國 立 交 通 大 學

財 務 金 融 研 究 所

碩 士 論 文

隨機利率模型下內生違約條件公司債之評價

Corporate Bond Valuation with Stochastic Interest Rates and Endogenous Bankruptcy

研 究 生： 洪敏誠

指導教授： 戴天時 博士

李漢星 博士

中 華 民 國 九 十 九 年 六 月

隨機利率模型下內生違約條件公司債之評價

Corporate Bond Valuation with Stochastic Interest Rates and Endogenous Bankruptcy

研 究 生：洪敏誠　　Student：Min-Cheng Hong

指導教授：戴天時 博士　　Advisor：Dr. Tian-Shyr Dai

李漢星 博士　　Dr. Han-Hsing Lee

國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

A Thesis Submitted to Graduate Institute of Finance
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science in
Finance

June 2010
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年六月

隨機利率模型下內生違約條件公司債之評價

Corporate Bond Valuation with Stochastic Interest Rates and Endogenous Bankruptcy

學生：洪敏誠　　　　　　　　　　　指導教授：戴天時 博士

李漢星 博士

國立交通大學財務金融研究所

中華民國九十九年六月

摘要

Acharya (2002)在內生決定最佳違約時間及贖回時間，分別分析具有違約風險的債券(defaultable bond)、可贖回債券(callable bond)等的價格與市場其他參數(如公司資產價格與利率)的關係，本文將延伸 Acharya (2002)所未分析到對債權人有保護作用的可賣回債券(putable bond)與可轉換債券(convertible bond)等公司債，再與 Acharya (2002)提出的公司債做組合討論具有違約風險的可轉換債券(defaultable -convertible bond)等，本文將這些公司債視為無風險債券(host bond)與美式選擇權的組成，並以數學推導證明公司債的特性，再以陳博宇 (2009) 所提出的三維度立體樹狀結構評價模型 DFPM-WHT 數值評價方法為基礎，驗證各種公司債的性質，進而討論對債權人保護的問題。

關鍵字： 信用風險、隨機利率、結構式模型、內生違約門檻、公司債、債權人保護。

Corporate Bond Valuation with Stochastic Interest Rates and Endogenous Bankruptcy

Student：Min-Cheng Hong　　Advisor：Dr. Tian-Shyr Dai

Dr. Han-Hsing Lee

Graduate Institute of Finance

National Chiao Tung University

June 2010

ABSTRACT

Acharya (2002) analyzes the evaluation of corporate bond with defaultable and callable features when interest rates and firm value are stochastic. This thesis analyzes the sensitivity characteristics of putable bond and convertible bonds. By combining the results of Acharya (2002), we can analyze the corporate bond with multiple features, says callable-convertible bond. We also use a numerical method DFPM–WHT, to verify the analytical properties of corporate bonds proved in this thesis. Besides, we find that the payment rule greatly influence the right of bond holders, and use our numerical model to analyze the bondholder protection problem.

KEYWORDS: Credit Risk, Stochastic Interest Rate, Structure Model, Endogenous Bankruptcy, Corporate Bond, Bondholder Protection.

誌謝

非常感謝戴天時老師，感謝戴老師帶著我們這個部隊一群人一起往前跑，當我遇到瓶頸慢慢的脫隊時，戴老師總是會回過頭來鼓勵我，讓我重拾信心繼續往前跑，當我再次遇到瓶頸脫隊時，戴老師又回過頭來鼓勵我，戴老師從不責備有耐心的指導我，讓我順利的完成碩士論文。感謝李漢星老師在我們碩一剛進交大的時候，讓我們對交大財金感到親切，不畏懼這陌生的環境。

感謝王釗茹學姐耐心的幫我解決問題，為我提供了許多研究上的建議，讓我的論文更豐富。感謝陳博宇學長讓我的論文起步非常的順利。還要感謝戴老師各位優秀的弟子，劉亮志、潘政宏、吳偲維、陳雅雯、劉彥君、蘇柏屹、劉育廷、柯婷瑱、陳竑廷、楊凱旭，陪伴我一起討論問題、一起 meeting、一起吃飯、共患難、共享樂，謝謝大家的陪伴，讓我在寫論文的過程中不孤單。

再來要感謝我的家人，感謝我的父母支持我來交大讀研究所，感謝姊姊送我人生的第一套西裝讓我有信心的來參加口試，感謝弟弟六日陪我打電動舒壓。最後還要感謝東吳大學的張老師、洪老師、林老師與陳老師幫我奠定良好的財工基礎，讓我能夠站在交大的舞台上不落人後。

洪敏誠　　謹誌

國立交通大學財務金融研究所

中華民國九十九年六月

目錄

圖目錄

表目錄

第一章　緒論

第一節 研究動機與背景

公司債是公司為了募集資金所發行的債券，而公司是否能如期的償還債務對債權人權利影響重大，此外債權人希望公司債能夠有一些對債權人自己有利的條款，但是公司也會希望公司債具有對公司本身有利的條款，例如：可贖回債券(callable bond)賦與公司在將債券贖回的權力，可轉換債券(convertible bond)賦與債權人將債權轉換成股權的權力，可賣回債券(putable bond)賦與債權人在市場利率走低時將債券賣回給公司的權力等。

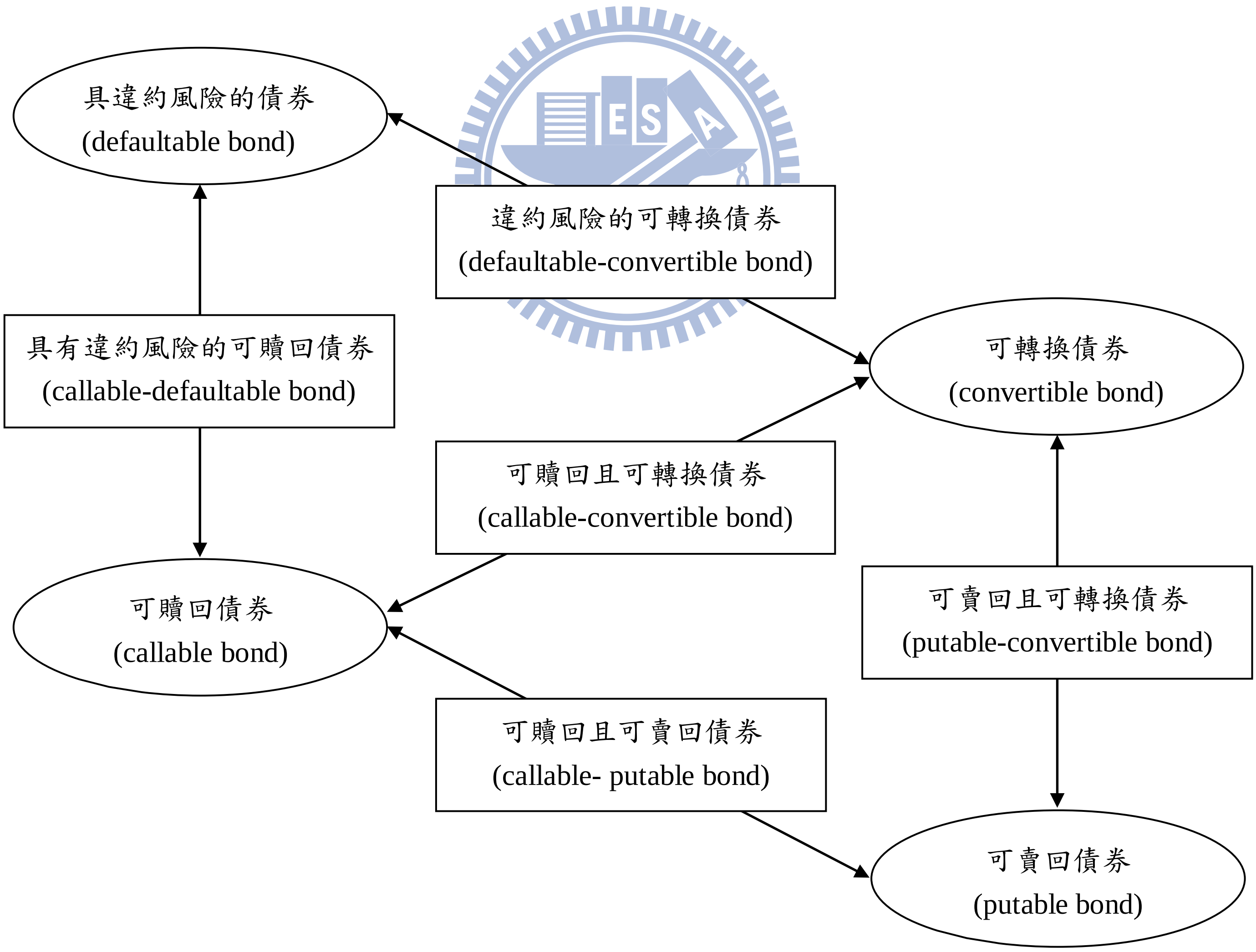
在 Acharya (2002)文章中只分析具有違約風險的債券(defaultable bond)、可贖回債券與具有違約風險的可贖回債券(callable-defaultable bond)的性質影響，並未討論到對債權人保護重要的公司債，如：可轉換債券、可賣回債券等的性質影響，這對於債權人保護是一個相當重要的課題。

第二節 研究目的

Acharya (2002)提出評價公司債以內生條件決定違約與贖回時間，Acharya (2002)將這些公司債視為無風險債券(host bond)與美式選擇權的組成，本文將延伸 Acharya 所未提到對債權人有保護作用的可賣回債券(putable bond)與可轉換債券(convertible bond)等六種公司債，以數學推導證明公司債的重要特性，再以陳博宇 (2009) 所提出加入 Hull and White (1990)隨機利率模型，解決樹狀結構總是存在的非線性誤差問題的三維度立體樹狀結構評價模型 DFPM-WHT 數值評價方法為基礎，驗證各種公司債的性質，並討論對債權人保護的問題。

第三節 研究架構

本論文架構以各種性質的公司債為主軸，以數學模型推導與討論 Acharya (2002)文章中具有違約風險的債券、可贖回債券、具有違約風險的可贖回債券的性質影響，並延伸出可轉換債券、可賣回債券、可賣回且可轉換債券(putable -convertible bond) ，再與 Acharya (2002)組合成具有違約風險的可轉換債券(defaultable -convertible bond)、可贖回且可轉換債券(callable-convertible bond)、可贖回且可賣回債券(callable- putable bond) ，最後再以 DFPM-WHT 數值評價方法，驗證各種公司債的性質對公司債價格的影響，進而討論對債權人保護的問題。



『圖 1.1』 研究架構

第二章　文獻回顧

信用風險評價模型大致可分為結構式模型(structural form model)與縮減式模型(reduced form model)。結構式模型假定公司資產服從一隨機過程，透過這個隨機過程能夠清楚地呈現在不同時間公司資產的狀況;反之縮減式模型則未模擬公司資產，是直接假定破產的隨機過程。本論文為了明確展現市場真實狀況，以結構式模型為基礎，透過數值樹狀結構模型更能合理的描述現實世界。

本論文中，第一節整理出結構式評價模型的發展演進及違約門檻(default boundary)的設定。第二節介紹離散式評價模型的展演。第三節介紹 Dai and Lyuu (2010) Bino-Trinomial Tree。

第一節 結構式評價模型

結構式評價模型其各自的違約門檻設定並不相同，又可分為外生違約門檻(Exogenous default boundaries)與內生違約門檻(Endogenous default boundaries)。

一、外生違約門檻(Exogenous default boundaries)

1. Merton (1974)：

Merton 模型是結構式模型的基礎，Merton 假設公司資產的隨機過程為

$$\frac{dV_t}{V_t} = rdt + \phi d\tilde{W}_t \quad , \tag{2.1.1}$$

其中 ϕ 為資產價值的波動率、利率 r 為常數、$\tilde{W}$ 為布朗運動。並假設公司資產是由股東權益價值(equity)與負債(debt)所組成。其中，負債為一零息債券，到期日為 T，面額為 F。將股東權益價值視為一歐式買權，其中，標的資產為公司資產，執行價為債券面額，透過 Black and Scholes (1973)選擇權定價理論評價出股東權

益價值，進而求出零息債券的價值。但是，Merton 模型只考慮負債在到期日時是否發生違約，而忽略了公司在到期日前就發生違約的情況。此缺點在 Black and Cox(1976)提出的首次通過模型(First passage models)獲得解決。

2. Black and Cox (1976)：

解決 Merton 未考慮公司在到期日前就發生違約的情況。Black and Cox 將違約條件設定成，當在到期日時，公司資產不足以償還債券面額而發生違約；到期日前，公司資產低於債券面額的現值而發生違約。定義違約門檻為 $e^{-r(T-t)}F$ 。但是，利率是常數的假設無法真正地描述市場利率期限結構，後續學者紛紛提出修正。

3. Kim, Ramaswamy and Sundaresan (1993)：

引用 Cox, Ingersoll, and Ross (1985) 隨機利率模型，如下：

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,d\tilde{Z}_t \quad , \tag{2.1.2}$$

其中 a 為均數復迴歸率、b 為長期利率平均、σ 為利率的波動度，$\tilde{Z}$ 為布朗運動。而資產價值隨機過程為

$$\frac{dV_t}{V_t} = (r_t - \kappa)dt + \phi d\tilde{W}_t \quad , \tag{2.1.3}$$

其中 ϕ 為資產價值的波動率、κ 為支付比率，$\tilde{W}$ 為布朗運動且 $d\langle \tilde{W}, \tilde{Z} \rangle_t = \rho_t dt$ 。此模型違約情況發生在到期日無法償還債權人本金 F 與到期日前支出金額無法償還債權人債息($\kappa V_t < c$)。違約門檻設定如下

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{\kappa} \ , \ if \ t < T \\ F \ , \ if \ t = T \end{cases} \quad , \tag{2.1.4}$$

其中 c 為債息。

4. Longstaff and Schwartz (1995)：

假設資產價值與短期利率彼此之間不獨立，其短期利率是以 Vasicek (1977) 利率期限結構表示

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma d\tilde{Z}_t \quad , \tag{2.1.5}$$

其中 a 為均數復迴歸率、b 為長期利率平均、σ 為利率的波動度，$\tilde{Z}$ 為布朗運動。資產價值隨機過程為

$$\frac{dV_t}{V_t} = r_t dt + \phi d\tilde{W}_t \quad , \tag{2.1.6}$$

其中 ϕ 為資產價值的波動率，$\tilde{W}$ 為布朗運動且 $d\langle \tilde{W}, \tilde{Z} \rangle_t = \rho_t dt$ 。

此模型違約門檻設定為一常數 K，違約情況發生在資產太低，低於門檻 $(V_t < K)$時發生違約。但是文獻設定有不合理之處，外生門檻的常數假設使企業無法做出最佳繼續營運或倒閉的決策。而文獻所假定的利率模型為 Vasicek (1977) 是一個均衡模型 (Equilibrium Models)，是由均衡市場下的利率模型，無法描述市場上真實利率期限結構，後續 Briys and Varenne (1997)提出了改進方法。

5. Briys and Varenne (1997)：

利率期限結構以 Hull and White (1990)模型來描述利率的變動，其隨機過程為

$$dr_t = a_t(b_t - r_t)dt + \sigma_t d\tilde{Z}_t \quad , \tag{2.1.7}$$

其中 a 為均數復迴歸率、b 為長期利率平均、σ 為利率的波動度、$\tilde{Z}$ 為布朗運動。違約門檻 $\tilde{V}_t = \zeta\, FB(t,T)$，$\zeta$ 指對債權人保護的程度，$0 \le \zeta \le 1$，ζ 小公司不易破產，當公司資產觸碰到門檻破產時，公司資產已經所剩無幾；反之 ζ 大公司易破產，當公司資產不夠大時，公司宣告破產時仍有足夠的資金償還有優先求償權的債權人。因此 ζ 愈大對債權人保護程度愈大。$B(t,T)$ 指在時間 T 的 1 元在時間 t 的

價值，即單位零息債券價值。F 為債券面額。

償還公司債可分成下列三種情況：第一，在到期日前公司資產低於違約門檻，則發生違約，而債券價值為公司資產乘上到期日前公司發生違約的回收率 f_1，$f_1 \cdot V_\tau = f_1 \cdot \zeta\, FB(\tau,T)$。第二，在到期日公司資產不足以償還本金，則發生違約，債券價值為公司資產乘上到期日時公司發生違約的回收率 f_2，$f_2 \cdot V_T$。第三，債券沒有違約，債券在到期日時的價值為面額 F。並定義違約時間為
$\tau = \inf_{0\le\tau\le T}\left\{t \ge 0 : V_t = \tilde{V}_t\right\}$。

綜合上述假定，有違約風險的零息債券在 T 的價值為

$$D_T = f_1 \cdot \zeta\, F \cdot 1_{\{\tau<T\}} + f_2 \cdot V_T \cdot 1_{\{\tau=T, V_T<F\}} + F \cdot 1_{\{\tau=T, V_T\ge F\}} \quad , \qquad (2.1.8)$$

所以，有違約風險的零息債券的現值可寫成

$$D_0 = E[e^{-\int_0^T r_s ds}\{f_1 \cdot \zeta\, F \cdot 1_{\{\tau<T\}} + f_2 \cdot V(T) \cdot 1_{\{\tau=T, V_T<F\}} + F \cdot 1_{\{\tau=T, V_T\ge F\}}\}] \quad , (2.1.9)$$

因此，透過上述求得有違約風險的息債券價值的現值的封閉解為

$$D_0 = LB(0,T)\cdot[1 - B_E(l_0,1) + B_E(q_0,\frac{l_0}{q_0}) - (1-f_1)l_0(N(-d_3) + \frac{N(-d_4)}{q_0})$$
$$-(1-f_2)l_0(N(d_3) - N(d_1) + \frac{N(d_4)-N(d_6)}{q_0})] \quad , \qquad (2.1.10)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln l_0 + \Sigma(T)/2}{\sqrt{\Sigma(T)}} = d_2 + \sqrt{\Sigma(T)} \quad , \quad d_3 = \frac{\ln q_0 + \Sigma(T)/2}{\sqrt{\Sigma(T)}} = d_4 + \sqrt{\Sigma(T)}$$

$$d_5 = \frac{\ln(q_0^2/l_0) + \Sigma(T)/2}{\sqrt{\Sigma(T)}} = d_6 + \sqrt{\Sigma(T)} \quad , \Sigma(T) = \int_0^T [(\rho\sigma + \sigma_B(t,T))^2 + (1-\rho^2)\sigma^2]dt$$

$$l_0 = \frac{V(0)}{FB(0,T)} \quad , \quad q_0 = \frac{V(0)}{\xi FB(0,T)} \quad , B_E(l_0,1) = -l_0 N(-d_1) + N(-d_2)$$

$$B_E(q_0,\frac{l_0}{q_0}) = -q_0 N(-d_5) + \frac{l_0}{q_0}N(-d_6) \quad , \quad \sigma_B(t,T) = \eta(t)\cdot\int_t^T \exp(-\int_t^u a(s)ds)du \; ,$$

$N(\cdot)$ 為標準常態累積分配函數。

二、內生違約門檻(Endogenous default boundaries)

1. Leland(1994)：

Leland（1994）導出的永續債券的封閉解，假設公司資產價值V隨機過程為

$$\frac{dV_t}{V_t}=r_t dt+\phi d\tilde{W}_t \quad , \tag{2.1.11}$$

公司宣告破產時資產的價值為V_B，模型中考慮破產成本αV_B，以及公司營業所得稅率τ，債息C，導出公司債的價值函數$D(V)=\frac{C}{r}+[(1-\alpha)V_B-\frac{C}{r}](\frac{V}{V_B})^{-2r/\phi^2}$，破產成本的價值函數$B(V)=\alpha V_B(\frac{V}{V_B})^{-2r/\phi^2}$，稅盾的價值函數為$T(V)=\frac{\tau C}{r}[1-(\frac{V}{V_B})^{-2r/\phi^2}]$，公司總資產的價值函數$W(T)=V+T(V)-B(V)$為無負債公司的價值加上稅盾的價值減去破產成本，股東權益的價值函數$E(V)=W(V)-D(V)$為總資產價值減去公司債的價值。

2. Acharya (2002)：

假設投資人可以在市場完備(complete)且無套利(arbitrage-free)的金融市場(financial market)中連續地交易(trade continuously)。Acharya 將利率表示為一非負(nonnegative)的隨機過程

$$dr_t=\mu(r_t,t)dt+\sigma(r_t,t)d\tilde{Z}_t \quad , \tag{2.1.12}$$

其中μ與σ為連續且滿足 Lipschitz 與 linear growth condition

$$|\mu(x,t)-\mu(y,t)|+|\sigma(x,t)-\sigma(y,t)|\le L|x-y|, \tag{2.1.13}$$

$$|\mu(x,t)|+|\sigma(x,t)|\le L(1+|x|) \quad , \tag{2.1.14}$$

其中L為常數，對任意$x,y,t\in R^+$皆成立。

假設公司只發行一張債券，面額 1 元，這張債券到期日為T且以一固定票面利率(coupon rate)c連續支付，假設沒有其他損失(loss of generality)、沒有稅盾效

果(tax benefit)、也沒有破產成本(bankruptcy cost)，因此假設公司價值(firm value)等於公司資產(Firm asset)，其隨機過程為

$$\frac{dV_t}{V_t} = (r_t - \gamma_t)dt + \phi_t d\widetilde{W}_t \quad , \tag{2.1.15}$$

其中 $\widetilde{W}_t$ 在 $\widetilde{P}$ 機率測度下服從布朗運動、支付比率(payout ratio) $\gamma_t \geq 0$、波動度 $\phi_t > 0$、$d\langle \widetilde{W}, \widetilde{Z} \rangle_t = \rho_t dt$，而支付比率是變賣資產的比率，變賣資產所得到的這些現金流用來支付債息，若變賣資產所得到的這些現金流不足以支付債息，企業將面臨一項重大決策問題，當股東決策不願削弱自己的股權做增資，將使企業無法償債而被迫違約；反之股東決策做增資清償債息使企業繼續經營。由此可知決策者在於股東，對債權人較為不利。

Acharya (2002)研究了三種公司債，可贖回債券(callable bond)、具有違約風險的債券(defaultable bond)與具有違約風險的可贖回債券(callable-defaultable bond)，此三種公司債都有共通的性質就是企業是否違約與債券是否要贖回的決策都是以股東的角度做決策。Acharya 將此三種公司債的價值表示成一個無風險債券(host bond)的價值減去一個選擇權(option)的價值，其執行價格(exercise price)分別為贖回價格(call price)、公司價值、贖回價格和公司資產中較小者。這個選擇權是一個具有美式性質選擇權(American option)，將存在一個最佳的執行策略(exercise policy)，使得選擇權價值(option value)極大。

定義折現因子(discount factor)為

$$\beta_{t,\tau} \equiv e^{-\int_t^\tau r_s ds} \quad , \tag{2.1.16}$$

無風險債券價格(host bond price)為

$$P_t = \widetilde{E}\left[c\int_t^T \beta_{t,s} ds + 1 \cdot \beta_{t,T} \middle| F_s \right] \quad , \tag{2.1.17}$$

