

國立交通大學

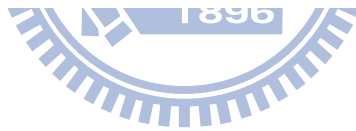
財務金融研究所

碩士論文

有違約風險的選擇權訂價：對偶問題



Vulnerable Option Pricing : The Dual Problem



研究生：潘政宏

指導教授：戴天時 博士

中華民國九十九年六月

有違約風險的選擇權訂價：對偶問題

Vulnerable Option Pricing : The Dual Problem

研 究 生：潘政宏

Student : Zheng-Hung Pan

指 導 教 授：戴天時博士

Advisor : Dr. Tian-Shyr Dai

國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

A Thesis Submitted to Graduate Institute of Finance
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science in
Finance

June 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年六月

有違約風險的選擇權訂價：對偶問題

學生：潘政宏

指導教授：戴天時 博士

國立交通大學財務金融研究所

中華民國九十九年六月

摘要

本文嘗試延伸有違約風險的選擇權評價公式，考慮在首次通過模型的前提下，推導有違約風險的選擇權之封閉解；以及其對偶問題：考慮在 Merton 結構式模型的前提下，推導有違約風險的障礙選擇權之封閉解。並且依照本文方法，利用有違約風險的選擇權之封閉解和 in-out parity 性質，可延伸評價其他型態障礙選擇權。並將其延伸至結構型債券，如 Reverse exchangeable bond 和 Barrier reverse convertibles 的評價上。

關鍵字： 交易對手風險、結構式模型、首次通過模型、障礙選擇權。

Vulnerable Option Pricing : The Dual Problem

Student : Zheng-Hung Pan

Advisor : Dr. Tian-Shyr Dai

Graduate Institute of Finance

National Chiao Tung University

June 2010

ABSTRACT

This paper presents a method of pricing vulnerable vanilla options under the first passage model. Similar approach can be applied to solve the dual problem — pricing barrier options under the Merton's structural model. By applying the closed-form solution of vulnerable barrier options and the in-out parity, we can derive other types of barrier options. Finally, our formulas can be used to evaluate structural notes, like reverse exchangeable bond and barrier reverse convertibles.

KEYWORDS: Counterparty Risk, Structural Model, First Passage Model, Barrier Option.

誌謝

我要感謝指導教授戴天時老師。這一年以來的 meeting，一起研讀 Shreve 的 Stochastic Calculus for Finance 和 John C. Hull 的 Options, Futures, and Other Derivatives 時，每當我們有不太正確的觀念，戴天時老師總是不厭其煩地給予指正，並因此確定了我研究方向。遇到瓶頸時，老師也常常為我們指點迷津，並鼓勵我們去多方嘗試。很榮幸能成為老師的學生，老師淵博的學識讓我的碩士生涯學得紮實，獲益甚多。

感謝王鈞茹學姊，遇到問題時，學姊總能想辦法來幫助我，也感謝學姊在論文及報告上給予的寶貴意見。還要感謝邱俊淵學長，學長強大的數學知識讓我無後顧之憂的研究論文。感謝呂育道教授和王之彥教授在論文上給予的指正與建議。感謝一起學習的伙伴們，亮志、敏誠、偲維和雅雯，感謝你們這段日子以來的鼓勵與相挺。感謝劉彥君以及資管所的同學們，因為有你們的數值模型，才能讓我的論文更具正確性。也感謝財金所 97 級的全體同學，謝謝你們這兩年來的陪伴，讓我的人生更加豐富。

最後，由衷地感謝我的父母。謝謝你們不辭辛苦地養育栽培，謝謝你們讓我享受這麼棒的學習環境，謝謝你們一路以來的鼓勵與支持。最後，再次感謝所有幫助過我的師長們、學長姊、同學們和我的父母，謝謝你們。

潘政宏 謹誌
國立交通大學財務金融研究所
中華民國九十九年六月

目錄

摘要.....	I
ABSTRACT	II
誌謝.....	III
目錄.....	IV
第一章 緒論	1
第一節 研究動機與背景	1
第二節 研究目的	1
第三節 研究架構	3
第二章 文獻回顧	4
第一節 Klein (1996)有違約風險的選擇權評價公式.....	4
第二節 模型的介紹	6
第三節 論文相關定理	7
第三章 研究方法	10
第一節 定理介紹	10
第二節 在首次通過模型下，有違約風險的選擇權之封閉解.....	13
第三節 在 Merton 結構式模型下，有違約風險的下方出局障礙買權之封閉解.....	22
第四章 模型結果分析	36
第一節 特殊情況參數	36
第二節 有違約風險之下出局買權評價公式與劉彥君 (2010)數值解比較.....	38
第三節 敏感性分析-在首次通過模型下，有違約風險的買權	39
第四節 敏感性分析-Merton 結構式模型下，有違約風險的下出局買權	42
第五節 敏感性分析 Reverse exchangeable bond 和 Barrier reverse convertibles.....	46
第五章 結論以及後續研究	53
第一節 結論	53
第二節 後續研究	53
參考文獻	54

表目錄

表 4.1	我們在特殊情況下的封閉解與 Black-Scholes 買權封閉解	36
表 4.2	我們在特殊情況下的封閉解與下出局買權的封閉解	37
表 4.3	我們在特殊情況下的封閉解與 Klein (1996)封閉解.....	37
表 4.4	我們的封閉解與劉彥君 (2010)數值解.....	38

圖目錄

圖 1.1	FPM 下的公司資產與股票價格模擬圖	2
圖 1.2	Merton 結構式模型下的公司資產與股票價格模擬圖.....	2
圖 1.3	研究架構.....	3
圖 2.1	模擬公司價值圖	6
圖 2.2	布朗運動路徑反射圖	7
圖 3.1	積分範圍 I.....	15
圖 3.2	積分範圍 III.....	25
圖 4.1	股價敏感性分析 I.....	40
圖 4.2	公司資產敏感性分析 I.....	40
圖 4.3	股價波動度敏感性分析 I.....	41
圖 4.4	到期時間敏感性分析 I.....	41
圖 4.5	公司資產波動度敏感性分析 I.....	42
圖 4.6	股價敏感性分析 II	43
圖 4.7	公司資產敏感性分析 II	44
圖 4.8	股價波動度敏感性分析 II	44
圖 4.9	到期時間敏感性分析 II	45
圖 4.10	公司資產波動度敏感性分析 II	45
圖 4.11	股價敏感性分析 III.....	47
圖 4.12	公司資產敏感性分析 III.....	47

圖 4.13 股價波動度敏感性分析 III	48
圖 4.14 到期時間敏感性分析 III	48
圖 4.15 公司資產波動度敏感性分析 III	49
圖 4.16 股價敏感性分析 IV	50
圖 4.17 公司資產敏感性分析 IV	51
圖 4.18 股價波動度敏感性分析 IV	51
圖 4.19 到期時間敏感性分析 IV	52
圖 4.20 公司資產波動度敏感性分析 IV	52



第一章 緒論

第一節 研究動機與背景

所謂有違約風險的選擇權(Vulnerable option)，是指選擇權的賣方(Option writer)可能發生無法履行其義務的情況。一般在交易所交易的選擇權，在保證金和結算的制度之下，違約發生的機率很非常小的，也就是其違約風險是可以忽略的。然而在店頭市場(OTC)而言，若無相關的保證金制度亦無做避險的情況下，違約風險是存在的。以歐式股票買權為例，若到期日為 T 、 $S(T)$ 為到期日股價、履約價為 K ，當到期日時標的股票價格高於履約價格，買權賣方就必須履行義務支付 $S(T) - K$ 給予買權買方(Option holder)；但若違約發生時，假定回收率為 $\delta(0 \leq \delta < 1)$ ，則買權買方只能拿到 $\delta(S(T) - K)$ ，而不是 $S(T) - K$ 。

有違約風險的選擇權價值，其風險來自於交易對手的信用風險。選擇權的價值，不僅取決於標的物價格，亦與交易對手是否會違約有關。在模型上，以交易對手的公司資產是否低於公司負債來判定違約發生的情形。因此標的物價格與交易對手公司資產決定了選擇權的價值。過去曾有幾位學者對有違約風險的選擇權進行了研究。Klein (1996) 定義 α 為破產成本、 $V(T)$ 為在到期日時的公司資產、 D 為公司負債，並假定回收率 $\delta = (1 - \alpha)V(T) / D$ ，提出了在 Merton 結構式模型下，有違約風險的選擇權之封閉解。而 Rich (1996) 也提出在公司負債亦為隨機過程的假設下，四種不同回收率的有違約風險的選擇權之評價封閉解。

第二節 研究目的

我們考量在首次通過模型(First passage model, FPM)下，推導有違約風險的選擇權封閉解。定義負債折現因子 γ 及公司到期日負債 L ，若公司資產在到期日之前的時間 t 時觸碰到負債門檻 $Le^{-\gamma(T-t)}$ ，或在到期日當天的公司價格低於公司負債 D ，則會發生違約。以圖 1.1 為例，由於公司資產在到期日之前皆高於負債門檻 $Le^{-\gamma(T-t)}$ ，且到期日的公司資產亦高於公司負債 D ，而到期日的股價也高於

履約價格，因此交易對手不會發生違約，買方可以拿到 $S(T) - K$ 。我們再深入研究其對偶問題：考量在 Merton 結構式模型下，推導有違約風險的障礙選擇權封閉解。在 Merton 結構式模型下，只有在到期日的公司資產低於公司負債時，才會發生違約。以圖 1.2 為例，雖然公司價值曾低於公司負債 D ，但在到期日的公司資產仍高於公司負債，因此不會發生違約，且到期日的股價也高於履約價格，到期日前的股價高於障礙價格(即 $S(t) > Be^{-\gamma(T-t)}$)，所以買方可以拿到 $S(T) - K$ 。該問題相當於將原有的有違約風險選擇權評價問題中，股價 $S(t)$ 和公司資產 $V(t)$ 的角色對調，並將原來對 $V(t)$ 的負債門檻 $Le^{-\gamma(T-t)}$ 轉換成對 $S(t)$ 的障礙價格 $Be^{-\gamma(T-t)}$ ，以修改有違約風險選擇權評價公式來評價。最後利用 Klein (1996) 所提出有違約風險的選擇權和 in-out parity，可以求得其他形式的障礙選擇權封閉解。

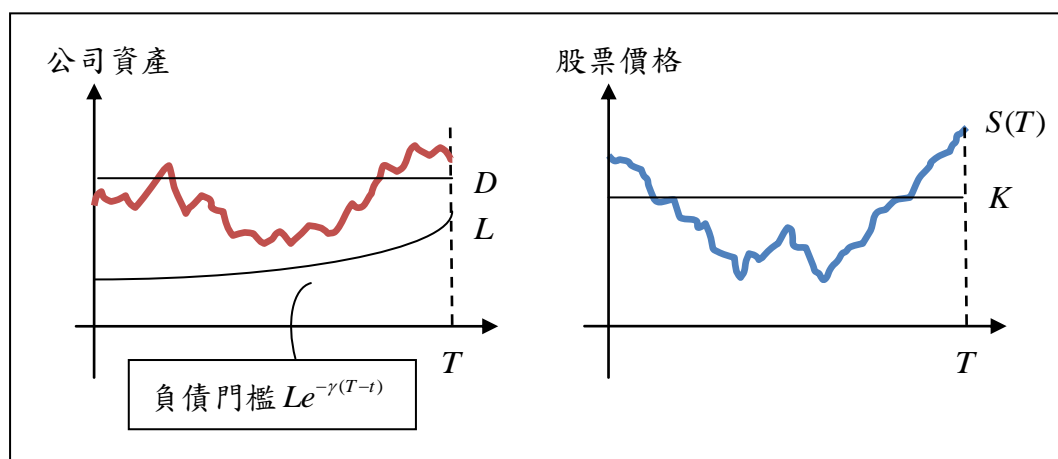


圖 1.1 FPM 下的公司資產與股票價格模擬圖

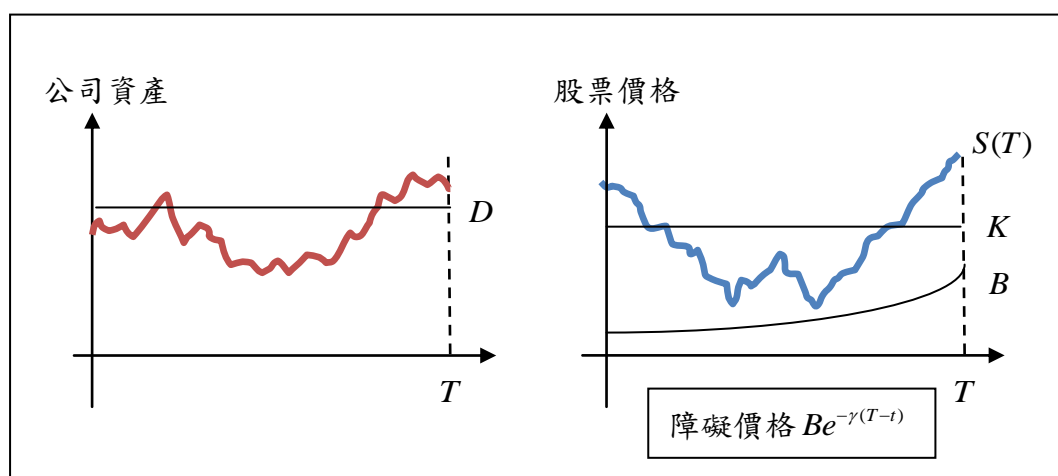


圖 1.2 Merton 結構式模型下的公司資產與股票價格模擬圖

第三節 研究架構

本文主要研究的兩個對偶問題，

1. 在首次通過模型下，有違約風險的選擇權之封閉解。
2. 在 Merton 結構式模型下，有違約風險的障礙選擇權之封閉解。

研究架構如下：

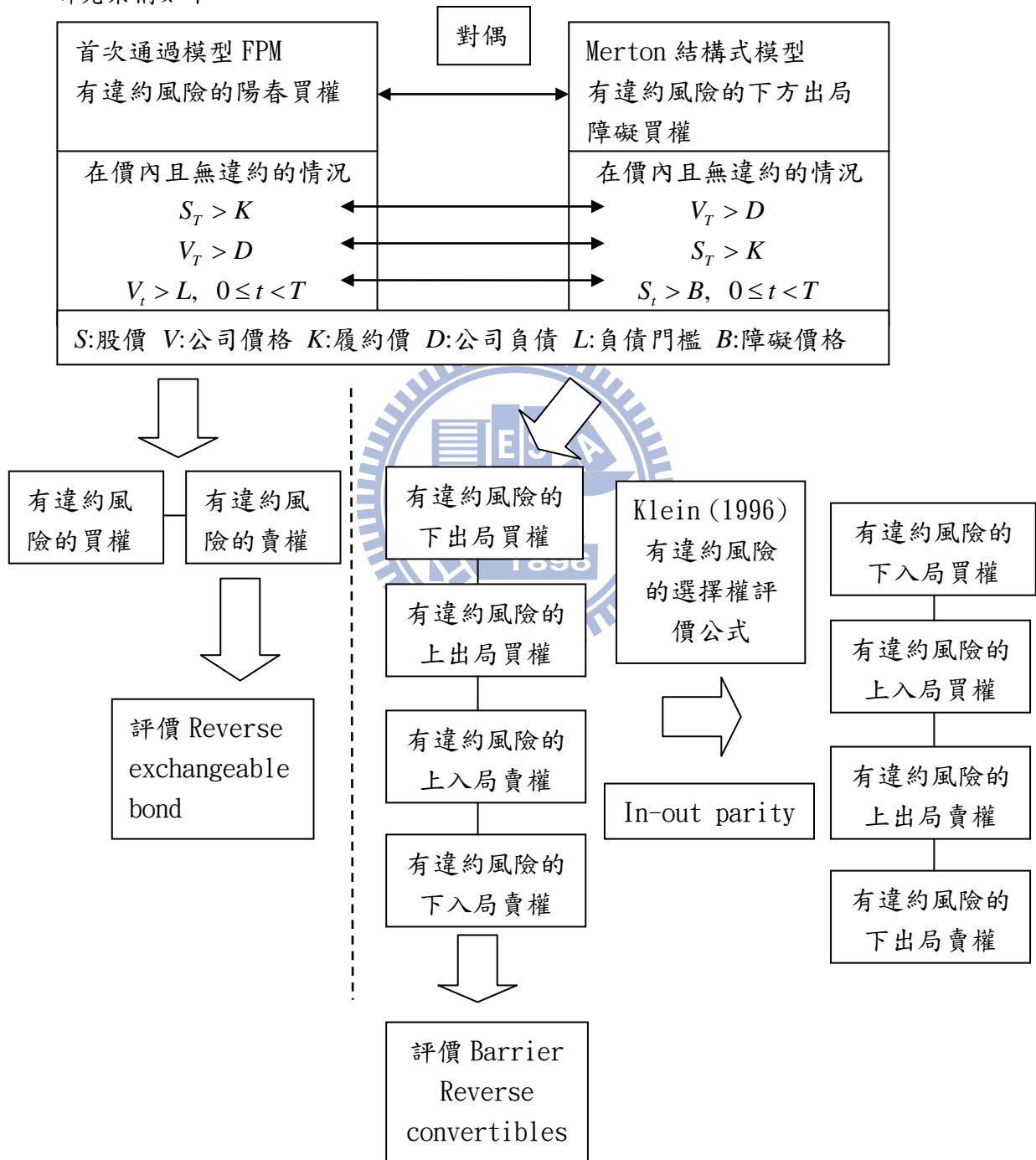


圖 1.3 研究架構

第二章 文獻回顧

本文評價有違約風險的選擇權為主。第一節介紹 Klein (1996) 所提出的有違約風險的選擇權評價公式。第二節介紹 Merton 的結構式模型以及首次通過模型。第三節則介紹評價中所使用到的定理。

第一節 Klein (1996) 有違約風險的選擇權評價公式

Klein 在 1996 年，推導有違約風險的選擇權之封閉解，其假設如下：

假設 1：公司價值和標的物價值服從下列的隨機過程，

$$\begin{aligned}\frac{dV}{V} &= \mu_V dt + \sigma_V dZ_V \\ \frac{dS}{S} &= \mu_S dt + \sigma_S dZ_S\end{aligned}$$

其中 μ_V 和 μ_S 為公司和標的物期望的報酬， σ_V 和 σ_S 為公司和標的物報酬的變異數， Z_V 和 Z_S 為存在著相關性 ρ 的標準布朗運動。

假設 2：公司只在到期日 T 時，會發生違約的情形。違約與否取決於公司在到期日的價值是否低於公司負債 D 為準，即 $V(T) < D$ 便違約。其中 D 為公司不包含選擇權的其他負債，即 D 本身與選擇權的價值無關。

假設 3：假設回收率 $\delta = (1-\alpha)V(T)/D$ 。由於 Klein 假定選擇權的 payoff 相較於 D 而言很小，因此當違約發生時，選擇權持有人依照 payoff 佔總負債比例來分配扣除破產成本後的公司資產，即

$$\begin{aligned}(1-\alpha)V(T) \frac{(S(T)-K)^+}{D+(S(T)-K)^+} &\approx (1-\alpha)V(T) \frac{(S(T)-K)^+}{D} \\ &= \frac{(1-\alpha)V(T)}{D} (S(T)-K)^+ = \delta(S(T)-K)^+\end{aligned}$$

Klein 利用標的股票價格的 log 值與公司價格的 log 值是一個相關性為 ρ 的二元常態分配的性質，得到二元常態分配的聯合機率分配函數，積分求得封閉解。

Klein (1996)推導的有違約風險的買權評價公式為：

$$S_0 N(a_1, a_2, \rho) - e^{-rT} KN(a_3, a_4, \rho) + \frac{(1-\alpha)V_0}{D} (S_0 e^{(r+\rho\sigma_s\sigma_v)T} N(a_5, a_6, -\rho) - KN(a_7, a_8, -\rho)) \quad (2.1.1)$$

Klein (1996) 推導的有違約風險的賣權評價公式為：

$$e^{-rT} K[N(-a_3, a_4, \rho) + \frac{(1-\alpha)V_0}{D} e^{rT} N(-a_7, a_8, -\rho)] - S_0[N(-a_1, a_2, \rho) + \frac{(1-\alpha)V_0}{D} e^{(r+\rho\sigma_s\sigma_v)T} N(-a_5, a_6, -\rho)] \quad (2.1.2)$$

其中

$$a_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2} \sigma_s^2)T}{\sigma_s \sqrt{T}}$$

$$a_2 = \frac{\ln \frac{V_0}{D} + (r - \frac{1}{2} \sigma_v^2 + \rho \sigma_s \sigma_v)T}{\sigma_v \sqrt{T}}$$

$$a_3 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2} \sigma_s^2)T}{\sigma_s \sqrt{T}}$$

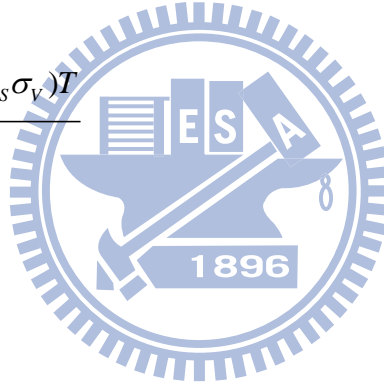
$$a_4 = \frac{\ln \frac{V_0}{D} + (r - \frac{1}{2} \sigma_v^2)T}{\sigma_v \sqrt{T}}$$

$$a_5 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2} \sigma_s^2 + \rho \sigma_s \sigma_v)T}{\sigma_s \sqrt{T}}$$

$$a_6 = -\frac{\ln \frac{V_0}{D} + (r + \frac{1}{2} \sigma_v^2 + \rho \sigma_s \sigma_v)T}{\sigma_v \sqrt{T}}$$

$$a_7 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2} \sigma_s^2 + \rho \sigma_s \sigma_v)T}{\sigma_s \sqrt{T}}$$

$$a_8 = -\frac{\ln \frac{V_0}{D} + (r + \frac{1}{2} \sigma_v^2)T}{\sigma_v \sqrt{T}}$$



