

第一章 緒論

1.1 研究背景

濾波器的設計在數位信號處理中，佔極為重要的部份，所以濾波器的設計方法被廣泛地研究及討論，而本文是將焦點放在特徵濾波器（Eigenfilter）的演算法上。特徵濾波器在應用上有許多的優點，其主要的優點有下列三項：一、特徵濾波器應用層面很廣泛，其可應用在有限脈衝響應濾波器（finite impulse response, FIR filter）[1]-[4]、無限脈衝響應濾波器（infinite impulse response, IIR filter）[5]-[6]、多維度濾波器（multidimensional filter）[7]等等，近年來更加應用在數位通訊多頻調變（DMT）系統的通道縮減（channel shortening）[8]上；二、特徵濾波器設計彈性佳，可在設計過程中附加上許多特性，例如時域的奈氏限制（Nyquist constraint）[9]、頻域的平坦限制（flatness constraint）[9]、一般線性限制（general linear constraint）[10]；三、特徵濾波器與一般濾波器設計相比較之下，特徵濾波器有較低的演算複雜度。以上三項的優點讓特徵濾波器成為一個值得探討的方向。

本文討論的焦點是放在 FIR 濾波器的設計上，在[11]已經討論過實係數特徵濾波器基於總合性最小平方誤差準則（total least squares criterion, TLS）的設計，而本論文是將[11]的觀念延伸至複係數特徵濾波器上，這樣的延伸讓頻率響應得到了更好的近似效果。

1.2 論文組織架構

本文在第二章中會詳細地介紹特徵濾波器演算的過程，而第三章就進入本文的重點，如何將總合性最小平方誤差準則使用在特徵濾波器上，並且將其演算法詳細地說明。第四章是將二、三章所提到的演算法用電腦去模擬運算，而模擬運算所得到的結果再拿來分析與比對。最後第五章為本文的結論，其內容是說明特徵濾波器的使用。



第二章 特徵濾波器的介紹

所謂的特徵濾波器是指濾波器的係數是由一個特徵向量所得到，而這個觀念起源於 1978 年 Slepian [12] 窗型函數的設計，其窗型係數是由一個實對稱方陣的特徵向量所得到。接著在 1987 年時 Vaidyanathan 和 Nguyen [1] 將 Slepian 的方法加以修正，並且將方法應用於線性相位 (linear phase) FIR 濾波器的設計，此時特徵濾波器才正式被命名。由於特徵濾波器的設計複雜度低再加上設計具有彈性，所以特徵濾波器被廣泛地討論以及研究，其應用面也陸續的增加，在 [13] 有完整的敘述。

2.1 窗型函數的設計



介紹 Slepian 如何設計窗型函數之前，我們首先在 2.2.1 節中介紹瑞雷原理 (Rayleigh principle)。

2.1.1 瑞雷原理

瑞雷原理在特徵濾波器的設計中，是一個極為重要的關鍵定理，我們利用這個原理來尋找濾波器的係數，進而達到濾波器的設計。下一個小節會詳細說明如何使用其定理，而本節是探討其原理以及證明其極值不等式。

首先，對實對稱方陣 \mathbf{A} 而言，其瑞雷商式 $\rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ 如下所示：

$$\rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} ; \forall \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0$$

接著，若 \mathbf{x}_i 為 \mathbf{A} 方陣的特徵向量，則瑞雷商式會得到所對應的特徵值 λ_i ，

其式子為 $\rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_i) = \frac{(\mathbf{x}_i, \mathbf{A}\mathbf{x}_i)}{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)} = \frac{(\mathbf{x}_i, \lambda_i \mathbf{x}_i)}{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)} = \lambda_i$ ，最後我們根據瑞雷商

式，我們能得到其極值不等式，型式如下所示：

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}) \leq \rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A})$$

其中 $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ 為 \mathbf{A} 方陣最小特徵值

$\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ 為 \mathbf{A} 方陣最大特徵值

極值不等式的證明：

- (1) 因為實對稱方陣 \mathbf{A} 必有正交矩陣 \mathbf{P} 可將其對角化，取 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 轉換，帶入瑞雷商式可得下列等式

$$\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \frac{(\mathbf{P}\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y})}{(\mathbf{P}\mathbf{y}, \mathbf{P}\mathbf{y})} = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{y})} = \frac{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

- (2) 將上式減去 λ_1 ，可得下列等式

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} - \lambda_1 &= \frac{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} - \lambda_1 \frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} \\ &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)y_2^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)y_3^2 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_1)y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} \end{aligned}$$

- (3) 明顯的，如果 $\lambda_1 = \lambda_{\min}$ ，則上式恆大於零，反之，若 $\lambda_1 = \lambda_{\max}$ 則上式恆小於零，故極值不等式得証。

2.1.2 窗型函數的分析

特徵濾波器是源於 1978 年 Slepian [12] 窗型函數的設計，我們簡單地來敘述其設計方法，首先我們定一個設計的規格，其規格如下兩點：

- 一、窗型函數的係數為實數，並且必須為單模（unit norm）
- 二、選擇一個截止頻率 ω_c ，這個 ω_c 介於 0 到 π 之間

有了上述的規格後，Slepian 設計此窗型函數的方法是基於頻譜能量最小化的觀念來設計，而最小化的頻譜範圍是止帶（stopband）的區域，也就是指 ω_c 到 π 之間的頻譜能量必須為最小。其數學表示式以及推導如下所示：

首先，窗型函數的頻譜表示式如 (2.1) 式，其中 $w[n]$ 是窗型實數係數，而濾波器的階數為 N 階，其表示式為

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N w[n] e^{-j\omega n} \quad (2.1)$$

接著我們限制濾波器係數必須為單模（unit norm），以避免無意義的係數解，其式子為

$$\sum_{n=0}^N w^2(n) = 1 \quad (2.2)$$

最後可將濾波器係數視為一個實數向量，並定義一個自然函數向量，其式子為 $\mathbf{w} \equiv [w[0] \ w[1] \ \dots \ w[N]]^T$ $\mathbf{e}(e^{j\omega}) \equiv [1 \ e^{-j\omega} \ \dots \ e^{-jN\omega}]^T$ ，根據上述兩個向量可以將 (2.1) 式，以及 (2.2) 式 改寫成

$$W(e^{j\omega}) = \mathbf{w}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1 \quad (2.4)$$

在[12]設計的觀念中，是將 ω_c 到 π 之間的頻譜能量最小化，其式子如下：

$$\text{最小化 } \phi_s = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c}^{\pi} |W(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2.5)$$

接著我們將 $|W(e^{j\omega})|^2$ 改成 $\mathbf{w}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) \mathbf{w}$ 則 (2.5)式 可改寫成 (2.6)式，其式子為

$$\begin{aligned} \phi_s &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c}^{\pi} \mathbf{w}^T \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) \mathbf{w} d\omega \\ \phi_s &= \mathbf{w}^T \left(\frac{1}{\pi} \int_{\omega_c}^{\pi} \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) d\omega \right) \mathbf{w} \\ \phi_s &= \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{其中 } \mathbf{R} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c}^{\pi} \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) d\omega \quad \text{我們可知道 } \mathbf{R} \text{ 是}$$

一個軛米特 (Hermitian) 矩陣。

根據上式，我們將 \mathbf{R} 矩陣分解為 $\mathbf{R} = \mathbf{P} + j\mathbf{Q}$ ，其中 \mathbf{P} 矩陣為實對稱矩陣， \mathbf{Q} 矩陣為反實對稱矩陣，所以 (2.6)式可寫為 $\phi_s = \mathbf{w}^T (\mathbf{P} + j\mathbf{Q}) \mathbf{w}$

因為 $\mathbf{w}^T \mathbf{Q} \mathbf{w} = 0$ 故可將式子更化簡為 $\phi_s = \mathbf{w}^T \mathbf{P} \mathbf{w}$ 。

我們將上述整理一下，就可得到設計的簡化，其簡化的式子如下所示：

$$\text{最小化 } \phi_s = \mathbf{w}^T \mathbf{P} \mathbf{w} \quad \text{限制於 } \mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1$$

由上式得知 \mathbf{P} 為實數對稱正定方陣，根據瑞雷原理 (Rayleigh principle) 可知 ϕ_s 的最小值為 \mathbf{P} 矩陣的最小特徵值，而 \mathbf{w} 為最小特徵值所對應的單模特徵向量，所以濾波器係數可求得。

2.2 低通型特徵濾波器

在 2.1 節中我們簡述了如何從特徵向量取得濾波器的係數，1987 年 Vaidyanathan 和 Nguyen [1] 將 Slepian 的方法加以修正，並將方法應用於線性相位 FIR 濾波器的設計，在 [1] 有提到如何設計低通濾波器，本節將簡述其設計流程。首先我們在 2.2.1 節介紹型式一線性相位 FIR 濾波器頻率響應的型式，接下來將頻譜劃分為止帶與通帶兩個部份，其中止帶的分析在 2.2.2 節中說明，而通帶的部份在 2.2.3 節中說明，最後在 2.2.4 節中將上述兩節的結果加以整合，進而得到濾波器的係數。接下來我們將設計的規格以下列兩點來說明：

一、低通濾波器的頻率規格


$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0, & \omega_s \leq \omega \leq \pi \\ \text{don't care}, & \omega_s < \omega < \omega_p \end{cases}$$

其中 $D(\omega)$ 為想要的頻率響應。

二、加權最小平方誤差準則 (weighted mean squared error criterion)

我們設計一個近似想要的頻譜時所用的誤差量測準則

$$\xi_{\text{WLS}} = \frac{1}{\pi} \int_{\text{R}} w(\omega) [D(\omega) - H(e^{j\omega})]^2 d\omega \quad (2.7)$$

其中 $w(\omega)$ 為加權函數 (weighting function)。

$H(e^{j\omega})$ 為我們所設計的頻率響應。

R 為頻譜範圍，其範圍為 $[0 \sim \omega_p] \cup [\omega_s \sim \pi]$ 。

如果 ξ_{WLS} 的值越小，代表誤差愈小，而誤差愈小，則愈近似想要的頻譜響應，所以設計最終的目的，是將其值最小化，進而得到最佳近似的效果。

2.2.1 型式一線性相位 FIR 濾波器

我們在設計過程中會使用到型式一線性相位 FIR 濾波器，所以在這裡先簡單地描述一下。首先我們列出其特性

- 一、濾波器階數必須為偶數
- 二、濾波器係數必須為對稱，並且對稱於階數的一半

其數學表示式如下所示：

首先我們探討線性相位 FIR 濾波器的頻譜表示式，其中 $h[n]$ 是濾波器的實數係數，並且其係數為對稱，而 N 階濾波器表示如下：

$$\begin{aligned}
 h(n) &= h(N-n) \\
 H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^N h(n) e^{-j\omega n}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

由於濾波器係數為對稱的，故 (2.8) 式可改寫為

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \left(\sum_{n=0}^M b_n \cos \omega n \right) e^{-j\frac{N}{2}\omega} \\
 H(e^{j\omega}) &= H_R(\omega) e^{-j\frac{N}{2}\omega}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\text{其中 } b_n = \begin{cases} 2h(M-n) & , 1 \leq n \leq M \\ h(M) & , n=0 \end{cases} \quad M = \frac{N}{2}$$

$$H_R(\omega) = \sum_{n=0}^M b_n \cos \omega n$$

從 (2.9) 式中可知，線性相位濾波器設計的自由度取決於 $H_R(\omega)$ ，得知 $H_R(\omega)$ ，既可設計出型式一線性相位 FIR 濾波器，接著我們用向量相乘來表示 $H_R(\omega)$ ，其中 \mathbf{b} 為實數向量， $\mathbf{c}(\omega)$ 為實數函數向量，其式子為

$$H_R(\omega) = \mathbf{b}^T \mathbf{c}(\omega) = \mathbf{c}^T(\omega) \mathbf{b} \quad (2.10)$$

$$\text{其中 } \mathbf{b} \equiv [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_M]^T$$

$$\mathbf{c}(\omega) \equiv [1 \quad \cos\omega \quad \dots \quad \cos N\omega]^T$$

2.2.2 低通型特徵濾波器在止帶的分析

根據最小平方誤差準則在止帶區域可寫成

$$\xi_s = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_s}^{\pi} \left(D(\omega) - H(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega$$

其中 $D(\omega)$ 在止帶為 0，並且由 2.2.1 節可知設計 $H(e^{j\omega})$ 可改為設計

(2.10) 式 所以 ξ_s 可再寫成

$$\xi_s = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_s}^{\pi} \mathbf{b}^T \mathbf{c}(\omega) \mathbf{c}^T(\omega) \mathbf{b} d\omega$$

因為 \mathbf{b} 是實數向量，所以可以提出來，接著中間積分式會得到一個實對稱正定方陣 \mathbf{P}_s ，其型式如下：

$$\xi_s = \mathbf{b}^T \left(\frac{1}{\pi} \int_{\omega_s}^{\pi} \mathbf{c}(\omega) \mathbf{c}^T(\omega) d\omega \right) \mathbf{b}$$

$$\xi_s = \mathbf{b}^T \mathbf{P}_s \mathbf{b} \quad (2.11)$$

$$\text{其中 } \mathbf{P}_s = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_s}^{\pi} \mathbf{c}(\omega) \mathbf{c}^T(\omega) d\omega$$

2.2.3 低通型特徵濾波器在通帶的分析

如果依照上一小節的流程來分析通帶區域，則會無法得到我們想要的型式，所以[1]在這裡稍微修改最小平方誤差準則，進而導入參考頻率點 ω_0 的計算，接著我們選擇 $\omega_0 = 0$ 為參考頻率點，故最小平方誤差準則改寫

為 $\xi_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_p} \left(H(e^{j\omega_0}) - H(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega$ ，接著如同上節所分析 $H(e^{j\omega})$

可改寫為(2.10)式 所以 ξ_p 可寫成

$$\xi_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_p} \left(H_R(0) - H_R(\omega) \right)^2 d\omega$$

$$\xi_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_p} \mathbf{b}^T (\mathbf{1} - \mathbf{c}(\omega)) (\mathbf{1} - \mathbf{c}(\omega))^T \mathbf{b} d\omega$$

其中 $\mathbf{1}$ 為元素皆為一的 N 階行向量

因為 \mathbf{b} 是實數向量，所以可以提出來，接著中間積分式會得到一個實對稱正定方陣 \mathbf{P}_p ，其型式如下：

$$\xi_p = \mathbf{b}^T \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_p} (\mathbf{1} - \mathbf{c}(\omega)) (\mathbf{1} - \mathbf{c}(\omega))^T d\omega \right) \mathbf{b}$$

$$\xi_p = \mathbf{b}^T \mathbf{P}_p \mathbf{b} \quad (2.12)$$

$$\text{其中 } \mathbf{P}_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_p} (\mathbf{1} - \mathbf{c}(\omega)) (\mathbf{1} - \mathbf{c}(\omega))^T d\omega$$

2.2.4 低通型特徵濾波器在通帶與止帶的整合分析

在 2.2.2 節與 2.2.3 節中分析得到了 (2.11)式 以及 (2.12)式 ，如今我們用一個權衡參數 α (tradeoff parameter) 來將 (2.11)式 與 (2.12)式 連結在一起，進而得到 (2.13)式，其式子為

$$\xi_T = \alpha \xi_s + (1-\alpha) \xi_p \quad (2.13)$$

其中 $0 \leq \alpha \leq 1$ ，若想要在通帶區段有較好的近似效果，則 α 值須選擇接近 0，反之在止帶區段有較好的近似效果，則 α 值須選擇接近 1。

