K. "Pricing Guaranteed Minimal Withdrawal Benefits under Stochastic Interest Rates", Working Paper, Hong Kong University of Science and Technology (2008)

[9] Shreve, S., *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer Finance, 2007.

[10] Vasicek, O., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics* 5, 177-188, 1977.

[11] Yang S.S., Wang C.W. and Liu I.C "Analytic Formulae for Valuing Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits under Stochastic Interest Rates", Working Paper (2010)

附錄

利率期間結構以利用 Vasicek model：$dr = a(b-r)dt + \eta dz$，起始短利 $r_0 = 0.03$，利率的波動度 η= 0.01，均數迴歸率為 0.1，θ=a*b=0.003，透過 $P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$ 來計算債券價格如下表，其中

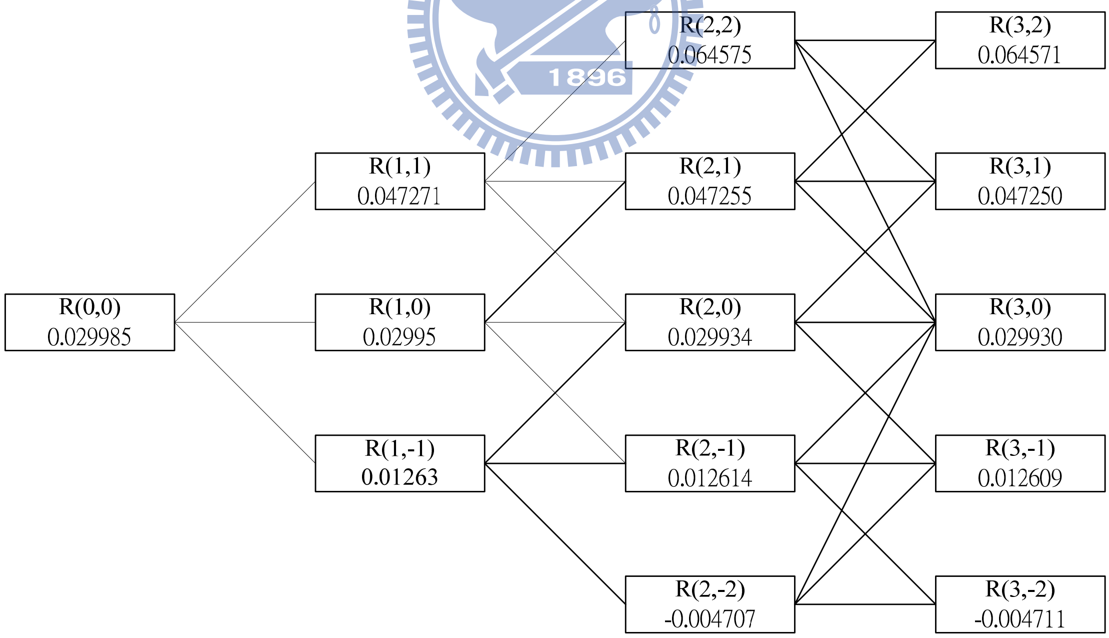
$$A(t,T) = \exp\left(\frac{(B(t,T)-T+t)(a^2b-\eta^2/2)}{a^2} - \frac{\eta^2 B(t,T)^2}{4a}\right)、B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$$

P(0,1)	P(0,2)	P(0,3)	P(0,4)
0.970461	0.941873	0.914262	0.887629

再利用上表推算出零息利率，如下表：

Zero(0,1)	Zero(0,2)	Zero(0,3)	Zero(0,4)
0.029985	0.029942	0.029879	0.029800

再利用上表的零息利率來建構 Hull-White tree，如下圖



利率樹各別路徑分支機率分別如下表：

	對應的 Y 值	上漲	持平	下跌
R(0,0)	0	0.166667	0.666667	0.166667
R(1,1)	1.7286	0.121667	0.656667	0.221667

R(1,0)	-0.0035	0.166667	0.666667	0.166667
R(1,-1)	-1.7355	0.221667	0.656667	0.121667
R(2,2)	3.459	0.886667	0.026667	0.086667
R(2,1)	1.727	0.121667	0.656667	0.221667
R(2,0)	-0.0051	0.166667	0.666667	0.166667
R(2,-1)	-1.7371	0.221667	0.656667	0.121667
R(2,-2)	-3.4692	0.086667	0.026667	0.886667