第二節 模型的介紹

1. Merton 結構式模型

Merton(1974)考量違約的情形只有在到期日的時候發生，違約與否取決於公司資產價值是否低於公司負債。在圖 2.1 中，公司負債為 D ，由於藍線與綠線所代表的公司資產在到期日皆高於負債 D ，因此沒有發生違約；反之，紅線與黑線則會發生違約。

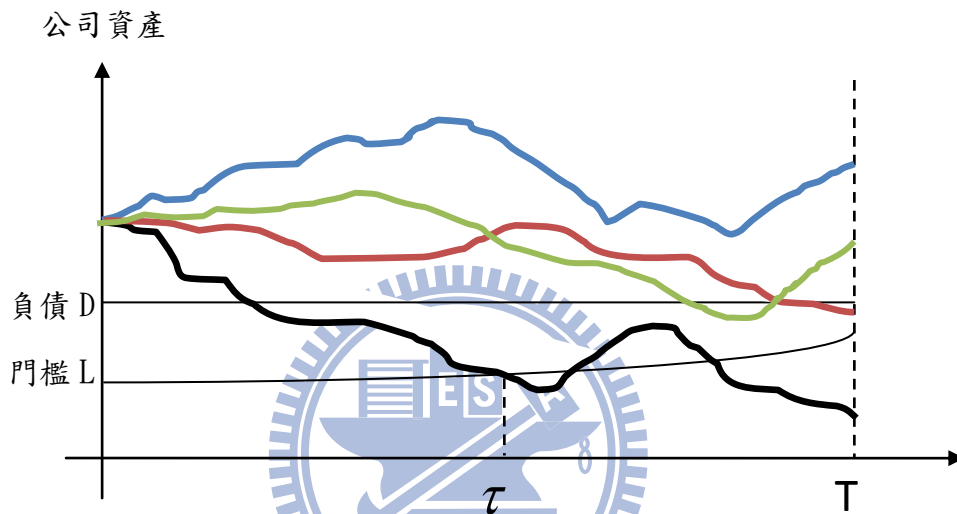


圖 2.1 模擬公司價值圖

2. 首次通過模型

Black and Cox(1976)修正了 Merton 模型，允許公司在到期日之前的任何時間點違約，違約與否取決於公司價值是否低於某個門檻。在圖 2.1 中，公司負債為 D ，負債門檻為 L ，由於藍線與綠線所代表的公司資產不僅在到期日之前皆高於門檻 L ，且在到期日亦高於負債 D ，因此沒有發生違約；而紅線雖然在到期日之前都高於門檻 L ，但在到期日卻低於負債 D ，因此在到期日發生違約；黑線則因在時間點 τ 時的公司資產低於門檻 L ，故在時間點 τ 便發生違約。

第三節 論文相關定理

定理 2.1 反射定理(Harrison (1985))

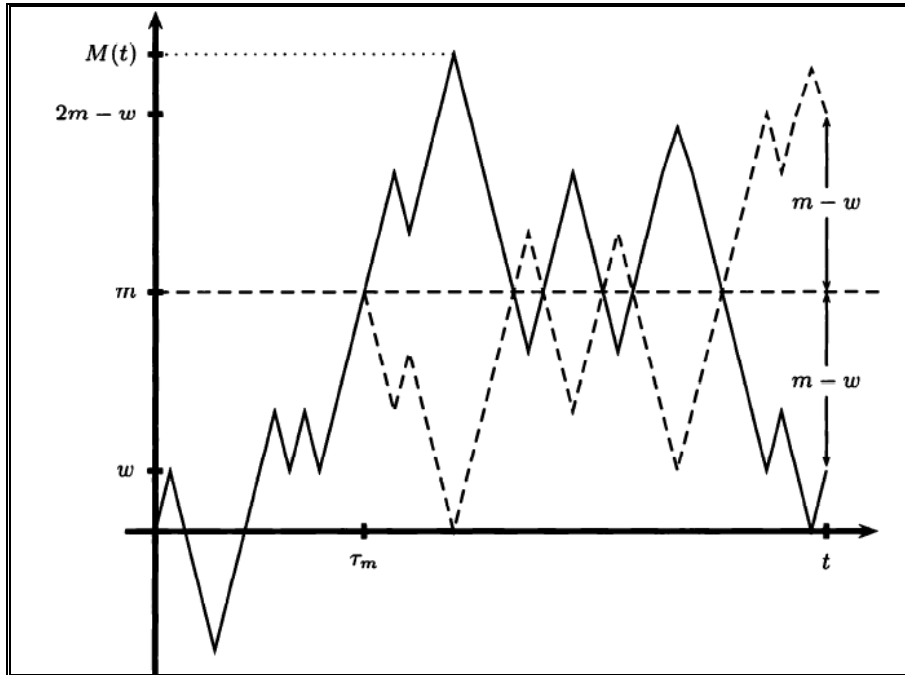


圖 2.2 布朗運動路徑反射圖

如圖 2.3， x 軸為時間軸， y 軸為標準布朗運動的值，固定 x 軸時間點 t 以及 y 軸一個正值 m ， τ_m 為布朗運動觸碰到 m 的最小時間，我們想要計算在時間 t 之前，標準布朗運動觸碰到 m 的機率且在時間 t ，標準布朗運動小於 w 的機率如下：

$$P\{\tau_m \leq t, W(t) \leq w\}$$

$w < m$ 情況下，在 τ_m 之後布朗運動路徑可由對 $y = m$ 鏡射至另外一個方向，經反射之後 t 時間點布朗運動小於等於 w 的機率可視為布朗運動大於等於 $2m - w$ 的機率：

$$P\{\tau_m \leq t, W(t) \leq w\} = P\{W(t) \geq 2m - w\} \quad (2.3.1)$$

定義時間點 t 之前的布朗運動最大值如下：

$$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} W(s)$$

如果 $\tau_m \leq t$ ，則也可表示成 $M(t) \geq m$ ，因此我們可以將(2.3.1)改寫成：

$$P\{\tau_m \leq t, W(t) \leq w\} = P\{M(t) \geq m, W(t) \leq w\} = P\{W(t) \geq 2m - w\}, \quad w \leq m, m \geq 0 \quad (2.3.2)$$

由(2.3.2)，我們可以推導 $W(t)$ 以及 $M(t)$ 的聯合機率分配。

定理 2.2：當 $t > 0$ ， $(M(t), W(t))$ 的聯合機率分配為：

$$f_{M(t), W(t)}(m, w) = \frac{2(2m - w)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2t}}, \quad w \leq m, m > 0. \quad (2.3.3)$$

證明：因為(2.3.2)的左式寫成積分式如下：

$$P\{M(t) \geq m, W(t) \leq w\} = \int_m^\infty \int_{-\infty}^w f_{M(t), W(t)}(x, y) dy dx$$

以及(2.3.2)的右式寫成積分式如下：

$$P\{W(t) \geq 2m - w\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2m-w}^\infty e^{-\frac{z^2}{2t}} dz$$

使得左右兩式相等為：

$$\int_m^\infty \int_{-\infty}^w f_{M(t), W(t)}(x, y) dy dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2m-w}^\infty e^{-\frac{z^2}{2t}} dz$$

對左右兩邊對 m 微分，求得：

$$-\int_{-\infty}^w f_{M(t), W(t)}(m, y) dy = -\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2t}}.$$

再對兩邊同微 w 求得：

$$-f_{M(t), W(t)}(m, w) = -\frac{2(2m - w)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2t}}.$$

得證之。

定理 2.3 (Girsanov, one dimension)：令 $W(t)$ ， $0 \leq t \leq T$ ，是在機率空間 (Ω, F, P) 上的一個布朗運動，對於 $W(t)$ 存在一個 filtration $F(t)$ 。另外 $0 \leq t \leq T$ 時，存在一個 adapted process $\Theta(t)$ ，我們定義：

$$Q(t) = \exp\left\{-\int_0^t \Theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^2(u)du\right\}, \quad (2.3.4)$$

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u)du \quad (2.3.5)$$

以及假設

$$E\int_0^T \Theta^2(u)Z^2(u)du < \infty$$

則在機率測度 \tilde{P} 下，隨機過程 $\tilde{W}(t)$ 在 $0 \leq t \leq T$ 屬於一個標準布朗運動。

其中對所有 $A \in F$ ，

$$\tilde{P}(A) = \int_A d\tilde{P}(w) = \int_A \frac{d\tilde{P}(w)}{dP(w)} dP(w) = \int_A Q(w)dP(w) \quad (2.3.6)$$



第三章 研究方法

本章節討論在首次通過模型下，有違約風險的選擇權之封閉解。並進一步研究其對偶問題-在 Merton 結構式模型下，有違約風險的障礙選擇權之封閉解。並延伸到 Reverse exchangeable bond 和 Barrier reverse convertibles 的評價。首先假設股票價格與公司價格為一隨機過程，負債門檻與障礙價格為和時間有關的指數函數。利用反射定理與 Girsanov 定理求得聯合機率分配函數，進而積分計算有違約風險的選擇權價格。

第一節 定理介紹

引理 3.1：對於任意可表達成下式的雙重積分式

$$\int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[z^2+w^2+2pz+2qw+2\rho zw]\right\} dzdw \quad (3.1.1)$$

我們都可以將其改寫成二元常態分配的累積分配函數(cdf)的形式

$$R \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(z+c)^2+(w+d)^2+2\rho(z+c)(w+d)]\right\} dzdw$$

其中 $R = \exp\left\{\frac{1}{2(1-\rho^2)}(c^2+d^2+2\rho cd)\right\}$ 。

由於

$$\begin{aligned} & (z+c)^2+(w+d)^2+2\rho(z+c)(w+d) \\ &= z^2+w^2+2(c+\rho d)z+2(d+\rho c)w+2\rho zw+(c^2+d^2+2\rho cd) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

根據(3.1.1)與(3.1.2)比較係數，可以得到 p, q, c, d 的關係如下：

$$\begin{cases} c+\rho d=p \\ d+\rho c=q \end{cases}$$

定理 3.2：令 $k, x, \rho, T, m, n \in \mathbb{R}$ ，則

$$1. \int_{-\infty}^k \int_{x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T} - \frac{w^2}{2T} + mz + nw} dz dw = e^{\frac{(m^2+n^2)T}{2}} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d, -c, \rho\right)$$

$$2. \int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T} - \frac{w^2}{2T} + mz + nw} dz dw = e^{\frac{(m^2+n^2)T}{2}} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d, c, -\rho\right)$$

其中

$$\begin{cases} c = x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + n\rho\sqrt{T} - m\sqrt{(1-\rho^2)T} \\ d = -n\sqrt{T} \end{cases}$$

證明：

我們對第 1 式做證明，第 2 式與第 1 式雷同。

首先我們對變數做 Jacobian 變數變換，

$$\text{令} \begin{cases} z_1 = \sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} \left[z - \left(x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w \right) \right] \\ w_1 = \frac{1}{\sqrt{T}} w \end{cases}, \quad \text{則} \begin{cases} z = \sqrt{\frac{T}{1-\rho^2}} z_1 + x + \rho \sqrt{\frac{T}{1-\rho^2}} w_1 \\ w = \sqrt{T} w_1 \end{cases}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial z_1} & \frac{\partial z}{\partial w_1} \\ \frac{\partial w}{\partial z_1} & \frac{\partial w}{\partial w_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{T}{1-\rho^2}} & \rho \sqrt{\frac{T}{1-\rho^2}} \\ 0 & \sqrt{T} \end{vmatrix} = \frac{T}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

因此

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^k \int_{x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T} - \frac{w^2}{2T} + mz + nw} dz dw \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{k}{\sqrt{T}}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi T} \exp\left\{-\frac{\left(\sqrt{\frac{T}{1-\rho^2}} z_1 + x + \rho \sqrt{\frac{T}{1-\rho^2}} w_1\right)^2}{2T} - \frac{T w_1^2}{2T}\right. \\ & \quad \left.+ m\left(\sqrt{\frac{T}{1-\rho^2}} z_1 + x + \rho \sqrt{\frac{T}{1-\rho^2}} w_1\right) + n\sqrt{T} w_1\right\} \frac{T}{\sqrt{1-\rho^2}} dz_1 dw_1 \end{aligned}$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2T} + mx} \int_{-\infty}^{\frac{k}{\sqrt{T}}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [z_1^2 + w_1^2 + 2(x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - m\sqrt{(1-\rho^2)T})z_1 + 2(x\rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - m\rho\sqrt{(1-\rho^2)T} - n(1-\rho^2)\sqrt{T})w_1 + 2\rho z_1 w_1]\right\} dz_1 dw_1$$

(根據引理 3.1)

$$\Rightarrow \begin{cases} c + \rho d = x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - m\sqrt{(1-\rho^2)T} \\ d + \rho c = x\rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - m\rho\sqrt{(1-\rho^2)T} - n(1-\rho^2)\sqrt{T} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + n\rho\sqrt{T} - m\sqrt{(1-\rho^2)T} \\ d = -n\sqrt{T} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c^2 + d^2 + 2\rho cd = \frac{x^2}{T}(1-\rho^2) - 2xm(1-\rho^2) + m^2(1-\rho^2)T + n^2(1-\rho^2)T$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2T} + mx + \frac{x^2}{2T} - mx + \frac{m^2T}{2} + \frac{n^2T}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{k}{\sqrt{T}}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [(z_1 + c)^2 + (w_1 + d)^2 + 2\rho(z_1 + c)(w_1 + d)]\right\} dz_1 dw_1$$

$$(\text{令 } \begin{cases} z_2 = z_1 + c \\ w_2 = w_1 + d \end{cases})$$

$$= e^{\frac{(m^2+n^2)T}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{k}{\sqrt{T}}+d} \int_c^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [z_2^2 + w_2^2 + 2\rho z_2 w_2]\right\} dz_2 dw_2$$

$$(\text{令 } z_3 = -z_2, \quad dz_3 = -dz_2)$$

$$= e^{\frac{(m^2+n^2)T}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{k}{\sqrt{T}}+d} \int_{-\infty}^{-c} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [z_3^2 + w_2^2 - 2\rho z_3 w_2]\right\} dz_3 dw_2$$

$$= e^{\frac{(m^2+n^2)T}{2}} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d, -c, \rho\right)$$

得證之。

第二節 在首次通過模型下，有違約風險的選擇權之封閉解

定義第一個資產-公司價格在風險中立機率測度 \tilde{P} 下，服從下列隨機過程：

$$V(t) = V(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)t + \sigma_V \tilde{W}(t)}, 0 \leq t \leq T \quad (3.2.1)$$

第二個資產-股票價格在風險中立機率測度下，服從下列的隨機過程：

$$S(t) = S(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_S^2)t + \sigma_S(\rho \tilde{W}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} \tilde{Z}(t))}, 0 \leq t \leq T \quad (3.2.2)$$

其中 ρ 為 V 與 S 間的相關係數，且 $\tilde{W}(t)$ 與 $\tilde{Z}(t)$ 獨立。並定義負債門檻

$L(t) = Le^{-\gamma(T-t)}, 0 \leq t \leq T$ 。那麼，在首次通過模型下，有違約風險的買權要在價內

且不發生違約事件，需滿足：

$$S(T) > K, \quad (3.2.3)$$

$$V(T) > D, \quad (3.2.4)$$

$$\text{和 } V(t) \geq L(t), 0 \leq t < T. \quad (3.2.5)$$

我們可以將 (3.2.5) 改為

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq t \leq T} \frac{V(t)}{L(t)} &> 1 \\ \Rightarrow \min_{0 \leq t \leq T} \frac{V(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)t + \sigma_V \tilde{W}(t)}}{Le^{-\gamma(T-t)}} &> 1 \\ \Rightarrow \min_{0 \leq t \leq T} e^{(r - \gamma - \frac{1}{2}\sigma_V^2)t + \sigma_V \tilde{W}(t)} &> \frac{L}{V(0)} e^{-\gamma T} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

令 $(r - \gamma - \frac{1}{2}\sigma_V^2)t + \sigma_V \tilde{W}(t) = -\sigma_V \hat{W}(T)$ ，

$\alpha_V = -\frac{1}{\sigma_V}(r - \gamma - \frac{1}{2}\sigma_V^2)$ ，使得 $\tilde{W}(t) = \alpha_V t - \hat{W}(t)$ 。並定義 $\hat{M}(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \hat{W}(T)$ ，

則 (3.2.6) 可以寫成

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq t \leq T} e^{-\sigma_V \hat{W}(t)} &> \frac{L}{V(0)} e^{-\gamma T} \\ \Rightarrow e^{-\sigma_V \hat{M}(T)} &> \frac{L}{V(0)} e^{-\gamma T} \\ \Rightarrow \hat{M}(T) &< -\frac{1}{\sigma_V} (\ln \frac{L}{V(0)} - \gamma T) \equiv l \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

在到期日 T 的公司價格和股票價格可用 $\widehat{W}(T)$ 表達如下：

$$\begin{aligned}
 V(T) &= V(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_v^2)T+\sigma_v\widehat{W}(T)} \\
 &= V(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_v^2)T-(r-\gamma-\frac{1}{2}\sigma_v^2)T-\sigma_v\widehat{W}(T)} \\
 &= V(0)e^{\gamma T-\sigma_v\widehat{W}(T)} \tag{3.2.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S(T) &= S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_s^2)T+\sigma_s[\rho\widehat{W}(T)+\sqrt{1-\rho^2}\widetilde{Z}(T)]} \\
 &= S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_s^2)T+\sigma_s[\rho(\alpha_v T-\widehat{W}(T))+\sqrt{1-\rho^2}\widetilde{Z}(T)]} \\
 &= S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_s^2+\sigma_s\rho\alpha_v)T-\sigma_s\rho\widehat{W}(T)+\sigma_s\sqrt{1-\rho^2}\widetilde{Z}(T)} \tag{3.2.9}
 \end{aligned}$$

因此(3.2.3)和(3.2.4)可以寫成

$$\begin{aligned}
 V(T) &> D \\
 \Rightarrow V(0)e^{\gamma T-\sigma_v\widehat{W}(T)} &> D \\
 \Rightarrow \widehat{W}(T) &< -\frac{1}{\sigma_v}\left(\ln\frac{D}{V(0)}-\gamma T\right) \equiv d \tag{3.2.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S(T) &> K \\
 \Rightarrow S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_s^2+\sigma_s\rho\alpha_v)T-\sigma_s\rho\widehat{W}(T)+\sigma_s\sqrt{1-\rho^2}\widetilde{Z}(T)} &> K \\
 \Rightarrow (r-\frac{1}{2}\sigma_s^2+\sigma_s\rho\alpha_v)T-\sigma_s\rho\widehat{W}(T)+\sigma_s\sqrt{1-\rho^2}\widetilde{Z}(T) &> \ln\frac{K}{S(0)} \\
 \Rightarrow \widetilde{Z}(T) &> \frac{1}{\sigma_s\sqrt{1-\rho^2}}\left[\ln\frac{K}{S(0)}-(r-\frac{1}{2}\sigma_s^2+\sigma_s\rho\alpha_v)T\right]+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\widehat{W}(T) \\
 \Rightarrow \widetilde{Z}(T) &> y+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\widehat{W}(T) \tag{3.2.11}
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } y = \frac{1}{\sigma_s\sqrt{1-\rho^2}}\left[\ln\frac{K}{S(0)}-(r-\frac{1}{2}\sigma_s^2+\sigma_s\rho\alpha_v)T\right] \tag{3.2.12}$$

假定回收率為 δ ，在首次通過模型下，若買權沒有違約發生，則買方可以拿到 $(S(T)-K)^+$ 。若違約在到期日 T 發生，則買方拿到 $\delta(S(T)-K)^+$ 。若違約在 $\tau < T$ 發生，則買方拿到 $\delta \cdot$ 買權在時間 τ 的價值 $= \delta \cdot \widetilde{E}[e^{-r(T-\tau)}(S(T)-K)^+ | F_\tau]$ 。因此，根據風險中立定價理論，我們知道在首次通過模型下，有違約風險的買權可以寫為

$$\begin{aligned}
C &= \tilde{E}[e^{-rT} (S(T) - K)^+ I_{\{\text{not default}\}}] + \delta \tilde{E}[e^{-rT} (S(T) - K)^+ I_{\{\text{default at } T\}}] \\
&\quad + \delta \tilde{E}[e^{-r\tau} \tilde{E}[e^{-r(T-\tau)} (S(T) - K)^+ | F_\tau] I_{\{\text{default at } \tau\}}] \\
&= [\delta + (1 - \delta)] \tilde{E}[e^{-rT} (S(T) - K)^+ I_{\{\text{not default}\}}] + \delta \tilde{E}[e^{-rT} (S(T) - K)^+ I_{\{\text{default at } T\}}] \\
&\quad + e^{-rT} \delta \tilde{E}[(S(T) - K)^+ I_{\{\text{default at } \tau\}}] \\
&= e^{-rT} (1 - \delta) \tilde{E}[(S(T) - K)^+ I_{\{\min_{0 \leq t \leq T} V(t) > L(t), V(T) > D\}}] + e^{-rT} \delta \tilde{E}[(S(T) - K)^+] \\
&= e^{-rT} (1 - \delta) \tilde{E}[(S(T) - K) I_{\{\min_{0 \leq t \leq T} V(t) > L(t), V(T) > D, S(T) > K\}}] + e^{-rT} \delta \tilde{E}[(S(T) - K)^+] \\
&= e^{-rT} (1 - \delta) \tilde{E}[(S(T) - K) I_{\{\widehat{M}(T) < l, \widehat{W}(T) < d, \widetilde{Z}(T) > y + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \widehat{W}(T)\}}] + e^{-rT} \delta \tilde{E}[(S(T) - K)^+] \\
&= e^{-rT} (1 - \delta) \tilde{E}[(S(T) - K) \cdot I_C] + e^{-rT} \delta \tilde{E}[(S(T) - K)^+] \tag{3.2.13}
\end{aligned}$$

