

國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

估計特殊目的機構在 premium waterfall 付款機制下的支付風險



Measuring the Payment Risk of SPV under Premium

Waterfall Mechanism



研究生： 劉亮志

指導教授： 戴天時 博士

李漢星 博士

中華民國九十九年六月

估計特殊目的機構在 premium waterfall 付款機制下的支付風險

Measuring the Payment Risk of SPV under Premium Waterfall Mechanism

研究生：劉亮志

Student : Liang-Chih Liu

指導教授：戴天時博士

Advisor : Dr. Tian-Shyr Dai

李漢星博士

Dr. Han-Hsing Lee



A Thesis

Submitted to Graduate Institute of Finance
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Finance

June 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年六月

估計特殊目的機構在 premium waterfall 付款機制下的支付風險

學生：劉亮志

指導教授：戴天時 博士

李漢星 博士

國立交通大學財務金融研究所

中華民國九十九年六月

摘要

在不考慮交易手續費及其他佣金的情況下，給定一風險中立機率模型、報酬給付機制，synthetic CDO 中各級分券的公平報酬皆可求；synthetic CDO 架構中的分券報酬給付，特殊目的機構（簡稱 SPV）根據 premium waterfall 的機制來給，但本文章發現此機制讓 SPV 有現金流收支不均等的問題，SPV 有可能因此而承受鉅額損失。另一方面，若針對分券中的最先損失部位施以期初預先支付分券本金某個比例的現金，以降低之後每個支付日信用價差支付金額的規則，會使對 SPV 不安全的 premium waterfall 機制變得比較安全。最後，重新以對 SPV 絕對安全的 ABS waterfall 機制來進行分券公平信用價差的評價，會發現評價結果低於在 premium waterfall 機制下的結果。

關鍵字：synthetic CDO、特殊目的機構、premium waterfall、ABS waterfall。

Measuring the Payment Risk of SPV under Premium Waterfall Mechanism

Student : Liang-Chih Liu Advisor : Dr. Tian-Shyr Dai

Dr. Han-Hsing Lee

Graduate Institute of Finance

National Chiao Tung University

June 2010

ABSTRACT

Given a risk neutral probability model and a payment mechanism, the fair spreads of all synthetic CDO tranches can be valued. A special purpose vehicle (SPV) in a synthetic CDO structure allocates the cash flow from an asset pool to the investors of tranches according to the payment mechanism called premium waterfall. We find that premium waterfall mechanism may lead to an inequality between cash inflows from the asset pool and cash outflows to all tranches, and a SPV possibly suffers severe losses due to this inequality. On the other hand, setting the rule of paying spreads up front on the first loss piece of tranches will make the unsafe premium waterfall mechanism safer. Finally, the fair spreads of tranches valued under ABS waterfall mechanism, which is absolutely safe for a SPV, are mostly not greater than that valued under premium waterfall mechanism.

KEYWORDS: synthetic CDO; special purpose vehicle; premium waterfall; ABS waterfall

誌謝

留在交大讀書的日子，直至完成這份碩士論文，已有六年的時光，時間真的過得飛快。從資財系到財金所，從對會計學借貸原理、經濟學供需法則懵懵懂懂，到能夠親手導出 Black-Scholes formula，過程回憶起來五味雜陳，但卻也點滴在心頭，而在經歷過許許多多的事之後，自然也不能忘記那些陪我走過的人們。我首先感謝我的父母，在我忙著寫論文而許久沒有回家時給我滿滿的體諒，也謝謝小姑姑在我論文最忙碌的五月上旬，遠從嘉義寄來自家魚塢裡養的鰻魚給我進補，說真的，我從沒吃過那麼好吃的鰻魚！其次，我要謝謝我的指導教授戴天時老師一路細心且不厭其煩的指導、李漢星老師補足我碩論實務上不足的地方，也謝謝過程中一路陪伴的周幼珍老師，還有在課堂上讓我獲益良多的郭家豪老師。最後，我要感謝身邊那群優秀的研究伙伴：敏誠、恩維、政宏、雅雯、彥君、凱旭、竑廷、柏屹、育廷、婷璿、威辰、立軒、昌宏，還有這兩年間一同走過生活上許多酸甜苦辣的朋友：家瑜、吳憲、元辰、偉良、孟柔、盈儀、任萱、淑文、婷怡、嘉恩、才逸、偉倫，當然還有妳，苑琪。

研究的過程是辛苦的，但在得到結果的那一刻卻是無比幸福的，而我卻不知不覺地愛上了這段有著兩個極端情緒的經歷，所以，我選擇繼續走進下一段研究過程。在誌謝的最後，我也要立下目標，期許自己能在未來的博士生涯做出更好的研究，然後帶著這些結果，走向全世界！

劉亮志 謹誌于

國立交通大學財務金融研究所

民國九十九年六月

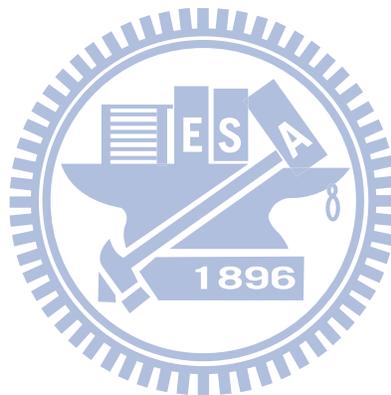
目錄

| | |
|---|-----------|
| 一、 緒論 | 1 |
| 1.1 研究背景..... | 1 |
| 1.2 研究動機與目的..... | 4 |
| 1.3 論文架構與研究流程..... | 7 |
| 二、 文獻探討 | 9 |
| 2.1 Synthetic CDO 的介紹..... | 9 |
| 2.2 Vesicek 的 Large Pool Credit Risk Model 假設..... | 14 |
| 2.3 Reduced-Form Model、Top-Down Model 與 One-Factor Gaussian Copula 靜態模型、Hull and White(2008)動態模型的結合..... | 17 |
| 三、 研究方法 | 21 |
| 3.1 符號定義..... | 21 |
| 3.2 在 premium waterfall 機制下計算 CDO 分券與 CDS 的信用價差..... | 22 |
| 3.3 在 ABS waterfall 機制下計算 CDO 分券的信用價差..... | 25 |
| 3.4 One-Factor Gaussian Copula 靜態模型的架構..... | 28 |
| 3.5 Hull and White(2008)動態模型的架構..... | 30 |
| 3.6 研究動機的概念形成與證明..... | 31 |
| 3.7 研究方法建構..... | 38 |
| 四、 結果分析 | 44 |
| 4.1 資料分組、實驗分群、數值工具與數值設定..... | 44 |
| 4.2 one-factor Gaussian copula 靜態模型的分析結果..... | 48 |
| 4.3 Hull and White 動態模型的分析結果..... | 55 |
| 五、 結論 | 61 |
| 參考文獻 | 63 |
| 附錄 | 64 |

表目錄

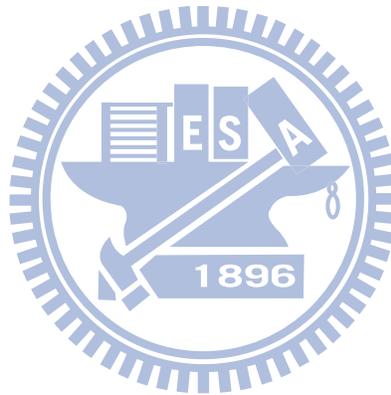
| | | |
|--------|--|----|
| 表 2.1 | 2007 年 1 月 30 日的 CDX.NA.IG 報價..... | 14 |
| 表 2.2 | 2009 年 4 月 3 日的 CDX.NA.IG 報價..... | 14 |
| 表 4.1 | 實驗分群..... | 45 |
| 表 4.2 | 2007 年 1 月 30 日，CDX.NA.IG rule 之下 SPV 總損益分配 - one-factor Gaussian copula 靜態模型..... | 50 |
| 表 4.3 | 2007 年 1 月 30 日，typical rule 之下 SPV 總損益分配 - one-factor Gaussian copula 靜態模型..... | 50 |
| 表 4.4 | 2009 年 4 月 3 日，CDX.NA.IG rule 之下 SPV 總損益分配- one-factor Gaussian copula 靜態模型..... | 51 |
| 表 4.5 | 2009 年 4 月 3 日，typical rule 之下 SPV 總損益分配 - one-factor Gaussian copula 靜態模型..... | 51 |
| 表 4.6 | 2007 年 1 月 30 日，給定 typical rule，在 premium waterfall 下的公平年信用價差 - one-factor Gaussian copula 靜態模型..... | 52 |
| 表 4.7 | 2007 年 1 月 30 日，給定 typical rule，在 ABS waterfall 下的公平年信用價差 - one-factor Gaussian copula 靜態模型..... | 52 |
| 表 4.8 | 2009 年 4 月 3 日，給定 typical rule，在 premium waterfall 下的公平年信用價差 - one-factor Gaussian copula 靜態模型..... | 53 |
| 表 4.9 | 2009 年 4 月 3 日，給定 typical rule，在 ABS waterfall 下的公平年信用價差 - one-factor Gaussian copula 靜態模型..... | 53 |
| 表 4.10 | 2007 年 1 月 30 日，CDX.NA.IG rule 之下 SPV 總損益分配 - Hull and White(2008)動態模型..... | 57 |
| 表 4.11 | 2007 年 1 月 30 日，typical rule 之下 SPV 總損益分配 - Hull and White(2008)動態模型..... | 57 |
| 表 4.12 | 2009 年 4 月 3 日，CDX.NA.IG rule 之下 SPV 總損益分配 - Hull and White(2008)動態模型..... | 58 |
| 表 4.13 | 2009 年 4 月 3 日，typical rule 之下 SPV 總損益分配 - Hull and White(2008)動態模型..... | 58 |
| 表 4.14 | 2007 年 1 月 30 日，給定 typical rule，在 premium waterfall 下的公平年信用價差 - Hull and White(2008)動態模型..... | 59 |
| 表 4.15 | 2007 年 1 月 30 日，給定 typical rule，在 ABS waterfall 下的公平年信用價差 - Hull and White(2008)動態模型..... | 59 |
| 表 4.16 | 2009 年 4 月 3 日，給定 typical rule，在 premium waterfall 下的公平年信用價差 - Hull and White(2008)動態模型..... | 60 |
| 表 4.16 | 2009 年 4 月 3 日，給定 typical rule，在 ABS waterfall 下的公平年信用價差 - Hull and White(2008)動態模型..... | 60 |
| 表 6.1 | one-factor Gaussian copula 靜態模型參數的最佳配適結果 -針對 2007 | |

| | | |
|-------|--|----|
| | 年 1 月 30 日的資料 | 64 |
| 表 6.2 | CDX.NA.IG rule 下 2007 年 1 月 30 日分券的公平年信用價差 - one-factor Gaussian copula 模型 | 64 |
| 表 6.3 | one-factor Gaussian copula 靜態模型參數的最佳配適結果 -針對 2009 年 4 月 3 日的資料 | 65 |
| 表 6.4 | CDX.NA.IG rule 下 2009 年 4 月 3 日分券的公平年信用價差 - one-factor Gaussian copula 模型 | 65 |
| 表 6.5 | Hull and White(2008)動態模型參數的最佳配適結果 -針對 2007 年 1 月 30 日的資料 | 66 |
| 表 6.6 | CDX.NA.IG rule 下 2007 年 1 月 30 日分券的公平年信用價差 - Hull and White(2008)動態模型 | 66 |
| 表 6.7 | Hull and White(2008)動態模型參數的最佳配適結果 -針對 2009 年 4 月 3 日的資料 | 67 |
| 表 6.8 | CDX.NA.IG rule 下 2009 年 4 月 3 日分券的公平年信用價差 - Hull and White(2008)動態模型 | 67 |



圖目錄

| | | |
|-------|----------------------------|----|
| 圖 1.1 | 資產擔保證券基本架構圖..... | 1 |
| 圖 1.2 | SPV 現金收支不均等的圖例 | 5 |
| 圖 1.3 | 研究簡易流程圖 | 8 |
| 圖 2.1 | cash CDO 的架構圖..... | 10 |
| 圖 2.2 | synthetic CDO 的架構圖 | 10 |
| 圖 2.3 | CDX.NA.IG 指數的架構圖 | 13 |
| 圖 3.1 | SPV 現金收支不均等證明的範例圖示 | 32 |
| 圖 3.2 | R=0 之下 SPV 總損益的累積機率分配..... | 38 |
| 圖 3.3 | 蒙地卡羅模擬示意圖 | 41 |
| 圖 3.4 | 蒙地卡羅模擬路徑示意圖..... | 43 |



一、緒論

1.1 研究背景

舉凡將各種具備現金流的資產，透過轉換成證券的型態使其具有市場性與流動性的過程，稱之為資產證券化 (securitization、asset securitization 或 cash flow securitization)，大型的金融機構可以利用這樣的程序擴大籌措資金的管道並達到分散風險的效果。證券化商品種類繁多，主要的代表為不動產抵押的證券化商品，其中以美國房貸公司，房地美 (Freddie Mac)、房利美 (Fannie Mae) 所發行的房屋抵押擔保證券 (Residential Mortgage-Backed Security, RMBS) 為最著名的例子。資產證券化的應用之後慢慢延伸至一般放款債權上，例如信用卡貸款、汽車貸款、租賃擔保債權、商用不動產抵押債權 (Commercial Mortgage-Backed Security, CMBS) 等，並藉由發行所謂的資產擔保證券 (Asset-Backed Security, ABS)，將這些債權重新包裝成新的商品出售。

資產擔保證券的基本架構有三：資產池 (asset pool 或 reference pool)、各種等級的分券 (tranche)、特殊目的機構 (Special Purpose Vehicle, SPV)，其中特殊目的機構 (以下簡稱 SPV) 於前述兩者間扮演中介者的角色。圖 1.1 為資產擔保證券的基本架構圖：

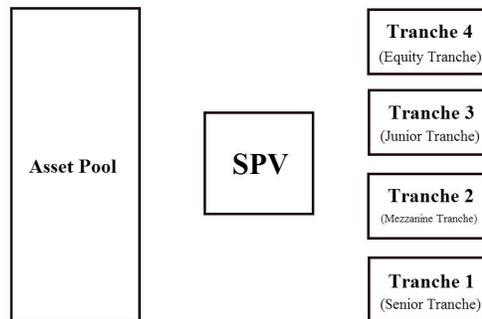


圖 1.1 資產擔保證券基本架構圖

¹ 特殊目的機構也可稱為特殊目的實體 (Special Purpose Entity, SPE)，或特殊目的公司 (Special Purpose Company, SPC)

銀行先將持有的債權或資產（對銀行而言較沒有流動性的資產），例如房貸、公司債、應收帳款，或某部電影、某張唱片的版權、某項專利，賣給 SPV 構成資產池，SPV 再以這些資產作為擔保發行各種不同等級的分券；針對擔保資產所產出的現金流（利息、本金償還、版權收益），SPV 依次由下而上分配給各個分券，最下層的分券我們稱為最高等級分券（senior tranche），最上層稱為權益分券（equity tranche），中間夾層則稱為中級分券²（mezzanine tranche），而這樣的一個分配機制我們稱為 waterfall；當擔保資產發生違約損失時，則依次由上而下承擔損失，所以權益分券為最先損失部位（First Loss Piece，FLP），風險較其他分券來得高。SPV 扮演整個資產證券化過程的核心角色，成立的目的是在於轉化資產型態使其成為其他流動性較高的新商品，機構本身獨立於這新舊資產之間，並不涉及任何有關原資產持有銀行和新商品投資者的風險，而且 SPV 是一個業務受嚴格規範的高信用等級實體，其中間者的位置不應該因其所執行的業務而承擔任何無謂的風險。資產擔保證券可明顯看出資產證券化的兩大好處：銀行將部分資產賣給 SPV，獲得新的一筆資金（新的籌資管道），再利用這筆資金做新的投資，以多樣化投資標的（分散風險）。

資產擔保證券一個常見的例子為抵押債權憑證³（Collateralized Debt Obligation，CDO）。抵押債權憑證（以下簡稱 CDO）分成現金型（cash CDO 或 cash flow CDO）、合成型（synthetic CDO 或 Collateralized Synthetic Obligation，CSO）兩類。cash CDO 的資產池由實質資產（physical asset）所組成，例如公司債或房屋貸款；synthetic CDO 的資產池則由信用違約交換（Credit Default Swap，CDS）、總報酬交換⁴（Total Return Swap，TRS）等信用衍生性商品契約所構成。synthetic CDO 是隨 CDS 風行於金融市場而衍生出來的結構化商品，SPV 與銀行所持有的資

² 依現金流的分配順序，最高等級分券又可稱為先償分券、中級分券也可稱為次償分券。

³ 如果其資產池全由貸款（loan）所組成，則稱為 Collateralized Loan Obligation（CLO）；若資產池全由債券（bond）所組成，則稱為 Collateralized Bond Obligation（CBO），若資產池為上述兩者的混合，則稱為 CDO。

⁴ 總報酬交換指的是發行機構將其所有擁有的債權或放款等其他參考資產之總報酬（利息、股息、參考資產價值的變動）轉給交易對手，以換取交易對手給付的固定或浮動的報酬率。在總報酬交換的契約當中，契約的發行者為保護的買方，交易的對手則為保護的賣方。

產之間，在關係的建立上不像在 cash CDO 中，銀行直接將資產轉賣給 SPV，而是由資產池中的 CDS 契約以銀行持有的債權或財產為參考資產 (reference asset) 做連結，藉此將信用風險轉移至分券端。目前市場上已有 synthetic CDO 的標準化合約供投資者做交易，其中兩個著名的例子為 CDX.NA.IG 和 iTraxx。CDX.NA.IG 的資產池是以北美 125 家投資等級公司債當作參考資產群組 (reference portfolio) 的 CDS 契約所構成，iTraxx 則是以歐洲 125 家投資等級公司債當作參考資產群組的 CDS 契約所構成，而當中每個公司債的本金皆占參考資產群組起始總本金的 1/125；在分券的定義上，CDX.NA.IG 的權益分券負責吸收參考資產群組 0 到 3% 的本金損失，其他分券分別吸收 3 到 7%、7 到 10%、10 到 15%、15 到 30%，以及 30 到 100% 的本金損失，iTraxx 的權益分券則同樣負責吸收參考資產群組 0 到 3% 的本金損失，其他分券則分別吸收 3 到 6%、6 到 9%、9 到 12%、12 到 22%，以及 22 到 100% 的本金損失。當未發生違約時，除了權益分券的買方必須在期初預先支付給賣方一定分券本金比例的金額 (upfront payments)，且於之後每年固定支付 500bps 的信用價差 (spread) 外，其餘分券皆於支付日支付信用價差直到發生信用違約。報價的部分，權益分券的報價為預先支付的比例，其他的分券則是每年所需支付的信用價差。

能對 synthetic CDO 分券的公平報酬進行評價的模型很多，其中針對參考資產假設的不同而分成同質性模型 (homogeneous model) 和異質性模型 (heterogeneous model) 兩類⁵：同質性模型假設所有參考資產群組中的資產同質，有相同的違約機率 (time-to-default probability)、期望回收率 (expected recovery rate)，且兩兩資產之間的相關性皆相同，而異質性模型則放寬了這些設定，所以評價過程要比使用同質性模型複雜得多。信用風險相關模型中的縮減式模型 (reduced-form model) 假設違約機率的大小由外生給定的違約強度 (default intensity 或 hazard rate) 決定，違約強度會受總體經濟因素衝擊而發生

⁵ Hull and White (2008) 在“Dynamic Models of Portfolio Credit Risk: A Simplified Approach” 這篇文章中所使用的是同質性模型假設；Hull and White (2004) 在“Valuation of a CDO and nth to Default CDS Without Monte Carlo Simulation” 這篇文章中所使用的是異質性模型假設。

改變，對此，synthetic CDO 的訂價模型又可分成靜態模型與動態模型兩類：靜態模型假設在 CDO 的存續期間內總體經濟環境為靜態，所以每單位時間的違約強度皆相同，常見的 copula 模型，如 Gaussian copula、Student t copula、Clayton copula 都屬於此類；Hull and White (2008) 提出的動態模型 (Dynamic Model) 則假設總體經濟環境的好壞有週期性變化，所以每段時間所採用的違約強度不同。