為未來連續債息(continuous coupon)與單位本金(face value)的現值， c 為債息率(coupon rate)。

在時間點t時無風險債券價格為p，公司資產為v，則定義選擇權價值為

$$f(p,v,t) \equiv \sup_{t \le \tau \le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - \kappa(V_\tau,\tau))^+ \middle| F_t\right] \quad , \tag{2.1.18}$$

其中$\tilde{E}[\cdot]$為風險中立機率測度$\tilde{P}$下的期望值，執行價格為

$$\kappa(v,t) = k_t, v, or\ k_t \wedge v \quad , \tag{2.1.19}$$

分別是贖回價格k_t、公司資產價值v、贖回價格和公司資產小者$k_t \wedge v$，執行價格視不同公司債而定。且定義$f: R^+ \times R^+ \times [0,T] \to R$是一個連續的函數，滿足

$$f(p,v,t) \ge (p - \kappa(v,t))^+ \quad , \tag{2.1.20}$$

此外，該美式選擇權若最佳執行條件成立則會執行，所以最佳執行時間(optimal stopping time)定義為

$$\tau = \inf\left\{t \ge 0 : f(P_t, V_t, t) = (P_t - \kappa(V_t,t))^+\right\} \quad , \tag{2.1.21}$$

因此，將上述三種公司債價格表示成

$$p_X(p,v,t) = p - f_X(p,v,t), \tag{2.1.22}$$

其中當X為C則表示可贖回債券，當X為D則表示具有違約風險的債券，當X為CD則表示具有違約風險的可贖回債券。

Acharya (2002)用下列定理描述上述公司債的性質，並假定有兩個狀態，state 1 與 state 2，分別用上標(1)和(2)表示，其中 state 1 的初始利率較 state 2 的初始利低，即$r_0^{(1)} \le r_0^{(2)}$。

Acharya (2002)重要證明結果簡述如下：

Lemma 1. $r_0^{(1)} \le r_0^{(2)} \Rightarrow \tilde{E}\left[\beta_{0,t}^{(2)} P_t^{(2)} - \beta_{0,t}^{(1)} P_t^{(1)}\right] \ge p^{(2)} - p^{(1)}$

證明：

令$P_0^{(1)} = p^{(1)}$，即 state 1 中在時間$t = 0$時的無風險債券價值為$p^{(1)}$，令$P_0^{(2)} = p^{(2)}$，即 state 2 中在時間$t = 0$時的無風險債券價值為$p^{(2)}$。

定義新隨機變數

$$\beta_{0,t}P_t^* \equiv \tilde{E}\left[c\int_0^T \beta_{0,s}ds + 1\cdot\beta_{0,T} \middle| F_t\right], \forall\, 0 \le t \le T \quad , \tag{2.1.23}$$

且無風險債券在時間t價值P_t 的現值為

$$\beta_{0,t}P_t \equiv \tilde{E}\left[c\int_t^T \beta_{0,s}ds + 1\cdot\beta_{0,T} \middle| F_t\right] \quad , \tag{2.1.24}$$

以上兩式差了從時間 0 到時間t連續債息的現值，因此得到以下關係式

$$\beta_{0,t}P_t^* \equiv \beta_{0,t}P_t + c\int_0^t \beta_{0,s}ds \quad 。 \tag{2.1.25}$$

將上式移項，左右兩式同時減去P_0並且同時取風險中立機率測度之下的期望值

$$\beta_{0,t}P_t - P_0 = \beta_{0,t}P_t^* - c\int_0^t \beta_{0,s}ds - P_0 \tag{2.1.26}$$

將(2.1.26)左右同時取期望值，再根據(2.1.17)得到

$$\tilde{E}[\beta_{0,t}P_t] - P_0 = -\tilde{E}[c\int_0^t \beta_{0,s}ds] \quad , \tag{2.1.27}$$

由於$r_0^{(1)} \le r_0^{(2)} \Rightarrow \beta_{0,t}^{(1)} \ge \beta_{0,t}^{(2)}$，因此

$$\tilde{E}[c\int_0^t \beta_{0,s}^{(1)}ds] \ge \tilde{E}[c\int_0^t \beta_{0,s}^{(2)}ds] \quad , \tag{2.1.28}$$

所以由(2.1.27)得知

$$p^{(1)} - \tilde{E}[\beta_{0,t}^{(1)}P_t^{(1)}] \ge p^{(2)} - \tilde{E}[\beta_{0,t}^{(2)}P_t^{(2)}] \quad , \tag{2.1.29}$$

將上式移項得到

$$\tilde{E}\left[\beta_{0,t}^{(2)}P_t^{(2)} - \beta_{0,t}^{(1)}P_t^{(1)}\right] \ge p^{(2)} - p^{(1)} \quad , \tag{2.1.30}$$

故得證。

這三種公司債所包含的選擇權滿足以下幾個定理：

Theorem 1. $p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow f(p^{(1)},v,t) > f(p^{(2)},v,t)$ 。

證明：

令 $p^{(1)}$、$p^{(2)}$ 分別是 state 1 與 state 2 兩種狀態的無風險債券在時間 t 時價值，在時間 t 滿足 $p^{(1)} > p^{(2)}$，且利率 $r^{(1)} < r^{(2)}$。令 τ 是 state 2 的最佳停止時間，$V_t = v$，這兩個 state 的選擇權價值差為

$$f(p^{(1)},v,t) - f(p^{(2)},v,t)$$

$$\geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(P_\tau^{(1)} - \kappa(V_\tau^{(1)},\tau))^+ \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(P_\tau^{(2)} - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau))^+ \middle| F_t\right] > 0 \quad (2.1.31)$$

(2.1.31)因為 $r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow \beta_{t,\tau}^{(1)} > \beta_{t,\tau}^{(2)}$ 且 $P_\tau^{(1)} \geq P_\tau^{(2)}$ ，並由(2.1.15)解微分方程可得

$$V_t = V_0 e^{\int_0^t r_s\,ds - \int_0^t \gamma_s\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2\,ds + \int_0^t \phi_s\,d\tilde{W}_s} \quad , \qquad (2.1.32)$$

且由於 $r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$ 意味著 $\kappa(V_\tau^{(1)},\tau) \leq \kappa(V_\tau^{(2)},\tau)$ 。

Theorem 2. $\quad p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow \dfrac{f(p^{(2)},v,t) - f(p^{(1)},v,t)}{p^{(2)} - p^{(1)}} \leq 1$。

證明：

令在時間 t 時 state 1 與 state 2 的無風險債券價格 $p^{(1)} > p^{(2)}$，且利率 $r^{(1)} < r^{(2)}$ ，然而我們想要證明 $f(p^{(2)},v,t) - f(p^{(1)},v,t) \geq p^{(2)} - p^{(1)}$ 。令 τ 是 state 1 的最佳停止時間，$V_t = v$ ，則

$$f(p^{(2)},v,t) - f(p^{(1)},v,t)$$

$$\geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(P_t^{(2)} - \kappa(V_t^{(2)},\tau))^+ \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(P_\tau^{(1)} - \kappa(V_\tau^{(1)},\tau))^+ \middle| F_t\right] \qquad (2.1.33)$$

$$= \tilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(2)}(P_\tau^{(2)} - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau))^+ - \beta_{t,\tau}^{(1)}(P_\tau^{(1)} - \kappa(V_\tau^{(1)},\tau))]\cdot 1_{\{P_\tau^{(1)} > \kappa(V_\tau^{(1)},\tau)\}} | F_t] \qquad (2.1.34)$$

$$\geq \tilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(2)}(P_\tau^{(2)} - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau)) - \beta_{t,\tau}^{(1)}(P_\tau^{(1)} - \kappa(V_\tau^{(1)},\tau))]\cdot 1_{\{P_\tau^{(1)} > \kappa(V_\tau^{(1)},\tau)\}} | F_t]$$

$$= \tilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)}]\cdot 1_{\{P_\tau^{(1)} > \kappa(V_\tau^{(1)},\tau)\}} | F_t]$$

$$+\widetilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(1)}\kappa(V_\tau^{(1)},\tau)-\beta_{t,\tau}^{(2)}\kappa(V_\tau^{(2)},\tau)]\cdot 1_{\{P_\tau^{(1)}>\kappa(V_\tau^{(1)},\tau)\}}|F_t] \tag{2.1.35}$$

$$\geq \widetilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(2)}P_\tau^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_\tau^{(1)}]\cdot 1_{\{P_\tau^{(1)}>\kappa(V_\tau^{(1)},\tau)\}}|F_t] \tag{2.1.36}$$

$$\geq \widetilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}P_\tau^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_\tau^{(1)}|F_t\right] \tag{2.1.37}$$

$$\geq p^{(2)}-p^{(1)} \tag{2.1.38}$$

在(2.1.33)中，因為$r^{(1)}<r^{(2)}\Rightarrow P_\tau^{(1)}>P_\tau^{(2)}$、$\beta_{t,\tau}^{(1)}>\beta_{t,\tau}^{(2)}$且根據(2.1.32)得知$V_\tau^{(1)}<V_\tau^{(2)}$意味著$\kappa(V_\tau^{(1)},\tau)\leq\kappa(V_\tau^{(2)},\tau)$，如果$P_\tau^{(1)}\leq\kappa(V_\tau^{(1)},\tau)$，則$P_\tau^{(2)}<P_\tau^{(1)}\leq\kappa(V_\tau^{(1)},\tau)<\kappa(V_\tau^{(2)},\tau)$，所以$P_\tau^{(2)}\leq\kappa(V_\tau^{(2)},\tau)$，因此得到(2.1.34)。在(2.1.35)中，由於$\kappa(v,t)=k_t, v, or\ k_t\wedge v$，且根據(2.1.16)、(2.1.32)，所以$\beta_{t,\tau}^{(1)}\kappa(V_\tau^{(1)},\tau)\geq\beta_{t,\tau}^{(2)}\kappa(V_\tau^{(2)},\tau)$，因此

$\widetilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(1)}\kappa(V_\tau^{(1)},\tau)-\beta_{t,\tau}^{(2)}\kappa(V_\tau^{(2)},\tau)]\cdot 1_{\{P_\tau^{(1)}>\kappa(V_\tau^{(1)},\tau)\}}|F_t]\geq 0$，得到(2.1.36)。因為$\beta_{t,\tau}^{(2)}P_\tau^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_\tau^{(1)}<0$ 所以得到(2.1.37)，再根據 Lemma 1，得證(2.1.38)。

Theorem 3. 給定$P_t=p, V_t=v$，存在債券臨界價格(critical bond price)，$b_X(v,t)>\kappa(v,t)$，使得最佳執行選擇權條件等價於$p\geq b_X(v,t)$，$X=D,C,CD$。

證明：

令$p^{(1)}=p_1$最佳決策是不履約，我們想要證明當$p^{(2)}=p_2$時的最佳決策也是不履約。根據 Theorem 2.移項得到

$$f(p_2,v,t)\geq f(p_1,v,t)+p_2-p_1>(p_1-\kappa(v,t))^+ + p_2-p_1>p_2-\kappa(v,t)$$

因為$f(p_2,v,t)>0$，所以

$$f(p_2,v,t)>(p_2-\kappa(v,t))^+$$

令集合

$$U \equiv \{(p,v,t) \in R^{+} \times R^{+} \times [0,T] : f(p,v,t) > (p-\kappa(v,t))^{+}\} \qquad (2.1.39)$$

代表選擇權不立刻執行的區間。令$b_X(v,t)$是 p 的最大值，使得$(b_X(v,t),v,t) \notin U$，因為U是開區間，所以 $f(b_X(v,t),v,t) = b_X(v,t) - \kappa(v,t) > 0$，因此

$b_X(v,t) > \kappa(v,t)$。

Theorem 4. $v^{(1)} < v^{(2)} \Rightarrow f(p,v^{(1)},t) \geq f(p,v^{(2)},t)$

證明：

考慮$\kappa(V_t,t) = V_t$ 與$\kappa(V_t,t) = V_t \wedge k_t$的情況，因為$\kappa(V_t,t) = k_t$與資產無關，故不討論。令$v^{(1)}$、$v^{(2)}$分別是 state 1 與 state 2 兩種狀態在時間t時資產價值，且滿足$v^{(1)} < v^{(2)}$，根據(2.1.32)可知$V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$。令 τ 是 state 2 的最佳停止時間，這兩個 state 的選擇權價值差為

$$f(p,v^{(1)},t) - f(p,v^{(2)},t) \geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - \kappa(V_\tau^{(1)},\tau))^{+} \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau))^{+} \middle| F_t\right] \geq 0$$

其中在$\kappa(V_t,t) = V_t, V_t \wedge k_t$的例子下，所以$\kappa(V_\tau^{(1)},t) \leq \kappa(V_\tau^{(2)},t)$。

Theorem 5. $v^{(1)} \neq v^{(2)} \Rightarrow \dfrac{f(p,v^{(2)},t) - f(p,v^{(1)},t)}{v^{(2)} - v^{(1)}} \geq -1$

證明：

令$v^{(1)}$、$v^{(2)}$分別是 state 1 與 state 2 兩種狀態在時間t時資產價值，且滿足$v^{(1)} < v^{(2)}$，根據(2.1.32)可知$V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$。令 τ 是 state 1 的最佳停止時間，然而我們要證明 $f(p,v^{(2)},t) - f(p,v^{(1)},t) \geq v^{(1)} - v^{(2)}$，因此這兩個 state 的選擇權價值差為

$$f(p,v^{(2)},t) - f(p,v^{(1)},t) \qquad (2.1.40)$$

$$\geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau))^+ \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - \kappa(V_\tau^{(1)},\tau))^+ \middle| F_t\right] \tag{2.1.41}$$

$$= \tilde{E}[(\beta_{t,\tau}(P_\tau - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau))^+ - \beta_{t,\tau}(P_\tau - \kappa(V_\tau^{(1)},\tau)))\cdot 1_{\{P_\tau > \kappa(V_\tau^{(1)},\tau)\}} | F_t] \tag{2.1.42}$$

$$\geq \tilde{E}[(\beta_{t,\tau}(P_\tau - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau)) - \beta_{t,\tau}(P_\tau - \kappa(V_\tau^{(1)},\tau)))\cdot 1_{\{P_\tau > \kappa(V_\tau^{(1)},\tau)\}} | F_t]$$

$$= \tilde{E}[\beta_{t,\tau}(\kappa(V_\tau^{(1)},\tau) - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau))\cdot 1_{\{P_\tau > \kappa(V_\tau^{(1)},\tau)\}} | F_t] \tag{2.1.43}$$

$$\geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(\kappa(V_\tau^{(1)},\tau) - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau)) \middle| F_t\right] \tag{2.1.44}$$

$$\geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(V_\tau^{(1)} - V_\tau^{(2)}) \middle| F_t\right] \tag{2.1.45}$$

$$= e^{-\int_t^\tau \gamma_u du}(v^{(1)} - v^{(2)}) \tag{2.1.46}$$

$$\geq v^{(1)} - v^{(2)} \tag{2.1.47}$$

在(2.1.41)中，因為$V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$意味著$\kappa(V_\tau^{(1)},\tau) \leq \kappa(V_\tau^{(2)},\tau)$，如果$\kappa(V_\tau^{(1)},\tau) \geq P_\tau$，則$\kappa(V_\tau^{(2)},\tau) \geq P_\tau$，因此得到(2.1.42)。在(2.1.43)中，由於$\kappa(V_\tau^{(1)},\tau) \leq \kappa(V_\tau^{(2)},\tau)$，所以將$1_{\{P_\tau > \kappa(V_\tau^{(1)},\tau)\}}$拿掉會變小，得到(2.1.44)。在(2.1.44)中討論$\kappa(V_\tau^{(1)},\tau) - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau)$與$V_\tau^{(1)} - V_\tau^{(2)}$的大小，如果是具違約風險的債券的例子下$\kappa(V_\tau^{(1)},\tau) - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau) = V_\tau^{(1)} - V_\tau^{(2)}$，如果是具違約風險的可贖回債券的例子下，當$k_t > V_\tau^{(2)} > V_\tau^{(1)}$，則$\kappa(V_\tau^{(1)},\tau) - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau) = V_\tau^{(1)} - V_\tau^{(2)}$；當$V_\tau^{(2)} > k_t > V_\tau^{(1)}$，則$\kappa(V_\tau^{(1)},\tau) - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau) = V_\tau^{(1)} - k_t > V_\tau^{(1)} - V_\tau^{(2)}$；當$V_\tau^{(2)} > V_\tau^{(1)} > k_t$，則$\kappa(V_\tau^{(1)},\tau) - \kappa(V_\tau^{(2)},\tau) = k_t - k_t > V_\tau^{(1)} - V_\tau^{(2)}$，得到(2.1.45)。根據(2.1.32)可知$V_t = V_0 e^{\int_0^t r_s ds - \int_0^t \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2 ds + \int_0^t \phi_s d\tilde{W}_s}$，將$e^{-\int_t^\tau \gamma_u du}$提出後條件期望值內為 martingale，得到(2.1.46)。由於$0 < e^{-\int_t^\tau \gamma_u du} < 1$，故得證(2.1.47)。

Theorem 6. $f_C(p,v,t) \vee f_D(p,v,t) \leq f_{CD}(p,v,t) \leq f_C(p,v,t) + f_D(p,v,t)$。

證明：

左式，由於 $f_{CD}(p,v,t)$ 的執行價格 $k_t \wedge V_t$ 恆小於 k_t 或 V_t ，因此 $f_{CD}(p,v,t)$ 恆大於 $f_C(p,v,t)$ 或 $f_D(p,v,t)$ 。

右式，由於

$$
\begin{aligned}
f_{CD}(p,v,t) &= \sup_{t\le\tau\le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - k_\tau \wedge V_\tau)^+ \middle| F_t\right] \\
&= \sup_{t\le\tau\le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}((P_\tau - k_\tau)^+ \vee (P_\tau - V_\tau)^+) \middle| F_t\right] && (2.1.48) \\
&\le \sup_{t\le\tau\le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}((P_\tau - k_\tau)^+ + (P_\tau - V_\tau)^+) \middle| F_t\right] && (2.1.49) \\
&\le \sup_{t\le\tau\le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - k_\tau)^+ \middle| F_t\right] + \sup_{t\le\tau\le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - V_\tau)^+ \middle| F_t\right] \\
&= f_C(p,v,t) + f_D(p,v,t)
\end{aligned}
$$

故得證。

第二節 離散式評價模型 (DFPM，Discrete First Passage Model)

連續型評價模型較不符合現實世界狀況，企業在結算盈收、股利政策並不會每分每秒都在結算，因此陸續有學者提出離散型評價模型 (DFPM，Discrete First Passage Model)與修正模型，不僅能夠處理具有美式性質的金融商品也能夠處理在某特定時點資本結構改變的問題，本文即透過數值樹狀結構模型更能合理的描述現實世界。以下為離散型評價模型的發展過程。

一、杜宛珮 (2007)：

一般企業在清償債務或清償債息時通常是在某一個時點做支付的動作，因此會造成資產出現離跳躍的現象。為改善 Black and Cox (1976)結構式首次通過模型(FPM，First Passage Model)為連續的型態，而提出離散結構式首次通過模型

(DFPM，Discrete First Passage Model)，同時也運用了 Dai and Lyuu (2010) Bino-Trinomial Tree 解決了違約門檻無法通過樹狀結構的節點上所產生的非線誤差問題。

二、鍾明璋 (2008)：

為改善杜宛珮 (2007)離散結構式首次通過模型(DFPM，Discrete First Passage Model)利率參數非隨機的缺失，而提出資產與利率為相關隨機變動的立體樹狀模型(EDFPM，Extension Discrete First Passage Model)，為 Longstaff and Schwartz (1995)評價模型的延伸。由於這兩個非獨立的隨機變數在做後推法(backward induction)時聯合機率分配不易求得，因此透過正交化過程將兩非獨立的隨機過程資產與利率變數變換成兩獨立的隨機過程，此時聯合機率分配為邊際機率分配相乘得到，再利用這兩個獨立的隨機變數所建構出獨立的立體樹經由變數變換回原變數資產與利率。

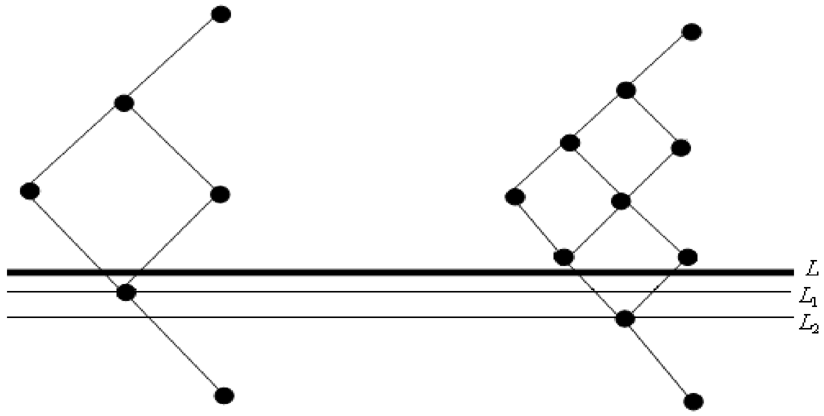
三、陳博宇 (2009)：

為改善結鍾明璋 (2008) EDFPM 違約門檻為外生給定一常數與利率模型為 Vasicek 均衡模型的兩大缺失，而提出 DFPM-WHT，(Extension Discrete First Passage Model－Hull-White Tree)，修正先前利率模型的缺失，考慮 Hull-White 利率模型將更有效捕捉市場利率期間結構，為 Briys and Varenne (1997)評價模型的延伸。一樣透過正交化過程將兩非獨立的隨機過程變數變換成兩獨立的隨機過程。

第三節 Dai and Lyuu (2010) Bino-Trinomial Tree (BTT)

在評價障礙選擇權(barrier option)時，CRR 數值樹狀結構評價方法會出現非線性誤差問題，因此 Dai and Lyuu (2010) 提出 BTT 解決這類問題，本論文將障礙門檻視為一個違約門檻而引用 BTT。所謂非線性誤差問題指障礙門檻無法通

過樹狀結構上的節點，且隨著切割期數不同出現非線性關係的誤差。



『圖 2.1』 非線性誤差

在『圖 2.1』中 CRR 樹狀結構下切割兩期時障礙門檻 L 沒有通過節點，因此在做數值計算時會以 L_1 為障礙門檻，當切割三期時門檻 L 也沒有通過節點，因此會以 L_2 為障礙門檻，產生了非線性的誤差。BTT 以三元樹接二元樹的樹狀結構模型來決解非線性誤差，如『圖 2.2』。首先，調整切割期數建立一個能夠與障礙門檻重合的二元樹，但期間的切割可能不為整數，因此再建立一個三元樹將這個通過門檻的二元樹節點 A、節點 B 與節點 C 三點連接起來。