利率與帳戶的相關係數為-0.25，假設即期提領，期初躉繳保費 W0=100，帳戶波動度為 0.2，期長三年，一年一期，提領額度 G 為 33. 333333，公平保費 α =0，利用 $X(t)=X(0)+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}[\frac{\ln(\frac{W(t)}{W(0)})}{\sigma}-\rho\cdot Y(t)]$，分別將 $W(t)$ =G=33.333333、$W(0)$ =100、$X(0)$ =0、以及各 R(t)對應的 $Y(t)$ 帶入，即能得到不同 R(t)柱子點上的 default boundary，也就是支付使得帳戶為 0 的 X(t)臨界值，可參考圖 3.5 中的空心圓點，並將數值整理如下表：

柱子點上的 default boundary		
	X 座標值	真實世界 W 值
R(1,1)	-5.226877	33.333333
R(1,0)	-5.674091	33.333333
R(1,-1)	-6.121304	33.333333
R(2,2)	-4.780086	33.333333
R(2,1)	-5.227299	33.333333
R(2,0)	-5.674513	33.333333
R(2,-1)	-6.121727	33.333333
R(2,-2)	-6.568940	33.333333

不同 R(t)柱子上的節點都能利用該臨界值加上 $2\sigma_x\sqrt{\Delta t}$ 來得到，在此已經過正交化，故 σ_x =1。

連接到下一期的柱子點時，由(3.1.5)式得知，必須透過 $\frac{(r(t)-\alpha)-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{\rho(\theta(t)-ar(t))}{\eta\sqrt{1-\rho^2}}$，來計算 $X(t)$ 的 drift 項，$\theta(t)$ 則能利用 Hull and White (2005) 提出的 $\frac{\alpha(t+1)-\alpha(t)}{\Delta t}+a\cdot\alpha(t+1)$ 來估計，其中 $\alpha(t)$ 為 Hull-White tree

的調整因子，列出調整因子如下表：

$\alpha(0)$	$\alpha(1)$	$\alpha(2)$	$\alpha(3)$
0.029985	0.029950	0.029934	0.029930

由上表計算出的$\theta(t)$ 整理如下：

$\theta(0)$	$\theta(1)$	$\theta(2)$
0.002961	0.002977	0.002989

藉由上述兩表以及利率樹，即能夠利用每根 R(t)柱子不同的利率值 r(t)計算出該條件下 X(t)的 drift 項，整理如下表：

	柱子點的 drift 項
R(0,0)	0.050591
R(1,1)	0.095640
R(1,0)	0.050919
R(1,-1)	0.006198
R(2,2)	0.140626
R(2,1)	0.095904
R(2,0)	0.051183
R(2,-1)	0.006462
R(2,-2)	-0.038260

在計算 X(t)樹的分支機率時，須利用該點的 X(t)座標值加上該根柱子的 drift 項，再到欲連接的下一期的柱子上尋找最近格子點，該最接近的格子點則為 X(t)分支的中間點，分別往上往下一格作為另外兩個分支，完成三元樹接點，並利用 Cramer’s Rule 即能求算分支機率。

以 R(0,0)柱子上的點，利率上漲後連接到 R(1,1)的點來舉例：

R(0,0)柱子上的點只有一個點，X 座標為 0，R(0,0)柱子的 drift 項為 0.050591，所以我們將 0+0.050591= 0.050591，連接到 R(1,1)柱子上找最近的點，為 R(1,1)柱子的 boundary 向上第三格，大小為-5.226877+3*2=0.773123，此點即為三元樹的中間點分支，向上向下一格大小分別是 2.773123、-1.226877，找到三個分支點後，即能利用 Cramer’s Rule 求算分支機率(可參考圖 2.2)：

β=0.773123-0.050591=0.722532

$\alpha=\beta+2\sigma_x\sqrt{\Delta t}=2.722532$

$\gamma=\beta-2\sigma_x\sqrt{\Delta t}=-1.277468$

$$\Delta=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=-16.000000$$
$$\Delta_u=(\beta\cdot\gamma+\sigma_x^2\mathrm{dt})(\gamma-\beta)=-0.153977$$
$$\Delta_m=(\alpha\cdot\gamma+\sigma_x^2\mathrm{dt})(\alpha-\gamma)=-9.911788$$
$$\Delta_d=(\alpha\cdot\beta+\sigma_x^2\mathrm{dt})(\beta-\alpha)=-5.934236$$
$$P_u=\frac{\Delta_u}{\Delta}=0.009624$$
$$P_m=\frac{\Delta_m}{\Delta}=0.619487$$
$$P_d=\frac{\Delta_d}{\Delta}=0.370890$$