其中 $I_C = I_{\{\widehat{M}(T) < l, \widehat{W}(T) < d, \widetilde{Z}(T) > y + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \widehat{W}(T)\}}$ 為指標函數，若 $\widehat{M}(T) < l, \widehat{W}(T) < d$ 且

$\widetilde{Z}(T) > y + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \widehat{W}(T)$ ，則 $I_C = 1$ ；否則 $I_C = 0$ 。

由於(3.2.13)式的 $\tilde{E}[(S(T) - K)^+]$ 部分可以用 Black-Scholes 的買權訂價公式帶入，因此只需求解 $\tilde{E}[(S(T) - K) \cdot I_C]$ 的部分。現在考慮 I_C 的積分範圍，由於 l 恆大於 0，而 d 可正可負，因此積分範圍分為兩種情況，若 $0 < d < l$ ，則積分範圍如圖 3.1 所示。若 $d < 0 < l$ ，則積分範圍如圖 3.2 所示。綜合兩種積分範圍情況，我們可以將積分範圍寫成

$$\{(m, w); w^+ \leq m \leq l, -\infty \leq w \leq d\} \tag{3.2.14}$$

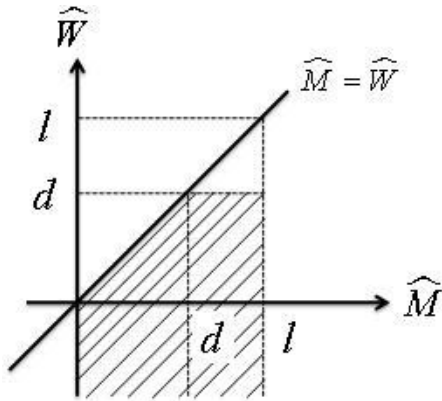


圖 3.1 積分範圍 I

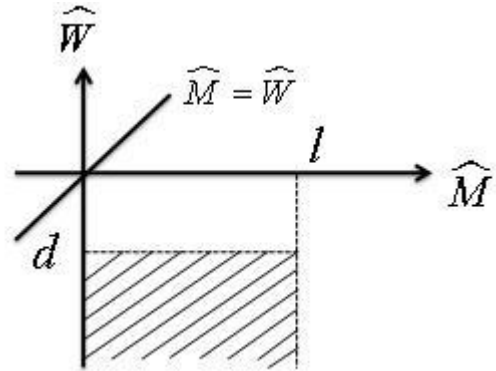


圖 3.2 積分範圍 II

接著我們需要 $\widehat{M}(T), \widehat{W}(T), \widetilde{Z}(T)$ 的聯合機率分配函數，由於 $(\widehat{M}(T), \widehat{W}(T))$ 與

$\tilde{Z}(T)$ 獨立，所以 $\widehat{M}(T), \widehat{W}(T), \tilde{Z}(T)$ 的聯合機率分配函數等於 $\widehat{M}(T), \widehat{W}(T)$ 的聯合機率分配函數乘上 $\tilde{Z}(T)$ 的機率分配函數，即

$$\tilde{f}_{\widehat{M}(T), \widehat{W}(T), \tilde{Z}(T)}(m, w, z) = \tilde{f}_{\tilde{Z}(T)}(z) \cdot \tilde{f}_{\widehat{M}(T), \widehat{W}(T)}(m, w) \quad (3.2.15)$$

定義測度 \hat{P} ，使得 $\widehat{W}(t)$ 在 \hat{P} 下是沒有飄移項的布朗運動，根據定理 2.1-反射定理，可以找到 $(\widehat{M}(T), \widehat{W}(T))$ 在 \hat{P} 下的聯合機率分配函數為

$$\hat{f}_{\widehat{M}(T), \widehat{W}(T)}(m, w) = \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}}, \quad w \leq m, m > 0 \quad (3.2.16)$$

而 $\widehat{W}(t) = \alpha_V t - \widetilde{W}(t)$ ，且 $\widetilde{W}(t)$ 與 $-\widetilde{W}(t)$ 具有相同的機率分配函數，利用定理

2.3-Girsanov 定理，我們定義測度轉換因子

$$Q(t) = e^{\alpha_V \widetilde{W}(t) - \frac{1}{2}\alpha_V^2 t} = e^{\alpha_V(\alpha_V t - \widehat{W}(t)) - \frac{1}{2}\alpha_V^2 t} = e^{-\alpha_V \widehat{W}(t) + \frac{1}{2}\alpha_V^2 t}, \quad 0 \leq t \leq T$$

根據 (2.3.6)， $\hat{P}(A) = \int_A Q(T) d\tilde{P}(T) = \int_A e^{-\alpha_V \widehat{W}(T) + \frac{1}{2}\alpha_V^2 T} d\tilde{P}(T)$

而 $\tilde{P}(A) = \int_A d\tilde{P}(T) = \int_A \frac{d\tilde{P}(T)}{d\hat{P}(T)} d\hat{P}(T) = \int_A \frac{1}{Q(T)} d\hat{P}(T) = \int_A e^{\alpha_V \widehat{W}(T) - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T} d\hat{P}(T)$

找到 $(\widehat{M}(T), \widehat{W}(T))$ 在 \tilde{P} 下的聯合機率分配函數為

$$\tilde{f}_{\widehat{M}(T), \widehat{W}(T)}(m, w) = \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_V w - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T - \frac{(2m-w)^2}{2T}}, \quad w \leq m, m > 0 \quad (3.2.17)$$

另外在 \tilde{P} 下， $\tilde{Z}(T)$ 服從期望值為 0，變異數為 T 的常態分配，因此 $\tilde{Z}(T)$ 的機率分配函數為

$$\tilde{f}_{\tilde{Z}(T)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{z^2}{2T}}, \quad -\infty \leq z \leq \infty \quad (3.2.18)$$

由 (3.2.17) 和 (3.2.18) 求得 $(\widehat{M}(T), \widehat{W}(T), \tilde{Z}(T))$ 在 \tilde{P} 下的聯合機率分配函數為

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{z^2}{2T}} \cdot \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_V w - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T - \frac{(2m-w)^2}{2T}}, \quad -\infty \leq z \leq \infty, w \leq m, m > 0 \quad (3.2.19)$$

再由 (3.2.14) 和 (3.2.19)，我們對 $\tilde{E}[(S(T)-K)I_C]$ 求解。

$$\begin{aligned} & \tilde{E}[S(T) \cdot I_C] \\ &= \tilde{E}[S(0) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_S^2 + \sigma_S \rho \alpha_V)T - \sigma_S \rho \hat{W}(T) + \sigma_S \sqrt{1-\rho^2} \tilde{Z}(T)} \cdot I_{\{\hat{M}(T) < l, \hat{W}(T) < d, \tilde{Z}(T) > y + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \hat{W}(T)\}}] \\ &= S(0) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_S^2 + \sigma_S \rho \alpha_V)T} \cdot \int_{-\infty}^d \int_{y + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \int_{w^+}^l e^{-\sigma_S \rho w + \sigma_S \sqrt{1-\rho^2} z} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{z^2}{2T}} \\ & \quad \cdot \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_V w - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T - \frac{(2m-w)^2}{2T}} dmdzdw \\ &= S(0) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_S^2 + \sigma_S \rho \alpha_V)T - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T} \int_{-\infty}^d \int_{y + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\sigma_S \rho w + \sigma_S \sqrt{1-\rho^2} z - \frac{z^2}{2T} + \alpha_V w} \\ & \quad \cdot \left(\int_{w^+}^l \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}} dm \right) dzdw \\ &= S(0) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_S^2 + \sigma_S \rho \alpha_V)T - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T} \int_{-\infty}^d \int_{y + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\sigma_S \rho w + \sigma_S \sqrt{1-\rho^2} z - \frac{z^2}{2T} + \alpha_V w} \cdot \left(-e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}} \Big|_{m=w^+}^{m=l} \right) dzdw \\ &= S(0) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_S^2 + \sigma_S \rho \alpha_V)T - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T} \cdot \left(\int_{-\infty}^d \int_{y + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\sigma_S \rho w + \sigma_S \sqrt{1-\rho^2} z - \frac{z^2}{2T} + \alpha_V w - \frac{w^2}{2T}} dzdw \right. \\ & \quad \left. - \int_{-\infty}^d \int_{y + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\sigma_S \rho w + \sigma_S \sqrt{1-\rho^2} z - \frac{z^2}{2T} + \alpha_V w - \frac{(2l-w)^2}{2T}} dzdw \right) \\ &= S(0) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_S^2 + \sigma_S \rho \alpha_V)T - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T} \cdot \left(\int_{-\infty}^d \int_{y + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\sigma_S \rho w + \sigma_S \sqrt{1-\rho^2} z - \frac{z^2}{2T} + \alpha_V w - \frac{w^2}{2T}} dzdw \right. \\ & \quad \left. - e^{-\frac{2l^2}{T}} \int_{-\infty}^d \int_{y + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\sigma_S \rho w + \sigma_S \sqrt{1-\rho^2} z - \frac{z^2}{2T} + \alpha_V w + \frac{2lw}{T} - \frac{w^2}{2T}} dzdw \right) \end{aligned}$$

(前半部的積分令 $m = \sigma_S \sqrt{1-\rho^2}$, $n = \alpha_V - \sigma_S \rho$, 後半部的積分令 $m = \sigma_S \sqrt{1-\rho^2}$,

$n = \alpha_V + \frac{2l}{T} - \sigma_S \rho$ ，再根據定理 3.2)

$$\begin{aligned} &= S(0) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_S^2 + \sigma_S \rho \alpha_V)T - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}\sigma_S^2 T - \alpha_V \rho \sigma_S T + \frac{1}{2}\alpha_V^2 T} N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_1, -g_1, \rho\right) \right. \\ & \quad \left. - e^{\frac{1}{2}\sigma_S^2 T - \alpha_V \rho \sigma_S T + \frac{1}{2}\alpha_V^2 T + 2\alpha_V l - 2\rho l \sigma_S} N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_2, -g_2, \rho\right) \right) \end{aligned}$$

$$= S(0)e^{rT}N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_1, -g_1, \rho\right) - S(0)e^{rT+2\alpha_v l-2\rho l\sigma_s}N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_2, -g_2, \rho\right) \quad (3.2.20)$$

其中

$$g_1 = y\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_v \rho \sqrt{T} - \sigma_s \sqrt{T}, \quad h_1 = \sigma_s \rho \sqrt{T} - \alpha_v \sqrt{T} \quad (3.2.21)$$

$$g_2 = y\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_v \rho \sqrt{T} + \frac{2l\rho}{\sqrt{T}} - \sigma_s \sqrt{T}, \quad h_2 = \sigma_s \rho \sqrt{T} - \alpha_v \sqrt{T} - \frac{2l}{\sqrt{T}}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{E}[K \cdot I_C] \\ &= K \cdot \tilde{P}(\widehat{M}(T) < l, \widehat{W}(T) < d, \tilde{Z}(T) > y + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \widehat{W}(T)) \\ &= K \int_{-\infty}^d \int_{y+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w}^{\infty} \int_{w^+}^l \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{z^2}{2T}} \cdot \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_v w - \frac{1}{2}\alpha_v^2 T - \frac{(2m-w)^2}{2T}} dmdzdw \\ &= Ke^{-\frac{1}{2}\alpha_v^2 T} \left(\int_{-\infty}^d \int_{y+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T} + \alpha_v w - \frac{w^2}{2T}} dzdw - \int_{-\infty}^d \int_{y+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T} + \alpha_v w - \frac{(2l-w)^2}{2T}} dzdw \right) \\ &= Ke^{-\frac{1}{2}\alpha_v^2 T} \left[e^{\frac{1}{2}\alpha_v^2 T} N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_3, -g_3, \rho\right) - e^{2\alpha_v l} N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_4, -g_4, \rho\right) \right] \\ &= KN\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_3, -g_3, \rho\right) - e^{2\alpha_v l} KN\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_4, -g_4, \rho\right) \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

其中

$$g_3 = y\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_v \rho \sqrt{T}, \quad h_3 = -\alpha_v \sqrt{T} \quad (3.2.23)$$

$$g_4 = y\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_v \rho \sqrt{T} + \frac{2l\rho}{\sqrt{T}}, \quad h_4 = -\alpha_v \sqrt{T} - \frac{2l}{\sqrt{T}}$$

所以，在首次通過模型下，有違約風險的買權在時間 0 的價值為

$$\begin{aligned} C &= (1-\delta) \{ S(0)N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_1, -g_1, \rho\right) - S(0)e^{2\alpha_v l-2\rho l\sigma_s}N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_2, -g_2, \rho\right) \\ &\quad - Ke^{-rT}N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_3, -g_3, \rho\right) + e^{-rT+2\alpha_v l}KN\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_4, -g_4, \rho\right) \} \\ &\quad + \delta[S(0)N(-g_1) - Ke^{-rT}N(-g_3)] \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

且將(3.2.12)式代回的 $-g_1$ ，根據(3.2.21)，我們可以得到

$$\begin{aligned}
-g_1 &= -\left\{y\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_v\rho\sqrt{T} - \sigma_s\sqrt{T}\right\} \\
&= -\left\{\frac{1}{\sigma_s\sqrt{1-\rho^2}}\left[\ln\frac{K}{S(0)} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2 + \sigma_s\rho\alpha_v\right)T\right]\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_v\rho\sqrt{T} - \sigma_s\sqrt{T}\right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_s\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S(0)}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2 + \sigma_s\rho\alpha_v\right)T - \sigma_s\alpha_v\rho T + \sigma_s^2 T\right] \\
&= \frac{1}{\sigma_s\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S(0)}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)T\right]
\end{aligned}$$

與 Black-Scholes 訂價公式的 d_1 相同。而將 (3.2.12) 式代回 $-g_3$ ，根據 (3.2.23) 得

$$\begin{aligned}
-g_3 &= -\left\{y\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_v\rho\sqrt{T}\right\} \\
&= -\left\{\frac{1}{\sigma_s\sqrt{1-\rho^2}}\left[\ln\frac{K}{S(0)} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2 + \sigma_s\rho\alpha_v\right)T\right]\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_v\rho\sqrt{T}\right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_s\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S(0)}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)T\right]
\end{aligned}$$

與 Black-Scholes 訂價公式的 d_2 相同。而

$$\begin{aligned}
g_2 &= y\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_v\rho\sqrt{T} + \frac{2l\rho}{\sqrt{T}} - \sigma_s\sqrt{T} = \frac{1}{\sigma_s\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S(0)} - \left(r + \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)T\right] + \frac{2l\rho}{\sqrt{T}} \\
g_4 &= y\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_v\rho\sqrt{T} + \frac{2l\rho}{\sqrt{T}} = \frac{1}{\sigma_s\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S(0)} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)T\right] + \frac{2l\rho}{\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

當 $D \rightarrow 0$ 且 $L \rightarrow 0$ 時，

$$\begin{aligned}
\lim_{D \rightarrow 0} d &= \lim_{D \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\sigma_v} \left(\ln\frac{D}{V(0)} - \gamma T\right)\right] = \infty \\
\lim_{L \rightarrow 0} l &= \lim_{L \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\sigma_v} \left(\ln\frac{L}{V(0)} - \gamma T\right)\right] = \infty \\
\lim_{L \rightarrow 0} g_2 &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{\frac{1}{\sigma_s\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S(0)} - \left(r + \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)T\right] + \frac{2l\rho}{\sqrt{T}}\right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_s\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S(0)} - \left(r + \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)T\right] + \frac{2\rho}{\sqrt{T}} \lim_{L \rightarrow 0} l \\
&= \frac{1}{\sigma_s\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S(0)} - \left(r + \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)T\right] + \frac{2\rho}{\sqrt{T}} \cdot \infty = \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{L \rightarrow 0} g_4 &= \lim_{L \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sigma_s \sqrt{T}} \left[\ln \frac{K}{S(0)} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) T \right] + \frac{2l\rho}{\sqrt{T}} \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_s \sqrt{T}} \left[\ln \frac{K}{S(0)} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) T \right] + \frac{2\rho}{\sqrt{T}} \lim_{L \rightarrow 0} l \\
&= \frac{1}{\sigma_s \sqrt{T}} \left[\ln \frac{K}{S(0)} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) T \right] + \frac{2\rho}{\sqrt{T}} \cdot \infty = \infty
\end{aligned}$$

$$\lim_{D \rightarrow 0} N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_1, -g_1, \rho\right) = N(\infty, -g_1, \rho) = N(-g_1)$$

$$\lim_{L \rightarrow 0} N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_2, -g_2, \rho\right) = N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_2, -\infty, \rho\right) = 0$$

$$\lim_{D \rightarrow 0} N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_3, -g_3, \rho\right) = N(\infty, -g_3, \rho) = N(-g_3)$$

$$\lim_{L \rightarrow 0} N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_4, -g_4, \rho\right) = N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_4, -\infty, \rho\right) = 0$$

因此，在 $D \rightarrow 0$ 且 $L \rightarrow 0$ 下，首次通過模型的有違約風險買權在時間 0 的價值

$$\begin{aligned}
\lim_{D \rightarrow 0, L \rightarrow 0} C &= (1 - \delta) \{ S(0)N(-g_1) - S(0)e^{2\alpha_v l - 2\rho l \sigma_s} \cdot 0 - Ke^{-rT}N(-g_3) + e^{-rT+2\alpha_v l} K \cdot 0 \} \\
&\quad + \delta [S(0)N(-g_1) - Ke^{-rT}N(-g_3)] \\
&= S(0)N(-g_1) - Ke^{-rT}N(-g_3)
\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

即 Black-Scholes 的買權訂價公式。

同樣的，我們也可求出在首次通過模型下，有違約風險的賣權在時間 0 的價值

$$\begin{aligned}
P &= (1 - \delta) \{ e^{-rT} KN\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_3, g_3, -\rho\right) - e^{-rT+2\alpha_v l} KN\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_4, g_4, -\rho\right) \} \\
&\quad - S(0)N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_1, g_1, -\rho\right) + S(0)e^{2\alpha_v l - 2\rho l \sigma_s} N\left(\frac{d}{\sqrt{T}} + h_2, g_2, -\rho\right) \} \\
&\quad + \delta [Ke^{-rT}N(g_3) - S(0)N(g_1)]
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

接下來，我們延伸這一小節的方法，利用首次通過模型下，對有違約風險的賣權來對有違約風險的 Reverse exchangeable bond 做評價。Reverse exchangeable bond 是由債券和賣權兩部分資產所組成(即買債券並賣賣權)，其中賣權的履約價格，即為標的股票の起始價格。如果到期日之標的股票價格是在起始價格以上，則投資人可在拿回本金與利息；但若標的股票價格在到期日是低於

起始價格，投資人在到期日則是拿回股票與利息。現在，我們想求在首次通過模型下，有違約風險的 Reverse exchangeable bond 價值，即有違約風險的債券減去有違約風險的陽春賣權。而有違約風險的陽春賣權可以由本小節前面所證的結果代入，所以我們只需求解有違約風險的債券。假定債券票面價值為 F ，票面息率 c ，且債息在到期日支付，則有違約風險的債券價值為

$$\begin{aligned}
VB &= \tilde{E}[e^{-rT}(F + FcT)I_{\{\text{not default}\}}] + \delta \tilde{E}[e^{-rT}(F + FcT)I_{\{\text{default at } T\}}] \\
&\quad + \delta \tilde{E}[e^{-rT}(F + FcT)I_{\{\text{default at } \tau\}}] \\
&= [\delta + (1 - \delta)]\tilde{E}[e^{-rT}(F + FcT)I_{\{\text{not default}\}}] + \delta \tilde{E}[e^{-rT}(F + FcT)I_{\{\text{default at } T\}}] \\
&\quad + e^{-rT} \delta \tilde{E}[(F + FcT)I_{\{\text{default at } \tau\}}] \\
&= e^{-rT}(1 - \delta)\tilde{E}[(F + FcT)I_{\{\min_{0 \leq t \leq T} V(t) > L(t), V(T) > D\}}] + e^{-rT} \delta(F + FcT) \\
&= e^{-rT}(1 - \delta)\tilde{E}[(F + FcT)I_{\{\min_{0 \leq t \leq T} V(t) > L(t), V(T) > D\}}] + e^{-rT} \delta(F + FcT) \\
&= e^{-rT}(1 - \delta)\tilde{E}[(F + FcT)I_{\{\hat{M}(T) < l, \hat{W}(T) < d\}}] + e^{-rT} \delta(F + FcT)
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