最後我們可將設計低通濾波器的問題，簡化為 (2.13)式 最小化的問題，其式子如下：

$$\text{最小化 } \xi_T = \mathbf{b}^T \mathbf{P}_T \mathbf{b} \text{ 限制於 } \mathbf{b}^T \mathbf{b} = 1$$

$$\text{其中 } \mathbf{P}_T = \alpha \mathbf{P}_s + (1-\alpha) \mathbf{P}_p$$

由於 \mathbf{P}_s 與 \mathbf{P}_p 皆為實數對稱正定方陣，所以 \mathbf{P}_T 也是實數對稱正定方陣，所以根據瑞雷原理，可知 ξ_T 的最小值為 \mathbf{P}_T 矩陣的最小特徵值，而 \mathbf{b} 為最小特徵值所對應的單模特徵向量，所以低通型特徵濾波器係數可求得。

得到濾波器係數後，須做頻率參考點振幅的修正，其式子如下：

$$\mathbf{b}_{\text{new}} = \left(\frac{1}{|H(e^{j\omega_0})|} \right) \mathbf{b}_{\text{old}}$$

2.3 任意響應之實係數特徵濾波器的設計

在 2.2 節中討論了低通型特徵濾波器的設計，接下來 2.3 節到 2.5 節內容中，我們將特徵濾波器的設計加以延伸為任意頻率響應的設計 [2]-[4]，首先在 2.3 節中討論任意響應之實係數特徵濾波器的設計 [2]，接著在 2.4 節中討論任意響應之形式一複係數特徵濾波器的設計 [4]，最後在 2.5 節中討論任意響應之形式二複係數特徵濾波器的設計 [3]。

2.3.1 實係數特徵濾波器的設計規格

在實係特徵濾波器的設計 [2] 中，是將型式侷限在線性相位 FIR 濾波器型式，本節將其係數一般化，不做任何條件或特性的添加，首先看到 Nguyen [2] 中將最小平方誤差準則做一些修改，其形式為

$$\xi = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} w(\omega) \left[\underbrace{\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} H(e^{j\omega_0}) - H(e^{j\omega})}_{\varepsilon(\omega)} \right]^2 d\omega \quad (2.14)$$

其中 $D(\omega)$ 想要的任意頻譜響應。

$H(e^{j\omega})$ 我們所設計的頻譜響應。

$w(\omega)$ 加權函數，通常都不考慮，故設為一。

\mathbf{R} 頻譜範圍，在實係數討論範圍為 $0 \sim \pi$ ，但不包含過渡區頻譜。

ω_0 參考頻率點，通常選擇通帶中的最大值所對應之頻率點。

$\varepsilon(\omega)$ 誤差函數，在[2]設計中，誤差函數在參考頻率點為 0。

根據上述修改過後的最小平方誤差準則，我們再配合下列規格來設計任意頻率響應的濾波器。首先我們探討濾波器的頻譜表示式，其中 $h[n]$ 是濾波器的實數係數，而 N 階濾波器型式如下所示：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n] e^{-j\omega n} \quad (2.15)$$

如同 2.1.2 節中的 (2.3) 式 可將 (2.15) 式 改寫成向量相乘的形式，而 \mathbf{h} 為實數向量， $\mathbf{e}(e^{j\omega})$ 為複數函數向量，其式子為

$$H(e^{j\omega}) = \mathbf{h}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \quad (2.16)$$

其中 $\mathbf{h} \equiv [h[0] \ h[1] \ \dots \ h[N]]^T$

$$\mathbf{e}(e^{j\omega}) \equiv [1 \ e^{-j\omega} \ \dots \ e^{-jN\omega}]^T$$

同樣地限制係數必須為單模 $\sum_{n=0}^N h^2(n) = 1$ 可改寫為 $\mathbf{h}^T \mathbf{h} = 1$ 。

接下來我們將頻譜分成多個通帶與止帶來分析，其中 $\omega_p(k,1)$ 表示第 k 個通帶開始的邊緣，而 $\omega_p(k,2)$ 表示第 k 個通帶結束的邊緣，同理 $\omega_s(k,1)$ 、 $\omega_s(k,2)$ 則代表第 k 個止帶開始以及結束的邊緣，其劃分方式，如圖 2.1 所示：

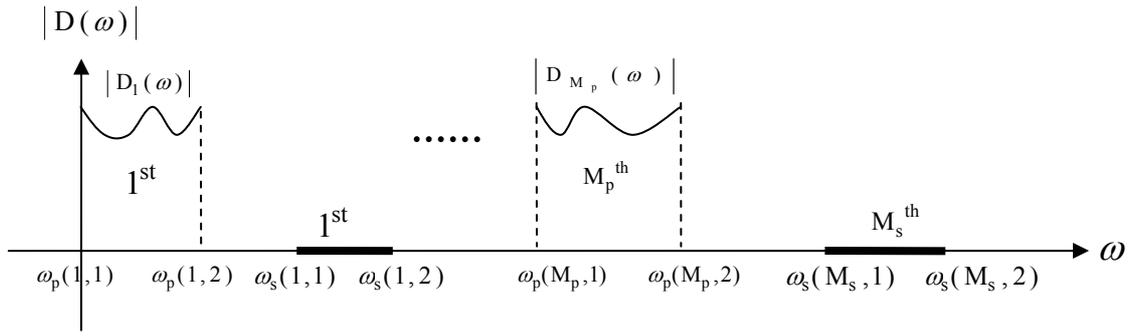


圖 2.1 多通帶與止帶的頻譜劃分

2.3.2 實係數特徵濾波器在止帶的分析

我們根據 2.3.1 節的規格，並將 (2.14) 式 代入止帶區域可得到

$$\xi_s = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \left(H(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega$$

接著再將 (2.16) 式 代入上式可得

$$\xi_s = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \left(\mathbf{h}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega$$

$$\xi_s = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \mathbf{h}^T \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) \mathbf{h} d\omega$$

因為 \mathbf{h} 是實數向量，所以可以提出來，接著中間積分式會得到一個對稱正定方陣 \mathbf{P}_s ，其型式如下：

$$\xi_s = \mathbf{h}^T \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) d\omega \right) \mathbf{h}$$

$$\xi_s = \mathbf{h}^T \mathbf{P}_s \mathbf{h} \quad (2.17)$$

$$\text{其中 } \mathbf{P}_s = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) d\omega$$

2.3.3 實係數特徵濾波器在通帶的分析

我們根據 2.3.1 節的規格，並將 (2.14) 式 代入通帶區域可得到

$$\xi_p = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} H(e^{j\omega_0}) - H(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega$$

接著將 (2.16) 式 代入上式可得

$$\xi_p = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{h}^T \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{h}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega$$

$$\xi_p = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \left[\int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \mathbf{h}^T \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^* \right. \\ \left. \bullet \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^T \mathbf{h} d\omega \right]$$

因為 \mathbf{h} 是實數向量，所以可以提出來，接著中間積分式會得到一個對稱正

定方陣 \mathbf{P}_p ，其型式如下：

$$\xi_p = \mathbf{h}^T \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \left[\int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^* \right. \right. \\ \left. \left. \bullet \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^T d\omega \right] \right\} \mathbf{h}$$

$$\xi_p = \mathbf{h}^T \mathbf{P}_p \mathbf{h} \quad (2.18)$$

$$\text{其中 } \mathbf{P}_p = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \left[\int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^* \right. \\ \left. \bullet \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^T d\omega \right]$$

2.3.4 實係數特徵濾波器在通帶與止帶的整合分析

在 2.3.2 節與 2.3.3 節分析得到了 (2.17)式 以及 (2.18)式，如今我們將其相加在一起可得到 (2.19)式，其型式如下：

$$\xi_T = \xi_s + \xi_p \quad (2.19)$$

接著，我們設計一個實係數特徵濾波器的問題，可簡化成 (2.19)式 最小化的問題，所以可將問題改寫為

$$\text{最小化 } \xi_T = \mathbf{h}^T \mathbf{P}_T \mathbf{h} \text{ 限制於 } \mathbf{h}^T \mathbf{h} = 1$$

$$\text{其中 } \mathbf{P}_T = \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_p$$

如同 2.1.2 節中的分析，我們可將 \mathbf{P}_T 矩陣分解為 $\mathbf{P}_T = \mathbf{P}_r + j\mathbf{P}_i$ ，其中 \mathbf{P}_r 矩陣為實對稱矩陣， \mathbf{P}_i 矩陣為反實對稱矩陣，因為 $\mathbf{h}^T \mathbf{P}_i \mathbf{h} = 0$ 所以我們可將上述最小化的問題改寫為

$$\text{最小化 } \xi_T = \mathbf{h}^T \mathbf{P}_r \mathbf{h} \text{ 限制於 } \mathbf{h}^T \mathbf{h} = 1$$

由於 \mathbf{P}_r 為實數對稱正定方陣，根據瑞雷原理，可知 ξ_T 的最小值為 \mathbf{P}_r 矩陣的最小特徵值，而 \mathbf{h} 為最小特徵值所對應的單模特徵向量，所以實係數特徵濾波器係數可求得。

得到濾波器係數後，須做頻率參考點振福的修正，其式子如下：

$$\mathbf{h}_{\text{new}} = \left(\frac{D(\omega_0)}{H(e^{j\omega_0})} \right) \mathbf{h}_{\text{old}}$$

2.4 任意響應之形式一複係數特徵濾波器的設計

形式一複係數特徵濾波器[4]與實係數特徵濾波器的設計流程非常類似，我們將簡單地敘述其流程。

2.4.1 形式一複係數特徵濾波器的設計規格

首先我們遵照著修改過後的最小平方誤差準則形式

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} w(\omega) \left[\underbrace{\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} H(e^{j\omega_0}) - H(e^{j\omega})}_{\varepsilon(\omega)} \right]^2 d\omega \quad (2.20)$$

其中 $D(\omega)$ 想要的任意頻譜響應。

$H(e^{j\omega})$ 我們所設計的頻譜響應。

$w(\omega)$ 加權函數，通常都不考慮，故設為一。

\mathbf{R} 頻譜範圍，在複係數討論中為 0 到 2π ，但不包含過渡區頻譜。

ω_0 參考頻率點，通常選擇通帶中的最大值所對應之頻率點。

$\varepsilon(\omega)$ 誤差函數，在[2]設計中，誤差函數在參考頻率點要為 0 。

根據上述修改過後的最小平方誤差準則，我們再配合下列規格來設計任意頻率響應的濾波器。首先我們探討濾波器的頻譜表示式，其中 $c[n]$ 是濾波器的複數係數，而 N 階濾波器的型式如下：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N c[n] e^{-j\omega n} \quad (2.21)$$

接著，如同 2.1.2 節中的 (2.3) 式可將 (2.21) 式改寫成向量相乘的形式，而 \mathbf{c} 為複數向量， $\mathbf{e}(e^{j\omega})$ 為複數函數向量，其型式為

$$H(e^{j\omega}) = \mathbf{c}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \quad (2.22)$$

$$\text{其中 } \mathbf{c} \equiv [c[0] \ c[1] \ \dots \ c[N]]^T$$

$$\mathbf{e}(e^{j\omega}) \equiv [1 \ e^{-j\omega} \ \dots \ e^{-jN\omega}]^T$$

同樣地，我們限制係數必須為單模 $\sum_{n=0}^N c^2(n) = 1$ 故可改寫為 $\mathbf{c}^H \mathbf{c} = 1$ 。

接下來我們將頻譜分成多個通帶與止帶來分析，其中 $\omega_p(k,1)$ 表示第 k 個通帶開始的邊緣，而 $\omega_p(k,2)$ 表示第 k 個通帶結束的邊緣，同理 $\omega_s(k,1)$ 、 $\omega_s(k,2)$ 則代表第 k 個止帶開始以及結束的邊緣，其劃分方式，如圖 2.1 所示。

2.4.2 形式一複係數特徵濾波器在止帶的分析

我們根據 2.4.1 節的規格，並將 (2.20) 式 代入止帶區域可得到

$$\xi_s = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \left(H(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega$$

接著再將 (2.22) 式 代入上式可得

$$\begin{aligned} \xi_s &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \left(\mathbf{c}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega \\ \xi_s &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \mathbf{c}^H \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) \mathbf{c} d\omega \end{aligned}$$

因為 \mathbf{c} 是複數向量，所以可以提出來，接著中間積分式會得到一個對稱正定方陣 \mathbf{P}_s ，其型式為

$$\begin{aligned} \xi_s &= \mathbf{c}^H \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) d\omega \right) \mathbf{c} \\ \xi_s &= \mathbf{c}^H \mathbf{P}_s \mathbf{c} \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\text{其中 } \mathbf{P}_s = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) d\omega$$

2.4.3 形式一複係數特徵濾波器在通帶的分析

我們根據 2.4.1 節的規格，並將 (2.20) 式 代入通帶區域可得到

$$\xi_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{H}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{H}(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega$$

接著再將 (2.22) 式 代入上式可得

$$\xi_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{c}^T \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{c}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega$$

$$\xi_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \left[\int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \mathbf{c}^H \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^* \right. \\ \left. \bullet \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^T \mathbf{c} d\omega \right]$$

因為 \mathbf{c} 是複數向量，所以可以提出來，接著中間積分式會得到一個對稱正

定方陣 \mathbf{P}_p ，其型式為

$$\xi_p = \mathbf{c}^H \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \left[\int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^* \right. \right. \\ \left. \left. \bullet \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^T d\omega \right] \right\} \mathbf{c}$$

$$\xi_p = \mathbf{c}^H \mathbf{P}_p \mathbf{c} \quad (2.24)$$

$$\text{其中 } \mathbf{P}_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \left[\int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^* \right. \\ \left. \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^T d\omega \right]$$

2.4.4 形式一複係數特徵濾波器在通帶與止帶的整合分析

在 2.4.2 節與 2.4.3 節分析得到了 (2.23)式 以及 (2.24)式，如今我們將其相加在一起可得到 (2.25)式，其型式為

$$\xi_T = \xi_s + \xi_p \quad (2.25)$$

接著我們設計一個形式一複係數特徵濾波器的問題，可簡化成 (2.25)式最小化的問題，所以可將問題改寫為

$$\text{最小化 } \xi_T = \mathbf{c}^H \mathbf{P}_T \mathbf{c} \text{ 限制於 } \mathbf{c}^H \mathbf{c} = 1$$

$$\text{其中 } \mathbf{P}_T = \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_p$$

由於 \mathbf{P}_s 與 \mathbf{P}_p 皆為複數對稱正定方陣，所以 \mathbf{P}_T 也是複數對稱正定方陣，再根據瑞雷原理，可知 ξ_T 的最小值為 \mathbf{P}_T 矩陣的最小特徵值，而 \mathbf{c} 為最小特徵值所對應的單模特徵向量，所以型式一複係數特徵濾波器係數可求得。

得到濾波器係數後，須做頻率參考點振福的修正，其式子如下：

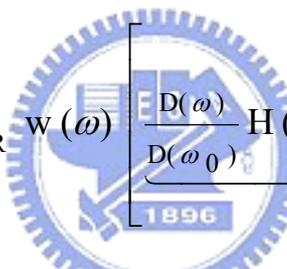
$$\mathbf{c}_{\text{new}} = \left(\frac{D(\omega_0)}{H(e^{j\omega_0})} \right) \mathbf{c}_{\text{old}}$$

2.5 任意響應之形式二複係數特徵濾波器的設計

形式二複係數特徵濾波器[3]與實係數特徵濾波器的設計流程非常類似，只是將複數係數分成為實部與虛部兩部分來分析，所以係數向量依然為實數向量，但向量維度的大小變為原來的兩倍，我們在下一小節的頻譜表示式中會詳細的介紹。

2.5.1 形式二複係數特徵濾波器的設計規格

首先我們遵照著修改過後的最小平方誤差準則形式


$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{R}} w(\omega) \left[\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} H(e^{j\omega_0}) - H(e^{j\omega}) \right]^2 d\omega \quad (2.26)$$