其後所有點皆能以此方法計算分支機率

節錄 0-2 期的所有節點以及分支機率，資訊如下：

第 0 期：

R(0,0)柱子上的點：

X 座標值	真實世界 W 值
0	100

第 1 期：

R(0,0)柱子上的點利率上漲後連接到 R(1,1)柱子上點的對應機率以及值如下：

	柱子上點代號	機率	X 座標值	真實世界 W 值	支付完提領額度的 W 值	支付完提領額度的 X 值
上漲	A(1,1)	0.009624	2.773123	156.922373	123.589	1.540018
持平	B(1,1)	0.619487	0.773123	106.532798	73.19947	-1.164736
下跌	C(1,1)	0.37089	-1.226877	72.323895	38.99056	-4.417363

R(0,0)柱子上的點利率持平後連接到 R(1,0)柱子上點的對應機率以及值如下：

	柱子上點代號	機率	X 座標值	真實世界 W 值	支付完提領額度的 W 值	支付完提領額度的 X 值
上漲	A(1,0)	0.065645	2.325909	156.922373	123.589	1.092805
持平	B(1,0)	0.73105	0.325909	106.532798	73.19947	-1.611949

下跌	C(1,0)	0.203305	-1.674091	72.323895	38.99056	-4.864577

R(0,0)柱子上的點利率下跌後連接到 R(1,-1)柱子上點的對應機率以及值如下：

	柱子上點代號	機率	X 座標值	真實世界 W 值	支付完提領額度的 W 值	支付完提領額度的 X 值
上漲	A(1,-1)	0.171667	1.878696	156.922373	123.589	0.645591
持平	B(1,-1)	0.742613	-0.121304	106.532798	73.19947	-2.059163
下跌	C(1,-1)	0.08572	-2.121304	72.323895	38.99056	-5.311790

第 2 期

R(1,1)柱子上的點利率上漲後連接到 R(2,2)柱子上點的對應機率以及值如下：

		柱子上點代號	機率	X 座標值	真實世界 W 值	支付完提領額度的 W 值	支付完提領額度的 X 值
A(1,1)	上漲	A(2,2)	0.250542	3.219914	156.922372	123.589	1.986810
	持平	B(2,2)	0.706789	1.219914	106.532798	73.19947	-0.717944
	下跌	C(2,2)	0.042669	-0.780086	72.323895	38.99056	-3.970572
B(1,1)	上漲	B(2,2)	0.063188	1.219914	106.532798	73.19947	-0.717944
	持平	C(2,2)	0.729118	-0.780086	72.323895	38.99056	-3.970572
	下跌	D(2,2)	0.207693	-2.780086	49.099862	15.76653	-8.646194
C(1,1)	上漲	D(2,2)	0.265853	-2.780086	49.099862	15.76653	-8.646194
	持平	E(2,2)	0.697476	-4.780086	33.333333	Default	
	下跌	F(2,2)	0.036671	-6.780086	22.629618	Default	

R(1,1)柱子上的點利率持平後連接到 R(2,1)柱子上點的對應機率以及值如下：

		柱子上點代號	機率	X 座標值	真實世界 W 值	支付完提領額度的 W 值	支付完提領額度的 X 值
A(1,1)	上漲	A(2,1)	0.433827	2.772701	156.922372	123.589	1.539596
	持平	B(2,1)	0.563825	0.772701	106.532798	73.19947	-1.165158
	下跌	C(2,1)	0.002348	-1.227299	72.323895	38.99056	-4.417786
B(1,1)	上漲	B(2,1)	0.167679	0.772701	106.532798	73.19947	-1.165158
	持平	C(2,1)	0.743743	-1.227299	72.323895	38.99056	-4.417786