根據(3.2.14)與(3.2.17)可以得知

$$\begin{aligned}
\tilde{E}[I_{\{\hat{M}(T) < l, \hat{W}(T) < d\}}] &= \int_{-\infty}^d \int_{w^+}^l \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_V w - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T - \frac{(2m-w)^2}{2T}} dm dw \\
&= \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_V w - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T} \left(\int_{w^+}^l \frac{2(2m-w)}{T} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}} dm \right) dw \\
&= \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_V w - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T} \left(-e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}} \Big|_{m=w^+}^{m=l} \right) dw \\
&= \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_V w - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T - \frac{w^2}{2T}} dw - \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_V w - \frac{1}{2}\alpha_V^2 T - \frac{(2l-w)^2}{2T}} dw \\
&= \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(w-\alpha_V T)^2}{2T}} dw - e^{2\alpha_V l} \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{[w-(\alpha_V T+2l)]^2}{2T}} dw \\
& \quad (\text{前者積分令 } w_1 = \frac{w-\alpha_V T}{\sqrt{T}}, \text{ 後者積分令 } w_2 = \frac{w-(\alpha_V T+2l)}{\sqrt{T}}) \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{d-\alpha_V T}{\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w_1^2}{2}} dw_1 - e^{2\alpha_V l} \int_{-\infty}^{\frac{d-(\alpha_V T+2l)}{\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w_2^2}{2}} dw_2 \\
&= N\left(\frac{d-\alpha_V T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\alpha_V l} N\left(\frac{d-(\alpha_V T+2l)}{\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

帶回(3.2.27)可得在首次通過模型下，有違約風險的債券價值為

$$e^{-rT}(1 - \delta)(F + FcT) \left[N\left(\frac{d-\alpha_V T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\alpha_V l} N\left(\frac{d-(\alpha_V T+2l)}{\sqrt{T}}\right) \right] + e^{-rT} \delta(F + FcT), \tag{3.2.28}$$

因此，在首次通過模型下，有違約風險的 Reverse exchangeable bond 價值為

$$\text{有違約風險的債券減去有違約風險的陽春賣權} = (3.2.28) - \frac{F}{K} (3.2.26)。$$

第三節 在 Merton 結構式模型下，有違約風險的下方出局障礙買權之封閉解

定義第一個資產-股票價格在風險中立機率測度 \tilde{P} 下，服從下列隨機過程：

$$S(t) = S(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2)t + \sigma_s \tilde{W}(t)}, 0 \leq t \leq T \quad (3.3.1)$$

第二個資產-公司價格在風險中立機率測度下，服從下列的隨機過程：

$$V(t) = V(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_v^2)t + \sigma_v(\rho \tilde{W}(t) + \sqrt{1-\rho^2} \tilde{Z}(t))}, 0 \leq t \leq T \quad (3.3.2)$$

其中 ρ 為 V 與 S 間的相關係數，且 $\tilde{W}(t)$ 與 $\tilde{Z}(t)$ 獨立。

並定義障礙價格 $B(t) = Be^{-\gamma(T-t)}, 0 \leq t \leq T$ 。那麼，在 Merton 結構式模型下，有違約風險的下方出局障礙買權在價內且不發生違約事件，需滿足：

$$S(T) > K, \quad (3.3.3)$$

$$V(T) > D, \quad (3.3.4)$$

$$S(t) > B(t), 0 \leq t \leq T \quad (3.3.5)$$

我們可以將 (3.3.5) 改為

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq t \leq T} \frac{S(t)}{B(t)} &> 1 \\ \Rightarrow \min_{0 \leq t \leq T} \frac{S(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2)t + \sigma_s \tilde{W}(t)}}{Be^{-\gamma(T-t)}} &> 1 \\ \Rightarrow \min_{0 \leq t \leq T} e^{(r - \gamma - \frac{1}{2}\sigma_s^2)t + \sigma_s \tilde{W}(t)} &> \frac{B}{S(0)} e^{-\gamma T} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\text{令 } (r - \gamma - \frac{1}{2}\sigma_s^2)t + \sigma_s \tilde{W}(t) = -\sigma_s \hat{W}(T),$$

$$\alpha_s = -\frac{1}{\sigma_s}(r - \gamma - \frac{1}{2}\sigma_s^2), \text{ 使得 } \tilde{W}(t) = \alpha_s t - \hat{W}(t)。 \text{ 並定義 } \hat{M}(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \hat{W}(T),$$

則 (3.3.6) 可以寫成

$$\begin{aligned}
\min_{0 \leq t \leq T} e^{-\sigma_s \widehat{W}(t)} &> \frac{B}{S(0)} e^{-\gamma T} \\
\Rightarrow e^{-\sigma_s \widehat{M}(T)} &> \frac{B}{S(0)} e^{-\gamma T} \\
\Rightarrow \widehat{M}(T) &< -\frac{1}{\sigma_s} \left(\ln \frac{B}{S(0)} - \gamma T \right) \equiv b
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

到期日 T 的股票價格和公司價格可用 $\widehat{W}(T)$ 表達如下：

$$\begin{aligned}
S(T) &= S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2)T + \sigma_s \widehat{W}(T)} \\
&= S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2)T - (r - \gamma - \frac{1}{2}\sigma_s^2)T - \sigma_s \widehat{W}(T)} \\
&= S(0) e^{\gamma T - \sigma_s \widehat{W}(T)}
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

$$\begin{aligned}
V(T) &= V(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_v^2)T + \sigma_v [\rho \widehat{W}(T) + \sqrt{1 - \rho^2} \widetilde{Z}(T)]} \\
&= V(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_v^2)T + \sigma_v [\rho(\alpha_s T - \widehat{W}(T)) + \sqrt{1 - \rho^2} \widetilde{Z}(T)]} \\
&= V(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_v^2 + \sigma_v \rho \alpha_s)T - \sigma_v \rho \widehat{W}(T) + \sigma_v \sqrt{1 - \rho^2} \widetilde{Z}(T)}
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

因此(3.3.3)和(3.3.4)可以寫成

$$\begin{aligned}
S(T) &> K \\
\Rightarrow S(0) e^{\gamma T - \sigma_s \widehat{W}(T)} &> K \\
\Rightarrow \widehat{W}(T) &< -\frac{1}{\sigma_s} \left(\ln \frac{K}{S(0)} - \gamma T \right) \equiv k
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

$$\begin{aligned}
V(T) &> D \\
\Rightarrow V(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_v^2 + \sigma_v \rho \alpha_s)T - \sigma_v \rho \widehat{W}(T) + \sigma_v \sqrt{1 - \rho^2} \widetilde{Z}(T)} &> D \\
\Rightarrow (r - \frac{1}{2}\sigma_v^2 + \sigma_v \rho \alpha_s)T - \sigma_v \rho \widehat{W}(T) + \sigma_v \sqrt{1 - \rho^2} \widetilde{Z}(T) &> \ln \frac{D}{V(0)} \\
\Rightarrow \widetilde{Z}(T) &> \frac{1}{\sigma_v \sqrt{1 - \rho^2}} \left[\ln \frac{D}{V(0)} - (r - \frac{1}{2}\sigma_v^2 + \sigma_v \rho \alpha_s)T \right] + \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \widehat{W}(T) \\
\Rightarrow \widetilde{Z}(T) &> x + \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \widehat{W}(T)
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

其中 $x = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{1 - \rho^2}} \left[\ln \frac{D}{V(0)} - (r - \frac{1}{2}\sigma_v^2 + \sigma_v \rho \alpha_s)T \right]$ 。

根據風險中立定價理論，我們知道在 Merton 結構式模型下，有違約風險的下方出局障礙買權可以寫為

$$\begin{aligned}
& \tilde{E}[e^{-rT} \cdot ((S(T) - K) \cdot I_{\{V(T) > D, \min_{0 \leq t \leq T} S(t) > B(t), S(T) > K\}} \\
& \quad + (1 - \alpha)V(T) \cdot \frac{(S(T) - K)}{D} \cdot I_{\{V(T) < D, \min_{0 \leq t \leq T} S(t) > B(t), S(T) > K\}})] \\
& = \tilde{E}[e^{-rT} \cdot ((S(0)e^{\gamma T - \sigma_S \hat{W}(T)} - K) \cdot I_{\{\tilde{Z}(T) > x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \hat{W}(T), \hat{M}(T) < b, \hat{W}(T) < k\}} \\
& \quad + (1 - \alpha)V(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2 + \sigma_V \rho \alpha_S)T - \sigma_V \rho \hat{W}(T) + \sigma_V \sqrt{1-\rho^2} \tilde{Z}(T)} \\
& \quad \cdot \frac{(S(0)e^{\gamma T - \sigma_S \hat{W}(T)} - K)}{D} \cdot I_{\{\tilde{Z}(T) < x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \hat{W}(T), \hat{M}(T) < b, \hat{W}(T) < k\}})] \\
& = e^{-rT} \tilde{E}[e^{\gamma T} I_1 - I_2 + e^{\gamma T} I_3 - I_4]
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 & = \tilde{E}[S(0)e^{-\sigma_S \hat{W}(T)} \cdot I_{\{\tilde{Z}(T) > x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \hat{W}(T), \hat{M}(T) < b, \hat{W}(T) < k\}}] \\
I_2 & = \tilde{E}[K \cdot I_{\{\tilde{Z}(T) > x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \hat{W}(T), \hat{M}(T) < b, \hat{W}(T) < k\}}] \\
I_3 & = \frac{(1 - \alpha)}{D} \tilde{E}[V(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2 + \sigma_V \rho \alpha_S)T - \sigma_V \rho \hat{W}(T) + \sigma_V \sqrt{1-\rho^2} \tilde{Z}(T)} \cdot S(0)e^{-\sigma_S \hat{W}(T)} \\
& \quad \cdot I_{\{\tilde{Z}(T) < x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \hat{W}(T), \hat{M}(T) < b, \hat{W}(T) < k\}})] \\
I_4 & = \frac{(1 - \alpha)}{D} \tilde{E}[V(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2 + \sigma_V \rho \alpha_S)T - \sigma_V \rho \hat{W}(T) + \sigma_V \sqrt{1-\rho^2} \tilde{Z}(T)} \cdot K \\
& \quad \cdot I_{\{\tilde{Z}(T) < x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \hat{W}(T), \hat{M}(T) < b, \hat{W}(T) < k\}})]
\end{aligned}$$

我們考慮積分範圍，由於 $b > 0$ ，而 $k > 0$ 或 $k < 0$ ，因此積分範圍分為兩種情況，若 $0 < k < b$ ，則積分範圍如圖 3.2 所示。若 $k < 0 < b$ ，則積分範圍如圖 3.3 所示。綜合兩種積分範圍情況，我們可以將積分範圍寫成

$$\{(m, w); w^+ \leq m \leq b, -\infty \leq w \leq k\} \quad (3.3.12)$$

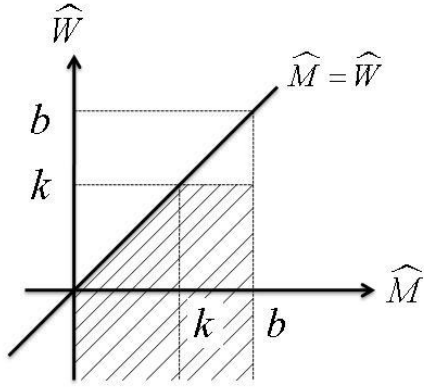


圖 3.2 積分範圍 III

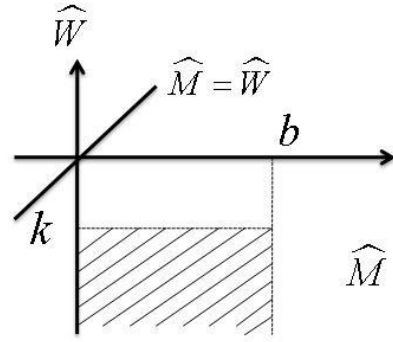


圖 3.3 積分範圍 V

接著我們根據 (3.2.16) 與定理 2.3-Girsanov 定理，由於 $\widehat{W}(t) = \alpha_s t - \widetilde{W}(t)$ ，定義測度轉換因子

$$Q(t) = e^{\alpha_s \widetilde{W}(t) - \frac{1}{2} \alpha_s^2 t} = e^{\alpha_s (\alpha_s t - \widehat{W}(t)) - \frac{1}{2} \alpha_s^2 t} = e^{-\alpha_s \widehat{W}(t) + \frac{1}{2} \alpha_s^2 t}, \quad 0 \leq t \leq T$$

我們得到 $\tilde{P}(A) = \int_A d\tilde{P}(T) = \int_A \frac{d\tilde{P}(T)}{d\hat{P}(T)} d\hat{P}(T) = \int_A \frac{1}{Q(T)} d\hat{P}(T) = \int_A e^{\alpha_s \widehat{W}(T) - \frac{1}{2} \alpha_s^2 T} d\hat{P}(T)$

找到 $(\widehat{M}(T), \widehat{W}(T))$ 在 \tilde{P} 下的聯合機率分配函數為

$$\tilde{f}_{\widehat{M}(T), \widehat{W}(T)}(m, w) = \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_s w - \frac{1}{2} \alpha_s^2 T - \frac{(2m-w)^2}{2T}}, \quad w \leq m, m > 0 \quad (3.3.13)$$

則 $(\widehat{M}(T), \widehat{W}(T), \widetilde{Z}(T))$ 在 \tilde{P} 下的聯合機率分配函數為

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\widehat{M}(T), \widehat{W}(T), \widetilde{Z}(T)}(m, w, z) &= \tilde{f}_{\widetilde{Z}(T)}(z) \cdot \tilde{f}_{\widehat{M}(T), \widehat{W}(T)}(m, w) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{z^2}{2T}} \cdot \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_s w - \frac{1}{2} \alpha_s^2 T - \frac{(2m-w)^2}{2T}}, \quad -\infty \leq z \leq \infty, w \leq m, m > 0 \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

再由 (3.3.12) 和 (3.3.14)，我們可以對 I_1, I_2, I_3, I_4 逐一積分求解。

$$\begin{aligned}
I_1 &= \tilde{E}[S(0)e^{-\sigma_S \widehat{W}(T)} \cdot I_{\{\bar{Z}(T) > x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \widehat{W}(T), \widehat{M}(T) < b, \widehat{W}(T) < k\}}] \\
&= S(0) \int_{-\infty}^k \int_{x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \int_{w^+}^b e^{-\sigma_S w} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{z^2}{2T}} \cdot \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_S w - \frac{1}{2}\alpha_S^2 T - \frac{(2m-w)^2}{2T}} dmdzdw \\
&= S(0) e^{-\frac{1}{2}\alpha_S^2 T} \int_{-\infty}^k \int_{x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\sigma_S w - \frac{z^2}{2T} + \alpha_S w} \left(\int_{w^+}^b \frac{2(2m-w)}{T} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}} dm \right) dzdw \\
&= S(0) e^{-\frac{1}{2}\alpha_S^2 T} \int_{-\infty}^k \int_{x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T} - \sigma_S w + \alpha_S w} \left(-e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}} \Big|_{m=w^+}^{m=b} \right) dzdw \\
&= S(0) e^{-\frac{1}{2}\alpha_S^2 T} \int_{-\infty}^k \int_{x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T} - \sigma_S w + \alpha_S w - \frac{w^2}{2T}} dzdw \\
&\quad - S(0) e^{-\frac{1}{2}\alpha_S^2 T} \int_{-\infty}^k \int_{x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T} - \sigma_S w + \alpha_S w - \frac{(2b-w)^2}{2T}} dzdw
\end{aligned}$$

(根據定理 3.2)

$$\begin{aligned}
&= S(0) e^{-\frac{1}{2}\alpha_S^2 T} \cdot e^{\frac{1}{2}\alpha_S^2 T + \frac{1}{2}\sigma_S^2 T - \alpha_S \sigma_S T} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_1, -c_1, \rho\right) \\
&\quad - S(0) e^{-\frac{1}{2}\alpha_S^2 T} \cdot e^{\frac{1}{2}\alpha_S^2 T + \frac{1}{2}\sigma_S^2 T - \alpha_S \sigma_S T - 2b\sigma_S + 2\alpha_S b} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_2, -c_2, \rho\right) \\
&= S(0) e^{\frac{1}{2}\sigma_S^2 T - \alpha_S \sigma_S T} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_1, -c_1, \rho\right) \\
&\quad - S(0) e^{\frac{1}{2}\sigma_S^2 T - \alpha_S \sigma_S T - 2b\sigma_S + 2\alpha_S b} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_2, -c_2, \rho\right) \tag{3.3.15}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
c_1 &= x \sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - \sigma_S \rho \sqrt{T} + \alpha_S \rho \sqrt{T}, & d_1 &= \sigma_S \sqrt{T} - \alpha_S \sqrt{T} \\
c_2 &= x \sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - \sigma_S \rho \sqrt{T} + \alpha_S \rho \sqrt{T} + \frac{2b\rho}{\sqrt{T}}, & d_2 &= \sigma_S \sqrt{T} - \alpha_S \sqrt{T} - \frac{2b}{\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \tilde{E}[K \cdot I_{\{\bar{Z}(T) > x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \widehat{W}(T), \widehat{M}(T) < b, \widehat{W}(T) < k\}}] \\
&= K \int_{-\infty}^k \int_{x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \int_{w^+}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{z^2}{2T}} \cdot \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_S w - \frac{1}{2}\alpha_S^2 T - \frac{(2m-w)^2}{2T}} dmdzdw \\
&= K e^{-\frac{1}{2}\alpha_S^2 T} \int_{-\infty}^k \int_{x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T} + \alpha_S w} \left(\int_{w^+}^b \frac{2(2m-w)}{T} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}} dm \right) dzdw
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Ke^{-\frac{1}{2}\alpha_s^2 T} \int_{-\infty}^k \int_{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T} + \alpha_s w} \left(-e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}} \Big|_{m=w^+}^{m=b} \right) dz dw \\
&= Ke^{-\frac{1}{2}\alpha_s^2 T} \int_{-\infty}^k \int_{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T} + \alpha_s w - \frac{w^2}{2T}} dz dw \\
&\quad - Ke^{-\frac{1}{2}\alpha_s^2 T} \int_{-\infty}^k \int_{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w}^{\infty} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T} + \alpha_s w - \frac{(2b-w)^2}{2T}} dz dw \\
&= Ke^{-\frac{1}{2}\alpha_s^2 T} \cdot e^{\frac{\alpha_s^2 T}{2}} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_3, -c_3, \rho\right) - Ke^{-\frac{1}{2}\alpha_s^2 T} \cdot e^{\frac{1}{2}\alpha_s^2 T + 2b\alpha_s} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_4, -c_4, \rho\right) \\
&= KN\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_3, -c_3, \rho\right) - Ke^{2b\alpha_s} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_4, -c_4, \rho\right) \tag{3.3.16}
\end{aligned}$$

其中

$$c_3 = x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_s \rho \sqrt{T},$$

$$c_4 = x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_s \rho \sqrt{T} + \frac{2b\rho}{\sqrt{T}},$$