1.2 研究動機與目的

一般於 ABS 架構中所提及的 waterfall 機制 (簡稱 ABS waterfall) 概念很簡單：在每一個支付日，SPV 在從資產池獲得一筆現金收入之後，依分券等級的高低決定分配報酬的順序，高者為先，低者為後；高等級分券足額給定報酬之後，再將現金流分配給低等級分券，直至 SPV 把當期的現金收入全數發出為止。

synthetic CDO 所使用的 waterfall 機制我們特別稱為 premium waterfall⁶。在 premium waterfall 的機制之下，現金流的分配次序依然以分券等級高者為先，低者為後，但分券的報酬依據分券本金的多寡來給，當分券本金因吸收參考資產的違約損失而減少，報酬的分配也隨之等比例減少，舉例來說，假設權益分券的分券本金為 \$2,000,000，年報酬率為 20%，在參考資產不發生違約的情況之下，權益分券每年可分得的報酬為 \$400,000；當權益分券因吸收參考資產的違約損失而減少 50% 的分券本金，剩下 \$1,000,000，則接下來在參考資產不發生違約的情況下，每年可分得的報酬也減少 50%，剩下 \$200,000。

從 ABS 的架構來看，扮演中介者角色的 SPV 沒有承擔任何風險，因為參考資產的違約風險已全數轉移至分券端，而從訂價的角度來陳述，這便是資產池的期望損失等於分券端各分券的期望損失總和；在大多數的文獻當中，用來計算 CDO 分券公平報酬的模型大都假定沒有交易手續費及佣金的存在以做簡化，而在此簡化假設之下，分券的公平報酬需滿足在風險中立機率模型下期望損失等於期

⁶ 參考 Geoff Chaplin 於其著作 “Credit derivatives : Risk Management, Trading, and Investing” 中的用法。

望總報酬的條件，所以 SPV 由資產池一邊賺得的期望總收入，會等於發給分券端的期望總支出，而在這現金流的一進一出之間，SPV 的期望總損益為零。計算 synthetic CDO 分券的公平報酬，架構在 premium waterfall 的機制之上，所以 premium waterfall 也保證 SPV 的期望總損益為零。

若我們定義，在不考慮交易手續費及佣金收入的情形下，SPV 的期望總損益等於由資產池端流入的期望總現金收入，減去流至分券端的期望總現金支出，則如前段所敘，SPV 的期望總損益為零。在 ABS waterfall 的機制下，因為每一期 SPV 的損益皆為零（每一個支付日 SPV 將現金收入全數支付給分券），所以期望總損益為零；在 premium waterfall 的機制下，雖然任何風險中立機率訂價模型皆保證 SPV 的期望總損益為零，卻沒有保證 SPV 每一期的損益皆為零，以下圖為例：

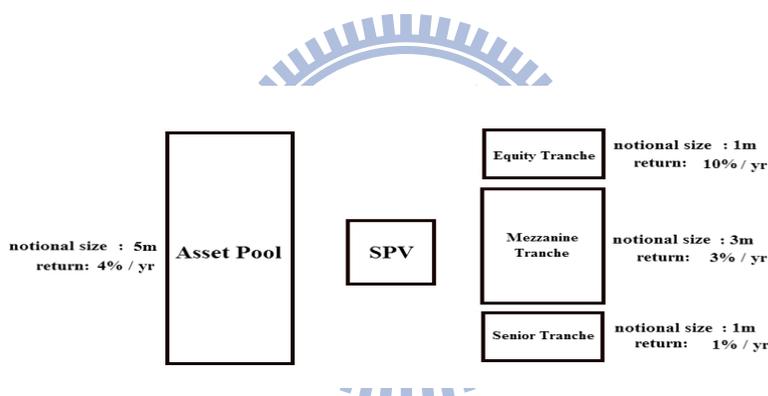


圖 1.2 SPV 現金收支不均等的圖例

假設現在有一個 synthetic CDO 的架構，其資產池所連結的參考資產為總價值 5m 的同質債券，而資產池所提供的平均年報酬為 5%；分券端則有 senior、mezzanine、equity 三種等級的分券，分券本金分別為 1m、3m、1m，事先給定的年公平報酬率則為 1%、3%、10%，所以這是一個在不考慮交易手續費及佣金收入的情況下，SPV 在參考資產沒有發生任何違約時，每一個支付日現金收入等於現金支出的 synthetic CDO 架構⁷ ($5m \cdot 4\% = 1m \cdot 10\% + 3m \cdot 3\% + 1m \cdot 1\%$)。在此

⁷ 事實上並不是所有的公平報酬率都會使 SPV 在不考慮交易手續費及佣金收入的情況下，在沒有任何違約發生時於每個支付日的現金收入都會等於現金支出。分券公平報酬率的計算只保證，契約存續期間內 SPV 的期望總現金收入會等於期望總現金支出。本文第三章第六節的例子就是在分券公平報酬之下，SPV 在參考資產還沒有發生違約的第一個支付日現金收入就不等於現金支出的情況。

架構之下，當參考資產發生 1 m 的違約損失時，根據 premium waterfall 的機制，資產池將減少 20% 的現金流入 SPV，而 SPV 卻在權益分券本金歸零後減少了 50% 的現金支出 ((20%-10%) / 20%)。若 premium waterfall 的機制讓 SPV 有機會發生收支不均衡的現象，那代表 synthetic CDO 在風險中立機率模型的公平訂價之下，有可能因為這樣的不均衡而使 SPV 身陷在不應該出現的風險當中，而針對這個風險，本文的第三章第六節將會有更明確的論述。

有了以上的推論，我們將從評價 synthetic CDO 分券的公平報酬出發，利用 one-factor Gaussian copula 靜態模型、Hull and White (2008) 的動態模型，與 CDX.NA.IG 的標準化契約所定義的資產池和分券，分別從兩個角度來檢視 premium waterfall 的機制可能帶來的風險：其一，在 CDX.NA.IG 權益分券的支付規則(保護買方必須在期初預先支付本金一定比例的金額，加上之後每個支付日支付 500bps 的信用價差給保護賣方)之下進行討論；其二，各分券只在支付日支付信用價差 (all payments in arrears) 的情況下進行討論。在進行完以上兩點分析後，我們將重新利用上述兩個風險中立訂價模型，在 ABS waterfall 機制之下採用只在支付日支付信用價差的規則⁸，對 CDX.NA.IG 標準化契約所定義的分券進行公平報酬的計算，比較現金流分配機制的差別所產生的評價差異。

⁸ ABS waterfall 的機制不討論權益分券有期初預先支付的情況，因為根據本文章定義，ABS waterfall 的機制指的是 SPV 於每個支付日會將所有的現金收入全數支付給分券，這在不考慮手續費與佣金收入的風險中立機率模型之下，是一個 SPV 期望總損益為零的 fair game；如果權益分券有期初預先支付的情況，則在我們所定義的 ABS waterfall 機制之下，會發生 SPV 於期初必須先支付一筆金額給權益分券，然後於每個支付日又必須將全數的現金收入發給分券，這種 SPV 期望總報酬為負的 unfair game。本文章只在 fair game 的情況下做討論。

1.3 論文架構與研究流程

本文之後的各章節架構如下。第二章為文獻探討，內容共分成三個小節：先說明 synthetic CDO 的架構與特色以充分瞭解實際狀況下 synthetic CDO 的運作機制，再來說明 Vasicek 所使用的 large pool credit risk model 假設，為 synthetic CDO 的真實架構與理論的評價模型搭起橋樑，最後說明文章中所使用的兩個評價模型：one-factor Gaussian copula 靜態模型、Hull and White (2008) 的動態模型，如何結合信用風險模型當中的 reduced-form model 和 top-down model；第三章為研究方法，總共有七個小節：首先定義使用符號，接著分別說明如何使用 one-factor Gaussian copula 靜態模型和 Hull and White (2008) 的動態模型來計算 premium waterfall、ABS waterfall 機制下 CDO 分券與 CDS 的信用價差，然後說明本文章研究動機的概念形成與證明，最後再根據這些證明來建構本文章的研究；第四章為結果分析，分成三個部分：首先闡述資料分類，再來說明研究分群和使用的數值工具、數值設定，然後分別敘述 one-factor Gaussian copula 靜態模型與 Hull and White (2008) 動態模型的分析結果；第五章為結論。

研究的流程則如下：我們從 premium waterfall、ABS waterfall 兩個 SPV 的信用價差支付機制出發，首先依照 CDX.NA.IG 的支付規則（權益分券有預先支付的情況）和一般 CDO 的支付規則（所有分券只在支付日支付信用價差），分別在 premium waterfall 的機制之下，利用 one-factor Gaussian copula 靜態模型、Hull and White(2008)動態模型兩個訂價模型來進行分券公平報酬的訂價，接著依照一般 CDO 的支付規則，在 ABS waterfall 的機制之下，再一次利用兩個訂價模型來進行分券公平報酬的訂價。用於訂價的模型參數，我們由 CDX.NA.IG 的市場資料做參數的最佳配適 (best fitting) 來取得；在已知模型參數之後，可以透過蒙地卡羅模擬的方式，找出 SPV 於不同支付機制之下的總損益累積機率分配，有了總損益的累積機率分配，就可以測量出不同付費機制之下 SPV 的總損益風險值（簡稱 SPV-VaR）。下圖為本研究的簡易流程圖：

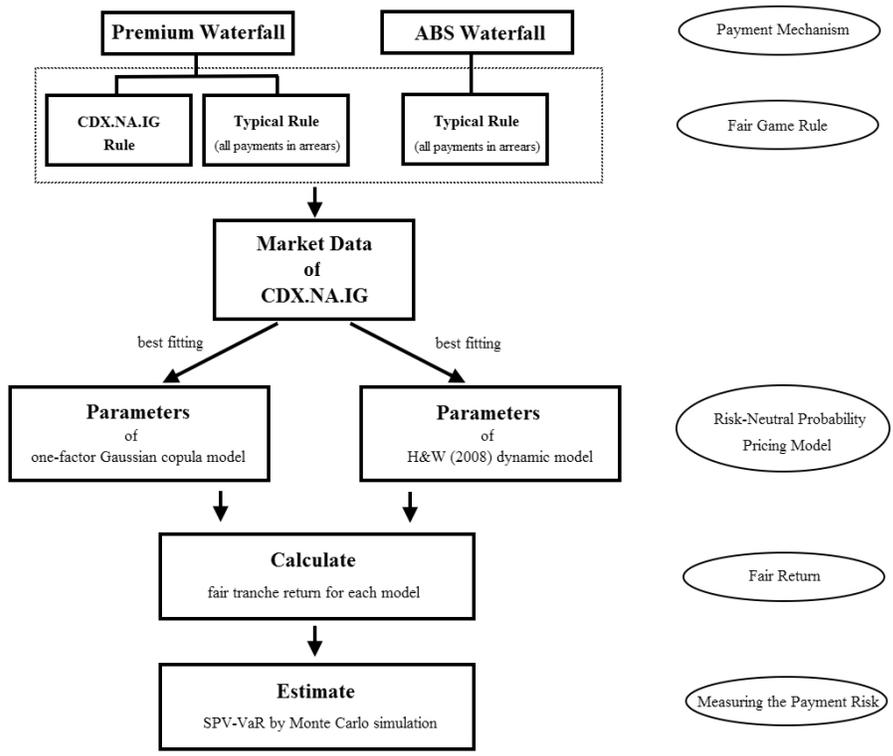


圖 1.3 研究簡易流程圖

二、文獻探討

本章節將先針對 synthetic CDO 進行介紹，藉此瞭解 synthetic CDO 的架構、種類、運作機制還有功能，同時比較 synthetic CDO 和 cash CDO。接著我們介紹 Vasicek 的 large pool credit risk model 假設，而這些假設將直接勾勒出 one-factor Gaussian copula 模型在 standard market model 下的架構。最後我們將介紹信用風險模型當中的 reduced-form model 和 top-down model，以及 one-factor Gaussian copula 靜態模型、Hull and White (2008) 的動態模型如何結合這兩個模型來進行信用價差的評價。

2.1 Synthetic CDO 的介紹

評價模型常因為過多的簡化假設，使我們對評價對象的認識有所失焦。one-factor Gaussian copula 靜態模型、Hull and White (2008) 的動態模型皆可在某些前提假設之下評價具 synthetic CDO 特質的 CDX.NA.IG 指數，而在瞭解這些模型做了哪些簡化假設的同時，我們有必要充分瞭解實際情況下 synthetic CDO 的架構與 CDX.NA.IG 指數的樣貌。

2.1.1 Synthetic CDO 的架構、種類及運作機制

所謂的 (現金流) 資產證券化，指的是將各種具備現金流的資產，透過 SPV 將其重新包裝轉換成證券，並使其具有市場性與流動性的過程，許多金融機構常利用這個過程擴大籌資管道、降低籌資成本，同時將自身所承擔的風險部分分散給證券的投資人；在資產證券化下所創造出來的 CDO，我們稱為 cash CDO。圖

2.1 為 cash CDO 的架構圖⁹：

⁹此圖參考作者 Moorad Choudhry 於其著作 “Structured Credit Products : Credit Derivatives & Synthetic Securitisation” 中第 9 章 Figure 9.1 的畫法。圖 2.1 中的 credit enhancement 指的信用強化的種種機制，例如 cash flow waterfall 結構中的 over-collateralization test 和 interest coverage test 機制都是 credit enhancement 的手段之一；note 與 tranche 指的都是 SPV 所發行的商品，note 這個字常使用在一般的 cash CDO 或 synthetic CDO 的架構中，因為這些商品性質與一般的融資票券很像，而 tranche 這個字則是特別使用在 CDX.NA.IG 或 iTraxx 這類標準化的指數型契約上。

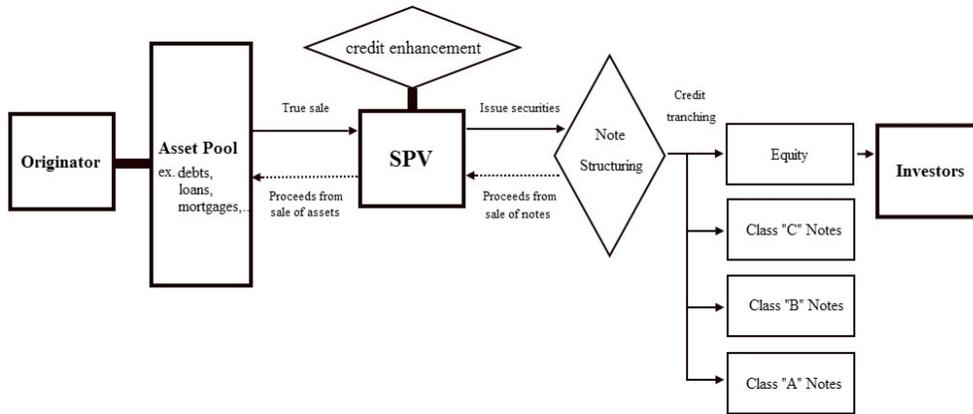


圖 2.1 cash CDO 的架構圖

所謂的合成式資產證券化 (synthetic securitization) ，則指的是以信用衍生性商品為工具來擷取資產證券化功效的過程；在合成式資產證券化下所創造出來的 CDO ，我們稱為 synthetic CDO 。圖 2.2 為 synthetic CDO 的架構圖¹⁰：

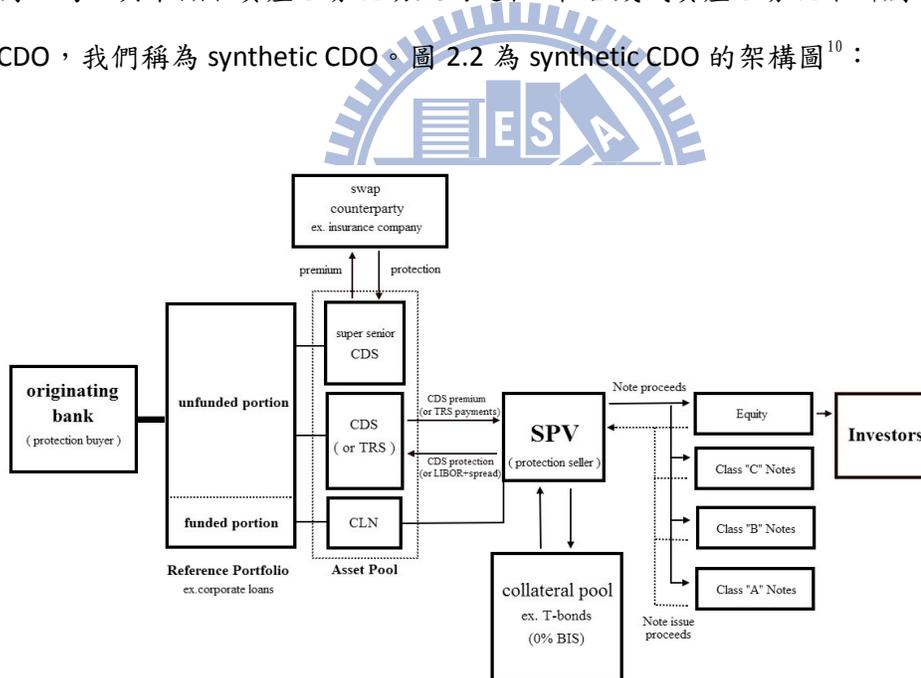


圖 2.2 synthetic CDO 的架構圖

有別於 cash CDO 中發起銀行 (originating bank) 直接將資產轉賣給 SPV 構成資產池，synthetic CDO 中的 SPV 利用信用衍生性商品所構成的資產池與參考資產

¹⁰ 此圖參考作者 Moorad Choudhry 於其著作 “Structured Credit Products : Credit Derivatives & Synthetic Securitisation” 中第 10 章 Figure 10.3 的畫法。

做連結，所以實際上參考資產仍留在發起銀行的資產負債表當中，所有權並沒有被轉移；在信用衍生性商品所建立起來的關係當中，SPV 擔任信用保障的賣方 (protection seller)，發起銀行則擔任信用保障的買方 (protection buyer)，買方必須在契約上所明訂的支付日支付保險金 (premium) 給賣方，但當參考資產發生違約時，賣方必須負責吸收違約損失，所以原屬於發起銀行的違約風險由此轉移至 SPV 上。

參考資產依目的上的不同，可以切割成集資 (funded)、非集資 (unfunded) 兩個部分，而有了 fully funded synthetic CDO、partially funded synthetic CDO 和 fully unfunded synthetic CDO 三種不同的架構；在信用衍生性商品的使用上，以集資為目標的部分利用信用連結式債券¹¹ (Credit Linked Note, CLN) 與參考資產做連結，非以集資為目標的部分則利用 CDS 或 TRS 做連結。一般而言，非集資部分會有兩個信用保障的賣方，一者為 SPV，另一者則通常是保險公司。發起銀行將參考資產中的超低風險資產透過 super senior CDS 契約直接交由保險公司來保護，以降低保護成本¹²；SPV 會將出售分券的所得用於投資無風險債券，例如政府公債，以構成抵押資產池 (collateral pool)，所以實際上 SPV 所出售的分券是以這些無風險債券做抵押；如果 SPV 不設置抵押資產池而是將這些分券的銷售所得用於投資其他風險性資產，則當這些風險性資產的違約機率提高而信評水準遭受調降時，以此為抵押的分券也會受波及。

synthetic CDO 因資產池成分能否於結構存續期間內更動，而有了 static synthetic CDO 和 managed synthetic CDO 兩種架構。static synthetic CDO 在完成架構的建製後，資產池中信用衍生性商品的成分即固定不做更動，無論參考資產的

¹¹ 信用連結式債券指的是發行者發行以第三方信用品質為參考指標的債券，債券的償還與否與契約上所明訂之第三者的信用狀況而定，與發行者信用、償還能力及意願無關。在 synthetic CDO 的架構中，發起銀行為信用連結式債券的發行者，為信用保障的買方，SPV 則為信用連結式債券的投資者，為信用保障的賣方，而契約上所明訂的第三方則為資產池中的資產；SPV 在買下信用連結式債券後，會付給發起銀行一筆本金，在到期時如果連結的第三方資產沒有發生違約，則發起銀行會償還本金，否則扣收本金。因此，信用連結式債券等同於是將第三方資產的信用風險轉移給 SPV，而因為發起銀行在賣出信用連結式債券時獲得一筆本金，所以除了能達到風險轉移外，還有集資的效果。

