

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

正交分頻多工系統的盲道估測

Blind Channel Estimation for OFDM Systems



研究生：冉瑞華

指導教授：林清安 教授

中華民國九十三年六月

正交分頻多工系統的盲道估測
Blind Channel Estimation for OFDM Systems

研究生：冉瑞華

Student : Jui-Hua Jan

指導教授：林清安

Advisor : Ching-An Lin

國立交通大學
電機與控制工程學系
碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Electrical and Control Engineering

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Electrical and Control Engineering

June 2004

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十三年六月

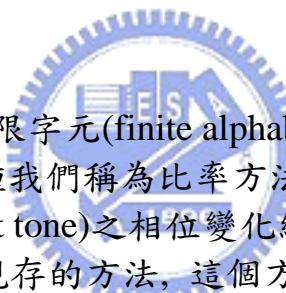
正交分頻多工系統的盲道估測

學生：冉瑞華

指導教授：林清安

國立交通大學電機與控制工程學系（研究所）碩士班

摘 要



我們提出一個以有限字元(finite alphabet)特性為基礎的 OFDM 系統盲道估測方法。這種我們稱為比率方法的 OFDM 系統通道估測是利用相鄰聲調(adjacent tone)之相位變化緩慢的特性來消除相位的不確定性。比較起其他現存的方法，這個方法減少許多運算量的需求。模擬顯示，這個方法的準確度，不管是通道估測誤差或位元錯誤率(bit error rate)，均與現存的方法接近。

Blind Channel Estimation for OFDM Systems

student : Jui-Hua Jan

Advisors : Dr. Ching-An Lin

Department (Institute) of Electrical and Control Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

We propose a blind channel estimation method for OFDM systems based on finite alphabet property. The method called *ratio* is to make use of the property of slow phase change between two adjacent tones to cancel phase ambiguity. The proposed method needs less computation load compared with other existing methods. According to simulations, the proposed method has performances close to other existing ones on both channel estimation error and bit error rate.

誌 謝

除了我的父母外，我要特別感謝林清安老師。我從他身上學到許多做研究的態度與方法，我在交大的日子裡也學習到不少東西，我會永遠懷念這段在交大的日子。我還要感謝實驗室的學長同學及學弟，他們幫了我許多忙，讓我能如期完成學業。在求學的過程有太多的人幫助過我，在此也一並致上萬分謝意。



目 錄

中文提要	-----	i
英文提要	-----	ii
誌謝	-----	iii
目錄	-----	iv
表目錄	-----	v
圖目錄	-----	vi
一、	簡介-----	1
二、	OFDM 通訊傳輸技術-----	2
2.1	歷史-----	2
2.2	OFDM 傳輸原理：Cyclic Prefix 技術-----	4
2.3	OFDM 傳輸原理：Zero Padding 技術-----	11
2.4	應用與特性-----	13
三、	Finite Alphabet 特性-----	15
3.1	定理與假設-----	15
3.2	推導 $H^J(\rho_k)$ -----	16
3.3	PSK 及 QAM 調變的準確度-----	17
四、	通道估測-----	21
4.1	問題陳述-----	21
4.2	一些相關的方法-----	21
4.3	Modified Minimum Distance - Phase Directed Algorithm(MMD-PD)-----	21
4.4	Clustered SubCarrier Algorithm(CSC)-----	25
4.5	以比率(Ratio)的方法做通道估測-----	29
4.5.1	FIR 系統的頻率響應-----	29
4.5.2	比率(Ratio)方法分析-----	30
4.5.3	估測演算法-----	32
4.5.4	兩群相鄰連續的聲調(Tone)或是多群的問題-----	35
4.5.5	藉由選擇一群非相鄰連續的聲調(Tone)來化減計算量-----	38
4.5.6	平均方法-----	40
五、	模擬與比較-----	42
5.1	估測與系統效能模擬-----	42
5.2	計算量比較-----	52
六、	結論-----	54
參考文獻	-----	55

表 目 錄

表 1.	16 QAM 的參數分析-----	20
表 2.	三種不同的方法在 FIR 1 通道上計算量的比較-----	53
表 3.	三種不同的方法在 FIR 2 通道上計算量的比較-----	53
表 4.	三種不同的方法在 FIR 3 通道上計算量的比較-----	53



圖目錄

圖 1.	基頻複數等效的 OFDM 傳輸模型-----	4
圖 2.	一個 FIR 系統的極零點與頻率響應圖. $M=64$.-----	29
圖 3.	一個 FIR 系統的極零點與頻率響應圖. 圖中增益響應圖的快速變化是由於位於單位圓附近的零點過多所造成. $M=64$.-----	35
圖 4.	FIR 通道極零點與頻率響應圖, 此圖為一個說明用的例子. $L=4$ and $M=64$.-----	36
圖 5.	使用平均方法將通道估測誤差及相對應的 BER 降低. $\epsilon=9$. 調變方法為 BPSK.-----	41
圖 6.	使用平均方法將通道估測誤差及相對應的 BER 降低. $\epsilon=9$. 調變方法為 QPSK.-----	41
圖 7.	FIR 1 通道的極零點與頻率響應圖. $L=3$, $M=64$.-----	43
圖 8.	FIR 2 通道的極零點與頻率響應圖. $L=4$, $M=64$.-----	43
圖 9.	FIR 3 通道的極零點與頻率響應圖. $L=4$, $M=64$.-----	44
圖 10.	FIR 1 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖. $L=3$, $M=64$, BPSK.-----	44
圖 11.	FIR 1 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖. $L=3$, $M=64$, QPSK.-----	45
圖 12.	FIR 2 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖. $L=4$, $M=64$, BPSK.-----	45
圖 13.	FIR 2 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖. $L=4$, $M=64$, QPSK.-----	46

圖 14. FIR 3 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖. $L=4$, $M=64$, BPSK. -----	46
圖 15. FIR 3 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖. $L=4$, $M=64$, QPSK. -----	47
圖 16. FIR 1 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖, 對應不同 的 I . $L=3$, $M=64$, BPSK. -----	49
圖 17. FIR 1 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖, 對應不同 的 I . $L=3$, $M=64$, QPSK. -----	49
圖 18. FIR 2 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖, 對應不同 的 I . $L=4$, $M=64$, BPSK. -----	50
圖 19. FIR 2 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖, 對應不同 的 I . $L=4$, $M=64$, QPSK. -----	50
圖 20. FIR 3 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖, 對應不同 的 I . $L=4$, $M=64$, BPSK. -----	51
圖 21. FIR 3 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖, 對應不同 的 I . $L=4$, $M=64$, QPSK. -----	51

1. 簡介

人類生活在近幾年來深受科技的影響, 尤其是在通訊及相關的領域方面有著顯著的改變, 通訊產業這幾年來不斷的在快速成長, 使得越來越多的高科技通訊產品一一的出現在人類的世界, 例如大家常使用的行動電話 (Mobile Phones), 家庭中用來連線上網路的 非對稱數位用戶迴路 (ADSL, Asymmetric Digital Subscriber Line) 數據機, 或是在定點或室內用來無線上網的無線區域網路卡 (Wireless Local Area Network Card), 以及其他產品等等. 而且特別是行動電話, 這項產品早已成爲人人日常生活的”必需品”, 而技術仍然在不斷的更新進步當中. 這些高科技通訊產品所用的通訊技巧 相當多且繁雜, 當中最熱門之一的高速無線通訊傳輸技巧稱爲正交分頻多工 (OFDM, Orthogonal Frequency Division Multiplexing). 這種通訊方面所用的技巧具有相當好的系統效能, 因此深受廣大的研究與探討. 且由於它本身所具備的高效能與高速傳輸能力, 這項技術後來被採納做爲大區域性或國家的公定標準, 例如歐洲的數位聲音廣播 (DAB, Digital Audio Broadcasting) 與數位影像廣播 (DVB, Digital Video Broadcasting) 即是用 OFDM 做爲傳輸標準, 或美國的 IEEE 802.11 系列規定的無線區域網路也是用此傳輸標準.



OFDM 這種傳輸技巧在頻譜上有著相當高的使效率, 因此能善用頻寬提高效能. 然而雖然它有著許多的優點及應用, 它在本身的特性中有著許多待解決的問題, 例如載波頻率偏移 (carrier frequency offset), 大的峰值對平均值功率比 (large peak to average power ratio), 同步化 以及 通道估測等 等問題 這些問題早已被廣泛的討論與研究, 也因此有許多的解決之道被大家提出. 在此篇論文中, 則是將問題集中在通道估測方面來做探討, 並且藉由通道估測誤差以及系統的位元錯誤率 (BER, Bit Error Rate) 的模擬圖來討論通道估測的好壞與相關問題. 通道估測這方面的問題已有許多的研究在探討, 本篇則是針對有限字元 (finite alphabet) 此種特性來做深入的研究分析.

2. OFDM 通訊傳輸技術

2.1 歷史

OFDM 這種傳輸技巧的概念早在幾十年前就被人提出，但是到現今的時代才受到大家的注意及探討，這是因為當時的構想無法實現成真正的系統，直到現在各項技術的成熟，如訊號處理 及 VLSI 等等，使得 OFDM 能被真正的實現而拿來使用。以下的年代表列出了大略的 OFDM 演進的過程：

- 1957 :Kineplex 設計出多載波高頻數據機 (multicarrier high frequency modem).
- 1966 : Chang 在 Bell Lab. 提出了 OFDM 的論文及取得相關專利.
- 1971 : Weinstein 及 Ebert 提出了使用快速傅立葉轉換 (FFT, Fast Fourier Transform) 的技巧及防護區間 (guard interval) 來處理 OFDM 系統的實現與對付符號間干擾 (ISI, Intersymbol Interference) 的問題.
- 1985 : Leonard J. Cimini 提出了在一個窄頻數位行動通訊的通道中, 用 OFDM 來處理多路徑傳輸的效應與共同通道 (cochannel) 干擾的影響 [4].
- 1987 : Alard 與 Lasalle 提出了在數位廣播上使用 OFDM 傳輸技巧.
- 1995 : ETSI(European Telecommunication Standard Institute) 採納了 OFDM 做為數位聲音廣播的傳輸標準, 並且這也是第一個用 OFDM 傳輸技巧為主的標準.
- 1997 : 數位影像廣播被採納成為標準.
- 1998 : Magic Wand project 展示了 OFDM 用在無線區域網路的數據機.
- 1999 : OFDM 被美國採納成為應用在無線區域網路的標準, 而歐洲也採納做為標準.
- 2000 : 向量 OFDM(VOFDM, VectorOFDM) 被提出做為固定的無線存取技巧.
- 2003 : IEEE 802.11g 及 IEEE 802.16a 兩項標準的制定.

- 200X : IEEE 802.15.3 多頻帶 OFDM(MultiBand OFDM), IEEE 802.11n 及超越3G 的無線細胞系統將在不久的將來被提出...



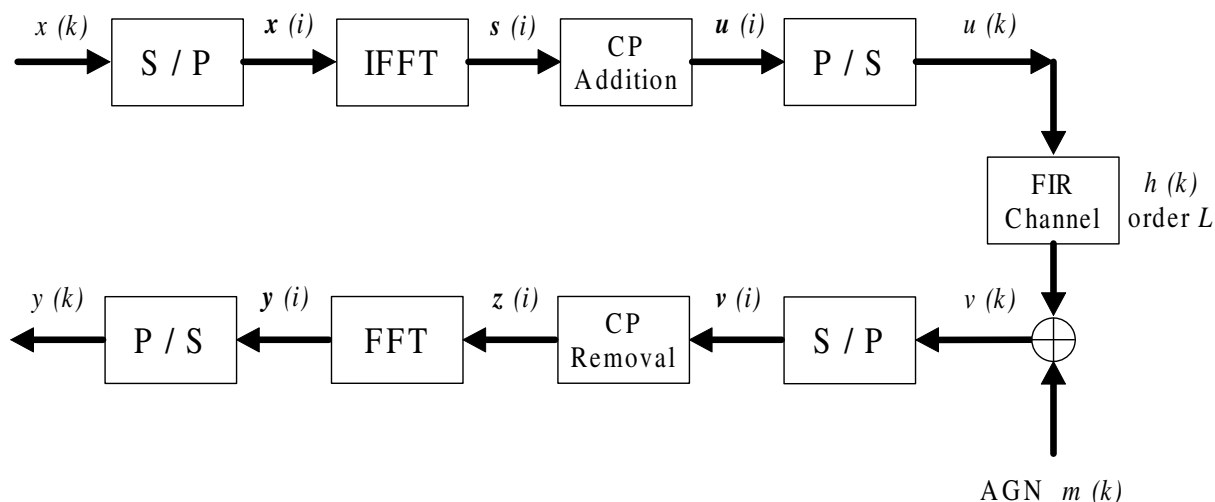


圖 1: 基頻複數等效的OFDM 傳輸模型

2.2 OFDM 傳輸原理：循環字首 (Cyclic Prefix) 技術

在探討 OFDM 系統通道估測的問題之前，我們必須要先對 OFDM 傳輸系統做一些簡單的復習，圖 1 是一個等效的基頻 OFDM 傳輸系統模型， $h(k)$ 是圖中 FIR 通道的脈衝響應，而此脈衝響應的 Z 轉換如下列數學式：

$$H(z) = \sum_{l=0}^L h(l)z^{-l} \quad (1)$$

其中 L 是 FIR 通道的階數。首先，我們把輸入訊號 $x(k)$ 經由序列轉並列 (serial-to-parallel) 轉變成下面的等式：

$$\mathbf{x}(i) \triangleq \begin{bmatrix} x(iM) \\ x(iM + 1) \\ \vdots \\ x(iM + M - 1) \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad (2)$$

其中 M 稱為聲調 (tone) 的數目。接著我們對此向量訊號做反向離散傅立葉轉換 (IDFT, Inverse Discrete Fourier Transform) 的運算而得到 $\mathbf{s}(i) = F^H \mathbf{x}(i)$ ，其中 F 稱為離散傅立葉轉換 (DFT, Discrete Fourier Transform)。

crete Fourier Transform) 矩陣, 且定義如下

$$F \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(0)(0)}{M}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(0)(M-1)}{M}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(M-1)(0)}{M}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(M-1)(M-1)}{M}} \end{bmatrix}_{M \times M} \quad (3)$$

而 H 則是代表共軛轉置 (Hermitian).

再來我們藉由加入 CP(cyclic prefix) 而得到訊號 $\mathbf{u}(i)$; 其中 $\mathbf{u}(i)$ 及 $\mathbf{s}(i)$ 的關係可以由一個循環字首加入矩陣 (CP addition matrix) 來描述 :

$$\mathbf{u}(i) \triangleq \begin{bmatrix} u(iP) \\ u(iP+1) \\ \vdots \\ u(iP+P-1) \end{bmatrix}_{P \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} O_{(P-M) \times (2M-P)} & I_{P-M} \\ & I_M \end{bmatrix}}_{\text{CP addition matrix}} \cdot \mathbf{s}(i) \quad (4)$$

也就是說, 加入 CP 其實是將 $\mathbf{s}(i)$ 向量訊號最後的 $P-M$ 個量加入到其向量的最上方, 而且 $P-M > 0$. 在經過並列轉序列 (parallel-to-serial) 的運算後, 將 $u(k)$ 傳輸到 FIR 通道, 而在通道的輸出端有著平均值為零的複數加成性的高斯雜訊 (AGN, Additive Gaussian Noise) $m(k)$ 的影響. 以上所描述的 FIR 通道輸入及輸出的關係我們以下列數學式表示

$$v(k) = h(k) * u(k) + m(k) = \sum_{l=0}^L h(l)u(k-l) + m(k) \quad (5)$$

這裡我們假設 $0 < L \leq P-M < M$, 其目的是為了防止符號間干擾. 在經由序列轉並列之後, 我們可以收到訊號 $\mathbf{v}(i)$. 根據式子 (5) 所描述的通道模型, 我們可以列出下列數學式

$$v(iP) = h(0)u(iP) + h(1)u(iP-1) + \dots + h(L)u(iP-L) + m(iP)$$

$$v(iP+1) = h(0)u(iP+1) + h(1)u(iP) + \dots + h(L)u(iP+1-L) + m(iP+1)$$

$$v(iP+2) = h(0)u(iP+2) + h(1)u(iP+1) + \dots + h(L)u(iP+2-L) + m(iP+2)$$

⋮

$$v(iP + P - 1) = h(0)u(iP + P - 1) + h(1)u(iP + P - 2) + \dots + h(L)u(iP + P - 1 - L) + m(iP + P - 1)$$

那麼

$$\mathbf{v}(i) \triangleq \begin{bmatrix} v(iP) \\ v(iP + 1) \\ v(iP + 2) \\ \vdots \\ v(iP + P - 1) \end{bmatrix}_{P \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ h(L-1) & h(L-2) & \dots & h(0) & 0 & \dots & 0 \\ h(L) & h(L-1) & \dots & \dots & h(0) & \dots & 0 \\ 0 & h(L) & \dots & \dots & h(0) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & h(L) & \dots & h(0) & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{H_0} \cdot \begin{bmatrix} u(iP) \\ u(iP + 1) \\ \vdots \\ u(iP + P - 1) \end{bmatrix}_{P \times 1} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & h(L) & \dots & h(2) & h(1) \\ 0 & \dots & 0 & h(L) & \dots & h(2) \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & h(L) & \\ 0 & \dots & & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & \end{bmatrix}}_{H_1} \cdot \begin{bmatrix} u(iP - P) \\ u(iP - P + 1) \\ \vdots \\ u(iP - 1) \end{bmatrix}_{P \times 1} + \begin{bmatrix} m(iP) \\ m(iP + 1) \\ \vdots \\ m(iP + P - 1) \end{bmatrix}_{P \times 1}$$

$$\triangleq H_0 \mathbf{u}(i) + H_1 \mathbf{u}(i - 1) + \mathbf{m}(i)$$



接著，我們藉由移除 CP 來得到 $\mathbf{z}(i)$ ，其關係可由一個循環字首移除矩陣 (CP removal matrix) 來描述如下：

$$\mathbf{z}(i) = \underbrace{\begin{bmatrix} O_{M \times (P-M)} & I_M \end{bmatrix}}_{\text{CP removal matrix}} \cdot \mathbf{v}(i) = \begin{bmatrix} h(L) & \dots & h(0) \\ & & \ddots \\ & & & h(L) & \dots & h(0) \end{bmatrix}_{M \times P} \cdot \mathbf{u}(i) + \mathbf{q}(i)$$

$$= \begin{bmatrix} h(L) & \dots & h(0) \\ & & \ddots \\ & & & h(L) & \dots & h(0) \end{bmatrix}_{M \times P} \cdot \begin{bmatrix} O_{(P-M) \times (2M-P)} & I_{P-M} \\ & I_M \end{bmatrix}_{P \times M} \cdot \mathbf{s}(i) + \mathbf{q}(i)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) & 0 & & h(1) \\ h(1) & h(0) & & \vdots \\ \vdots & & & h(L) \\ h(L) & & \ddots & 0 \\ 0 & h(L) & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & & h(0) \end{bmatrix}}_{G_c} \cdot \mathbf{s}(i) + \mathbf{q}(i) \triangleq G_c \cdot \mathbf{s}(i) + \mathbf{q}(i)$$