三元樹的建構方法可以求出股價變動的機率，使後推法能夠順利完成。假設股價隨機過程為

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW(t) \quad , \tag{2.3.1}$$

求解微分方程得到股價為

$$S(\Delta t') = S(0)e^{\sigma W(\Delta t') + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t'} \quad , \tag{2.3.2}$$

是一個對數常態分配(lognormal distribution)，而 logprice 為

$$\ln\frac{S(\Delta t')}{S(0)} = \sigma W(\Delta t') + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t' \quad , \tag{2.3.3}$$

是一常態分配(normal distribution)，期望值為 $\mu = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t'$ 變異數為 $Var = \sigma^2 \Delta t'$。

令

$$\beta \equiv \hat{\mu} - \mu,\quad \alpha \equiv \hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t'} - \mu,\quad \gamma \equiv \hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t'} - \mu \text{，} \tag{2.3.4}$$

其中 $\hat{\mu} = \ln(\frac{S_B}{S_0}) - \ln(\frac{S_0}{S_0}) = \ln(\frac{S_B}{S_0})$，$\beta \in [-\sigma\sqrt{\Delta t'}, \sigma\sqrt{\Delta t'})$，$S_B$ 為節點 B 的股價，如『圖 2.2』。透過一階動差、二階動差與機率和為 1 的三個等式

$$P_u\alpha + P_m\beta + P_d\gamma = 0 \tag{2.3.5}$$

$$P_u\alpha^2 + P_m\beta^2 + P_d\gamma^2 = Var \tag{2.3.6}$$

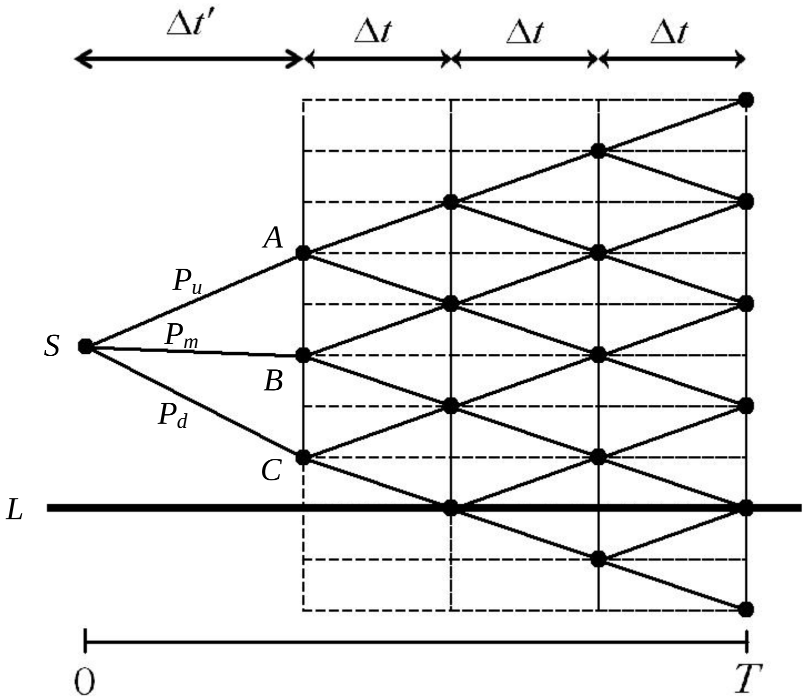
$$P_u + P_m + P_d = 1 \tag{2.3.7}$$

再利用 Cramer's rule 求出股價變動的機率。

因此利用後推法求出在 $t = 0$ 的障礙選擇權價值為

$$V_0 = e^{-r\Delta t'}(P_uV_A + P_mV_B + P_dV_C) \tag{2.3.8}$$

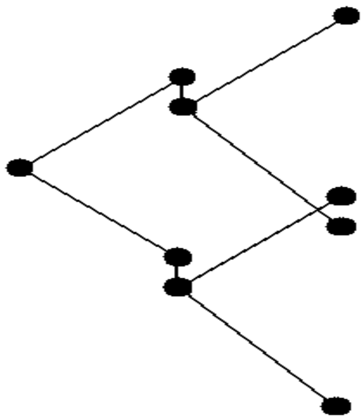
其中 V_A、V_B 與 V_C 分別指節點 A、B 與 C 上的選擇權價值，而 V_A、V_B 與 V_C 由 CRR 二元樹求得。



『圖 2.2』 BTT 示意圖

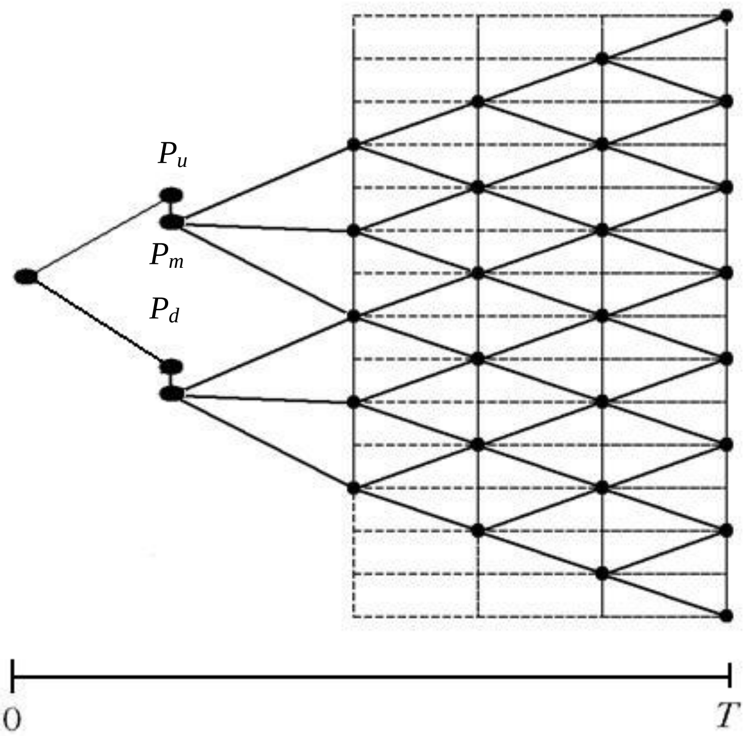
中縱軸為 $\ln(S_t / S_0)$ 橫從為時間，且 $L \equiv \ln(Barrier / S_0)$。

BTT 不僅能解決非線性誤差問題，而且能解決當資產出現跳躍(jump)時，下一期節點無法重合的問題。



『圖 2.3』 資產跳躍節點無法重合

以『圖 2.3』為例，當資產向下跳躍一個常數時，在下一期節點不會重合，使節點個數以倍數成長。



『圖 2.4』 BTT 解決資產跳躍示意圖

如『圖 2.4』利用 BTT 方法三元樹接二元樹，並利用機率滿足的三個條件求得機率，再做倒推法，解決了資產出現跳躍使下一期節點無法重合的問題。

第三章　研究方法

本文以數學證明延伸 Acharya (2002)尚未做到的可賣回債券(putable Bond)、可轉換債券(convertible Bond)與可賣回且可轉換債券(putable-convertible Bond)等，並與 Acharya (2002)做組合，分別討論具有違約風險的可轉換債券(defaultable -convertible bond)、可贖回且可轉換債券(callable-convertible bond)與可贖回且可賣回債券(callable-putable bond)。

本文針對 Acharya (2002)所提出的公司債，以 DFPM-WHT 數值評價方法為基礎來解決問題，不僅能評價外生違約門檻的衍生性商品也能評價內生違約門檻的各種衍生性商品，亦可評價有別於 Acharya 文章中的公司債。本章架構分為三節，第一節，延伸 Acharya 討論對債權人具有保護性質的公司債，再分析與 Acharya (2002)做組合的公司債。第二節，建立驗證工具，數值模型延伸基礎。第三節，討論變賣資產(sale asset)與不變賣資產(non-sale asset)對公司債價格的影響。

第一節 分析債券商品特性

Acharya (2002)將公司債視為無風險債券(host bond)與美式選擇權的組成，因此本文延伸 Acharya (2002)，探討為保護債權人的債券型衍生性商品可賣回債券、可轉換債券與具有違約風險的可轉換債券等，並與 Acharya (2002)組合，考慮具有違約可能的可轉換債券、可贖回且可轉換債券與可贖回且可賣回債券，以下將逐一對這些公司債債做特性分析。

一、　可轉換債券：

可轉換債券給與債權人將債券轉換成股票的權力，當轉換價格(convert price)

大於繼續持有的價值時，債權人願意將債權轉換成股權。根據 Brennan and Schwartz (1980)，定義公司資產結構為

$$V_t = N_B B_t + N_c C_t + N_0 S_t^{BC} \quad , \tag{3.1.1}$$

其中 N_B 為普通公司債(straight bond)契約數量，$B_t = F_B P_t$ 為普通公司債面額 F_B 在時間 t 的價值，N_c 為可轉換債券的契約數量，C_t 為可轉換債券面額 F_C 在時間 t 的價值，N_0 指流通在外股票股數，轉換前每股價格為 S_t^{BC}。每單位面額可轉換債券可轉 $q = \dfrac{1}{conversion\ price}$ 股股票，q 被稱為轉換比率，因此所有可轉換債券可轉 $\varDelta N = N_c \times q \times F_c$ 股(注釋：本論文 q 的設定為單位面額可轉換股票股數，所以 $\varDelta N$ 為 q 乘上契約數 N_c 再乘上面額 F_C，此為修改 Brennan and Schwartz (1980)的設定。)，並定義轉換後每股價格為 S_t^{AC}，且公司資產結構由(3.1.1)改變成

$$V_t = N_B B_t + (N_0 + \Delta N) S_t^{AC} \text{。} \tag{3.1.2}$$

單位面額可轉換債券轉換價格

$$qS_t^{AC} = q\frac{N_0 S_t^{AC} + \Delta N S_t^{AC}}{N_0 + \Delta N} = \frac{q}{N_0 + \Delta N}(V_t - N_B B_t) = z(V_t - N_B B_t) \text{，} \tag{3.1.3}$$

其中 $z = \dfrac{q}{N_0 + \Delta N} < 1$。

單位面額可轉換債券在 T 時的價值定義為

$$\begin{aligned} P_{CB} &= \max(P_T, qS_T^{AC}) = P_T + \max(z(V_T - N_B B_T) - P_T, 0) \\ &= P_T + \max(zV_T - zN_B F_B P_T - P_T, 0) \\ &= P_T + \max(zV_T - (1 + zN_B F_B) P_T, 0) \\ &= P_T + (1 + zN_B F_B)\max(\frac{z}{1 + zN_B F_B} V_T - P_T, 0) \\ &= P_T + a\max(bV_T - P_T, 0) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

其中 $a = (1 + zN_B F_B) > 1,\ b = \dfrac{z}{1 + zN_B F_B} < 1$。

在到期日前的價值為

$$p_{CB}(p,v,t) = p + af_{CB}(p,v,t) \text{ ，} \tag{3.1.5}$$

其中在時間t時的無風險債券價格$P_t = p$、資產價值$V_t = v$。並定義

$$af_{CB}(p,v,t) \equiv a \sup_{t \le \tau \le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(bV_\tau - P_\tau)^+ \middle| F_t\right] \text{，} \tag{3.1.6}$$

其中$\tau = \inf\left\{t \ge 0 : f_{CB}(P_t, V_t, t) = (bV_t - P_t)^+\right\}$。假定公司沒有普通公司債，則令$F_B = 0$，使得$a = 1$，$b = z$。

以下對可轉換債券特性分析我們採用 Brennan and Schwartz (1980)的假說，討論公司負債包含普通公司債與可轉換債券，$F_B \ne 0$，上述證明令$F_B = 0$可類推到 Acharya (2002)沒有普通公司債(straight bond)的例子。

Theorem 7.

特性(1). $p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow f_{CB}(p^{(1)}, v, t) < f_{CB}(p^{(2)}, v, t)$。

特性(2). $p^{(1)} \ne p^{(2)} \Rightarrow \dfrac{f_{CB}(p^{(2)}, v, t) - f_{CB}(p^{(1)}, v, t)}{p^{(2)} - p^{(1)}} \ge -1$。

特性(3). 給定$P_t = p, V_t = v$，存在債券臨界價格(critical bond price)$b_{CB}(v,t)$，且$b_{CB}(v,t) < \kappa(v,t)$，而$\kappa(v,t) = bv$，使得最佳執行選擇權條件等價於$p \le b_{CB}(v,t)$。

特性(4) $v^{(1)} < v^{(2)} \Rightarrow f_{CB}(p, v^{(1)}, t) < f_{CB}(p, v^{(2)}, t)$。

特性(5) $v^{(1)} < v^{(2)} \Rightarrow \dfrac{f_{CB}(p, v^{(1)}, t) - f_{CB}(p, v^{(2)}, t)}{v^{(1)} - v^{(2)}} \le 1$。

證明特性(1)：

令$p^{(1)}$、$p^{(2)}$是 state 1 與 state 2 兩種情況的無風險債券在時間t時價值，在時間t滿足$p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow \beta^{(1)} > \beta^{(2)}$。令 τ 是 state 1 的最佳停止時間，

$V_t = v$， $F_B \neq 0$，根據(3.1.6)這兩個 state 的選擇權價值差

$$
\begin{aligned}
af_{CB}(p^{(1)},v,t) - af_{CB}(p^{(2)},v,t) &< a\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(bV_\tau^{(1)} - P_\tau^{(1)})^+ \middle| F_t\right] - a\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(bV_\tau^{(2)} - P_\tau^{(2)})^+ \middle| F_t\right] \\
&= a\tilde{E}[e^{-\int_t^\tau r_s^{(1)}ds}(bV_t e^{\int_t^\tau r_s^{(1)}ds - \int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - P_\tau^{(1)})^+ \\
&\qquad - e^{-\int_t^\tau r_s^{(2)}ds}(bV_t e^{\int_t^\tau r_s^{(2)}ds - \int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - P_\tau^{(2)})^+ | F_t] \\
&= a\tilde{E}[(bV_t e^{-\int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)})^+ \\
&\qquad - (bV_t e^{-\int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - \beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)})^+ | F_t] \\
&< 0
\end{aligned}
$$

由(2.1.32)已知$V_t = V_0 e^{\int_0^t r_s\, ds - \int_0^t \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2 ds + \int_0^t \phi_s d\tilde{W}_s}$。

故得證。表示當無風險債券價格變低，選擇權價值愈高。

證明特性(2)：

令在時間t時 state 1 與 state 2 的無風險債券價格$p^{(1)} > p^{(2)}$然而我們欲證$f_{CB}(p^{(1)},v,t) - f_{CB}(p^{(2)},v,t) \geq p^{(2)} - p^{(1)}$。令$r^{(1)} < r^{(2)}$，且令 τ 是 state 2 的最佳停止時間，$V_t = v$，則

$$
\begin{aligned}
& af_{CB}(p^{(1)},v,t) - af_{CB}(p^{(2)},v,t) \\
&\quad > a\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(bV_\tau^{(1)} - P_\tau^{(1)})^+ \middle| F_t\right] - a\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(bV_\tau^{(2)} - P_\tau^{(2)})^+ \middle| F_t\right] && (3.1.7) \\
&\quad = a\tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(1)}(bV_\tau^{(1)} - P_\tau^{(1)})^+ - \beta_{t,\tau}^{(2)}(bV_\tau^{(2)} - P_\tau^{(2)})) \cdot 1_{\{bV_\tau^{(2)} > P_\tau^{(2)}\}} \middle| F_t\right] && (3.1.8) \\
&\quad > a\tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(1)}(bV_\tau^{(1)} - P_\tau^{(1)}) - \beta_{t,\tau}^{(2)}(bV_\tau^{(2)} - P_\tau^{(2)})) \cdot 1_{\{bV_\tau^{(2)} > P_\tau^{(2)}\}} \middle| F_t\right] \\
&\quad = a\tilde{E}[(e^{-\int_t^\tau r_s^{(1)}ds}(bV_t e^{\int_t^\tau r_s^{(1)}ds - \int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - P_\tau^{(1)}) \\
&\qquad - e^{-\int_t^\tau r_s^{(2)}ds}(bV_t e^{\int_t^\tau r_s^{(2)}ds - \int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - P_\tau^{(2)})) \cdot 1_{\{bV_\tau^{(2)} > P_\tau^{(2)}\}} | F_t] \\
&\quad = a\tilde{E}[((bV_t e^{-\int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)}) \\
&\qquad - (bV_t e^{-\int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - \beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)})) \cdot 1_{\{bV_\tau^{(2)} > P_\tau^{(2)}\}} | F_t] \\
&\quad = a\tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)}) \cdot 1_{\{bV_\tau^{(2)} > P_\tau^{(2)}\}} \middle| F_t\right] \\
&\quad \geq a\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)} \middle| F_t\right] && (3.1.9)
\end{aligned}
$$

$$\geq a(p^{(2)}-p^{(1)}) \tag{3.1.10}$$

在(3.1.7)中，因為$r^{(1)}<r^{(2)}\Rightarrow P_{\tau}^{(1)}>P_{\tau}^{(2)}$、$\beta_{t,\tau}^{(1)}>\beta_{t,\tau}^{(2)}$且根據(2.1.32)得知$V_{\tau}^{(1)}<V_{\tau}^{(2)}$，如果$P_{\tau}^{(2)}>bV_{\tau}^{(2)}$，則$bV_{\tau}^{(1)}<bV_{\tau}^{(2)}<P_{\tau}^{(2)}<P_{\tau}^{(1)}$，所以$P_{\tau}^{(1)}>bV_{\tau}^{(1)}$，因此得到(3.1.8)。因為$\beta_{t,\tau}^{(2)}P_{\tau}^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_{\tau}^{(1)}<0$ 所以得到(3.1.9)，再根據 Lemma 1，得到(3.1.10)。其中$a>0$，因此

$$f_{CB}(p^{(1)},v,t)-f_{CB}(p^{(2)},v,t)\geq p^{(2)}-p^{(1)} \quad ,$$

故得證。表示無風險債券價格的增(減)量大於選擇權價值的減(增)量。意味著當無風險債券價格愈高時，則可轉換債券的價值也愈高。

證明特性(3)：

令$p^{(2)}=p_2$最佳決策是不履約，我們想要證明當$p^{(1)}=p_1$時的最佳決策也是不履約，假設$p^{(1)}>p^{(2)}$，且$V_t=v$，$\kappa(v,t)=bv$。由特性(2)移項得到

$$f_{CB}(p_1,v,t)\geq f_{CB}(p_2,v,t)-(p_1-p_2)>(\kappa(v,t)-p_2)^{+}+p_2-p_1>\kappa(v,t)-p_1 \ ,$$

因為$f_{CB}(p_1,v,t)>0$，所以

$$f_{CB}(p_1,v,t)>(\kappa(v,t)-p_1)^{+} 。$$

令$b_{CB}(v,t)$是p的最大值，滿足$(p,v,t)\in U$

$$U\equiv\{(p,v,t)\in R^{+}\times R^{+}\times[0,T]:f_{CB}(p,v,t)>(\kappa(v,t)-p)^{+}\}$$

代表一個不履約的區間。$(b_{CB}(v,t),v,t)\notin U$，因為$U$是開區間，所以$f_{CB}(b_{CB}(v,t),v,t)=\kappa(v,t)-b_{CB}(v,t)>0$，因此$b_{CB}(v,t)<\kappa(v,t)$。

證明特性(4)：

令 $v^{(1)}$ 、 $v^{(2)}$ 分別是 state 1 與 state 2 兩種狀態在時間 t 時資產價值，且假設 $v^{(1)} < v^{(2)}$，根據(2.1.32)可知 $V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$。令 τ 是 state 1 的最佳停止時間，這兩個 state 的選擇權價值差

$$af_{CB}(p,v^{(2)},t) - af_{CB}(p,v^{(1)},t) \ge a\left(\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(bV_\tau^{(2)} - P_\tau)^+ \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(bV_\tau^{(1)} - P_\tau)^+ \middle| F_t\right]\right) \ge 0$$

，故得證。表示當資產價值變高時，選擇權價值也會愈高。且由(3.1.5)得知在時間 t 可轉換債券的價值可寫成 $p_{CB}(p,v,t) = p + af_{CB}(p,v,t)$，其中無風險債券價值與資產價值無關，因此表示當資產價值變高時，可轉換債券的價值也會愈高。

證明特性(5)：

令 $v^{(1)}$ 、 $v^{(2)}$ 分別是 state 1 與 state 2 兩種狀態在時間 t 時資產價值，且滿足 $v^{(1)} < v^{(2)}$，根據(2.1.32)可知 $V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$。令 τ 是 state 2 的最佳停止時間，然而我們想要證明 $f_{CB}(p,v^{(1)},t) - f_{CB}(p,v^{(2)},t) \ge v^{(1)} - v^{(2)}$，因此這兩個 state 的選擇權價值差

$$af_{CB}(p,v^{(1)},t) - af_{CB}(p,v^{(2)},t)$$

$$\ge a\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(bV_\tau^{(1)} - P_\tau)^+ \middle| F_t\right] - a\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(bV_\tau^{(2)} - P_\tau)^+ \middle| F_t\right] \tag{3.1.11}$$

$$= a\tilde{E}[(\beta_{t,\tau}(bV_\tau^{(1)} - P_\tau)^+ - \beta_{t,\tau}(bV_\tau^{(2)} - P_\tau)) \cdot 1_{\{bV_\tau^{(2)} > P_\tau\}} | F_t] \tag{3.1.12}$$

$$\ge a\tilde{E}[(\beta_{t,\tau}(bV_\tau^{(1)} - P_\tau) - \beta_{t,\tau}(bV_\tau^{(2)} - P_\tau)) \cdot 1_{\{bV_\tau^{(2)} > P_\tau\}} | F_t]$$

$$= a \cdot b\tilde{E}[\beta_{t,\tau}(V_\tau^{(1)} - V_\tau^{(2)}) \cdot 1_{\{bV_\tau^{(2)} > P_\tau\}} | F_t] \tag{3.1.13}$$

$$\ge a \cdot b\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(V_\tau^{(1)} - V_\tau^{(2)}) \middle| F_t\right] \tag{3.1.14}$$

$$= a \cdot be^{-\int_t^\tau \gamma_u du}(v^{(1)} - v^{(2)}) \tag{3.1.15}$$

$$\ge a(v^{(1)} - v^{(2)}) \tag{3.1.16}$$

在(3.1.11)中，因為$V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$，如果$bV_\tau^{(2)} < P_\tau$，則$bV_\tau^{(1)} < P_\tau$，因此得到(3.1.12)。在(3.1.13)中，由於$V_\tau^{(1)} - V_\tau^{(2)} < 0$，所以將$1_{\{bV_\tau^{(2)} > P_\tau\}}$拿掉會變小，得到(3.1.14)。根據(2.1.32)可知$V_t = V_0 e^{\int_0^t r_s\,ds - \int_0^t \gamma_s\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2 ds + \int_0^t \phi_s d\widetilde{W}_s}$，將$e^{-\int_t^\tau \gamma_u du}$提出後條件期望值內為martingale，得到(3.1.15)。由於$v^{(1)} - v^{(2)} < 0$，又因為$e^{-\int_t^\tau \gamma_u du} < 0$且$b < 1$，得到(3.1.16)，且由於$a > 0$左右同除$a$，故得證。

若假設該公司沒有發行普通公司債，即 $F_B = 0$，則$a = 1$，$b = z$，仍滿足Theorem 7.的每一個特性。

二、可賣回債券：

可賣回債券給與債權人將債券賣回給發行者的權力，當賣回價格(put price)大於繼續持有的價值時，債權人願意賣回給公司。將可賣回債券價值表示成

$$p_{Put}(p,v,t) = p + f_{Put}(p,v,t)\text{，} \tag{3.1.17}$$

其中在時間t時的無風險債券價格$P_t = p$、資產價值$V_t = v$。並定義

$$f_{Put}(p,v,t) \equiv \sup_{t \le \tau \le T} \widetilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put} - P_\tau)^+ \middle| F_t\right]\text{，} \tag{3.1.18}$$

其中$\tau = \inf\left\{t \ge 0 : f_{Put}(P_t, V_t, t) = (k_{Put} - P_t)^+\right\}$，$k_{Put}$為賣回價格。

接著對可賣回債券所包含的選擇權做特性分析，如下：

Theorem 8.