$$d_3 = -\alpha_s \sqrt{T}$$

$$d_4 = -\alpha_s \sqrt{T} - \frac{2b}{\sqrt{T}}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{(1-\alpha)}{D} \tilde{E}[V(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_v^2 + \sigma_v \rho \alpha_s)T - \sigma_v \rho \widehat{W}(T) + \sigma_v \sqrt{1-\rho^2} \tilde{Z}(T)} \cdot S(0)e^{-\sigma_s \widehat{W}(T)} \\
&\quad \cdot I_{\{\tilde{Z}(T) < x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \widehat{W}(T), \widehat{M}(T) < b, \widehat{W}(T) < k\}}] \\
&= \frac{(1-\alpha)}{D} V(0)S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_v^2 + \sigma_v \rho \alpha_s)T} \int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w} \int_{w^+}^b e^{-\sigma_v \rho w + \sigma_v \sqrt{1-\rho^2} z - \sigma_s w} \\
&\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{z^2}{2T}} \cdot \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_s w - \frac{1}{2}\alpha_s^2 T - \frac{(2m-w)^2}{2T}} dmdzdw \\
&= \frac{(1-\alpha)}{D} V(0)S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_v^2 + \sigma_v \rho \alpha_s)T - \frac{1}{2}\alpha_s^2 T} \int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w} \frac{1}{2\pi T} e^{-\sigma_v \rho w + \sigma_v \sqrt{1-\rho^2} z - \sigma_s w - \frac{z^2}{2T} + \alpha_s w} \\
&\quad \cdot \left(\int_{w^+}^b \frac{2(2m-w)}{T} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}} dm \right) dz dw \\
&= \frac{(1-\alpha)}{D} V(0)S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_v^2 + \sigma_v \rho \alpha_s)T - \frac{1}{2}\alpha_s^2 T} \int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w} \frac{1}{2\pi T} e^{-\sigma_v \rho w + \sigma_v \sqrt{1-\rho^2} z - \sigma_s w - \frac{z^2}{2T} + \alpha_s w} \\
&\quad \cdot \left(-e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}} \Big|_{m=w^+}^{m=b} \right) dz dw
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-\alpha)}{D} V(0)S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_V^2+\sigma_V\rho\alpha_S)T-\frac{1}{2}\alpha_S^2T} \left(\int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T}+\sigma_V\sqrt{1-\rho^2}z-\sigma_V\rho w-\sigma_S w+\alpha_S w-\frac{w^2}{2T}} dzdw \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T}+\sigma_V\sqrt{1-\rho^2}z-\sigma_V\rho w-\sigma_S w+\alpha_S w-\frac{(2b-w)^2}{2T}} dzdw \right) \\
&= \frac{(1-\alpha)}{D} V(0)S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_V^2+\sigma_V\rho\alpha_S)T-\frac{1}{2}\alpha_S^2T} \left(\frac{1}{2}\sigma_V^2T-\alpha_S\rho\sigma_VT+\frac{1}{2}\sigma_S^2T+\frac{1}{2}\alpha_S^2T+\rho\sigma_S\sigma_VT-\sigma_S\alpha_S T N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_5, c_5, -\rho\right) \right. \\
&\quad \left. - e^{\frac{1}{2}\sigma_V^2T-\alpha_S\rho\sigma_VT+\frac{1}{2}\sigma_S^2T+\frac{1}{2}\alpha_S^2T+\rho\sigma_S\sigma_VT-\sigma_S\alpha_S T+2\alpha_S b-2b\rho\sigma_V-2b\sigma_S} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_6, c_6, -\rho\right) \right) \\
&= \frac{(1-\alpha)}{D} V(0)S(0)e^{rT+\frac{1}{2}\sigma_S^2T+\rho\sigma_S\sigma_VT-\sigma_S\alpha_S T} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_5, c_5, -\rho\right) \\
&\quad - \frac{(1-\alpha)}{D} V(0)S(0)e^{rT+\frac{1}{2}\sigma_S^2T+\rho\sigma_S\sigma_VT-\sigma_S\alpha_S T+2\alpha_S b-2b\rho\sigma_V-2b\sigma_S} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_6, c_6, -\rho\right) \quad (3.3.17)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
c_5 &= x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_S\rho\sqrt{T} - \sigma_V\sqrt{T} - \sigma_S\rho\sqrt{T}, d_5 = \sigma_S\sqrt{T} + \sigma_V\rho\sqrt{T} - \alpha_S\sqrt{T} \\
c_6 &= x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_S\rho\sqrt{T} - \sigma_V\sqrt{T} - \sigma_S\rho\sqrt{T} + \frac{2b\rho}{\sqrt{T}}, d_6 = \sigma_S\sqrt{T} + \sigma_V\rho\sqrt{T} - \alpha_S\sqrt{T} - \frac{2b}{\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{(1-\alpha)}{D} \tilde{E}[V(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_V^2+\sigma_V\rho\alpha_S)T-\sigma_V\rho\hat{W}(T)+\sigma_V\sqrt{1-\rho^2}\tilde{Z}(T)} \cdot K \cdot I_{\{\tilde{Z}(T)<x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\hat{W}(T), \hat{M}(T)<b, \hat{W}(T)<k\}}] \\
&= \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_V^2+\sigma_V\rho\alpha_S)T} \int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w} \int_{w^+}^b e^{-\sigma_V\rho w+\sigma_V\sqrt{1-\rho^2}z} \\
&\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{z^2}{2T}} \cdot \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha_S w-\frac{1}{2}\alpha_S^2T-\frac{(2m-w)^2}{2T}} dmdzdw \\
&= \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_V^2+\sigma_V\rho\alpha_S)T-\frac{1}{2}\alpha_S^2T} \int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T}+\sigma_V\sqrt{1-\rho^2}z-\sigma_V\rho w+\alpha_S w} \\
&\quad \left(\int_{w^+}^b \frac{2(2m-w)}{T} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}} dm \right) dzdw
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_V^2+\sigma_V\rho\alpha_S)T-\frac{1}{2}\alpha_S^2T} \int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T}+\sigma_V\sqrt{1-\rho^2}z-\sigma_V\rho w+\alpha_S w} \\
&\quad \left(-e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}} \Big|_{m=w^+}^{m=b}\right) dzdw \\
&= \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_V^2+\sigma_V\rho\alpha_S)T-\frac{1}{2}\alpha_S^2T} \left(\int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T}+\sigma_V\sqrt{1-\rho^2}z-\sigma_V\rho w+\alpha_S w-\frac{w^2}{2T}} dzdw \right. \\
&\quad \left.- \int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{x+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}w} \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{z^2}{2T}+\sigma_V\sqrt{1-\rho^2}z-\sigma_V\rho w+\alpha_S w-\frac{(2b-w)^2}{2T}} dzdw \right) \\
&= \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_V^2+\sigma_V\rho\alpha_S)T-\frac{1}{2}\alpha_S^2T} \left(e^{\frac{1}{2}\sigma_V^2T-\alpha_S\rho\sigma_VT+\frac{1}{2}\alpha_S^2T} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_7, c_7, -\rho\right) \right. \\
&\quad \left.- e^{\frac{1}{2}\sigma_V^2T-\alpha_S\rho\sigma_VT+\frac{1}{2}\alpha_S^2T+2\alpha_S b-2b\rho\sigma_V} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_8, c_8, -\rho\right)\right) \\
&= \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0)e^{rT} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_7, c_7, -\rho\right) \\
&\quad - \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0)e^{rT+2\alpha_S b-2b\rho\sigma_V} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_8, c_8, -\rho\right) \tag{3.3.18}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
c_7 &= x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_S\rho\sqrt{T} - \sigma_V\sqrt{T}, & d_7 &= \sigma_V\rho\sqrt{T} - \alpha_S\sqrt{T} \\
c_8 &= x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \alpha_S\rho\sqrt{T} - \sigma_V\sqrt{T} + \frac{2b\rho}{\sqrt{T}}, & d_8 &= \sigma_V\rho\sqrt{T} - \alpha_S\sqrt{T} - \frac{2b}{\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

所以，由(3.3.15),(3.3.16),(3.3.17),(3.3.18)，在 Merton 結構式模型下，有違約風險的下方出局障礙買權在時間 0 的價值為

$$\begin{aligned}
C_{do} &= S(0)N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_1, -c_1, \rho\right) - S(0)e^{-2b\sigma_S+2\alpha_S b} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_2, -c_2, \rho\right) \\
&\quad - Ke^{-rT} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_3, -c_3, \rho\right) + Ke^{-rT+2b\alpha_S} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_4, -c_4, \rho\right) \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)}{D} V(0)S(0)e^{rT+\rho\sigma_S\sigma_VT} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_5, c_5, -\rho\right) \\
&\quad - \frac{(1-\alpha)}{D} V(0)S(0)e^{rT+\rho\sigma_S\sigma_VT+2\alpha_S b-2b\rho\sigma_V-2b\sigma_S} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_6, c_6, -\rho\right) \\
&\quad - \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0)N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_7, c_7, -\rho\right) \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0)e^{2\alpha_S b-2b\rho\sigma_V} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}}+d_8, c_8, -\rho\right) \tag{3.3.19}
\end{aligned}$$

當 $D \rightarrow 0$ 時， $\lim_{D \rightarrow 0} x = \lim_{D \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_v \sqrt{1-\rho^2}} [\ln \frac{D}{V(0)} - (r - \frac{1}{2} \sigma_v^2 + \sigma_v \rho \alpha_s) T] = -\infty$ 。

故 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$ 皆會趨近於 $-\infty$ 。因此當 $D \rightarrow 0$ 時，Merton 結構式模型下的有違約風險的下方出局障礙買權在時間 0 的價值為

$$\begin{aligned} \lim_{D \rightarrow 0} C_{do} = & S(0)N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_1\right) - S(0)e^{-2b\sigma_s + 2\alpha_s b} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_2\right) \\ & - Ke^{-rT} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_3\right) + Ke^{-rT + 2b\alpha_s} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_4\right) \end{aligned}$$

則

$\lim_{D \rightarrow 0} C_{do}$ = 沒有考量交易對手風險下，下出局障礙買權的封閉解。 (3.3.2)

另外，當我們令 $B \rightarrow 0$ 時， $\lim_{B \rightarrow 0} b = \lim_{B \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\sigma_s} \left(\ln \frac{B}{S(0)} - \gamma T\right)\right] = \infty$ 。故 d_2, d_4, d_6, d_8 皆

會趨近於 $-\infty$ 。因此當 $B \rightarrow 0$ 時，Merton 結構式模型下的有違約風險的下方出局障礙買權在時間 0 的價值為

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow 0} C_{do} = & S(0)N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_1, -c_1, \rho\right) - Ke^{-rT} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_3, -c_3, \rho\right) \\ & + \frac{(1-\alpha)}{D} V(0)S(0)e^{rT + \rho\sigma_s\sigma_v T} N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_5, c_5, -\rho\right) \\ & - \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0)N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_7, c_7, -\rho\right) \end{aligned}$$

$$\text{且 } \frac{k}{\sqrt{T}} + d_1 = -\frac{\ln \frac{K}{S(0)} - \gamma T}{\sigma_s \sqrt{T}} + \sigma_s \sqrt{T} + \frac{1}{\sigma_s} \left(r - \gamma - \frac{1}{2} \sigma_s^2\right) \sqrt{T} = \frac{\ln \frac{S(0)}{K} + \left(r + \frac{1}{2} \sigma_s^2\right) T}{\sigma_s \sqrt{T}}$$

與 Klein (1996) 有違約風險買權評價公式的 a_1 相同。而

$$\begin{aligned} -c_1 = & -x \sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} + \sigma_s \rho \sqrt{T} - \alpha_s \rho \sqrt{T} \\ = & \frac{\ln \frac{V(0)}{D} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2 + \sigma_v \rho \alpha_s\right) T}{\sigma_v \sqrt{T}} + \sigma_s \rho \sqrt{T} - \alpha_s \rho \sqrt{T} \\ = & \frac{\ln \frac{V(0)}{D} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2 + \rho \sigma_s \sigma_v\right) T}{\sigma_v \sqrt{T}} \end{aligned}$$

與 Klein (1996) 有違約風險買權評價公式的 a_2 相同。同理可得 $\frac{k}{\sqrt{T}} + d_3, -c_3,$
 $\frac{k}{\sqrt{T}} + d_5, -c_5, \frac{k}{\sqrt{T}} + d_7, -c_7$ 各別與 Klein (1996) 有違約風險買權評價公式的
 $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ 相等。所以，當 $B \rightarrow 0$ 時，Merton 結構式模型下的有違約風險
 的下方出局障礙買權即為 Klein (1996) 推導的有違約風險的買權評價公式。即

$$\lim_{B \rightarrow 0} \mathbf{nC}_{do} = (2.1\text{式}) \quad (3.3.2)$$

同樣的研究方法，也可以求出有違約風險的上方出局障礙買權在時間 0 的價值為

$$\begin{aligned}
 C_{uo} = & S(0) \left[N\left(\frac{-b}{\sqrt{T}} + f_1, -e_1, -\rho\right) - N\left(\frac{-k}{\sqrt{T}} + f_1, -e_1, -\rho\right) \right] \\
 & - S(0) e^{-2b\sigma_s - 2\alpha_s b} \left[N\left(\frac{-b}{\sqrt{T}} + f_2, -e_2, -\rho\right) - N\left(\frac{-k}{\sqrt{T}} + f_2, -e_2, -\rho\right) \right] \\
 & - K e^{-rT} \left[N\left(\frac{-b}{\sqrt{T}} + f_3, -e_3, -\rho\right) - N\left(\frac{-k}{\sqrt{T}} + f_3, -e_3, -\rho\right) \right] \\
 & + K e^{-rT - 2b\alpha_s} \left[N\left(\frac{-b}{\sqrt{T}} + f_4, -e_4, -\rho\right) - N\left(\frac{-k}{\sqrt{T}} + f_4, -e_4, -\rho\right) \right] \\
 & + \frac{(1-\alpha)}{D} V(0) S(0) e^{\gamma T + 2\sigma_v \rho \alpha_s T + \frac{1}{2} \sigma_s^2 T + \rho \sigma_s \sigma_v T + \sigma_s \alpha_s T} \left[N\left(\frac{-b}{\sqrt{T}} + f_5, e_5, \rho\right) - N\left(\frac{-k}{\sqrt{T}} + f_5, e_5, \rho\right) \right] \\
 & - \frac{(1-\alpha)}{D} V(0) S(0) e^{\gamma T + 2\sigma_v \rho \alpha_s T + \frac{1}{2} \sigma_s^2 T + \rho \sigma_s \sigma_v T + \sigma_s \alpha_s T - 2\alpha_s b - 2b\rho\sigma_v - 2b\sigma_s} \\
 & \quad \cdot \left[N\left(\frac{-b}{\sqrt{T}} + f_6, e_6, \rho\right) - N\left(\frac{-k}{\sqrt{T}} + f_6, e_6, \rho\right) \right] \\
 & - \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0) e^{2\sigma_v \rho \alpha_s T} \left[N\left(\frac{-b}{\sqrt{T}} + f_7, e_7, \rho\right) - N\left(\frac{-k}{\sqrt{T}} + f_7, e_7, \rho\right) \right] \\
 & + \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0) e^{2\sigma_v \rho \alpha_s T - 2\alpha_s b - 2b\rho\sigma_v} \left[N\left(\frac{-b}{\sqrt{T}} + f_8, e_8, \rho\right) - N\left(\frac{-k}{\sqrt{T}} + f_8, e_8, \rho\right) \right] \quad (3.3.22)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
e_1 &= x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - \sigma_s\rho\sqrt{T} - \alpha_s\rho\sqrt{T}, & f_1 &= -\sigma_s\sqrt{T} - \alpha_s\sqrt{T} \\
e_2 &= x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - \sigma_s\rho\sqrt{T} - \alpha_s\rho\sqrt{T} + \frac{2b\rho}{\sqrt{T}}, & f_2 &= -\sigma_s\sqrt{T} - \alpha_s\sqrt{T} + \frac{2b}{\sqrt{T}} \\
e_3 &= x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - \alpha_s\rho\sqrt{T}, & f_3 &= -\alpha_s\sqrt{T} \\
e_4 &= x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - \alpha_s\rho\sqrt{T} + \frac{2b\rho}{\sqrt{T}}, & f_4 &= -\alpha_s\sqrt{T} + \frac{2b}{\sqrt{T}} \\
e_5 &= x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - \alpha_s\rho\sqrt{T} - \sigma_v\sqrt{T} - \sigma_s\rho\sqrt{T}, & f_5 &= -\sigma_s\sqrt{T} - \sigma_v\rho\sqrt{T} - \alpha_s\sqrt{T} \\
e_6 &= x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - \alpha_s\rho\sqrt{T} - \sigma_v\sqrt{T} - \sigma_s\rho\sqrt{T} + \frac{2b\rho}{\sqrt{T}}, & f_6 &= -\sigma_s\sqrt{T} - \sigma_v\rho\sqrt{T} - \alpha_s\sqrt{T} + \frac{2b}{\sqrt{T}} \\
e_7 &= x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - \alpha_s\rho\sqrt{T} - \sigma_v\sqrt{T}, & f_7 &= -\sigma_v\rho\sqrt{T} - \alpha_s\sqrt{T} \\
e_8 &= x\sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}} - \alpha_s\rho\sqrt{T} - \sigma_v\sqrt{T} + \frac{2b\rho}{\sqrt{T}}, & f_8 &= -\sigma_v\rho\sqrt{T} - \alpha_s\sqrt{T} + \frac{2b}{\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

有違約風險的下方入局障礙賣權在時間 0 的價值為

$$\begin{aligned}
P_{di} &= Ke^{-rT}N\left(-\frac{b}{\sqrt{T}} - d_3, -c_3, -\rho\right) \\
&\quad + Ke^{-rT+2b\alpha_s}\left[N\left(\frac{b}{\sqrt{T}} + d_4, -c_4, \rho\right) - N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_4, -c_4, \rho\right)\right] \\
&\quad - S(0)N\left(-\frac{b}{\sqrt{T}} - d_1, -c_1, -\rho\right) \\
&\quad - S(0)e^{-2b\sigma_s+2\alpha_sb}\left[N\left(\frac{b}{\sqrt{T}} + d_2, -c_2, \rho\right) - N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_2, -c_2, \rho\right)\right] \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)}{D}KV(0)N\left(-\frac{b}{\sqrt{T}} - d_7, c_7, \rho\right) \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)}{D}KV(0)e^{2\alpha_sb-2b\rho\sigma_v}\left[N\left(\frac{b}{\sqrt{T}} + d_8, c_8, -\rho\right) - N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_8, c_8, -\rho\right)\right] \\
&\quad - \frac{(1-\alpha)}{D}V(0)S(0)e^{rT+\rho\sigma_s\sigma_vT}N\left(-\frac{b}{\sqrt{T}} - d_5, c_5, \rho\right) \\
&\quad - \frac{(1-\alpha)}{D}V(0)S(0)e^{rT+\rho\sigma_s\sigma_vT+2\alpha_sb-2b\rho\sigma_v-2b\sigma_s} \\
&\quad \quad \cdot \left[N\left(\frac{b}{\sqrt{T}} + d_6, c_6, -\rho\right) - N\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + d_6, c_6, -\rho\right)\right] \tag{3.3.23}
\end{aligned}$$

有違約風險的上方入局障礙賣權在時間 0 的價值為

$$\begin{aligned}
 P_{ui} &= Ke^{-rT-2b\alpha_s} N\left(\frac{-k}{\sqrt{T}} + f_4, -e_4, -\rho\right) \\
 &\quad - S(0)e^{\gamma T - rT + \frac{1}{2}\sigma_s^2 T + \alpha_s \sigma_s T - 2b\sigma_s - 2\alpha_s b} N\left(\frac{-k}{\sqrt{T}} + f_2, -e_2, -\rho\right) \\
 &\quad + \frac{(1-\alpha)}{D} KV(0)e^{2\sigma_v \rho \alpha_s T - 2\alpha_s b - 2b\rho\sigma_v} N\left(\frac{-k}{\sqrt{T}} + f_8, e_8, \rho\right) \\
 &\quad - \frac{(1-\alpha)}{D} V(0)S(0)e^{\gamma T + 2\sigma_v \rho \alpha_s T + \frac{1}{2}\sigma_s^2 T + \rho\sigma_s \sigma_v T + \sigma_s \alpha_s T - 2\alpha_s b - 2b\rho\sigma_v - 2b\sigma_s} N\left(\frac{-k}{\sqrt{T}} + f_6, e_6, \rho\right)
 \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

最後，我們由 Klein(1996)所推導的有違約風險的選擇權評價公式(2.1.1)和(2.1.2)，並配合 in-out parity 可分別求出下列四種障礙選擇權。即

有違約風險的下方入局障礙買權

=有違約風險的買權-有違約風險的下方出局障礙買權=(2.1.1)式-(3.3.19)。

有違約風險的上方入局障礙買權

=有違約風險的買權-有違約風險的上方出局障礙買權=(2.1.1)式-(3.3.22)。

有違約風險的下方出局障礙賣權

=有違約風險的賣權-有違約風險的下方入局障礙賣權=(2.1.2)式-(3.3.23)。

有違約風險的上方出局障礙買賣權

=有違約風險的賣權-有違約風險的上方入局障礙賣權=(2.1.2)式-(3.3.24)。

接下來，我們延伸本節的方法，利用 Merton 結構式模型下，有違約風險的障礙賣權來對有違約風險的 Barrier reverse convertibles 做評價。Barrier reverse convertibles 是由債券和下方入局障礙賣權兩部分資產所組成(即買債券並賣下方入局障礙賣權)。其中障礙賣權的履約價格，即為標的股票的起始價格，而障礙價格通常為起始股價的 70~80%。而價值結算日是在到期日的前幾天(依合約上規定)，如果標的的股票價格在價值結算日是高於起始價格，則投資人可在到期日拿回本金與利息。如果在價值結算日之前，股票價格皆維持在障礙價格之上，則投資人一樣可在到期日拿回本金與利息。如果在價值結算日之前，股票價格曾跌破

障礙價格，且價值結算日當天股價低於起始價格，投資人在到期日則是拿股票與利息。為了方便了解，我們用以下的假設舉出三個例子。假設投資本金為 10000 元，利息為 10%，股票起始價格為 50 元(即 200 股)，而障礙價格為 40(50 的 80%)，投資長度 1 年。

狀況一：股價在價值結算日超過 50 元，投資人到期日可獲得：

- (1) 10000 元本金。
- (2) $10000 * 10\% = 1000$ 元利息。

狀況二：在價值結算日之前，股價皆維持在 40 元之上，投資人到期日可獲得：

- (1) 10000 元本金。
- (2) $10000 * 10\% = 1000$ 元利息。

狀況三：在價值結算日之前，股票價格曾跌破 40 元，且價值結算日的股價低於 50 元，投資人到期日可獲得：

- (1) 200 股標的股票。
- (2) $10000 * 10\% = 1000$ 元利息。

現在，我們想求在 Merton 結構式模型下，有違約風險的 Barrier reverse convertibles 價值，即有違約風險的債券減去有違約風險的下入局賣權。而下入局賣權可以由本小節前面所證的結果代入，所以我們只需求解有違約風險的債券。即

$$VF = \tilde{E}[e^{-rT} (F + FcT) I_{\{V(T) > D\}}] + \tilde{E}[e^{-rT} \frac{(1-\alpha)V(T)}{D} (F + FcT) I_{\{V(T) < D\}}] \quad (3.3.25)$$

由於 $V(T) = V(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_v^2)T + \sigma_v \tilde{W}(T)}$ ，故 $\tilde{E}[I_{\{V(T) > D\}}]$ 可以寫成

$$\begin{aligned} \tilde{E}[I_{\{V(T) > D\}}] &= \tilde{P}(V(T) > D) \\ &= \tilde{P}(V(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_v^2)T + \sigma_v \tilde{W}(T)} > D) \\ &= \tilde{P}((r - \frac{1}{2}\sigma_v^2)T + \sigma_v \tilde{W}(T) > \ln \frac{D}{V(0)}) \\ &= \tilde{P}(\tilde{W}(T) > \frac{1}{\sigma_v} [\ln \frac{D}{V(0)} - (r - \frac{1}{2}\sigma_v^2)T]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{P}\left(\frac{\tilde{W}(T)}{\sqrt{T}} > \frac{1}{\sigma_v \sqrt{T}} \left[\ln \frac{D}{V(0)} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2\right) T \right]\right) \\
&= \tilde{P}\left(\frac{\tilde{W}(T)}{\sqrt{T}} < -\frac{1}{\sigma_v \sqrt{T}} \left[\ln \frac{D}{V(0)} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2\right) T \right]\right) \\
&= \tilde{P}\left(\frac{\tilde{W}(T)}{\sqrt{T}} < \frac{1}{\sigma_v \sqrt{T}} \left[\ln \frac{V(0)}{D} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2\right) T \right]\right) \\
&= N\left(-\frac{1}{\sigma_v \sqrt{T}} \left[\ln \frac{V(0)}{D} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2\right) T \right]\right)
\end{aligned}$$