¹² 超低風險資產指的是除非發生災難性的風險 (catastrophe risk)，否則幾乎不會發生違約的資產。保險公司用來保護這類資產的 CDS 所需要支付的信用價差會遠比 SPV 支付給最高等級分券的信用價差還要低(比最高等級分券信評水準還要高)，所以用 super senior CDS 來稱呼。

信用品質於存續期間內如何改變；managed synthetic CDO 則是在完成架構建製後，經理人¹³ (CDS advisor 或 investment manager) 可於存續期間內動態調整資產池成分。managed synthetic CDO 是在 CDS 市場趨於成熟下所發展出來的新式架構，當市場能夠提供足夠的交易量與流動性時，經理人可以根據資產的品質搭配對其最有利的 CDS 契約，或者是在資產品質持續惡化下更換資產 (同時更換 CDS 契約)，使 SPV 免於承受違約損失，同時保護分券端的投資人。managed synthetic CDO 較著名的例子有兩個：其一，由 Dolmen Securities Limited 於 2001 年建製完成的 Blue Chip Funding 2001-1 plc，資產池的 CDS 連結 80 家投資等級的公司債，規模達 10 億歐元；其二，由 Deutsche Bank AG 於 2002 年建製完成的 Jazz CDO I B.V.，連結的資產規模達 14.88 億歐元。

2.1.2 synthetic CDO vs. cash CDO

相較於 cash CDO，synthetic CDO 主要有下列幾個特點：

- (1) **建構速度快**：在 cash CDO 的架構中，發起銀行會把資產實際轉賣給 SPV，因為其中牽涉到實質資產所有權的轉移，會有重重法規的限制，所以建構時間較長，平均得花上 3~4 個月；synthetic CDO 架構中的 SPV 只需要利用信用衍生性商品與資產建立連結即可，中間並沒有牽涉實質資產所有權的轉移，所以建製時間會短上許多，因此相同規模下的 synthetic CDO 平均只需要花 6~8 個星期即可建製完成。
- (2) **建構成本低**：在 fully unfunded synthetic CDO 的架構裡可以不需要設立 SPV，而且通常單一資產的價格比以此為參考目標的衍生性商品高，買一個信用保障契約會比買一張債券還要便宜，因此建構成本較低。
- (3) **更適合歐洲市場**：因為歐洲對於證交等相關法規比美國嚴格許多，所以一般而言美國的商業銀行信用水準會比歐洲低，這使得美國商銀的籌資

¹³ 經理人通常設置在發起銀行之下，其如何調整資產池成分，必須依循某個公開且標準化的準則（不外乎是最大化保護買、賣雙方的利益）。

成本比歐洲商銀高，因此在這樣的情形之下，美國商銀常會利用 cash CDO 的架構來降低籌資成本，同時達到對資本的風險管控，相較之下歐洲商銀在降低籌資成本的需求上不若美國商銀高，但在資本的風險管控上仍有需求，這使得建製成本相對低廉的 synthetic CDO 更普遍於歐洲市場。

2.1.3 CDX.NA.IG

CDX.NA.IG 為 Credit Default Index of North American Investment Grade 的縮寫，我們可以將指數分成兩邊來看，一邊是以資產池中的 CDS 報價做為計算基礎的信用違約指數 (CDS Index, CDX)，另一邊則是參考 CDX 所衍生得來的指數分券 (Index Tranches)，而 CDX.NA.IG 會同時呈現兩邊的報價。CDX.NA.IG 的架構屬於 managed synthetic CDO，指數管理者為道瓊公司 (所以通常又稱 DJ CDX.NA.IG)；資產池由連結北美 125 家投資等級公司債的 CDS 契約所構成，分券則依吸收違約損失的順序與比例來定義；資產池的成分每六個月更動一次，會將參考資產中已非投資等級的公司債汰換成其他投資等級公司債，而為了區分每一次更動後資產池的連結標的，道瓊公司會在 CDX.NA.IG 上註明編號以方便辨識，例如，2003 年九月開始交易的指數稱為 CDX.NA.IG 1，2004 年三月之後稱為 CDX.NA.IG 2，九月之後稱 CDX.NA.IG 3，往後同理類推。接續第一章研究背景中所提，我們可以將 CDX.NA.IG 的結構簡單表達成下列圖示：

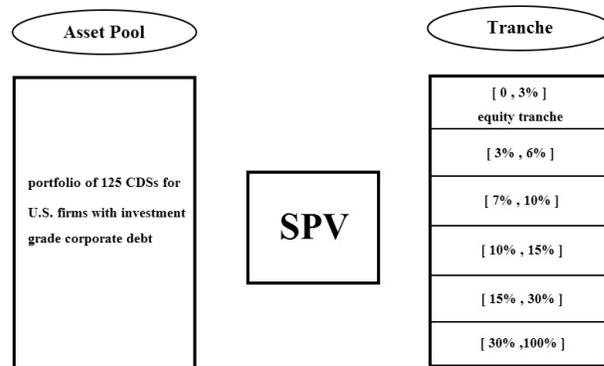


圖 2.3 CDX.NA.IG 指數的架構圖

CDX.NA.IG 可分成 3、5、7、10 年期四種標準化契約，在報價上的呈現如表 2.1，其中除了 0 到 3% 分券的報價單位為 % 外，其餘的皆為 bps：

表 2.1 2007 年 1 月 30 日的 CDX.NA.IG 報價

| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------|------------------|------------------|----------|-------|--------|--------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| CDS Index | | | 19.00 | 31.00 | 43.00 | 56.00 |
| Index Tranches | 0% | 3% | n/a | 19.63 | 38.28 | 50.53 |
| | 3% | 7% | n/a | 63.00 | 172.25 | 427.00 |
| | 7% | 10% | n/a | 12.00 | 33.75 | 96.00 |
| | 10% | 15% | n/a | 4.50 | 14.50 | 43.25 |
| | 15% | 30% | n/a | 2.00 | 6.00 | 13.75 |
| | 30% | 100% | n/a | n/a | n/a | n/a |

而當信用價差報價偏高時，大於 1000bps 的部分會改由 % 為報價單位來呈現，例如表 2.2 的報價，其中 0 到 3%、3 到 7%、7 到 10% 的分券報價單位為 %，其餘的為 bps：

表 2.2 2009 年 4 月 3 日的 CDX.NA.IG 報價

| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------|------------------|------------------|----------|---------|--------|--------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| CDS Index | | | 280.50 | 262.10 | 236.10 | 204.80 |
| Index Tranches | 0% | 3% | n/a | 78.29 | 80.24 | 81.22 |
| | 3% | 7% | n/a | 47.94 | 54.15 | 57.26 |
| | 7% | 10% | n/a | 17.40 | 24.11 | 29.50 |
| | 10% | 15% | n/a | 548.34 | 575.05 | 578.63 |
| | 15% | 30% | n/a | 143.415 | 165.46 | 166.96 |
| | 30% | 100% | n/a | n/a | n/a | n/a |

2.2 Vesicek 的 Large Pool Credit Risk Model 假設

CDX.NA.IG 指數的資產池由連結北美 125 家投資等級公司債的 CDS 所構成，描述這 125 家公司可用下列兩個假定：其一，125 家公司為異質公司，在給定期

間內各有不同的違約機率，兩兩公司間資產價值的相關性也各有不同；其二，125家公司假設為同質公司，在給定期間內各公司的違約機率相同，兩兩公司間資產價值的相關性也相同。同質公司的假設與實際情況相比雖稍顯失真，但卻可以在很多的情況下提供合理的估計，從計算上來看也比從異質公司的角度切入有效率得多。

同質性模型假設源自於 Vesicek 在 large pool credit risk model 中所假設的環境¹⁴，而這個假設環境我們又可稱作 standard market model。一般化的 one-factor Gaussian copula 是異質性模型，而 one-factor Gaussian copula 模型使用 Vesicek 的 large pool credit risk model 假設來做簡化則會變成同質性模型，藉由結合 one-factor Gaussian copula 模型和 Vesicek 的 large pool credit risk model 假設，我們可以描述在同質公司假設下，資產池投資組合的期望損失。

2.2.1 一般化的 One-Factor Gaussian Copula 模型¹⁵

現在有 i 和 j 兩家公司， i 公司從時間點 0 到時間點 t_i 的累積違約機率為 $Q_i(t_i)$ ， j 公司從時間點 0 到時間點 t_j 的累積違約機率為 $Q_j(t_j)$ ，而 Gaussian copula 模型透過標準常態累積機率反函數將 $Q_i(t_i)$ 、 $Q_j(t_j)$ 轉換成

$$x_i = N^{-1}[Q_i(t_i)]，x_j = N^{-1}[Q_j(t_j)]，$$

x_i 、 x_j 服從標準常態分配¹⁶。

one-factor Gaussian copula 模型假設

$$x_i = a_i F + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i \quad (2.1)$$

$$x_j = a_j F + \sqrt{1 - a_j^2} Z_j \quad (2.2)$$

¹⁴ 詳細內容請參見 Oldrich Alfons Vasicek, "The Distribution of Loan Portfolio Value," Risk, December 2002 這一篇文章。

¹⁵ 最早將 copula 模型使用在 CDO 公平訂價上的文章為: Hull and White (2004), "Valuation of a CDO and nth to Default CDS Without Monte Carlo Simulation"。

¹⁶ normal distribution 又稱作 Gaussian distribution，這也是為什麼將累積違約機率透過標準常態累積機率反函數轉換的 copula 模型稱作 Gaussian copula 的原因。

參數 F 代表使市場上所有公司發生違約的共有因子 (common factor) ，參數 Z_i 、 Z_j 則分別代表讓公司 i 、 j 發生違約的個別因子 (idiosyncratic factor) ， F 、 Z_i 、 Z_j 彼此互相獨立且都服從標準常態分配， x_i 、 x_j 彼此的相關性則為 $a_i \cdot a_j$ 。

現在我們假設公司 i 從時間點 0 到時間點 T 的累積違約機率為 $Q_i(T)$ ，則

$$x_i = N^{-1}[Q_i(T)]$$

改寫(2.1)式

$$N^{-1}[Q_i(T)] = a_i F + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i$$

$$\Rightarrow Z_i = \frac{N^{-1}[Q_i(T)] - a_i F}{\sqrt{1 - a_i^2}}$$

所以在給定 F 的情況之下，公司 i 於時間點 T 的累積違約機率可寫成

$$Q_i(T|F) = N\left(\frac{N^{-1}[Q_i(T)] - a_i F}{\sqrt{1 - a_i^2}}\right) \quad (2.3)$$

2.2.2 Vesicek 的 Large Pool Credit Risk Model 假設與 One-Factor Gaussian Copula 模型結合

Vesicek 假設一個由公司債所組成的投資組合，其中的成分皆同質，各公司債有相同的違約機率，當違約發生時有相同的期望回收率，而且任意兩公司資產價值之間的相關性為 ρ 。在 Vesicek 的假設之下，因為

$$Q_i(T) = Q_j(T) = \dots = Q(T)$$

所以 x_i 、 x_j 、... 有相同的機率分配，於是(2.1)和(2.2)可被改寫成

$$x_i = aF + \sqrt{1 - a^2} Z_i \quad (2.4)$$

$$x_j = aF + \sqrt{1 - a^2} Z_j \quad (2.5)$$

同時因為任兩家公司的相關性 ρ 可表達成

$$a_i \cdot a_j = a \cdot a = \rho$$

所以(2.4)和(2.5)同時可被寫成

$$x_i = \sqrt{\rho}F + \sqrt{1-\rho}Z_i, \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (2.6)$$

$$x_j = \sqrt{\rho}F + \sqrt{1-\rho}Z_j, \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (2.7)$$

(2.3)因此可被改寫成

$$Q_i(T|F) = N\left(\frac{N^{-1}[Q(T)] - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (2.8)$$

而其中因為 $Q_i(T) = Q_j(T) = \dots = Q(T)$ 同質性資產假設的關係，所以透過(2.8)式我們知道

$$Q_i(T|F) = Q_j(T|F) = \dots = Q(T|F)$$

在 Vesicek 同質性資產的假設之下，我們可以藉由二項式分配 (binomial distribution) 的特性來描述投資組合各種違約狀況的機率，所以在給定共同因子 F 的情況下，若投資組合中總共有 N 個資產，那在時間點 t 有 n 個資產發生違約的條件機率可以表達成

$$\Phi(n, t|F) = \binom{N}{n} (Q(t|F))^n (1-Q(t|F))^{N-n}, \quad n \leq N \quad (2.9)$$

同時利用(2.8)式，我們就可以描述投資組合的期望損失 (因為有了各種違約情況的機率，就可以求投資組合的期望損失)。

2.3 Reduced-Form Model、Top-Down Model 與 One-Factor Gaussian Copula 靜態模型、Hull and White (2008) 動態模型的結合

用於評價信用衍生性商品的信用風險相關模型主要有三類：structural model、reduced-form model 和 top-down model。structural model 由 Merton(1974) 首先提出，這類模型主要假設當公司資產價值低於某個事先設定

的門檻即發生違約；reduced-form model 由 Jarrow and Turnbull (1995) 等人所提出，其模型假設公司的違約與否不由公司的資產結構以及財務狀況來決定，而是隨機發生，違約發生的可能性則由違約強度來決定；top-down model 則是將模型建立在整體投資組合的損失過程上，不考慮個別資產違約的情況。

在同質性模型假設之下，one-factor Gaussian copula 靜態模型與 Hull and White (2008) 的動態模型皆同時具有 reduced-form model 與 top-down model 的特色。我們先看 one-factor Gaussian copula 靜態模型，首先定義符號：

$S(t)$ ：公司於時間點 t 的存活機率

$Q(t)$ ：公司從時間點 0 到時間點 t 的累積違約機率

$\mu(t)$ ：公司於時間點 t 的違約強度

假若 Δt 為一大於 0 且極短的時間間隔，則根據定義，公司於時點 t 與 $t + \Delta t$ 之間的違約機率為 $\mu(t) \cdot \Delta t$ ，值得注意的是 $\mu(t) \cdot \Delta t$ 是一個條件機率的概
念，代表公司存活至時間點 t ，但卻在 t 與 $t + \Delta t$ 之間發生違約的機率，因此下列等式成立：

$$\frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{S(t)} = \mu(t) \cdot \Delta t$$

移項整理：

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = -\mu(t) \cdot S(t)$$

當 $\Delta t \rightarrow 0$ 時可重新表達成：

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\mu(t) \cdot S(t) \\ \Rightarrow \frac{dS(t)}{S(t)} &= -\mu(t) dt \end{aligned}$$

則我們可解出公司於時間點 t 的生存機率：

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu(\tau) d\tau\right)$$

而公司從時間點 0 到時間點 t 的累積違約機率我們可表達成：

$$\begin{aligned}
Q(t) &= 1 - S(t) \\
&= 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu(\tau) d\tau\right)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

在靜態模型之下，我們假定年違約強度為常數 $\bar{\mu}$ ，所以公司從時間點 0 到時間點 t 的累積違約機率改寫成：

$$Q(t) = 1 - \exp(-\bar{\mu} \cdot t) \tag{2.11}$$

(2.11)式為靜態模型之下，reduced form model 描述公司從時間點 0 到時間點 t ，累積違約機率的方式；利用(2.11)式，我們重新回到(2.8)式，則

$$\begin{aligned}
Q_i(T|F) &= N\left(\frac{N^{-1}[Q(T)] - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right) \\
&= N\left(\frac{N^{-1}(1 - \exp(-\bar{\mu} \cdot T)) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

又因為同質性模型假設的關係，所以

$$Q_i(T|F) = Q_j(T|F) = \dots = Q(T|F)$$

則在給定參數 F 之下，資產池投資組合所有可能損失的發生機率就可以用(2.9)式來描述，並可進一步建立起契約存續期間內投資組合損失的過程，而這就是在同質性假設之下 one-factor Gaussian copula 模型結合 top-down model 的地方。

再來看 Hull and White (2008) 的動態模型，在此模型的假設之下，公司的生存機率會受到外在環境週期性的衝擊影響而發生跳躍 (Jump) 的情況，所以，若說在 one-factor Gaussian copula 靜態模型中，因為有共同違約因子 F 的存在而使市場上兩兩公司之間具有相關性，在 Hull and White (2008) 動態模型當中，則是因為市場上所有公司皆會受經濟環境衝擊的影響而讓生存機率發生跳躍，使得兩兩公司之間產生了相關性。動態模型的符號定義如下：

$S(t|J)$ ：當時間點 0 到時間點 t 發生 J 次跳躍，公司在時間點 t 的生存機率

$Q(t|J)$ ：當時間點 0 到時間點 t 發生 J 次跳躍，公司從時間點 0 到時

間點 t 的累積違約機率

H_j : 第 J 次發生跳躍的跳躍幅度

在給定 J 次跳躍之下，公司在時間點 t 的生存機率可表達成：

$$\begin{aligned} S(t|J) &= \exp\left(-\int_0^t \mu(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^J H_j\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \mu(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^J H_0 e^{\beta \cdot j}\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中 H_0 與 β 皆為常數。而在時間點 0 至時間點 t 之間發生 J 次跳躍，公司從時間點 0 到時間點 t 的累積違約機率可表達成：

$$\begin{aligned} Q(t|J) &= 1 - S(t|J) \\ &= 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^J H_0 e^{\beta \cdot j}\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

所以在動態模型之下，給定跳躍次數 J ，在時間點 t 有 n 個資產發生違約的條件機率即可以表達成

$$\Phi(n, t|J) = \binom{N}{n} (Q(t|J))^n (1 - Q(t|J))^{N-n}, \quad n \leq N \quad (2.15)$$

上述的推導當中，(2.14) 式是動態模型具有 reduced-form model 特色的地方，而 (2.15) 式則是模型具有 top-down model 特色的地方。

三、研究方法

本章節首先定義使用的符號，接著介紹如何計算 CDO 分券以及 Basket CDS 的信用價差，同時介紹如何利用 one-factor Gaussian copula 靜態模型、Hull and White (2008) 的動態模型來分別求解 premium waterfall 下 CDO 各分券、Basket CDS 的公平信用價差，和 ABS waterfall 下 CDO 各分券的公平信用價差。接著說明研究動機的概念形成與證明，最後說明在公平信用價差之下，建構 SPV 現金收入減現金支出差值之所有可能的事件樹，並藉由此事件樹來進行蒙地卡羅模擬。

3.1 符號定義

本文章將會使用以下符號：

$\Phi(n,t)$: 從時間點 0 到時間點 t 總共有 n 家公司發生違約的機率

$P(J,t)$: 從時間點 0 到時間點 t 發生 J 次跳躍的機率

λ : 年跳躍強度，本篇文章假設為常數

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda d\tau = \lambda t$$

one-factor Gaussian copula 靜態模型：

$\bar{\mu}$: 年平均違約強度，靜態模型中為常數

Hull and White(2008) 的動態模型：

$\mu(\tau)$: 時間點 τ 的違約強度

$v(t)$: 折現因子

$W_i(n,t)$: 當起始本金為 \$1，CDO 第 i 個分券在時間點 t 有 n 家公司發生違約時的剩餘本金

$W_{CDS}(n,t)$: 當起始本金為 \$1，Basket CDS 在時間點 t 有 n 家公司發生違約時的剩餘本金

$E_i(t)$: 當起始本金為 \$1, CDO 第 i 個分券在時間點 t 的期望剩餘本金

$E_{CDS}(t)$: 當起始本金為 \$1, Basket CDS 在時間點 t 的期望剩餘本金

$a_L(i)$: 第 i 個分券的起賠點 (attachment point)

$a_H(i)$: 第 i 個分券的止賠點 (detachment point)

N : CDS 以及 CDO 所包含的標的公司總數

R : 回收率 (recovery rate)

$s(i)$: 第 i 個分券的年信用價差

s_{CDS} : Basket CDS 的年信用價差

3.2 在 premium waterfall 機制下計算 CDO 分券與 Basket CDS 的信用價差

在公平訂價之下, CDO 分券與 Basket CDS 信用價差的計算概念相同, 都必須遵守在風險中立機率模型之下, 期望總收入等於期望損失這個大原則。

在 premium waterfall 之下的每個支付日, SPV 將從資產池收得的現金流, 依序由等級高的分券先給, 足額給定之後再分給等級較低的分券, 而每個分券該分配多少現金流才算足額給付, 則依據該分券的剩餘本金而定, 當剩餘本金歸零, 則分配的現金流也歸零。而把各個分券依據剩餘本金給付的現金流轉換成年報酬率來呈現, 即是各個分券在 premium waterfall 之下的信用價差。