其中 $D(\omega)$ 想要的任意頻譜響應。

$H(e^{j\omega})$ 我們所設計的頻譜響應。

$w(\omega)$ 加權函數，通常都不考慮，故設為一。

\mathcal{R} 頻譜範圍，在複係數討論中為 0 到 2π ，但不包含過渡區頻譜。

ω_0 參考頻率點，通常選擇通帶中的最大值所對應之頻率點。

$\varepsilon(\omega)$ 誤差函數，在[2]設計中，誤差函數在參考頻率點為 0 。

根據上述修改過後的最小平方誤差準則，我們再配合下列規格來設計任意頻率響應的濾波器。首先我們探討濾波器的頻譜表示式，其中 $(d_R[n] + jd_I[n])$ 為濾波器的複數係數， $d_R[n]$ 與 $d_I[n]$ 為實數，而 N 階濾波器的型式為

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N (d_R[n] + jd_I[n]) e^{-j\omega n} \quad (2.27)$$

接著，如同 2.1.2 節中的 (2.3) 式可將 (2.27) 式改寫成向量相乘的形式，而 \mathbf{d} 為實數向量， $\mathbf{e}(e^{j\omega})$ 為複數函數向量，其式子如下所示：

$$H(e^{j\omega}) = \mathbf{d}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \quad (2.28)$$

其中

$$\mathbf{d} \equiv [d_R[0] \quad d_R[1] \quad \dots \quad d_R[N] \quad d_I[0] \quad d_I[1] \quad \dots \quad d_I[N]]^T$$

$$\mathbf{e}(e^{j\omega}) \equiv [1 \quad e^{-j\omega} \quad \dots \quad e^{-jN\omega} \quad j \quad je^{-j\omega} \quad \dots \quad je^{-jN\omega}]^T$$

同樣地，限制係數必須為單模 $\sum_{n=0}^N (d_R[n] + jd_I[n])^2 = 1$ 可改寫為

$\mathbf{d}^T \mathbf{d} = 1$ 。接下來我們將頻譜分成多個通帶與止帶來分析，其中 $\omega_p(k, 1)$

表示第 k 個通帶開始的邊緣，而 $\omega_p(k, 2)$ 表示第 k 個通帶結束的邊緣，同

理 $\omega_s(k, 1)$ 、 $\omega_s(k, 2)$ 則代表第 k 個止帶開始以及結束的邊緣，其劃分方

式，如圖 2.1 所示。

2.5.2 形式二複係數特徵濾波器在止帶的分析

我們根據 2.5.1 節的規格，並將 (2.26) 式 代入止帶區域可得到

$$\xi_s = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \left(H(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega$$

接著將 (2.28) 式 代入上式可得

$$\begin{aligned} \xi_s &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \left(\mathbf{d}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega \\ \xi_s &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \mathbf{d}^T \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) \mathbf{d} d\omega \end{aligned}$$

因為 \mathbf{d} 是實數向量，所以可以提出來，接著中間積分式會得到一個對稱正定方陣 \mathbf{P}_s ，其型式為

$$\begin{aligned} \xi_s &= \mathbf{d}^T \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) d\omega \right) \mathbf{d} \\ \xi_s &= \mathbf{d}^T \mathbf{P}_s \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\text{其中 } \mathbf{P}_s = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{\omega_s(k,1)}^{\omega_s(k,2)} \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) d\omega$$

2.5.3 形式二複係數特徵濾波器在通帶的分析

我們根據 2.5.1 節的規格，並將 (2.26) 式 代入通帶區域可得到

$$\xi_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} H(e^{j\omega_0}) - H(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega$$

接著將 (2.28) 式 代入上式可得

$$\xi_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{d}^T \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{d}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^2 d\omega$$

$$\xi_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \left[\int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \mathbf{d}^T \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^* \right. \\ \left. \bullet \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^T \mathbf{d} d\omega \right]$$

因為 \mathbf{d} 是實數向量，所以可以提出來，接著中間積分式會得到一個對稱正

定方陣 \mathbf{P}_p ，其型式為

$$\xi_p = \mathbf{d}^T \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \left[\int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^* \right. \right. \\ \left. \left. \bullet \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^T d\omega \right] \right\} \mathbf{d}$$

$$\xi_p = \mathbf{d}^T \mathbf{P}_p \mathbf{d} \quad (2.30)$$

$$\text{其中 } \mathbf{P}_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M_p} \left[\int_{\omega_p(k,1)}^{\omega_p(k,2)} \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^* \right. \\ \left. \bullet \left(\frac{D(\omega)}{D(\omega_0)} \mathbf{e}(e^{j\omega_0}) - \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^T d\omega \right]$$

2.5.4 形式二複係數特徵濾波器在通帶與止帶的整合分析

在 2.5.2 節與 2.5.3 節分析得到了 (2.29) 式 以及 (2.30) 式，如今我們將其相加在一起可得到 (2.25) 式，其型式為

$$\xi_T = \xi_s + \xi_p \quad (2.31)$$

接著，我們設計一個形式二複係數特徵濾波器的問題，可簡化成 (2.31) 式最小化的問題，所以可將問題改寫為

$$\text{最小化 } \xi_T = \mathbf{d}^T \mathbf{P}_T \mathbf{d} \quad \text{限制於 } \mathbf{d}^T \mathbf{d} = 1$$

$$\text{其中 } \mathbf{P}_T = \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_p$$

如同 2.1.2 節中的分析，我們可將 \mathbf{P}_T 矩陣分解為 $\mathbf{P}_T = \mathbf{P}_r + j\mathbf{P}_i$ ，其中 \mathbf{P}_r 矩陣為實對稱矩陣， \mathbf{P}_i 矩陣為反實對稱矩陣，因為 $\mathbf{d}^T \mathbf{P}_i \mathbf{d} = 0$ 所以我們可將上述最小化的問題改寫為

$$\text{最小化 } \xi_T = \mathbf{d}^T \mathbf{P}_r \mathbf{d} \quad \text{限制於 } \mathbf{d}^T \mathbf{d} = 1$$

由於 \mathbf{P}_r 為實數對稱正定方陣，根據瑞雷原理，可知 ξ_T 的最小值為 \mathbf{P}_r 矩陣的最小特徵值，而 \mathbf{d} 為最小特徵值所對應的單模特徵向量，所以型式二複係數特徵濾波器係數可求得。

得到濾波器係數後，須做頻率參考點振福的修正，其式子如下：

$$\mathbf{d}_{\text{new}} = \left(\frac{D(\omega_0)}{H(e^{j\omega_0})} \right) \mathbf{d}_{\text{old}}$$

第三章 基於總合性最小平方誤差準則之特徵濾波器

本章進入研究的主題，如何應用總合性最小平方誤差準則來設計特徵濾波器，在進入本章主題之前，我們先回想第二章的內容，在第二章中我們詳細說明如何藉由最小平方誤差準則來設計特徵濾波器，其方法簡略的描述，就是利用最小平方誤差準則將誤差最小化，進而達到最佳近似的效果。相同地，本章也是利用誤差最小化的觀念來設計特徵濾波器，但不同於第二章的地方是本章採用總合性最小平方誤差準則將誤差最小化。

2001 年 Soo Chang Pei 和 Chien Cheng Tseng 提出基於總合性最小平方誤差準則之實係數特徵濾波器的設計[11]，其最明顯的改善，是不需要參考頻率點的導入，進而降低演算的複雜度，也提高了近似的精確度。本論文將上述的觀念延伸至複係數特徵濾波器上，而複係數相較於實係數有更好的近似效果，並且在相位響應中會有明顯的差別，其差別的數據我們會在第四章中詳細的說明，而本章節是著重在特徵濾波器基於總合性最小平方誤差準則的演算法。

3.1 總合性最小平方誤差準則的幾何說明

總合性最小平方誤差準則的理論基礎在[14 , pp. 533-535]中有詳細的說明，而本節用幾何圖示的觀念，將總合性最小平方誤差準則簡單地說明，這樣一來，我們可以很快地了解總合性最小平方誤差準則與最小平方誤差準則之間的差別。

首先我們回顧最小平方誤差準則，如下所示：

$$\xi_{LS} = \frac{1}{\pi} \int_R |\mathcal{E}_{LS}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.1)$$

其中 $\mathcal{E}_{LS} = D(\omega) - H(e^{j\omega})$ 為最小平方誤差函數。

$D(\omega)$ 為想要的任意頻譜響應。

$H(e^{j\omega})$ 為我們所設計的頻譜響應。

R 頻譜範圍，在實係數討論範圍為 $0 \sim \pi$ ，但不包含過渡區。

接著我們知道總合性最小平方誤差準則的型式為：

$$\xi_{TLS} = \frac{1}{\pi} \int_R |\mathcal{E}_{TLS}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.2)$$

其中 \mathcal{E}_{TLS} 為總合性最小平方誤差函數，但我們現在還不知道其算式為何，不過我們在圖 3.1 中可找到 \mathcal{E}_{TLS} 與 \mathcal{E}_{LS} 之間的關係。

圖 3.1 如下所示，其中 \mathbf{h} 為我們所設計的係數向量， ϕ 為 R 其中的一個頻率點，而 $\mathbf{e}(e^{j\omega})$ 為複數函數向量，其定義如同第二章。

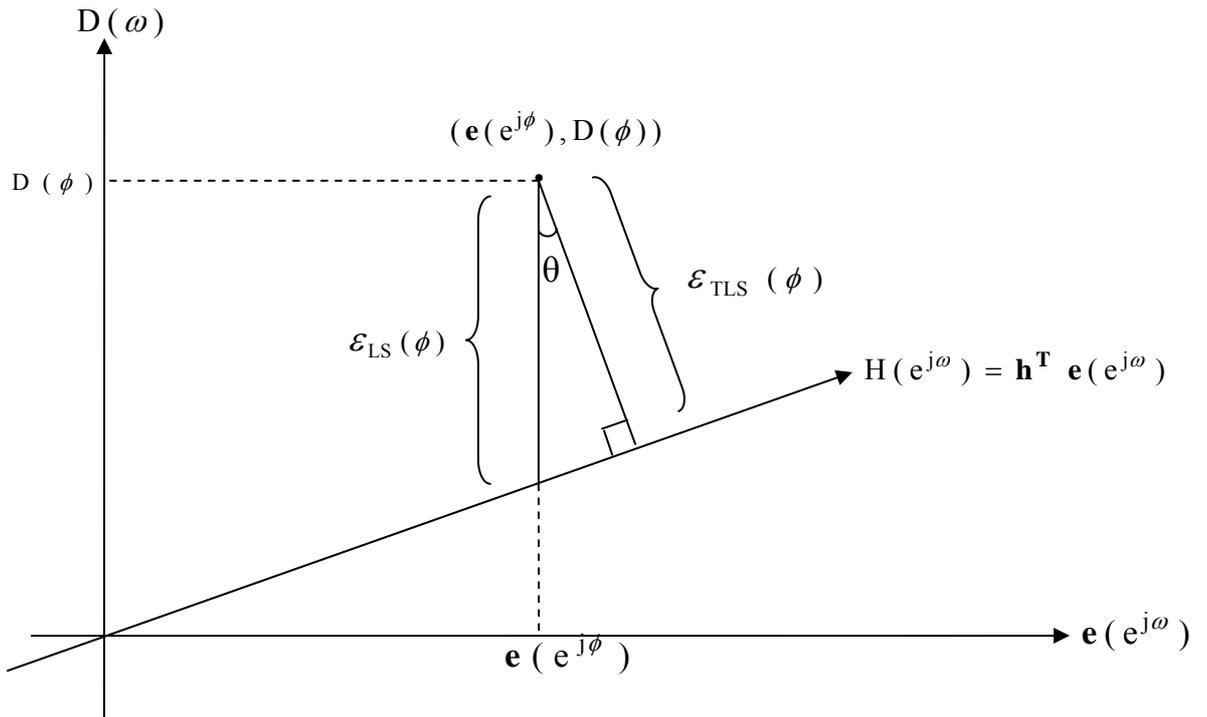


圖 3.1 兩種誤差函數的幾何關係圖

從 圖 3.1 可知，總合性最小平方誤差函數取的誤差距離與所設計的空間為垂直的，而最小平方誤差函數則為直接的距離，其兩者的關係如下所示：

$$\mathcal{E}_{\text{TLS}} = \cos\theta \mathcal{E}_{\text{LS}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{h}^T \mathbf{h} + 1}}$$

將上式帶回到 3.2 式 中，可得到總合性最小平方誤差準則的定義

$$\xi_{\text{TLS}} = \frac{1}{\pi} \int_{\text{R}} \left| \frac{\mathcal{E}_{\text{LS}}(\omega)}{\sqrt{\mathbf{h}^T \mathbf{h} + 1}} \right|^2 d\omega$$

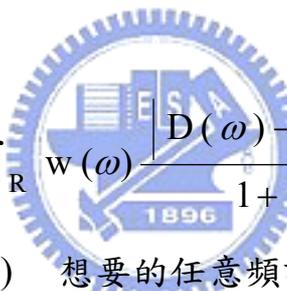
$$\xi_{\text{TLS}} = \frac{1}{\pi} \int_{\text{R}} \frac{|D(\omega) - H(e^{j\omega})|^2}{1 + \mathbf{h}^T \mathbf{h}} d\omega$$

3.2 實係數特徵濾波器基於總合性最小平方誤差準則

2001 年 Soo Chang Pei 和 Chien Cheng Tseng 將總合性最小平方誤差準則使用在實係數特徵濾波器[11]上，但其內容是將濾波器的型式侷限在線性相位 FIR 濾波器，而本節將方法稍微修改一下，在型式上不做任何條件或特性的限制，故可設計一般型式 FIR 濾波器。

3.2.1 實係數特徵濾波器的設計規格

本節與第二章的差別是在誤差準則的應用，而總合性最小平方誤差準則如下所示：


$$\xi_{\text{TLS}} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} w(\omega) \frac{|D(\omega) - H(e^{j\omega})|^2}{1 + \mathbf{h}^T \mathbf{h}} d\omega \quad (3.3)$$

其中 $D(\omega)$ 想要的任意頻譜響應。

$H(e^{j\omega})$ 我們所設計的頻譜響應。

$w(\omega)$ 加權函數，通常都不考慮，故設為一。

\mathbf{R} 頻譜範圍，在實係數討論範圍為 $0 \sim \pi$ ，但不包含過渡區頻譜。

\mathbf{h} 我們所設計的係數向量。

根據上述總合性最小平方誤差準則，我們再配合下列規格來設計任意頻率響應的濾波器。首先我們探討濾波器的頻譜表示式，其中 $h[n]$ 是濾波器的實數係數，而 N 階濾波器的型式為

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n] e^{-j\omega n} \quad (3.4)$$

接著，如同 2.1.2 節中的 (2.3) 式 可將 (3.4) 式 改寫成向量相乘的形式，而 \mathbf{h} 為實數向量， $\mathbf{e}(e^{j\omega})$ 為複數函數向量，其型式為

$$H(e^{j\omega}) = \mathbf{h}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \quad (3.5)$$

$$\text{其中 } \mathbf{h} \equiv [h[0] \ h[1] \ \dots \ h[N]]^T$$

$$\mathbf{e}(e^{j\omega}) \equiv [1 \ e^{-j\omega} \ \dots \ e^{-jN\omega}]^T$$

3.2.2 實係數特徵濾波器的設計分析

根據 3.2.1 節的規格，並將 (3.5) 式 代入 (3.3) 式 可得到

$$\xi_{\text{TLS}} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{|D(\omega) - \mathbf{h}^T \mathbf{e}(e^{j\omega})|^2}{1 + \mathbf{h}^T \mathbf{h}} d\omega \quad (3.6)$$