特性(1). 當 $p^{(1)} > p^{(2)}$， $f_{Put}(p^{(1)}, v, t)$和 $f_{Put}(p^{(2)}, v, t)$的大小關係不定，會受到利率期限結構影響。

特性(2). $p^{(1)} \neq p^{(2)} \Rightarrow \dfrac{f_{Put}(p^{(1)},v,t) - f_{Put}(p^{(2)},v,t)}{p^{(1)} - p^{(2)}} \geq -1$ 。

特性(3). 資產的變化不影響 $f_{Put}(p,v,t)$ 的價值。

證明特性(1)：

令 $p^{(1)}$ 、$p^{(2)}$ 是 state 1 與 state 2 兩種情況的無風險債券在時間 t 時價值，在時間 t 滿足 $p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow \beta^{(1)} > \beta^{(2)}$ 。令 τ 是 state 2 的最佳停止時間，$V_t = v$ ，這兩個 state 的選擇權價值差

$$
\begin{aligned}
& f_{Put}(p^{(1)},v,t) - f_{Put}(p^{(2)},v,t) \\
&\quad > \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put} - P_{\tau}^{(1)})^{+} \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(k_{Put} - P_{\tau}^{(2)})^{+} \middle| F_t\right] \\
&\quad = \tilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put} - P_{\tau}^{(1)})^{+} - \beta_{t,\tau}^{(2)}(k_{Put} - P_{\tau}^{(2)})] \cdot 1_{\{k_{Put} > P_{\tau}^{(2)}\}} | F_t] \\
&\quad > \tilde{E}\left[((\beta_{t,\tau}^{(1)} k_{Put} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_{\tau}^{(1)}) - (\beta_{t,\tau}^{(2)} k_{Put} - \beta_{t,\tau}^{(2)} P_{\tau}^{(2)})) \cdot 1_{\{k_{Put} > P_{\tau}^{(2)}\}} \middle| F_t\right]
\end{aligned}
$$

$f_{Put}(p^{(1)},v,t)$ 與 $f_{Put}(p^{(2)},v,t)$ 的大小與折現因子有關，然而與利率就有極大的關係，因此若以不同利率期限結構對此做敏感度分析將會發現利率對選擇權價值變動方向是不明確的，在第四章中以『表 4.9』說明之。

證明特性(2)：

令在時間 t 時 state 1 與 state 2 的無風險債券價格 $p^{(1)} > p^{(2)}$，且利率 $r^{(1)} < r^{(2)}$ ，然而我們想要證明 $f_{Put}(p^{(1)},v,t) - f_{Put}(p^{(2)},v,t) \geq p^{(2)} - p^{(1)}$ 。令 τ 是 state 2 的最佳停止時間，$V_t = v$ ，則

$$f_{Put}(p^{(1)},v,t) - f_{Put}(p^{(2)},v,t)$$

$$\geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put} - P_{t}^{(1)})^{+} \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(k_{Put} - P_{\tau}^{(2)})^{+} \middle| F_t\right] \tag{3.1.19}$$

$$= \tilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put} - P_{\tau}^{(1)})^{+} - \beta_{t,\tau}^{(2)}(k_{Put} - P_{\tau}^{(2)})] \cdot 1_{\{k_{Put} > P_{\tau}^{(2)}\}} | F_t] \tag{3.1.20}$$

$$\geq \widetilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put}-P_{\tau}^{(1)})-\beta_{t,\tau}^{(2)}(k_{Put}-P_{\tau}^{(2)})]\cdot 1_{\{k_{Put}>P_{\tau}^{(2)}\}}|F_t]$$

$$=\widetilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(2)}P_{\tau}^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_{\tau}^{(1)}]\cdot 1_{\{k_{Put}>P_{\tau}^{(2)}\}}|F_t]$$

$$+\widetilde{E}[k_{Put}(\beta_{t,\tau}^{(1)}-\beta_{t,\tau}^{(2)})\cdot 1_{\{k_{Put}>P_{\tau}^{(2)}\}}|F_t] \quad (3.1.21)$$

$$\geq \widetilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(2)}P_{\tau}^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_{\tau}^{(1)}]\cdot 1_{\{k_{Put}>P_{\tau}^{(2)}\}}|F_t] \quad (3.1.22)$$

$$\geq \widetilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}P_{\tau}^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_{\tau}^{(1)}|F_t\right] \quad (3.1.23)$$

$$\geq p^{(2)}-p^{(1)} \quad (3.1.24)$$

在(3.1.19)中，因為$r^{(1)}<r^{(2)}\Rightarrow P_{\tau}^{(1)}>P_{\tau}^{(2)}$、$\beta_{t,\tau}^{(1)}>\beta_{t,\tau}^{(2)}$且根據(2.1.32)得知$V_{\tau}^{(1)}<V_{\tau}^{(2)}$，如果$P_{\tau}^{(2)}>k_{Put}$，則$k_{Rt}<P_{\tau}^{(2)}<P_{\tau}^{(1)}$，所以$P_{\tau}^{(1)}>k_{Put}$，因此得到(3.1.20)。在(3.1.21)中， $\beta_{t,\tau}^{(1)}\geq\beta_{t,\tau}^{(2)}$ ，因此$\widetilde{E}[k_{Put}(\beta_{t,\tau}^{(1)}-\beta_{t,\tau}^{(2)})\cdot 1_{\{k_{Put}>P_{\tau}^{(2)}\}}|F_t]\geq 0$ ，得到(3.1.22)。因為$\beta_{t,\tau}^{(2)}P_{\tau}^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_{\tau}^{(1)}<0$ 所以得到(3.1.23)，再根據 Lemma 1，得證(3.1.24)。

證明特性(3)：

根據(2.1.18)，可知$f_{Put}(p,v,t)$與資產無關，因此資產的變化不影響選擇權價值。

三、可賣回且可轉換債券：

可賣回且可轉換債券給與債權人將債券賣回給發行公司與轉換成股票的權力，當賣回價值大，則賣回給發行公司；轉換價值大，則轉換成股票；若繼續持有價值大，則繼續持有。因此，在未發行普通公司債 $F_B=0$ 的假設下，可賣回且可轉換債券的價值表示為

$$p_{PutCB}(p,v,t)=p+f_{PutCB}(p,v,t) \text{，} \quad (3.1.25)$$

其中在時間t時的無風險債券價格$P_t = p$、資產價值$V_t = v$。並定義

$$f_{PutCB}(p,v,t) \equiv \sup_{t \le \tau \le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put} \vee zV_\tau - P_\tau)^+ \middle| F_t\right] \qquad (3.1.26)$$

其中$\tau = \inf\left\{t \ge 0: f_{PutCB}(P_t,V_t,t) = (k_{Put} \vee zV_t - P_t)^+\right\}$。

由(3.1.25)知道可以將可賣回且可轉換債券寫成一個無風險債券與一個美式選擇權的組合，滿足下列特性：

Theorem 9.

特性(1). 當$p^{(1)} > p^{(2)}$，$f_{PutCB}(p^{(1)},v,t)$和$f_{PutCB}(p^{(2)},v,t)$的大小關係不定。

特性(2). $p^{(1)} \ne p^{(2)} \Rightarrow \dfrac{f_{PutCB}(p^{(1)},v,t) - f_{PutCB}(p^{(2)},v,t)}{p^{(1)} - p^{(2)}} \ge -1$。

特性(3). $v^{(1)} < v^{(2)} \Rightarrow f_{PutCB}(p,v^{(1)},t) < f_{PutCB}(p,v^{(2)},t)$。

特性(4). $v^{(1)} < v^{(2)} \Rightarrow \dfrac{f_{PutCB}(p,v^{(1)},t) - f_{PutCB}(p,v^{(2)},t)}{v^{(1)} - v^{(2)}} \le 1$。

特性(5). $f_{Put}(p,v,t) \vee f_{CB}(p,v,t) \le f_{PutCB}(p,v,t) \le f_{Put}(p,v,t) + f_{CB}(p,v,t)$。

證明特性(1)：

根據 Theorem 8.特性(1)，我們無法說明無風險債券(host bond)價格改變對$f_{Put}(p,v,t)$的影響，也因此無法利用此方法說明無風險債券對可賣回且可轉換債券影響的特性。

證明特性(2)：

我們想要證明$f_{PutCB}(p^{(1)},v,t) - f_{PutCB}(p^{(2)},v,t) \ge p^{(2)} - p^{(1)}$，首先令集合$A = \left\{k_{Put} < zV_\tau^{(1)} < zV_\tau^{(2)}\right\}$、$B = \left\{zV_\tau^{(1)} < k_{Put} < zV_\tau^{(2)}\right\}$、$C = \left\{zV_\tau^{(1)} < zV_\tau^{(2)} < k_{Put}\right\}$，而$r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow P_\tau^{(1)} > P_\tau^{(2)}$、$\beta_{t,\tau}^{(1)} > \beta_{t,\tau}^{(2)}$且根據(2.1.32)得知$V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$，令$\tau$是 state 2 的最佳停止時間，

$$
\begin{aligned}
& f_{PutCB}(p^{(1)},v,t)-f_{PutCB}(p^{(2)},v,t) \\
&\quad \geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put}\vee zV_{\tau}^{(1)}-P_{\tau}^{(1)})^{+}\middle|F_t\right]-\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(k_{Put}\vee zV_{\tau}^{(2)}-P_{\tau}^{(2)})^{+}\middle|F_t\right] && (3.1.27)\\
&\quad = \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put}\vee zV_{\tau}^{(1)}-P_{\tau}^{(1)})^{+}\cdot(1_A+1_B+1_C)\middle|F_t\right] \\
&\qquad -\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(k_{Put}\vee zV_{\tau}^{(2)}-P_{\tau}^{(2)})^{+}\cdot(1_A+1_B+1_C)\middle|F_t\right] && (3.1.28)\\
&\quad = \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(zV_{\tau}^{(1)}-P_{\tau}^{(1)})^{+}\cdot 1_A\middle|F_t\right]-\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_{\tau}^{(2)}-P_{\tau}^{(2)})^{+}\cdot 1_A\middle|F_t\right] \\
&\qquad +\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put}-P_{\tau}^{(1)})^{+}\cdot 1_B\middle|F_t\right]-\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_{\tau}^{(2)}-P_{\tau}^{(2)})^{+}\cdot 1_B\middle|F_t\right] \\
&\qquad +\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put}-P_{\tau}^{(1)})^{+}\cdot 1_C\middle|F_t\right]-\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(k_{Put}-P_{\tau}^{(2)})^{+}\cdot 1_C\middle|F_t\right] && (3.1.29)
\end{aligned}
$$

由於$A+B+C\in\Omega$，因此(3.1.27)可改寫成(3.1.28)。接著將(3.1.29)分三個 case 討論，(3.1.29)表示如下：

<u>Case1:</u> 在 $B=\left\{zV_{\tau}^{(1)}<k_{Put}<zV_{\tau}^{(2)}\right\}$中。

$$
\begin{aligned}
& \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put}-P_{\tau}^{(1)})^{+}\cdot 1_B\middle|F_t\right]-\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_{\tau}^{(2)}-P_{\tau}^{(2)})^{+}\cdot 1_B\middle|F_t\right] \\
&\quad = \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put}-P_{\tau}^{(1)})^{+}-\beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_{\tau}^{(2)}-P_{\tau}^{(2)}))\cdot 1_{\{zV_{\tau}^{(2)}>P_{\tau}^{(2)}\}}\cdot 1_B\middle|F_t\right] \\
&\quad \geq \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put}-P_{\tau}^{(1)})-\beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_{\tau}^{(2)}-P_{\tau}^{(2)}))\cdot 1_{\{zV_{\tau}^{(2)}>P_{\tau}^{(2)}\}}\cdot 1_B\middle|F_t\right] \\
&\quad \geq \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(1)}(zV_{\tau}^{(1)}-P_{\tau}^{(1)})-\beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_{\tau}^{(2)}-P_{\tau}^{(2)}))\cdot 1_{\{zV_{\tau}^{(2)}>P_{\tau}^{(2)}\}}\cdot 1_B\middle|F_t\right] \\
&\quad = \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_{\tau}^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_{\tau}^{(1)})\cdot 1_{\{zV_{\tau}^{(2)}>P_{\tau}^{(2)}\}}\cdot 1_B\middle|F_t\right] \\
&\qquad +\tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(1)}zV_{\tau}^{(1)}-\beta_{t,\tau}^{(2)}zV_{\tau}^{(2)})\cdot 1_{\{zV_{\tau}^{(2)}>P_{\tau}^{(2)}\}}\cdot 1_B\middle|F_t\right] \\
&\quad = \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_{\tau}^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_{\tau}^{(1)})\cdot 1_{\{zV_{\tau}^{(2)}>P_{\tau}^{(2)}\}}\cdot 1_B\middle|F_t\right] \\
&\qquad +\tilde{E}\left[(zV_t e^{-\int_t^{\tau}\gamma_s ds-\frac{1}{2}\int_t^{\tau}\phi_s^2 ds+\int_t^{\tau}\phi_s d\tilde{W}_s}-zV_t e^{-\int_t^{\tau}\gamma_s ds-\frac{1}{2}\int_t^{\tau}\phi_s^2 ds+\int_t^{\tau}\phi_s d\tilde{W}_s})\cdot 1_{\{zV_{\tau}^{(2)}>P_{\tau}^{(2)}\}}\cdot 1_B\middle|F_t\right] \\
&\quad = \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_{\tau}^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_{\tau}^{(1)})\cdot 1_{\{zV_{\tau}^{(2)}>P_{\tau}^{(2)}\}}\cdot 1_B\middle|F_t\right] \\
&\quad \geq \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_{\tau}^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_{\tau}^{(1)})\cdot 1_B\middle|F_t\right]
\end{aligned}
$$

<u>Case2:</u> 在 $A=\left\{k_{Put}<zV_{\tau}^{(1)}<zV_{\tau}^{(2)}\right\}$中。

$$
\begin{aligned}
& \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(zV_{\tau}^{(1)}-P_{\tau}^{(1)})^{+}\cdot 1_A\middle|F_t\right]-\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_{\tau}^{(2)}-P_{\tau}^{(2)})^{+}\cdot 1_A\middle|F_t\right] \\
&\quad = \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(1)}(zV_{\tau}^{(1)}-P_{\tau}^{(1)})^{+}-\beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_{\tau}^{(2)}-P_{\tau}^{(2)}))\cdot 1_{\{zV_{\tau}^{(2)}>P_{\tau}^{(2)}\}}\cdot 1_A\middle|F_t\right] \\
&\quad \geq \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(1)}(zV_{\tau}^{(1)}-P_{\tau}^{(1)})-\beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_{\tau}^{(2)}-P_{\tau}^{(2)}))\cdot 1_{\{zV_{\tau}^{(2)}>P_{\tau}^{(2)}\}}\cdot 1_A\middle|F_t\right] \\
&\quad = \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_{\tau}^{(2)}-\beta_{t,\tau}^{(1)}P_{\tau}^{(1)})\cdot 1_{\{zV_{\tau}^{(2)}>P_{\tau}^{(2)}\}}\cdot 1_A\middle|F_t\right] \\
&\qquad +\tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(1)}zV_{\tau}^{(1)}-\beta_{t,\tau}^{(2)}zV_{\tau}^{(2)})\cdot 1_{\{zV_{\tau}^{(2)}>P_{\tau}^{(2)}\}}\cdot 1_A\middle|F_t\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)}P_\tau^{(1)})\cdot 1_{\{zV_\tau^{(2)}>P_\tau^{(2)}\}}\cdot 1_A \middle| F_t\right] \\
&\quad + \tilde{E}\left[(zV_t e^{-\int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - zV_t e^{-\int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s})\cdot 1_{\{zV_\tau^{(2)}>P_\tau^{(2)}\}}\cdot 1_A \middle| F_t\right] \\
&= \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)}P_\tau^{(1)})\cdot 1_{\{zV_\tau^{(2)}>P_\tau^{(2)}\}}\cdot 1_A \middle| F_t\right] \\
&\geq \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)}P_\tau^{(1)})\cdot 1_A \middle| F_t\right]
\end{aligned}
$$

推導過程利用之前類似作法得到。

<u>Case3:</u> 在 $C=\left\{zV_\tau^{(1)} < zV_\tau^{(2)} < k_{Put}\right\}$ 中。

$$
\begin{aligned}
&\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put}-P_\tau^{(1)})^+\cdot 1_C \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(k_{Put}-P_\tau^{(2)})^+\cdot 1_C \middle| F_t\right] \\
&\quad = \tilde{E}[(\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put}-P_\tau^{(1)})^+ - \beta_{t,\tau}^{(2)}(k_{Put}-P_\tau^{(2)}))\cdot 1_{\{k_{Put}>P_\tau^{(2)}\}}\cdot 1_C | F_t] \\
&\quad = \tilde{E}[(\beta_{t,\tau}^{(1)}(k_{Put}-P_\tau^{(1)}) - \beta_{t,\tau}^{(2)}(k_{Put}-P_\tau^{(2)}))\cdot 1_{\{k_{Put}>P_\tau^{(2)}\}}\cdot 1_C | F_t] \\
&\quad = \tilde{E}[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)}P_\tau^{(1)})\cdot 1_{\{k_{Put}>P_\tau^{(2)}\}}\cdot 1_C | F_t] \\
&\qquad + \tilde{E}[k_{Put}(\beta_{t,\tau}^{(1)} - \beta_{t,\tau}^{(2)})\cdot 1_{\{k_{Put}>P_\tau^{(2)}\}}\cdot 1_C | F_t] \\
&\quad \geq \tilde{E}[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)}P_\tau^{(1)})\cdot 1_{\{k_{Put}>P_\tau^{(2)}\}}\cdot 1_C | F_t] \\
&\quad \geq \tilde{E}[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)}P_\tau^{(1)})\cdot 1_C | F_t]
\end{aligned}
$$

推導過程利用之前類似作法得到。綜合述三個 case，可將(3.1.29)改寫成

$$
\begin{aligned}
&\tilde{E}[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)}P_\tau^{(1)})\cdot(1_A+1_B+1_C)|F_t] \\
&\quad \geq \tilde{E}[(\beta_{t,\tau}^{(2)}P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)}P_\tau^{(1)})|F_t] \\
&\quad \geq p^{(2)} - p^{(1)}
\end{aligned}
$$

根據 Lemma 1.故得證。

證明特性(3)：

令 $v^{(1)}$ 、$v^{(2)}$ 分別是 state 1 與 state 2 兩種狀態在時間 t 時資產價值，且假設 $v^{(1)} < v^{(2)}$，根據(2.1.32)可知 $V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$。令 τ 是 state 1 的最佳停止時間，這兩個 state 的選擇權價值差

$$
\begin{aligned}
&f_{PutCB}(p,v^{(2)},t) - f_{PutCB}(p,v^{(1)},t) \\
&\qquad \geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}\vee zV_\tau^{(2)} - P_\tau)^+ \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}\vee zV_\tau^{(1)} - P_\tau)^+ \middle| F_t\right] \\
&\qquad \geq 0
\end{aligned}
$$

因為 $k_{Put}\vee zV_\tau^{(2)} \geq k_{Put}\vee zV_\tau^{(1)}$，故得證。表示當資產價值變高時，選擇權價值也

會愈高。且由(3.1.25)得知在時間t可賣回且可轉換債券的價值可寫成無風險債加上 $f_{PutCB}(p,v,t)$，其中無風險債券價值與資產價值無關，因此表示當資產價值變高時，可賣回且可轉換債券的價值也會愈高。

證明特性(4)：

令$v^{(1)}$、$v^{(2)}$分別是 state 1 與 state 2 兩種狀態在時間t時資產價值，且滿足$v^{(1)}<v^{(2)}$，根據(2.1.32)可知$V_\tau^{(1)}<V_\tau^{(2)}$。令 τ 是 state 2 的最佳停止時間，然而我們想要證明 $f_{PutCB}(p,v^{(1)},t)-f_{PutCB}(p,v^{(2)},t)\geq v^{(1)}-v^{(2)}$，因此這兩個 state 的選擇權價值差

$$
\begin{aligned}
&f_{PutCB}(p,v^{(1)},t)-f_{PutCB}(p,v^{(2)},t)\\
&\quad\geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}\vee zV_\tau^{(1)}-P_\tau)^+\middle|F_t\right]-\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}\vee zV_\tau^{(2)}-P_\tau)^+\middle|F_t\right]\\
&\quad=\tilde{E}[(\beta_{t,\tau}(k_{Put}\vee zV_\tau^{(1)}-P_\tau)^+-\beta_{t,\tau}(k_{Put}\vee zV_\tau^{(2)}-P_\tau))\cdot 1_{\{k_{Put}\vee zV_\tau^{(2)}>P_\tau\}}|F_t]\\
&\quad\geq \tilde{E}[(\beta_{t,\tau}(k_{Put}\vee zV_\tau^{(1)}-P_\tau)-\beta_{t,\tau}(k_{Put}\vee zV_\tau^{(2)}-P_\tau))\cdot 1_{\{k_{Put}\vee zV_\tau^{(2)}>P_\tau\}}|F_t]\\
&\quad=\tilde{E}[\beta_{t,\tau}(k_{Put}\vee zV_\tau^{(1)}-k_{Put}\vee zV_\tau^{(2)})\cdot 1_{\{k_{Put}\vee zV_\tau^{(2)}>P_\tau\}}|F_t]\\
&\quad\geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}\vee zV_\tau^{(1)}-k_{Put}\vee zV_\tau^{(2)})\middle|F_t\right]\\
&\quad\geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}\vee zV_\tau^{(1)}-k_{Put}\vee zV_\tau^{(2)})\cdot(1_A+1_B+1_C)\middle|F_t\right]\\
&\quad=\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(1)}-zV_\tau^{(2)})\cdot 1_A\middle|F_t\right]+\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}-zV_\tau^{(2)})\cdot 1_B\middle|F_t\right]\\
&\qquad+\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}-k_{Put})\cdot 1_C\middle|F_t\right]
\end{aligned}
\tag{3.1.30}
$$