其中

$$\mathbf{q}(i) \triangleq \begin{bmatrix} O_{M \times (P-M)} & I_M \end{bmatrix}_{M \times P} \cdot \mathbf{m}(i)$$

而 G_c 我們稱為迴旋(*circulant*) 矩陣. 上式當中的其中一項 $H_1 \mathbf{u}(i-1)$ 會消掉, 其原因是由於 H_1 矩陣以及循環字首移除矩陣的特殊結構所造成:

$$\begin{bmatrix} O_{M \times (P-M)} & I_M \end{bmatrix}_{M \times P} \cdot H_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & h(L) & \dots & h(2) & h(1) \\ 0 & \dots & 0 & h(L) & \dots & h(2) \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & h(L) \\ 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix}_{P \times P} = \mathbf{0} \quad (6)$$

最後, 我們利用離散傅立葉轉換矩陣運算之後, 可以得到訊號 $\mathbf{y}(i) \triangleq [y(iM), y(iM+1), \dots, y(iM+M-1)]^T$ 為:

$$\mathbf{y}(i) = F \cdot \mathbf{z}(i) = F G_c \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i) = H \mathbf{x}(i) + \mathbf{n}(i) \quad (7)$$

其中 $\mathbf{s}(i) = F^H \mathbf{x}(i)$ 且

$$H \triangleq FG_c F^H = \begin{bmatrix} H(e^{j\frac{2\pi(0)}{M}}) & & \\ & \ddots & \\ & & H(e^{j\frac{2\pi(M-1)}{M}}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

是一個對角矩陣，而

$$\mathbf{n}(i) \triangleq F\mathbf{q}(i)$$

上式當中的 $H(e^{j\frac{2\pi k}{M}})$ 是由式子 (1) 與 $z \triangleq e^{j\frac{2\pi k}{M}}$ 的關係式所得到的。之後經由並列轉序列的運算後，即可得到輸出訊號 $y(k)$ 。

數學式 (7) 的關係是對所有 i 都成立，因此為了簡單起見，我們可以去掉 i 這個索引並且得到一個在任何 i 都成立的等效式子：

$$\mathbf{y} = H\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (9)$$

如果我們將 \mathbf{x} , \mathbf{y} 及 \mathbf{n} 這三個向量加入一般的索引如 $\mathbf{x} = [x(0), \dots, x(M-1)]^T$, $\mathbf{y} = [y(0), \dots, y(M-1)]^T$ 及 $\mathbf{n} = [n(0), \dots, n(M-1)]^T$, 那麼由於 H 矩陣是一個對角矩陣，我們可以將式子 (9) 改為下面的數學式：

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(e^{j\frac{2\pi(0)}{M}}) & & \\ & \ddots & \\ & & H(e^{j\frac{2\pi(M-1)}{M}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(M-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n(0) \\ \vdots \\ n(M-1) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$= \begin{bmatrix} x(0) & & \\ & \ddots & \\ & & x(M-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(e^{j\frac{2\pi(0)}{M}}) \\ \vdots \\ H(e^{j\frac{2\pi(M-1)}{M}}) \end{bmatrix} + \mathbf{n} \triangleq \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{n} \quad (11)$$

其中

$$X \triangleq \begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(M-1) \end{bmatrix} \quad (12)$$

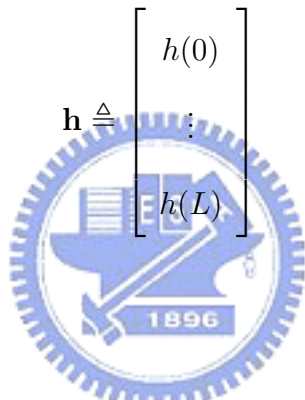
而

$$\underline{\mathbf{h}} \triangleq \begin{bmatrix} H(e^{j\frac{2\pi(0)}{M}}) \\ \vdots \\ H(e^{j\frac{2\pi(M-1)}{M}}) \end{bmatrix} = \sqrt{M}V\mathbf{h} \quad (13)$$

其中 $V \triangleq F(:, 1:L+1)$ 是從離散傅立葉轉換矩陣 F 所分割出來的小矩陣，對應到的是 F 矩陣的所有的列以及最前面 $L+1$ 個行，而

$$\mathbf{h} \triangleq \begin{bmatrix} h(0) \\ \vdots \\ h(L) \end{bmatrix} \quad (14)$$

是 FIR 通道的脈衝響應向量。



在此我們對上式 (13) 的關係式做一個詳細的分析。由於 (1) 且 $z = e^{j\frac{2\pi k}{M}}$ 我們可以得到

$$H(e^{j\frac{2\pi k}{M}}) = \sum_{l=0}^L h(l)e^{-j\frac{2\pi kl}{M}} \quad (15)$$

然後，我們可以使用式子 (15) 來將 $\underline{\mathbf{h}}$ 展開而得到下面的關係式：

$$\begin{aligned} H(e^{j\frac{2\pi(0)}{M}}) &= h(0) + h(1)e^{-j\frac{2\pi(0)(1)}{M}} + h(2)e^{-j\frac{2\pi(0)(2)}{M}} + \dots + h(L)e^{-j\frac{2\pi(0)(L)}{M}} \\ H(e^{j\frac{2\pi(1)}{M}}) &= h(0) + h(1)e^{-j\frac{2\pi(1)(1)}{M}} + h(2)e^{-j\frac{2\pi(1)(2)}{M}} + \dots + h(L)e^{-j\frac{2\pi(1)(L)}{M}} \\ H(e^{j\frac{2\pi(2)}{M}}) &= h(0) + h(1)e^{-j\frac{2\pi(2)(1)}{M}} + h(2)e^{-j\frac{2\pi(2)(2)}{M}} + \dots + h(L)e^{-j\frac{2\pi(2)(L)}{M}} \\ &\vdots \\ H(e^{j\frac{2\pi(M-1)}{M}}) &= h(0) + h(1)e^{-j\frac{2\pi(M-1)(1)}{M}} + h(2)e^{-j\frac{2\pi(M-1)(2)}{M}} + \dots + h(L)e^{-j\frac{2\pi(M-1)(L)}{M}} \end{aligned}$$

從下面的式子來看, 我們即可以將所以等號左邊 FIR 通道的頻率響應收集成一個向量, 然後整理成下面的向量矩陣行式 :

$$\begin{bmatrix} H(e^{j\frac{2\pi(0)}{M}}) \\ H(e^{j\frac{2\pi(1)}{M}}) \\ H(e^{j\frac{2\pi(2)}{M}}) \\ \vdots \\ H(e^{j\frac{2\pi(M-1)}{M}}) \end{bmatrix} = \sqrt{M} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{M}} \\ \frac{1}{\sqrt{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(1)(1)}{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(1)(2)}{M}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(1)(L)}{M}} \\ \frac{1}{\sqrt{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(2)(1)}{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(2)(2)}{M}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(2)(L)}{M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(M-1)(1)}{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(M-1)(2)}{M}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi(M-1)(L)}{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(L) \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{M} F(:, 1:L+1) \mathbf{h} \quad (16)$$

其中 F 是離散傅立葉轉換矩陣定義於 (3)。

由於在式子 (10) 或 (11) 當中的傳輸模型結構來看, 我們於是可以將整個 OFDM 傳輸系統的輸入 $x(k)$ 與輸出 $y(k)$ 寫成下列數學式 :

$$y(k) = H(e^{j\frac{2\pi k}{M}}) x(k) + n(k) \quad k \in [0, M-1] \quad (17)$$

其中 $n(k)$ 是等效的加成性高斯雜訊。

2.3 OFDM 傳輸技術 : 補零 (Zero Padding) 技術

除了 2.2 所介紹的循環字首 OFDM 傳輸技巧之外, OFDM 還有一項類似的技巧, 稱為補零. 首先我們將循環字首加入矩陣改換成補零矩陣, 而式子 (4) 即變成 :

$$\mathbf{u}_z(i) = \begin{bmatrix} I_M \\ \underbrace{O_{(P-M) \times M}}_{\text{zero padding matrix}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{s}(i) \quad (18)$$

其中的下標 z 是表示使用的是補零的技巧. 然後, 所接收到的訊號 $\mathbf{v}_z(i)$ 可以被化簡為 :

$$\mathbf{v}_z(i) \triangleq H_0 \mathbf{u}_z(i) + H_1 \mathbf{u}_z(i-1) + \mathbf{m}(i) = H_0 \mathbf{u}_z(i) + \mathbf{m}(i) \quad (19)$$

其中 H_1 這一項會因為其與補零的特殊結構而消掉：

$$H_1 \mathbf{u}_z(i-1) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & h(L) & \dots & h(2) & h(1) \\ 0 & \dots & 0 & h(L) & \dots & h(2) \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & & 0 & h(L) & \\ 0 & \dots & & & 0 & \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & \dots & & & 0 & \end{bmatrix}_{P \times P} \cdot \begin{bmatrix} I_M \\ O_{(P-M) \times M} \end{bmatrix}_{P \times M} \cdot \mathbf{s}(i-1) = \mathbf{0} \quad (20)$$

然而在接收端我們也另外使用了一個接收矩陣，稱重疊加入矩陣 (overlap-add matrix) 來取代上述的循環字首移除矩陣 [1]：

$$\mathbf{z}_z(i) = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{P-M} \\ I_M \\ O_{(2M-P) \times (P-M)} \end{bmatrix}}_{\text{overlap-add matrix}} \cdot \mathbf{v}_z(i) \quad (21)$$

接著經由離散傅立葉轉換矩陣的運算後，我們可以得到輸出訊號 $\mathbf{y}_z(i)$ ：

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_z(i) &= F \cdot \mathbf{z}_z(i) = F \cdot \begin{bmatrix} I_{P-M} \\ I_M \\ O_{(2M-P) \times (P-M)} \end{bmatrix}_{M \times P} \cdot (H_0 \mathbf{u}_z(i) + \mathbf{m}(i)) \\ &= F \cdot \begin{bmatrix} I_{P-M} \\ I_M \\ O_{(2M-P) \times (P-M)} \end{bmatrix}_{M \times P} \cdot H_0 \cdot \begin{bmatrix} I_M \\ O_{(P-M) \times M} \end{bmatrix}_{P \times M} \cdot F^H \mathbf{x}(i) + \mathbf{n}_z(i) \quad (22) \end{aligned}$$

$$= H\mathbf{x}(i) + \mathbf{n}_z(i) \quad (23)$$

而可以發現輸出訊號跟式子 (7) 完全一樣, 其中 $H = FG_cF^H$ 而 G_c 是從下面的式子計算出 :

$$G_c = \begin{bmatrix} & I_{P-M} & \\ I_M & & \\ & & O_{(2M-P) \times (P-M)} \end{bmatrix}_{M \times P} \cdot H_0 \cdot \begin{bmatrix} I_M & \\ & O_{(P-M) \times M} \end{bmatrix}_{P \times M} \quad (24)$$

而雜訊 $\mathbf{n}_z(i)$ 是從下面的式子求得

$$\mathbf{n}_z(i) \triangleq F \cdot \begin{bmatrix} & I_{P-M} & \\ I_M & & \\ & & O_{(2M-P) \times (P-M)} \end{bmatrix}_{M \times P} \cdot \mathbf{m}(i) \quad (25)$$

式子 (17) 已顯示著原本在一個多路徑通道環境當中的 OFDM 系統, 已被一系列的訊號處理技巧, 轉換成 M 個獨立並且有著平緩衰退增益 (flat fading gain) 的簡單通道模型. 其增益即為 $H(e^{j\frac{2\pi k}{M}})$. 此外, 一般來說我們都假設輸入訊號 $x(k)$ 與雜訊 $m(k)$ 是獨立無關的, 這符合一般的使用特性與直覺.

2.4 應用與特性

如同前言一開始的介紹, OFDM 有著相當廣泛的應用, 它同時擁有有線與無線的應用, 並簡單介紹如下 :

- 對有線的應用來說, 如現今家家戶戶所使用的非對稱數位用戶迴路, 即是使用 OFDM 的技術, 但因多加了通道最優化訊號工率的分配 (bit loading), 使得通道使用效率與一般 OFDM 又互不相同, 此技巧稱之為離散多聲調 (DMT, Discrete MultiTone). 還有其他的應用例 如非常高速數位用戶迴路 (VDSL, Very High Speed Digital Subscriber Line) 以及功率線通訊 (Power Line Communication, HomePNA 3.0).

- 對無線的應用來說，如現今最熱門的無線區域網路，用於室內或定點無線上網的應用，或是以細胞為基礎的通訊如進階細胞網路服務 (ACIS, Advanced Cellular Internet Service)，快取 OFDM (Flash OFDM)，寬頻 OFDM (WOFDM, Wideband OFDM)，以及 4G 細胞無線通訊科技等等。

OFDM 有著許多的特性，可用於無線高速的通訊傳輸。它不但有著高效率的頻譜利用技巧，及高速的資料傳輸，它還擁有因為系統特殊結構而能對抗嚴重符號間干擾與載波間干擾 (ICI, InterCarrier Interference) 的能力。並且在等化器方面，問題從一個極複雜的等化器，轉變為 M 個簡易的等化器問題。還有由於 VLSI 的技術，使的離散傅立葉轉換等的運算可以用快速傅立葉轉換來簡易的實現。雖然它有多項優點，但因為它本身系統的特殊結構，它也有著許多的問題待解決。例如同步化方面具有高度敏感度，以及載波頻率偏移和時間偏移 (timing offset) 的高敏感問題。它還有著大的峰值對平均值功率比的問題，以及通道估測的問題等等。而在本篇論文當中，我們只針對通道估測來做探討。我們是針對有限字元 (finite alphabet) 的特性來做通道估測的分析。並且在文章的最後，我們會提供所提出的方法，在通道估測的性能的優缺點，以及相對應的系統位元錯誤率 (BER, Bit Error Rate) 的效能分析。

3. 有限字元 (Finite Alphabet) 特性

在本篇論文當中，我們所要探討的是 OFDM 通道估測以及系統的位元錯誤率效能，OFDM 通道估測的方法眾多，我們在此以有限字元為主的方法做分析。然而要用此特性做通道估測之前，我們需要來解釋一下有限字元的特性。

3.1 定理與假設

以下的推導皆是跟據 [1]與 [2]而來，然而為了詳細及完整性的原因，我們在此做一些討論及說明。首先我們先做兩個假設。

假設 1: 輸入訊號 $x(k)$ 是從一個具有”有限點數”的星雲圖 (signal constellation) 中 選取出來的，假設星雲圖的點數為 Q ，則 $x(k) \in \{s_q\}_{q=1}^Q$ 。

假設 2: 輸入訊號 $x(k)$ 是”機會均等”地從星雲圖中的點選取出來。



在假設 1 之下 由於星雲圖的大小 (size= Q) 是有限的，因此我們可以藉由展開 $\prod_{q=1}^Q [x(k) - s_q]$ 來得到下面的數學式：

$$x^Q(k) + \alpha_1 x^{Q-1}(k) + \dots + \alpha_Q = 0 \quad (26)$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_Q$ 是由 $\{s_q\}_{q=1}^Q$ 來計算出。其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_Q$ 這些係數不可以同時為零，這個特性可以很明顯的從式子(26) 看出來。因此我們可以從這些不全為零的係數當中找到一個非零的係數。接著，我們來定義一個有用的數， J ：

定義：我們定義 J 是 $\alpha_1, \dots, \alpha_Q$ 這些係數當中第一個不為零的係數的索引。從這個定義我們便可以推導出一些有用且有趣的式子。假如我們定義一 PSK 的星雲圖如下

$$\{x(k) = e^{j\frac{(2q+1)\pi}{Q}}\}_{q=0}^{Q-1} \quad (27)$$

那麼根據式子 (26) 與 (27) 的關係式我們便可以得到下面的數學式：

$$x^Q(k) + 1 = 0 \quad (28)$$

於是我們可以發現，只要是符合式子 (27) 的 PSK 星雲圖，其 J 必等於 Q ，且 $\alpha_J = \alpha_Q = 1$ 。例如，對 BPSK 來說，由於星雲圖為 $\{e^{j\frac{\pi}{2}}, e^{j\frac{3\pi}{2}}\}$ ，我們根據上面的討論即可以得到 $J = Q = 2$ 且 $\alpha_2 = 1$ 。對 QPSK 而言，由於星雲圖為 $\{e^{j\frac{\pi}{4}}, e^{j\frac{3\pi}{4}}, e^{j\frac{5\pi}{4}}, e^{j\frac{7\pi}{4}}\}$ ，因此我們便可以得到 $J = Q = 4$ 且 $\alpha_4 = 1$ 。接著來考慮一下 QAM 的星雲圖，我們發現，對於任何點數的方正及十字 QAM 星雲圖來說， J 皆為 4 且 $\alpha_4 \neq 0$ 。例如對 16QAM 星雲圖來說， $J = 4$ 且 $\alpha_4 = 272$ 。對於 64QAM 星雲圖來說， $J = 4$ 且 $\alpha_4 = 17472$ 。對於 32 點的十字 QAM 星雲圖來說， $J = 4$ 且 $\alpha_4 = 608$ 。

在滿足假設 1 及 2 和 上面所定義的數字 J 之下，我們可以得到下面的數學式 [2]：

$$E\{x^J(k)\} = -\frac{J \cdot \alpha_J}{Q} \quad (29)$$

此數學式是對任何星雲圖都成立的，其中 $E\{\cdot\}$ 代表的是期望值的運算子。例如對式子 (27) 所定義的 PSK 來說，我們可以得到 $E\{x^J(k)\} = -1$ 。如果我們再特別注意如下，其實這個特性對於上面的 PSK 來說，即使不考慮假設 2 也成立，及從式子 (27) 我們可以得到 $x^J(k) = -1$ 。因此假設 2 對 PSK 來說並無影響。而到現在為止的討論當中，我們可以注意到，數字 J 與 Q 的關係皆為 $J \leq Q$ ，甚至當使用較大的星雲圖時，我們則有 $J \ll Q$ 的特性，例如 16QAM 或 64QAM。這種 J 小於等於或遠小於 Q 的特性將會在接下來的通道估測的問題當中扮演的重要的地位。

3.2 推導 $H^J(\rho_k)$

我們先來考慮式子 (17) 的 OFDM 通道傳輸系統模型，數學式如下：

$$y(k) = H(\rho_k)x(k) + n(k), \quad k \in [0, M-1] \quad (30)$$

其中爲了簡便起見我們定義 $e^{j\frac{2\pi k}{M}} \triangleq \rho_k$. 我們假設通道是非隨機的 (deterministic), 且 $n(k)$ 是平均值爲零的複數高斯循環 (circular) 雜訊. 循環的特性即由下列數學式來表示 [1]:

$$E\{n^m(k)\} = 0 \quad \forall \text{ integer } m > 0 \quad (31)$$

接著我們把 $y(k)$ 連乘自己 J 次並取期望值, 我們可以得到下面的數學式:

$$E\{y^J(k)\} = H^J(\rho_k)E\{x^J(k)\} \quad (32)$$

其中由於循環的特性, $E\{n^1(k)\}, E\{n^2(k)\}, \dots$ 等高次項的雜訊皆爲零. 如果我們把式子 (29) 代入式子 (32), 我們便可以計算 $H^J(\rho_k)$, 數學式如下所示:

$$H^J(\rho_k) = -\frac{Q}{J \cdot \alpha_J} E\{y^J(k)\} \quad k \in [0, M-1] \quad (33)$$

此等式是對在滿足假設1及2以及 J 的定義下的任何星雲圖都成立. 我們將會在下面的內容當中討論所提出的通道估測方法.