3.2.1 CDO 分券信用價差的計算

各等級的 CDO 分券在發生信用違約之前, CDO 分券的賣方 (保護買方) 需支付給 CDO 分券的買方 (保護賣方) 固定的信用價差, 一旦發生信用違約, 則保護賣方需吸收本金 a_L 到 a_H 之間的損失。以 CDX.NA.IG 為例, 現在定義:

$$a_L = [0 \quad 0.03 \quad 0.07 \quad 0.10 \quad 0.15 \quad 0.30]$$

$$a_H = [0.03 \quad 0.07 \quad 0.10 \quad 0.15 \quad 0.30 \quad 1]$$

$$g(x) = \lceil x \rceil$$

$$n_L(i) = \frac{a_L(i) \cdot N}{1-R}, \quad 1 \leq i \leq 6$$

$$n_H(i) = \frac{a_H(i) \cdot N}{1-R}, \quad 1 \leq i \leq 6$$

其中的 $n_L(i)$ 代表當第 $n_L(i)$ 個違約發生時，第 i 個分券的本金開始吸收來自參考資產的損失直至 $n_H(i)$ 個違約發生後，第 i 個分券的本金歸零，然而違約個數必須為整數值，所以必須由上高斯函數 $g(x)$ 來做調整，因此實際上第 i 個分券是在第 $g(n_L(i))$ 個違約發生時開始吸收損失，直至第 $g(n_H(i))$ 個違約發生後分券本金歸零。

假設每個分券的起始本金為 \$1，若參考資產在時間點 t 時有 n 個違約發生，則第 i 個分券的剩餘本金可表達成：

$$W_i(n,t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq g(n_L(i)) - 1 \\ \frac{a_H(i) - n(1-R)/N}{a_H(i) - a_L(i)}, & g(n_L(i)) \leq n \leq g(n_H(i)) - 1 \\ 0, & g(n_H(i)) \leq n \leq N \end{cases}$$

所以，若 s 為第 i 個分券的年公平報酬率（年信用價差），則在 premium waterfall 之下，當第 i 個分券在參考資產有 n 個違約，且於之後的契約存續期間內沒有繼續發生違約的情況下，每年可分得 $s(i) \cdot W_i(n,t)$ ，而 $s(i)$ 是我們要求的值。

如果信用價差的支付日分別為 t_1, t_2, \dots, t_m ，且 $t_0 = 0$ ，則於第 k 個支付日第 i 個分券的期望剩餘本金則可寫成：

$$E_i(t_k) = \sum_{n=0}^N \Phi(n, t_k) \cdot W_i(n, t_k)$$

$$= \sum_{n=0}^{g(n_L(i))-1} \Phi(n, t_k) \cdot 1 + \sum_{n=g(n_L(i))}^{g(n_H(i))-1} \Phi(n, t_k) \cdot \frac{a_H(i) - n(1-R)/N}{a_H(i) - a_L(i)}$$

同時假設信用違約只發生在兩個支付日的中間，則第 i 個分券於每個支付日收到的實際金額期望加總現值為 $s(i) \cdot A_i$ ，其中

$$A_i = \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) \cdot E_i(t_k) \cdot v(t_k) \quad (3.1)$$

雖然發生信用違約後損失的部份不再需要支付價差，但是在發生信用違約的時間點與上一個支付日之間仍需支付價差，則參考資產發生信用違約時第 i 個分券仍需收到的期望金額加總現值為 $s(i) \cdot B_i$ ，其中

$$B_i = \sum_{k=1}^m 0.5 \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot [E_i(t_{k-1}) - E_i(t_k)] \cdot v\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \quad (3.2)$$

最後，每次發生違約時第 i 個分券的期望損失金額加總現值為：

$$C_i = \sum_{k=1}^m [E_i(t_{k-1}) - E_i(t_k)] \cdot v\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \quad (3.3)$$

利用上述各式，則 CDO 第 i 個分券的合約價值為 $s(i) \cdot A_i + s(i) \cdot B_i - C_i$ ，且公平年信用價差(損益兩平年信用價差)為：

$$s(i) = \frac{C_i}{A_i + B_i} \quad (3.4)$$

在一般 CDO 的支付規則下，權益分券信用價差的計算利用(3.4)式即可；在 CDX.NA.IG 的規則之下，因為權益分券的支付方式與其他分券不同，其報價的呈現為保護買方需在期初預先支付給保護賣方的比例，然後每個支付日固定支付 500 bps 的價差，因此配合分券的編號，權益分券為 $i = 1$ ，再利用(3.4)式，當分券起始本金為 \$1，則預先支付的比例為 $s(1)$ ，計算方式為：

$$\begin{aligned} 500bps &= \frac{C_1 - s(1) \cdot 1}{A_1 + B_1} \\ \Rightarrow s(1) &= C_1 - 0.05 \cdot (A_1 + B_1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2.2 Basket CDS 信用價差的計算

Basket CDS 的評價與 CDO 分券的評價過程相似，但是在 Basket CDS 合約中，每多一家公司發生違約，則保護賣方收到的價差將會減少 $\frac{1}{N}$ ，因此對於一個起始本金為 \$1 的 Basket CDS 投資組合，在時間點 t 時有 n 家公司發生違約的剩餘本金為：

$$W_{CDS}(n, t) = 1 - \frac{n}{N}, \quad 0 \leq n \leq N \quad (3.6)$$

若價差的支付日分別為 t_1, t_2, \dots, t_m ，且 $t_0 = 0$ ，則於第 k 個支付日 Basket CDS 的期望剩餘本金則可寫成：

$$E_{CDS}(t_k) = \sum_{n=0}^N \Phi(n, t_k) \cdot W_{CDS}(n, t_k)$$

假設信用違約只發生在兩個支付日的中間，每個支付日期望收到的實際金額加總現值為 $s_{CDS} \cdot A_{CDS}$ ，其中

$$A_{CDS} = \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) \cdot E_{CDS}(t_k) \cdot v(t_k) \quad (3.7)$$

發生信用違約仍需收到的期望金額加總現值為 $s_{CDS} \cdot B_{CDS}$ ，其中

$$B_{CDS} = \sum_{k=1}^m 0.5 \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot [E_{CDS}(t_{k-1}) - E_{CDS}(t_k)] \cdot v\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \quad (3.8)$$

每次發生違約的期望損失金額現值為：

$$C_{CDS} = (1 - R) \sum_{k=1}^m [E_i(t_{k-1}) - E_i(t_k)] \cdot v\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \quad (3.9)$$

則每個 CDS 合約的價值為 $s_{CDS} \cdot A_{CDS} + s_{CDS} \cdot B_{CDS} - C_{CDS}$ ，且公平年信用價差為：

$$s_{CDS} = \frac{C_{CDS}}{A_{CDS} + B_{CDS}} \quad (3.10)$$

3.3 在 ABS waterfall 機制下計算 CDO 分券的信用價差

在 ABS waterfall 之下的每個支付日，SPV 將從資產池收得的現金流「全數」分給各個分券，依序由等級高的分券先給，足額給定之後再分給等級較低的分券；除了權益分券以外，每個分券該分配多少現金流才算足額給付，則根據該分券的期望損失而定，有多少的期望損失，則該分券最多分配至能夠弭平該期望損失的現金流為止；在權益分券外的其他分券皆能足額給定的情況下，剩餘的現金則全數分給權益分券，所以對權益分券而言的足額給定，為所有參考資產皆沒有發生違約的情況之下，SPV 分配給權益分券的現金流。

在 ABS waterfall 機制下計算 CDO 分券的信用價差，首要目標就是計算每個分券「最多」能夠分配多少的現金流，然後再把這個最大現金流轉換成年報酬率

來呈現，即是各個分券在 ABS waterfall 機制下的信用價差。再以 CDX.NA.IG 為例，現在定義：

$$a_L = [0 \quad 0.03 \quad 0.07 \quad 0.10 \quad 0.15 \quad 0.30]$$

$$a_H = [0.03 \quad 0.07 \quad 0.10 \quad 0.15 \quad 0.30 \quad 1]$$

P_i : 第 i 個分券的期初本金， $1 \leq i \leq 6$

EL_i : 第 i 個分券的期望損失現值， $1 \leq i \leq 6$

pr : 參考資產的本金，假定所有參考資產的本金皆相同

$pool_k$: 第 k 個支付日流入 SPV 的現金流現值

信用價差的支付日分別為 t_1, t_2, \dots, t_m ，且 $t_0 = 0$ ，同時假設信用違約只發生在兩個支付日的中間時間點；在給定 CDS 信用價差已知的情況下（取自 CDX.NA.IG 的市場報價），根據 ABS waterfall 的機制，SPV 首先將現金收入發給等級最高的分券，也就是 $i=6$ 的分券，所以從 $i=6$ 開始計算：

(步驟 1) 如果 $1 < i \leq 6$ ，則

$$EL_i = P_i \cdot C_i = P_i \cdot \sum_{k=1}^m [E_i(t_{k-1}) - E_i(t_k)] \cdot v\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right)$$

(步驟 2) 當時點 $\frac{t_{k-1} + t_k}{2}$ 有 n 個參考資產發生違約， $0 \leq n \leq N$ ，且於時點 t_{k-1} 已有

n_{k-1} 個違約時，則在時點 t_k 流入 SPV 的現金流現值可表達成：

$$pool_k = pool_k^a + pool_k^r$$

$$\text{其中，} \quad pool_k^a = pr \cdot n \cdot 0.5 \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot s_{CDS} \cdot v\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right)$$

$$pool_k^r = pr \cdot (N - n_{k-1} - n) \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot s_{CDS} \cdot v(t_k)$$

(步驟 3-1) 若 $i=6$ ，

則每個時點 t_k 至少可分配到 $pool_k$ ，至多則可分配到

$P_i \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot s(i) \cdot v(t_k)$ 。因此， i 分券在單一個支付日所能分配到的現金流期望現值為：

$$PV_k^i = \sum_{n=0}^N \Phi(n, t_k) \cdot [\min(\text{pool}_k, P_i \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot s(i) \cdot v(t_k))] \quad (3.11)$$

而於契約存續期間內 i 分券所能分配到的現金流總期望現值為：

$$e_i = \sum_{k=1}^m PV_k^i$$

則可以找到一個值 $s(i)$ 使得 $EL_i - e_i = 0$ ，求解 $s(i)$ ，然後 $i = i - 1$ 回到

步驟 1

(步驟 3-2) 若 $1 < i < 6$ ，

在足額給定等級較高的分券後，則第 i 個分券於每個時點 t_k 至少可分配到 X_k 的現金流現值，其中

$$X_k = \max(\text{pool}_k - \sum_{j=i+1}^6 P_j \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot s(j) \cdot v(t_k), 0)$$

至多則可分配到 $P_i \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot s(i) \cdot v(t_k)$ 。因此， i 分券在於單一個支付日所能分配到的現金流期望現值為：

$$PV_k^i = \sum_{n=0}^N \Phi(n, t_k) \cdot [\min(X_k, P_i \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot s(i) \cdot v(t_k))] \quad (3.12)$$

而於契約存續期間內 i 分券所能分配到的現金流總期望現值為：

$$e_i = \sum_{k=1}^m PV_k^i$$

則可以找到一個值 $s(i)$ 使得 $EL_i - e_i = 0$ ，求解 $s(i)$ ，然後 $i = i - 1$ 回到步

驟 1

(步驟 4) $s(6)$ 、 $s(5)$ 、 \dots 、 $s(2)$ 已知，

如果第 k 個支付日參考資產的違約個數為 0，則 SPV 於從資產池收得的現金流現值可特別寫成

$$pool_k^{r_0} = pr \cdot [N \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot s_{CDS} \cdot v(t_k)]$$

則有一個 $s(1)$ 使得

$$\sum_{k=1}^m [pool_k^{r_0} - P_1 \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot s(1) \cdot v(t_k) - \sum_{i=2}^6 P_i \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot s(i) \cdot v(t_k)] = 0$$

求解 $s(1)$ ，則可以得到權益分券在 ABS waterfall 之下的信用價差。

3.4 One-Factor Gaussian Copula 靜態模型的架構

在 one-factor Gaussian copula 模型當中假定公司發生違約受兩個因子影響：其一為市場上所有公司皆受其影響的共有因子 F ；其二為只影響單一公司的個別因子 Z_i ，其中 F 、 Z_i 彼此獨立。所以在同質性模型假設之下，市場上所有的公司從時間點 0 到時間點 t 的累積違約機率皆可表達成(2.11)式；給定共同因子 F ，市場上所有公司從時間點 0 到時間點 t 的累積違約機率可利用(2.12)式求得，而如果參考資產的總數為 N ，則在時間點 t 有 n 個資產發生違約的條件機率即可表達成(2.9)式。有了(2.11)、(2.12)、(2.9)三式，則我們可以描述，在給定 F 之下，第 i 個分券於第 k 個支付日的條件期望剩餘本金：

$$\begin{aligned} E_i(t_k | F) &= \sum_{n=0}^N \Phi(n, t_k | F) \cdot W_i(n, t_k) \\ &= \sum_{n=0}^{g(n_L(i))-1} \Phi(n, t_k | F) \cdot 1 + \sum_{n=g(n_L(i))}^{g(n_H(i))-1} \Phi(n, t_k | F) \cdot \frac{a_H(i) - n(1-R)/N}{a_H(i) - a_L(i)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

而 CDS 在第 k 個支付日的條件期望剩餘本金：

$$\begin{aligned} E_{CDS}(t_k | F) &= \sum_{n=0}^N \Phi(n, t_k | F) \cdot W_{CDS}(n, t_k) \\ &= \sum_{n=0}^N \Phi(n, t_k | F) \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

因為共有因子 F 服從標準常態分配，則第 i 個分券於第 k 個支付日的期望剩餘本金可寫成：

$$E_i(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{F^2}{2}} \cdot E_i(t_k | F) dF \quad (3.15)$$

而 CDS 在第 k 個支付日的期望剩餘本金：

$$E_{CDS}(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{F^2}{2}} \cdot E_{CDS}(t_k | F) dF \quad (3.16)$$

值得一提的是(3.15)、(3.16)兩式的標準常態積分，數值上可以採用 Gaussian quadrature approximation 的方法來做，例如(3.15)式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{F^2}{2}} \cdot E_i(t_k | F) dF = \sum_{p=1}^M w_p \cdot E_i(t_k | F_p) \quad (3.17)$$

其中 M 個 w_p 、 F_p 的值可從求解項次為 M 的 Hermite 多項式得到；Hermite 多項式是一個具有遞迴特性關係的多項式，項次為 0 和 1 的 Hermite 多項式如下：

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

當項次大於等於 2 時，我們可以將 Hermite 多項式表達成：

$$H_p(x) = 2x \cdot (H_{p-1}(x)) - 2(p-1) \cdot (H_{p-2}(x)) , \quad p \geq 2 \quad (3.18)$$

若 x_1, \dots, x_M 是一個項次為 M ， $M \geq 1$ ，之 Hermite 多項式的所有根，則：

$$w_p^* = \frac{\sqrt{\pi} \cdot M! \cdot 2^{M-1}}{M^2 \cdot [H_{M-1}(x_p)]} , \quad 1 \leq p \leq M \quad (3.19)$$

而(3.17)式中的 w_p 、 F_p 可由下列等式求得：

$$w_p = \frac{w_p^*}{\sqrt{\pi}} , \quad 1 \leq p \leq M \quad (3.20)$$

$$F_p = \sqrt{2} \cdot x_p , \quad 1 \leq p \leq M \quad (3.21)$$

如果要使用 Gaussian quadrature approximation 來估計(3.15)、(3.16)式， M 的值必須至少大於等於 60，做出來的估計才會足夠精確。

有了(3.15)、(3.16)式和 Gaussian quadrature approximation 估計方法，再配合(3.1)至(3.5)式與(3.7)至(3.10)式便可求得 premium waterfall 機制下，CDO 各分券與 CDS 的公平年信用價差。

在 one-factor Gaussian copula 靜態模型架構中計算 ABS waterfall 機制下 CDO 分券的信用價差，較值得注意的是(3.11)、(3.12)兩式當中 $\Phi(n, t_k)$ 的計算，可以利用 Gaussian quadrature approximation 估計方法來做：

$$\begin{aligned}\Phi(n, t_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{F^2}{2}} \cdot \Phi(n, t_k | F) dF \\ &= \sum_{p=1}^M w_p \cdot \Phi(n, t_k | F_p)\end{aligned}$$

然後再依循 3.3 節所提及的計算步驟來做計算，即可求得 ABS waterfall 機制下 CDO 各分券的年信用價差。

3.5 Hull and White 動態模型的架構

在 Hull and White (2008) 的動態模型當中假定，公司的生存機率會受到外在環境週期性的衝擊影響而產生跳躍的情況，所以在同質性模型假設之下，給定 J 次跳躍，公司在時間點 t 的生存機率可寫成(2.13)式，公司從時間點 0 到時間點 t 的累積違約機率可表達成(2.14)式，而如果參考資產的總數為 N ，則在時間點 t 有 n 個資產發生違約的條件機率即可表達成(2.15)式。有了(2.14)、(2.15)兩式，則我們可以描述，在給定 J 次跳躍之下，第 i 個分券於第 k 個支付日的條件期望剩餘本金：

$$\begin{aligned}E_i(t_k | J) &= \sum_{n=0}^N \Phi(n, t_k | J) \cdot W_i(n, t_k) \\ &= \sum_{n=0}^{g(n_L(i))-1} \Phi(n, t_k | J) \cdot 1 + \sum_{n=g(n_L(i))}^{g(n_H(i))-1} \Phi(n, t_k | J) \cdot \frac{a_H(i) - n(1-R)/N}{a_H(i) - a_L(i)}\end{aligned}\quad (3.22)$$

而 CDS 在第 k 個支付日的條件期望剩餘本金：

$$\begin{aligned}
E_{CDS}(t_k | J) &= \sum_{n=0}^N \Phi(n, t_k | J) \cdot W_{CDS}(n, t_k) \\
&= \sum_{n=0}^N \Phi(n, t_k | J) \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

假設發生跳躍的次數 J 服從 Poisson 分配，也就是從時間點 0 到時間點 t 發生 J 次跳躍的機率為：

$$P(J, t) = \frac{\Lambda(t)^J \cdot e^{-\Lambda(t)}}{J!} \tag{3.24}$$

則第 i 個分券於第 k 個支付日的期望剩餘本金可寫成：

$$E_i(t_k) = \sum_{J=0}^{\infty} P(J, t_k) \cdot E_i(t_k | J) \tag{3.25}$$

而 CDS 在第 k 個支付日的期望剩餘本金：

$$E_{CDS}(t_k) = \sum_{J=0}^{\infty} P(J, t_k) \cdot E_{CDS}(t_k | J) \tag{3.26}$$

有了(3.23)和(3.24)兩式之後，將其分別代進(3.1)至(3.5)式和(3.7)至(3.10)式便可求得 premium waterfall 機制下，CDO 各分券與 CDS 的損益兩半年信用價差。

利用 Hull and White (2008) 動態模型計算 ABS waterfall 機制下 CDO 分券的信用價差，較值得注意的是(3.11)、(3.12)兩式當中的 $\Phi(n, t_k)$ ：

$$\Phi(n, t_k) = \sum_{J=0}^{\infty} P(J, t_k) \cdot \Phi(n, t_k | J)$$

然後再依循 3.3 節所提及的計算步驟來做計算，即可求得 ABS waterfall 機制下 CDO 各分券的年信用價差。

3.6 研究動機的概念形成與證明

在 premium waterfall 的機制之下，一個假定沒有交易手續費及佣金的風險中立機率模型，只能保證 SPV 於契約存續期間內，所有支付日的現金收入減現金支出的損益加總期望值為零；以一個不考慮交易手續費和佣金收入，且於期初 SPV 現金收入會等於現金支出的 synthetic CDO 架構中 (如圖 1.2)，一旦參考資產發