接著，我們將 (3.6) 式 分子的平方項 $|D(\omega) - \mathbf{h}^T \mathbf{e}(e^{j\omega})|^2$ 解開為

$$\left(D(\omega) - \mathbf{h}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^* \left(D(\omega) - \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) \mathbf{h} \right)$$

我們再將上式分解為

$$\begin{aligned} & D^*(\omega)D(\omega) - D^*(\omega)\mathbf{e}^T(e^{j\omega})\mathbf{h} - \mathbf{h}^T D(\omega)\mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \\ & + \mathbf{h}^T \mathbf{e}^*(e^{j\omega})\mathbf{e}^T(e^{j\omega})\mathbf{h} \end{aligned}$$

根據上式得知，可將 (3.6) 式 改寫為

$$\xi_{\text{TLS}} = \frac{\hat{\mathbf{h}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{h}}}{\hat{\mathbf{h}}^T \hat{\mathbf{h}}} \quad (3.7)$$

$$\text{其中 } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^H & v \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) d\omega$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} D(\omega) \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) d\omega$$

$$v = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} |D(\omega)|^2 d\omega$$

接著，如同 2.1.2 節中的分析，我們可將 \mathbf{P} 矩陣分解為 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_r + j\mathbf{P}_i$ ，其中 \mathbf{P}_r 矩陣為實對稱矩陣， \mathbf{P}_i 矩陣為反實對稱矩陣，因為 $\hat{\mathbf{h}}^T \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{h}} = 0$ 所

以我們可將 (3.7) 式 改寫為 $\xi_{\text{TLS}} = \frac{\hat{\mathbf{h}}^T \mathbf{P}_r \hat{\mathbf{h}}}{\hat{\mathbf{h}}^T \hat{\mathbf{h}}}$ 。

由上式得知 \mathbf{P}_r 為實數對稱正定方陣，再根據瑞雷原理，可知 ξ_{TLS} 的最小值為 \mathbf{P}_r 矩陣的最小特徵值，而 $\hat{\mathbf{h}}$ 為最小特徵值所對應的特徵向量，但我們要的是 \mathbf{h} 係數向量，所以要從 $\hat{\mathbf{h}}$ 中將 \mathbf{h} 提出來，其提出的步驟如下兩點：

(1) $\hat{\mathbf{h}}_{\text{new}} = \left(\frac{-1}{[\hat{\mathbf{h}}_{\text{old}}]_{LV}} \right) \hat{\mathbf{h}}_{\text{old}}$ 其中 $[\hat{\mathbf{h}}_{\text{old}}]_{LV}$ 為 $\hat{\mathbf{h}}_{\text{old}}$ 的最後一個元素。

(2) 將 $\hat{\mathbf{h}}_{\text{new}}$ 的最後一個元素去掉之後，剩下的向量為 \mathbf{h} 係數向量，故實係數特徵濾波器基於總合性最小平方誤差準則的係數可求得。

3.3 型式一複係數特徵濾波器基於總合性最小平方誤差準則

在 3.2 節中介紹了如何使用總合性最小平方誤差準則在實係數特徵濾波器的應用，接著我們將觀念延伸至型式一與型式二複係數特徵濾波器的應用上，其結果得到較佳的相位響應，在第四章中我們會將模擬的結果加以分析，而本節將說明型式一複係數特徵濾波器的設計方法。

3.3.1 型式一複係數特徵濾波器的設計規格

總合性最小平方誤差準則的形式如下所示：

$$\xi_{\text{TLS}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{R}} w(\omega) \frac{|D(\omega) - H(e^{j\omega})|^2}{1 + \mathbf{c}^H \mathbf{c}} d\omega \quad (3.8)$$

其中 $D(\omega)$ 想要的任意頻譜響應。

$H(e^{j\omega})$ 我們所設計的頻譜響應。

$w(\omega)$ 加權函數，通常都不考慮，故設為一。

R 頻譜範圍，在複係數討論中為 0 到 2π ，但不包含過渡區頻譜。

\mathbf{c} 我們所設計的係數向量。

根據上述的總合性最小平方誤差準則，我們再配合下列規格來設計任意頻率響應的濾波器。首先我們探討濾波器的頻譜表示式，其中 $c[n]$ 是濾波器的複數係數，而 N 階濾波器的型式為

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N c[n] e^{-j\omega n} \quad (3.9)$$

接著，如同 2.1.2 節中的 (2.3) 式 可將 (3.9) 式 改寫成向量相乘的形式，

而 \mathbf{c} 為複數向量， $\mathbf{e}(e^{j\omega})$ 為複數函數向量，其型式為

$$\mathbf{H}(e^{j\omega}) = \mathbf{c}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \quad (3.10)$$

$$\text{其中 } \mathbf{c} \equiv [c[0] \quad c[1] \quad \dots \quad c[N]]^T$$

$$\mathbf{e}(e^{j\omega}) \equiv [1 \quad e^{-j\omega} \quad \dots \quad e^{-jN\omega}]^T$$

3.3.2 型式一複係數特徵濾波器的設計分析

根據 3.3.1 節的規格，並將 (3.10) 式 代入 (3.8) 式 可得到

$$\xi_{\text{TLS}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{R}} \frac{\left| D(\omega) - \mathbf{c}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right|^2}{1 + \mathbf{c}^H \mathbf{c}} d\omega \quad (3.11)$$

接著，我們將 (3.11) 式 分子的平方項 $\left| D(\omega) - \mathbf{c}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right|^2$ 解開為

$$\left(D(\omega) - \mathbf{c}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)^* \left(D(\omega) - \mathbf{c}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \right)$$

我們再將上式分解為

$$\begin{aligned} & D^*(\omega) D(\omega) - D^*(\omega) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) \mathbf{c} - \mathbf{c}^H D(\omega) \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \\ & + \mathbf{c}^H \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) \mathbf{c} \end{aligned}$$

根據上式得知，可將 (3.11) 式 改寫為

$$\xi_{\text{TLS}} = \frac{\hat{\mathbf{c}}^{\text{H}} \mathbf{P} \hat{\mathbf{c}}}{\hat{\mathbf{c}}^{\text{H}} \hat{\mathbf{c}}} \quad (3.12)$$

$$\text{其中 } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^{\text{H}} & \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{R}} \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) \mathbf{e}^{\text{T}}(e^{j\omega}) d\omega$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{R}} D(\omega) \mathbf{e}^*(e^{j\omega}) d\omega$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{R}} |D(\omega)|^2 d\omega$$

從 (3.12) 式 得知 \mathbf{P} 為複數對稱正定方陣，再根據瑞雷原理，可知 ξ_{TLS} 的最小值為 \mathbf{P} 矩陣的最小特徵值，而 $\hat{\mathbf{c}}$ 為最小特徵值所對應的特徵向量，但我們要的是 \mathbf{c} 係數向量，所以要從 $\hat{\mathbf{c}}$ 中將 \mathbf{c} 提出來，其提出的步驟如下兩點：

$$(1) \quad \hat{\mathbf{c}}_{\text{new}} = \left(\frac{-1}{[\hat{\mathbf{c}}_{\text{old}}]_{LV}} \right) \hat{\mathbf{c}}_{\text{old}} \quad \text{其中 } [\hat{\mathbf{c}}_{\text{old}}]_{LV} \text{ 為 } \hat{\mathbf{c}}_{\text{old}} \text{ 的最後一個元}$$

素。

- (2) 將 $\hat{\mathbf{c}}_{\text{new}}$ 的最後一個元素去掉之後，剩下的向量為 \mathbf{c} 係數向量，故型式一複係數特徵濾波器基於總合性最小平方誤差準則的係數可求得。

3.4 型式二複係數特徵濾波器基於總合性最小平方誤差準則

如同 2.5 節所描述，形式二複係數特徵濾波器與實係數特徵濾波器的設計流程非常類似，只是將複數係數分成為實部與虛部兩部分來分析，所以係數向量依然為實數向量，但向量維度的大小變為原來的兩倍，我們在下一小節的頻譜表示式中會詳細的介紹。

3.4.1 型式二複係數特徵濾波器的設計規格

總合性最小平方誤差準則的形式如下所示：

$$\xi_{\text{TLS}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} w(\omega) \frac{|D(\omega) - H(e^{j\omega})|^2}{1 + \mathbf{d}^H \mathbf{d}} d\omega \quad (3.13)$$

其中 $D(\omega)$ 想要的任意頻譜響應。

$H(e^{j\omega})$ 我們所設計的頻譜響應。

$w(\omega)$ 加權函數，通常都不考慮，故設為一。

\mathbf{R} 頻譜範圍，在複係數討論中為 0 到 2π ，但不包含過渡區頻譜。

\mathbf{d} 我們所設計的係數向量。

根據上述的總合性最小平方誤差準則，我們再配合下列規格來設計任意頻率響應的濾波器。首先我們探討濾波器的頻譜表示式，其中 $(d_R[n] + jd_I[n])$ 為濾波器的複數係數， $d_R[n]$ 與 $d_I[n]$ 為實數，而 N 階濾波器的型式為

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N (d_R[n] + jd_I[n]) e^{-j\omega n} \quad (3.14)$$

接著，如同 2.1.2 節中的 (2.3) 式可將 (3.14) 式改寫成向量相乘的形式，而 \mathbf{d} 為實數向量， $\mathbf{e}(e^{j\omega})$ 為複數函數向量，其式子為

$$H(e^{j\omega}) = \mathbf{d}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \quad (3.15)$$

其中

$$\mathbf{d} \equiv [d_R[0] \quad d_R[1] \quad \dots \quad d_R[N] \quad d_I[0] \quad d_I[1] \quad \dots \quad d_I[N]]^T$$

$$\mathbf{e}(e^{j\omega}) \equiv [1 \quad e^{-j\omega} \quad \dots \quad e^{-jN\omega} \quad j \quad je^{-j\omega} \quad \dots \quad je^{-jN\omega}]^T$$

3.4.2 型式二複係數特徵濾波器的設計分析

根據 3.4.1 節的規格，並將 (3.15) 式代入 (3.13) 式可得到

$$\xi_{\text{TLS}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{R}} \frac{|D(\omega) - \mathbf{d}^T \mathbf{e}(e^{j\omega})|^2}{1 + \mathbf{d}^H \mathbf{d}} d\omega \quad (3.16)$$

接著，我們將 (3.16) 式分子的平方項 $|D(\omega) - \mathbf{d}^T \mathbf{e}(e^{j\omega})|^2$ 解開為

$$(D(\omega) - \mathbf{d}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}))^* (D(\omega) - \mathbf{e}^T(e^{j\omega}) \mathbf{d})$$

我們再將上式分解為

$$D^*(\omega)D(\omega) - D^*(\omega)\mathbf{e}^T(e^{j\omega})\mathbf{d} - \mathbf{d}^T D(\omega)\mathbf{e}^*(e^{j\omega}) + \mathbf{d}^T \mathbf{e}^*(e^{j\omega})\mathbf{e}^T(e^{j\omega})\mathbf{d}$$

根據上式得知，可將 (3.16) 式 改寫為

$$\xi_{\text{TLS}} = \frac{\hat{\mathbf{d}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{d}}}{\hat{\mathbf{d}}^T \hat{\mathbf{d}}} \quad (3.17)$$

$$\text{其中 } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^H & \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{e}^*(e^{j\omega})\mathbf{e}^T(e^{j\omega}) d\omega$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} D(\omega)\mathbf{e}^*(e^{j\omega}) d\omega$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |D(\omega)|^2 d\omega$$

接著，如同 2.1.2 節中的分析，我們可將 \mathbf{P} 矩陣分解為 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_r + j\mathbf{P}_i$ ，

其中 \mathbf{P}_r 矩陣為實對稱矩陣， \mathbf{P}_i 矩陣為反實對稱矩陣，因為 $\hat{\mathbf{d}}^T \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{d}} = 0$ 所

以我們可將 (3.17) 式 改寫為 $\xi_{\text{TLS}} = \frac{\hat{\mathbf{d}}^T \mathbf{P}_r \hat{\mathbf{d}}}{\hat{\mathbf{d}}^T \hat{\mathbf{d}}}$ 。

由上式得知 \mathbf{P}_r 為實數對稱正定方陣，再根據瑞雷原理，可知 ξ_{TLS} 的最小值為 \mathbf{P}_r 矩陣的最小特徵值，而 $\hat{\mathbf{d}}$ 為最小特徵值所對應的特徵向量，但我們要的是 \mathbf{d} 係數向量，所以要從 $\hat{\mathbf{d}}$ 中將 \mathbf{d} 提出來，其提出步驟如下：

$$(1) \hat{\mathbf{d}}_{\text{new}} = \left(\frac{-1}{[\hat{\mathbf{d}}_{\text{old}}]_{LV}} \right) \hat{\mathbf{d}}_{\text{old}} \text{ 其中 } [\hat{\mathbf{d}}_{\text{old}}]_{LV} \text{ 為 } \hat{\mathbf{d}}_{\text{old}} \text{ 的最後一個元素。}$$

(2) 將 $\hat{\mathbf{d}}_{\text{new}}$ 的最後一個元素去掉之後，剩下的向量為 \mathbf{d} 係數向量，

故型式二複係數特徵濾波器基於總合性最小平方誤差準則的係數可求得。

第四章 模擬與分析

在前兩章中我們介紹了六種任意響應之特徵濾波器，其分別為基於最小平方誤差準則的任意響應之實係數特徵濾波器與型式一、型式二複係數特徵濾波器，以及基於總合性最小平方誤差準則的任意響應之實係數特徵濾波器與型式一、型式二複係數特徵濾波器，共六種設計，因為型式一與型式二複係數特徵濾波器是基於相同的複係數特徵濾波器，其設計方法雖不同，但結果是相同的，所以本章提供四種數據來分析與比較。

在 4.4 節中會陳列各種方法的近似誤差值，而我們發現本文所提供的方法相較於其他的方法會有較好的頻率響應近似，也就是基於總合性最小平方誤差準則的任意響應之型式一與型式二複係數特徵濾波器較優於實係數特徵濾波器。



4.1 模擬規格說明

實係數濾波器的頻譜響應有對稱的性質，並且以對稱軸 $\omega = \pi$ 為對稱中心，在 $[0, \pi]$ 與 $[\pi, 2\pi]$ ，振幅響應為偶對稱，相位響應為奇對稱，所以設計實係數濾波器時只須考慮 $[0, \pi]$ 的頻譜，但複係數濾波器的頻譜響應就沒有這個性質，故須考慮 $[0, 2\pi]$ 的頻譜，如果兩者須做比較時，可以將實係數與複係數在 $[0, \pi]$ 設計為相同的頻率響應，這樣一來我們就可以比較 $[0, \pi]$ 的近似情形。

4.1.1 實係數特徵濾波器的模擬規格

$D_r(\omega)$ 為想要的任意頻譜響應，其規格如下所示：

$$D_r(\omega) = \begin{cases} 2e^{-j5\omega} & , \quad 0 \leq \omega \leq 0.2\pi \\ 0 & , \quad 0.3\pi \leq \omega \leq 0.4\pi \\ [(-4/\pi)\omega + 3] e^{-j10\omega} & , \quad 0.5\pi \leq \omega \leq 0.7\pi \\ 0.5e^{-j5\omega} & , \quad 0.8\pi \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