3.3 PSK 及 QAM 調變準確度

在上面的討論當中, 我們宣稱 $H^J(\rho_k)$ 是從 (33) 所得到的. 實際上, 我們是用以下樣本平均的方式來計算:

$$\hat{H}^J(\rho_k) = -\frac{Q}{J \cdot \alpha_J} \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} y^J(i, k) \right\} \quad k \in [0, M-1] \quad (34)$$

其中是代表估測值的意思, 而 $y(i, k)$ 則是代表 $\mathbf{y}(i) = [y(iM), \dots, y(iM + M - 1)]^T$ 這個向量訊號的第 $k + 1$ 個元素. 這裡的 I 是指向量訊號所傳送的數目. 更明確的來說, 當我們傳送 I 個向量訊號 $\mathbf{x}(i)$ 時,

我們會在系統輸出得到 I 個向量訊號 $\mathbf{y}(i)$. 我們將收到的訊號表示如下:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(M-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}^{(0)}} \underbrace{\begin{bmatrix} y(M) \\ y(M+1) \\ y(M+2) \\ \vdots \\ y(2M-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} y(2M) \\ y(2M+1) \\ y(2M+2) \\ \vdots \\ y(3M-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}^{(2)}} \cdots \underbrace{\begin{bmatrix} y((I-1)M) \\ y((I-1)M+1) \\ y((I-1)M+2) \\ \vdots \\ y((I-1)M+M-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}^{(I-1)}} \quad (35)$$

因此計算 $\hat{H}^J(\rho_k)$ 的方法即如下面的式子所示, $k \in [0, M-1]$:

$$\hat{H}^J(\rho_k) = -\frac{Q}{J \cdot \alpha_J} \left\{ \frac{y^J(k) + y^J(M+k) + y^J(2M+k) + \cdots + y^J((I-1)M+k)}{I} \right\} \quad (36)$$

從這個式子我們可以很直覺的瞭解, 若傳送的向量訊號數目越多, 估測值 $\hat{H}^J(\rho_k)$ 會越準. 從式子 (36) 我們可以注意到, 我們是用 I 個向量訊號來計算 $\hat{H}^J(\rho_k)$, 而此數值會被接下來 的通道估測所利用, 來計算出待估參數. 也就是說, 此 OFDM 的 FIR 通道在 I 個向量訊號傳送當中是固定不變的, 而在 I 個向量訊號群之間才視為是隨機的. 因此等到下一組 I 個向量訊號收到之後, 便再次計算目前所對應的通道參數.

我們現在來做一些討論, 且假設式子 (30) 的雜訊 $n(k)$ 為零. 假如我們使用 BPSK 調變, 我們使用 $I = 2$ 來估測第一個 聲調的估測值, 及 $\hat{H}^2(\rho_0)$. 那麼根據 $H^J(\rho_k) = -\frac{Q}{J \cdot \alpha_J} E\{y^J(k)\} = -\frac{Q}{J \cdot \alpha_J} H^J(\rho_k) E\{x^J(k)\}$ 只要輸入訊息 $x(k)$ 是完全均勻分布 (exactly equally likely, ideal condition) 的情況之下, $H^2(\rho_0)$ 的估測 $\hat{H}^2(\rho_0) = -\frac{2}{2 \cdot 1} H^2(\rho_0) \hat{E}\{x^2(\rho_0)\} = H^2(\rho_0)$, 也就是真正的值. 若 $x(k)$ 不是完全均勻分布的話, 由於有式子 (27) 的結構我們還是可以得到 $\hat{H}^2(\rho_0) = H^2(\rho_0)$. 因此機率特性對 PSK 而言不受任何影響. 同樣地我們來分析 QAM, 假如我們使用 16QAM, 其中 $d_{min} = 2[9]$. 如果我們使用 $I = 16$ 來估測第一個聲調的估測值, 即 $\hat{H}^4(\rho_0)$. 那麼根據上述同樣的

數學式, 只要輸入訊息 $x(k)$ 是完全均勻分布的情況之下, 我們便可以得到下面的結果 :

$$\hat{H}^4(\rho_0) = -\frac{16}{4 \cdot 272} H^4(\rho_0) \hat{E}\{x^4(\rho_0)\} \quad (37)$$

$$\hat{E}\{x^4(\rho_0)\} = \frac{1}{16} \left\{ \sum_{m=\{1,3\}} \sum_{n=\{1,3\}} [(m+ni)^4 + (m-ni)^4 + (-m+ni)^4 + (-m-ni)^4] \right\} = -68 \quad (38)$$

其中 $\hat{E}\{x^4(\rho_0)\}$ 是 $E\{x^4(\rho_0)\}$ 的估測值. 請注意式子 (37) 與 (38), 我們便可以發現 $\hat{H}^4(\rho_0)$ 的值等於真正的值, 即 $H^4(\rho_0)$.

上面的結果可以發現當 $x(k)$ 的分布是均勻時, 則在聲調 $k = 0$ 時每一個在 16QAM 的點都只會出現一次, 如此才可能得到上式的結果. 但是假如 $x(k)$ 並不是均勻分布, 則在 QAM 情況下就不會像 PSK 一樣得到完全正確的值. 例如假設 $I = 16$ 且 如果沒有均勻分布的話, 與真正值最小的誤差便會發生在有一個點不出現而其他 15 點的任何一點出現 2 次的情況. 例如, $i+1$ 這點沒出現但是 $3-i$ 這點出現兩次. 爲了分析方便, 我們先提供一個參考的表格做爲數據參考 :

表 1. 16QAM 的參數分析

group I	group II	group III	group IV
$sum = -16$	$sum = 112$	$sum = 112$	$sum = -1296$
$(1 + i)^4 = -4$	$(1 + 3i)^4 = 28 - 96i$	$(3 + i)^4 = 28 + 96i$	$(3 + 3i)^4 = -324$
$(1 - i)^4 = -4$	$(1 - 3i)^4 = 28 + 96i$	$(3 - i)^4 = 28 - 96i$	$(3 - 3i)^4 = -324$
$(-1 + i)^4 = -4$	$(-1 + 3i)^4 = 28 + 96i$	$(-3 + i)^4 = 28 - 96i$	$(-3 + 3i)^4 = -324$
$(-1 - i)^4 = -4$	$(-1 - 3i)^4 = 28 - 96i$	$(-3 - i)^4 = 28 + 96i$	$(-3 - 3i)^4 = -324$

那麼對任何聲調來說當 $1 + i$ 這點沒出現而 $3 - i$ 這點出現兩次時，我們可以得到下面的數學式：

$$\hat{E}\{x^4\} = \frac{1}{16}\{-12 + 112 + 112 + (28 - 96i) - 1296\} = -66 - 6i \quad (39)$$

因此所得到的值便會與式子 (38) 的值有所不同。而在 I 固定之下，點數越不均勻此誤差會越大。我們把當 $I = 16$ 時所有只出現一個點數誤差的參數值都計算出來如下：

$$\{-66 \pm 6i, -88, -70 \pm 6i, -68 \pm 12i, -90 \pm 6i, -48, -46 \pm 6i\} \quad (40)$$

我們可以發現只要有一個星雲圖的點不均勻，就可能有蠻大的錯誤，且當 I 固定時，輸入訊號越不均勻誤差會越大。由於在 3.1 當中我們已假設輸入訊號 $x(k)$ 是均勻分布的，因此以上的問題便不會發生。若我們再次注意上述的分析可以發現，若輸入訊號 $x(k)$ 是均勻分布的話，則在估測的這部分誤差即為零。而很明顯的，當雜訊 $n(k)$ 不是循環高斯且不為零時，唯一的誤差源便只有雜訊的效應了。

4. 通道估測

4.1 問題陳述

首先在討論通道估測的問題前, 我們先來看看下面的問題 :

$$[H(\rho_k) \cdot \{e^{j\frac{2\pi n}{J}}\}]^J = H^J(\rho_k) \quad n \in [0, J-1] \text{ for each } k \in [0, M-1] \quad (41)$$

其中 $\{e^{j\frac{2\pi n}{J}}\}_{n=0}^{J-1}$ 是本身所帶有的相位不確定因子 因此我們可以從上式發現 $\{e^{j\frac{2\pi n}{J}}\}_{n=0}^{J-1}$ 這 J 個相位不確定因子 都可以跟 $H(\rho_k)$ 運算而得到相同的 $H^J(\rho_k)$, 因此這個問題便是此文章的重心, 對於 OFDM 的通道估測有相當大的重要性. 而我們在此提出我們主要的討論主題: 對每個聲調 k 而言, 如何在這 J 個不確定因子當中由 $H^J(\rho_k)$ 來求得 $H(\rho_k)$?

4.2 一些相關的方法



爲了解決此相位不確定的問題, 目前已有一些方法被提出. 在 [1] 的文章當中, 使用了許多的通道估測方法, 其系統效能皆還不錯, 例如 Modified Minimum Distance(MMD) 和 MMD-PD(Phase Directed Algorithm). 在 [2] 的文章當中, 作者則是提出了一個相當新穎的方法來做通道係數的估測, 便解決了相位不確定的問題. 在接下來的文章當中, 我們 會先針對此兩篇文章的方法來做討論, 而後再討論我們所提出的方法. 以下都是根據第3章的 假設做分析, 並且都集中在 BPSK 與 QPSK 的方法, QAM 的結論則與 PSK 相同. 且在最後的模擬 章節, 我們還會提供三種不同的方法的系統模擬比較, 以及一些評論.

4.3 Modified Minimum Distance - Phase Directed Algorithm(MMD-PD)

在第 [1] 篇文章中, 作者使用了相當多的方法, 且所模擬出來的通道誤差及位元錯誤率效能都 相當的不錯. 其中有一個方法稱為 MMD-PD. 此方法先是計算 MMD 的通道估測, 接者使用此 MMD 的估測來作疊代運算, 算出最後的估測. 我們詳細的來分析這個方法. 在做 MMD 估測的階段, 根據式子 (41) :

$$[H(\rho_k) \cdot \lambda_k]^J = H^J(\rho_k) \quad k \in [0, M - 1] \quad (42)$$

我們已知到對每個聲調 k 而言, 我們皆有一個相位的不確定因子, 且這個因子對應到 J 個可能性. 因此, 假設 FIR 的通道階數 L 已知, 如果我們從 M 個聲調當中任意選擇 $L + 1$ 個點 來作計算 (實際上在 M 個點當中”均勻”選擇 $L + 1$ 個點來做運算會比較準確, 原因是因為離散傅立葉轉換 矩陣的特性), 那麼根據式子 (13) 的數學關係式我們便可以得到下面的數學式 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_\alpha [H^J(\rho_\alpha)]^{1/J} \\ \vdots \\ \lambda_\beta [H^J(\rho_\beta)]^{1/J} \end{bmatrix}}_{J^{L+1} \text{ possible choices}} = \sqrt{M} R \mathbf{h} \quad (43)$$

其中左邊的直向量有 J^{L+1} 這麼多種可能, 原因是每個聲調都有 J 個可能, 且直向量長度為 $L + 1$. R 則是從離散傅立葉轉換矩陣 F 所分割出來的小矩陣, 所對應到的是 F 矩陣與直向量相同的聲調位置, 以及 F 矩陣前面的第 $L + 1$ 個行. 我們之所以選擇 $L + 1$ 個聲調的原因, 是因為通道的階數 為 L (也就是有 $L + 1$ 個係數), 因此至少需要 $L + 1$ 個方程式來計算, 然而我們實際上可以使用更多的聲調 (方程式) 來計算, 而得到更準確的值, 只是用越多的聲調來計算我們需要更多的運算量, 兩者之間為一種取捨 (trade-off). 在這樣的情況之下, 我們可以發現, 若 J 跟 L 都蠻小的時候 (ex: $J = 2$ and $L = 2$), 我的只需要算做一些少量的計算, 然而若 J 跟 L 都變大的時候 (ex: $J = 4$ and $L = 6$), 我們就真的是需要花費相當大的運算量.

接著, 我們根據式子 (43), 計算出所有 J^{L+1} 可能的 \mathbf{h} . 然而要決定那一個才是 我們所要的正確的 \mathbf{h} , 我們藉由下面的方法來說明. 首先從 $H(\rho_k) = \sum_{l=0}^L h(l) e^{-j \frac{2\pi k l}{M}}$ 關係式出發. 假如我們定義一

個向量 \mathbf{c} , $\mathbf{c} \triangleq \mathbf{h} *_J \mathbf{h} = [c(0), \dots, c(JL)]^T$ (i.e. $\mathbf{c} = \underbrace{\mathbf{h} * \mathbf{h} * \dots * \mathbf{h}}_{\text{number of } \mathbf{h} \text{ is } J}$), 我們可以得到下面的數學式：

$$H^J(\rho_k) = \sum_{l=0}^{JL} c(l) e^{-j \frac{2\pi k l}{M}} \quad (44)$$

上面的數學式是由於離散傅立葉轉換的特性所使然。它的意思即是說明在時域做旋繞 (convolution) 的運算, 可以等效為頻率域做簡單的乘法運算。那麼藉由這個關係式, 我們可以將式子 (44) 展開而得到下面的等式：

$$\begin{aligned} H^J(\rho_0) &= c(0) + c(1)e^{-j \frac{2\pi(0)(1)}{M}} + c(2)e^{-j \frac{2\pi(0)(2)}{M}} + \dots + c(JL)e^{-j \frac{2\pi(0)(JL)}{M}} \\ H^J(\rho_1) &= c(0) + c(1)e^{-j \frac{2\pi(1)(1)}{M}} + c(2)e^{-j \frac{2\pi(1)(2)}{M}} + \dots + c(JL)e^{-j \frac{2\pi(1)(JL)}{M}} \\ H^J(\rho_2) &= c(0) + c(1)e^{-j \frac{2\pi(2)(1)}{M}} + c(2)e^{-j \frac{2\pi(2)(2)}{M}} + \dots + c(JL)e^{-j \frac{2\pi(2)(JL)}{M}} \\ &\vdots \\ H^J(\rho_{M-1}) &= c(0) + c(1)e^{-j \frac{2\pi(M-1)(1)}{M}} + c(2)e^{-j \frac{2\pi(M-1)(2)}{M}} + \dots + c(JL)e^{-j \frac{2\pi(M-1)(JL)}{M}} \end{aligned}$$

然後我們將左邊的值收集成一個直向量, 並藉由化簡而可以得到下面的型式：

$$\begin{bmatrix} H^J(\rho_0) \\ H^J(\rho_1) \\ H^J(\rho_2) \\ \vdots \\ H^J(\rho_{M-1}) \end{bmatrix} = \sqrt{M} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{M}} \\ \frac{1}{\sqrt{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j \frac{2\pi(1)(1)}{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j \frac{2\pi(1)(2)}{M}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j \frac{2\pi(1)(JL)}{M}} \\ \frac{1}{\sqrt{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j \frac{2\pi(2)(1)}{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j \frac{2\pi(2)(2)}{M}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j \frac{2\pi(2)(JL)}{M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j \frac{2\pi(M-1)(1)}{M}} & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j \frac{2\pi(M-1)(2)}{M}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j \frac{2\pi(M-1)(JL)}{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(0) \\ c(1) \\ c(2) \\ \vdots \\ c(JL) \end{bmatrix} \triangleq \sqrt{M} \mathbf{U} \mathbf{c} \quad (45)$$

其中 $\mathbf{U} \triangleq F(:, 1 : JL + 1)$ 且假設 $JL < M$, 而 $H^J(\rho_k)$ 可以由 (33) 式子來計算。在推導出式子 (45) 之後, 我們便可以用它來計算向量 \mathbf{c} 如下：

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{M}} (\mathbf{U}^H \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^H \begin{bmatrix} H^J(\rho_0) \\ \vdots \\ H^J(\rho_{M-1}) \end{bmatrix} \quad (46)$$

接著回到我們原來的問題，要決定在 J^{L+1} 這麼多可能性當中種那一個才是我們想要的 \mathbf{h} ，我們可以由下面的原則來計算[1]：

$$\mathbf{h} = \arg \min_{\mathbf{h}} \|\mathbf{c} - \mathbf{h} *_J \mathbf{h}\| \quad (47)$$

其中斜體字 \mathbf{h} 是表示經由式子(47)所求得值。在此有一點必須要提出的是，能夠滿足式子(47)的解不唯一，會有 J 個值同時滿足。因此由於相位不確定的特性，這 J 個值都可以拿來做為正確的估測值。我們之所以會有 J 個值同時滿足式子(47)，是因此相位不確定因子的特性所使然。因此我們可以在這 J 個值當中任意選一個值，然後根據式子 $\underline{\mathbf{h}} = \sqrt{M}V\mathbf{h}$ 便可求得 MMD 的通道估測參數 $\underline{\mathbf{h}}$ 。

接著下來，利用所算出的MMD 估測來做疊代運算。我們用此 MMD 的估測來當做下列式子的初始估測值並藉由疊代運算提高估測準確度 [1]：

$$\hat{\lambda}_k = \arg \min_{\lambda_k} |H_i(\rho_k) - \lambda_k [H^J(\rho_k)]^{1/J}|^2 \quad k \in [0, M-1] \quad (48)$$

其中 i 是疊代的索引， $H_i(\rho_k)$ 是剛才求得的 MMD 估測，在此做為初始疊代值。 $H^J(\rho_k)$ 是由式子(33)所計算出的。詳細疊代步驟如下：

Step 1：使用所計算出來的 MMD 估測來當做式子(48)的初始估測值 $H_i(\rho_k)$ 。

Step 2：接著算出所有的 λ_k ，並得到下列的數學式：

$$\underline{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_0 [H^J(\rho_0)]^{1/J} \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_{M-1} [H^J(\rho_{M-1})]^{1/J} \end{bmatrix}$$

其中 $[H^J(\rho_k)]^{1/J} = |H^J(\rho_k)|^{1/J} \cdot e^{j\frac{\angle H^J(\rho_k)}{J}}$ 。

Step 3 : 更新時域的通道參數入下 :

$$\mathbf{h}(i) \triangleq \frac{1}{\sqrt{M}}(V^H V)^{-1} V^H \underline{\mathbf{h}}$$

再更新頻域的通道參數如下 :

$$\underline{\mathbf{h}}(i+1) \triangleq \sqrt{M} V \mathbf{h}(i) = V(V^H V)^{-1} V^H \mathbf{h}(i) = V V^H \mathbf{h}(i)$$

, 此值 便成爲下一次的疊代參數.