生違約，SPV 雙邊現金流的一進一出就不會相等（例如，當第一個違約發生時，SPV 現金收入減少的部分會遠小於現金支出減少的部分）。若 premium waterfall 的機制有機會讓 SPV 發生收支不均衡的現象，那代表 synthetic CDO 在風險中立機率模型的公平訂價之下，有可能因為這樣的不均衡而使 SPV 身陷在不應該出現的風險當中，本節將建構一個簡單的 synthetic CDO 架構，並利用這個架構來證明這個不應該出現的風險確實存在。

我們假設一個簡單的 synthetic CDO 架構：資產池由兩個 CDS 契約所構成，連結兩個同質且本金各為 \$1 的公司債，所以資產池的起始本金為 \$2，SPV 在建構起資產池的同時也創造了 senior tranche、junior tranche 兩種不同等級的分券，起始本金則各為 \$1；結構的存續時間為兩年，支付日分別為一年後和兩年後 (all payments in arrears)，而 senior tranche、junior tranche 的年公平報酬率（年信用價差）分別為 S_s 、 S_j ；在 premium waterfall 的機制之下，SPV 每一期從資產池取得的現金 ($\$A$)，將依分券的剩餘本金乘上一事先給定的公平報酬率來分別配發給 senior tranche 和 junior tranche，當參考資產發生違約損失時，則由 junior tranche 先負責吸收損失，再來才是 senior tranche，之後現金流的分配，SPV 再根據分券的剩餘本金來做給付。以圖 3.1 來表示這個例子：

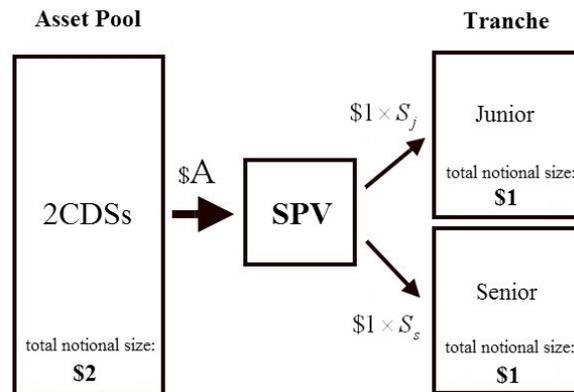


圖 3.1 SPV 現金收支不均等證明的範例圖示

為了說明上的方便，我們再做幾個簡化假設：

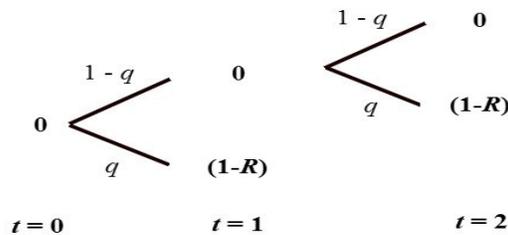
- (1) 無風險利率 = 0 (不考慮折現效果)
- (2) 兩個公司債互相獨立，其中一個公司債違約並不會影響另一個
- (3) 參考資產發生違約的時間點只在支付日
- (4) 公司發生違約後公司債的回收率為 R ， $0 \leq R < 0.5$
- (5) 公司從時點 0 ($t=0$) 至時點第 1 年 ($t=1$) 的破產機率為 q ；給定存活至第 1 年，公司從時點第 1 年至時點第 2 年 ($t=2$) 的破產機率也為 q

接著我們先從資產池開始分析：

∵ 資產池兩個 CDS 的連結資產同質

∴ 可以先取其中一個出來討論，計算其 CDS 的公平信用價差

單一個 CDS 的期望損失分析如下：



期望損失現值為： $q \times (1-R) + (1-q) \times q \times (1-R)$

$$= q(1-R)[1 + (1-q)]$$

$$= q(2-q)(1-R) \tag{3.27}$$

在期望總報酬現值等於期望損失現值的條件下，CDS 的信用價差滿足下列等式：

$$s + (1-q) \times s = q(2-q)(1-R)$$

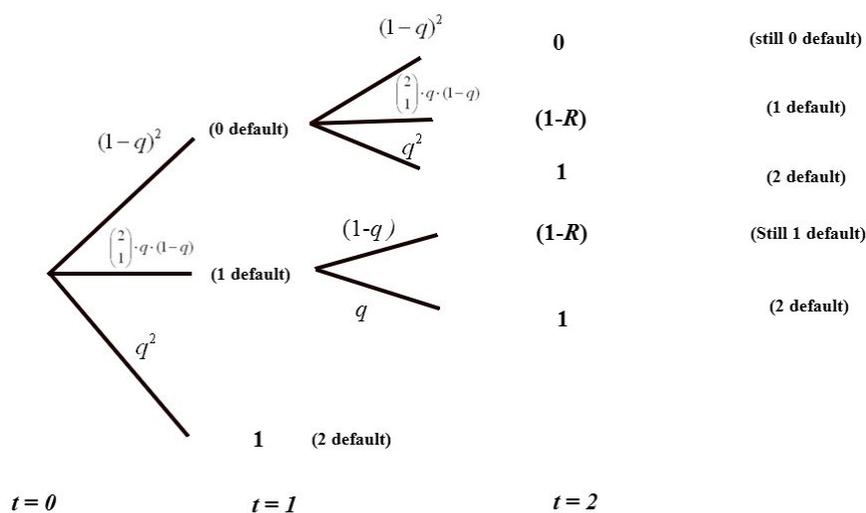
$$\therefore s = \frac{q(2-q)(1-R)}{2-q}$$

$$= q(1-R) \tag{3.28}$$

所以在不發生違約的情況下，每一期 SPV 的現金收入 A 為：

$$A = 2 \times 1 \times s = 2 \times q(1-R)$$

再來分析分券端，先分析 junior tranche 的期望損失：



所以期望損失現值可以寫成：

$$\begin{aligned} & (1-q)^2 \times \binom{2}{1} q(1-q) \times (1-R) + (1-q)^2 q^2 \times 1 + \binom{2}{1} q(1-q) \times (1-q) \times (1-R) + \binom{2}{1} q(1-q) \times q \times 1 + q^2 \times 1 \\ &= 2(1-R)[q(1-q)^3 + q(1-q)^2] + [q^2(1-q)^2 + 2q^2(1-q) + q^2] \\ &= 2(1-R)[q(1-q)^2(2-q)] + [q(2-q)]^2 \\ &= q(2-q)[2(1-R)(1-q)^2 + q(2-q)] \end{aligned} \tag{3.29}$$

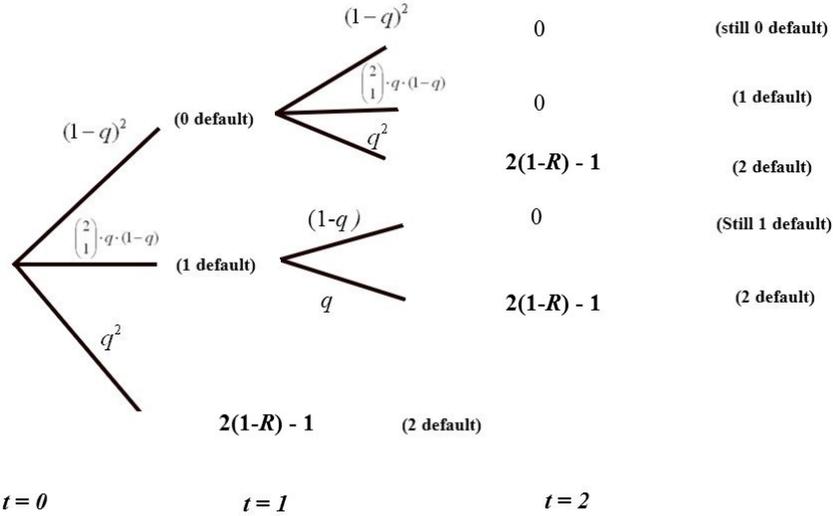
在期望總報酬現值等於期望損失現值的條件下，junior tranche 的信用價差滿足下列等式：

$$S_j + (1-q)^2 \times S_j + \binom{2}{1} q(1-q) \times R \times S_j = q(2-q)[2(1-R)(1-q)^2 + q(2-q)]$$

其中，當第一個違約發生時，junior tranche 會吸收資產池 $(1-R)$ 違約損失，之後分券的剩餘本金為 R ，而這個部分 SPV 於下一個支付日仍須分配現金流，根據 premium waterfall 的機制，分配的現金流值為 $R \times S_j$ 。

$$\therefore S_j = \frac{q(2-q)[2(1-R)(1-q)^2 + q(2-q)]}{1+(1-q)^2 + 2q(1-q)R} \quad (3.30)$$

再來分析 senior tranche 的期望損失：



所以期望損失現值為：

$$\begin{aligned} & (1-q)^2 q^2 \times [2(1-R) - 1] + \binom{2}{1} q(1-q) \times q \times [2(1-R) - 1] + q^2 \times [2(1-R) - 1] \\ &= 2(1-R)[q^2(1-q)^2 + 2q^2(1-q) + q^2] - [q^2(1-q)^2 + 2q^2(1-q) + q^2] \\ &= [2(1-R) - 1] \times [q(1-q) + q]^2 \\ &= (1-2R)[q(2-q)]^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

在期望總報酬現值等於期望損失現值的條件下，senior tranche 的信用價差滿足下列等式：

$$S_s + [(1-q)^2 + \binom{2}{1} q(1-q)] \times S_s + q^2 \times 2R \times S_s = (1-2R)[q(2-q)]^2$$

其中，當第二個違約損失發生後，senior tranche 的剩餘本金為 $2R$ ，SPV 仍需要針對這個部分支付信用價差，根據 premium waterfall 的機制，SPV 在下一個支付日仍須支付 $2R \times S_s$ 給 senior tranche。

$$\therefore S_s = \frac{(1-2R)[q(2-q)]^2}{1+[(1-q)^2+2q(1-q)+2q^2R]} \quad (3.32)$$

從上述的描述當中，(3.29)式表 junior tranche 的期望損失現值，(3.31)式表 senior tranche 的期望損失現值，兩式相加即為分券端的總期望損失現值：

$$\begin{aligned} & \{ q(2-q)[2(1-R)(1-q)^2+q(2-q)] \} + \{ (1-2R)[q(2-q)]^2 \} \\ = & \{ 2(1-R)\times[q(1-q)^3+q(1-q)^2]+[q^2(1-q)^2+2q^2(1-q)+q^2] \} + \\ & \{ 2(1-R)\times[q^2(1-q)^2+2q^2(1-q)+q^2]-[q^2(1-q)^2+2q^2(1-q)+q^2] \} \\ = & 2(1-R)\times[q(1-q)^3+q(1-q)^2+q^2(1-q)^2+2q^2(1-q)+q^2] \\ = & 2(1-R)\times[2q-q^2] \\ = & 2(1-R)\times[q+q(1-q)] \\ = & 2\times[q\times(1-R)+(1-q)\times q\times(1-R)] \\ = & 2\times q(2-q)(1-R) \end{aligned} \quad (3.33)$$

而(3.33)式會等於 2 倍的(3.27)式，即資產池的期望損失現值等於分券端的總期望損失現值，這同時代表著，在有兩個支付日且不考慮交易手續費及其他佣金收入的情況下，SPV 從資產池收得的期望總現金流現值會等於付給 junior tranche、senior tranche 的期望總現金流現值，SPV 在 synthetic CDO 的架構之下並不會有額外的損益，但我們能夠保證是「期望總損益」為零，我們還不知道「總損益」的分配為何。

為了更明確凸顯 SPV 總損益分配的概念，我們利用上述的例子，令 $q = 0.5$ 分別代入 (3.28)、(3.30)、(3.32)，則：

$$\begin{aligned} s &= 0.5\times(1-R) \\ S_j &= \frac{0.5\times(2-0.5)\times[2\times(1-R)\times(1-0.5)^2+0.5\times(2-0.5)]}{1+(1-0.5)^2+2\times 0.5\times(1-0.5)\times R} \\ &= \frac{0.9375-0.375R}{1.25+0.5R} \end{aligned}$$

$$S_s = \frac{(1-2R) \times [0.5 \times (2-0.5)]^2}{1 + [(1-0.5)^2 + 2 \times 0.5 \times (1-0.5) + 2 \times 0.5^2 \times R]}$$

$$= \frac{0.5625 - 1.125R}{1.75 + 0.5R}$$

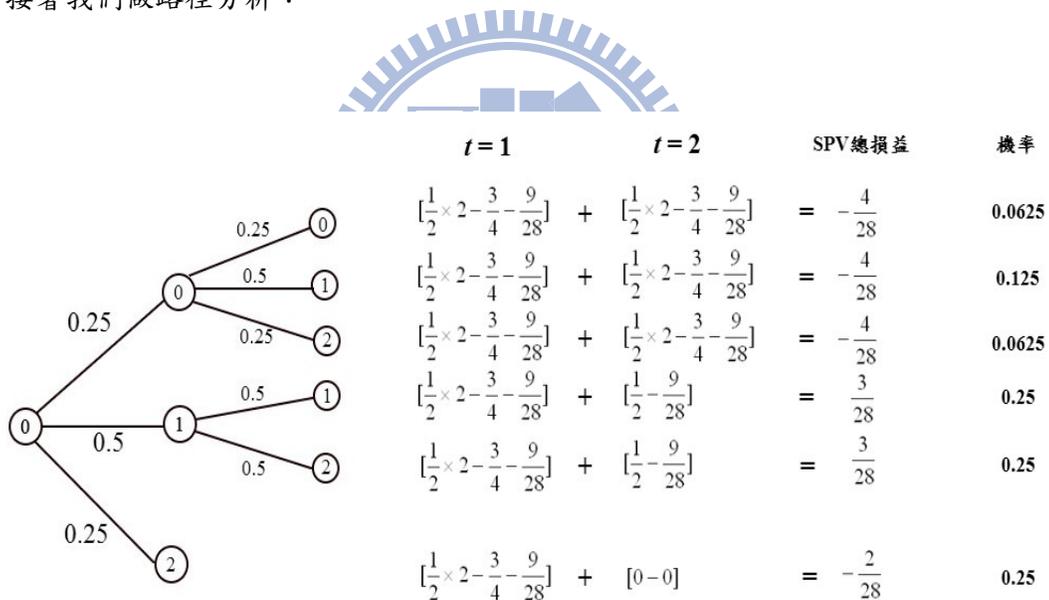
若取 $R = 0$ ，則

$$s = \frac{1}{2}$$

$$S_j = \frac{0.9375 - 0.375 \times 0}{1.25 + 0.5 \times 0} = \frac{3}{4}$$

$$S_s = \frac{0.5625 - 1.125 \times 0}{1.75 + 0.5 \times 0} = \frac{9}{28}$$

接著我們做路徑分析：



SPV 總損益期望值為：

$$\left(-\frac{4}{28}\right) \times (0.0625 + 0.125 + 0.0625) + \left(\frac{3}{28}\right) \times (0.25 + 0.25) + \left(-\frac{2}{28}\right) \times 0.25 = 0$$

再由路徑分析我們可以畫出總損益的累積機率分配：

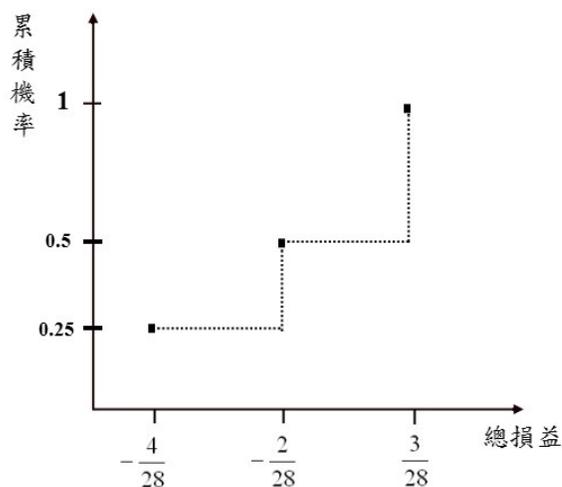


圖 3.2 R=0 之下 SPV 總損益的累積機率分配

圖 3.2 即是在期望總損益為零的前提下，SPV 的總損益分配。如圖 3.2 所示，一個建構在 premium waterfall 機制之下的訂價過程所造成的現金流不均衡進出，讓 SPV 會有 50% 的機率發生損失。

3.7 研究方法建構

由 3.6 節的推論可知，在給定期望損失等於期望總報酬的條件下所求得的公平報酬，仍使扮演 synthetic CDO 架構裡資產池與各級分券中間者角色的 SPV，有可能因為 premium waterfall 的機制而發生損失。

現在我們延續上一節的分析方法與邏輯，將研究的對象轉移至容易取得資料的 CDX.NA.IG 標準化合約上，同時利用 one-factor Gaussian copula 靜態模型和 Hull and White (2008) 的動態模型做為計算 synthetic CDO 分券公平報酬的工具，並以模型當中所設定的參數機率分配為基礎，做結構存續期間內參考資產違約情況的蒙地卡羅分析，進而計算 SPV 於所有支付日現金流一進一出之間的損益加總值。在建構蒙地卡羅分析之前，我們先描述評價對象及評價模型的設定：首先是

CDX.NA.IG，我們設定

- (1) 資產池由連結北美 125 家投資等級公司債的 CDS 所構成，每一個連結的公司債本金為 1 百萬美元，所以資產池所連結的總資產規模為 1.25 億美元。
- (2) CDS 契約分成 3、5、7、10 年期四種存續期間，分券契約則分成 5、7、10 年期三種存續期間；契約簽訂之後，資產池所連結的參考資產數以 125 個開始計算，而參考資產的成分於契約存續期間內不做更動 (static asset pool)。
- (3) 每三個月支付一次信用價差。

再來針對 one-factor Gaussian copula 靜態模型、Hull and White (2008) 動態模型，我們設定

- (1) 同質性模型，假定所有的參考資產同質。
- (2) 無風險利率、回收率為外生給定常數。
- (3) 參考資產的違約只在兩支付日的中間時間點發生。

以 one-factor Gaussian copula 靜態模型而言，模型當中參數有二：其一，年平均違約強度 $\bar{\mu}$ ， $\bar{\mu} \geq 0$ ；其二，兩兩公司資產價值間的相關係數 ρ ， $0 \leq \rho < 1$ 。在做蒙地卡羅模擬之前，利用 CDX.NA.IG 的市場報價以下列步驟求得 $\bar{\mu}$ 、 ρ 兩參數：

- (步驟 1) 給定無風險利率、回收率、契約存續時間。
- (步驟 2) 給定初始值 ρ ，再利用 CDS 的報價反求 $\bar{\mu}$ 。
- (步驟 3) 利用初始值 ρ 和步驟 2 所反求的 $\bar{\mu}$ ，計算該存續期間的契約，每個分券的公平報酬。
- (步驟 4) 計算各個分券的公平報酬與實際報價差值平方和，重新給定新的初始值 ρ ，回到步驟 2。
- (步驟 5) 反覆進行步驟 2 至步驟 4，直到各個分券的公平報酬與實際報價

相減平方和最小，取其參數 $\bar{\mu}$ 、 ρ ，並以此參數計算公平報酬。

以 Hull and White (2008) 動態模型而言，模型中有四個參數：其一，時間點 τ 的違約強度 $\mu(\tau)$ ；其二，年跳躍強度 λ ；其三，跳躍幅度 H_0 ，常數；其四，參數 β ，常數。值得一提的是，動態模型當中我們不直接求任一個時間點的違約強度 $\mu(\tau)$ (因為會有無限多個)，而是分別求 $\int_0^3 \mu(\tau) d\tau$ 、 $\int_3^5 \mu(\tau) d\tau$ 、 $\int_5^7 \mu(\tau) d\tau$ 、 $\int_7^{10} \mu(\tau) d\tau$ 四個積分值(因為 CDS 的報價有 3、5、7、10 三種存續期間)，為了表達方便，我們令

$$m3 = \int_0^3 \mu(\tau) d\tau, \quad m5 = \int_3^5 \mu(\tau) d\tau$$
$$m7 = \int_5^7 \mu(\tau) d\tau, \quad m10 = \int_7^{10} \mu(\tau) d\tau,$$

因此我們會有七個參數需要求解： $m3$ 、 $m5$ 、 $m7$ 、 $m10$ 、 λ 、 H_0 、 β ，利用 CDX.NA.IG 的市場報價以下列步驟求得：