其頻譜響應圖形如下所示：

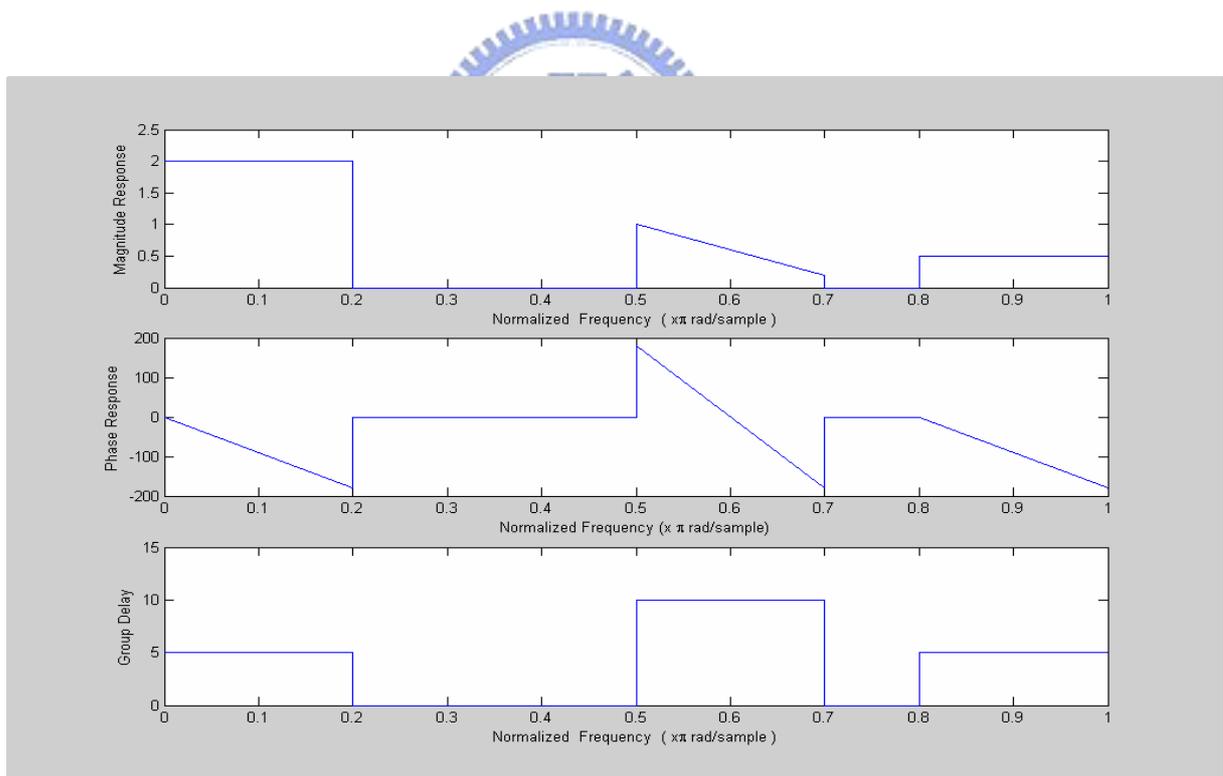


圖 4.1 實係數濾波器的理想響應圖

4.1.2 複係數特徵濾波器的模擬規格

$D_c(\omega)$ 為想要的任意頻譜響應，其規格如下所示：

$$D_c(\omega) = \begin{cases} 2e^{-j5\omega} & , \quad 0 \leq \omega \leq 0.2\pi \\ 0 & , \quad 0.3\pi \leq \omega \leq 0.4\pi \\ [(-4/\pi)\omega + 3]e^{-j10\omega} & , \quad 0.5\pi \leq \omega \leq 0.7\pi \\ 0.5e^{-j5\omega} & , \quad 0.8\pi \leq \omega \leq 1.3\pi \\ 0 & , \quad 1.4\pi \leq \omega \leq 1.7\pi \\ [(9/\pi)\omega - 16]e^{-j10\omega} & , \quad 1.8\pi \leq \omega \leq 2\pi \end{cases}$$