將(3.1.30)分三個 case 討論，(3.1.30)表示如下：

<u>Case1:</u> 在 $A=\{k_{Put}<zV_\tau^{(1)}<zV_\tau^{(2)}\}$中。

$$\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(1)}-zV_\tau^{(2)})\cdot 1_A\middle|F_t\right]$$

<u>Case2:</u> 在 $B=\{zV_\tau^{(1)}<k_{Put}<zV_\tau^{(2)}\}$中。

$$\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}-zV_\tau^{(2)})\cdot 1_B\middle|F_t\right]>\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(1)}-zV_\tau^{(2)})\cdot 1_B\middle|F_t\right]$$

<u>Case3:</u> 在 $C=\{zV_\tau^{(1)}<zV_\tau^{(2)}<k_{Put}\}$中。

$$\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}-k_{Put})\cdot 1_C\middle|F_t\right]=0\geq\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(1)}-zV_\tau^{(2)})\cdot 1_C\middle|F_t\right]$$

綜合上述三個 case，可將(3.1.30)寫成

$$\begin{aligned}&\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(1)}-zV_\tau^{(2)})\cdot 1_A\middle|F_t\right]+\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}-zV_\tau^{(2)})\cdot 1_B\middle|F_t\right]+\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}-k_{Put})\cdot 1_C\middle|F_t\right]\\ &\quad\ge \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(1)}-zV_\tau^{(2)})\cdot(1_A+1_B+1_C)\middle|F_t\right]\\ &\quad=\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(1)}-zV_\tau^{(2)})\middle|F_t\right]=ze^{-\int_t^\tau \gamma_u du}(v^{(1)}-v^{(2)})\ge v^{(1)}-v^{(2)},\end{aligned}$$

根據 martingale 的特性，且 $ze^{-\int_t^\tau \gamma_u du}<1$，故得證。

證明特性(5)：

左式，由於 $f_{PutCB}(p,v,t)$ 的執行價格 $k_{Put}\vee zV_t$ 恆大於 k_{Put} 或 zV_t，因此 $f_{PutCB}(p,v,t)$ 恆大於 $f_{Put}(p,v,t)$ 或 $f_{CB}(p,v,t)$。

右式，由於

$$\begin{aligned}f_{PutCB}(p,v,t)&=\sup_{t\le\tau\le T}\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}\vee zV_\tau-P_\tau)^+\middle|F_t\right]\\ &=\sup_{t\le\tau\le T}\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}((k_{Put}-P_\tau)^+\vee(zV_\tau-P_\tau)^+)\middle|F_t\right]\\ &\le\sup_{t\le\tau\le T}\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}((k_{Put}-P_\tau)^++(zV_\tau-P_\tau)^+)\middle|F_t\right]\\ &\le\sup_{t\le\tau\le T}\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(k_{Put}-P_\tau)^+\middle|F_t\right]+\sup_{t\le\tau\le T}\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau-P_\tau)^+\middle|F_t\right]\\ &=f_{Put}(p,v,t)+f_{CB}(p,v,t)\end{aligned}$$

故得證。

接著再將上述的公司債與 Acharya (2002)做組合，分析具有違約風險的可轉換債券、可贖回且可轉換債券與可贖回且可賣回債券。

四、具有違約風險的可轉換債券：

具有違約風險的可轉換債券，包含兩個選擇權。當資產夠小，則該公司債會違約；當資產夠大，則該公司債會被債權人轉換成股票。在這裡討論公司不發行

普通公司債(straight bond)，$F_B=0$。而具有違約風險的可轉換債券在時間t時價值可以寫成一個無風險債券與一個金融商品(derivative)的組合如下：

$$p_{DCB}(p,v,t)=p-f_{DCB}(p,v,t) \quad , \tag{3.1.31}$$

其中令金融商品為$f_{DCB}(p,v,t)$，這裡稱之為「DCBoption」。若具有違約風險的可轉換債券違約，由(2.1.18)知$P_T>V_T$，則$zV_T<P_T$，由(3.1.6)知該債券不可能會轉換成股票；若具有違約風險的可轉換債券轉換成股票即$zV_T>P_T$，則$P_T<V_T$該債券不可能會違約，因此具有違約風險的可轉換債券所包含的這兩個選擇權彼此互斥，所以定義 DCBoption 在時間t時價值為這兩個選擇權的組合

$$f_{DCB}(p,v,t)\equiv f_D(p,v,t)-f_{CB}(p,v,t) \quad , \tag{3.1.32}$$

所以具有違約風險的可轉換債券在時間t時價值能夠像 Acharya 一樣可以寫成一個無風險債券與 DCBoption 的組合，接著要討論具有違約風險的可轉換債券是否有如同 Acharya 的性質。

Theorem 10.

特性(1). $p^{(1)}>p^{(2)}\Rightarrow f_{DCB}(p^{(1)},v,t)>f_{DCB}(p^{(2)},v,t)$。

特性(2). $\lim\limits_{\Delta r^+\to 0}\dfrac{p_{DCB}^{(2)}-p_{DCB}^{(1)}}{\Delta r}\le -\lim\limits_{\Delta r^+\to 0}\dfrac{p^{(2)}-p^{(1)}}{\Delta r}$。

特性(3). 給定$P_t=p,V_t=v$，存在債券價格區間(critical bond price region)，

$\widetilde{B}(v,t)=\left\{p\in R^+ : p\ge b_D(v,t),\, p\le b_{CB}(v,t),\forall t,v\right\}$，使得最佳執行 DCBoption 等價於 $p\in\widetilde{B}(v,t)$。

特性(4). $v^{(1)}<v^{(2)}\Rightarrow f_{DCB}(p,v^{(1)},t)>f_{DCB}(p,v^{(2)},t)$

特性(5). $0<\lim\limits_{\Delta v\to 0}\dfrac{p_{DCB}^{(2)}-p_{DCB}^{(1)}}{\Delta v}\le 2$

證明特性(1)：

令 $p^{(1)}$、$p^{(2)}$是 state 1 與 state 2 兩種情況的無風險債券在時間t時價值，在時間t滿足 $p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow \beta^{(1)} > \beta^{(2)}$。根據 Theorem 1.與 Theorem 7.的特性(1)可得知

$$p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow f_D(p^{(1)},v,t) > f_D(p^{(2)},v,t) \tag{3.1.33}$$

$$p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow f_{CB}(p^{(1)},v,t) < f_{CB}(p^{(2)},v,t) \tag{3.1.34}$$

因此由(3.1.33)與(3.1.34)得到

$$\begin{aligned} & f_D(p^{(1)},v,t) - f_{CB}(p^{(1)},v,t) > f_D(p^{(2)},v,t) - f_{CB}(p^{(2)},v,t) \\ \Leftrightarrow\ & f_{DCB}(p^{(1)},v,t) > f_{DCB}(p^{(2)},v,t) \end{aligned}$$

故得證。表示當無風險債券價格變低，選擇權價值也愈低。

證明特性(2)：

令 $p^{(1)}$、$p^{(2)}$是 state 1 與 state 2 兩種情況的無風險債券在時間t時價值，在時間t滿足 $p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow \beta^{(1)} > \beta^{(2)}$，根據 Theorem 2 與 Theorem 7.的特性(2)可得知

$$f_D(p^{(2)},v,t) - f_D(p^{(1)},v,t) \geq p^{(2)} - p^{(1)} \tag{3.1.35}$$

$$f_{CB}(p^{(1)},v,t) - f_{CB}(p^{(2)},v,t) \geq p^{(2)} - p^{(1)} \tag{3.1.36}$$

根據(3.1.35)與(3.1.36)，因此兩個 state 的 DCBoption 價值差

$$\begin{aligned} & f_{DCB}(p^{(2)},v,t) - f_{DCB}(p^{(1)},v,t) \\ & \quad = (f_D(p^{(2)},v,t) - f_{CB}(p^{(2)},v,t)) - (f_D(p^{(2)},v,t) - f_{CB}(p^{(1)},v,t)) \\ & \quad = (f_D(p^{(2)},v,t) - f_D(p^{(1)},v,t)) + (f_{CB}(p^{(1)},v,t) - f_{CB}(p^{(2)},v,t)) \\ & \quad \geq 2(p^{(2)} - p^{(1)}) \end{aligned}$$

使得兩個 state 具有違約風險的可轉換債券在時間t的價值差

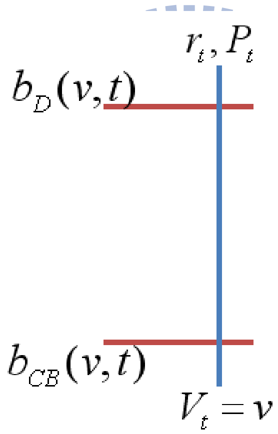
$$
\begin{aligned}
p_{DCB}^{(2)} - p_{DCB}^{(1)} &= (p^{(2)} - f_{DCB}(p^{(2)}, v, t)) - (p^{(1)} - f_{DCB}(p^{(1)}, v, t)) \\
&= p^{(2)} - p^{(1)} - [f_{DCB}(p^{(2)}, v, t) - f_{DCB}(p^{(1)}, v, t)] \\
&\le p^{(2)} - p^{(1)} - 2(p^{(2)} - p^{(1)}) = -(p^{(2)} - p^{(1)})
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\Delta r^{+} \to 0} \frac{p_{DCB}^{(2)} - p_{DCB}^{(1)}}{\Delta r} \le -\lim_{\Delta r^{+} \to 0} \frac{p^{(2)} - p^{(1)}}{\Delta r}
$$

表示具有違約風險的可轉換債券的價格存續期間(dollar duration)較無風險債券的價格存續期間小。

證明特性(3)：

根據 Theorem 3 與 Theorem 7.的特性(3)，已知具有違約風險的債券的最佳違約條件為 $P_t \ge b_D(v,t)$ 及可轉換債券的最佳轉換條件 $P_t \le b_{CB}(v,t)$ 。



『圖 3.1』 DCB 最佳執行區間

『圖 3.1』中在時間 t ，縱軸為無風險債券價格 P_t 愈往上價格愈高，$V_t = v$ 為一常數，因為若具有違約風險的可轉換債券違約即 $P_t > v$ ，則 $P_t > zv$ 表示該債券不可能會轉換成股票;若具有違約風險的可轉換債券轉換成股票即 $P_t < zv$，則 $P_t < v$ 表示該債券不可能會違約，所以當 P_t 夠高才有機會達到違約的條件且不會執行轉換，而當 P_t 夠低才有機會達到執行轉換的條件且不會違約。因此，當 $P_t \ge b_D(v,t)$ 具有違約風險的可轉換債券將會違約；當 $P_t \le b_{CB}(v,t)$ ，則具有違約風險的可轉換債券

將會執行轉換。因此具有違約風險的可轉換債券的最佳執行條件為 $P_t \geq b_D(v,t)$ 或 $P_t \leq b_{CB}(v,t)$ ，即 $p \in \widetilde{B}(v,t)$ ， $\widetilde{B}(v,t) = \left\{ p \in R^+ : p \geq b_D(v,t), p \leq b_{CB}(v,t), \forall t, v \right\}$ 。

證明特性(4)：

令 $v^{(1)}$ 、 $v^{(2)}$ 分別是 state 1 與 state 2 兩種狀態在時間 t 時資產價值，且假設 $v^{(1)} < v^{(2)}$ ，根據(2.1.32)可知 $V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$ 。根據 Theorem 4.與 Theorem 7.的特性(4)可得知

$$v^{(1)} < v^{(2)} \Rightarrow f_D(p, v^{(1)}, t) > f_D(p, v^{(2)}, t) \tag{3.1.37}$$

$$v^{(1)} < v^{(2)} \Rightarrow f_{CB}(p, v^{(1)}, t) < f_{CB}(p, v^{(2)}, t) \quad , \tag{3.1.38}$$

根據(3.1.37)與(3.1.38)兩個 state 的 DCBoption 價值差

$$\begin{aligned} & f_{DCB}(p, v^{(1)}, t) - f_{DCB}(p, v^{(2)}, t) \\ & \quad = (f_D(p, v^{(1)}, t) - f_{CB}(p, v^{(1)}, t)) - (f_D(p^{(2)}, v, t) - f_{CB}(p^{(2)}, v, t)) \\ & \quad = (f_D(p, v^{(1)}, t) - f_D(p, v^{(2)}, t)) + (f_{CB}(p, v^{(2)}, t) - f_{CB}(p, v^{(1)}, t)) \\ & \quad > 0 \end{aligned}$$

故得證。表示當資產價值變高時，DCBoption 價值會愈低，且由(3.1.31)知，具有違約風險的可轉換債券價值是一個無風險債券加上 DCBoption，因此具有違約風險的可轉換債券價值愈高。

證明特性(5)：

令 $v^{(1)}$ 、 $v^{(2)}$ 分別是 state 1 與 state 2 兩種狀態在時間 t 時資產價值，且滿足 $v^{(1)} < v^{(2)}$ ，根據(2.1.32)可知 $V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$ 。根據 Theorem 5.與 Theorem 7.的特性(5)可得知

$$f_D(p, v^{(2)}, t) - f_D(p, v^{(1)}, t) \geq -(v^{(2)} - v^{(1)}) \tag{3.1.39}$$

$$f_{CB}(p, v^{(1)}, t) - f_{CB}(p, v^{(2)}, t) \geq v^{(1)} - v^{(2)} \quad , \tag{3.1.40}$$

根據(3.1.39)與(3.1.40)兩個 state 的 DCBoption 價值差

$$
\begin{aligned}
& f_{DCB}(p,v^{(2)},t)-f_{DCB}(p,v^{(1)},t) \\
& =(f_D(p,v^{(2)},t)-f_{CB}(p,v^{(2)},t))-(f_D(p^{(1)},v,t)-f_{CB}(p^{(1)},v,t)) \\
& \geq 2(v^{(1)}-v^{(2)})
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
& \frac{f_{DCB}(p,v^{(2)},t)-f_{DCB}(p,v^{(1)},t)}{v^{(2)}-v^{(1)}} \geq -2 \\
\Leftrightarrow & \frac{(p-f_{DCB}(p,v^{(1)},t))-(p-f_{DCB}(p,v^{(2)},t))}{v^{(2)}-v^{(1)}} \geq -2 \\
\Leftrightarrow & \frac{p_{DCB}^{(2)}-p_{DCB}^{(1)}}{v^{(2)}-v^{(1)}} \leq 2 \\
\Leftrightarrow & 0<\lim_{\Delta v \to 0} \frac{p_{DCB}^{(2)}-p_{DCB}^{(1)}}{\Delta v} \leq 2
\end{aligned}
$$

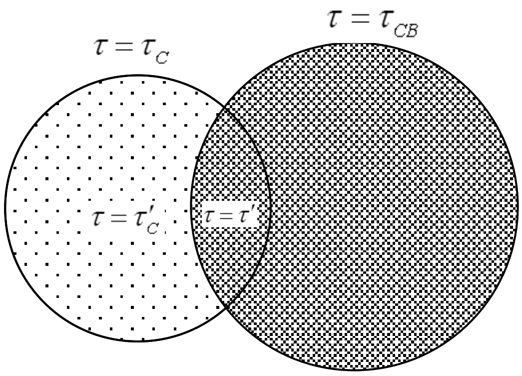
故得證。

五、可贖回且可轉換債券：

可贖回且可轉換債券當贖回價格(k_C)較低時公司將債券贖回，當轉換價值(zV_t)高時也可能被債權人轉換成股票，因此可贖回且可轉換債券為 max(min(繼續持有,贖回價格),轉換價格)，而將可贖回且可轉換債券在時間t時的價值一樣寫成一個無風險債券與金融商品的組合並定義為

$$p_{CCB}=p+f_{CCB}(p,v,t) \text{ ，} \tag{3.1.41}$$

其中令金融商品為 $f_{CCB}(p,v,t)$，這裡稱之為「CCBoption」。因為被贖回與被可轉換有可能同時被執行，為了將 CCBoption 拆成兩個不同時履約的選擇權，『圖 3.2』中定義τ是 CCBoption 的最佳執行時間，當$\tau=\tau_C$是執行贖回的最佳時間、當$\tau=\tau_{CB}$是執行轉換的最佳時間、$\tau=\tau'$指同時執行贖回且執行轉換的最佳時間、$\tau=\tau'_C$指執行贖回的最佳時間扣除同時執行轉換的部份，即$\tau'_C=\tau_C \setminus \tau_{CB}$。



『圖 3.2』 CCB 最佳執行時間集合

當 $\tau=\tau_{CB}$ 時，表示執行轉換，則 $p_{CCB}=zV_t$ ；當 $\tau=\tau_{C'}$ 時，表示只執行贖回，則 $p_{CCB}=k_C$ ；若 $\tau=\tau'$ 時，表示同時執行贖回且轉換，則 $p_{CCB}=zV_t$ ，且 $\tau'\subset\tau_{CB}$ 。所以當 $\tau=\tau_{C'}$ 時，CCBoption 價值為 $-(p-k_C)$ ；當 $\tau=\tau_{CB}$ 時，CCBoption 價值為 zV_t-p ，且 $\tau_{C'}$ 與 τ_{CB} 互斥。因此定義 CCBoption 拆成兩個不同時履約選擇權的組合

$$\begin{aligned} f_{CCB}(p,v,t) \equiv & \sup_{t\le\tau\le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau - P_\tau)^+ \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}\}} \middle| F_t\right] \\ & - \sup_{t\le\tau\le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - k_C)^+ \cdot 1_{\{\tau=\tau'_C\}} \middle| F_t\right], \end{aligned} \tag{3.1.42}$$

其中定義

$$f_{CB'}(p,v,t) \equiv \sup_{t\le\tau\le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau - P_\tau)^+ \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}\}} \middle| F_t\right] \tag{3.1.43}$$

$$f_{C'}(p,v,t) \equiv \sup_{t\le\tau\le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - k_C)^+ \cdot 1_{\{\tau=\tau'_C\}} \middle| F_t\right] \tag{3.1.44}$$

$f_{C'}(p,v,t)$ 指執行贖回且不會同時執行轉換的選擇權價值。因此(3.1.42)寫成

$$f_{CCB}(p,v,t) \equiv f_{CB'}(p,v,t) - f_{C'}(p,v,t) \text{ 。} \tag{3.1.45}$$

因此我們可以先由 $f_{CB'}(p,v,t)$ 與 $f_{C'}(p,v,t)$ 的特性，再推論得到 $f_{CCB}(p,v,t)$ 的特性。詳細 $f_{CB'}(p,v,t)$ 與 $f_{C'}(p,v,t)$ 的特性推導請參照『附錄 A』。

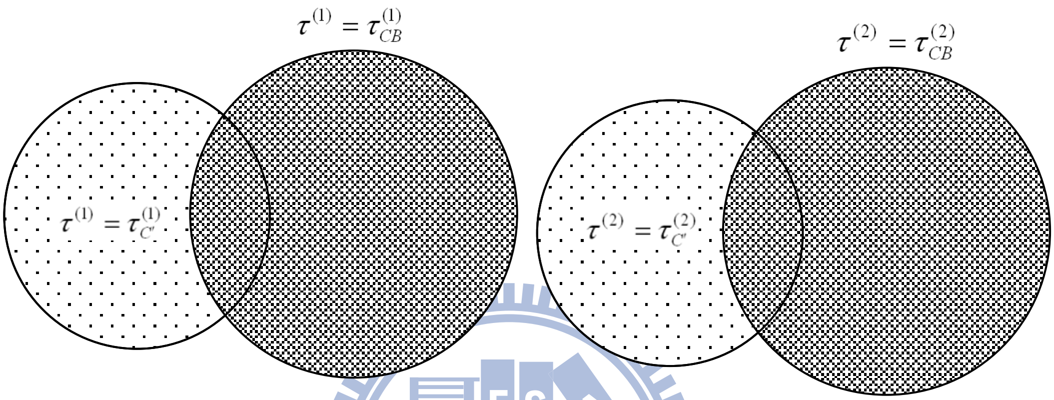
Theorem 11.