- (步驟 1) 給定無風險利率、回收率。
- (步驟 2) 先給定一組 $[\lambda, H_0, \beta]$ 的初始值，再利用 3 年期的 CDS 報價反求 $m3$ ，然後再利用 5 年期的 CDS 報價和 $m3$ 反求 $m5$ ，接著利用 7 年期的 CDS 報價和 $m3$ 、 $m5$ 反求 $m7$ ，最後利用 10 年期的 CDS 報價和 $m3$ 、 $m5$ 、 $m7$ 反求 $m10$ 。
- (步驟 3) 利用初始值 $[\lambda, H_0, \beta]$ 和步驟 2 求得的 $m3$ 、 $m5$ 、 $m7$ 、 $m10$ ，分別計算 5、7、10 年期三種存續期間每個分券的公平報酬。
- (步驟 4) 計算各個分券的公平報酬與實際報價差值平方和，重新給定一組新的初始值 $[\lambda, H_0, \beta]$ ，回到步驟 2。
- (步驟 5) 反覆進行步驟 2 至步驟 4，直到各個分券的公平報酬與實際報價相減平方和最小，取其 $m3$ 、 $m5$ 、 $m7$ 、 $m10$ 、 λ 、 H_0 、 β ，並以此參數計算公平報酬。

有了模型參數、各種存續期間分券的公平報酬，我們便可以針對契約存續期間內參考資產所有可能的違約情形進行事件樹的建構，示意圖如下：

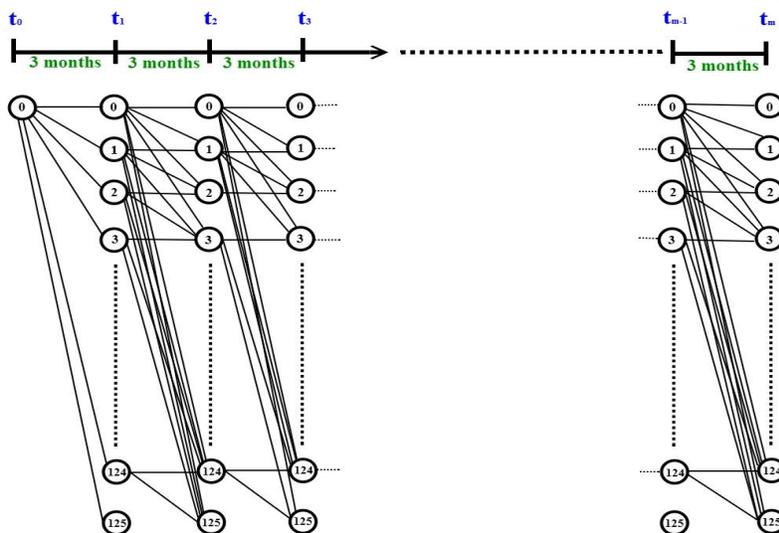


圖 3.3 蒙地卡羅模擬建構示意圖

樹中節點裡的數字代表參考資產於當個支付日的「累積違約個數」，蒙地卡羅模擬每走過一個節點即計算當點 SPV 現金收入減現金支出的損益值，蒙地卡羅模擬每走過一個節點即計算當點 SPV 現金收入減現金支出的損益值，每往前走一步，計算一次該節點的損益值，並同時加總經過節點的損益值；一條走至契約存續期間終點的路徑代表一次 SPV 的總損益現值。在 one-factor Gaussian copula 靜態模型之下，我們依據下列步驟進行蒙地卡羅模擬：

(步驟 1) 假設支付日為 t_1, t_2, \dots, t_m ，且 $t_0 = 0$ ；

n_k 為參考資產於第 k 個支付日的累積違約個數，且 $n_0 = 0$ ；

X_k 為不考慮交易手續費與其他佣金收入下，SPV 於第 k 個支付日的累積總損益現值，且 $X_0 = 0$ ；

定義： $S(t_k | F) = 1 - Q(t_k | F)$ 。

(步驟 2) $k = 0$ ；

$F \sim N(0,1)$ ，隨機抽取 F 的值。

(步驟 3) 利用最佳求解的模型參數 $\bar{\mu}$ 、 ρ ，和給定的 F 值，然後根據(2.8)

式，則 $S(t_k | F)$ 、 $S(t_{k+1} | F)$ 可求。

- (步驟 4) 當時間點 t_k 時參考資產已有 n_k 個違約損失， $0 \leq n_k \leq N$ ，而時間點 t_k 至時間點 t_{k+1} 發生了 n 個違約， $0 \leq n \leq N - n_k$ ，

$$n \sim \text{Binomial}(n, N - n_k, \frac{S(t_k | F) - S(t_{k+1} | F)}{S(t_k | F)}) ;$$

隨機抽取 n 的值。

- (步驟 5) n 的值決定，且已知 CDS 市場報價及各分券的公平報價，則於 t_{k+1} 時間點 SPV 現金收入減現金支出的損益現值為 $x \cdot e^{-r \cdot t_{k+1}}$

- (步驟 6) $X_{k+1} = X_k + x \cdot e^{-r \cdot t_{k+1}}$ ； $n_{k+1} = n_k + n$ ；

$k = k + 1$ 。

- (步驟 7) 當 $k < m$ ，則回到步驟 3；

當 $k = m$ ，則完成一次 SPV 總損益現值 (X_m) 的模擬，重新回到步驟 2 進行下一次模擬。

而在 Hull and White (2008) 動態模型之下，我們則依據下列步驟進行蒙地卡羅模擬：

- (步驟 1) 假設支付日為 t_1, t_2, \dots, t_m ，且 $t_0 = 0$ ；

n_k 為參考資產於第 k 個支付日的累積違約個數，且 $n_0 = 0$ ；

J_k 為契約存續期間內，公司生存機率所發生的累積跳躍次數，且

$J_0 = 0$ ；

X_k 為不考慮交易手續費與其他佣金收入下，SPV 於第 k 個支付日的累積總損益現值，且 $X_0 = 0$ ；

定義： $S(t_k | J_k) = 1 - Q(t_k | J_k)$ 。

- (步驟 2) $k = 0$ 。

- (步驟 3) 當時間點 t_k 時的累積跳躍次數為 J_k ，參考資產則已有 n_k 個違約損失， $0 \leq n \leq N - n_k$ ，而時間點 t_k 至時間點 t_{k+1} 發生了 J 次跳躍，

$$J \sim \text{Poisson}(0.25 \cdot \lambda)$$

且發生了 n 個違約， $0 \leq n \leq N - n_k$ ，

$$n \sim \text{Binomial}(n, N - n_k, \frac{S(t_k | J_k) - S(t_{k+1} | J_k + J)}{S(t_k | J_k)}) ;$$

先隨機抽取 J 的值，再利用最佳求解的 $m3$ 、 $m5$ 、 $m7$ 、 $m10$ 、 H_0 、 β ，和(2.13)式，則 $S(t_k | J_k)$ 、 $S(t_{k+1} | J_k + J)$ 可求；

最後隨機抽取 n 的值。

(步驟 4) n 的值決定，且已知 CDS 的市場報價及各分券的公平報酬，則於 t_{k+1}

時間點 SPV 現金收入減現金支出的損益現值為 $x \cdot e^{-r \cdot t_{k+1}}$

(步驟 5) $X_{k+1} = X_k + x \cdot e^{-r \cdot t_{k+1}}$ ； $J_{k+1} = J_k + J$ ； $n_{k+1} = n_k + n$ ；

$k = k + 1$ 。

(步驟 6) 當 $k < m$ ，則回到步驟 3；

當 $k = m$ ，則完成一次 SPV 總損益現值(X_m)的模擬，重新回到步驟 2 進行下一次模擬。

兩模型的蒙地卡羅模擬，示意圖如下：

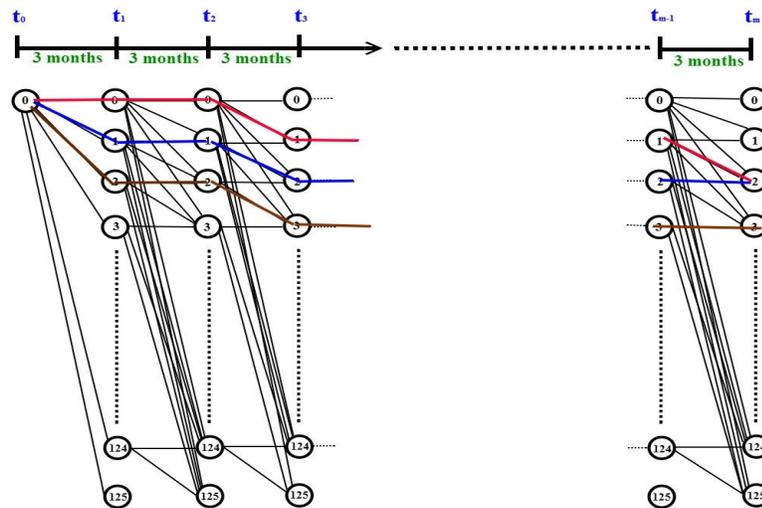


圖 3.4 蒙地卡羅模擬路徑示意圖

藉由足夠多路徑的模擬，我們可以拼湊出如圖 3.2 的 SPV 總損益累積機率圖，再藉由這些圖來計算 premium waterfall 機制中，在保證期望總損益為零的情況下，SPV 總損益的風險值 (VaR)，以量測收支不均衡的風險大小。

四、結果分析

本章節首先說明用來做模型參數最佳配適的兩組市場資料，以及本文章所建構的實驗分群，並且闡述使用的數值工具和數值方法所做的設定。接著說明 one-factor Gaussian copula 靜態模型、Hull and White (2008) 動態模型所有實驗的分析結果。

4.1 資料分組、實驗分群、數值工具與數值設定

4.1.1 資料分組

本文章共使用兩組市場資料來做實驗的對照組：其一，2007 年 1 月 30 日 CDX.NA.IG 的市場報價，該時間點位在 2008 年全球金融風暴之前，所以信用價差的報價較低；其二，2009 年 4 月 3 日 CDX.NA.IG 的市場報價，該時間點位在 2008 年全球金融風暴之後，所以信用價差的報價較高。做這樣的資料分組主要是為了能夠比較 premium waterfall 機制在低信用價差環境與高信用價差環境之下，SPV 現金流進出不均衡的情況。再一次呈現所使用的報價資料，下表 2007 年 1 月 30 日的報價除了 0 到 3% 分券的報價單位為 % 外，其餘的皆為 bps：

2007 年 1 月 30 日的 CDX.NA.IG 報價

| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------|------------------|------------------|----------|-------|--------|--------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| CDS Index | | | 19.00 | 31.00 | 43.00 | 56.00 |
| Index Tranches | 0% | 3% | n/a | 19.63 | 38.28 | 50.53 |
| | 3% | 7% | n/a | 63.00 | 172.25 | 427.00 |
| | 7% | 10% | n/a | 12.00 | 33.75 | 96.00 |
| | 10% | 15% | n/a | 4.50 | 14.50 | 43.25 |
| | 15% | 30% | n/a | 2.00 | 6.00 | 13.75 |
| | 30% | 100% | n/a | n/a | n/a | n/a |

下表 2009 年 4 月 3 日的報價中，0 到 3%、3 到 7%、7 到 10% 分券的報價單位為%，其餘的皆為 bps：

2009 年 4 月 3 日的 CDX.NA.IG 報價

| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------|------------------|------------------|----------|---------|--------|--------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| CDS Index | | | 280.50 | 262.10 | 236.10 | 204.80 |
| Index Tranches | 0% | 3% | n/a | 78.29 | 80.24 | 81.22 |
| | 3% | 7% | n/a | 47.94 | 54.15 | 57.26 |
| | 7% | 10% | n/a | 17.40 | 24.11 | 29.50 |
| | 10% | 15% | n/a | 548.34 | 575.05 | 578.63 |
| | 15% | 30% | n/a | 143.415 | 165.46 | 166.96 |
| | 30% | 100% | n/a | n/a | n/a | n/a |

我們將分別利用這兩組資料來做模型參數的最佳配適，其中，one-factor Gaussian copula 靜態模型需要配適求解的參數有二個：其一，年平均違約強度 μ ，不一樣存續期間的契約會有不一樣的年平均違約強度；其二，兩兩公司間資產價值的相關係數 ρ ， $0 \leq \rho < 1$ ，不一樣存續期間的契約會有不一樣的 ρ 。Hull and White (2008) 動態模型需要配適求解的參數則有七個，分別為年跳躍強度 λ 、跳躍幅度 H_0 和參數 β ，還有 $m3$ 、 $m5$ 、 $m7$ 、 $m10$ 四個違約強度的積分值。

4.1.2 實驗分群

本文章的實驗分群如下：

表 4.1 實驗分群

| | Premium Waterfall | ABS Waterfall |
|----------------|-------------------|---------------|
| CDX.NA.IG Rule | 實驗 1 | n/a |
| Typical Rule | 實驗 2 | 實驗 3 |

其中，CDX.NA.IG rule 指的是權益分券有期初預先支付的情況（權益分券有 up front payment），typical rule 則指的是權益分券沒有期初預先支付的情況（all payments in arrears），而在給定 premium waterfall 的機制之下，我們將依照這兩個規則分別計算分券的公平年信用價差和蒙地卡羅模擬 SPV 總損益分配。

實驗 1 的主要目的在於比較低信用價差環境與高信用價差環境之下，SPV 現金流進出不均衡的狀況；實驗 2 的目的在於比較權益分券有無期初支付對 SPV 總損益分配的影響；實驗 3 的主要目的在於比較不同的支付機制之下，分券公平信用價差的評價差異。

4.1.3 數值工具與數值設定

使用的數值工具如下：

- (1) Matlab 內建函式「fzero」可特別用於解「自訂函式」且「具有條件限制」的根
- (2) Matlab 內建函式「lsqnonlin」可特別用於進行「非線性自訂函式」參數的最佳配適
- (3) Matlab 內建函式 roots 可用於解多項式 (polynomial) 的根，本文章用於解 Hermite 多項式的根

數值設定將分成兩個部分，先說 one-factor Gaussian copula 靜態模型的設定：

- (1) (3.15)式我們將利用(3.17)式的 Gaussian quadrature approximation 方法來做，其中本文章 M 取 100 來做近似估計
- (2) 蒙地卡羅一次模擬做 100 條路徑，然後做 1000 次，所以總共模擬 10 萬條路徑；5、7、10 年期各以上述的方式模擬 10 萬條路徑
- (3) 蒙地卡羅一次模擬做 100 條路徑，代表 100 個 SPV 總損益的結果，計算一次平均 M_1 和標準差 S_1 ；模擬 1000 次，則母體平均值的不偏估計為：

$$\bar{M} = \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_{1000}}{1000}$$

估計的平均值標準差則為：

$$std(M) = \sqrt{\frac{1}{(1000-1)} \sum_{i=1}^{1000} (M_i - \bar{M})^2}$$

本文章取 95% 信心水準，所以估計平均值的信賴區間為：
 $\bar{M} \pm 1.96 \cdot std(M)$ ，而 0 (母體平均值) 必須落在這個區間內，這樣才符合
本文章的推論：SPV 在不考慮交易手續費及佣金收入的情形下，期望總
損益為 0。母體標準差的不偏估計為：

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_{1000}^2}{1000}}$$

再來是 Hull and White (2008) 動態模型的設定

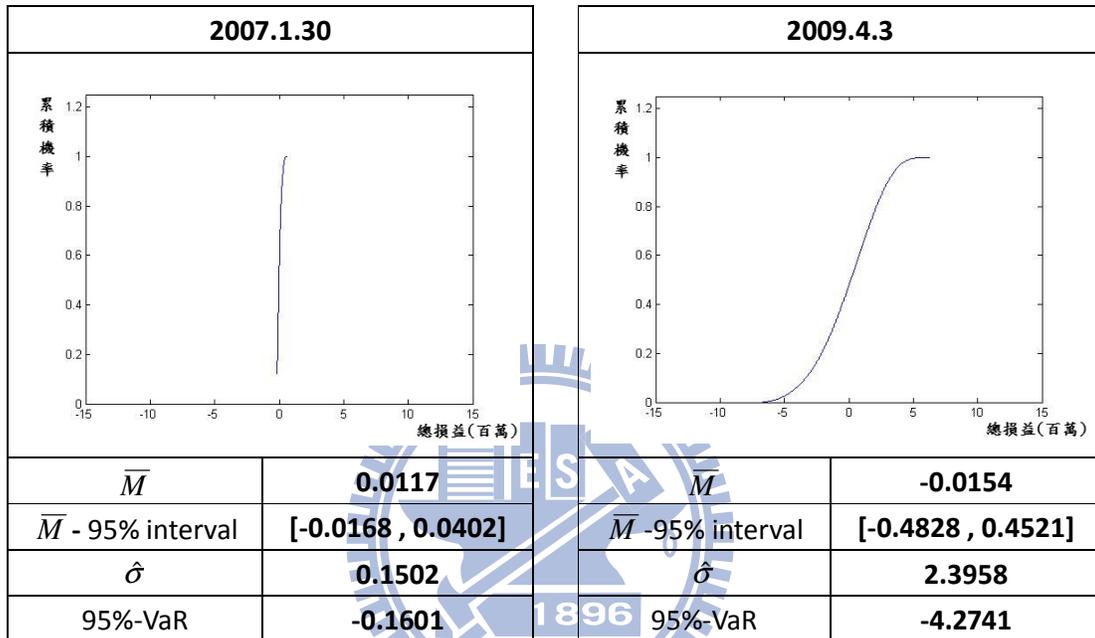
- (1) (3.25)、(3.26) 式中的 $J \rightarrow \infty$ 本文章取 $J = 20$ 來做近似估計
- (2) 蒙地卡羅一次模擬做 100 條路徑，然後做 1000 次；10 萬條模擬路徑只
需要做一次 10 年期契約的模擬，5 年期契約則取其前 5 年的路徑結果，
7 年期契約取其前 7 年的路徑結果
- (3) 平均值和標準差的估計同 one-factor Gaussian copula 靜態模型

4.2 one-factor Gaussian copula 靜態模型的分析結果

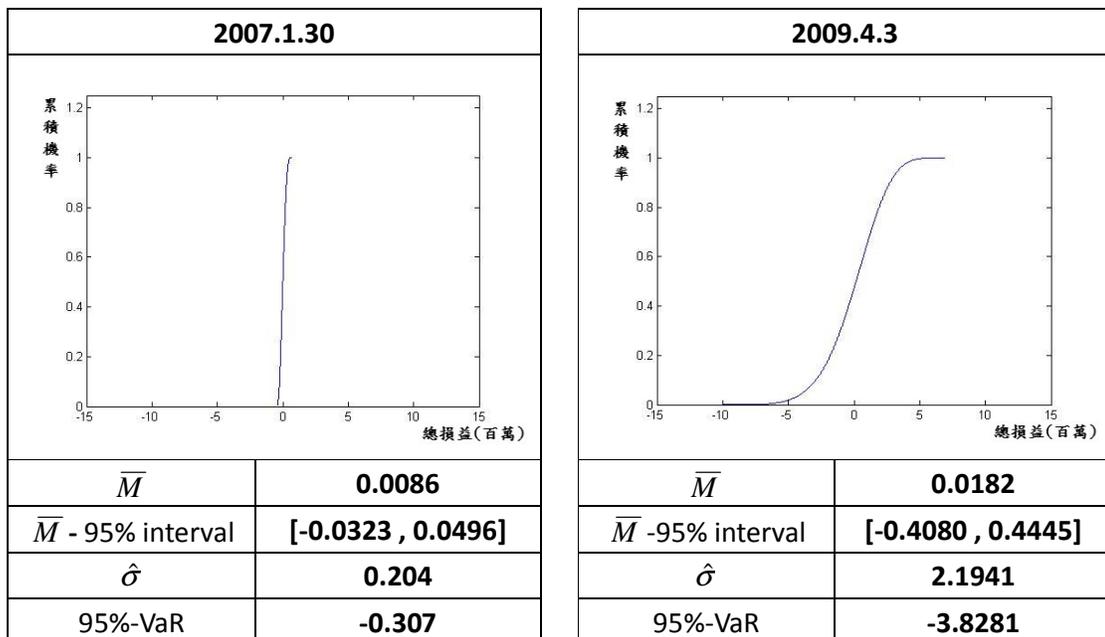
(實驗 1) – premium waterfall 之下，低信用價差環境 vs.高信用價差環境，比較 SPV