其頻譜響應圖形如下所示：

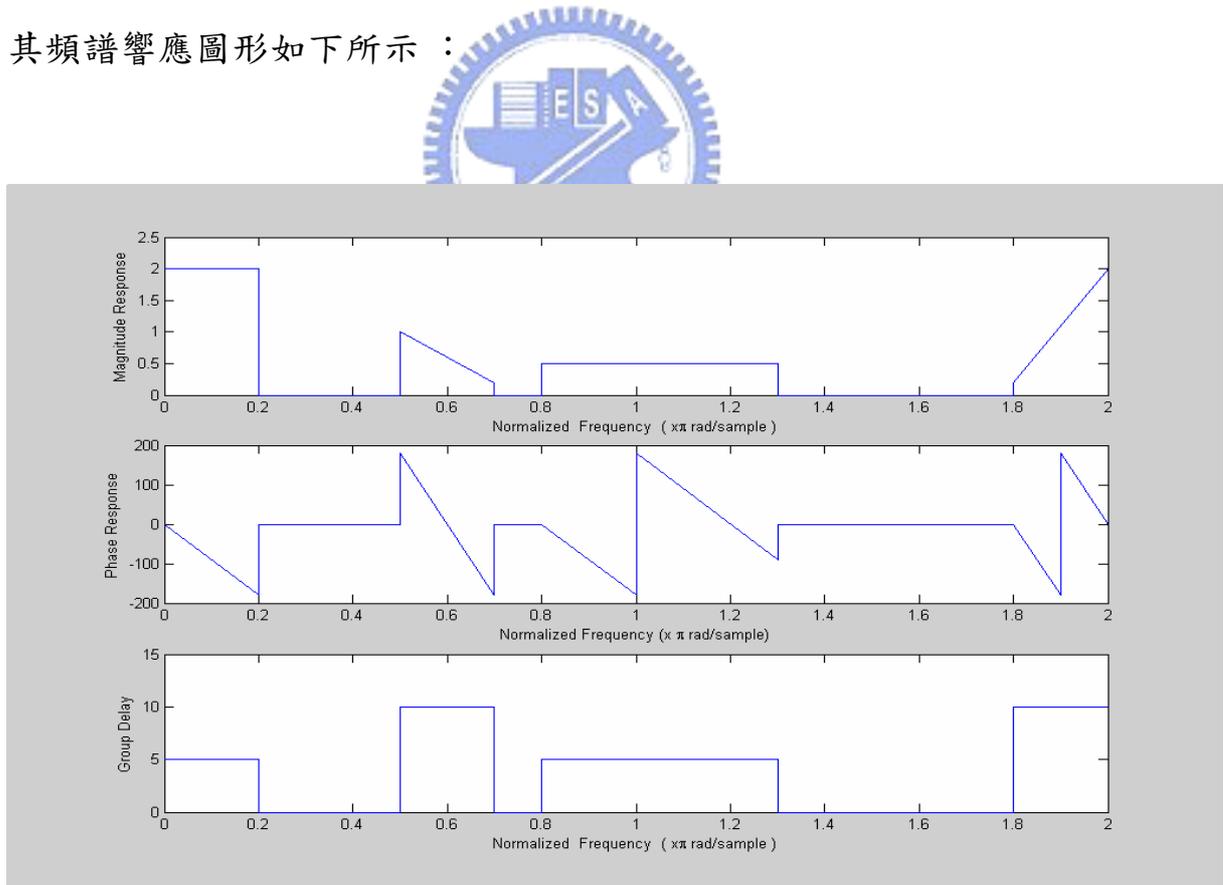


圖 4.2 複係數濾波器的理想響應圖

4.2 特徵濾波器基於最小平方誤差準則的模擬

在 4.2 節中我們將實現第二章基於最小平方誤差準則的任意響應之特徵濾波器。

4.2.1 實係數特徵濾波器的模擬

根據 4.1.1 節的規格，我們使用 15 階與 30 階的濾波器來近似理想響應，其響應圖如下所示：

一、15 階的頻率響應圖以及誤差響應圖

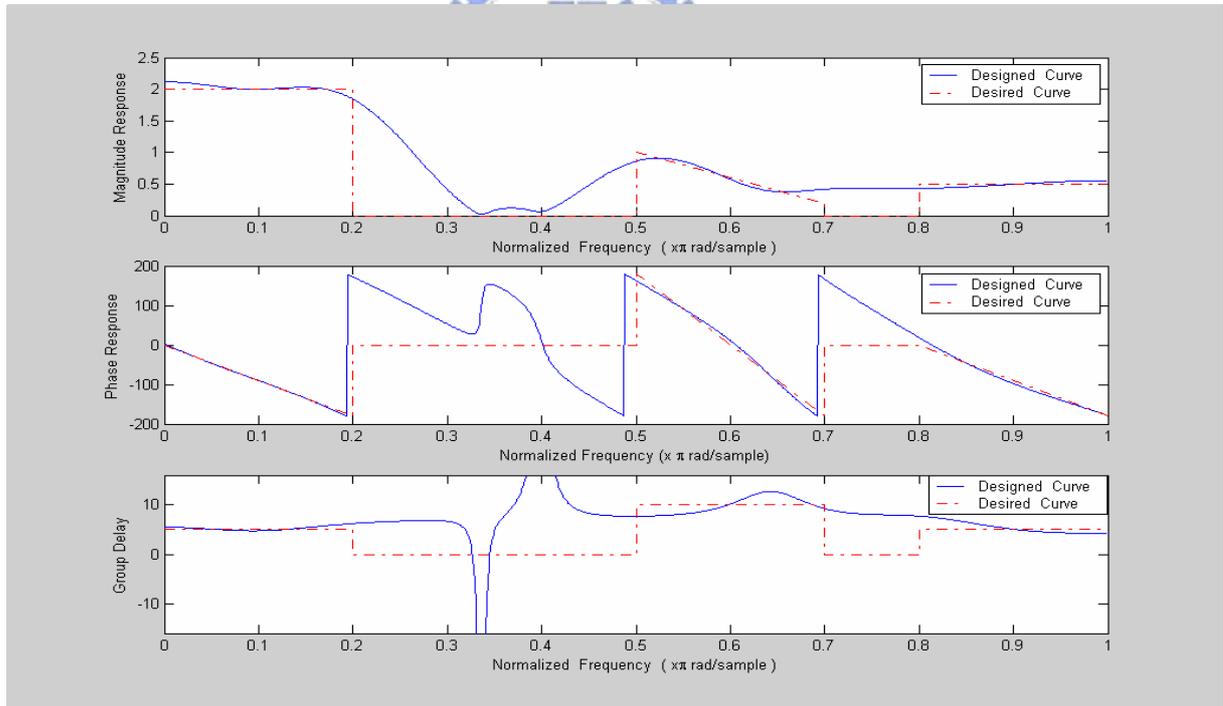


圖 4.3 基於最小平方誤差準則 15 階實係數特徵濾波器頻率響應圖

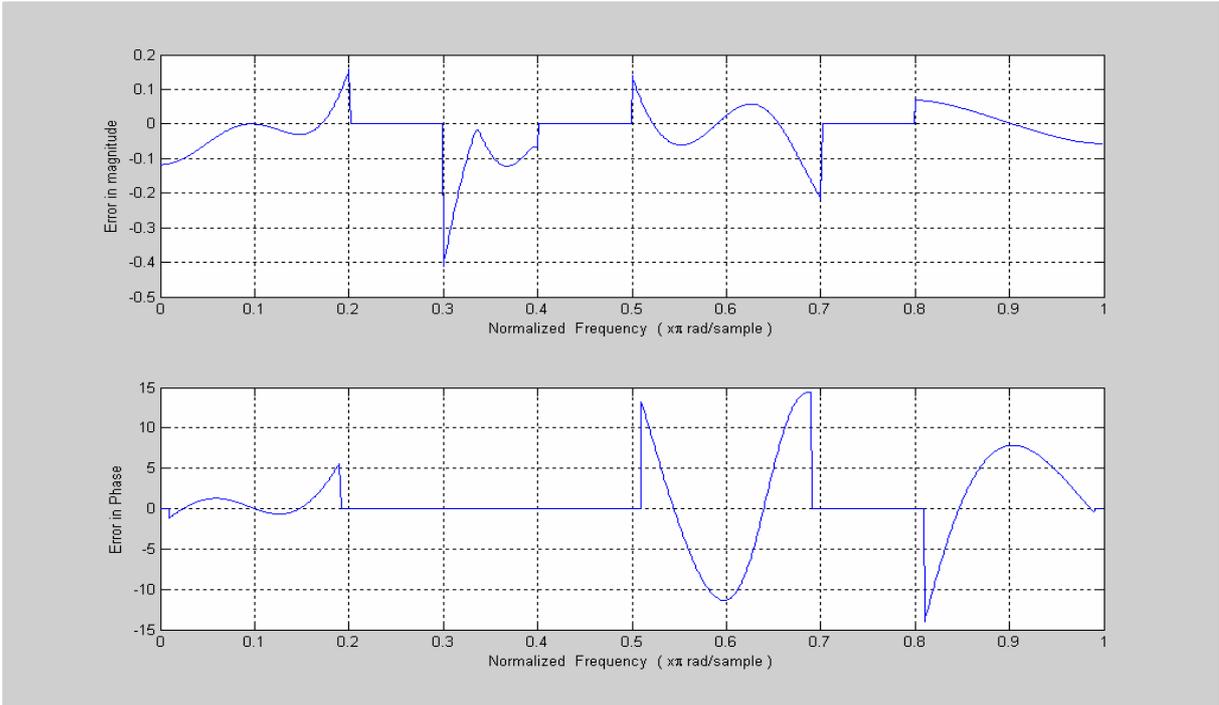


圖 4.4 基於最小平方誤差準則 15 階實係數特徵濾波器誤差響應圖

二、30 階的頻率響應圖以及誤差響應圖

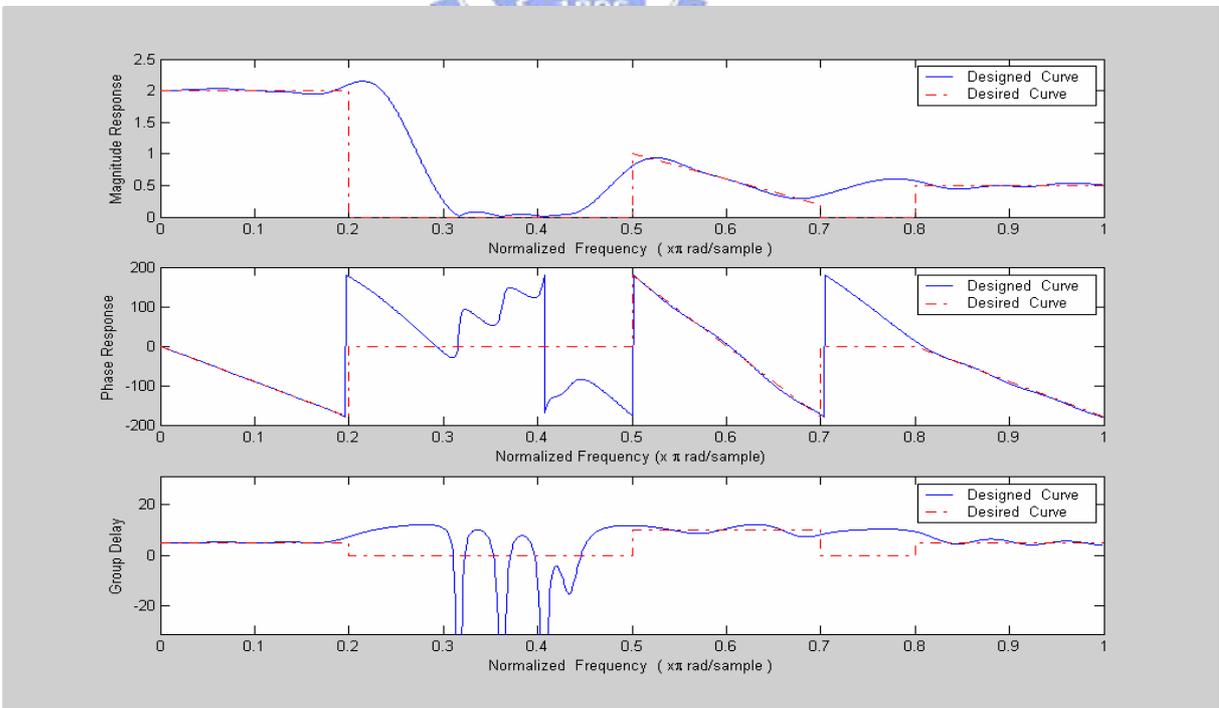


圖 4.5 基於最小平方誤差準則 30 階實係數特徵濾波器頻率響應圖

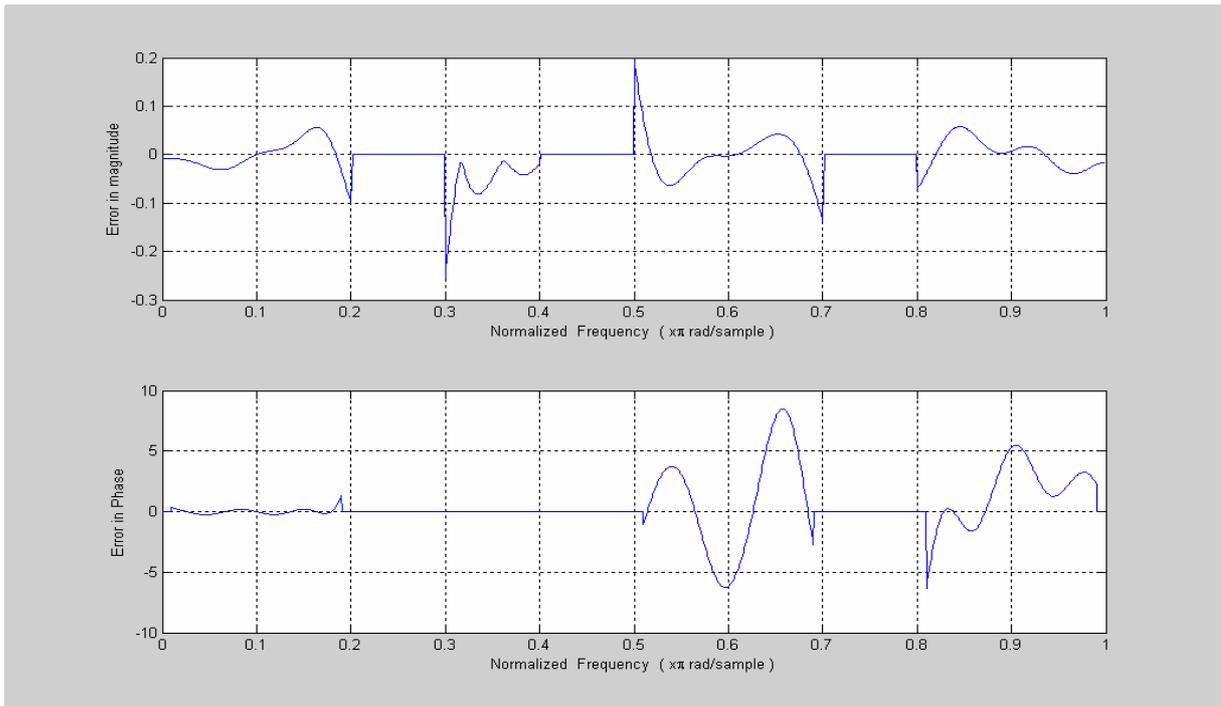


圖 4.6 基於最小平方誤差準則 30 階實係數特徵濾波器誤差響應圖



4.2.2 複係數特徵濾波器的模擬

根據 4.1.2 節的規格，我們使用 15 階與 30 階的濾波器來近似理想響應，其響應圖如下所示：

一、15 階的頻率響應圖以及誤差響應圖

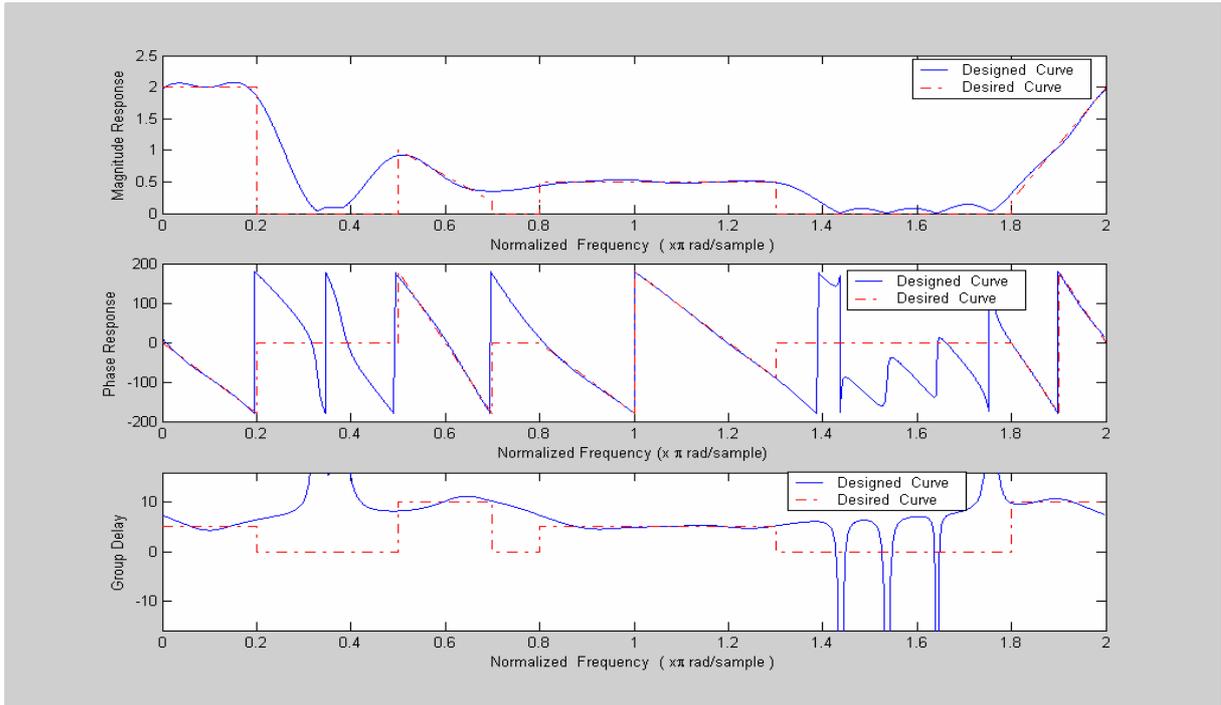


圖 4.7 基於最小平方誤差準則 15 階複係數特徵濾波器頻率響應圖