Step 4 : 重複以上的的步驟直到收斂, 即對某個很小的正實數 ϵ , 滿足 $\|\underline{\mathbf{h}}(i+1) - \underline{\mathbf{h}}(i)\| \leq \epsilon$. 而最後要注意的是, 這樣所算出來的估測還是有一個最後待回復的相位不確定因子. 例如當 $J = 2$ 時, 不確定因子即爲 $\{1, -1\}$. 若是當 $J = 4$ 時, 不確定因子即爲 $\{1, -1, i, -i\}$. 而這最後的相位不 確定因子, 就只能用試驗聲調 (pilot tones) 來補償 [1].

從以上的分析來看, 我們可以發現, 當 L 很大的時候, 在做 MMD 的計算是不實際的, 因爲當 L 很大的時候, J^{L+1} 值也就相對的快速增大, 因此要計算的可能參數的數目變的非常大. 這個運算量會 隨著通道階數 L 增大而增大問題我們可以藉由以下將要介紹的方法來解決, 此方法稱爲 CSC(Clustered SubCarrier)[3].

4.4 Clustered SubCarrier Algorithm(CSC)

在第 [3]篇文章當中, 作者使用了一個相當新穎的概念與想法, 來快速的求得估測, 使所需要的計算量大大的縮小, 並且有著不錯的通道估測誤差效能以及位元錯誤率效能. 我們以下來分析他所提出的方法. 首先, 我們先考慮有一群相鄰連續的聲調, k, \dots, l , 並且這些聲調有著較大的增益響應 (magnitude response). 他所提出的方法, 其最 重要的概念是說, 假設當 $H^J(\rho_k)$ 的值很準確的時候, 除了相位不確定因子 $\lambda_k = \{e^{j\frac{2\pi n}{J}}\}_{n=0}^{J-1}$ 還未知的情況下, $H(\rho_k)$ 的值其實可以很準確的被計算出來 :

$$H(\rho_k) = \lambda_k |H^J(\rho_k)|^{1/J} \cdot e^{j\frac{\angle H^J(\rho_k)}{J}} \quad (49)$$

而這些尚未知的相位不確定因子，對於每個聲調來說都有 J 種可能。我們也己知道，對 $J = 2$ 的時候，相位不確定因子即為 $\{1, -1\}$ 。而 $J = 4$ 的時候，不確定因子為 $\{1, -1, i, -i\}$ 。那麼，我們就選擇其中的某一個不確定因子（例如對兩種情況來說，我們都選擇 1），然後便可以做簡單且快速的疊代運算。

明確一點來說，首先我們在聲調 k 上選擇了 "1" 這個相位因子，即 $H(\rho_k) = 1 \cdot |H^J(\rho_k)|^{1/J} \cdot e^{j \frac{\angle H^J(\rho_k)}{J}}$ ，而 $\lambda_k = 1$ 。那麼我們可以使用下列的疊代式子，其中 $[H^J(\rho_k)]^{1/J} = |H^J(\rho_k)|^{1/J} \cdot e^{j \frac{\angle H^J(\rho_k)}{J}}$ ：

$$\lambda_{k+1} = \arg \min_{\lambda} |H(\rho_k) - \lambda [H^J(\rho_{k+1})]^{1/J}|, \quad H(\rho_{k+1}) = \lambda_{k+1} [H^J(\rho_{k+1})]^{1/J}$$

$$\lambda_{k+2} = \arg \min_{\lambda} |H(\rho_{k+1}) - \lambda [H^J(\rho_{k+2})]^{1/J}|, \quad H(\rho_{k+2}) = \lambda_{k+2} [H^J(\rho_{k+2})]^{1/J}$$

⋮

$$\lambda_l = \arg \min_{\lambda} |H(\rho_{l-1}) - \lambda [H^J(\rho_l)]^{1/J}|, \quad H(\rho_l) = \lambda_l [H^J(\rho_l)]^{1/J}$$

由於我們在聲調 k 上所選的相位不確定因子是 "1"，而以上的疊代又是相對於 $H(\rho_k)$ 所作的疊代，因此我們會在這些所疊代出來的值當中，有著跟聲調 k 一樣的相位特性。我們在以上的疊代式子當中，使用了最小 (min, minimum) 的原則，其原因是因為對於向量 \mathbf{h} 任何相鄰的兩個頻域係數來說，它們的數值一定會很接近。這是由於離散傅立葉轉換矩陣運算後所造成的特性。

接著我們便可以收集剛才所疊代出來的估測值 $H(\rho_k), \dots, H(\rho_l)$ ，將它們排列成一直向量後，另外再將所有的不確定因子給加上，因此可以得到下面的式子：

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot H(\rho_k) \\ 1 \cdot H(\rho_{k+1}) \\ \vdots \\ 1 \cdot H(\rho_l) \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} -1 \cdot H(\rho_k) \\ -1 \cdot H(\rho_{k+1}) \\ \vdots \\ -1 \cdot H(\rho_l) \end{bmatrix} \text{ for } J = 2 \text{ and} \quad (50)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot H(\rho_k) \\ 1 \cdot H(\rho_{k+1}) \\ \vdots \\ 1 \cdot H(\rho_l) \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} -1 \cdot H(\rho_k) \\ -1 \cdot H(\rho_{k+1}) \\ \vdots \\ -1 \cdot H(\rho_l) \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} i \cdot H(\rho_k) \\ i \cdot H(\rho_{k+1}) \\ \vdots \\ i \cdot H(\rho_l) \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} -i \cdot H(\rho_k) \\ -i \cdot H(\rho_{k+1}) \\ \vdots \\ -i \cdot H(\rho_l) \end{bmatrix} \text{ for } J = 4 \quad (51)$$

那麼從 $\mathbf{h} = [H(\rho_0), \dots, H(\rho_{M-1})]^T = \sqrt{M}V\mathbf{h}$ 這個式子的關係式我們便可以求得所有 J 種相對應的時域通道脈衝響應向量。有了這些時域的向量，我們即可以從 $\mathbf{h} = \sqrt{M}V\mathbf{h}$ 的關係式來求得頻域的通道估測參數。請注意，以上的分析是要在當 $|H^J(\rho_k)|^{1/J}, \dots, |H^J(\rho_l)|^{1/J}$ 這些值都蠻大的時候計算出來的值才準確 [2]。而在這種一群相鄰連續的聲調的情況之下，這些所計算出來的 J 個 \mathbf{h} 皆可以做為正確的通道估測。



假設我們不只有一群相鄰連續的聲調那麼我們仍然可以利用同樣的概念來估測通道。考慮假如我們有兩群相鄰連續的聲調，且這些聲調皆有著蠻大的增益響應： k, \dots, l 和 m, \dots, n 。假設我們定義下面的式子：

$$H_1 \triangleq \begin{bmatrix} H(\rho_k) \\ \vdots \\ H(\rho_l) \end{bmatrix} \text{ and } H_2 \triangleq \begin{bmatrix} H(\rho_m) \\ \vdots \\ H(\rho_n) \end{bmatrix} \quad (52)$$

其中 H_1 與 H_2 是由上述只考慮一群聲調的方法所計算出來的，而下標的數字代表的是聲調群的索引。那麼我們可以利用式子 (52)，將所有相位不確定因子附加上 H_1 與 H_2 ，並將兩者合併成一個較長的直向量而得到下列的式子：

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot H_1 \\ 1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \cdot H_1 \\ -1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \cdot H_1 \\ 1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \cdot H_1 \\ -1 \cdot H_2 \end{bmatrix} \text{ for } J = 2 \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 \cdot H_1 \\ 1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \cdot H_1 \\ -1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \cdot H_1 \\ i \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \cdot H_1 \\ -i \cdot H_2 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} -1 \cdot H_1 \\ 1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \cdot H_1 \\ -1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \cdot H_1 \\ i \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \cdot H_1 \\ -i \cdot H_2 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} i \cdot H_1 \\ 1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \cdot H_1 \\ -1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \cdot H_1 \\ i \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \cdot H_1 \\ -i \cdot H_2 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} -i \cdot H_1 \\ 1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \cdot H_1 \\ -1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \cdot H_1 \\ i \cdot H_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \cdot H_1 \\ -i \cdot H_2 \end{bmatrix} \text{ for } J = 4 \quad (54)
\end{aligned}$$

然後我們便可以再一次的使用 $\mathbf{h} = \sqrt{MV}\mathbf{h}$ 的關係式來計算出所以相對應的 \mathbf{h} 。這裡我們將會有 J^g 種可能的通道估測 \mathbf{h} ，其中的 g 是代表著聲調群的數目。為了要在這些可能的估測當中找到正確的估測值，我們還是利用了式子 (47) 的方法來計算。我們發現，滿足式子 (47) 的通道 \mathbf{h} 仍然有 J 種可能值。因此我們便隨意的在這 J 種可能性下選取一個估測，然後再利用式子 (13) 來計算出相對應的頻域的估測 \mathbf{h} 。在此還是要注意一點，這樣算出來的值仍然有著一個整體的相位不確定因子，而這個因子的回復只能藉由試驗聲調來達成。

我們可以從上面的分析發現，CSC 這個方法提供了相當簡單且快速的演算法來求得估測值，並且不會像 MMD 的方法一樣，有著一但通道階數 L 增加，計算量就會跟著快速增加的特性，使的 CSC 的方法快速且簡便。計算量這一方面，因為 MMD 需要 J^{L+1} 的可能性的運算量，而 CSC 只需要 J^g 的運算量，由此便可以瞭解運算量的差異。然而，儘管 CSC 有著不錯的優點，它還是有些待改善之處。因為我們發現，在只有一群相鄰連續的聲調時，為了希望能求得較準確的估測值，在考慮 $M = 64$ 時 [8]，通常我們大約需要 40 個聲調才能達到估測值 \mathbf{h} 準確的目的。而當聲調群的數目越多時，聲調的數

目也會不斷增加, 因此增加了矩陣的維度後 便會增加相對應的運算量.

在下面的章節裡, 我們便來討論所提出的方法, 來探討此方法的原理及特性. 我們所提出的方法在概念上跟其他兩種方法類似, 但是能夠配合一些演算法的修改來更加地降低 CSC的運算量.

4.5 以比率 (Ratio) 的方法做通道估測

4.5.1 FIR 系統的頻率響應

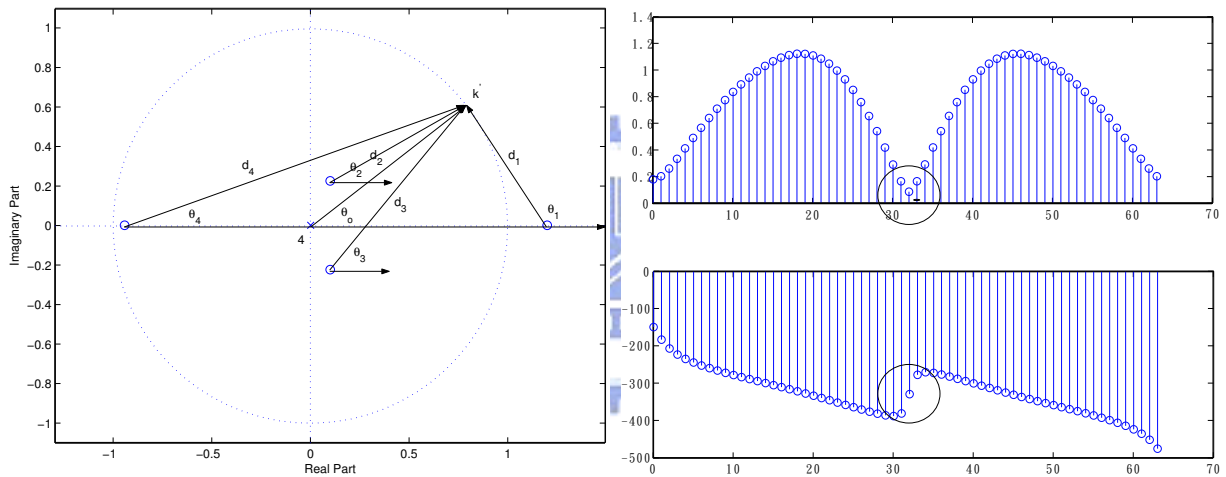


圖 2: 一個FIR 系統的極零點與頻率響應圖. $M=64$.

在開始介紹我們的方法之前, 我們先來復習一下 FIR 系統的大小及向位響應的特性. 首先參考圖 2, 圖為一 FIR 系統的 z 平面極零點圖與大小及相位響應圖. 注意對所有階數 大於零的 FIR 系統, 其極點必定集中在原點. 那麼根據圖 2, 我們可以得到下面的結果:

結果 1 : 從圖中, 對於某個聲調 k' 而言, $H(e^{j\frac{2\pi k'}{M}}) = H(\rho_{k'})$ 的大小的響應表示為 $|H(\rho_{k'})| = \prod_{i=1}^4 d_i$, 而其相位響應表示為 $\angle H(\rho_{k'}) = \sum_{j=1}^4 \theta_j - 4 \cdot \theta_o$. 其中 θ_o 是代表極點的相位角. 那麼我們

就可以從這些分析得到 FIR 系統的大小及相位響應如下：

$$|H(\rho_{k'})| = \prod_{i=1}^L d_i \quad (55)$$

$$\angle H(\rho_{k'}) = \sum_{i=1}^L \theta_i - L \cdot \theta_o \quad (56)$$

其中 θ_o 是極點的相位角，而 L 是 FIR 通道的階數。 d_i 是聲調 k' 與零點的距離，而 θ_i 是其相對應的零點相位角。

結果 2：從圖中我們可以發現，當 FIR 系統的大小響應大的時候，其所對應的相位響應的相位變化比較緩慢，然而若是大小響應比較小的時候，其所對應的相位響應就可能有一個類似相位不連續，或相位”跳躍”的特性。因此我們為了避開此種相位不連續的特性，我們便把注意力集中到大的增益位響的部份。根據這些有著大的增益響應的聲調，並利用其相鄰的相位響應的相位緩變化，我們希望能利用這個特點來估算其他的相位響應值，以便可以將所有的值還原，得到最後的估測。因此我們便有了第三個結果。

結果 3：我們選擇那些有著高增益響應的聲調來做計算，即大的 $|H^J(\rho_k)|^{1/J}$ ，這是因為它們有著緩慢的相位變化。利用相鄰兩個聲調之間相位緩慢變動的特性來將所有的相位一一還原。

4.5.2 比率 (Ratio) 方法分析

接下來我們來討如何利用相位之間的關係來做通道估測。我們提出下面的方法。我們定義比率 ΔH_k
 $\triangleq \frac{H(\rho_{k+1})}{H(\rho_k)}$ ，其中 $k \in [0, M - 2]$ 。那麼即可以得到下面的式子：

$$\Delta H_k^J = |\Delta H_k^J| \cdot e^{j(\angle \Delta H_k^J)} = |\Delta H_k^J| \cdot e^{j(J \cdot \angle \Delta H_k)} \quad (57)$$

其中 $\angle\Delta H_k = \angle H(\rho_{k+1}) - \angle H(\rho_k)$.而 ΔH_k 的相位有著 J 種可能性, 亦即為下面的式子 :

$$\angle\Delta H_k + \frac{2m\pi}{J} \quad m \in [0, J - 1] \quad (58)$$

這裡我們僅考慮相位的主值, 即 $[-\pi, \pi]$ 的值. 那麼我們就可以藉由是否 ΔH_k 的相位角能夠滿足下面的數學式來找出這 J 個相位值當中哪個才是正確的 :

$$-\frac{\pi}{J} < \angle\Delta H_k + \frac{2m\pi}{J} < \frac{\pi}{J} \quad (59)$$