特性(1).　$p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow f_{CCB}(p^{(1)},v,t) < f_{CCB}(p^{(2)},v,t)$ 。

特性(2).　$\lim\limits_{\Delta r^{+}\to 0} \dfrac{p_{CCB}^{(2)} - p_{CCB}^{(1)}}{\Delta r} \le -\lim\limits_{\Delta r^{+}\to 0} \dfrac{p^{(2)} - p^{(1)}}{\Delta r}$ 。

特性(3).　$v^{(1)} < v^{(2)} \Rightarrow f_{CCB}(p,v^{(1)},t) < f_{CCB}(p,v^{(2)},t)$ ，

特性(4).　$v^{(1)} < v^{(2)} \Rightarrow \dfrac{f_{CCB}(p,v^{(1)},t) - f_{CCB}(p,v^{(2)},t)}{v^{(1)} - v^{(2)}} \le 1$ 。



『圖 3.3』 CCB 在 state1 與 state2 的最佳執行時間集合

證明特性(1)：

令 $p^{(1)}$、$p^{(2)}$是 state 1 與 state 2 兩種情況的無風險債券在時間t時價值，這兩個 state 的最佳執行時間集合表示如『圖 3.3』，而在時間t滿足 $p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow$ $r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow \beta^{(1)} > \beta^{(2)}$。根據 『附錄 A』可得知

$$p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow f_{CB'}(p^{(1)},v,t) < f_{CB'}(p^{(2)},v,t) \ , \tag{3.1.46}$$

$$p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow f_{C'}(p^{(1)},v,t) > f_{C'}(p^{(2)},v,t) \ , \tag{3.1.47}$$

由於(3.1.46)與(3.1.47)兩式，因此

$$\begin{aligned} & f_{CB'}(p^{(1)},v,t) - f_{C'}(p^{(1)},v,t) < f_{CB'}(p^{(2)},v,t) - f_{C'}(p^{(2)},v,t) \\ \Leftrightarrow\ & f_{CCB}(p^{(1)},v,t) < f_{CCB}(p^{(2)},v,t) \end{aligned} \ ,$$

故得證，表示當無風險債券價格變低，選擇權價值愈高。

證明特性(2)：

令 $p^{(1)}$、$p^{(2)}$ 是 state 1 與 state 2 兩種情況的無風險債券在時間 t 時價值，在時間 t 滿足 $p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow \beta^{(1)} > \beta^{(2)}$，根據『附錄 A』可得知

$$f_{CB'}(p^{(1)},v,t) - f_{CB'}(p^{(2)},v,t) \geq p^{(2)} - p^{(1)} \text{，} \tag{3.1.48}$$

$$f_{C'}(p^{(2)},v,t) - f_{C'}(p^{(1)},v,t) \geq p^{(2)} - p^{(1)} \tag{3.1.49}$$

根據(3.1.48)與(3.1.49)兩個 state 的 CCBoption 價值差為

$$\begin{aligned} &f_{CCB}(p^{(2)},v,t) - f_{CCB}(p^{(1)},v,t) \\ &\quad = (f_{CB'}(p^{(2)},v,t) - f_{C'}(p^{(2)},v,t)) - (f_{CB'}(p^{(1)},v,t) - f_{C'}(p^{(1)},v,t)) \\ &\quad = (f_{CB'}(p^{(2)},v,t) - f_{CB'}(p^{(1)},v,t)) - (f_{C'}(p^{(2)},v,t) - f_{C'}(p^{(1)},v,t)) \\ &\quad \leq (p^{(1)} - p^{(2)}) - (p^{(2)} - p^{(1)}) = 2(p^{(1)} - p^{(2)}) \end{aligned}$$

兩個 state 可贖回且可轉換債券在時間 t 的價值差

$$\begin{aligned} p_{CCB}^{(2)} - p_{CCB}^{(1)} &= (p^{(2)} + f_{CCB}(p^{(2)},v,t)) - (p^{(1)} + f_{CCB}(p^{(1)},v,t)) \\ &= (f_{CCB}(p^{(2)},v,t) - f_{CCB}(p^{(1)},v,t)) - (p^{(1)} - p^{(2)}) \\ &\leq 2(p^{(1)} - p^{(2)}) - (p^{(1)} - p^{(2)}) = -(p^{(2)} - p^{(1)}) \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta r^{+} \to 0} \frac{p_{CCB}^{(2)} - p_{CCB}^{(1)}}{\Delta r} \leq -\lim_{\Delta r^{+} \to 0} \frac{p^{(2)} - p^{(1)}}{\Delta r}$$

表示可贖回且可轉換債券的價格存續期間較無風險債券的價格存續期間小。

證明特性(3)：

當 $v^{(1)} < v^{(2)}$，則 CCBoption 價值差為

$$\begin{aligned} &f_{CCB}(p,v^{(2)},t) - f_{CCB}(p,v^{(1)},t) \\ &\quad = (f_{CB'}(p,v^{(2)},t) - f_{C'}(p,v^{(2)},t)) - (f_{CB'}(p,v^{(1)},t) - f_{C'}(p,v^{(1)},t)) \\ &\quad = (f_{CB'}(p,v^{(2)},t) - f_{CB'}(p,v^{(1)},t)) + (f_{C'}(p,v^{(1)},t) - f_{C'}(p,v^{(2)},t)) \qquad (3.1.50) \\ &\quad \geq (f_{CB'}(p,v^{(2)},t) - f_{CB'}(p,v^{(1)},t)) \\ &\qquad + \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - k_C)^{+} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{C'}^{(2)}\}} \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - k_C)^{+} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{C'}^{(2)}\}} \middle| F_t\right] \qquad (3.1.51) \\ &\quad = f_{CB'}(p,v^{(2)},t) - f_{CB'}(p,v^{(1)},t) > 0 \end{aligned}$$

(3.1.50)中，令最佳執行時間$\tau=\tau_{C'}^{(2)}$，因此得到(3.1.51)，再相消，故得證。且由(3.1.41)得知在時間t可贖回且可轉換債券的價值可寫成無風險債券加上 CCBoption，其中無風險債券價值與資產價值無關，因此表示當資產價值變高時，可贖回且可轉換債券的價值也會愈高。

證明特性(4)：

根據『附錄 A』得知，當資產$v^{(1)}<v^{(2)}$則$f_{CB'}(p,v^{(1)},t)-f_{CB'}(p,v^{(2)},t)\ge v^{(1)}-v^{(2)}$，因此

$$
\begin{aligned}
&f_{CCB}(p,v^{(1)},t)-f_{CCB}(p,v^{(2)},t)\\
&=(f_{CB'}(p,v^{(1)},t)-f_{C'}(p,v^{(1)},t))-(f_{CB'}(p,v^{(2)},t)-f_{C'}(p,v^{(2)},t))\\
&=(f_{CB'}(p,v^{(1)},t)-f_{CB'}(p,v^{(2)},t))+(f_{C'}(p,v^{(2)},t)-f_{C'}(p,v^{(1)},t)) \qquad (3.1.52)\\
&\ge(f_{CB'}(p,v^{(1)},t)-f_{CB'}(p,v^{(2)},t))\\
&\quad+\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau-k_C)^+\cdot 1_{\{\tau=\tau_{C'}^{(2)}\}}\middle|F_t\right]-\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau-k_C)^+\cdot 1_{\{\tau=\tau_{C'}^{(2)}\}}\middle|F_t\right] \qquad (3.1.53)\\
&=f_{CB'}(p,v^{(1)},t)-f_{CB'}(p,v^{(2)},t)\\
&\ge v^{(1)}-v^{(2)}\quad,
\end{aligned}
$$

(3.1.52)中，令最佳執行時間$\tau=\tau_{C'}^{(1)}$，因此得到(3.1.53)，再相消，移項得證。

六、可贖回且可賣回債券：

可贖回且可賣回債券賦與了公司贖回與債權人賣回的兩個權力。因此可贖回且可賣回債券在時間t時價值可以寫成一個無風險債券與金融商品的組合

$$p_{CPut}(p,v,t)=p-f_{CPut}(p,v,t) \qquad (3.1.54)$$

其中令金融商品為$f_{CPut}(p,v,t)$，這裡稱之為「CPutoption」。為了將 CPutoption 拆成兩個不同時履約的選擇權，所以假設贖回價格大於賣回價格$k_C>k_{Put}$，當$P_T>k_C$可贖回且可賣回債券被贖回時，則$k_{Put}<P_T$該債券不可能同時被賣回；如果當$k_{Put}>P_T$可贖回且可賣回債券被賣回時，則$P_T<k_C$該債券不可能同時被贖回，

因此可贖回且可賣回債券所包含的這兩個選擇權彼此互斥，所以定義 CPutoption 為 $f_C(p,v,t)$ 與 $f_{Put}(p,v,t)$ 的組合

$$f_{CPut}(p,v,t) \equiv f_C(p,v,t) - f_{Put}(p,v,t) \tag{3.1.55}$$

其中 $f_C(p,v,t)$ 與 $f_{Put}(p,v,t)$ 分別為(2.1.21)與(3.1.18)中所定義，所以可贖回且可賣回債券在時間 t 時價值能夠像 Acharya 一樣可以寫成一個無風險債券與一個金融商品的組合，滿足下列特性：

Theorem 12.

特性(1). 當 $p^{(1)} > p^{(2)}$， $f_{CPut}(p^{(1)},v,t)$ 和 $f_{CPut}(p^{(2)},v,t)$ 的大小關係不定。

特性(2). $\lim_{\Delta r^+ \to 0} \dfrac{p_{CPut}^{(2)} - p_{CPut}^{(1)}}{\Delta r} \le -\lim_{\Delta r^+ \to 0} \dfrac{p^{(2)} - p^{(1)}}{\Delta r}$。

特性(3). 資產的變化不影響 $f_{CPut}(p,v,t)$ 的價值。

證明特性(1)：

根據 Theorem 8.特性(1)，我們無法說明無風險債券(host bond)價格改變對 $f_{Put}(p,v,t)$ 的影響，也因此無法利用此方法說明無風險債券對可贖回且可賣回債券影響的特性。

證明特性(2)：

令 $p^{(1)}$、$p^{(2)}$ 是 state 1 與 state 2 兩種情況的無風險債券在時間 t 時價值，在時間 t 滿足 $p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow \beta^{(1)} > \beta^{(2)}$，

根據 Theorem2. 與 Theorem8.特性(2)，得知

$$f_C(p^{(2)},v,t) - f_C(p^{(1)},v,t) \ge p^{(2)} - p^{(1)}$$

$$f_{Put}(p^{(1)},v,t)-f_{Put}(p^{(2)},v,t)\geq p^{(2)}-p^{(1)}$$

因此兩個 state 的 CPutoption 價值差

$$\begin{aligned}
&f_{CPut}(p^{(2)},v,t)-f_{CPut}(p^{(1)},v,t)\\
&=(f_C(p^{(2)},v,t)-f_{Put}(p^{(2)},v,t))-(f_C(p^{(1)},v,t)-f_{Put}(p^{(1)},v,t))\\
&=(f_C(p^{(2)},v,t)-f_C(p^{(1)},v,t))+(f_{Put}(p^{(1)},v,t)-f_{Put}(p^{(2)},v,t))\\
&\geq 2(p^{(2)}-p^{(1)})
\end{aligned}$$

使得兩個 state 可贖回且可賣回債券在時間 t 的價值差

$$\begin{aligned}
p^{(2)}_{CPut}-p^{(1)}_{CPut}&=(p^{(2)}-f_{CPut}(p^{(2)},v,t))-(p^{(1)}-f_{CPut}(p^{(1)},v,t))\\
&=p^{(2)}-p^{(1)}-[f_{CPut}(p^{(2)},v,t)-f_{CPut}(p^{(1)},v,t)]\\
&\leq p^{(2)}-p^{(1)}-2(p^{(2)}-p^{(1)})=-(p^{(2)}-p^{(1)})
\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta r^{+}\to 0}\frac{p^{(2)}_{CPut}-p^{(1)}_{CPut}}{\Delta r}\leq-\lim_{\Delta r^{+}\to 0}\frac{p^{(2)}-p^{(1)}}{\Delta r}$$

表示可贖回且可賣回債券的價格存續期間(dollar duration)較無風險債券的價格存續期間小。

證明特性(3)：

由 Theorem 4.與 Theorem 8.特性(3)得知，$f_{CPut}(p,v,t)$ 所包含的 $f_C(p,v,t)$、$f_{Put}(p,v,t)$ 皆與資產無關，因此 $f_{CPut}(p,v,t)$ 與資產無關。

第二節 數值模型延伸基礎

DFPM-HWT 數值評價方法模型引用 Briys and Varenne (1997)的評價模型，假設利率模型為 Hull-White 利率模型

$$dr_t=(\theta_t-a\cdot r_t)dt+\sigma d\tilde{Z}_t\quad, \tag{3.2.1}$$

資產價值模型為

$$\frac{dV_t}{V_t}=(r_t-\gamma_t)dt+\phi d\widetilde{W}_t \quad , \tag{3.2.2}$$

$$d\ln V_t=(r_t-\gamma_t-\frac{\phi^2}{2})dt+\phi d\widetilde{W}_t \quad , \tag{3.2.3}$$

$$d\ln V_t=(r_t-\gamma_t-\frac{\phi^2}{2})dt+\sqrt{1-\rho^2}\phi d\widetilde{W}_t'+\rho\phi d\widetilde{Z}_t \quad , \tag{3.2.4}$$

其中 $d\widetilde{W}_t=\sqrt{1-\rho^2}d\widetilde{W}_t'+\rho d\widetilde{Z}_t$ 且 $\widetilde{W}_t'$ 與 $\widetilde{Z}_t$ 互為獨立的布朗運動，ρ 為公司價值與利率的相關係數，γ_t 為支付比率，在 Briys and Varenne (1997)的評價模型中假設 $\gamma_t=0$。違約門檻 $\widetilde{V}_t=\zeta FB(t,T)$。

一、正交化：

Acharya (2002)利用正交化的方法將資產價值與利率兩非獨立隨機過程，轉換成兩新變數獨立的隨機過程，在做後推法時，可由邊際機率分配相乘求得其聯合機率分配。

由(3.2.1)與(3.2.4)已知利率與資產價值的隨機過程為

$$d\ln V_t=(r_t-\gamma_t-\frac{\phi^2}{2})dt+\sqrt{1-\rho^2}\phi d\widetilde{W}_t'+\rho\phi d\widetilde{Z}_t \quad ,$$

$$dr_t=(\theta_t-a\cdot r_t)dt+\sigma d\widetilde{Z}_t \quad 。$$

將資產價值與利率兩隨機過程寫成矩陣形式

$$\begin{bmatrix} d\ln V_t \\ dr_t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_t-\gamma_t-\frac{\phi^2}{2} \\ \theta_t-a\cdot r_t \end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\phi & \rho\phi \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\widetilde{W}_t' \\ d\widetilde{Z}_t \end{bmatrix} \quad , \tag{3.2.5}$$

求出 $\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\phi & \rho\phi \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$ 的反矩陣為

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\phi & \rho\phi \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}\phi\sigma}\begin{bmatrix} \sigma & -\rho\phi \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2}\phi \end{bmatrix} \quad ,$$

左右同時乘上反矩陣，使波動項為一個單位矩陣，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\ln V_t}{\sqrt{1-\rho^2}\phi} - \dfrac{\rho dr_t}{\sqrt{1-\rho^2}\sigma} \\ \dfrac{dr_t}{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{r_t - \gamma_t - \dfrac{\phi^2}{2}}{\sqrt{1-\rho^2}\phi} - \dfrac{\rho(\theta_t - a \cdot r_t)}{\sqrt{1-\rho^2}\sigma} \\ \dfrac{\theta_t - a\cdot r_t}{\sigma} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\tilde{W}_t' \\ d\tilde{Z}_t \end{bmatrix} \quad , \qquad (3.2.6)$$

得到兩獨立隨機過程，令兩獨立隨機變數 $X(t), Y(t)$ 滿足

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ dY(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{d\ln V_t}{\sqrt{1-\rho^2}\phi} - \dfrac{\rho dr_t}{\sqrt{1-\rho^2}\sigma} \\ \dfrac{dr_t}{\sigma} \end{bmatrix} \quad ,$$

積分求解得

$$X_t = X_0 + \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\ln \dfrac{V_t}{V_0}}{\phi} - \rho \frac{r_t - r_0}{\sigma} \right) \quad , \qquad Y_t = Y_0 + \frac{r_t - r_0}{\sigma} \quad 。 \qquad (3.2.7)$$

令 $X_0 = 0$，$Y_0 = 0$，V_0 為公司的期初資產價值，r_0 為起初利率。

分別建構出 X_t, Y_t 兩獨立的樹狀結構後，再將(式)移項還原 V_t 與 r_t 分別為

$$V_t = V_0 \exp\left\{ \phi(X_t\sqrt{1-\rho^2} + \rho Y_t) \right\} \quad , \qquad (3.2.8)$$

$$r_t = r_0 + \sigma Y_t \quad , \qquad (3.2.9)$$

將(3.2.6)簡化成

$$\begin{bmatrix} dX_t \\ dY_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_X \\ u_Y \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\tilde{W}_t' \\ d\tilde{Z}_t \end{bmatrix} \quad , \qquad (3.2.10)$$

其中

$$u_X = \frac{r_t - \gamma_t - \dfrac{\phi^2}{2}}{\sqrt{1-\rho^2}\phi} - \frac{\rho(\theta_t - a\cdot r_t)}{\sqrt{1-\rho^2}\sigma} \quad , \quad u_Y = \frac{\theta_t - a\cdot r_t}{\sigma} \quad , \qquad (3.2.11)$$

分別為 X_t, Y_t 的趨勢項(drift term)，因此可將微分方程 X_t 改寫為

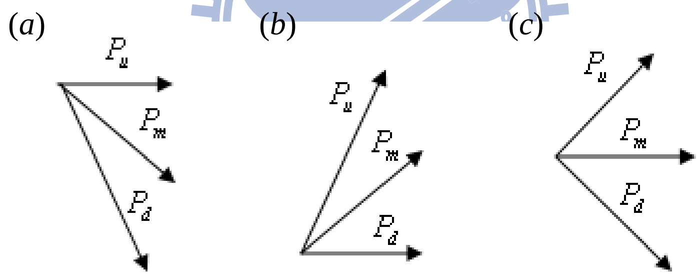
$$dX_t = u_X dt + 1\cdot d\tilde{W}_t' \quad 。 \qquad (3.2.12)$$

二、建構Y-t平面的三元樹：

由上述已知$Y_t = Y_0 + \dfrac{r_t - r_0}{\sigma}$，Hull-White 利率模型與變數為一對一函數，因此先建構出 Hull-White tree 再轉換成Y_t。

建 Hull-White tree 首先建一個對稱R_0^*的樹，且服從隨機過程$dR_0^* = -a \cdot R_t^* dt + \sigma d\tilde{Z}_t$

定義$\Delta R^* = \eta\sqrt{3\Delta t}$為$R^*$tree 的間距，節點$(i, j)$指在時間點$i\Delta t$利率為$j\Delta R^*$的節點，下一期利率上漲、不變與下跌的機率分別為$P_u$、$P_m$與$P_d$，且利率上界$j_{\max} = 0.184/(a\Delta t)$和下界$j_{\min} = -0.184/(a\Delta t)$，上下界會隨著均數復迴歸率$a$愈大而變窄，是因為利率有回歸均數(mean reversion)的特性，因此當利率碰到利率上界時，利率走勢為(a);當利率碰到利率下界時，利率走勢為(b);當利率未碰到利率上下界時，利率走勢為(c)。



『圖 3.4』 Hull-White 利率模型機率設定

其機率分別如下：

(a)

$$P_u = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 - 3aj\Delta t)$$
$$P_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 + 2aj\Delta t$$
$$P_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 - aj\Delta t)$$

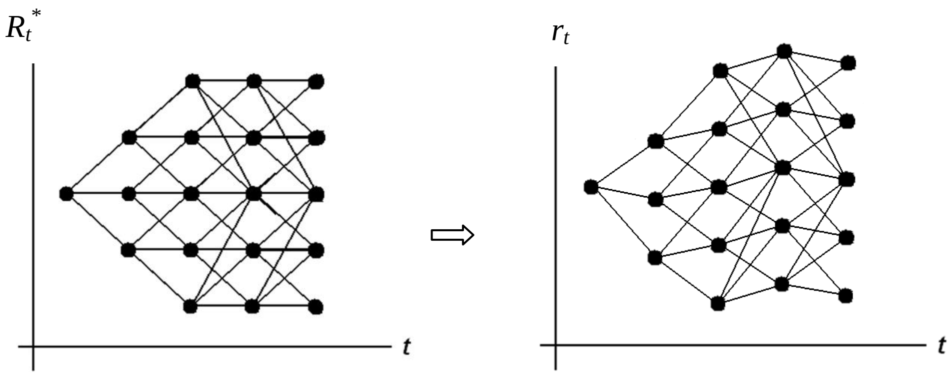
(b)

$$P_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 + aj\Delta t)$$
$$P_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 - 2aj\Delta t$$
$$P_d = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 + 3aj\Delta t)$$

(c)

$$P_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 - aj\Delta t)$$
$$P_m = \frac{2}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2$$
$$P_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 + aj\Delta t)$$

再來要要調整R^*三元樹使得與市場上的利率期間結構一致，因此將R_t^*三元樹轉成r_t三元樹，如『圖 3.4』。



『圖 3.5』建構 Hull-White 利率模型

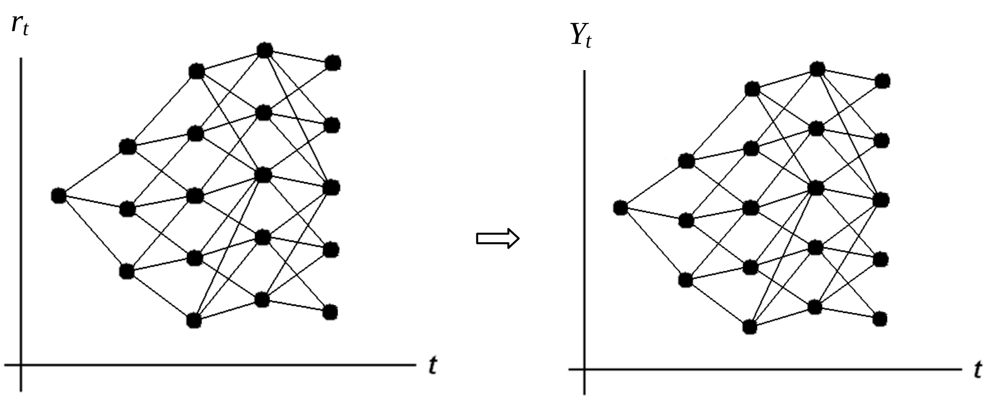
定義

$$\alpha_i \equiv \alpha(i\Delta t) = r_{i\Delta t} - R_{i\Delta t}^* \text{，} \tag{3.2.13}$$

且定義參數 $Q_{i,j}$ 滿足 $\alpha_i = \dfrac{\ln \sum_{j=n_i}^{n_i} Q_{m,j} e^{-j\Delta R^*} - \ln P_{i+1}}{\Delta t}$ 與 $Q_{i+1,j} = \sum_k Q_{i,k} q(k,j) e^{-(\alpha_i + k\Delta R)\Delta t}$

其中 $q(k,j)$ 為節點 (i,k) 走到節點 $(i+1,j)$ 的機率，P_{i+1} 為零息債券到期日為 $(i+1)\Delta t$ 的現值，n_i 指在三元樹中在 $i\Delta t$ 時變數 j 的最大值。得到 α_i 後再由(3.2.13)得到 r_t 三元樹。

求得 Hull-White r_t 三元利率樹後，根據(3.2.7)將 r_t 變數變換成一對一的參數 Y_t，且令 Y_t 三元樹機率分別為 $P_u^Y = P_u$ 、 $P_m^Y = P_m$ 與 $P_d^Y = P_d$ 得到 Y_t 的三元樹。

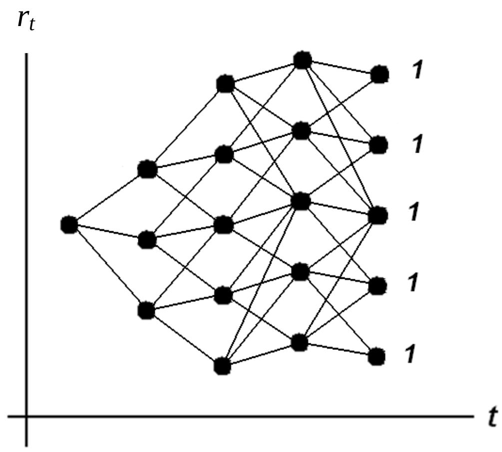


『圖 3.6』 建構 Y_t 三元樹示意圖

因此 Y-t 平面的三元樹建構完成。

三、建構 X - t 平面的三元樹：

根據 Briys and Varenne(1997)評價模型假設違約門檻 $\widetilde{V}_t = \zeta\, FB(t,T)$ ，其中 $B(t,T)$ 指在時間 T 的 1 元在時間 t 的價值，即單位零息債券價值，因此可由上述已建構完成的 Hull-White 利率樹得到每個節點對應的無風險零息債券價格，並運用後推法求出各個節點的零息債券價格，如『圖 3.6』。

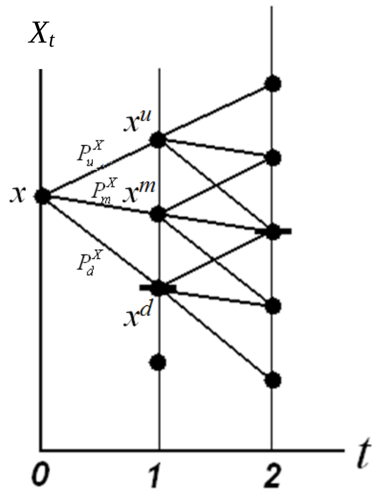


『圖 3.7』無風險零息債券價格

將門檻 $\widetilde{V}_t$ 變數變換成正交化後的參數 $\widetilde{X}_t$ ，定義為

$$\widetilde{X}_t = X_0 + \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{\ln \frac{\widetilde{V}_t}{V_0}}{\phi} - \rho \frac{r_t - r_0}{\sigma} \right) \quad 。 \tag{3.2.14}$$