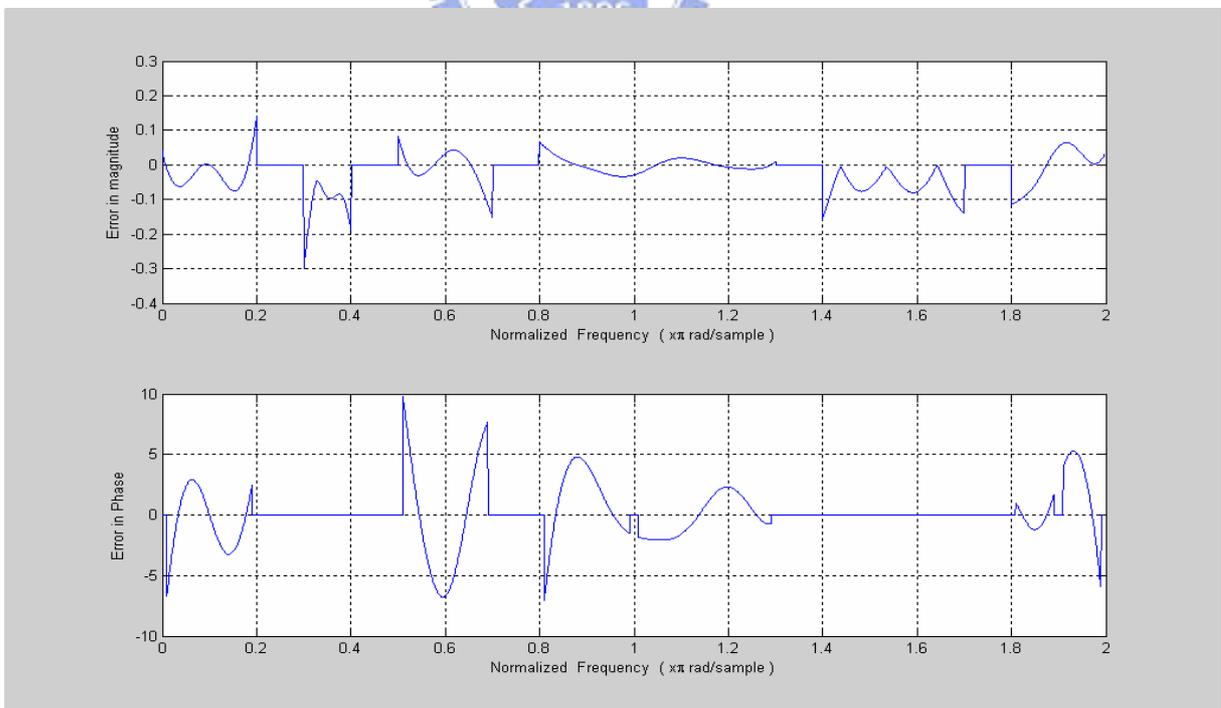


圖 4.8 基於最小平方誤差準則 15 階複係數特徵濾波器誤差響應圖

二、30 階的頻率響應圖以及誤差響應圖

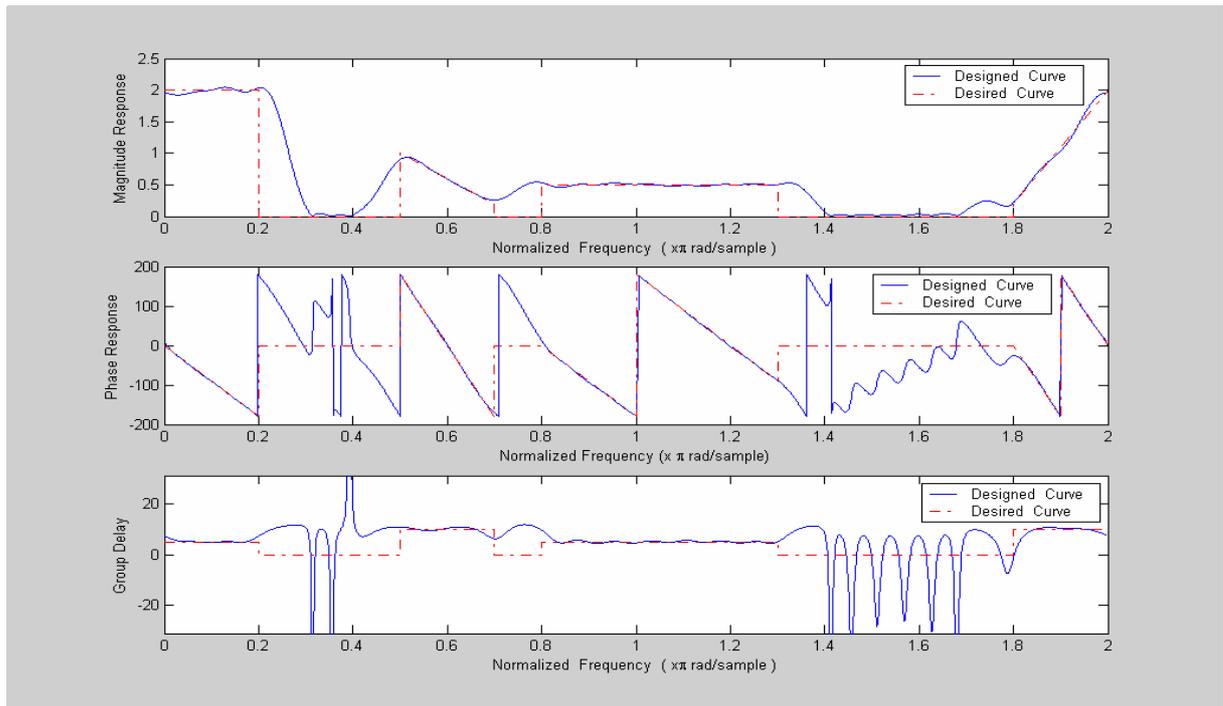


圖 4.9 基於最小平方誤差準則 30 階複係數特徵濾波器頻率響應圖

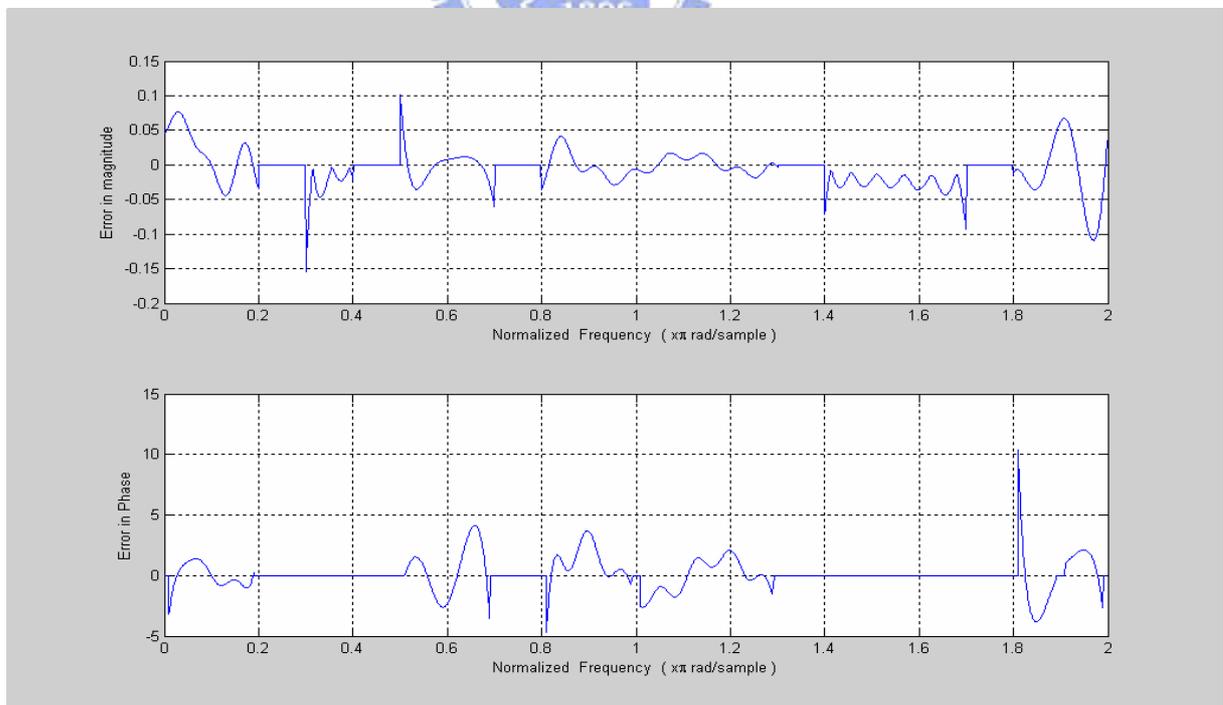


圖 4.10 基於最小平方誤差準則 30 階複係數特徵濾波器誤差響應圖

4.3 特徵濾波器基於總合性最小平方誤差準則的模擬

在 4.3 節中我們將實現第三章基於總合性最小平方誤差準則的任意響應之特徵濾波器。

4.3.1 實係數特徵濾波器的模擬

根據 4.1.1 節的規格，我們使用 15 階與 30 階的濾波器來近似理想響應，其響應圖如下所示：

一、15 階的頻率響應圖以及誤差響應圖

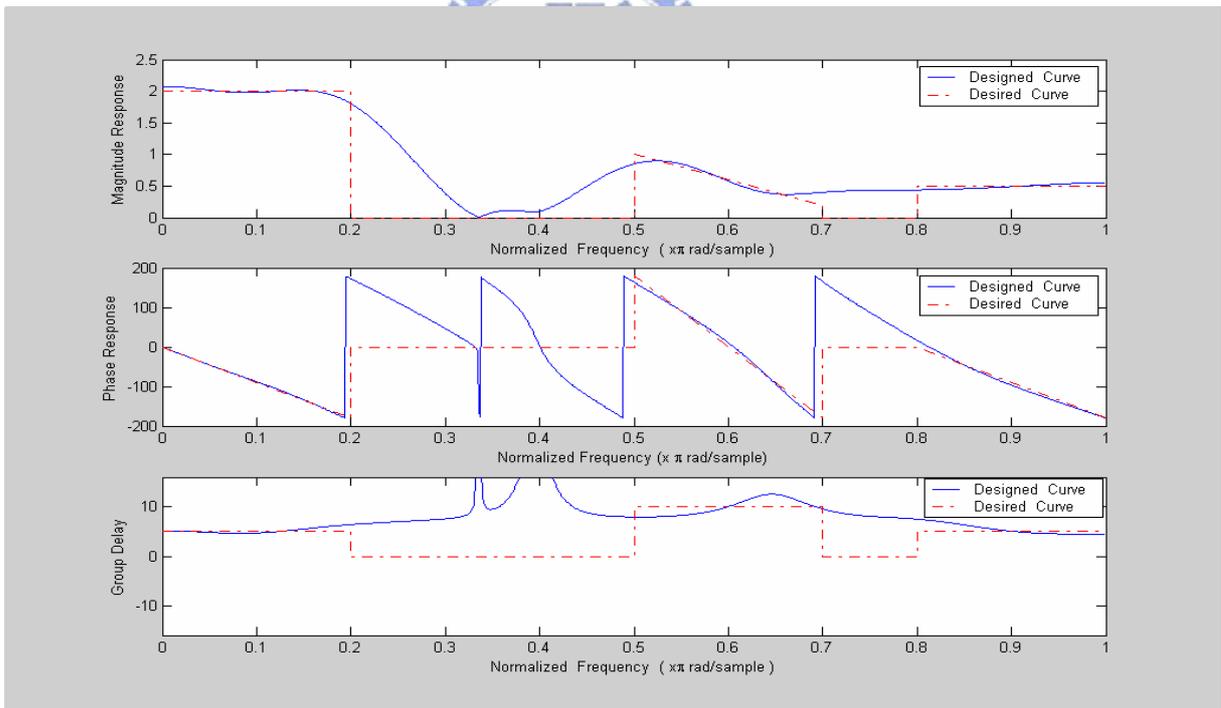


圖 4.11 基於總合性最小平方誤差準則 15 階實係數特徵濾波器頻率響應圖

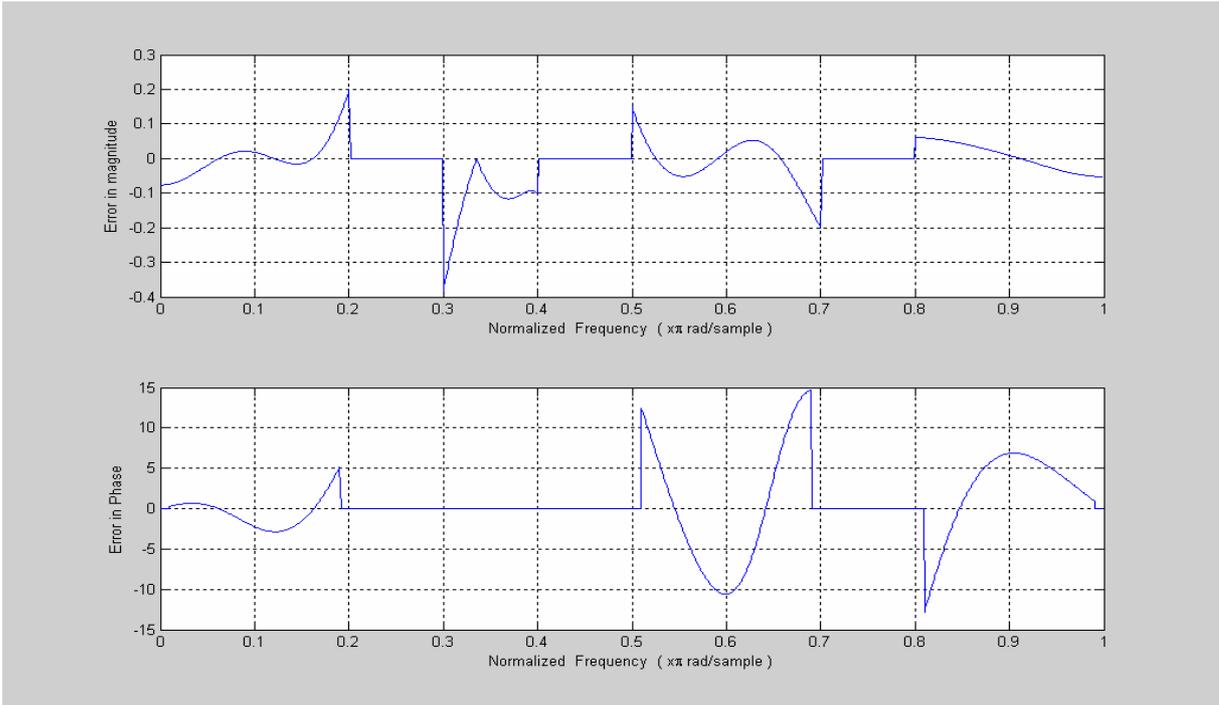


圖 4.12 基於總合性最小平方誤差準則 15 階實係數特徵濾波器誤差響應圖

二、30 階的頻率響應圖以及誤差響應圖

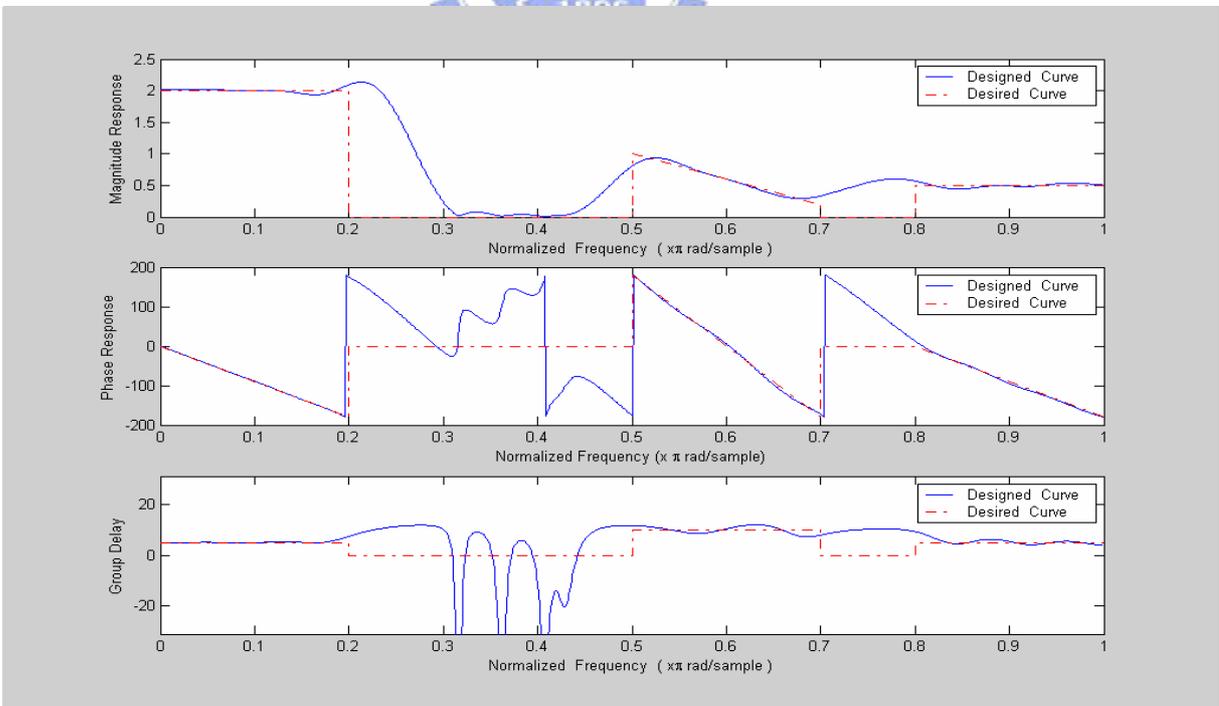


圖 4.13 基於總合性最小平方誤差準則 30 階實係數特徵濾波器頻率響應圖

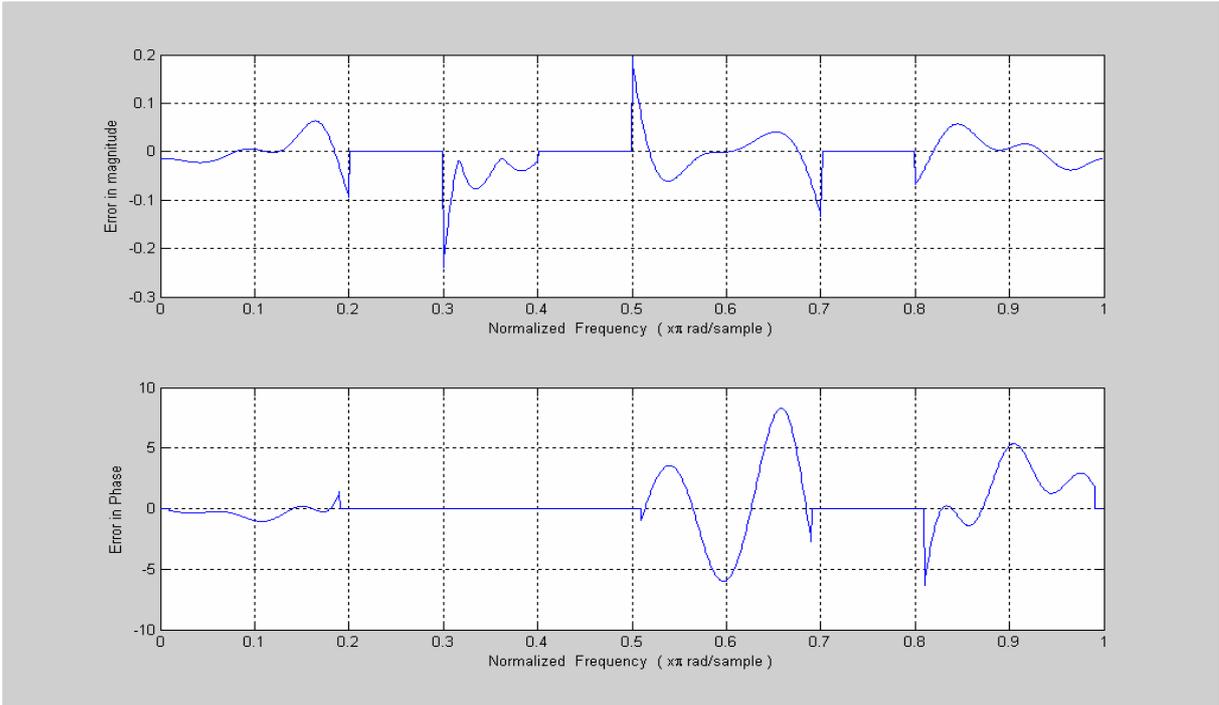
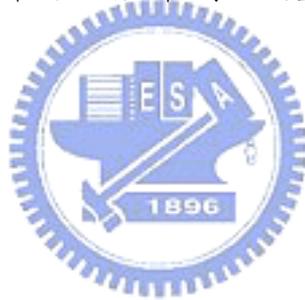