其中 $J=2$ 或 4 . 這個原則是根據相鄰的兩個聲調的相位有著緩慢的變化的假設所推導出來的, 而若相位變動過大則不能滿足上式. 而從上面得討論的得知, 相位會在大增益響應的附近有著緩慢的變化. 因此選擇那些有著大增益響應的聲調來做上面的計算才不會出錯. 因此, 在藉由式子 (59) 求得 $H(\rho_{k+1})$ 與 $H(\rho_k)$ 之間正確的相位差值之後, 若 $\angle H(\rho_k)$ 的值給定, 我們即可由下面的式子來求得 $H(\rho_{k+1})$:

$$\angle H(\rho_{k+1}) = \angle\Delta H_k + \angle H(\rho_k) \quad (60)$$

其中 $\angle\Delta H_k$ 是代表 $H(\rho_{k+1})$ 與 $H(\rho_k)$ 之間, 在 J 種可能性當中正確的相位差值. 請注意, 雖然 $\angle H(\rho_k)$ 值是假設給定已知, 但是實際上我們只能知道 $\angle H(\rho_k)$ 值的 J 種可能性當中的其中一個, 因為從 $H^J(\rho_k)$ 值要推回去 $H(\rho_k)$ 值原本就有著一個具有 J 種可能性的相位不確定因子 [1]. 而且更重要的是, 在這些 J 種可能性當中, $\angle\Delta H_k$ 值皆是固定不變的. 因此我們便可以由式子 (60) 來求得 $\angle H(\rho_{k+1})$, 而此求得的值與 $\angle H(\rho_k)$ 有著相同的相位特性. 依照這種方法, 我們可以一一的將 $\angle H(\rho_{k+2})$ $\angle H(\rho_{k+3})$... 這些值給計算出來, 並且都跟 $\angle H(\rho_k)$ 的值有相同的相位特性. 由於對每個聲調 k 來說, 通道的大小響應可以很確定無疑地由下列式子計算出來 :

$$|H(\rho_k)| = |H^J(\rho_k)|^{1/J} \quad (61)$$

我們便可以將這些增益與上面所計算的相位合併, 成爲一個完整的響應參數, 並將參數排列成一直向

量如下：

$$\begin{bmatrix} H(\rho_k) \\ H(\rho_{k+1}) \\ \vdots \\ H(\rho_{k+m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |H^J(\rho_k)|^{1/J} \cdot e^{j\angle H(\rho_k)} \\ |H^J(\rho_{k+1})|^{1/J} \cdot e^{j\angle H(\rho_{k+1})} \\ \vdots \\ |H^J(\rho_{k+m})|^{1/J} \cdot e^{j\angle H(\rho_{k+m})} \end{bmatrix}_{(m+1) \times 1} \quad (62)$$

其中 $k, \dots, k+m$ 是我們假定所選擇的聲調. 有了這樣的數學式, 我們便可以利用式子 (13) 的關係式來計算出 \mathbf{h} ：

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\sqrt{M}} (K^H K)^{-1} K^H \begin{bmatrix} |H^J(\rho_k)|^{1/J} \cdot e^{j\angle H(\rho_k)} \\ |H^J(\rho_{k+1})|^{1/J} \cdot e^{j\angle H(\rho_{k+1})} \\ \vdots \\ |H^J(\rho_{k+m})|^{1/J} \cdot e^{j\angle H(\rho_{k+m})} \end{bmatrix}_{(m+1) \times 1} \quad (63)$$

其中

$$\begin{bmatrix} |H^J(\rho_k)|^{1/J} \cdot e^{j\angle H(\rho_k)} \\ |H^J(\rho_{k+1})|^{1/J} \cdot e^{j\angle H(\rho_{k+1})} \\ \vdots \\ |H^J(\rho_{k+m})|^{1/J} \cdot e^{j\angle H(\rho_{k+m})} \end{bmatrix} = \sqrt{M} K \mathbf{h} \quad (64)$$

且 $K \triangleq V(k : k+m, :)$. 這裡我們假設通道的階數 L 已知. 最後我們藉由式子 (13) 便可以算出最後所需要的通道頻域向量估測 \mathbf{h} . 然而再一次的注意到, 這個估測還是有一個未知的相位不確定因子有待試驗聲調來解決. 而我們的估測方法到此便可以結束.

4.5.3 估測演算法

在下面的內容當中, 我們要來詳細說明所提出方法的演算步驟, 以及一些相關的問題.

Step 1. 樣本平均

首先我們需將式子 (33) 的 $H^J(\rho_k)$ 值計算出來. 要計算這個參數, 我們採用樣本平均的方法, 式子如下 :

$$\hat{H}^J(\rho_k) = -\frac{Q}{J \cdot \alpha_J} \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} y^J(i, k) \right\} \quad k \in [0, M-1] \quad (65)$$

很直覺的從式子 (65) 來看, 只要我們用越多的傳送向量訊號數目 I , 我們一定可以到更準確的估測值 $\hat{H}^J(\rho_k)$.

Step 2. 選擇大增益值 $|H(\rho_k)|$

下一步我們需要尋找適當的聲調來做計算. 然而聲調的尋找方式已在先前文章中的結果 3 有所討論, 即是挑選具有較大增益響應的聲調來做計算 :

$$|\hat{H}(\rho_k)| = |\hat{H}^J(\rho_k)|^{1/J} \quad (66)$$

然後我們只需把注意力放在這些聲調上面就行了. 再來便進行下面的計算.

Step 3. 一群相鄰連續聲調的有限相位不確定性

假設我們有一群相鄰連續的聲調, $k', \dots, k' + m$, 並且這些聲調有著蠻大的增益響應. 首先, 我們先計算 $\angle \hat{H}(\rho_{k'})$. 請注意, 我們只需要隨便選擇其中的一個不確定因子即可, 然後利用式子 (57) (59) 我們可以把 $\angle \Delta \hat{H}_{k'}$ 計算出來. 接著 $\angle \hat{H}(\rho_{k'+1})$ 便可以利用 (60) 來做計算. 而這些計算出來的值都跟 $\angle \hat{H}(\rho_{k'})$ 一樣有著同樣的相位特性. 這樣的步驟 我們可以一直進行下去, 直到所選的聲調都計算完畢. 明確一點來說, 若我們選擇了一群相鄰連續的聲調, $k', \dots, k' + m$, 其中 m 是某個正整數且 $k' < k' + m < M$. 那麼我們將演算步驟詳細列出如下 :

1. 先計算 $\angle \hat{H}(\rho_{k'}) = \frac{\angle \hat{H}^J(\rho_{k'})}{J} + \frac{2\pi n}{J}$ 值，並且只隨意選取其中的一個 n 即可, $n \in [0, J - 1]$.
2. 用式子 (57) (59) 來計算 $\angle \Delta \hat{H}_{k'}$ 值.
3. 利用式子 (60) 來計算 $\angle \hat{H}(\rho_{k'+1})$ 值.
4. 重複2到3直到所有的聲調的相位都計算完畢, 得到 $\angle \hat{H}(\rho_{k'+2}), \dots, \angle \hat{H}(\rho_{k'+m})$.

從2中我們可以正確的計算的 $\angle \Delta \hat{H}_k$ 的值, 其中 $k \in [k', k' + m - 1]$, 原因是因為我們在選聲調的時候, 所選擇的聲調具有大的增益響應, 因此能利用式子 (59) 來計算, 否則可能會出錯. 而 $\angle \hat{H}(\rho_{k'}), \dots, \angle \hat{H}(\rho_{k'+m})$ 這些相對 $\hat{H}(\rho_{k'})$ 所計算出來的值都跟它有著同樣的相位特性, 即它們整體而言只有一個相位不確定因子.

在正確計算完這些相位值之後, 我們便利用式子 (66) 計算出對應 $\hat{H}(\rho_{k'}), \dots, \hat{H}(\rho_{k'+m})$ 的增益響應, $|\hat{H}(\rho_{k'})|, \dots, |\hat{H}(\rho_{k'+m})|$, 然後將這些值與已計算好的相位響應合併而得到所需要的頻率參數, 如下所示:

$$\hat{H}(\rho_k) = |\hat{H}(\rho_k)| \cdot e^{\angle \hat{H}(\rho_k)} \quad k \in [k', k' + m] \quad (67)$$

Step 4. 最小平方 (Least Square) 計算

從式子 (67) 得知我們可以使用式子 (13) 來計算出估測 \mathbf{h} :

$$\begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \end{bmatrix}_{m+1} = \sqrt{MW} \hat{\mathbf{h}} \quad (68)$$

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{1}{\sqrt{M}}(W^H W)^{-1} W^H \begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \end{bmatrix}_{m+1} \quad (69)$$

其中 $W \triangleq F(k' : k' + m, 1 : L + 1)$ 是從離散傅立葉轉換矩陣切割出來的小矩陣，有著 F 的第 $k', \dots, k' + m$ 的列以及前面的第 $L + 1$ 個行。式子中斜體字是表示經由最小平方 計算求得的值。請注意一點，爲了要能使最小平方演算法可以執行，我們需要 $(W^H W)$ 這個矩陣是滿秩矩陣。即是說， W 這個矩陣的列數目必須要大於或等於它的行 數目，或表示爲 $m \geq L$ 。那麼我們便可以由下面的式子來求得 $\hat{\mathbf{h}}$

$$\hat{\mathbf{h}} = \sqrt{M} V \hat{\mathbf{h}} \quad (70)$$

由上式求得的 $\hat{\mathbf{h}}$ 還有一個整體的相位不確定因子有待 試驗聲調來解決。很重要的一點，就是跟 CSC 的方法一樣，當在只有一群相鄰連續的聲調時，若 $M = 64$ 則我們需要大約 40 個聲調來做計算，如次才能得到較準確的估測值 $\hat{\mathbf{h}}$ 。這個問題有時候可能會非法麻煩，如同圖 3 的 FIR 通道所示。圖中的 FIR 通道由於有太多的零點靠近單位圓，因此以一群相鄰連續的聲調的方法來選則 約 40 個聲調會有困難。

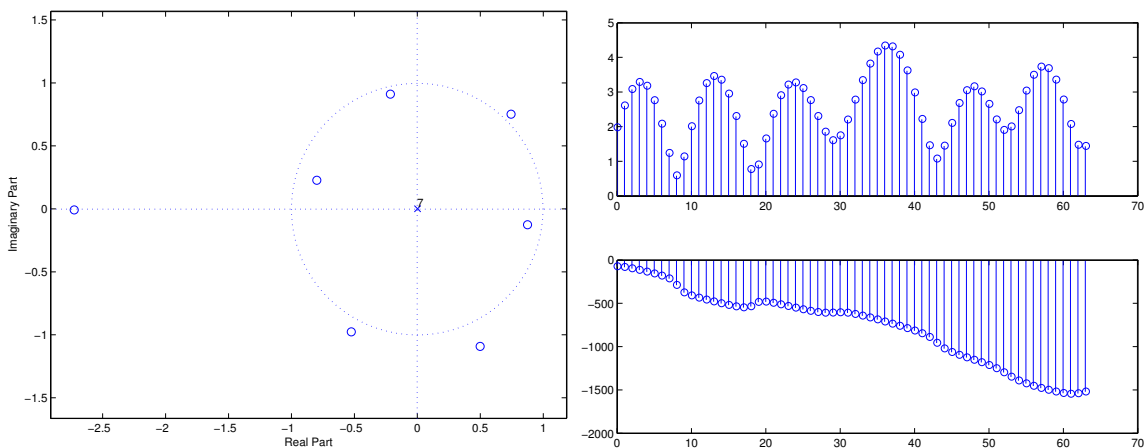


圖 3: 一個 FIR 系統的極零點與頻率響應圖。圖中增益響應圖的快速變化是由於位於單位圓附近的零點過多所造成。 $M=64$ 。

4.5.4 兩群相鄰連續的聲調或是多群的問題

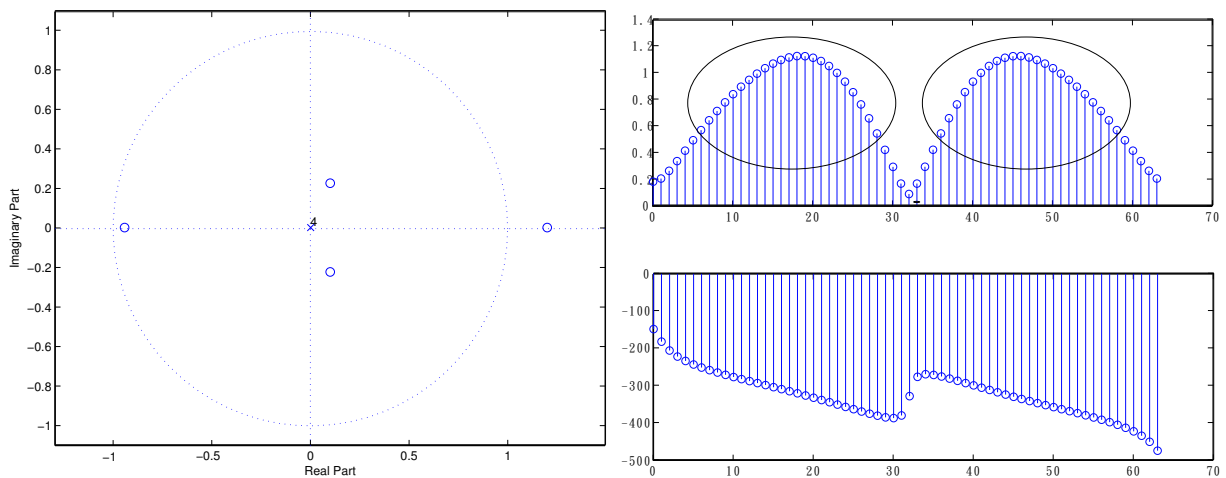


圖 4: FIR通道極零點與頻率響應圖, 此圖為一個說明用的例子. $L = 4$ and $M = 64$.

假設我們有一 FIR 通道如圖 3, 我們選點則會有困難. 為了解決這些問題, 首先我們先來考慮兩群相鄰連續的聲調, 情況就像圖 4 一樣. 我們所討論的情況都是 $M = 64$. 假設我們想要只選擇一群相鄰連續的聲調來做計算, 那恐怕不可能找得到 40 個聲調, 若是只利用圖中其中的一小群聲調來做計算, 則由於點數不夠, 以至於式子 (68) 或 (69) 的 W 矩陣條件 (condition) 變小而算出的估測可能會非常的不準. 以下我們利用一方法將兩群聲調做合併.

考慮如圖 4 的情況, 首先我們對第一群的聲調做計算, 計算方法與步驟完全與 4.5.3 的討論一樣. 然後再把第二群的聲調也做同樣的運算後, 將第二群 (其實任何一群皆可) 所算出來的頻域向量, 補上所有可能的相位不確定因子 (當 $J = 2$ 時為 $\{1, -1\}$, 當 $J = 4$ 時為 $\{1, -1, i, -i\}$), 再來跟第一群算出

來的結果合併成一個較長, 且有 J 種可能性的直向量, 如下面式子所表示 :

$$\begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \\ \hat{H}(\rho_{l'}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{l'+n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \\ -\hat{H}(\rho_{l'}) \\ \vdots \\ -\hat{H}(\rho_{l'+n}) \end{bmatrix} \text{ for } J = 2 \text{ and} \quad (71)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \\ i \cdot \hat{H}(\rho_{l'}) \\ \vdots \\ i \cdot \hat{H}(\rho_{l'+n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \\ -\hat{H}(\rho_{l'}) \\ \vdots \\ -\hat{H}(\rho_{l'+n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \\ -i \cdot \hat{H}(\rho_{l'}) \\ \vdots \\ -i \cdot \hat{H}(\rho_{l'+n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \\ \hat{H}(\rho_{l'}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{l'+n}) \end{bmatrix} \text{ for } J = 4 \quad (72)$$

其中 $k', \dots, k' + m$ 是第一群的聲調而 $l', \dots, l' + n$ 是第二群的聲調. 各位可以發現到, 以上的式子與 CSC 所討論的方法有著一些的不同. 這是由於我們所提出的方法只有 J^{g-1} 可能的直向量然而 CSC 的方法確有 J^g 個, 其中 g 為群的數目. 如此, 以這樣合併兩群聲調的方法便可以增加矩陣 W 的大小, 也就可以增加其條件. 那麼藉由式子 (68) (70), 並且用這個經過修改過後的 W 矩陣, $W = F((k' : k' + m) \& (l' : l' + n), 1 : L + 1)$, 我們便可以計算出 J 個相對應的通道估測. $\hat{\mathbf{h}}_1, \dots, \hat{\mathbf{h}}_J$, 然而其中只有一個是正確的. 要從這 J 個當中找到正確的估測, 我們使用以下與 [1] 不同的方法來計算 :

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{h}}_i} \|\hat{\mathbf{h}}^J - \hat{\mathbf{h}}_i^J\| \quad (73)$$

其中

$$\hat{\mathbf{h}}^J \triangleq \begin{bmatrix} \hat{H}^J(\rho_0) \\ \vdots \\ \hat{H}^J(\rho_{M-1}) \end{bmatrix} \quad (74)$$

是從式子 (65) 求得且 $\hat{\mathbf{h}}_i^J$ 也是由跟式子 (74) 同樣的方法來計算出來。這樣由式子 (73) 所求得的正確估測 $\hat{\mathbf{h}}$ 還是有一個最後整體的相位不確定 因子待試驗聲調來解決。若是遇到多個群數 (三群以上) 的問題時, 我們還是依照以上的方法將聲調群合併, 而得到 J^{g-1} 個可能的 $\hat{\mathbf{h}}$ 。最後正確的估測還是由式子 (73) 來決定, 但所得到的 $\hat{\mathbf{h}}$ 共有 J 個, 任何一個皆可做為正確的正確的盲道估測。

4.5.5 藉由選擇一群非相鄰連續的聲調來化減計算量

我們其實可以用非連續的聲調群來縮小運算量。原因如下, 我們知道當 FIR 的增益響應大的時候, 其相對應的相位變化會比較緩慢。我們發現這種特性, 在最大增益的聲調上面, 其相位的變化更是緩慢, 因此我們有了以下的想法。我們選擇了以下的聲調: $k' + p, k' + 2p, \dots, k' + qp$, 其中 p 以及 q 是正整數且 $k' < k' + qp < M$ 。我們以 $p = 2$ 為例來說明。如果我們所選擇的這些聲調有著最大的增益響應時, 我們可以預期到它們所對應的相位變化會是相當緩慢的。因此可能相隔數個點之間聲調的相位變化也是緩慢的。因此, 在相鄰數個點之間聲調的相位響應若變化也是緩慢的情況下, 式子 (59) 便仍然成立。我們即可以上面所討論的方法來計算通道的估測, 並能得到與式子 (68) 和 (69) 相同的結果, 只是伴隨的 W 矩陣又比原來對應式子 (71) 或 (72) 的小一些。這樣的好處在於, 若是以這種措開的方式來選擇聲調, 那麼聲調的數目約只需原來全選的一半, 但是 W 矩陣的條件卻能維持良好, 其原因是因為離散傅立葉轉換矩陣 F 的特性使然。這樣就可以有準確的估測值, 且計算量變小。這裡的 p 參數可以被增加, 但要視通道的特性及 SNR 來做決定。因此這種聲調選取的概念是可行的。

我們來舉個例子, 假設我們有兩群相鄰連續的聲調, 且此時 $p = 2$, 我們可以依照上面的討論來得

到 與式 (71) 和 (72) 相似的數學式, 列出如下 :

$$\begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \hat{H}(\rho_{k'+2}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \\ \hat{H}(\rho_{l'}) \\ \hat{H}(\rho_{l'+2}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{l'+n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \hat{H}(\rho_{k'+2}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \\ -\hat{H}(\rho_{l'}) \\ -\hat{H}(\rho_{l'+2}) \\ \vdots \\ -\hat{H}(\rho_{l'+n}) \end{bmatrix} \text{ for } J = 2 \text{ and} \quad (75)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \hat{H}(\rho_{k'+2}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \\ i \cdot \hat{H}(\rho_{l'}) \\ i \cdot \hat{H}(\rho_{l'+2}) \\ \vdots \\ i \cdot \hat{H}(\rho_{l'+n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \hat{H}(\rho_{k'+2}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \\ -\hat{H}(\rho_{l'}) \\ -\hat{H}(\rho_{l'+2}) \\ \vdots \\ -\hat{H}(\rho_{l'+n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \hat{H}(\rho_{k'+2}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \\ -i \cdot \hat{H}(\rho_{l'}) \\ -i \cdot \hat{H}(\rho_{l'+2}) \\ \vdots \\ -i \cdot \hat{H}(\rho_{l'+n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}(\rho_{k'}) \\ \hat{H}(\rho_{k'+2}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{k'+m}) \\ \hat{H}(\rho_{l'}) \\ \hat{H}(\rho_{l'+2}) \\ \vdots \\ \hat{H}(\rho_{l'+n}) \end{bmatrix} \text{ for } J = 4 \quad (76)$$

其中 m 和 n 假設為偶數. 有了這個選取非相鄰聲調的概念, 我們可以發現所需要的聲調數目大約是全部選取的一半, 而 W 矩陣尺寸不但可以縮小, 其條件仍然可以維持良好. 接著藉由式 (75) 和 (76) 我們可以求得與式子 (68) 和 (69) 相似的結果, 進而求得通道估測.