而 $\tilde{E}[V(T)I_{\{V(T)<D\}}]$ 則為

$$\begin{aligned}
&\tilde{E}[V(T)I_{\{V(T)<D\}}] \\
&= \tilde{E}\left[V(0)e^{\left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2\right)T + \sigma_v \tilde{W}(T)} I_{\left\{\frac{\tilde{W}(T)}{\sigma_v} < \frac{1}{\sigma_v} \left[\ln \frac{D}{V(0)} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2\right) T \right]\right\}}\right] \\
&= V(0)e^{\left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2\right)T} \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma_v} \left[\ln \frac{D}{V(0)} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2\right) T \right]} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\sigma_v w} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{w^2}{2T}} dw \\
&= V(0)e^{rT} \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma_v} \left[\ln \frac{D}{V(0)} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2\right) T \right]} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\frac{(w - \sigma_v T)^2}{2T}} dw \\
&\quad (\text{令 } w_1 = \frac{w - \sigma_v T}{\sqrt{T}}) \\
&= V(0)e^{rT} \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma_v \sqrt{T}} \left[\ln \frac{D}{V(0)} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2\right) T \right]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w_1^2}{2}} dw_1 \\
&= V(0)e^{rT} N\left(-\frac{1}{\sigma_v \sqrt{T}} \left[\ln \frac{D}{V(0)} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2\right) T \right]\right)
\end{aligned}$$

帶回 (3.3.25) 可得在 Merton 結構式模型下，有違約風險的債券價值為

$$\begin{aligned}
&e^{-rT} (F + FcT) N\left(-\frac{1}{\sigma_v \sqrt{T}} \left[\ln \frac{V(0)}{D} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma_v^2\right) T \right]\right) \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)}{D} V(0) (F + FcT) N\left(-\frac{1}{\sigma_v \sqrt{T}} \left[\ln \frac{D}{V(0)} - \left(r + \frac{1}{2} \sigma_v^2\right) T \right]\right) \quad (3.3.26)
\end{aligned}$$

因此，在 Merton 結構式模型下，有違約風險的 Barrier reverse convertibles 價值為

有違約風險的債券減去有違約風險的下入局賣權 = (3.3.26) - $\frac{F}{K}$ (3.3.23)。

第四章 模型結果分析

第一節討論特殊的情況，考量在首次通過模型下，若公司負債 D 和負債門檻 L 皆趨近於零，則我們的有違約風險買權評價公式應會近似 Black-Scholes 買權評價公式。而在 Merton 結構式模型的部份，若公司負債趨近於零，那麼我們的有違約風險之下出局買權評價公式應會近似下出局買權的封閉解；若障礙價格 B 趨近於零，則模型對於股價的障礙價格便形同虛設，那麼我們的有違約風險之下出局買權評價公式將會近似 Klein (1996) 所推導的有違約風險的買權評價公式 (2.1.1)。在第二節我們進一步地，將有違約風險之下出局買權評價公式與劉彥君 (2010) 所提出的有違約風險之下出局買權數值解做比較。第三節與第四節利用敏感性分析圖分析各參數間的關係是否符合真實情況。

第一節 特殊情況參數

首先，我們考量在首次通過模型下，令公司負債 D 和負債門檻 L 皆趨近於零，則我們的有違約風險買權評價公式應會近似 Black-Scholes 的買權評價公式。因此，令 $D=L=0.000000001$ ，並以 $S(0)=40, K=40, V(0)=100, T=3, \sigma_v=0.2, \sigma_s=0.2, \rho=0, r=0.05, \text{gamma}=0.06, \text{delta}=0.6$ 為基本設定，每次調動一個變數與 Black-Scholes 買權評價公式做比較如表格 4.1：

	基本設定	$V(0)=90$	$\sigma_v = 0.15$	$\rho = 0.5$	$\text{delta}=0.4$
Our model	8.369744	8.369744	8.369744	8.369744	8.369744
BS call	8.369744	8.369744	8.369744	8.369744	8.369744
	$S(0)=30$	$\sigma_s = 0.15$	$T=2$	$r=0.07$	
Our model	2.556839	7.251084	6.450712	9.642877	
BS call	2.556839	7.251084	6.450712	9.642877	

表 4.1 我們在特殊情況下的封閉解與 Black-Scholes 買權封閉解

由此，我們可以看出我們與 Black-Scholes 買權封閉解的結果是一樣的。也印證了我們在 (3.2.26) 式中所推導的特殊情況。

在 Merton 模型下，若公司負債趨近於零，且令 gamma 等於零使得障礙價

格為一常數 B ，那麼我們的有違約風險之下出局買權評價公式應會近似下出局買權的封閉解。因此，令 $D=0.000000001$, $gamma=0$, $S(0)=40, K=40, B=35, V(0)=100$, $T=3, \alpha=0.25, \sigma_v=0.2, \sigma_s=0.2, \rho=0, r=0.05$, 為基本設定，每次調動一個變數與下出局買權的封閉解做比較，如表格 4.2：

	基本設定	$V(0)=90$	$\sigma_v = 0.15$	$\rho = 0.5$	$\alpha=0.5$
Our model	6.060642	6.060642	6.060642	6.060642	6.060642
下出局 call	6.060642	6.060642	6.060642	6.060642	6.060642
	$S(0)=50$	$\sigma_s = 0.15$	$T=2$	$r=0.03$	
Our model	16.09014	6.118838	5.137863	5.068415	
下出局 call	16.09014	6.118838	5.137863	5.068415	

表 4.2 我們在特殊情況下的封閉解與下出局買權的封閉解

由此，我們可以看出我們與下出局買權封閉解的結果是一樣的。也印證了我們在 (3.3.20) 式中所推導的特殊情況。

在 Merton 模型下，當障礙價格 B 趨近於零時，則模型對於股價的障礙價格便形同虛設，有違約風險之下出局買權評價公式應會近似 Klein (1996) 所提出的有違約風險的買權評價公式。因此，令 $B=0.000000001$ ，並以 $S(0)=40, K=40, V(0)=100, D=90, T=3, \alpha=0.25, \sigma_v=0.2, \sigma_s=0.2, \rho=0, r=0.05, gamma=0$ 為基本設定，每次調動一個變數與 Klein(1996) 的評價公式做比較，如表格 4.3：

	基本設定	$S(0)=30$	$V(0)=90$	$V(0)=110$	$\rho = 0.5$
Our model	7.442009	2.273429	7.027818	7.740897	8.057731
Klein	7.442009	2.273429	7.027818	7.740897	8.057731
	$\rho = -0.5$	$\sigma_s = 0.15$	$\sigma_s = 0.25$	$\sigma_v = 0.15$	$\sigma_v = 0.25$
Our model	6.58865	6.447346	8.479698	7.799244	7.104922
Klein	6.58865	6.447346	8.479698	7.799244	7.104922
	$\alpha=0$	$\alpha=0.5$	$r=0.03$	$r=0.07$	$T=4$
Our model	7.931773	6.952246	6.17314	8.800805	8.916267
Klein	7.931773	6.952246	6.17314	8.800805	8.916267

表 4.3 我們在特殊情況下的封閉解與 Klein (1996) 封閉解

由此，我們可以看出我們與 Klein (1996)的結果是一樣的。也印證了我們在 (3.3.21) 式中所推導的特殊情況。

第二節 有違約風險之下出局買權評價公式與劉彥君 (2010)數值解比較

接下來把我們的有違約風險之下出局買權評價公式與劉彥君 (2010)所提出的有違約風險之下出局買權數值解做比較，以 $S(0)=40, K=40, B=35, V(0)=100, D=90, T=3, \alpha=0.25, \sigma_v=0.2, \sigma_s=0.2, \rho=0, r=0.05, \text{gamma}=0.06$ ，為基本設定，如表格 4.4：

	基本設定	$B=20$	$B=25$	$B=30$	$B=40$
Our model	6.931974	7.442002	7.440167	7.384522	5.370554
劉彥君	6.908868	7.417882	7.414524	7.359950	5.352632
	$S(0)=50$	$V(0)=90$	$V(0)=110$	$\rho=0.5$	$\rho=-0.5$
Our model	14.621560	6.546169	7.210378	7.520264	6.097956
劉彥君	14.573002	6.453682	7.191145	7.509148	6.073404
	$\sigma_s=0.15$	$\sigma_s=0.25$	$\sigma_v=0.15$	$\sigma_v=0.25$	$T=2$
Our model	6.300751	7.415953	7.264725	6.617988	5.427814
劉彥君	6.279605	7.391348	7.245652	6.592954	5.410064
	$T=4$	$\alpha=0$	$\alpha=0.5$	$r=0.03$	$r=0.07$
Our model	8.317517	7.388171	6.475776	5.701210	8.264581
劉彥君	8.289279	7.388034	6.429702	5.680141	8.240350

表 4.4 我們的封閉解與劉彥君 (2010)數值解

由此，我們可以看出我們與劉彥君 (2010)的結果都非常接近。且劉彥君 (2010)的數值結果為模型切 500 期的情況，若切得期數更細，其結果會更加接近我們的封閉解。

第三節 敏感性分析-在首次通過模型下，有違約風險的買權

第三節主要對在首次通過模型下，有違約風險的買權做敏感性分析並以 Black-Scholes 的買權訂價公式做比較。我們以 $S(0)=40, K=40, V(0)=100, T=3, D=90, L=70, \sigma_v=0.2, \sigma_s=0.2, \rho=0, r=0.05, \text{gamma}=0.06, \text{delta}=0.6$ 為基本設定，每一次對一個變數做敏性度分析。第一個分析期初股價與買權價值的關係，如圖 4.1 所示，期初股價愈高，首次通過模型下的有違約風險買權與 Black-Scholes 的買權價值都隨著升高。符合期初股價愈高，買權愈容易履約，因此買權價值也愈高。第二個分析期初公司資產與買權價值的關係，如圖 4.2 所示，期初公司資產愈高，買權賣方就不容易發生違約，因此首次通過模型下的有違約風險買權也愈高，而且會隨著公司資產的升高，收斂到 Black-Scholes 的買權價值；而 Black-Scholes 的買權公式因為沒有考量交易對手風險的情況，因此期初公司資產並不會影響買權價值。第三個分析股價波動度與買權價值的關係，如圖 4.3 所示，股價波動的幅度愈高，首次通過模型下的有違約風險買權與 Black-Scholes 的買權價值也愈高。因為股價波動度愈高，選擇權就愈容易履約，因此價值愈高。第四個分析買權到期時間與買權價值的關係，如圖 4.4 所示，到期時間愈長，選擇權的時間價值愈高，因此首次通過模型下的有違約風險買權與 Black-Scholes 的買權價值都隨著升高，兩者的結果皆有符合我們的論述。第五個分析公司資產的波動度與買權價值的關係，如圖 4.5 所示，波動度愈高，公司資產的變化幅度愈大，因此愈容易發生違約，故首次通過模型下的有違約風險買權價值就愈低；而 Black-Scholes 的買權公式沒有考量交易對手風險的情況，因此公司資產波動度並不會影響買權價值。當公司資產波動度趨近於零時，公司幾乎不會違約，因此首次通過模型下的有違約風險買權價值就會趨近 Black-Scholes 的買權價值。

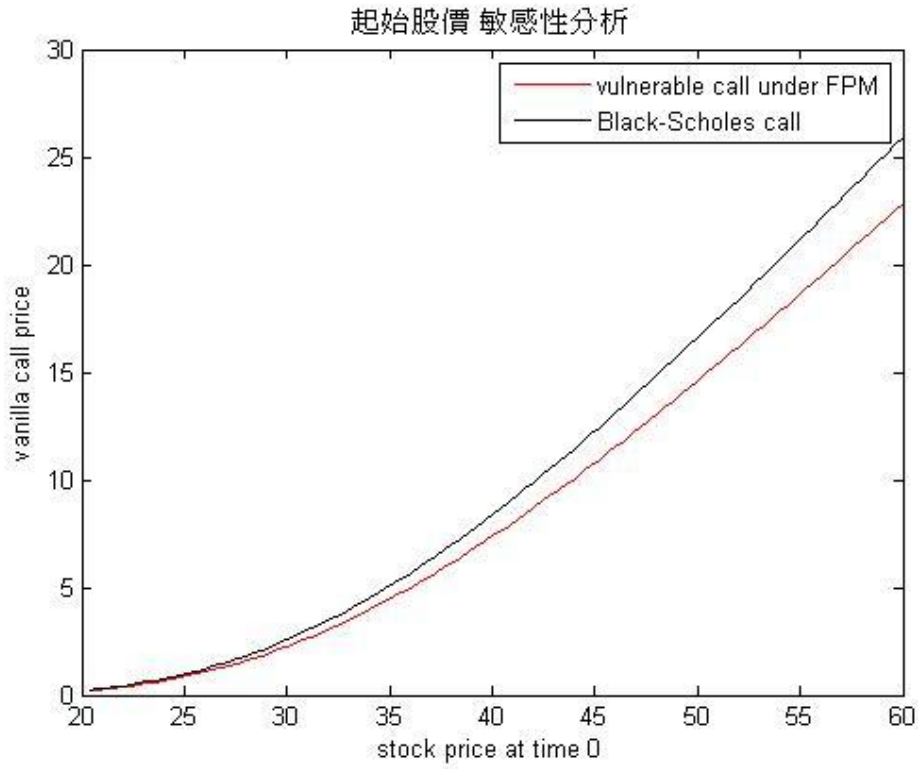


圖 4.1 股價敏感性分析 I

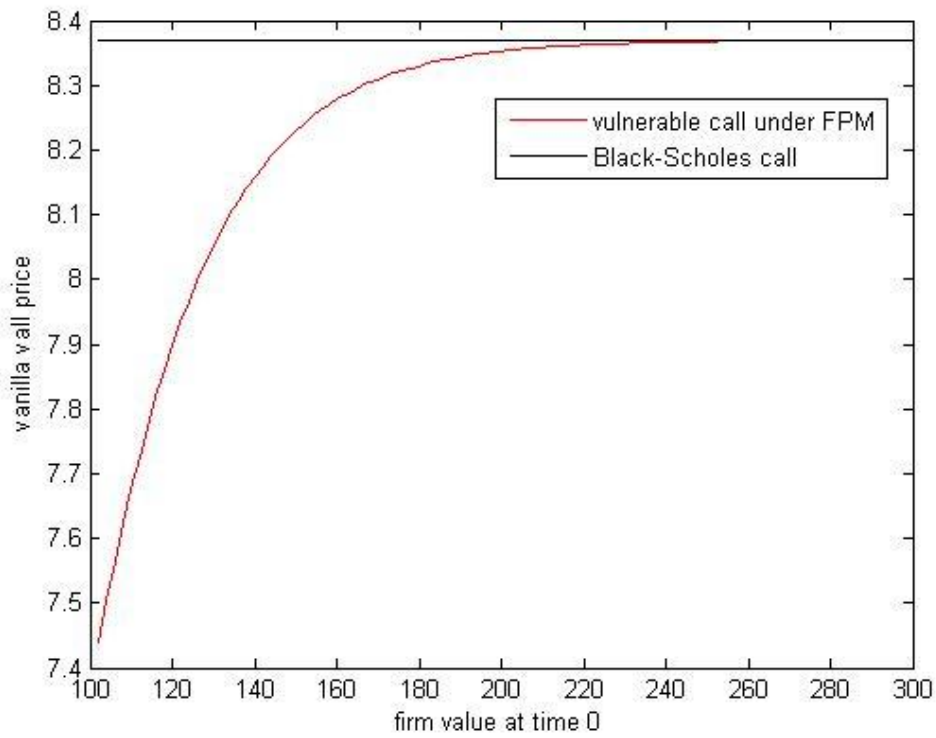


圖 4.2 公司資產敏感性分析 I

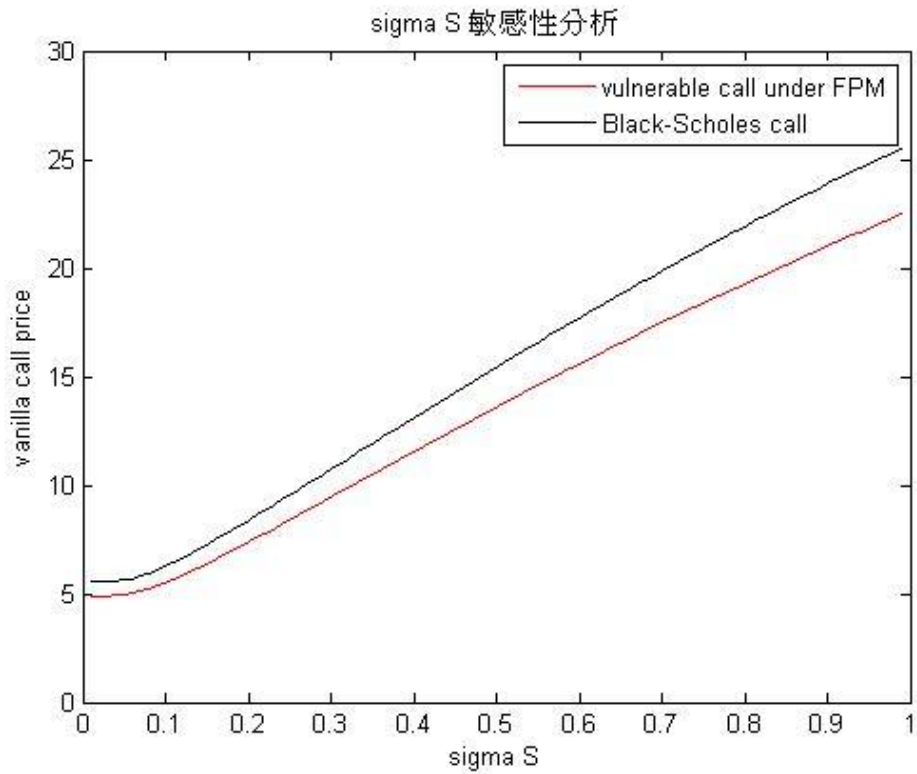


圖 4.3 股價波動度敏感性分析 I

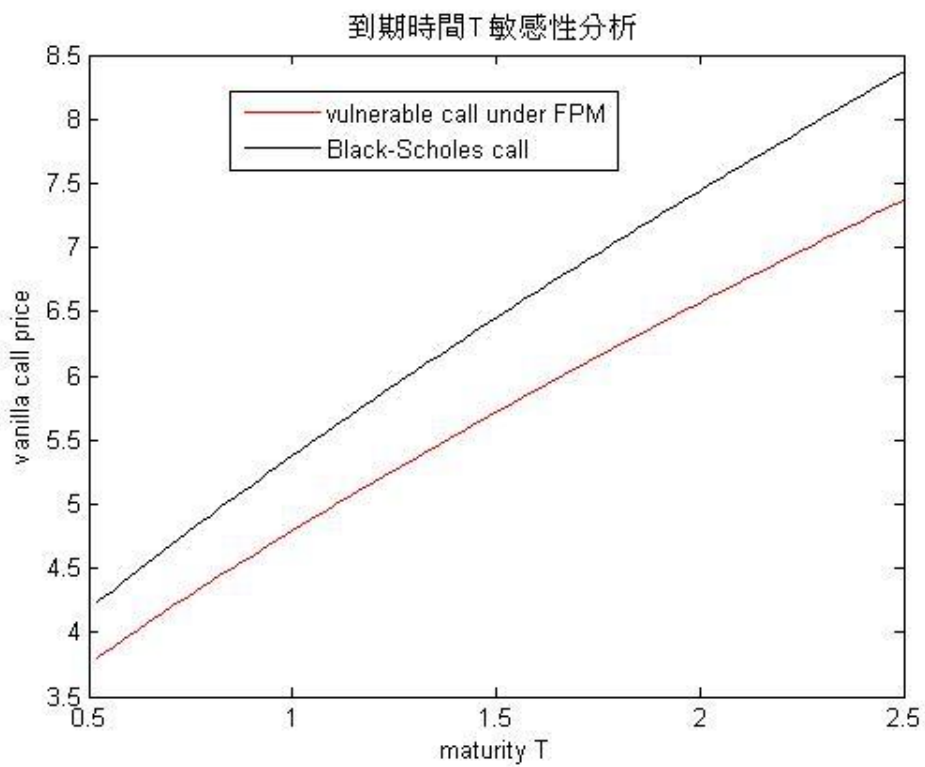


圖 4.4 到期時間敏感性分析 I

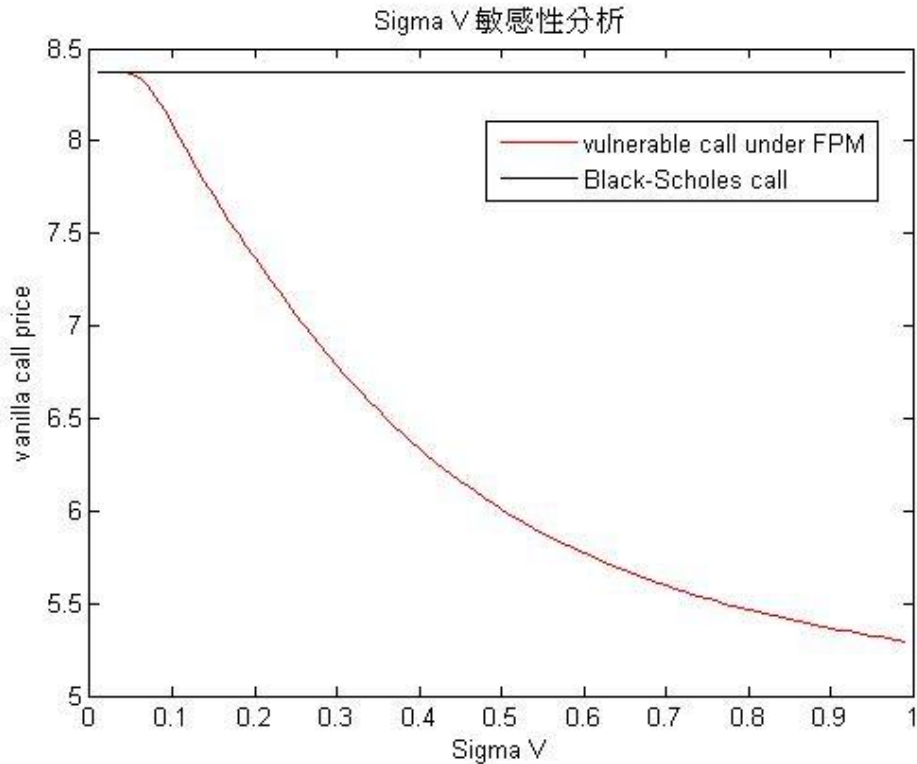


圖 4.5 公司資產波動度敏感性分析 I

第四節 敏感性分析-Merton 結構式模型下，有違約風險的下出局買權

第四節主要對在 Merton 結構式模型下，有違約風險的下出局買權做敏感性分析並以下出局買權的封閉解做比較。我們以 $S(0)=40, K=40, V(0)=100, T=3, D=90, B=35, \sigma_v=0.2, \sigma_s=0.2, \rho=0, r=0.05, \gamma=0, \alpha=0.25$ 為基本設定，每一次對一個變數做敏感性分析。第一個分析期初股價與買權價值的關係，如圖 4.6 所示，期初股價愈高，Merton 結構式模型下的有違約風險下出局買權與下出局買權價值都隨著升高。符合期初股價愈高，買權愈容易履約，因此買權價值也愈高。第二個分析期初公司資產與買權價值的關係，如圖 4.7 所示，期初公司資產愈高，買權賣方就不容易發生違約，因此 Merton 結構式模型下的有違約風險下出局買權也愈高，而且會隨著公司資產的升高，收斂到下出局買權價值；而下出局買權封閉解因為沒有考量交易對手風險的情況，因此期初公司資產並不會影響買權價值。第三個分析股價波動度與買權價值的關係，如圖 4.8 所示，股價波動的幅度愈高，Merton 結構式模型下的有違約風險下出局買權與下出局買權價值有先升