總損益的累積機率分配

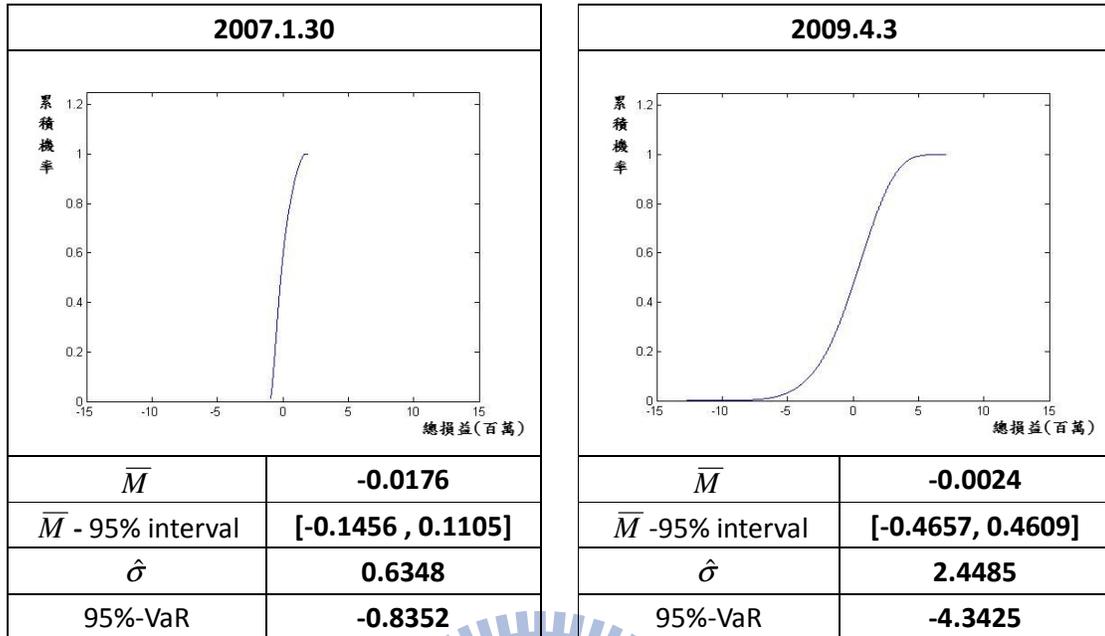
(1) 5 年期契約：



(2) 7 年期契約：



(3) 10 年期契約：



從上列的對照圖表我們可以看出在 premium waterfall 的機制之下，SPV 總損益的累積機率分配在低信用價差環境與高信用價差環境之間有明顯的差異，而有下列兩點觀察：其一，從 one-factor Gaussian copula 靜態訂價模型的角度出發，在不考慮交易手續費及其他佣金收入的情況下，SPV 收支不均等的情況確實存在，而且不均等的現象，在高信用價差環境比在低信用價差環境還要明顯很多，這代表在高信用價差的環境下，SPV 有機會因為 premium waterfall 的機制帶來鉅額利潤，亦有可能帶來鉅額損失；其二，存續期間越長的契約，premium waterfall 機制越有可能替 SPV 帶來極端的虧損，這個現象在高信用價差的環境下更是明顯，以 2009 年 4 月 3 日的 5 年期契約來看，SPV 最極端的總損失為 665 萬美金，7 年期契約為 990 萬美金，10 年期契約則高達 1270 萬美金。所以可以見得，premium waterfall 對 SPV 而言並不是一個安全的機制。

(實驗 2) – premium waterfall 之下，CDX.NA.IG rule vs. Typical rule，比較 SPV 總損益的累積機率分配

(1) 2007 年 1 月 30 日，分別在 CDX.NA.IG rule 和 typical rule 下計算分券的公平年信用價差，其結果配合蒙地卡羅法模擬 SPV 的總損益分配：

表 4.2 2007 年 1 月 30 日，CDX.NA.IG rule 之下 SPV 總損益分配
- one-factor Gaussian copula 靜態模型

| | \bar{M} | \bar{M} - 95% interval | $\hat{\sigma}$ | 90%-VaR | 95%-VaR | 99%-VaR |
|-------------|-----------|--------------------------|----------------|---------|---------|---------|
| 5yr | 0.0117 | [-0.0168 , 0.0402] | 0.1502 | -0.1601 | -0.1601 | -0.1601 |
| 7yr | 0.0086 | [-0.0323 , 0.0496] | 0.204 | -0.2549 | -0.307 | -0.3866 |
| 10yr | -0.0176 | [-0.1456 , 0.1105] | 0.6348 | -0.7478 | -0.8352 | -0.9429 |

表 4.3 2007 年 1 月 30 日，Typical rule 之下 SPV 總損益分配
- one-factor Gaussian copula 靜態模型

| | \bar{M} | \bar{M} - 95% interval | $\hat{\sigma}$ | 90%-VaR | 95%-VaR | 99%-VaR |
|-------------|-----------|--------------------------|----------------|---------|---------|---------|
| 5yr | 0.0124 | [-0.0609 , 0.0857] | 0.3864 | -0.4302 | -0.4302 | -0.4302 |
| 7yr | 0.0056 | [-0.1715 , 0.1827] | 0.8828 | -1.1616 | -1.3982 | -1.7598 |
| 10yr | -0.0247 | [-0.3879 , 0.3385] | 1.7909 | -2.5186 | -2.9473 | -3.4755 |

(2) 2009 年 4 月 3 日，分別在 CDX.NA.IG rule 和 typical rule 下計算分券的公平年信用價差，其結果配合蒙地卡羅法模擬 SPV 的總損益分配：

表 4.4 2009 年 4 月 3 日，CDX.NA.IG rule 之下 SPV 總損益分配
- one-factor Gaussian copula 靜態模型

| | \bar{M} | \bar{M} - 95% interval | $\hat{\sigma}$ | 90%-VaR | 95%-VaR | 99%-VaR |
|-------------|-----------|--------------------------|----------------|---------|---------|---------|
| 5yr | 0.0154 | [-0.4828 , 0.4521] | 2.3958 | -3.3364 | -4.2741 | -5.7057 |
| 7yr | 0.0182 | [-0.4080 , 0.4445] | 2.1941 | -2.9081 | -3.8281 | -5.5858 |
| 10yr | -0.0024 | [-0.4657 , 0.4609] | 2.4485 | -3.2587 | -4.3425 | -6.4293 |

表 4.5 2009 年 4 月 3 日 Typical rule 之下 SPV 總損益分配
- one-factor Gaussian copula 靜態模型

| | \bar{M} | \bar{M} - 95% interval | $\hat{\sigma}$ | 90%-VaR | 95%-VaR | 99%-VaR |
|-------------|-----------|--------------------------|----------------|---------|---------|----------|
| 5yr | -0.0198 | [-0.8316 , 0.7921] | 4.1472 | -5.6351 | -7.6559 | -11.6875 |
| 7yr | -0.0211 | [-0.6480 , 0.6902] | 3.426 | -4.5282 | -6.1399 | -9.4545 |
| 10yr | -0.0128 | [-0.7060 , 0.6804] | 3.6499 | -4.8515 | -6.5802 | -10.0731 |

CDX.NA.IG rule 和 typical rule 兩個規則所產生的訂價差異只有在權益分券的地方，其他分券的計算方式皆相同，所以結果也相同（請參見附錄）。CDX.NA.IG rule 的權益分券算的是期初預先支付的比例，使用(3.5)式來計算；typical rule 因為不需要做期初預先支付的動作，所以權益分券比照其他分券的算法，使用(3.4)式來計算。比較表 4.2、表 4.3 和表 4.4、表 4.5 兩組結果發現，無論是在低信用價差環境還是高信用價差環境，對分券端的最先損失部位施以期初預先支付本金（還未發生任何損失時）某個比例的方式，能夠有效的讓 SPV 在 premium waterfall 的機制下降低極端損失的發生機會，換句話說，對 SPV 而言，分券最先損失部位的期初預先支付規則讓 premium waterfall 的機制變得比較安全。

(實驗 3)– 在 typical rule 之下，premium waterfall vs. ABS waterfall，比較分券公平年信用價差的評價差別

(1) 2007 年 1 月 30 日，分別在 premium waterfall 和 ABS waterfall 機制下計算分券的公平年信用價差，其中 0 到 3%分券的單位為%，其餘的為 bps：

表 4.6 2007 年 1 月 30 日，給定 typical rule，在 premium waterfall 下的公平年信用價差

- one-factor Gaussian copula 靜態模型

| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------------|------------------|------------------|----------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| Fair Tranche Spreads | 0% | 3% | n/a | 12.07 | 20.17 | 20.88 |
| | 3% | 7% | n/a | 63.47 | 176.88 | 522.97 |
| | 7% | 10% | n/a | 2.25 | 3.21 | 167.73 |
| | 10% | 15% | n/a | 0.10 | 0.03 | 49.01 |
| | 15% | 30% | n/a | 4.11×10^{-4} | 4.09×10^{-6} | 3.48 |
| | 30% | 100% | n/a | 1.28×10^{-10} | 2.93×10^{-11} | 1.49×10^{-3} |

表 4.7 2007 年 1 月 30 日，給定 typical rule，ABS waterfall 下的公平年信用價差

- one-factor Gaussian copula 靜態模型

| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------------|------------------|------------------|----------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| Fair Tranche Spreads | 0% | 3% | n/a | 9.48 | 10.29 | 10.30 |
| | 3% | 7% | n/a | 62.58 | 170.9 | 435.02 |
| | 7% | 10% | n/a | 2.23 | 3.19 | 159.22 |
| | 10% | 15% | n/a | 0.10 | 0.03 | 48.15 |
| | 15% | 30% | n/a | 4.09×10^{-4} | 4.06×10^{-6} | 3.45 |
| | 30% | 100% | n/a | 1.27×10^{-10} | 2.91×10^{-11} | 1.48×10^{-3} |

(2) 2009 年 4 月 3 日，分別在 premium waterfall 和 ABS waterfall 機制下計算分券的公平年信用價差，其中 0 到 3%、3 到 7%、7 到 10%、10 到 15% 分券的單位為%，其餘的為 bps：

表 4.8 2009 年 4 月 3 日，給定 typical rule，premium waterfall 下的公平年信用價差
- one-factor Gaussian copula 靜態模型

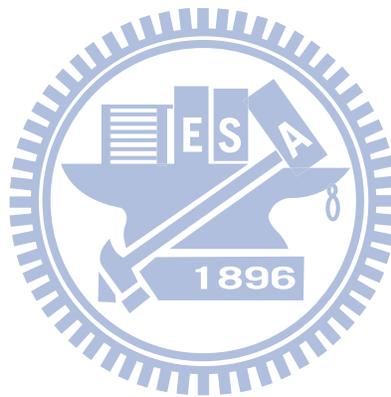
| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------------|------------------|------------------|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| Fair Tranche Spreads | 0% | 3% | n/a | 134.04 | 132.26 | 114.90 |
| | 3% | 7% | n/a | 44.40 | 42.88 | 37.18 |
| | 7% | 10% | n/a | 23.02 | 24.72 | 21.52 |
| | 10% | 15% | n/a | 8.76 | 12.85 | 13.58 |
| | 15% | 30% | n/a | 44.18 | 62.57 | 170.66 |
| | 30% | 100% | n/a | 6.98×10^{-5} | 1.60×10^{-9} | 2.59×10^{-6} |

表 4.9 2009 年 4 月 3 日，給定 typical rule，ABS waterfall 下的公平年信用價差
- one-factor Gaussian copula 靜態模型

| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------------|------------------|------------------|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| Fair Tranche Spreads | 0% | 3% | n/a | 29.00 | 24.41 | 25.90 |
| | 3% | 7% | n/a | 19.70 | 14.37 | 10.12 |
| | 7% | 10% | n/a | 16.55 | 14.17 | 9.93 |
| | 10% | 15% | n/a | 8.01 | 10.71 | 9.49 |
| | 15% | 30% | n/a | 44.03 | 62.27 | 166.71 |
| | 30% | 100% | n/a | 6.97×10^{-5} | 1.60×10^{-9} | 2.59×10^{-6} |

如果說對 SPV 而言 premium waterfall 機制是不安全的機制（如實驗 1 所呈現），ABS waterfall 則是最安全的機制，因為它保證任何情況下，無論高信用價差環境或低信用價差環境，在契約存續期間內，每一個支付日 SPV 的現金收入等於現金支出（在不考慮交易手續費及其他佣金的情況下）。從表 4.8、表 4.9 兩表來比較會發現，在 CDX.NA.IG 指數所定義的分券下，給定機率模型，採 ABS waterfall 機制的評價結果會低於 premium waterfall 機制下的評價結果，這代表兩個不同機制

下的同等級分券，名義上承擔相同的損失風險，卻因為 ABS waterfall 的機制能使分券在既定的風險之下配給到更多的補償，變相的降低分券所承擔的損失風險，而使評價的結果低於 premium waterfall 機制下的評價結果。

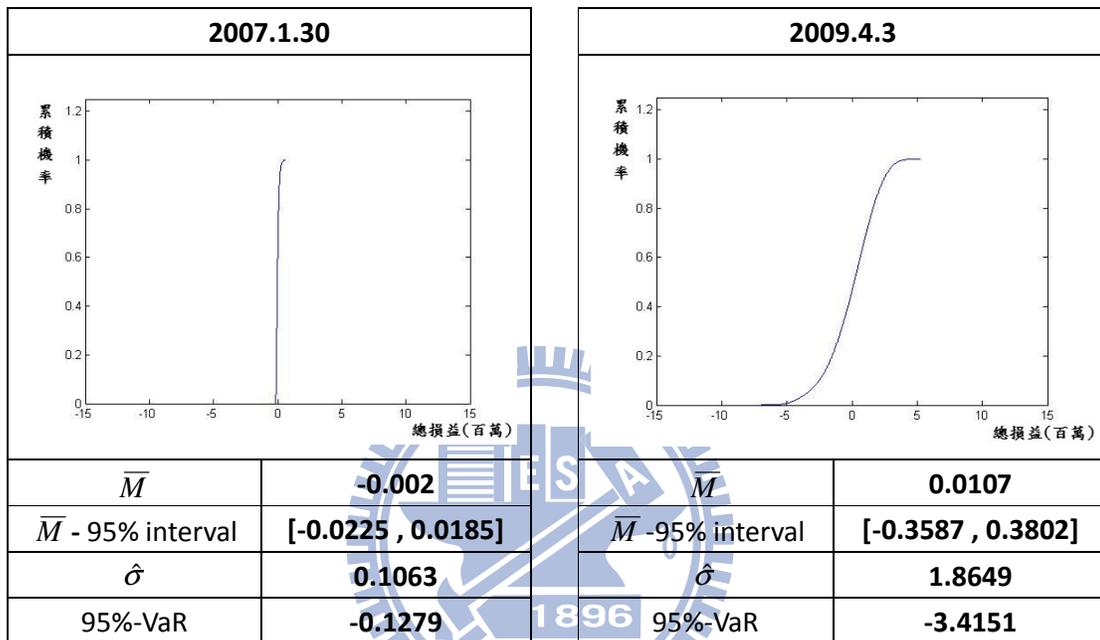


4.3 Hull and White (2008) 動態模型的分析結果

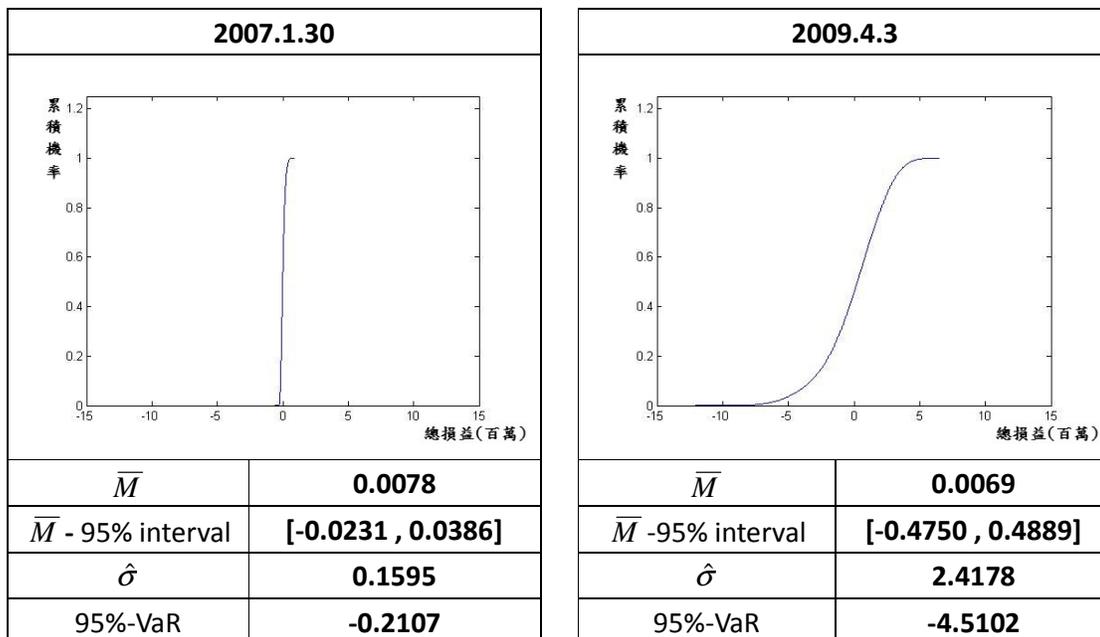
(實驗 1) – premium waterfall 之下，低信用價差環境 vs.高信用價差環境，比較 SPV

總損益的累積機率分配

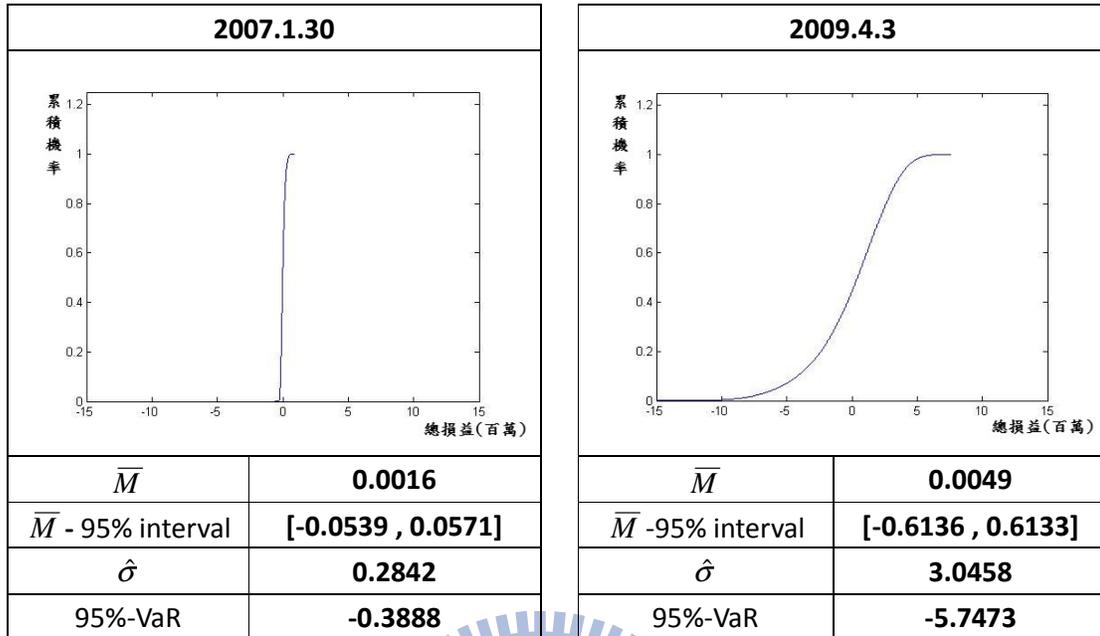
(1) 5 年期契約：



(2) 7 年期契約：



(3) 10 年期契約：



從 Hull and White (2008) 動態模型的角度出發，在不考慮交易手續費及其他佣金收入的情況下，SPV 收支不均等的情況同樣存在，而且不均等的現象，在高信用價差環境比在低信用價差環境還要明顯，這點也與 one-factor Gaussian copula 靜態模型的結果相同，所以 Hull and White (2008) 動態模型同樣也可以說明，premium waterfall 對 SPV 而言並不是一個安全的機制。