4.5.6 平均方法

我們可以藉由修改4.5.5 來更進一步的來縮小運算量。考慮我們有兩群相鄰連續的聲調，有著以下聲調的選取方法： $k', k' + 2, \dots, k' + m$ ， $l', l' + 2, \dots, l' + n$ 其中 m 與 n 假設為偶數。我們可以使用下面的方法來算出多個通道估測並加以平均：

聲調選法 1： $k', k' + 2, \dots, k' + m$ ， $l', l' + 2, \dots, l' + n \implies$ 求 $\hat{\mathbf{h}}_1$

聲調選法 2： $k', k' + 2, \dots, k' + m$ ， $l' + 1, l' + 3, \dots, l' + n + 1 \implies$ 求 $\hat{\mathbf{h}}_2$

聲調選法 3： $k' + 1, k' + 3, \dots, k' + m + 1$ ， $l', l' + 2, \dots, l' + n \implies$ 求 $\hat{\mathbf{h}}_3$

⋮

我們能有以上所描述的選擇方式，其實很明顯的是由於我們所選擇使用的聲調是”非相鄰”的，因此我們可以将聲調的位置措開。而且很直覺的可以發現，當 p 數值變大時，我們可以有更多的選擇來做平均。因此上面這樣的選點模式，我們把每一個對應的選取模式，用先前4.5.5 所介紹的方法來找出其對應的通道估測。然後要注意的是，所計算出來的所有對應的通道估測兩兩之間仍有著一個相位不確定的因子待修正，因此在平均之前我們必需要做一些相位修正。我們把所有的估測都相對於其中的一個（任何一個皆可）估測做相位的修正，讓它們全部都回到一致的相位狀態。然後我們即可以利用下面的數學式來找出它們的平均值以增加估測準確度：

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{1}{z} \sum_{i=1}^z \hat{\mathbf{h}}_i \quad (77)$$

其中的 z 是代表所有通道估測的數目。請要注意的是，式子 (77) 所平均算出的通道估測 $\hat{\mathbf{h}}$ 仍然有著一個整體的相位不確定因子有待試驗聲調來解決。由式子 (77) 所平均計算出來的通道估測的確能擁有較準確的估測值，這個特性可以由圖 5 及圖 6 來觀察得知：

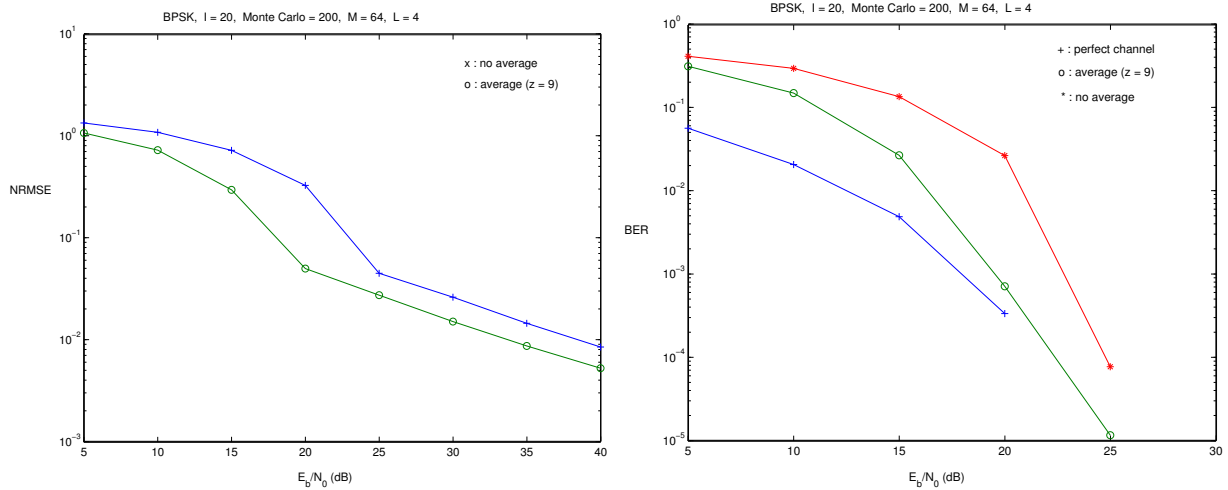


圖 5: 使用平均方法將通道估測誤差及相對應的BER 降低. $z = 9$. 調變方法為 BPSK.

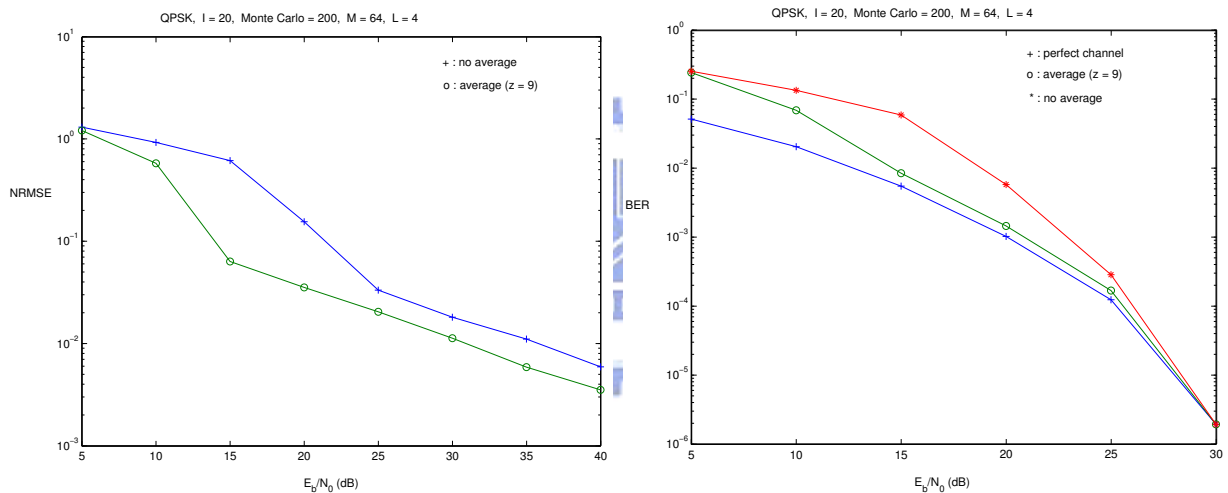


圖 6: 使用平均方法將通道估測誤差及相對應的BER 降低. $z = 9$. 調變方法為 QPSK.

以上所介紹的模擬結果當中, 我們通道估測的誤差準則是用正規方均根誤差 (NRMSE, Normalized Root Mean Square Error), 這個準則我們會在模擬章節做詳細的介紹. 此外, 用的 FIR 通道為 $\{0.459 + 0.265i, -0.2078 - 0.12i, -0.4677 - 0.27i, 0.0953 + 0.055i, -0.0312 - 0.018i\}$. 此外我們還提供了 BPSK 與 QPSK 的通道估測誤差以及相對應的位元錯誤率模擬結果. 由模擬圖我們可以發現利用平均的簡單概念的確能增加估測準度. 然而它也有個很明顯的缺點, 就是利用平均的概念來做通道估測, 4.5.5 所介紹的計算這裡就要計算 z 次, 因此提高了運算量.

5. 模擬與比較

5.1 估測與系統效能模擬

在這個章節我們提供了一些模擬的結果. 我們使用了三個不同的 FIR 通道, 介紹如下 :

$$\mathbf{FIR\ 1} : 2.3977 - 1.0074i, 2.0871 - 1.0725i, -1.6741 + 2.3361i, -1.0562 - 0.1019i \quad (78)$$

其中此 FIR 通道的階數為 $L = 3(4 \text{ taps})$.

$$\mathbf{FIR\ 2}[5] : 0.459 + 0.265i, -0.2078 - 0.12i, -0.4677 - 0.27i, 0.0953 + 0.055i, -0.0312 - 0.018i \quad (79)$$

其中此 FIR 通道的階數為 $L = 4(5 \text{ taps})$.

$$\mathbf{FIR\ 3} : -0.9191 + 0.7843i, 1.6084 - 0.3839i, 0.0369 - 0.1681i, -0.7509 + 0.6574i \quad (80)$$

, 1.4452 + 0.1745i

其中此 FIR 通道的階數為 $L = 4(5 \text{ taps})$.

我們定義所使用的通道估測誤差準則 : 正規方均根誤差 (NRMSE, Normalized Root Mean Square Error)[5] :

$$\text{NRMSE} = \frac{1}{\|\mathbf{h}\|_2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \|\hat{\mathbf{h}}(i) - \mathbf{h}\|_2^2} \quad (81)$$

其中 $\hat{\mathbf{h}}(i)$ 代表的是第 i 次實驗所得到的估測值, 而 N 則是代表蒙地卡羅的次數. 而上式當中的 $\|\mathbf{h}\|_2$ 是代表真正通道的模數 (norm) 值.

我們會提供這三個 FIR 通道的 BPSK 以及 QPSK 的模擬結果, 其中 PSK 即由式子 (27) 所定義. 我們會利用以下三種不同的方法來做模擬, 並且加以比較: MMD-PD, CSC 和比率 (Ratio). 此外我們還會做一些評論與探討.

首先我們先來瞭解一下這三個 FIR 通道真正的頻率響應的特性為何:

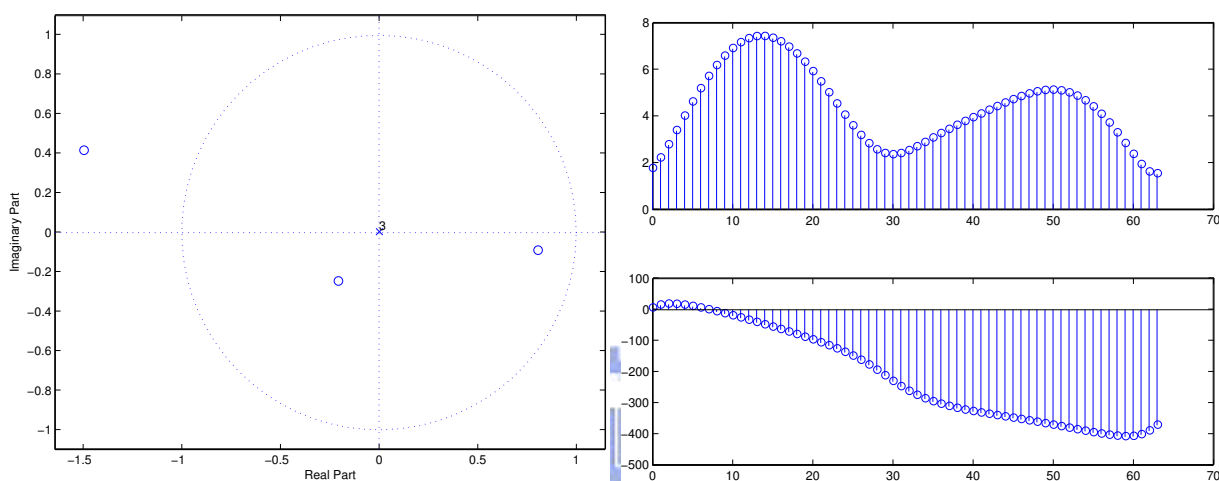


圖 7: FIR 1 通道的極零點與頻率響應圖. $L = 3, M = 64$.

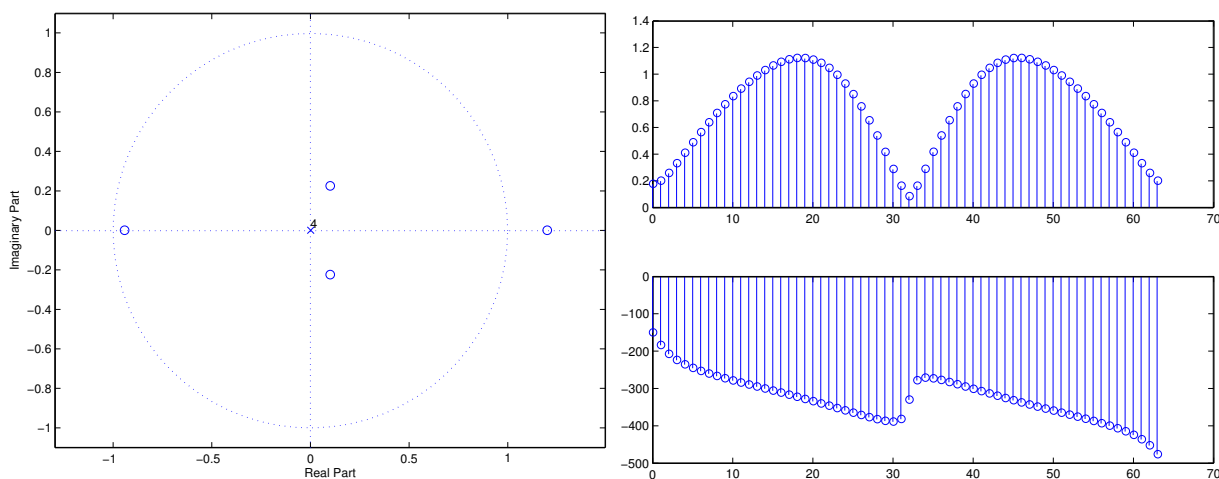


圖 8: FIR 2 通道的極零點與頻率響應圖. $L = 4, M = 64$.

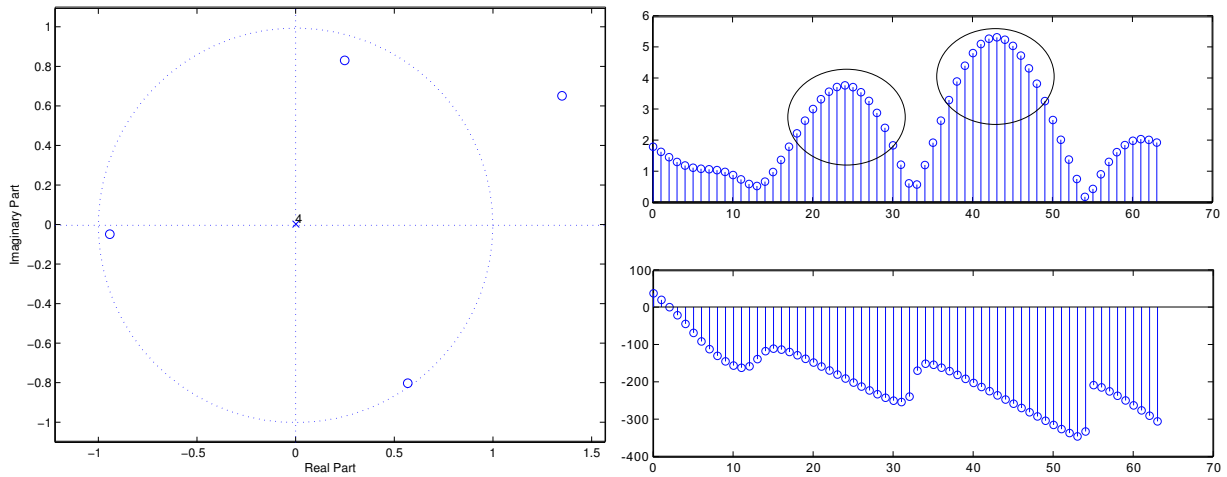


圖 9: **FIR 3** 通道的極零點與頻率響應圖. $L = 4, M = 64$.

從以上的通道響應圖我們可以得知, **FIR 1** 的相位響應變化平緩而**FIR 3**的相位變化相當快速. 因此我們可以預期, 所提出的方法在**FIR 1**將會有不錯的效能, 而在**FIR 3**效應可能會變差.