後降的趨勢。一開始的上升趨勢，是因為股價波動幅度愈高，買權履約的機會就愈大。但是若股價波動幅度太高，也會造成股價容易觸碰到障礙價格，使得買權出局而造成價值降低。第四個分析買權到期時間與買權價值的關係，如圖 4.9 所示，到期時間愈長，時間價值愈高，因此 Merton 結構式模型下的有違約風險下出局買權與下出局買權價值都隨著升高。第五個分析公司資產的波動度與買權價值的關係，如圖 4.10 所示，波動度愈高，公司資產的變化幅度愈大，因此愈容易發生違約，故 Merton 結構式模型下的有違約風險下出局買權價值就愈低；而下出局買權封閉解沒有考量交易對手風險的情況，因此公司資產波動度並不會影響買權價值。

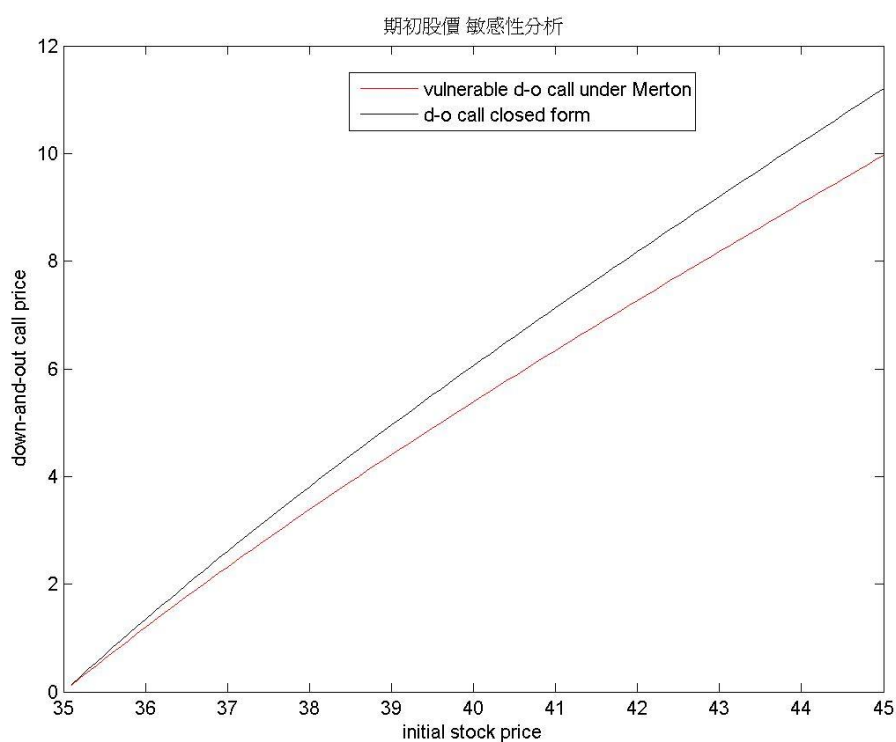


圖 4.6 股價敏感性分析 II

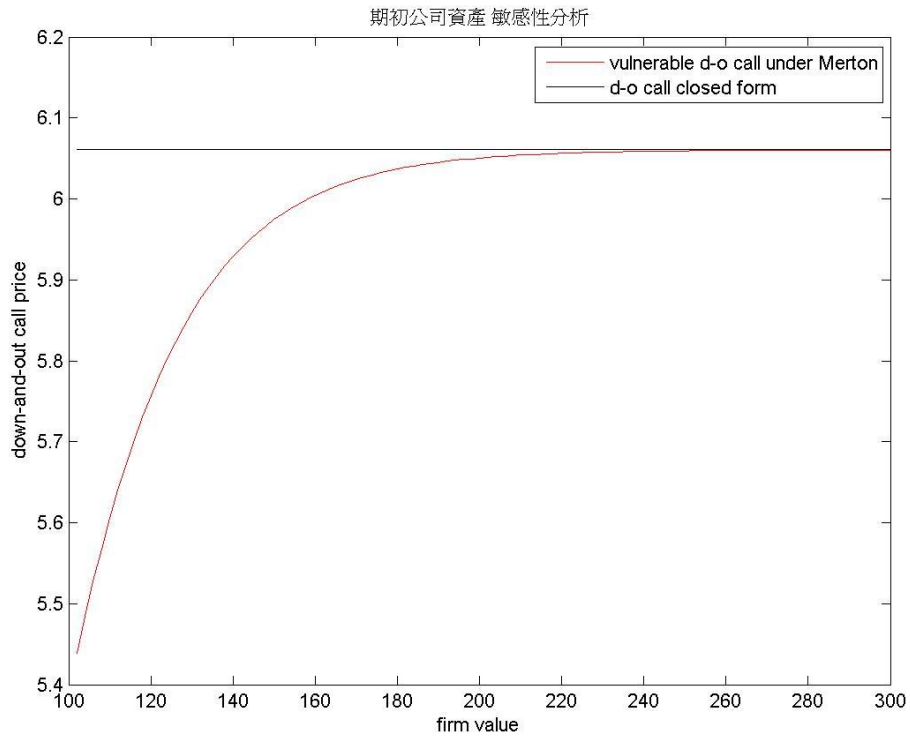


圖 4.7 公司資產敏感性分析 II

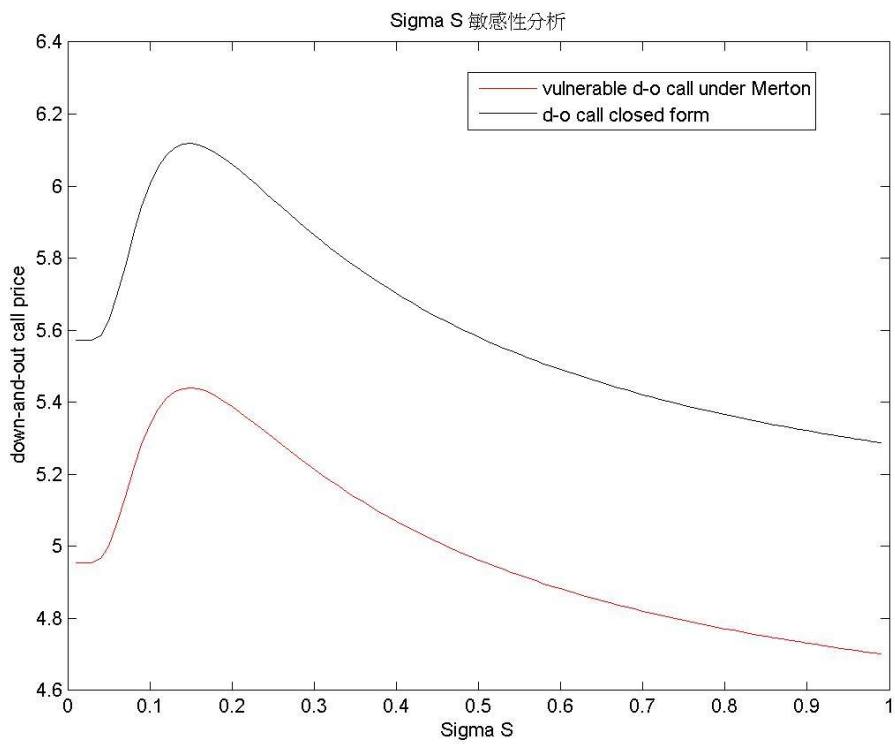


圖 4.8 股價波動度敏感性分析 II

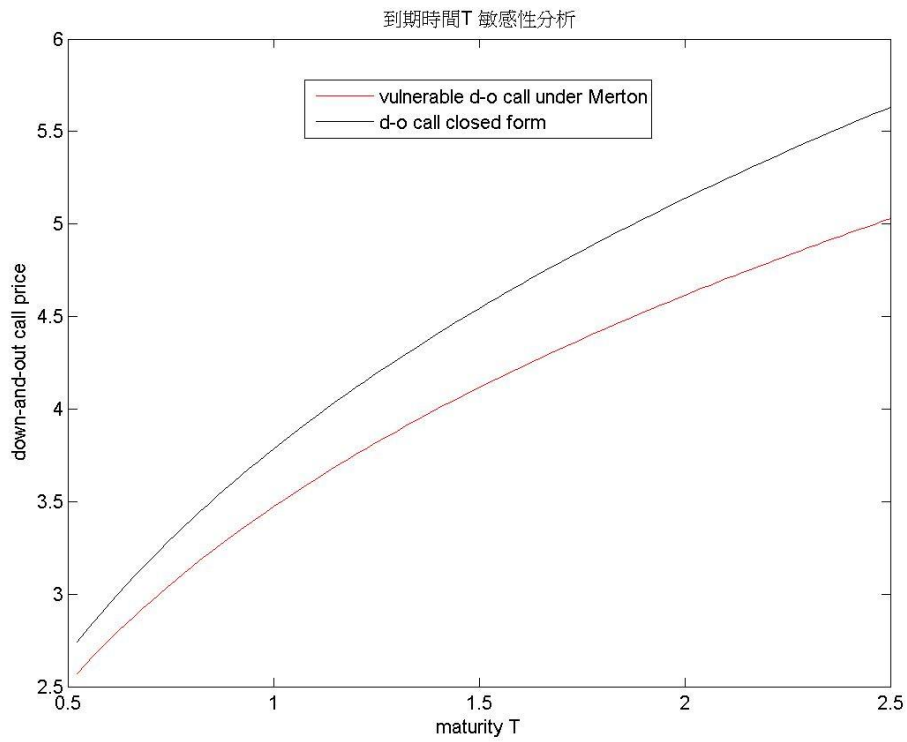


圖 4.9 到期時間敏感性分析 II

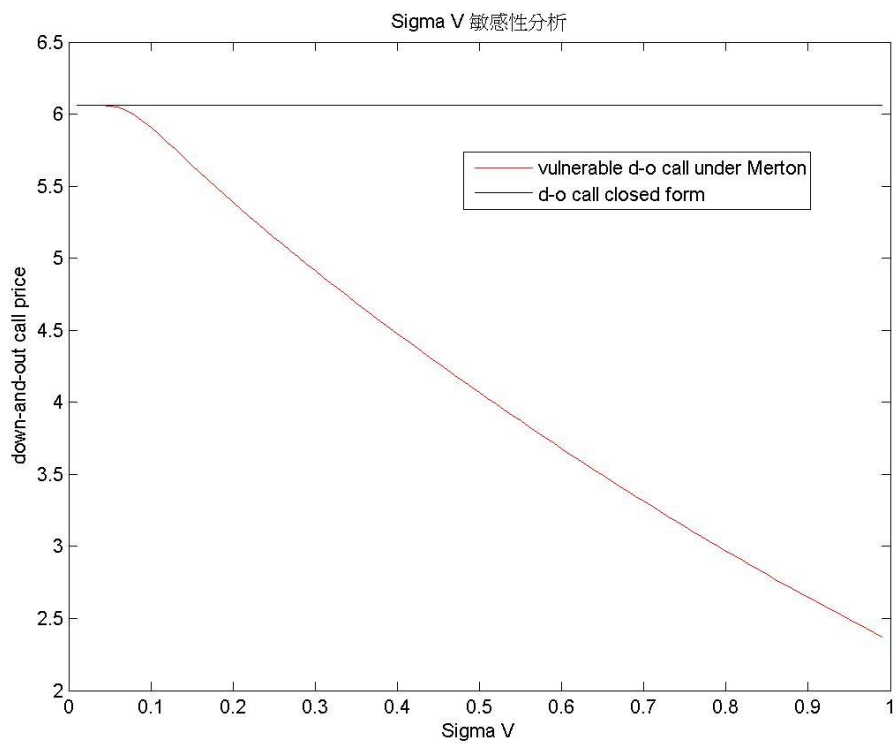


圖 4.10 公司資產波動度敏感性分析 II

第五節 敏感性分析 Reverse exchangeable bond 和 Barrier reverse convertibles

首先對首次通過模型下的有違約風險 Reverse exchangeable bond 做敏感性分析。我們以 $S(0)=40, K=40, V(0)=100, T=3, D=90, L=70, \sigma_V=0.2, \sigma_S=0.2, \rho=0, r=0.05, \gamma=0.06, \delta=0.6, F=1000, c=0.04$ 為基本設定，每一次對一個變數做敏感性度分析。第一個分析期初股價與 Reverse exchangeable bond 價值的關係，如圖 4.11 所示，首次通過模型下的有違約風險 Reverse exchangeable bond 價值隨著股價升高而升高。由於 Reverse exchangeable bond 是買債券並賣賣權的投資組合，故期初股價愈高，賣權的履約機會就愈低，而隨著期初股價的升高，Reverse exchangeable bond 會收斂到 vulnerable bond 的價值。第二個分析期初公司資產，如圖 4.12 所示，期初公司資產愈高，交易對手就不容易發生違約，因此首次通過模型下的有違約風險 Reverse exchangeable bond 也愈高，並會收斂到無違約風險的 Reverse exchangeable bond 價值。第三個分析股價波動度，如圖 4.13 所示，股價波動的幅度愈高，則首次通過模型下的有違約風險 Reverse exchangeable bond 愈低。因為股價波動度愈高，選擇權就愈容易履約，因此價值愈低。而在股價波動度接近零的時候，選擇權履約的機會也趨近於零，Reverse exchangeable bond 會收斂到 vulnerable bond 的價值。第四個分析到期時間，如圖 4.14 所示，到期時間愈長，首次通過模型下的有違約風險債券現值愈低，因此 Reverse exchangeable bond 也愈低。第五個分析公司資產的波動度，如圖 4.15 所示，波動度愈高，公司資產的變化幅度愈大，就愈容易發生違約，故首次通過模型下的有違約風險 Reverse exchangeable bond 價值就愈低。而在公司資產波動度接近零時，違約機會也就趨近於零，因此有違約風險的 Reverse exchangeable bond 會收斂到無違約風險的 Reverse exchangeable bond。