根據(3.2.12)，已知 $dX_t = u_X dt + 1 \cdot d\widetilde{W}_t'$ ，根據 BTT 節點建構原則，由 $\widetilde{X}_t$ 上及下以 $2\sqrt{\Delta t}$ 的間距建構節點，如『圖 3.7』。



『圖 3.8』 建構 X_t 三元樹示意圖

令 $\beta = \hat{u}_x - u_x$，$\alpha = \hat{u}_x + 2\sqrt{\Delta t} - u_x = \beta + 2\sqrt{\Delta t}$，$\gamma = \hat{u}_x - 2\sqrt{\Delta t} - u_x = \beta - 2\sqrt{\Delta t}$，其中 $\beta \in [-\sqrt{\Delta t}, \sqrt{\Delta t})$，$\hat{u}_x = x^m - x$，$u_X = \dfrac{r_t - \gamma_t - \dfrac{\phi^2}{2}}{\sqrt{1-\rho^2}\,\phi} - \dfrac{\rho(\theta_t - a \cdot r_t)}{\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma}$ 。

運用 BTT 建樹方法滿足一階動差、二階動差與機率和為 1 的三個等式

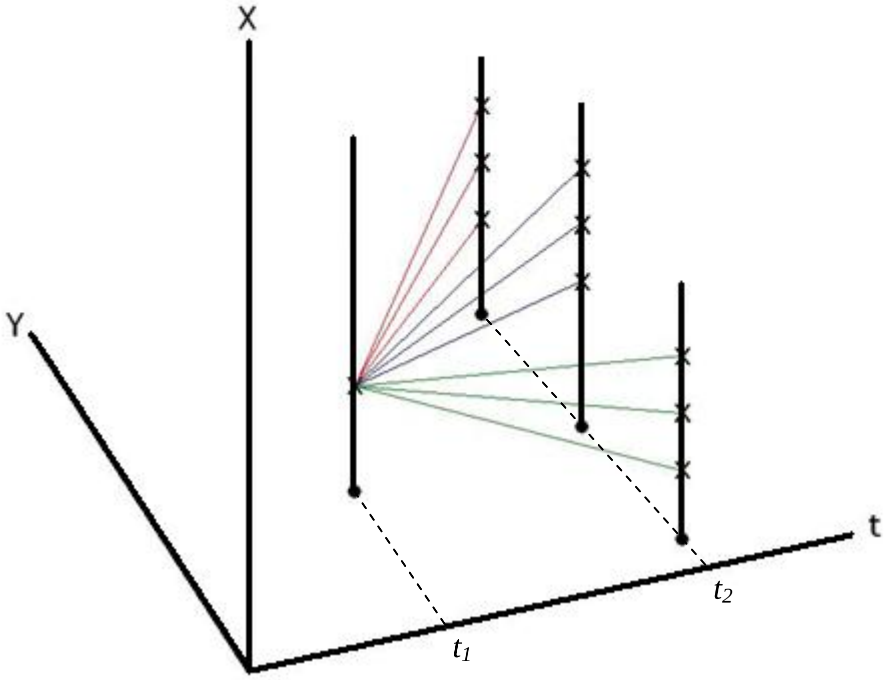
$$P_u^X \alpha + P_m^X \beta + P_d^X \gamma = 0 \tag{3.2.15}$$

$$P_u^X \alpha^2 + P_m^X \beta^2 + P_d^X \gamma^2 = \Delta t \tag{3.2.16}$$

$$P_u^X + P_m^X + P_d^X = 1 \tag{3.2.17}$$

並利用 Cramer's rule 求出 X_t 變動的機率。

DFPM-WHT 已經構出個節點到下一節點路徑的聯合機率分配可由 X_t、Y_t 的邊際機率分配相乘得到，而建構出完整的 DFPM-WHT 立體三元樹模型，如『圖 3.8』。



『圖 3.9』 立體結構模型示意圖

第三節 變賣資產(sale asset)與不變賣資產(non-sale asset)

企業舉債通常會面臨到期日前的債息支出與到期日時的本金支出。當面臨支出時，企業可以變賣資產換取現金來支付這筆支出，也因此使得資產向下跳躍，企業也可要求股東稀釋股權增資來支付這筆支出，就可以不必變賣資產。

本節以具有違約風險的債券為例。假設該債券每期付股利 $C = c \times F \times \Delta t$ ，面額為 F ，沒有稅盾效果，沒有破產成本，發生違約的回收率 100%，即 $f_1 = f_2 = 1$ ，且將資產拆成股權(equity)與債權(debt)，這裡的債權只包含了具有違約風險的債券一種，因此每個節點上都有二個價格，股權與債權，而公司價值可由股權加債權得到。定義股權與債權在到期日價值為

$$E_T = \begin{cases} V_T - (F + C) & , if\ V_t > F + C \\ 0 & , otherwise(default) \end{cases} \tag{3.3.1}$$

$$D_T=\begin{cases}F+C\ ,\ if\ V_t>F+C\\ V_T\quad ,otherwise(default)\end{cases}\tag{3.3.2}$$

違約發生在資產不足以償還本金與股利時。

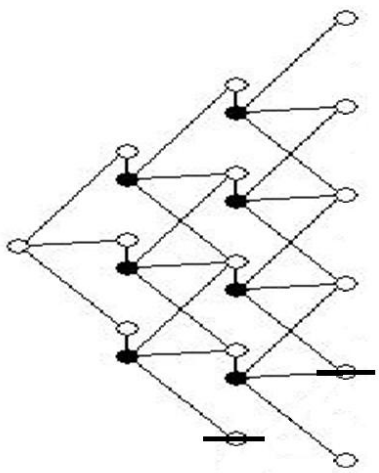
在時間 t 股權與債權價值分別為

$$E_t=\begin{cases}E_t'-S & ,\ if\ default\ doesn't\ occur\\ 0 & ,otherwise(default)\end{cases}\tag{3.3.3}$$

$$D_t=\begin{cases}D_t'+C & ,\ if\ default\ doesn't\ occur\\ V_t & ,otherwise(default)\end{cases}\tag{3.3.4}$$

其中 E_t' 與 D_t' 為償還債息後股權與債權的價值，利用後推法得到，而償還債息後公司價值 $V_t'=E_t'+D_t'$，且 S 指為了支付債息股東所增資的金額。有兩種條件使違約發生，第一為外生條件，當償還債息前的資產價值小於外生門檻，則發生違約，即 $V_t<\widetilde{V}_t$；第二為內生條件，當股東增資前的股東權益價值小於 0，則發生違約，即 $E_t'-S<0$。

如果債息完全是由變賣資產來支付，則資產出現跳躍，建構方法如下：

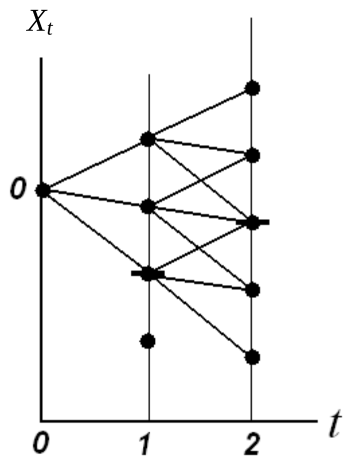


『圖 3.10』建構變賣資產模型

『圖 3.9』中白色節點表示跳躍前(償還債息前)的節點，跳躍後(償還債息後)的節點以黑色節點表示，再連接到下一期跳躍前的白色節點，依此類推，展出每一期皆有跳躍的樹狀結構。由於債息完全是由變賣資產來支應，則 $S=0$ 且

$V_t = V_t' + C$ 。

如果股東願意稀釋股權增資來支付這筆支出不變賣資產時，資產不會出現跳躍，建構方法如下：



『圖 3.11』建構不變賣資產模型

『圖 3.10』中每個節點可看成增資前與增資後。增資前若股東願意增資而變成增資後，增資後再連接到下一期增資前的節點，依此類推，展出樹狀結構。由於債息完全是由股東增資而來，則 $S = C$ 且 $V_t = V_t'$ 。

而如果公司只允許變賣資產 γV_t 做為支付債息，而剩餘部份 $C - \gamma V_t$ 由股權增資來支付，則 $S = C - \gamma V_t$ 且 $V_t = V_t' - \gamma V_t$ ，即 $V_t = V_t'/(1-\gamma)$ 。

以上不變賣資產的模型由股東判斷是否讓公司違約，這個內生違約條件與 Acharya 處理具違約風險的債券時美式選擇權 $f_D(p,v,t)$ 執行條件等價。由以下說明之。

Acharya 美式選擇權執行最佳條件為 $f(P_t, V_t, t) = (P_t - V_t)^+$ ，由 Acharya 將具違約風險的債券可寫成 $P_D(P_t, V_t, t) = P_t - f_D(P_t, V_t, t)$ ，且已知公司資產可拆成債權與股權， $V_t = D_t + E_t$ ，且 Acharya 假設公司債權只包含具違約風險的債券，即

$P_D(P_t,V_t,t)=D_t$，因此

$$\begin{aligned}
f_D\left(P_t,V_t,t\right) &= \left(P_t - V_t\right)^+ \\
&= \left(P_t - \left(D_t + E_t\right)\right)^+ \\
&= \left(P_t - \left(P_{\mathrm{D}}(P_t,V_t,t) + E_t\right)\right)^+ \\
&= \left(P_t - \left(P_t - f_D(P_t,V_t,t)\right) - E_t\right)^+ \\
&= \left(f_D(P_t,V_t,t) - E_t\right)^+
\end{aligned}$$

當執行 $f_D(P_t,V_t,t)$ 時，$f_D(P_t,V_t,t) > E_t$，可得 $f_D(P_t,V_t,t) = f_D(P_t,V_t,t) - E_t \Leftrightarrow E_t = 0$，故得證。

因此，Acharya 判斷公司違約的方式與以股東角度判斷是否讓公司違約是等價的，所以，第四章利用 Acharya 將債券型商品表示成一個無風險債券與一個美式選權組合的方法評價各種延伸的衍生性商品。

第四章　數值模型分析結果與討論

DFPM-HWT 數值評價模型，不僅能應用在外生違約門檻，也能應用在內生違約門檻，更能夠評價出各種具美式性質的衍生性商品，因此本章運用 DFPM-HWT 數值評價模型來評價延伸 Acharya 的各式衍生性金融商品，並驗證這各式衍生性商品的特性。第一節比較各種不同評價模型。第二節，數值驗證各債券商品的特性。第三節，綜合比較各類債券商品並討論何者較能保護債權人。

第一節 評價模型比較

本節將與其他不同評價模型比較，分別以外生違約門檻與內生違約門檻的評價模型各別討論。

一、外生違約門檻：

根據 Briys and Varenne (1997)的評價模型為外生違約門檻，是一個具有違約風險的債券，假設有一債券為到期日一年、沒有配息的公司債、不變賣資產、面額 F 為 3000 元、起始公司資產價值 V_0 為 5000 元，市場的零息利率如下『表 4.1』。

『表 4.1』 市場上的零息利率

到期日	零息利率
0.5(年)	0.0343
1(年)	0.03824
1.5(年)	0.04183
2(年)	0.04512
2.5(年)	0.04815
3(年)	0.05086

資料來自 Options, Futures and Other Derivatives-sixth edition 一書第 665 頁 Table 28.1。

設定公司價值的波動$\phi=0.3$、均數復迴歸率$a=0.5$、利率波動度$\sigma=0.01$、公司價值與利率的相關係數$\rho=-0.25$、債權人保護的程度$\xi=0.9$、支付比率、$\gamma=0$、切割期數$n=180$及回收率$f_1=f_2=1$表示在到期日前或在到期日時若企業違約，則債權人可以求償所有公司價值剩餘，且不考慮破產成本與稅盾效果，本文利用內插法求得每個切割期間的零息利率。

與 Briys and Varenne (1997)評價模型比較，利用 DFPM-HWT 數值評價方法得到的值近似 Briys and Varenne (1997)的封閉解，2876.192752。

『表 4.2』 外生違約門檻評價結果並與 Bryis and Varenne (1997)比較

內生違約門檻，沒有配息，沒有變賣資產

	外生違約公司債價值
DFPM-WHT	2874.890577
Bryis	2876.192752

因此 DFPM-HWT 在評價具外生違約門檻的風險性債券是一個好的數值方法。再分別對公司價值的波動ϕ、公司價值與利率的相關係數ρ做敏感度分析，如『表 4.3』。

『表 4.3』 ϕ與ρ敏感度分析

ϕ	DFPM-WHT	Bryis and Varenne (1997)
ϕ=0.2	2886.806817	2886.977775
ϕ=0.3	2874.890577	2876.192752
ϕ=0.4	2846.324945	2848.340308

ρ	DFPM-WHT	Bryis and Varenne (1997)
ρ=-0.25	2874.890577	2876.192752
ρ=0	2874.630502	2874.258516
ρ=0.25	2874.367424	2872.239598

當資產價值波動度愈大，則資產價值愈容易碰觸違約門檻而發生違約，因此具有違約風險的債券價值愈低。

二、內生違約門檻：

DFPM-HWT 評價模型也可以評價具內生違約門檻的風險性債券。根據 Acharya (2002)的評價方法，假設有一債券為到期日一年而且具有連續債息的公司債，是一個具有違約風險的債券，面額 F 為 3000 元，假設起始公司資產價值 V_0 為 5000 元。並假設利率模型為 Hull and White(1994)隨機利率模型公司價值的波動 $\phi = 0.3$、均數復迴歸率 $a = 0.5$、利率波動度 $\sigma = 0.01$、公司價值與利率的相關係數 $\rho = -0.25$、支付比率 $\gamma = 0.05$、股利率 $c = 0.05$ 及回收率 $f_1 = f_2 = 1$，且不考慮破產成本與稅盾效果，如『表 4.4』。

『表 4.4』 內生違約門檻評價結果

內生違約門檻，連續債息率 $c = 0.05$ ，支付比率 $\gamma = 0.05$			
	Host Bond price	Option Value	Defaultable bond price
DFPM-WHT	3035.625087	21.859378	3013.765709

Host bond 指無風險債券價格。Option Value 指 $f_D(p,v,t) \equiv \sup_{t \le \tau \le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - V_\tau)^+ \middle| F_t\right]$ 。

第二節 各種債券型商品特性分析

本節利用 DFPM-HWT 數值評價模型來說明在第四章中提到的各種債券型商品特性。參數與第四章第一節中內生違約門檻的例子設定相同的參數。

一、Acharya (2002)：

討論具有違約風險的債券(defaultable bond)、可贖回債券(callable bond)與具有違約風險的可贖回債券(callable-defaultable bond)，並定義其價值分別為 P_D、P_C 與 P_{CD} 。

在『表 4.5』中討論無風險債券價格對選擇權價值的敏感度分析，表中左欄

為利率低，無風險債券價格高者；右欄為利率高，無風險債券價格低者。

『表 4.5』 D、C 與 CD 對無風險債券價格的敏感度分析

	zero			zero+10bp	
host bond	option	P_D	host bond	option	P_D
3035.625	21.85938	3013.766	3032.665	21.67275	3010.993

		zero			zero+10bp	
call price	host bond	option	P_C	host bond	option	P_C
3030	3035.625	5.625087	3030	3032.665	2.978904	3029.687
3035	3035.625	1.745362	3033.88	3032.665	0.831422	3031.834
3040	3035.625	0.424173	3035.201	3032.665	0.181093	3032.484
3050	3035.625	0.011217	3035.614	3032.665	0.003838	3032.662

		zero			zero+10bp	
call price	host bond	option	P_{CD}	host bond	option	P_{CD}
3030	3035.625	22.66064	3012.964	3032.665	22.16962	3010.496
3035	3035.625	22.13831	3013.487	3032.665	21.82815	3010.837
3040	3035.625	21.93593	3013.689	3032.665	21.71076	3010.955
3050	3035.625	21.86201	3013.763	3032.665	21.67378	3010.992

左欄 zero 指 Hull-White 利率模型的零息利率以『表 4.1』中的零息利率為參數，右欄 zero+10bp 即零息利率再加 10bp。host bond 指無風險債券價格。option 為(2.1.18)所定義。

當利率上升 10bp，無風險債券價格由 3035.625087 下降到 3032.665497，且選擇權價值也變低，驗證了 Theorem 1，且無風險債券價格降低了 2.95959 較選擇權價值變低的幅度大，驗證了 Theorem 2，因此這三種公司債價值變低。在相同的贖回價格下，滿足 $f_C(p,v,t) \vee f_D(p,v,t) \le f_{CD}(p,v,t) \le f_C(p,v,t) + f_D(p,v,t)$ 也驗證了 Theorem 6。

在『表 4.6』中討論資產價值對選擇權價值的敏感度分析：

『表 4.6』 D、C 與 CD 對資產價值的敏感度分析

	V_0=5000			V_0=5010	
host bond	option	P_D	host bond	option	P_D
3035.625	21.85938	3013.766	3035.625	21.5251	3014.150

	V_0=5000			V_0=5010		
call price	host bond	option	P_{CD}	host bond	option	P_{CD}
3030	3035.625	22.66064	3012.964	3035.625	22.33849	3013.287
3035	3035.625	22.13831	3013.487	3035.625	21.80839	3013.817
3040	3035.625	21.93593	3013.689	3035.625	21.60283	3014.022
3050	3035.625	21.86201	3013.763	3035.625	21.52776	3014.097

左欄假設起始資產價值 V_0=5000，右欄假設起始資產價值 V_0=5010。

由於資產價值不影響可贖回債券價值，故在此不討論，因此由『表 4.6』中得知當初始資產變高，無風險債券價格不變，而選擇權價值變低，驗證了 Theorem 4，因此具有違約風險的債券價值與具有違約風險的可贖回債券價值變高。且資產價值增加 10 元而選擇權價值變低的幅度小於 10 元，驗證了 Theorem 5。

二、延伸：

討論可轉換債券(convertible Bond)、可賣回債券(putable Bond)與可賣回且可轉換債券(putable-convertible Bond) 並定義其價值分別為 P_{CB} 、 P_{Put} 與 P_{PutCB} 。

1. 可轉換債券：

在『表 4.7』中討論無風險債券價格對選擇權價值的敏感度分析。其中假設轉換比率 $q = 0.75$ 。

『表 4.7』 CB 對無風險債券價格的敏感度分析

	host bond	option	P_{CB}
zero-10bp	3038.587614	43.126776	3081.71439
zero	3035.625087	43.400073	3079.02516
zero+10bp	3032.665497	43.674736	3076.340233

option 為(3.1.6)所定義，且假設沒有普通公司債(straight bond)， $F_B = 0$ 。

當利率上升 10bp，無風險債券價格由 3035.625087 下降到 3032.665497，而選擇權價值由 43.400073 上升到 43.674736，驗證 Theorem 7.特性(1)，而且無風險債

券價格降低了 2.95959 較選擇權價值變高 0.274663 的幅度大，驗證 Theorem 7.特性(2)，因此可轉換債券價值變低。

在『表 4.8』中討論資產價值對選擇權價值的敏感度分析：

『表 4.8』 CB 對資產價值的敏感度分析

	host bond	option	P_{CB}
V_0=5000	3035.625087	43.400073	3079.02516
V_0=5010	3035.625087	44.084368	3079.709455
V_0=5020	3035.625087	44.792934	3080.418021
V_0=5030	3035.625087	45.501153	3081.12624

當初始資產變高，無風險債券價格不變，而選擇權價值變高，驗證 Theorem 7.特性(4)，因此可轉換債券價值變高。且資產價值增加 10 元，選擇權價值增加的幅度小於 10 元，驗證 Theorem 7.特性(5)。

2. 可賣回債券：

可賣回債券中無風險債券價格與選擇權價值的敏感度分析以不同的利率期限結構探討選擇權價值的變化，如『表 4.9』。

『表 4.9』Put 對不同利率期限結構的敏感度分析

	option		
Putable	normal curve	normal curve+10bp	difference
3035	49.507547	51.398323	1.890776
3040	54.436385	56.333563	1.897178
3045	59.36572	61.269673	1.903953
3050	64.295745	66.206211	1.910466
host bond	2995.37243	2992.452841	-2.919589

	option		
Putable	constant curve	constant curve+10bp	difference
3035	33.058695	33.056172	-0.002523
3040	37.888942	37.882508	-0.006434

3045	42.719248	42.708928	-0.01032
3050	47.549618	47.535429	-0.014189
host bond	3045.04061	3042.071592	-2.969018

Putable	option		difference
	inverted curve	inverted curve+10bp	
3035	33.556664	33.523125	-0.033539
3040	38.467396	38.428948	-0.038448
3045	43.378127	43.334771	-0.043356
3050	48.288859	48.240594	-0.048265
host bond	3095.554246	3092.534954	-3.019292

假定遞增的利率期限結構函數為 $zero(x)=0.01\cdot\ln(x)$，水平的利率期限結構函數為 $zero(x)=0.035$，遞減的利率期限結構函數為 $zero(x)=0{,}07-0.01\cdot\ln(x)$，其中 $x>1$。

由表中可看出選擇權價值會因不同的利率期限結構而遞增或遞減。且當利率上升 10bp，無風險債券價格在不同的利率期限結構分別降低了 2.919589, 2.969018, 3.019292，選擇權價值變化皆小於無風險債券價格的變化，仍滿足 Theorem 8.特性(2)。

3. 可賣回且可轉換債券：

在『表 4.10』中討論無風險債券價格對選擇權價值的敏感度分析。其中假設轉換比率 $q=0.75$。

『表 4.10』PutCB 對無風險債券價格的敏感度分析

	host bond	option	P_{PutCB}
zero-10bp	3038.587614	73.939702	3112.527316
zero	3035.625087	74.328766	3109.953853
zero+10bp	3032.665497	74.751873	3107.41737

option 為(3.1.26)所定義。零息利率以『表 4.1』中的零息利率為參數。

當利率上升 10bp，無風險債券價格由 3035.625087 下降到 3032.665497 降低了 2.95959，而選擇權價值由 74.328766 上升到 74.751873 變高 0.423197，選擇權價值變化小於無風險債券價格的變化，驗證 Theorem 9.特性(2)。

在『表 4.11』中討論資產價值對選擇權價值的敏感度分析：

『表 4.11』 PutCB 對資產價值的敏感度分析

	host bond	option	P_{PutCB}
V_0=5000	3035.625087	74.328766	3109.953853
V_0=5010	3035.625087	74.895615	3110.520702
V_0=5020	3035.625087	75.462763	3111.08785
V_0=5030	3035.625087	76.030451	3111.655538

當初始資產變高，無風險債券價格不變，而選擇權價值變高，驗證 Theorem 9.特性(3)，因此可賣回且可轉換債券價值變高。且資產價值增加 10 元，選擇權價值增加的幅度小於 10 元，驗證 Theorem 9.特性(4)。