有兩點值得一提：其一，假設公司生存機率存在跳躍的 Hull and White (2008) 動態模型，比公司生存機率不存在跳躍的 one-factor Gaussian copula 靜態模型更容易發生極端現象，在公司會因為經濟衝擊而存在短期內大規模倒閉現象的市場上，premium waterfall 機制對 SPV 而言更顯得不安全，而這個現象在高信用價差環境下特別嚴重 (SPV 總損益累積機率圖的左尾，動態模型明顯比 one-factor Gaussian copula 還要長)；其二，違約強度隨機決定的動態模型，隨著契約存續期間的拉長，SPV 總報酬分配的標準差，在高信用價差的環境下增幅會快過假設違約強度為常數(平均值)的靜態模型，這代表在高信用價差環境下以動態模型看 premium waterfall 機制會比以靜態模型的角度來看還要危險。

(實驗 2) – premium waterfall 之下，CDX.NA.IG rule vs. Typical rule，比較 SPV 總損益的累積機率分配

(1) 2007 年 1 月 30 日，分別在 CDX.NA.IG rule 和 typical rule 下計算分券的公平年信用價差，其結果配合蒙地卡羅法模擬 SPV 的總損益分配：

**表 4.10 2007 年 1 月 30 日，CDX.NA.IG rule 之下 SPV 總損益分配
- Hull and White (2008) 動態模型**

| | \bar{M} | \bar{M} - 95% interval | $\hat{\sigma}$ | 90%-VaR | 95%-VaR | 99%-VaR |
|-------------|-----------|--------------------------|----------------|---------|---------|---------|
| 5yr | 0.002 | [-0.0225, 0.0185] | 0.1063 | -0.12 | -0.1279 | -0.1279 |
| 7yr | 0.0078 | [-0.0231, 0.0386] | 0.1595 | -0.1776 | -0.2107 | -0.2527 |
| 10yr | 0.0016 | [-0.0539, 0.0571] | 0.2842 | -0.3228 | -0.3888 | -0.4931 |

**表 4.11 2007 年 1 月 30 日，Typical rule 之下 SPV 總損益分配
- Hull and White (2008) 動態模型**

| | \bar{M} | \bar{M} - 95% interval | $\hat{\sigma}$ | 90%-VaR | 95%-VaR | 99%-VaR |
|-------------|-----------|--------------------------|----------------|---------|---------|---------|
| 5yr | -0.0024 | [-0.0497, 0.0449] | 0.2455 | -0.2747 | -0.2929 | -0.2929 |
| 7yr | 0.0065 | [-0.0917, 0.1048] | 0.5077 | -0.5954 | -0.7048 | -0.844 |
| 10yr | -0.0001 | [-0.1565, 0.1564] | 0.7981 | -0.9991 | -1.2499 | -1.657 |

(2) 2009 年 4 月 3 日，分別在 CDX.NA.IG rule 和 typical rule 下計算分券的公平年信用價差，其結果配合蒙地卡羅法模擬 SPV 的總損益分配：

**表 4.12 2009 年 4 月 3 日，CDX.NA.IG rule 之下 SPV 總損益分配
- Hull and White (2008) 動態模型**

| | \bar{M} | $\bar{M} - 95\% \text{ interval}$ | $\hat{\sigma}$ | 90%-VaR | 95%-VaR | 99%-VaR |
|-------------|-----------|-----------------------------------|----------------|---------|---------|---------|
| 5yr | 0.0107 | [-0.3587, 0.3802] | 1.8649 | -2.5221 | -3.4151 | -4.8006 |
| 7yr | 0.0069 | [-0.4750, 0.4889] | 2.4178 | -3.256 | -4.5102 | -6.5511 |
| 10yr | 0.0049 | [-0.6136, 0.6133] | 3.0458 | -4.1576 | -5.7473 | -8.5397 |

**表 4.13 2009 年 4 月 3 日，Typical rule 之下 SPV 總損益分配
- Hull and White (2008) 動態模型**

| | \bar{M} | $\bar{M} - 95\% \text{ interval}$ | $\hat{\sigma}$ | 90%-VaR | 95%-VaR | 99%-VaR |
|-------------|-----------|-----------------------------------|----------------|---------|---------|----------|
| 5yr | 0.0156 | [-0.6084, 0.6397] | 3.1217 | -4.1729 | -5.6859 | -8.6509 |
| 7yr | 0.0118 | [-0.7098, 0.7333] | 3.6046 | -4.8223 | -6.5713 | -10.081 |
| 10yr | 0.01 | [-0.8224, 0.8423] | 4.1572 | -5.5993 | -7.6448 | -11.6653 |

這個實驗的結果，Hull and White (2008) 動態模型與 one-factor Gaussian copula 靜態模型的結果相同：無論是在低信用價差環境還是高信用價差環境，對分券端的最先損失部位施以期初預先支付本金某個比例的方式，能夠有效的讓 SPV 在 premium waterfall 的機制下降低極端損失的發生機會。

(實驗 3)– 在 Typical rule 之下，premium waterfall vs. ABS waterfall，比較分券公平年信用價差的評價差別

(1) 2007 年 1 月 30 日，分別在 premium waterfall 和 ABS waterfall 機制下計算分券的公平年信用價差，其中 0 到 3%分券的單位為%，其餘的為 bps：

表 4.14 2007 年 1 月 30 日，給定 typical rule，premium waterfall 下的公平年信用價差

- Hull and White (2008) 動態模型

| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------------|------------------|------------------|----------|-------|--------|--------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| Fair Tranche Spreads | 0% | 3% | n/a | 10.85 | 14.87 | 17.12 |
| | 3% | 7% | n/a | 58.97 | 168.73 | 428.59 |
| | 7% | 10% | n/a | 14.25 | 36.9 | 98.13 |
| | 10% | 15% | n/a | 8.50 | 19.27 | 44.61 |
| | 15% | 30% | n/a | 2.67 | 7.24 | 19.24 |
| | 30% | 100% | n/a | 0.23 | 0.72 | 2.27 |

表 4.15 2007 年 1 月 30 日，給定 typical rule，ABS waterfall 下的公平年信用價差

- Hull and White (2008) 動態模型

| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------------|------------------|------------------|----------|-------|-------|-------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| Fair Tranche Spreads | 0% | 3% | n/a | 9.08 | 10.92 | 10.25 |
| | 3% | 7% | n/a | 58.57 | 164.9 | 392 |
| | 7% | 10% | n/a | 14.23 | 36.71 | 96.22 |
| | 10% | 15% | n/a | 8.49 | 19.22 | 44.18 |
| | 15% | 30% | n/a | 2.67 | 7.24 | 19.16 |
| | 30% | 100% | n/a | 0.23 | 0.72 | 2.27 |

(2) 2009 年 4 月 3 日，分別在 premium waterfall 和 ABS waterfall 機制下計算分券的公平年信用價差，其中 0 到 3%、3 到 7%、7 到 10%、10 到 15% 分券的單位為%，其餘的為 bps：

表 4.16 2009 年 4 月 3 日，給定 typical rule，premium waterfall 下的公平年信用價差
- Hull and White (2008) 動態模型

| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------------|------------------|------------------|----------|--------|--------|--------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| Fair Tranche Spreads | 0% | 3% | n/a | 147.76 | 147.76 | 147.76 |
| | 3% | 7% | n/a | 47.61 | 47.72 | 47.73 |
| | 7% | 10% | n/a | 23.90 | 26.04 | 26.34 |
| | 10% | 15% | n/a | 6.09 | 10.59 | 13.19 |
| | 15% | 30% | n/a | 31.56 | 56.09 | 112.32 |
| | 30% | 100% | n/a | 11.87 | 11.85 | 11.83 |

表 4.17 2009 年 4 月 3 日，給定 typical rule，ABS waterfall 下的公平年信用價差
- Hull and White (2008) 動態模型

| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------------|------------------|------------------|----------|-------|-------|--------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| Fair Tranche Spreads | 0% | 3% | n/a | 29.30 | 25.07 | 21.82 |
| | 3% | 7% | n/a | 20.06 | 14.52 | 10.30 |
| | 7% | 10% | n/a | 17.36 | 14.02 | 10.05 |
| | 10% | 15% | n/a | 5.78 | 8.84 | 8.69 |
| | 15% | 30% | n/a | 31.34 | 55.42 | 109.04 |
| | 30% | 100% | n/a | 11.84 | 11.81 | 11.76 |

在給定 Hull and White (2008) 動態模型中提供的機率模型，然後在 ABS waterfall 的機制下重新計算分券的公平年信用價差，會發現評價的結果就如同在 one-factor Gaussian copula 靜態模型之下做的結果一樣，ABS waterfall 機制下的公平年信用價差會低於 premium waterfall 機制下的公平年信用價差。

五、結論

在 static synthetic CDO 的架構當中，SPV 所使用的 premium waterfall 機制對 SPV 來說並不安全，理由在於 premium waterfall 機制只能保證，在不考慮交易手續費及其他佣金收入的情況下，SPV 於契約存續期間內的期望總損益為零；事實上，SPV 收支不均等的情況確實存在，不均等的程度也會隨著總體經濟環境的變化、付費規則的調整而有所不同。

以總體經濟環境而言，在市場狀況較惡劣的高信用價差環境下，SPV 收支不均等的程度明顯大於市場狀況較穩定的低信用價差環境，這代表 premium waterfall 機制在不穩定的市場下有機會替 SPV 造成鉅額的損失；以付費規則而言，若 SPV 能夠針對分券的最先損失部位施以期初事先支付分券本金某個比例的現金，以降低之後每個支付日信用價差支付量的規則 (CDX.NA.IG rule)，SPV 收支不均等的程度能夠得到明顯的下降，而降低幅度在高信用價差的環境下特別明顯，這代表對分券的最先損失部位採預先支付的規則，能夠讓對 SPV 不安全的 premium waterfall 機制變得比較安全。

若說 premium waterfall 對 SPV 是不安全的機制，則 ABS waterfall 對 SPV 而言是最安全的機制，因為無論市場好壞，在 ABS waterfall 的機制之下，SPV 有多少的現金收入，就支付給分券多少的現金，所以 ABS waterfall 保證的是契約存續期間內，SPV 於所有支付日的損益為零。在給定機率模型之下，重新改以 ABS waterfall 的機制對分券的公平年信用價差進行評價，發現其評價結果明顯低於 premium waterfall 機制下的評價結果；在高信用價差環境下的評價結果，差異程度會大於低信用價差環境下的差異程度。主要的原因在於，ABS waterfall 之下，同樣等級的分券買方比起在 premium waterfall 之下買方，在分券本金歸零後還能夠獲得更多的補償報酬，而且在信用價差較高的環境下能夠得到的補償越多，這變相的降低了分券的投資風險，所以 ABS waterfall 的機制不僅對 SPV 安全，對分

券的買方也比較安全。

one-factor Gaussian copula 靜態模型與 Hull and White (2008) 動態模型整體的分析結果大同小異，但仍有兩個主要的差別：其一，Hull and White (2008) 的動態模型假設市場上公司的生存機率存在跳躍，比起 one-factor Gaussian copula 靜態模型，動態模型更能夠反映市場的極端情況，因此從 Hull and White (2008) 動態模型進行分券的訂價，同一個存續期間的契約，因為極端情況存在的緣故，高等級分券的公平年信用價差會明顯高於 one-factor Gaussian copula 靜態模型，這代表 Hull and White (2008) 動態模型下，高等級分券的投資者承擔的風險比較大；其二，在一個能夠反應極端情況的風險中立機率模型下，premium waterfall 機制會隨著契約存續期間的拉長，而有比假設市場沒有極端境況的模型更鉅額的損益存在，這代表當經濟環境出現負面衝擊時，premium waterfall 機制對 SPV 而言更顯得不安全，而當契約的存續期間拉長，SPV 越有機會在期間內因遭遇市場的負面衝擊而發生鉅額虧損。



参考文献

- [1] Burtshell, X., Gregory, J., and Laurent, J.-P. "A Comparative Analysis of CDO Pricing Models under the Factor Copula Framework," *Journal of Derivatives*, 16, 4 (Summer 2009): 9-37.
- [2] Chaplin, G., *Credit Derivatives: Risk Management, Trading and Investing*. Chichester: Wiley, 2005.
- [3] Hull, J. and A. White. "Valuation of a CDO and nth to Default CDS without Monte Carlo Simulation," *Journal of Derivatives*, 12, 2 (Winter 2004): 8-23.
- [4] Hull, J. and A. White. "Dynamic Models of Portfolio Credit Risk: A Simplified Approach," *Journal of Derivatives*, 15, 4 (Summer 2008): 9-28.
- [5] Hull, J. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 7th ed. NJ: Pearson Education, 2009.
- [6] Longstaff, F., and A. Rajan. "An Empirical Analysis of the Pricing of Collateralized Debt Obligations," *Journal of Finance*, 63, 2 (April 2008): 529-563.
- [7] Choudhry, M. *Structured Credit Products: Credit Derivatives & Synthetic Securitisation*. Singapore: Wiley, 2004.
- [8] Picone, D. "Structuring and rating cash-flow CDOs with rating transition matrices," *working paper*, Domenico Picone of Cass Business School- London (2005).
- [9] Satyajit Das. *Credit Derivatives: CDOs & Structured Credit Products*, 3rd ed. Singapore: Wiley, 2005.
- [10] Vasicek, O.A. "The Distribution of Loan Portfolio Value," *Risk*, 15, 12 (December 2002): 160-162.

附錄

one-factor Gaussian copula 靜態模型下，針對 2007 年 1 月 30 日的資料所做的參數最佳配適，結果如下表：

表 6.1 one-factor Gaussian copula 靜態模型參數的最佳配適結果
-針對 2007 年 1 月 30 日的資料

| | 5yr | 7yr | 10yr |
|-------------|--------|--------|--------|
| $\bar{\mu}$ | 0.0051 | 0.0071 | 0.0093 |
| ρ | 0.0692 | 0.0208 | 0.1118 |

利用表 6.1 的參數，同時給定 CDS 的報價為公平年信用價差，在 CDX.NA.IG rule 下求分券的公平年信用價差，其中除了 0 到 3%分券的單位為%外，其餘的皆為 bps：

表 6.2 CDX.NA.IG rule 下 2007 年 1 月 30 日分券的公平年信用價差
- one-factor Gaussian copula 模型

| | attachment point | detachment point | maturity | | | |
|----------------------|------------------|------------------|----------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| | | | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| Fair Tranche Spreads | 0% | 3% | n/a | 23.89 | 51.36 | 56.62 |
| | 3% | 7% | n/a | 63.47 | 176.88 | 522.97 |
| | 7% | 10% | n/a | 2.25 | 3.21 | 167.73 |
| | 10% | 15% | n/a | 0.10 | 0.03 | 49.01 |
| | 15% | 30% | n/a | 4.11×10^{-4} | 4.09×10^{-6} | 3.48 |
| | 30% | 100% | n/a | 1.28×10^{-10} | 2.97×10^{-11} | 1.49×10^{-3} |

無論 typical rule 或 CDX.NA.IG rule，使用表 6.1 的模型參數來計算公平信用價差。表 6.2 與表 4.6 相較，會發現 typical rule 與 CDX.NA.IG rule 的計算結果差別只在 0 到 3%的分券上，其餘的皆相同。

one-factor Gaussian copula 靜態模型下，針對 2009 年 4 月 3 日的資料所做的參數最佳配適，結果如下表：

表 6.3 one-factor Gaussian copula 靜態模型參數的最佳配適結果
-針對 2009 年 4 月 3 日的資料

| | 5yr | 7yr | 10yr |
|-------------|--------|------------------------|------------------------|
| $\bar{\mu}$ | 0.0437 | 0.0393 | 0.0341 |
| ρ | 0.0230 | 8.26×10^{-10} | 6.26×10^{-10} |

再利用表 6.1 的參數，同時給定 CDS 的報價為公平年信用價差，公平年信用價差，其中 0 到 3%、3 到 7%、7 到 10%、10 到 15%分券的單位為%，其餘的為 bps：

表 6.4 CDX.NA.IG rule 下 2009 年 4 月 3 日分券的公平年信用價差
- one-factor Gaussian copula 模型

| | attachment | detachment | maturity | | | |
|---------------------------------------|------------|------------|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | point | point | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| Break Even Fair Tranche Spreads | 0% | 3% | n/a | 95.91 | 95.86 | 95.23 |
| | 3% | 7% | n/a | 44.40 | 42.88 | 37.18 |
| | 7% | 10% | n/a | 23.02 | 24.72 | 21.52 |
| | 10% | 15% | n/a | 8.76 | 12.85 | 13.58 |
| | 15% | 30% | n/a | 44.18 | 62.57 | 170.66 |
| | 30% | 100% | n/a | 6.98×10^{-5} | 1.60×10^{-6} | 2.59×10^{-6} |

無論 typical rule 或 CDX.NA.IG rule，使用表 6.3 的模型參數來計算公平信用價差。表 6.4 與表 4.8 相較，會發現 typical rule 與 CDX.NA.IG rule 的計算結果差別只在 0 到 3%的分券上，其餘的皆相同。

Hull and White (2008) 動態模型下，針對 2007 年 1 月 30 日的資料所做的參數最佳配適，結果如下表：

表 6.5 Hull and White (2008) 動態模型參數的最佳配適結果
- 針對 2007 年 1 月 30 日的資料

| λ | H_0 | β | $m3$ | $m5$ | $m7$ | $m10$ |
|-----------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| 0.1310 | 0.00147 | 1.2813 | 0.0020 | 0.0062 | 0.0093 | 0.0099 |

利用表 6.5 的參數，同時給定 CDS 的報價為公平年信用價差，在 CDX.NA.IG rule 下求分券的公平年信用價差，其中除了 0 到 3% 分券的單位為 % 外，其餘的皆為 bps：

表 6.6 CDX.NA.IG rule 下 2007 年 1 月 30 日分券的公平年信用價差
- Hull and White (2008) 動態模型

| | attachment | detachment | maturity | | | |
|----------------------|------------|------------|----------|-------|--------|--------|
| | point | point | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| Fair Tranche Spreads | 0% | 3% | n/a | 21.33 | 41.45 | 53.55 |
| | 3% | 7% | n/a | 58.97 | 168.73 | 428.59 |
| | 7% | 10% | n/a | 14.25 | 36.9 | 98.13 |
| | 10% | 15% | n/a | 8.50 | 19.27 | 44.61 |
| | 15% | 30% | n/a | 2.67 | 7.24 | 19.24 |
| | 30% | 100% | n/a | 0.23 | 0.72 | 2.27 |

Hull and White (2008) 動態模型下，針對 2009 年 4 月 3 日的資料所做的參數最佳配適，結果如下表：

**表 6.7 Hull and White (2008) 動態模型參數的最佳配適結果
- 針對 2009 年 4 月 3 日的資料**

| λ | H_0 | β | $m3$ | $m5$ | $m7$ | $m10$ |
|-----------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|
| 0.00278 | 1.9603 | 1.4615 | 0.0439 | 0.0357 | 0.0240 | 0.0168 |

利用表 6.7 的參數，同時給定 CDS 的報價為公平年信用價差，在 CDX.NA.IG rule 下求分券的公平年信用價差，其中除了 0 到 3%、3 到 7%、7 到 10%、10 到 15% 分券的單位為%，其餘的為 bps：

**表 6.8 CDX.NA.IG rule 下 2009 年 4 月 3 日分券的公平年信用價差
- Hull and White (2008) 動態模型**

| | attachment | detachment | maturity | | | |
|-------------------------|------------|------------|----------|-------|-------|--------|
| | point | point | 3yr | 5yr | 7yr | 10yr |
| Fair Tranche Spreads | 0% | 3% | n/a | 96.29 | 96.29 | 96.29 |
| | 3% | 7% | n/a | 47.61 | 47.72 | 47.73 |
| | 7% | 10% | n/a | 23.90 | 26.04 | 26.34 |
| | 10% | 15% | n/a | 6.09 | 10.59 | 13.19 |
| | 15% | 30% | n/a | 31.56 | 56.09 | 112.32 |
| | 30% | 100% | n/a | 11.87 | 11.85 | 11.83 |