期初股價 敏感性分析

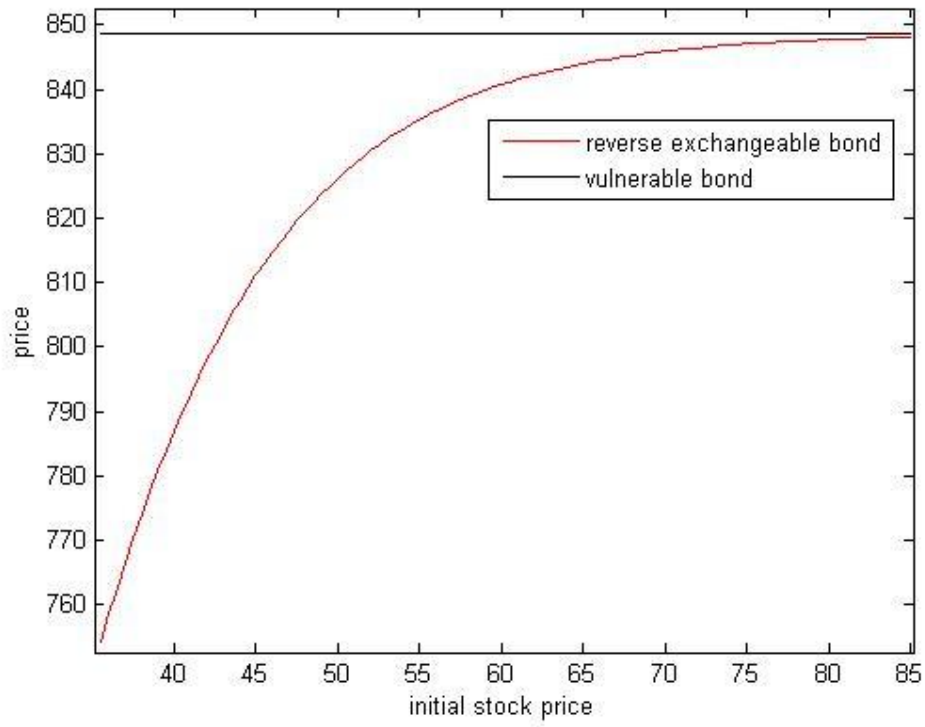


圖 4.11 股價敏感性分析 III

期初公司資產 敏感性分析

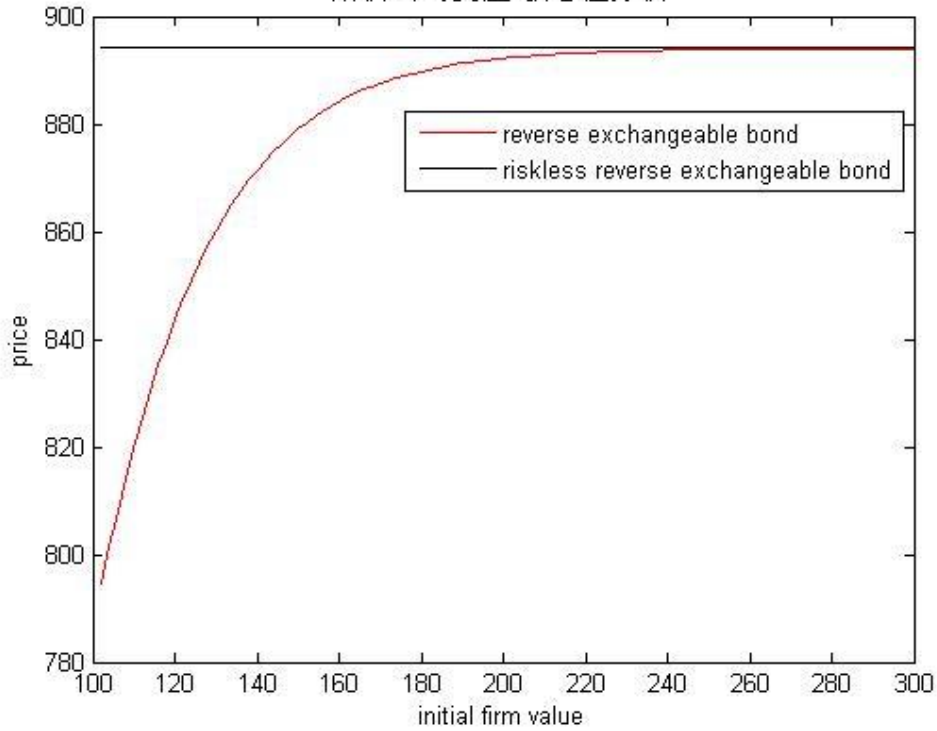


圖 4.12 公司資產敏感性分析 III

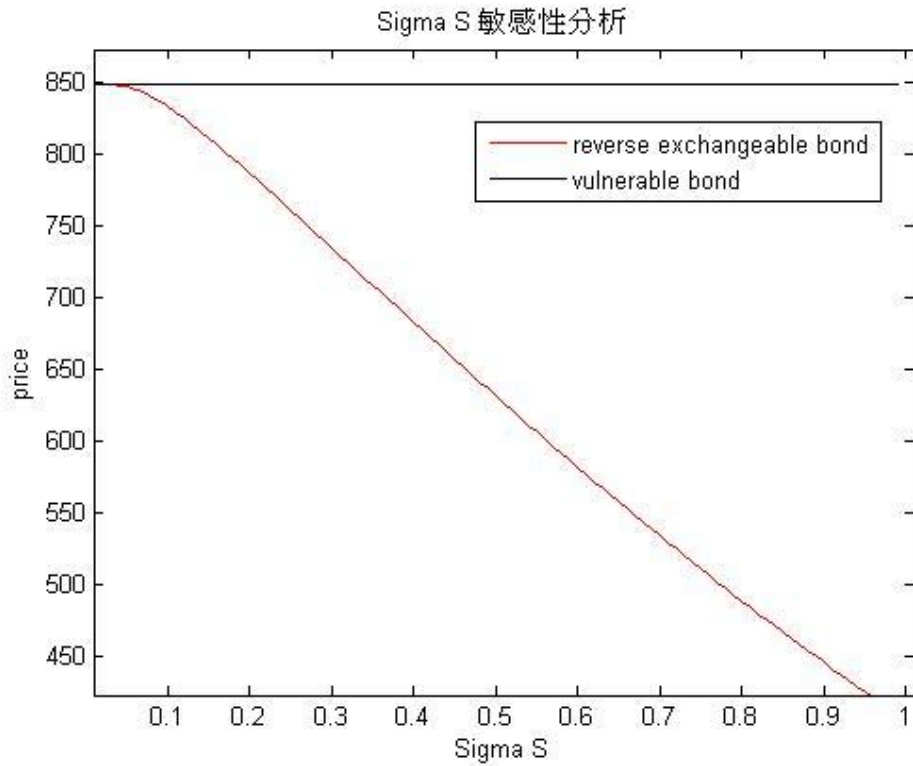


圖 4.13 股價波動度敏感性分析 III

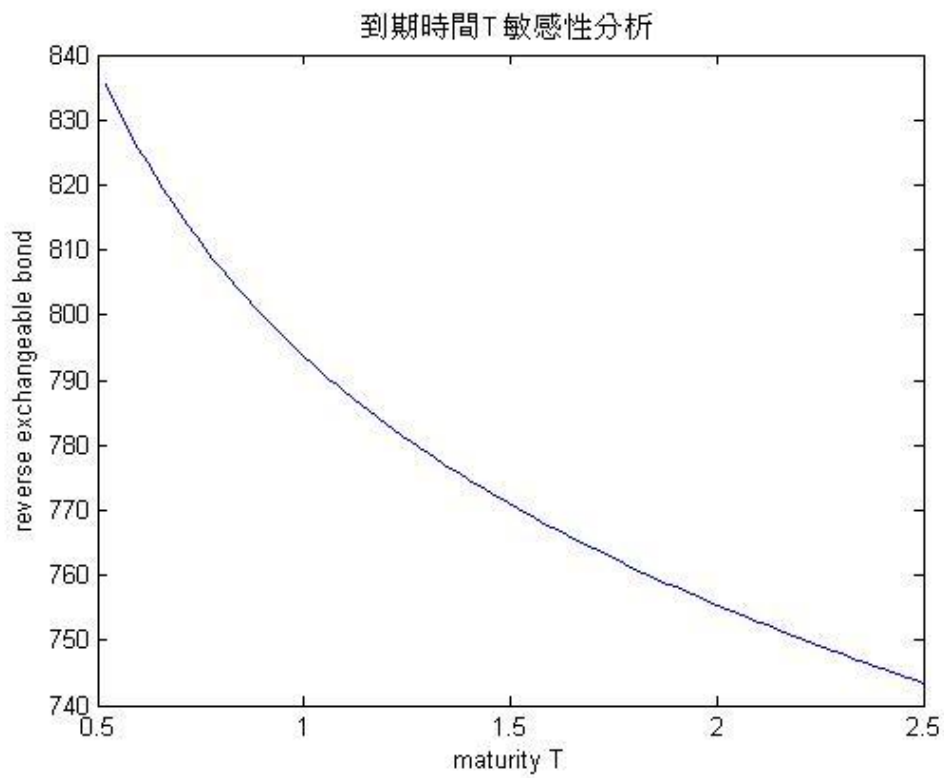


圖 4.14 到期時間敏感性分析 III

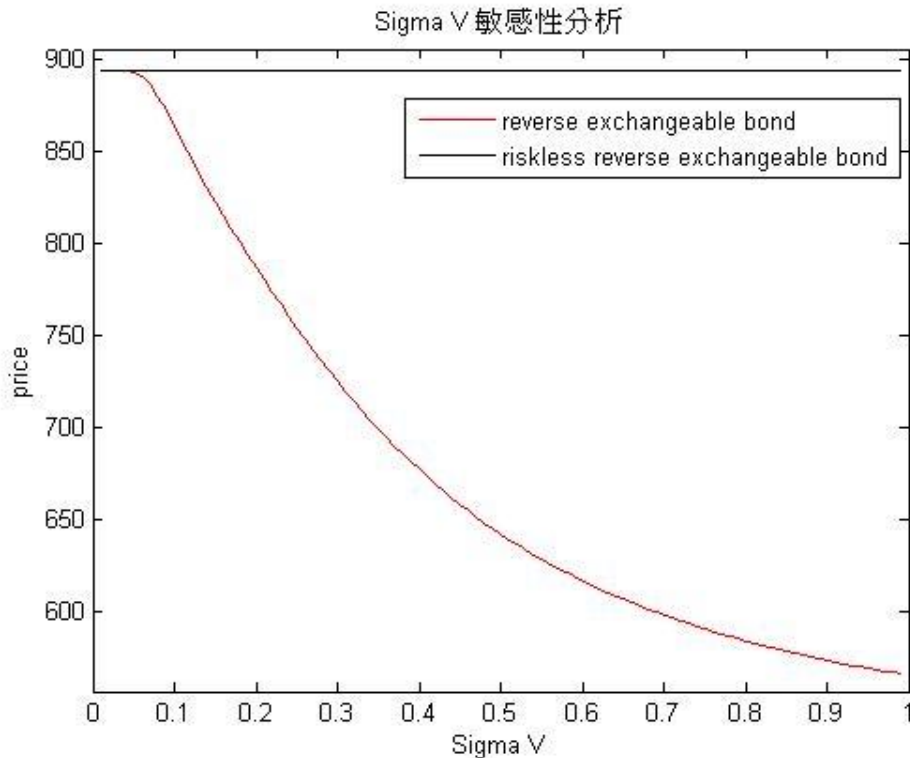


圖 4.15 公司資產波動度敏感性分析 III

接下來對 Merton 結構式模型下的有違約風險 Barrier reverse convertibles 做敏感性分析。我們以 $S(0)=40, K=40, V(0)=100, T=3, D=90, B=35, \sigma_V=0.2, \sigma_S=0.2, \rho=0, r=0.05, \gamma=0, \alpha=0.25, F=1000, c=0.04$ 為基本設定，每一次對一個變數做敏感性分析。第一個分析期初股價與 Barrier reverse convertibles 價值的關係，如圖 4.16 所示，由於 Barrier reverse convertibles 是買債券並賣下入局賣權的投資組合，故期初股價愈高，賣權的履約機會就愈低，Merton 結構式模型下的有違約風險 Barrier reverse convertibles 價值也就隨著升高，並會收斂到 vulnerable bond 的價值。第二個分析期初公司資產，如圖 4.17 所示，期初公司資產愈高，交易對手就愈不容易發生違約，因此 Merton 結構式模型下的有違約風險 Barrier reverse convertibles 也愈高，並且漸漸收斂到無違約風險的 Barrier reverse convertibles。第三個分析股價波動度，如圖 4.18 所示，股價波動的幅度愈高，選擇權就愈容易入局也容易履約，因此 Merton 結構式模型下的有違約風險 Barrier reverse convertibles 價值愈低，而在股價波動度趨近於零時，有違約風險

的 Barrier reverse convertibles 會收斂到 vulnerable bond 的價值。第四個分析到期時間，如圖 4.19 所示，到期時間愈長，Merton 結構式模型下的有違約風險債券現值就愈低，因此 Barrier reverse convertibles 也愈低。第五個分析公司資產的波動度，如圖 4.20 所示，波動度愈高，公司資產的變化幅度愈大，因此愈容易發生違約，故 Merton 結構式模型下的有違約風險 Barrier reverse convertibles 價值就愈低。而在公司資產波動度趨近於零時，有違約風險的 Barrier reverse convertibles 會收斂到無違約風險的 Barrier reverse convertibles。

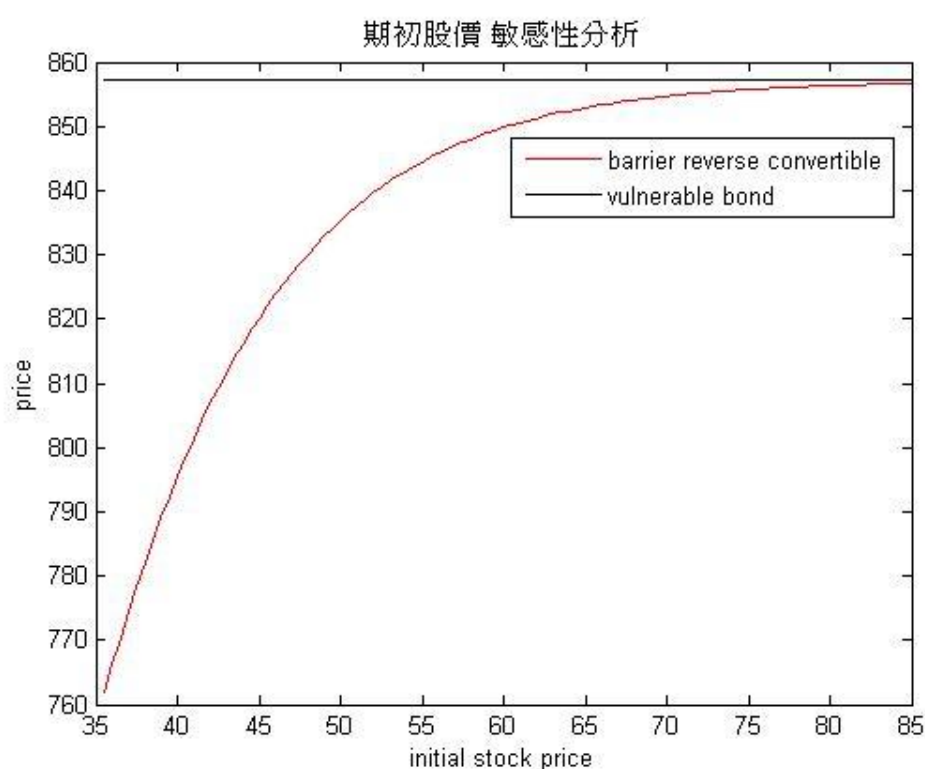


圖 4.16 股價敏感性分析 IV

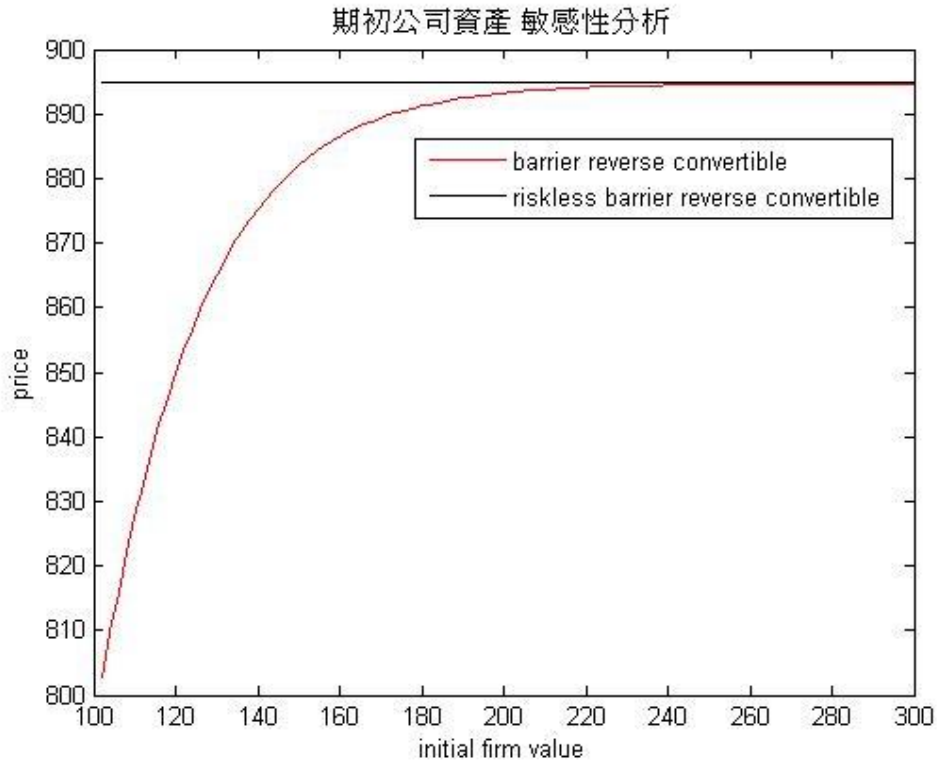


圖 4.17 公司資產敏感性分析 IV

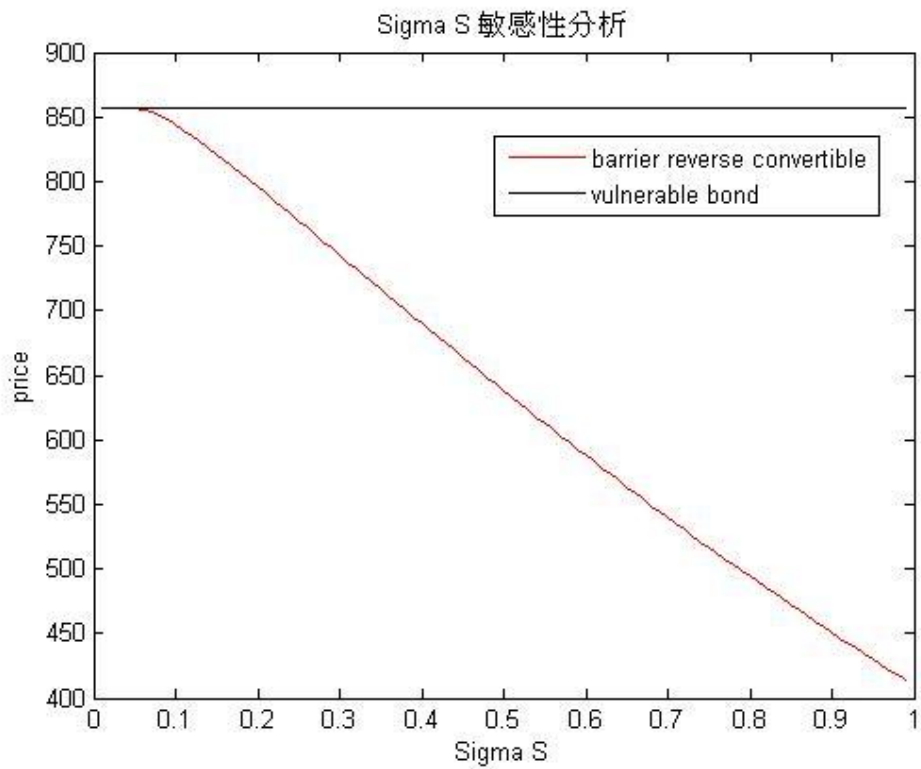


圖 4.18 股價波動度敏感性分析 IV

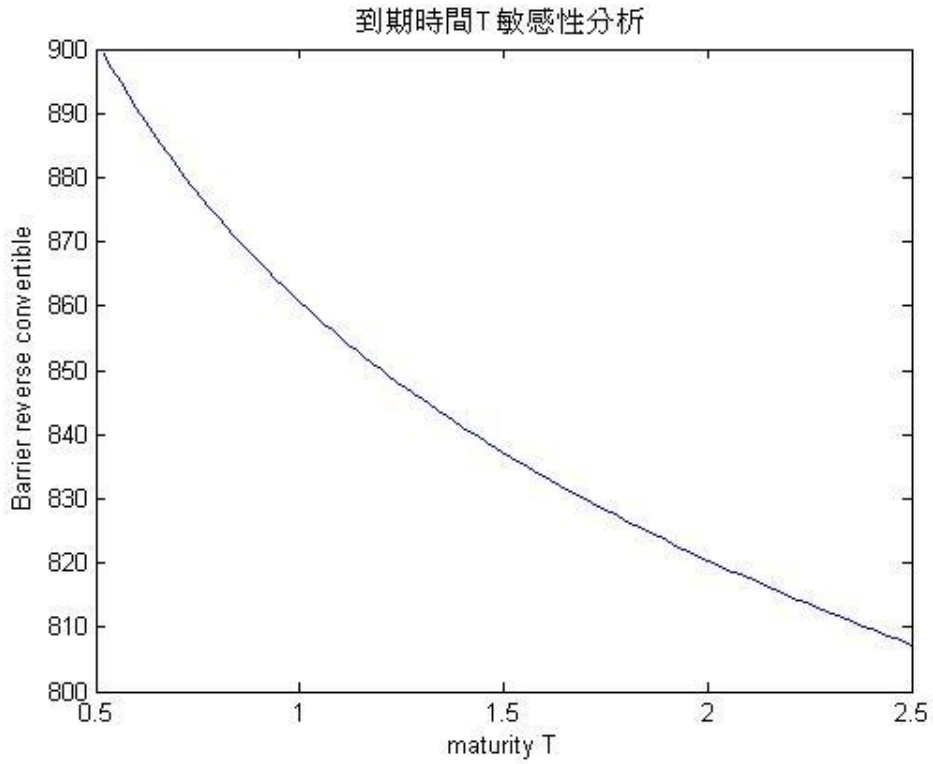


圖 4.19 到期時間敏感性分析 IV

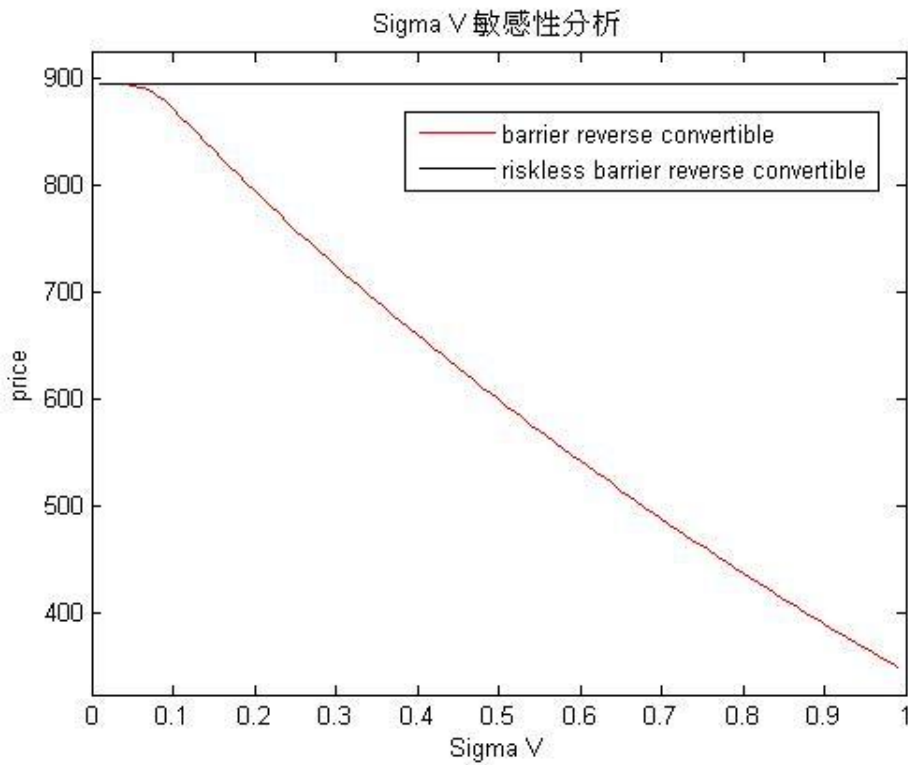


圖 4.20 公司資產波動度敏感性分析 IV

第五章 結論以及後續研究

第一節 結論

本文推導在首次通過模型下，有違約風險的選擇權評價公式。以及其對偶問題：在 Merton 結構式模型下，有違約風險的障礙選擇權評價公式。並與劉彥君(2010)提出的數值解做比較，證明我們推導的公式相當精確。最後再延伸結果至 Reverse exchangeable bond 和 Barrier reverse convertibles 的評價。

第二節 後續研究

利用本文提出的方法，可將其更深一層地運用在結構式債券上的評價。另外，亦可考量在公司發配債息的情形下，公司資產的布朗運動在配息日會產生 jump，結合 Dai and Lyuu (2007)與鄭凱允(2009)的方法，推導首次通過模型下的陽春選擇權評價公式。



參考文獻

中文文獻

- [1] 鄭凱允，“評價離散股利股票障礙選擇權”，國立交通大學，碩士論文，民國 98 年。
- [2] 劉彥君，“在首次通透模型下評價可違約障礙選擇權”，國立交通大學，碩士論文，民國 99 年。

英文文獻

1. Dai and Lyuu., 2008. **Accurate Approximation Formulas for Stock Options with Discrete Dividends** . Applied Economics Letters 16, 1657 - 1663.
2. Hull, J., **Options, Futures, and Other Derivatives** 5th. Englewood Cliffs, NJ Prentice-Hall, 2006.
3. Klein, P.C., 1996. **Pricing Black-Scholes options with correlated credit risk.** Journal of Banking and Finance 20, 1211-1229.
4. Klein, P.C., 2001. **Pricing vulnerable European options when the option's payoff can increase the risk of financial distress.** Journal of Banking and Finance 25, 993-1012.
5. Lindauer, T., and Seiz*, R., 2008. **Pricing (Multi-) Barrier Reverse Convertibles.** Working paper.
6. Rich, D., 1996. **The valuation and behavior of Black-Scholes options subject to intertemporal default risk.** Review of Derivatives Research 1, 25-59.
7. Shreve, E., **Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models,** Springer Finance, 2007.