接著我們便來對這三個 FIR 通道做一系列的模擬, 模擬圖如下:

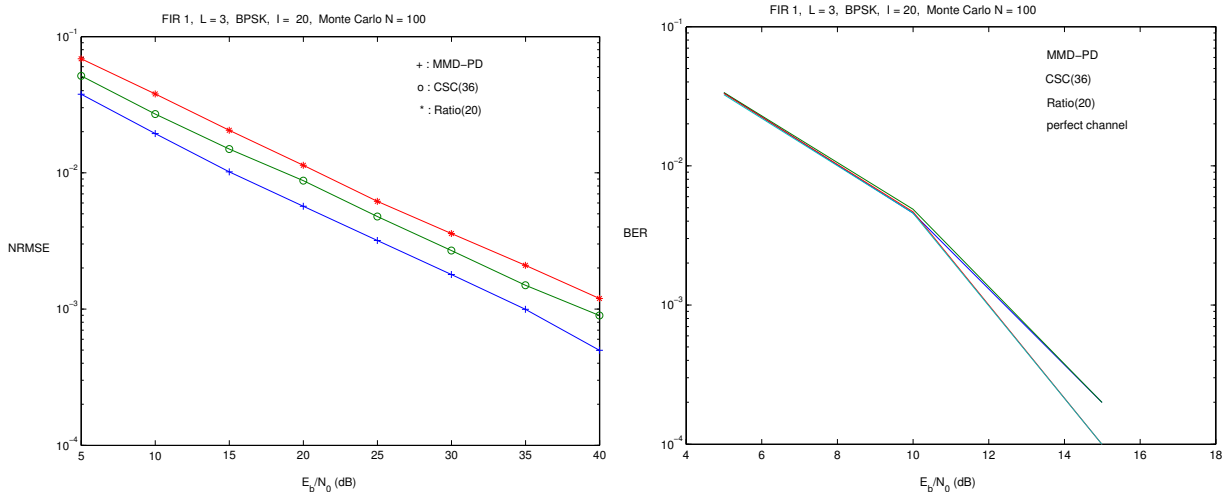


圖 10: **FIR 1** 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖. $L = 3, M = 64$, BPSK.

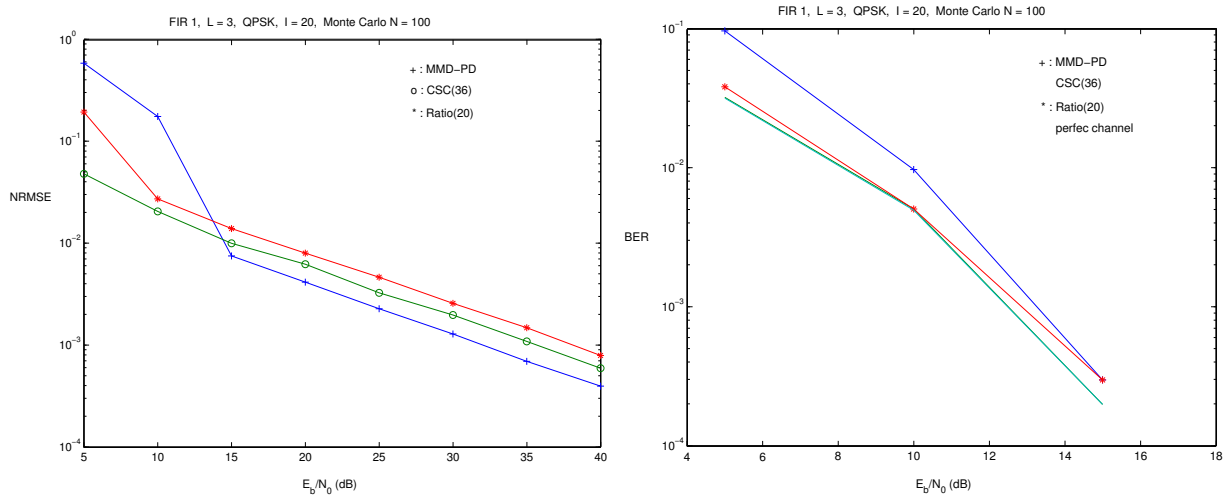


圖 11: **FIR 1** 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖. $L = 3, M = 64, \text{QPSK}$.

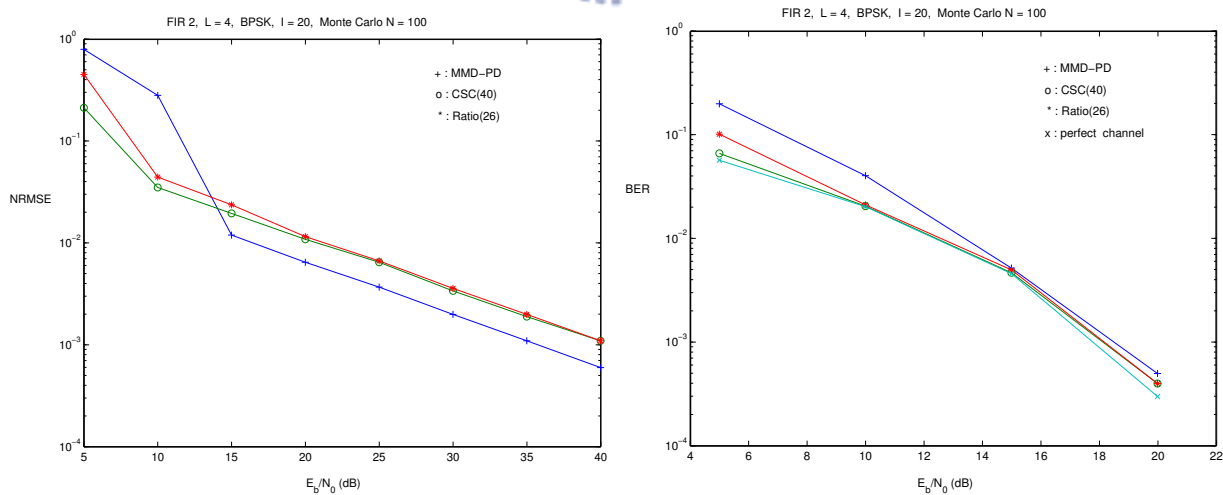


圖 12: **FIR 2** 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖. $L = 4, M = 64, \text{BPSK}$.

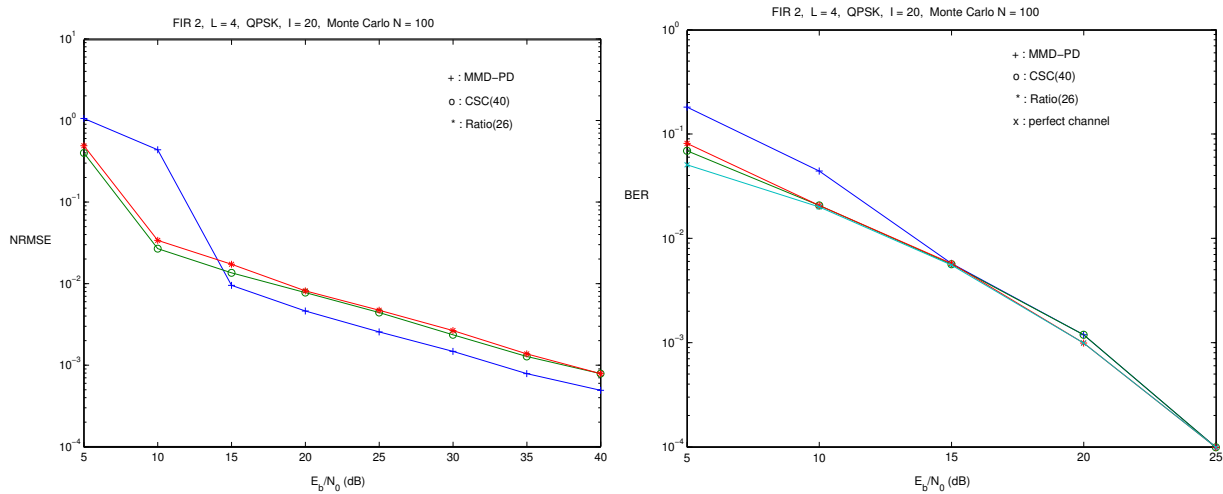


圖 13: **FIR 2** 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖. $L = 4$, $M = 64$, QPSK.

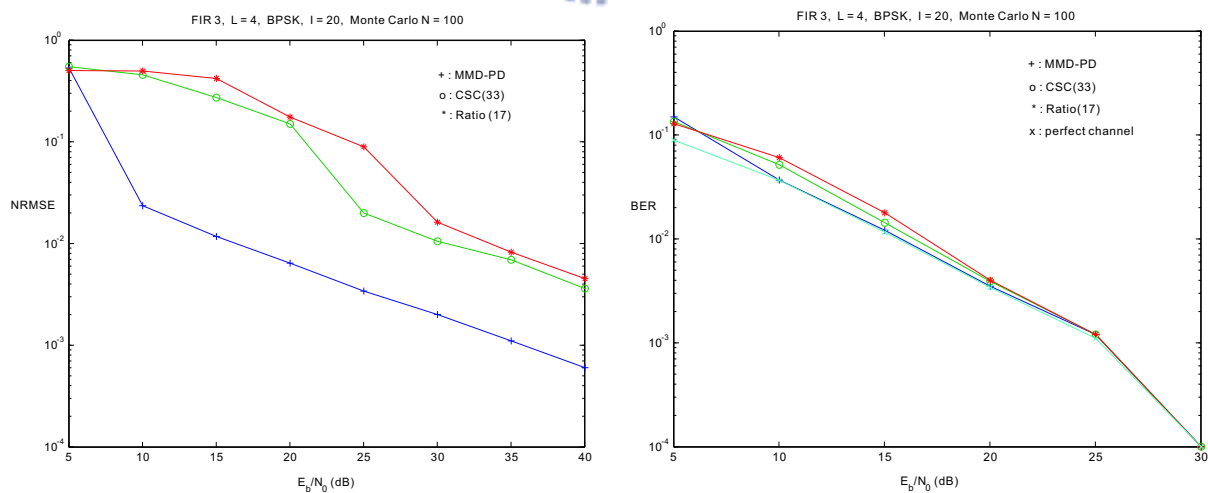


圖 14: **FIR 3** 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖. $L = 4$, $M = 64$, BPSK.

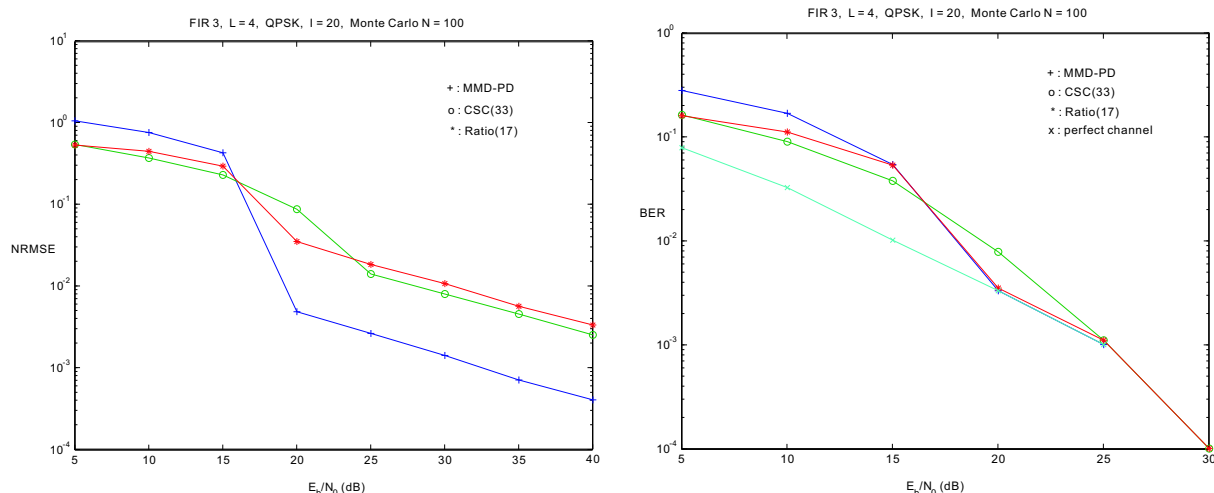



圖 15: **FIR 3** 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖. $L = 4$, $M = 64$, QPSK.

從以上的模擬圖當中，我們可以發現一個有趣的問題。就是系統的誤差會隨著 E_b/N_0 的增加而減少。這個現象似乎很符合直覺。但是若回到之前所討論的結果來看，根據式子 (32) 或 (33) 我們可以發現通道估測的問題是與雜訊無關的。因為即使在式子 (30) 當中有雜訊 $n(k)$ 存在，它的效應依然會因為循迴 (circular) 的假設特性而消失。為了解釋這個現象，請特別意的是，我們所用的雜訊模擬實際上只是使用一般的平均值為零的複數高斯雜訊，並不是滿足循迴高斯特性的高斯雜訊。由於輸入訊號 $x(k)$ 是 (機會均等地) 從式子 (27) 所定義的 PSK 星雲圖當中選取出來的，因此所有的訊號的功率必定都是 1。那麼很明顯的來看，假如我們將 E_b/N_0 增加的話，相對應的雜訊功率便會比訊號功率小，而且是小於 1。所以如果我們採用式子 (30) 的通道傳輸模型的話，當 E_b/N_0 增加時，由於雜訊的功率小於 1，而小於 1 的數的高階次方必定更小，所以式子 (32) 的高階雜訊項便會隨著 E_b/N_0 增大而快速變小。所以我們以上的系統效能模擬圖都是隨著 E_b/N_0 增大而呈現出誤差變小的現象，即是由於此原因所致，且這種現象也相當的符合直覺。

我們現在來詳細地解釋以上的模擬圖。在圖 10 及 11 中，這些是在 **FIR 1** 通道所做的模擬。CSC 後面所寫的數字是代表在 $M = 64$ 的情況下所使用的聲調的數目，所以對 CSC 來說我們用了 36 個聲調來做計算，而對比率來說，我們用了 20 個聲調。在這裡我們要提出一點的是，在文章 [3] 當中，作

者提出一個觀念，即在每一群相鄰連續的聲調而言，所使用的聲調的數目越多，則估測值便會越準。藉由這個觀點，我們於是在用 CSC 的方法當中，用了全部可以用的點來作計算。請注意的是，在圖 10 及 11 中我們是使用了兩群相鄰連續的聲調來作 36 點的 CSC(36) 的估測方法，且對每一群聲調來說，我們是各用了 18 點。至於對 Ratio(20) 的方法來說，我們是在每個聲調群中各使用了 10 點非相鄰連續的點來計算，其中點與點的距離為 $p = 2$ 。

從圖 10 及 11 我們可以發現對 BPSK 以及 QPSK 而言，儘管我們所提出的方法在 NRMSE 的效能上比 MMD-PD 或 CSC 要來的稍微差一些，但是在位元錯誤率的效能來說，這三個方法的結果幾乎可以說是差不多，甚至在位元錯誤率的效能上可以如圖所顯示，能逼近真正的通道參數效能。此外還有一點要說明的是，我們在 MMD 的過程中只用了 $L + 1$ 個點數來做計算，這是根據 [1] 所提出的方法。不然若用更多的點來計算，在 $J = 4$ 的時後運算量會相當的驚人。



考慮圖 12 及 13，這是在 FIR 2 的通道所做的模擬，這裡我們還是使用兩群來做分析。對 CSC(40) 來說，我們是各用了 20 點來計算，而對 Ratio(26) 來說，我們則是各使用了不連續的 13 點來計算，且其中的間隔為 $p = 2$ 。而對於 MMD 的計算，我們還是只使用了 $L + 1$ 個點來分析。從這張圖來看，我們可以很明顯的得到類似圖 10 及 11 所擁有的特性，即兩者的結論是相同的。

在圖 14 及 15 我們則是對 FIR 3 通道做模擬。對 CSC(33) 來說，一群是用 16 點，另一群則是用 17 點。對 Ratio(17) 來說，一群用的是一群 8 個不連續的點，一群則是 9 個不連續的點，所用的間隔也是 $p = 2$ 。而 MMD 我們還是仍然是用 $L + 1$ 個點做計算。但是從這兩張圖來看，其結果似乎與 **FIR 1** 與 **2** 的結果不太一樣。請注意，從圖 9 來看，其實我們在 **FIR 3** 上是使用圓圈處兩群相鄰連續的聲調來做計算，但是其結果顯示在 NRMSE 效能方面 MMD-PD 的方法比其餘的兩者要好很多。其原因即是在於 **FIR 3** 本身相位變動過於快速所致。因此我們也可以發現 CSC 及比率兩方法對於通道較敏感，而 MMD-PD 的方法有著較高的強健度 (robustness)。

接下來我們提供了更多的模擬圖，並藉由以下的圖來做一些分析：

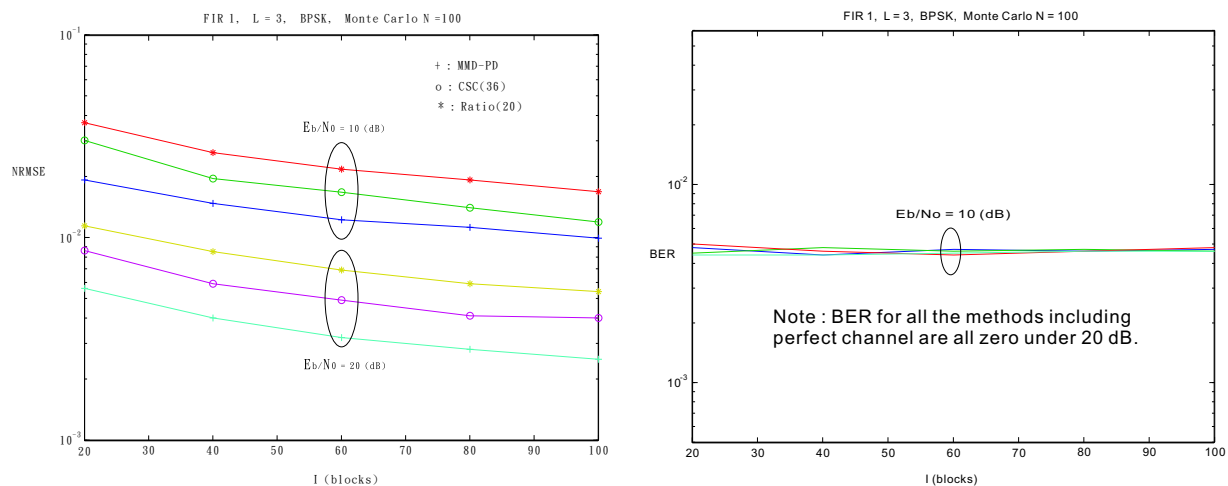


圖 16: **FIR 1** 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖，對應不同的 I 。 $L = 3$, $M = 64$, BPSK.