	下跌	D(2,1)	0.088578	-3.227299	49.099862	15.76653	-9.093407
C(1,1)	上漲	D(2,1)	0.453903	-3.227299	49.099862	15.76653	-9.093407
	持平	E(2,1)	0.544983	-5.227299	33.333333	Default	
	下跌	F(2,1)	0.001114	-7.227299	22.629618	Default	

R(1,1)柱子上的點利率下跌後連接到 R(2,0)柱子上點的對應機率以及值如下：

		柱子上點代號	機率	X 座標值	真實世界 W 值	支付完提領額度的 W 值	支付完提領額度的 X 值
A(1,1)	上漲	A(2,0)	0.012026	4.325487	231.146006	197.812673	3.521306
	持平	B(2,0)	0.631035	2.325487	156.922372	123.589	1.092382
	下跌	C(2,0)	0.356939	0.325487	106.532798	73.19947	-1.612372
B(1,1)	上漲	C(2,0)	0.322171	0.325487	106.532798	73.19947	-1.612372
	持平	D(2,0)	0.658367	-1.674513	72.323895	38.99056	-4.864999
	下跌	E(2,0)	0.019462	-3.674513	49.099862	15.76653	-9.540621
C(1,1)	上漲	D(2,0)	0.015558	-1.674513	72.323895	38.99056	-4.864999
	持平	E(2,0)	0.64528	-3.674513	49.099862	15.76653	-9.540621
	下跌	F(2,0)	0.339162	-5.674513	33.333333	Default	

R(1,0)柱子上的點利率上漲後連接到 R(2,1)柱子上點的對應機率以及值如下：

		柱子上點代號	機率	X 座標值	真實世界 W 值	支付完提領額度的 W 值	支付完提領額度的 X 值
A(1,0)	上漲	A(2,1)	0.234964	2.772701	156.922372	123.589	1.539596
	持平	B(2,1)	0.715585	0.772701	106.532798	73.19947	-1.165158
	下跌	C(2,1)	0.049451	-1.227299	72.323895	38.99056	-4.417786
B(1,0)	上漲	B(2,1)	0.055489	0.772701	106.532798	73.19947	-1.165158
	持平	C(2,1)	0.722156	-1.227299	72.323895	38.99056	-4.417786
	下跌	D(2,1)	0.222355	-3.227299	49.099862	15.76653	-9.093407
C(1,0)	上漲	D(2,1)	0.249798	-3.227299	49.099862	15.76653	-9.093407
	持平	E(2,1)	0.707225	-5.227299	33.333333	Default	
	下跌	F(2,1)	0.042977	-7.227299	22.629618	Default	

R(1,0)柱子上的點利率持平後連接到 R(2,0)柱子上點的對應機率以及值如下：

		柱子上點代號	機率	X 座標值	真實世界 W 值	支付完提領額度的 W 值	支付完提領額度的 X 值
A(1,0)	上漲	B(2,0)	0.413249	2.772701	156.922372	123.589	1.092382
	持平	C(2,0)	0.582622	0.772701	106.532798	73.19947	-1.612372
	下跌	D(2,0)	0.00413	-1.674513	72.323895	38.99056	-4.864999
B(1,0)	上漲	C(2,0)	0.15498	0.325487	106.532798	73.19947	-1.612372
	持平	D(2,0)	0.74678	-1.674513	72.323895	38.99056	-4.864999
	下跌	E(2,0)	0.098239	-3.674513	49.099862	15.76653	-9.540621
C(1,0)	上漲	E(2,0)	0.432848	-3.674513	49.099862	15.76653	-9.540621
	持平	F(2,0)	0.564732	-5.674513	33.333333	Default	
	下跌	G(2,0)	0.00242	-7.674513	22.629618	Default	

R(1,0)柱子上的點利率下跌後連接到 R(2,-1)柱子上點的對應機率以及值如下：

		柱子上點代號	機率	X 座標值	真實世界 W 值	支付完提領額度的 W 值	支付完提領額度的 X 值
A(1,0)	上漲	A(2,-1)	0.008808	3.878273	231.146006	197.812673	3.074092
	持平	B(2,-1)	0.61511	1.878273	156.922372	123.589	0.645169
	下跌	C(2,-1)	0.376082	-0.121727	106.532798	73.19947	-2.059585
B(1,0)	上漲	C(2,-1)	0.304471	-0.121727	106.532798	73.19947	-2.059585
	持平	D(2,-1)	0.671405	-2.121727	72.323895	38.99056	-5.312213
	下跌	E(2,-1)	0.024124	-3.227299	49.099862	15.76653	-9.987834
C(1,0)	上漲	D(2,-1)	0.011863	-2.121727	72.323895	38.99056	-5.312213
	持平	E(2,-1)	0.630308	-4.121727	49.099862	15.76653	-9.987834
	下跌	F(2,-1)	0.357829	-6.121727	33.333333	Default	