圖 4.14 基於總合性最小平方誤差準則 30 階實係數特徵濾波器誤差響應圖



4.3.2 複係數特徵濾波器的模擬

根據 4.1.2 節的規格，我們使用 15 階與 30 階的濾波器來近似理想響應，其響應圖如下所示：

一、15 階的頻率響應圖以及誤差響應圖

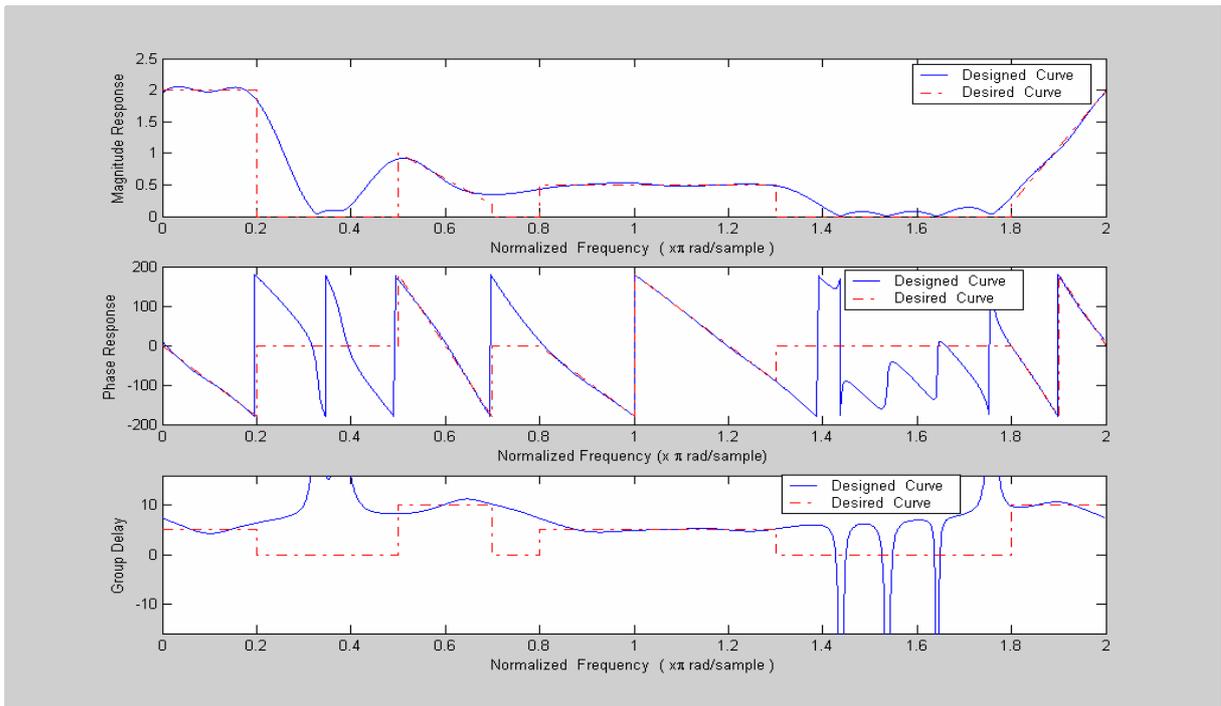


圖 4.15 基於總合性最小平方誤差準則 15 階複係數特徵濾波器頻率響應圖

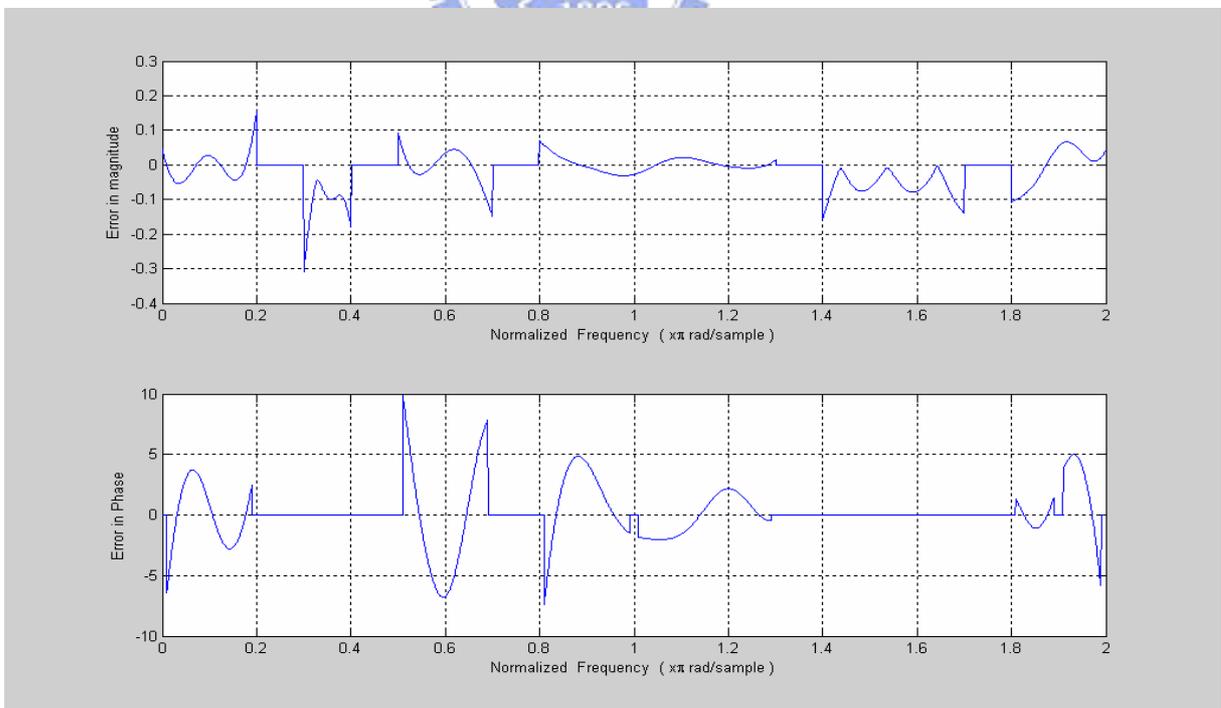


圖 4.16 基於總合性最小平方誤差準則 15 階複係數特徵濾波器誤差響應圖

二、30 階的頻率響應圖以及誤差響應圖

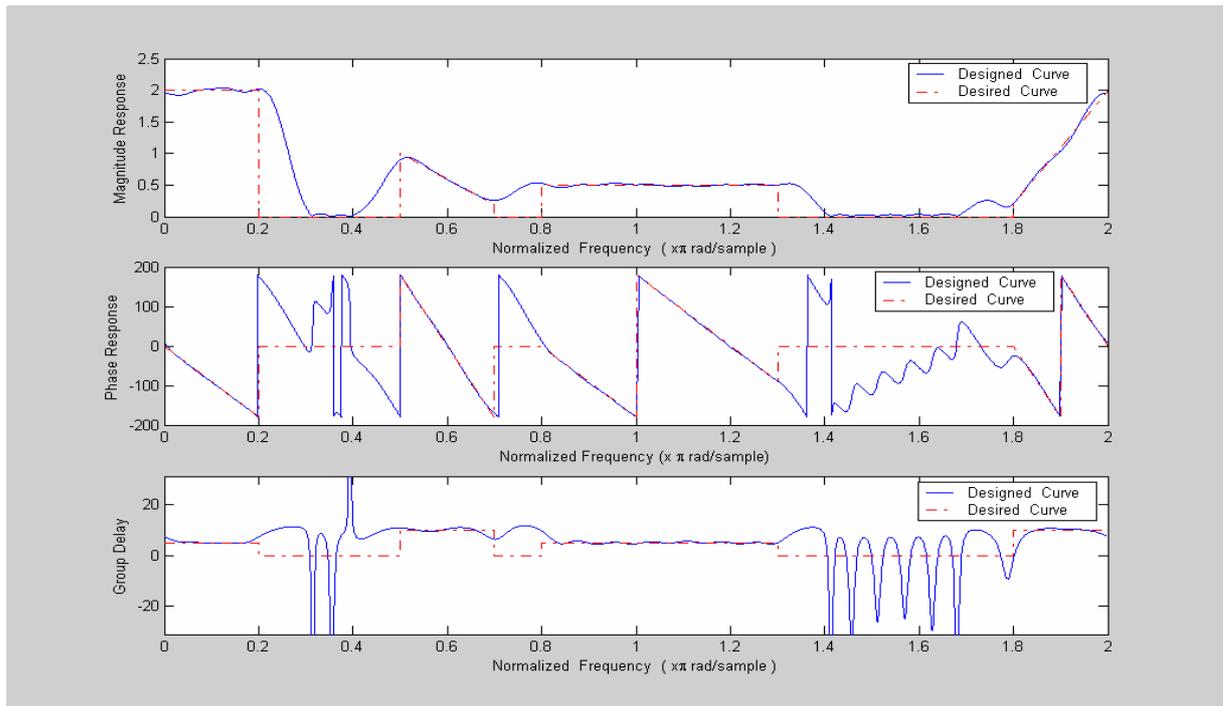


圖 4.17 基於總合性最小平方誤差準則 30 階複係數特徵濾波器頻率響應圖

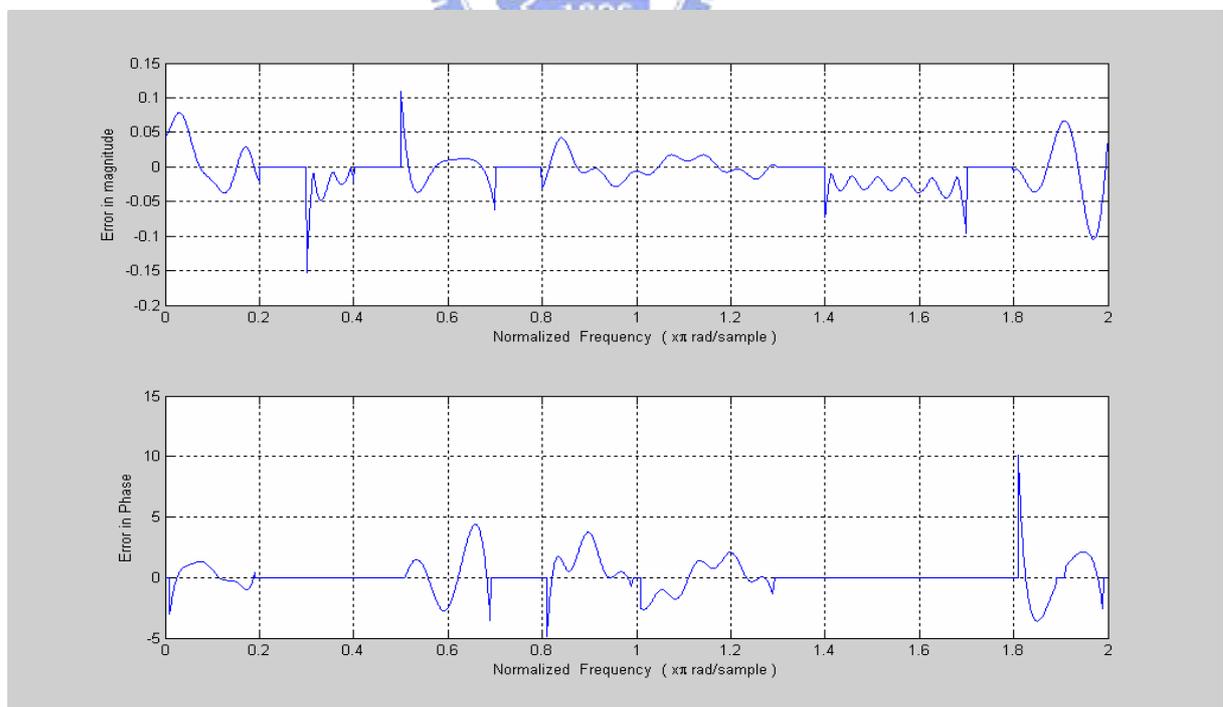


圖 4.18 基於總合性最小平方誤差準則 30 階複係數特徵濾波器誤差響應圖

4.4 數值的分析與比較

在 4.2 節與 4.3 節中展示了經由電腦模擬運算所得到的頻率響應圖，雖然很明顯得到我們想要的近似結果，但無法很明確的指出各方法之間的數值差別，所以我們先定義兩個誤差測量函數來作為各方法之間的數值比較，其定義如下所示：

一、振幅誤差函數，其數學定義如下所示：

$$\text{magnitude error 1} \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (|D(\omega)| - |H(\omega)|)^2 d\omega$$

$$\text{magnitude error 2} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|D(\omega)| - |H(\omega)|)^2 d\omega$$

其中 (1) $|D(\omega)|$ 為理想的振幅響應， $|H(\omega)|$ 為所設計的振幅響應。

(2) magnitude error 1 用在實係數濾波器上，而 magnitude error 2 是用在複係數濾波器上，若兩者要比較則用 magnitude error 1。

二、相位誤差函數，其數學定義如下所示：

$$\text{phase error 1} \equiv \frac{1}{180} \int_0^{180} [\text{angle}(D(\omega)) - \text{angle}(H(\omega))]^2 d\theta$$

$$\text{phase error 2} \equiv \frac{1}{360} \int_0^{360} [\text{angle}(D(\omega)) - \text{angle}(H(\omega))]^2 d\theta$$

其中 (1) $\text{angle}(D(\omega))$ 為理想的相位響應， $\text{angle}(H(\omega))$ 為所設計的相位響應。

(2) phase error 1 用在實係數濾波器上，而 phase error 2 是用在複係數濾波器上，若兩者要比較則用 phase error 1。

4.4.1 數值分析列表

一、15 階濾波器的數值列表

濾波器係數的類型	設計的類型	Magnitude Error 1	Phase Error1
實係數	最小平方 誤差準則	0.0045695	21.149
	總合性最小 平方誤差準則	0.0039284	18.674
複係數	最小平方 誤差準則	0.002651	7.4111
	總合性最小 平方誤差準則	0.002551	7.6026
		Magnitude Error 2	Phase Error2
複係數	最小平方 誤差準則	0.0023984	4.7553
	總合性最小 平方誤差準則	0.0023175	4.7542

表 4.1 特徵濾波器在 15 階的誤差值

二、30 階濾波器的數值列表

濾波器係數的類型	設計的類型	Magnitude Error 1	Phase Error1
實係數	最小平方 誤差準則	0.0014351	5.1531
	總合性最小 平方誤差準則	0.0013244	4.9011
複係數	最小平方 誤差準則	0.00068966	1.58844
	總合性最小 平方誤差準則	0.00068422	1.6845
		Magnitude Error 2	Phase Error2
複係數	最小平方 誤差準則	0.00076933	1.6207
	總合性最小 平方誤差準則	0.00075877	1.6518

表 4.2 特徵濾波器在 30 階的誤差值

4.4.2 模擬分析

由第二章與第三章所描述的演算法以及表 4.1、表 4.2 的數值列表最後再加上模擬過程的心得，我們可以得到一些結論。首先在模擬的過程中，發現愈高階的濾波器以及愈精確的電腦運算所得到的近似效果愈佳。其次在表 4.1 以及表 4.2 中，可看出總合性最小平方誤差準則的近似效果總是優於最小平方誤差準則，但隨著階數的升高，兩者近似的效果會愈來愈接近。而且，不管是總合性最小平方誤差準則或者是最小平方誤差準則，他們的複係數頻率響應的近似皆優於實係數，其原因是複係數可提供較多的相位近似，所以在設計振幅響應上，自由度就更為充裕。

接著在表 4.1 與表 4.2 的複係數例子中，我們發現總合性最小平方誤差準則的相位近似居然沒有優於最小平方誤差準則，其中一個原因是複係數濾波器不管基於那種準則，本身都有能力補償其相位，所以在設計複係數的例子中，兩種準則的相位近似差別不大，此外另一原因是電腦運算不夠精確，若能夠再精準，則兩個值會趨近相同，不過在振幅近似的方面，總合性最小平方誤差準則還是較優於最小平方誤差準則。最後在複係數的例子中，phase error 1 與 phase error 2 的誤差值變化不一，其原因是複係數的頻率響應是不對稱的。

第五章 結論

由第四章的分析我們得知，總合性最小平方誤差準則的近似效果總是優於最小平方誤差準則，尤其是在低階濾波器應用時，其優劣差別更是明顯，所以在設計低階濾波器時可考慮使用基於總合性最小平方誤差準則的特徵濾波器。在相位的近似方面，複係數特徵濾波器的近似效果雖然優於實係數特徵濾波器，但在晶片實現以及數值運算等方面較為複雜，而儲存的空間也比實係數多出很多，若沒有特別要求相位的近似，我們建議使用基於總合性最小平方誤差準則之實係數特徵濾波器，這樣比較接近合理的經濟與性能需求。

本文討論的是 FIR 特徵濾波器的設計，但在許多方面 IIR 濾波器的性能皆優於 FIR 濾波器，故未來可朝向設計 IIR 特徵濾波器前進。另外一方面，特徵濾波器的最小化觀念不只可應用在濾波器的設計，像是數位通訊多頻調變 (DMT) 系統的通道縮減，也是應用特徵濾波器最小化的觀念，所以最小化的觀念並不是侷限在一個範圍，而是可廣泛的應用。上述所提到的觀念與應用在[13]中有詳細的介紹。

參考文獻

- [1] P. P. Vaidyanathan and T. Q. Nguyen, "Eigenfilters: A new approach to least-squares FIR filter design and applications including Nyquist filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 34, pp. 11-23, Jan. 1987.
- [2] T. Q. Nguyen, "The eigenfilter for the design of linear-phase filters with arbitrary magnitude response," *Proc. IEEE ICASSP' 91*, vol. 3, pp. 1981-1984, 1991.
- [3] T. Q. Nguyen, "The design of arbitrary FIR digital filters using the eigenfilter method," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, pp. 1128-1139, Mar. 1993.
- [4] S. C. Pei and J. J. Shyu, "Complex eigenfilter design of arbitrary complex coefficient FIR digital filters," *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 40, pp. 32-40, Jan. 1993.
- [5] S. C. Pei and J. J. Shyu, "Design of 1-D and 2-D IIR eigenfilters," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 962-966, Apr. 1994.
- [6] T. Q. Nguyen, T. I. Laakso, and R. D. Koilpillai, "Eigenfilter approach for the design of allpass filters approximating a given phase response," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 2257-2263, Sept. 1994.
- [7] S. C. Pei and J. J. Shyu, "2-D FIR eigenfilters: A least squares approach," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 37, pp. 24-34, Jan. 1990

- [8]P. J. W. Melsa, R. C. Younce, and C. E. Rohrs, “Impulse response shortening for discrete multitone transceivers,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, pp. 1662–1672, Dec. 1996.
- [9]P. P. Vaidyanathan, *Multirate systems and Filter Banks*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [10]S. C. Pei, C. C. Tseng, and W. S. Yang, “FIR filter design with linear constraints using the eigenfilter approach,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 45, pp. 232–237, Feb. 1998.
- [11]S. C. Pei and C. C. Tseng, “A new eigenfilter based on total least squares error criterion,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 48, pp. 699–709. June 2001.
- [12]D. Slepian, “Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty - V: The discrete case,” *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 57, pp. 1371–1430, May–June 1978.
- [13]A. Tkacenko, P. P. Vaidyanathan, and T. Q. Nguyen, “on the eigenfilter design method and its applications : a tutorial,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 50, NO. 9, Sept. 2003.
- [14]C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1992.