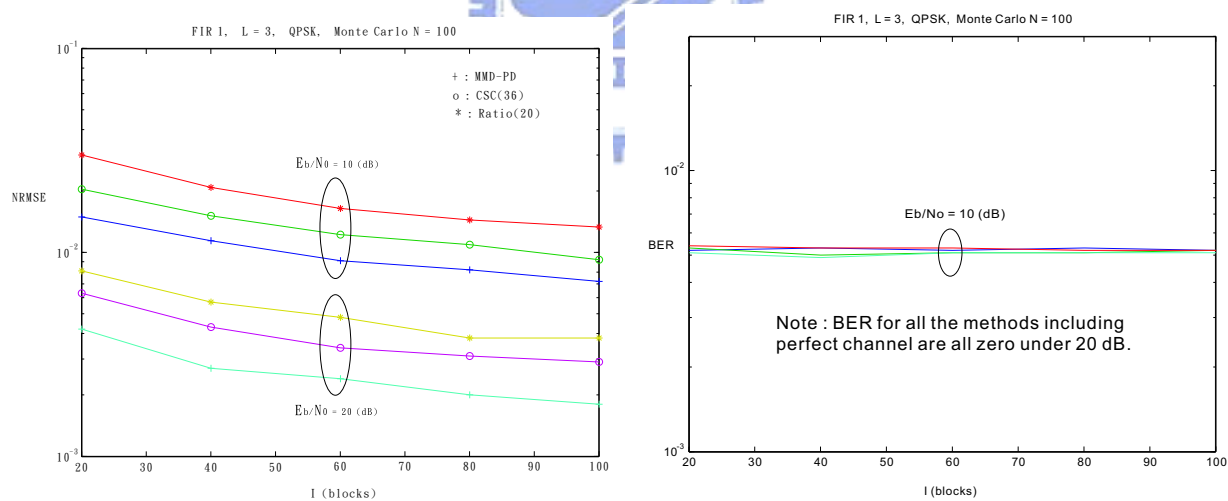


圖 17: **FIR 1** 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖，對應不同的 I 。 $L = 3$, $M = 64$, QPSK.

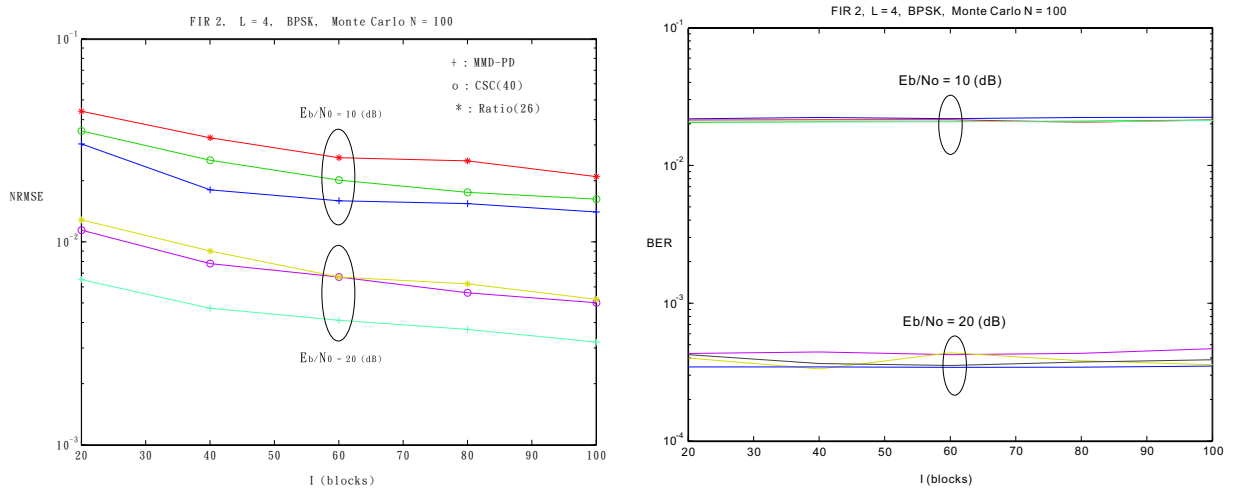


圖 18: **FIR 2** 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖, 對應不同的 I . $L = 4$, $M = 64$, BPSK.

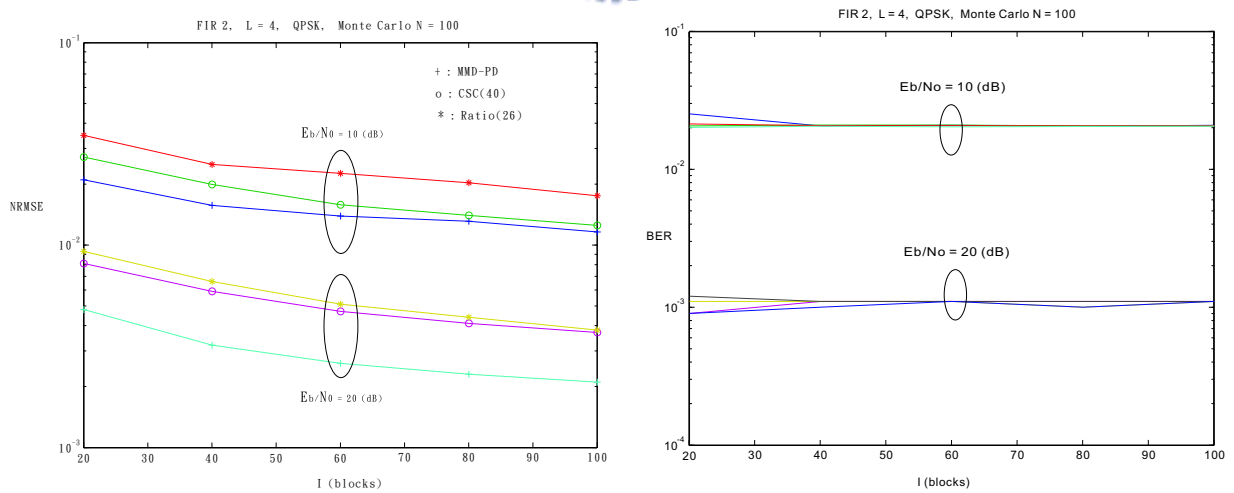


圖 19: **FIR 2** 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖, 對應不同的 I . $L = 4$, $M = 64$, QPSK.

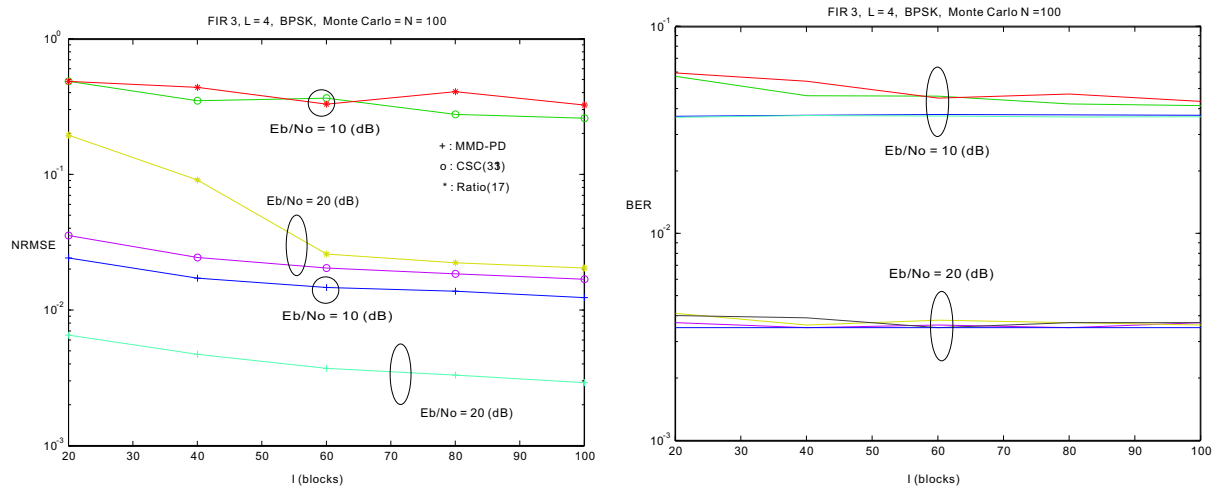


圖 20: **FIR 3** 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖, 對應不同的 I . $L = 4$, $M = 64$, BPSK.

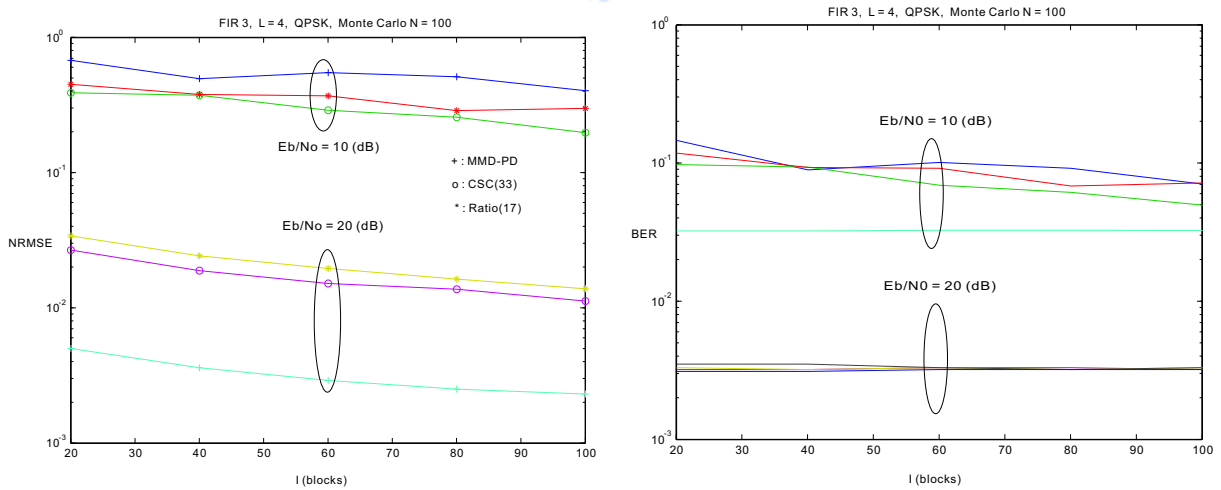


圖 21: **FIR 3** 的 NRMSE 與相對應的 BER 效能模擬圖, 對應不同的 I . $L = 4$, $M = 64$, QPSK.

我們來詳細的解說上面的模擬圖。考慮圖 16 及 17, 我們在 **FIR 1** 的通道提供了三種對應的方法來作模擬, 並且我們提供了分別在 BPSK 與 QPSK 的調變技巧上相對應的 NRMSE 以及位元錯誤率的系統效能模擬, 而且我們分別在 E_b/N_0 等於 10 與 20(dB) 分別做了同樣的模擬分析。而要注意的是在 20 dB 之下的位元錯誤率全為零。在這些模擬圖中, 我們要注意的是, 系統的效能是隨著向量訊號數目 I 的變化而變化, 不再是之前的 E_b/N_0 這個參數。因此從圖中我們可以發現, 系統的效能並不會隨著 I 的數目增加而有顯著的增加, 反而隨著 E_b/N_0 的增加而輕易的將效能提昇。而我們還可以注意到一點, 那就是所對應的位元錯誤率模擬圖, 對三種不同的方法來說也是幾乎相近, 不論是 BPSK 或 QPSK。對於圖 18 及 19 我們也有相似的結果。但是在圖 20 及 21 中, 我們可以發現其在 **FIR 3** 的 NRMSE 效能亦與前兩者有一些不同。MMD-PD 所對應的 NRMSE 效能比 CSC 及比率要好。其原因與之前所討論的結果一樣。

從以上的分析來看, 我們所提出的方法雖然因為通道相位的快速變化而在 NRMSE 的效能上比 MMD-P 或 CSC 要來的差一些, 但是其位元錯誤率的效能可以說是相當接近, 甚至能逼近真正的通道參數。由於通訊的主要目的是具有低的錯誤率, 因此所提出的方法仍然是可行的。然而, 我們所提出的方法還有一項從以上眾多的模擬圖所看不太出來的優點, 亦即是先前早已提到的運算量的問題。我們下面即來探討三種不同的方法的運算量比較。

5.2 計算量比較

在這一小節當中我們來對三種不同的方法的運算量來做一些詳細的分析。但是在這之前, 我們先來做一些預備動作。首先我們根據 [6] 的方法, 將一個運算量 (flop) 定義為單一複數的相加減或乘除。然後我們根據 [7] 的方法, 將一個 n 乘 n 的可逆方正矩陣, 其逆轉換所需要的運算量定義約為 n^3 。那麼根據以上種種的分析, 我們不難將這三個方法的運算量式子以一些系統模擬參數來表示。然而我們在這裡不提供這些式子。因為這些式子過於繁雜且冗長, 從這些式子我們無法得到有用的訊息。我們在

此便換另一種定量的方法來分析運算量。如下面提供的表格所示。如表2, 假設我們令 MMD-PD 這個方法所需要的運算量以一個百分點的計量方式來看, 若 MMD-PD 需要的運算量需要100%的話, 其在 BPSK 所相對應的 CSC(36) 只需要它的 76.08%, 而所提出的 Ratio(20) 方法更是只需要其全部運算量的 54.5%。此外, 對於 QPSK 的系統模擬, 我們也提供了這三種不同的方法的運算量比較, 皆以百分點為計量。我們因此可以很明顯的發現, CSC 這種方法比 MMD-PD 所需要的運算量要來的少許多, 然而我們所提出的方法, 有著更小的運算量, 且幾乎是 CSC 的一半。而從所提供的另外兩張表格來看, 同樣的結果可以很明顯的被發現, 所提出的方法不管是在這三個不同的 FIR 通道或是不同調變的技巧, 其運算量皆是最小的一個。原因其實很簡單, 由於 MMD-PD 需要的運算量皆由計算 J^{L+1} 所對應的所有可能的估測所主導, 然而對於 CSC 來說, 其計算量只由 J^g 的因子所主導, 所以 CSC 很明顯的有著小的運算量, 且不受通道階數 L 的影響。而對比率來說, 其主要的運算量, 經過一些演算法的修改, 只需要 J^{g-1} 相對應的計算量, 並且配合著選擇非相鄰連續聲調的技巧, 更可以將運算量降低。這種現象可以從表格中得知在 $J = 4$ 的時候運算量的差別有著非常大的區別。

表 2. 三種不同的方法在**FIR 1**通道上計算量的比較

$M = 64, I = 20, L = 3$	MMD-PD	CSC(36)	Ratio(20)
BPSK($J = 2$)	100%	76.08%	54.5%
QPSK($J = 4$)	100%	14.79%	8.67%

表 3. 三種不同的方法在**FIR 2**通道上計算量的比較

$M = 64, I = 20, L = 4$	MMD-PD	CSC(40)	Ratio(26)
BPSK($J = 2$)	100%	67.27%	48.61%
QPSK($J = 4$)	100%	12.81%	7.74%

表 4. 三種不同的方法在**FIR 3**通道上計算量的比較

$M = 64, I = 20, L = 4$	MMD-PD	CSC(33)	Ratio(17)
BPSK($J = 2$)	100%	61.41%	45.52%
QPSK($J = 4$)	100%	11.62%	7.43%

6. 結論

在本篇論文當中，一種以有限字元為基礎的 OFDM 通道估測方法 被提出。並且我們將此方法與其他已被提出的兩種方法做一套有系統的分析與模擬比較。所提出的方法雖然在 NRMSE 的系統效能方面由於通道相位大幅度的變化而比另外兩種方法來得差一些，但其 位元錯誤率的效能皆與另兩者差不多，甚至跟真正的通道參數接近。此外，所提出的方法藉由一些演算法的 修正，進而使所需要的運算量變少，而這也是本篇論文的重心。在這三種不同的估測方法當中，所根據的都是以同樣的概念來做出發，亦即所謂的有限字元的特性，而所估測出來的通 道，皆需由試驗聲調來做最後的相位修正。因此所提出的方法整體而言是可行的，並且可以容易地應用在 較為簡單的通道上，且有著與其他方法差不多的位元錯誤率並且計算量還能更加的減少。

然而所提出的方法仍然有著許多問題要解決。在本篇論文中，我們都假設通道階數 L 已知，但是在真實的問題中，通道階數常常也是個未知的參數。若在通道階數 L 不知道的情況下，我們便需 先做 L 的估測，再做通道的估測。但是對於 L 的估測來說，高估或低估都會造成一些額外的問題 [1]。再來是 **FIR 3** 的問題。我們從上面許多的模擬圖中可以得知，若通道相位變化過於 劇烈，系統效能便會下降許多。最後即是在 **5.6** 當中所使用的參數 p 的問題，它會與通道本身的 特性及工作的 SNR 有關。我們的目標是要選擇適當的 p 值並且能同時滿足下面三個條件：

1. 由於運算量的緣故，所選的聲調要越少越好。
2. 由於矩陣 W 的條件的緣故，所設定的 p 要越大越好。
3. 系統的效能要最加化。

我們有第三個需求，原因是因為若選擇的點數與距離若不適當，系統的效能會很嚴重的下 滑。因此所提出的方法仍然有著許多可待改善及討論之處。

References

- [1] S. Zhou and G. B. Giannakis, "Finite Alphabet Property Based Channel Estimation for OFDM and Related Multicarrier Systems," *Proc. 34th Conf. Information Sciences and Systems(CISS'00)*, Princeton, NJ, March, 2000.
- [2] S. Zhou, G. B. iannakis, and A. Scaglione, "Long Codes for Generalized FH-OFDMA Through Unknown Multipath Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, pp. 721-733, April, 2001.
- [3] T. Petermann, S. Vogeler, K.-D. Kammeyer, D. Boss, "Blind Turbo Channel Estimation in OFDM Receivers," *Signals, Systems and Computers, 2001. Conference Record of the Thirty-Fifth Asilomar Conference*, Volume: 2, Pages:1489 - 1493, November, 2001.
- [4] Leonard J. Cimini, "Analysis and Simulation of a Digital Mobile Channel Using Orthogonal Frequency Division Multiplexing," *IEEE Trans. Commun.*, Vol. Com-33, No. 7, July, 1985.
- [5] A. Chevreuril, P. Loubaton and G. B. Giannakis, "Blind Channel Identification and Equalization using Periodic Modulation Precoders : Performance Analysis," *IEEE Trans. Signal Processing.*, vol. 48, pp. 1570-1586, June, 2000.
- [6] T. P. Krauss and M. D. Zoltowski, "Bilinear Approach to multiuser Second-Order Statistics-based Blind Channel Estimation," *IEEE Trans. Signal Processing.*, vol. 48, pp. 2473-2486, September, 2000.
- [7] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, THOMSON BROOKS/COLE, 1988.
- [8] "IEEE 802.11a" , 1999.

- [9] John G. Proakis, *Digital Communications, Fourth Edition*, New York:McGraw-Hill, 2000.