R(1,-1)柱子上的點利率上漲後連接到 R(2,0)柱子上點的對應機率以及值如下：

		柱子上點	機率	X 座標值	真實世界	支付完提領	支付完提領

		代號			W 值	額度的 W 值	額度的 X 值
A(1,-1)	上漲	B(2,0)	0.219885	2.325487	156.922372	123.589	1.092382
	持平	C(2,0)	0.723382	0.325487	106.532798	73.19947	-1.612372
	下跌	D(2,0)	0.056733	-1.674513	72.323895	38.99056	-4.864999
B(1,-1)	上漲	C(2,0)	0.04829	0.325487	106.532798	73.19947	-1.612372
	持平	D(2,0)	0.714193	-1.674513	72.323895	38.99056	-4.864999
	下跌	E(2,0)	0.237516	-3.674513	49.099862	15.76653	-9.540621
C(1,-1)	上漲	E(2,0)	0.234243	-3.674513	49.099862	15.76653	-9.540621
	持平	F(2,0)	0.715974	-5.674513	33.333333	Default	
	下跌	G(2,0)	0.049783	-7.674513	22.629618	Default	

R(1,-1)柱子上的點利率持平後連接到 R(2,-1)柱子上點的對應機率以及值如下：

		柱子上點代號	機率	X 座標值	真實世界 W 值	支付完提領額度的 W 值	支付完提領額度的 X 值
A(1,-1)	上漲	B(2,-1)	0.39317	1.878273	156.922372	123.589	0.645169
	持平	C(2,-1)	0.600418	-0.121727	106.532798	73.19947	-2.059585
	下跌	D(2,-1)	0.006412	-2.121727	72.323895	38.99056	-5.312213
B(1,-1)	上漲	C(2,-1)	0.142781	-0.121727	106.532798	73.19947	-2.059585
	持平	D(2,-1)	0.748818	-2.121727	72.323895	38.99056	-5.312213
	下跌	E(2,-1)	0.108401	-4.121727	49.099862	15.76653	-9.987834
C(1,-1)	上漲	E(2,-1)	0.412293	-4.121727	49.099862	15.76653	-9.987834
	持平	F(2,-1)	0.583481	-6.121727	33.333333	Default	
	下跌	G(2,-1)	0.004226	-8.121727	22.629618	Default	

R(1,-1)柱子上的點利率下跌後連接到 R(2,-2)柱子上點的對應機率以及值如下：

		柱子上點代號	機率	X 座標值	真實世界 W 值	支付完提領額度的 W 值	支付完提領額度的 X 值
A(1,-1)	上漲	A(2,-2)	0.00609	3.43106	231.146006	197.812673	2.626878
	持平	B(2,-2)	0.598185	1.43106	156.922372	123.589	0.197955
	下跌	C(2,-2)	0.395725	-0.56894	106.532798	73.19947	-2.506799
	上漲	C(2,-2)	0.287272	-0.56894	106.532798	73.19947	-2.506799

B(1,-1)	持平	D(2,-2)	0.683443	-2.56894	72.323895	38.99056	-5.759426
	下跌	E(2,-2)	0.029285	-4.56894	49.099862	15.76653	-10.435048
C(1,-1)	上漲	D(2,-2)	0.008669	-2.56894	72.323895	38.99056	-5.759426
	持平	E(2,-2)	0.614336	-4.56894	49.099862	15.76653	-10.435048
	下跌	F(2,-2)	0.376995	-6.56894	33.333333	Default	

因第二期之後資料量太多，故以上樹狀結構建構過程及節點資訊只節錄到前兩期，透過此範例利率期間結構的設定以及公平保費α=0，所計算出來的帳戶價值為 106.244439，經由圖 3.9 可知必須透過 Bisection 的方法將公平保費α調升，再重複上述步驟，及能推算出近似的公平保費結果。