三、組合

討論具有違約風險的可轉換債券(defaultable-convertible bond)、可贖回且可轉換債券(callable-convertible bond)與可贖回且可賣回債券(callable-putable bond)並定義其價值分別為 P_{DCB} 、P_{CCB} 與 P_{CPut} 。

1. 具有違約風險的可轉換債券：

在『表 4.12』中討論無風險債券價格對選擇權價值的敏感度分析。其中假設轉換比率 $q = 0.75$ 。

『表 4.12』DCB 對無風險債券價格的敏感度分析

		zero	
	host bond	option	P_{DCB}
zero-10bp	3038.587614	-21.079364	3059.666978
zero	3035.625087	-21.540695	3057.165782
zero+10bp	3032.665497	-22.001982	3054.667479
$DD_{zero,zero+10bp}$	2959.59	-	2498.303

DD 指價格存續期間，Dollar Duration，$DD \equiv \lim_{\Delta r^{+} \to 0} \frac{p_2 - p_1}{\Delta r}$，其中 p 為債券價格。option 為(3.1.32)

所定義。

當利率變高，無風險債券價格變低，選擇權價值變低，驗證 Theorem 10.特性(1)，且無風險債券的價格存續期間(dollar duration) 2959.59 較具有違約風險的可轉換債券的價格存續期間 2498.303 大，驗證 Theorem 10.特性(2)。

在『表 4.13』中討論資產價值對選擇權價值的敏感度分析：

『表 4.13』DCB 對資產價值的敏感度分析

	host bond	option	P_{DCB}
V_0=5000	3035.625087	-21.540695	3057.165782
V_0=5010	3035.625087	-22.559272	3058.184359
V_0=5020	3035.625087	-23.602093	3059.22718
V_0=5030	3035.625087	-24.644534	3060.269621

當初始資產變高，無風險債券價格不變，選擇權價值變低，驗證 Theorem10.特性(4)，因此具有違約風險的可轉換債券價值變高。且資產價值增加 10 元，具有違約風險的可轉換債券價值增加的幅度小於 10 元的兩倍，驗證 Theorem 10.特性(5)。

2. 可贖回且可轉換債券：

在『表 4.14』中討論無風險債券價格對選擇權價值的敏感度分析。其中假設轉換比率 $q = 0.75$。

『表 4.14』 CCB 對無風險債券價格的敏感度分析

	host bond	option	P_{CCB}
zero-10bp	3038.587614	42.163221	3080.750835
zero	3035.625087	42.976606	3078.601693
zero+10bp	3032.665497	43.494267	3076.159764
$DD_{\text{zero,zero+10bp}}$	2959.59	-	2441.929

option 為(3.1.42)所定義。q=0.75。$k_C = 3040$。

當利率變高，無風險債券價格變低，選擇權價值變高，驗證 Theorem 11.特性(1)，無風險債券的價格存續期間(dollar duration) 2959.59 較可贖回且可轉換債券的價

格存續期間 2441.929 大，驗證 Theorem 11.特性(2)。

在『表 4.15』中討論資產價值對選擇權價值的敏感度分析：

『表 4.15』CCB 對資產價值的敏感度分析

	host bond	option	P_{CCB}
V_0=5000	3035.625087	37.774986	3073.400073
V_0=5010	3035.625087	38.459281	3074.084368
V_0=5020	3035.625087	39.167847	3074.792934
V_0=5030	3035.625087	39.876066	3075.501153

當初始資產變高，無風險債券價格不變，選擇權價值也變高，驗證 Theorem11.特性(3)，因此具有違約風險的可轉換債券價值變高。且資產價值增加 10 元，選擇權價值增加的幅度小於 10 元，驗證 Theorem11.特性(4)。

3. 可贖回且可賣回債券：

假設贖回價格大於賣回價格 $k_C > k_{Put}$，以 $k_C = 3040$、$k_{Put} = 3035$ 為例。在『表 4.16』中討論無風險債券價格對選擇權價值的敏感度分析。

『表 4.16』 CPut 對無風險債券價格的敏感度分析

	host bond	zero option	P_{CPut}
zero-10bp	3038.587614	-32.729331	3071.316945
zero	3035.625087	-33.454545	3069.079632
zero+10bp	3032.665497	-33.931751	3066.597248
$DD_{zero,zero+10bp}$	2959.59	-	2482.384

DD 指價格存續期間，Dollar Duration。option 為(3.1.52)所定義。零息利率以『表 4.1』中的零息利率為參數。$k_C = 3040$ 、$k_{Put} = 3035$ 。

無風險債券的價格存續期間(dollar duration) 2959.59 較可贖回且可賣回債券的價格存續期間 2482.384 大，驗證 Theorem 12.特性(2)。

而資產的變化不影響可贖回且可賣回債券的價值，所以在此不討論。

第三節 債權人保護

如果公司債存在某些性質對債權人愈有利，則愈能保護債權人，也使得債券價值愈高。因此本節所要討論的是什麼樣性質的公司債對債權人而言較能受到保護。以下列舉出四種性質比較對債權人保護的探討，第一，比較變賣資產與不變賣資產何種方式來償債較能保護債權人；第二，比較外生違約門檻不同高度與內生違約門檻何種違約條件較能保護債權人；第三，討論可轉換債券對債權人的保護；第四，討論可賣回債券對債權人的保護。

一、資產變賣情況：

在第三章第三節中已詳細介紹了資產變賣情況，有完全變賣資產、變賣資產比率 γ 倍與不變賣資產。當遇到償還債息時，完全變賣資產指完全由變賣資產來支應；變賣資產比利率 γ 倍指不管債息多少都變賣資產的 γ 倍，不足由股東補足；而不變賣資產表示 $\gamma = 0$ 完全由股東削弱股權來支應。因此以支付比利率 γ 做具外生違約門檻的風險性債券敏感度分析。

『表 4.17』 資產變賣分析

完全變賣資產	變賣資產 γ 倍		不變賣資產
	γ=0.05	γ=0.02	γ=0
3017.55516	3016.28016	3019.54305	3021.449884

當支付比利率 γ 愈高，則使債券價格愈低，表示變賣資產的比率愈高對債權人愈不利，因為為了償還債息而變賣資產使得資產價值向下跳躍，對債權人而言被倒帳的機會變大，因此不變賣資產降低債權人被倒帳的機會較能夠要保護債權人。而發現完全變賣資產的具有違約風險的債券價值界於變賣資產 $\gamma = 0.05$ 倍與 $\gamma = 0.02$ 倍的債券價值之間，因此推論變賣資產 $\gamma = 0.05$ 倍已經超出債息金額，變賣過多資產，而 $\gamma = 0.02$ 則為變賣資產不足債息金額。

二、違約門檻設置：

以債權人保護程度ξ做敏感度分析，ζ小公司不易破產，當公司資產觸碰到門檻破產時，公司資產已經所剩無幾；反之ζ大公司易破產，當公司資產不夠大時，公司宣告破產時仍有足夠的資金償還有優先求償權的債權人。因此ζ愈大對債權人保護程度愈大。這裡以完全變賣資產為基本假設之下做討論。

『表 4.18』 違約門檻設置分析

外生違約門檻			內生違約門檻
ζ=0.99	ζ=0.9	ζ=0.3	ζ=0
3031.70708	3017.55516	3014.57943	3014.576023

因為討論在完全變賣資產例子下，因此內生違約門檻中股東不必稀釋股權，所以當外生違約門檻中的參數$\zeta=0$時所求得的債券價值即為內生違約門檻的債券價值。因此由『表 4.18』可發現ζ愈大具有違約風險的債券價也愈大，表示債權人受到較好的保護。

三、可轉換債券：

在無違約風險的假設下，由(3.1.12)中可知道可轉換債券價值比無風險債券價值多出了一個選擇權價值，這是因為多賦與債權人將債券轉換成股票的權力，因此債權人可以在對自己有利的情況下將債券轉換成股票，因而債權人得以受到保護。

而轉換比率q的高低會影響債權人是否執行轉換的決策，因此對轉換比率q做敏感度分析。

『表 4.19』 轉換比率q敏感度分析

	host bond	option	P_{CB}
q=0.5	3035.625087	5.340341	3040.965428
q=0.75	3035.625087	43.400073	3079.02516
q=1	3035.625087	122.217501	3157.842588

當轉換比率q愈高，轉換成股票的股數就愈多，對債權人有利。因此由『表 4.19』可發現q愈大可轉換債券價值愈大，表示債權人可參與公司賺錢分紅的好處。

四、可賣回債券：

在無違約風險的假設下，由(3.1.10)中可知道可賣回債券價值比無風險債券價值多出了一個選擇權價值，這是因為多賦與債權人將債券以賣回價格賣回給公司的權力，因此債權人可以在對自己有利的情況下將債券賣回給公司，因而債權人也得以受到保護。

而賣回價格k_{Put}的高低會影響債權人是否執行賣回的決策，因此對賣回價格k_{Put}做敏感度分析。

『表 4.20』 賣回價格k_{Put} 敏感度分析

put price	host bond	option	P_{Put}
3030	3035.625087	29.045088	3064.670175
3035	3035.625087	33.878718	3069.503805
3040	3035.625087	38.712661	3074.337748
3050	3035.625087	48.381527	3084.006614

當賣回價格k_{Put} 愈高，可以以較高的金額賣回給公司，對債權人有利。因此由『表 4.20』可發現k_{Put} 愈大具有違約風險的債券價也愈大，表示債權人受到較好的保護。

第五章　結論與後續研究發展

第一節　　結論

本文都可以將各種公司債表示成一個無風險債券(host bond)再加減一個或多個選擇權，並能夠延續 Acharya (2002)文章為內生違約門檻並對各種公司債做特性分析，也利用了陳博宇 (2009)DFPM-WHT 評價模型，解決資產價值與利率並非獨立的問題，也解決非線性誤差的問題，更分析了 Acharya 所未提到債權人保護的問題，第一，不以變賣資產償還債息將保有較多的公司資產，較能保護債權人；第二，違約門檻設的愈高，而當公司破產時仍有較多的資金來償還債息，因此違約門檻設的愈高，則愈能保護債權人；第三，可轉換債券賦與債權人將債券轉換成股票的權力，對債權人有保護的功能；第四，可賣回債券賦與債權人將債券以賣回價格賣回給公司的權力，對債權人也有保護的功能。

第二節　後續研究發展

本文延續 Acharya (2002)文章中提出的具有違約風險的債券、可贖回債券、具有違約風險的可贖回債券，再延伸出可轉換債券、可賣回債券、可賣回且可轉換債券、具有違約風險的可轉換債券、可贖回且可轉換債券、可贖回且可賣回債券等，也討論了上述各種公司債對無風險債券的影響，因此後續可以再討論上述各種公司債的存續期間(duration)，並討論其避險策略。

本文討論債權人保護但未考慮到稅盾效果與破產成本，由於稅盾效果與破產成本的存在會影響違約門檻進而影響債權價值，對債權人保護會因為考慮了稅盾效果與破產成本而有不同的保護程度。

附錄 A.

定義 $f_{CB'}(p,v,t) \equiv \sup_{t \le \tau \le T} \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_{\tau} - P_{\tau})^{+} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}\}} \middle| F_t\right]$，分析 $f_{CB'}(p,v,t)$ 滿足下列幾個特性：

Theorem 13.

特性(1). $p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow f_{CB'}(p^{(1)},v,t) < f_{CB'}(p^{(2)},v,t)$。

特性(2). $p^{(1)} \ne p^{(2)} \Rightarrow \dfrac{f_{CB'}(p^{(2)},v,t) - f_{CB'}(p^{(1)},v,t)}{p^{(2)} - p^{(1)}} \ge -1$。

特性(3). $v^{(1)} < v^{(2)} \Rightarrow f_{CB'}(p,v^{(1)},t) < f_{CB'}(p,v^{(2)},t)$。

特性(4). $v^{(1)} < v^{(2)} \Rightarrow \dfrac{f_{CB'}(p,v^{(1)},t) - f_{CB'}(p,v^{(2)},t)}{v^{(1)} - v^{(2)}} \le 1$。

證明特性(1)：

令 $p^{(1)}$、$p^{(2)}$ 是 state 1 與 state 2 兩種情況的無風險債券在時間 t 時價值，在時間 t 滿足 $p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow \beta^{(1)} > \beta^{(2)}$。令 τ 是 state 1 的最佳停止時間，$V_t = v$， $F_B = 0$，根據上述 $f_{CB'}(p,v,t)$ 所定義，這兩個 state 的選擇權價值差為

$$
\begin{aligned}
& f_{CB'}(p^{(1)},v,t) - f_{CB'}(p^{(2)},v,t) \\
& < \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(zV_{\tau}^{(1)} - P_{\tau}^{(1)})^{+} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(1)}\}} \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_{\tau}^{(2)} - P_{\tau}^{(2)})^{+} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(1)}\}} \middle| F_t\right] \\
& = \tilde{E}[(e^{-\int_t^{\tau} r_s^{(1)} ds}(zV_t e^{\int_t^{\tau} r_s^{(1)} ds - \int_t^{\tau} \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^{\tau} \phi_s^2 ds + \int_t^{\tau} \phi_s d\tilde{W}_s} - P_{\tau}^{(1)})^{+} \\
& \qquad - e^{-\int_t^{\tau} r_s^{(2)} ds}(zV_t e^{\int_t^{\tau} r_s^{(2)} ds - \int_t^{\tau} \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^{\tau} \phi_s^2 ds + \int_t^{\tau} \phi_s d\tilde{W}_s} - P_{\tau}^{(2)})^{+}) \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(1)}\}} | F_t] \\
& = \tilde{E}[((zV_t e^{-\int_t^{\tau} \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^{\tau} \phi_s^2 ds + \int_t^{\tau} \phi_s d\tilde{W}_s} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_{\tau}^{(1)})^{+} \\
& \qquad - (zV_t e^{-\int_t^{\tau} \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^{\tau} \phi_s^2 ds + \int_t^{\tau} \phi_s d\tilde{W}_s} - \beta_{t,\tau}^{(2)} P_{\tau}^{(2)})^{+}) \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(1)}\}} | F_t] \\
& < 0
\end{aligned}
$$

由(2.1.32)已知 $V_t = V_0 e^{\int_0^t r_s\,ds - \int_0^t \gamma_s\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2\,ds + \int_0^t \phi_s\,d\tilde{W}_s}$，且因為 $\beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)} > \beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)}$，所以 $(zV_t e^{-\int_t^\tau \gamma_s\,ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2\,ds + \int_t^\tau \phi_s\,d\tilde{W}_s} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)})^+ < (zV_t e^{-\int_t^\tau \gamma_s\,ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2\,ds + \int_t^\tau \phi_s\,d\tilde{W}_s} - \beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)})^+)$，故得證。

證明特性(2)：

令在時間 t 時 state 1 與 state 2 的無風險債券價格 $p^{(1)} > p^{(2)}$ 然而我們欲證 $f_{CB}(p^{(1)},v,t) - f_{CB}(p^{(2)},v,t) \geq p^{(2)} - p^{(1)}$。令 $r^{(1)} < r^{(2)}$，且令 τ 是 state 2 的最佳停止時間，$V_t = v$，則

$$
\begin{aligned}
& f_{CB'}(p^{(1)},v,t) - f_{CB'}(p^{(2)},v,t) \\
& > \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(zV_\tau^{(1)} - P_\tau^{(1)})^+ \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(2)}\}} \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_\tau^{(2)} - P_\tau^{(2)})^+ \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(2)}\}} \middle| F_t\right] && \text{(A.1)} \\
& = \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(1)}(zV_\tau^{(1)} - P_\tau^{(1)})^+ - \beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_\tau^{(2)} - P_\tau^{(2)})) \cdot 1_{\{zV_\tau^{(2)} > P_\tau^{(2)}\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(2)}\}} \middle| F_t\right] && \text{(A.2)} \\
& > \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(1)}(zV_\tau^{(1)} - P_\tau^{(1)}) - \beta_{t,\tau}^{(2)}(zV_\tau^{(2)} - P_\tau^{(2)})) \cdot 1_{\{zV_\tau^{(2)} > P_\tau^{(2)}\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(2)}\}} \middle| F_t\right] \\
& = \tilde{E}[(e^{-\int_t^\tau r_s^{(1)}ds}(zV_t e^{\int_t^\tau r_s^{(1)}ds - \int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - P_\tau^{(1)}) \\
& \qquad - e^{-\int_t^\tau r_s^{(2)}ds}(zV_t e^{\int_t^\tau r_s^{(2)}ds - \int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - P_\tau^{(2)})) \cdot 1_{\{zV_\tau^{(2)} > P_\tau^{(2)}\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(2)}\}} | F_t] \\
& = \tilde{E}[((zV_t e^{-\int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)}) \\
& \qquad - (zV_t e^{-\int_t^\tau \gamma_s ds - \frac{1}{2}\int_t^\tau \phi_s^2 ds + \int_t^\tau \phi_s d\tilde{W}_s} - \beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)})) \cdot 1_{\{zV_\tau^{(2)} > P_\tau^{(2)}\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(2)}\}} | F_t] \\
& = \tilde{E}\left[(\beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)}) \cdot 1_{\{zV_\tau^{(2)} > P_\tau^{(2)}\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(2)}\}} \middle| F_t\right] \\
& \geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)} \middle| F_t\right] && \text{(A.3)} \\
& \geq (p^{(2)} - p^{(1)}) && \text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

在(A.1)中，因為 $r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow P_\tau^{(1)} > P_\tau^{(2)}$、$\beta_{t,\tau}^{(1)} > \beta_{t,\tau}^{(2)}$ 且根據(2.1.32)得知 $V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$，如果 $P_\tau^{(2)} > zV_\tau^{(2)}$，則 $zV_\tau^{(1)} < zV_\tau^{(2)} < P_\tau^{(2)} < P_\tau^{(1)}$，所以 $P_\tau^{(1)} > zV_\tau^{(1)}$，因此得到(A.2)。因為 $\beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)} < 0$ 所以得到(A.3)，再根據 Lemma 1，得到(A.4)。

證明特性(3)：

令 $v^{(1)}$ 、 $v^{(2)}$ 分別是 state 1 與 state 2 兩種狀態在時間 t 時資產價值，且假設 $v^{(1)} < v^{(2)}$ ，根據(2.1.32)可知 $V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$ 。令 τ 是 state 1 的最佳停止時間，這兩個 state 的選擇權價值差

$$
\begin{aligned}
& f_{CB'}(p,v^{(2)},t) - f_{CB'}(p,v^{(1)},t) \\
& \geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(2)} - P_\tau)^+ \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(1)}\}} \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(1)} - P_\tau)^+ \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(1)}\}} \middle| F_t\right] \\
& \geq 0
\end{aligned}
$$

因為 $V_\tau^{(2)} > V_\tau^{(1)} \Rightarrow (zV_\tau^{(2)} - P_\tau)^+ \geq (zV_\tau^{(1)} - P_\tau)^+$ ，故得證。

證明特性(4)：

令 $v^{(1)}$ 、 $v^{(2)}$ 分別是 state 1 與 state 2 兩種狀態在時間 t 時資產價值，且滿足 $v^{(1)} < v^{(2)}$ ，根據(2.1.32)可知 $V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$ 。令 $\tau^{(2)}$ 是 state 2 的最佳停止時間，然而我們想要證明 $f_{CB'}(p,v^{(1)},t) - f_{CB'}(p,v^{(2)},t) \geq v^{(1)} - v^{(2)}$ ，因此這兩個 state 的選擇權價值差

$$f_{CB'}(p,v^{(1)},t) - f_{CB'}(p,v^{(2)},t)$$

$$\geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(1)} - P_\tau)^+ \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(2)}\}} \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(2)} - P_\tau)^+ \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(2)}\}} \middle| F_t\right] \tag{A.5}$$

$$= \tilde{E}[(\beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(1)} - P_\tau)^+ - \beta_{t,\tau}(zV_\tau^{(2)} - P_\tau)) \cdot 1_{\{zV_\tau^{(2)} > P_\tau\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(2)}\}} | F_t] \tag{A.6}$$

$$\geq \tilde{E}[(\beta_{t,\tau}((zV_\tau^{(1)} - P_\tau) - (zV_\tau^{(2)} - P_\tau)) \cdot 1_{\{zV_\tau^{(2)} > P_\tau\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(2)}\}} | F_t]$$

$$= z\tilde{E}[\beta_{t,\tau}(V_\tau^{(1)} - V_\tau^{(2)}) \cdot 1_{\{zV_\tau^{(2)} > P_\tau\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{CB}^{(2)}\}} | F_t] \tag{A.7}$$

$$\geq z\tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(V_\tau^{(1)} - V_\tau^{(2)}) \middle| F_t\right] \tag{A.8}$$

$$= ze^{-\int_t^\tau \gamma_u du}(v^{(1)} - v^{(2)}) \tag{A.9}$$

$$\geq v^{(1)} - v^{(2)} \tag{A.10}$$

在(A.5)中，因為$V_\tau^{(1)} < V_\tau^{(2)}$，如果 $zV_\tau^{(2)} < P_\tau$ ，則 $zV_\tau^{(1)} < P_\tau$ ，因此得到(A.6)。在(A.7)中，由於$V_\tau^{(1)} - V_\tau^{(2)} < 0$ ，所以將$1_{\{zV_\tau^{(2)} > P_\tau\}} \cdot 1_{\{\tau^{(2)} = \tau_{CB}\}}$拿掉會變小，得到(A.8)。根據(2.1.32)可知$V_t = V_0 e^{\int_0^t r_s\,ds - \int_0^t \gamma_s\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2 ds + \int_0^t \phi_s d\widetilde{W}_s}$ ，將$e^{-\int_t^\tau \gamma_u du}$提出後條件期望值內為 martingale，得到(A.9)。由於$v^{(1)} - v^{(2)} < 0$，又因為$e^{-\int_t^\tau \gamma_u du} < 1$且$z < 1$，得到(A.10)，故得證。

定義 $f_{C'}(p,v,t) \equiv \sup_{t \le \tau \le T} \widetilde{E}\left[\beta_{t,\tau}(P_\tau - k_C)^+ \cdot 1_{\{\tau = \tau'_C\}} \middle| F_t\right]$，分析 $f_{C'}(p,v,t)$ 滿足下列幾個特性：

Theorem 14.

特性(1). $p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow f_{C'}(p^{(1)},v,t) > f_{C'}(p^{(2)},v,t)$ 。

特性(2). $p^{(1)} \ne p^{(2)} \Rightarrow \dfrac{f_{C'}(p^{(2)},v,t) - f_{C'}(p^{(1)},v,t)}{p^{(2)} - p^{(1)}} \le 1$ 。

證明特性(1)：

令 $p^{(1)}$、$p^{(2)}$是 state 1 與 state 2 兩種情況的無風險債券在時間t時價值，在時間t滿足 $p^{(1)} > p^{(2)} \Rightarrow r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow \beta^{(1)} > \beta^{(2)}$ 。令 τ 是 state 2 的最佳停止時間，$V_t = v$ ，根據上述 $f_{C'}(p,v,t)$ 所定義，這兩個 state 的選擇權價值差為

$$
\begin{aligned}
& f_{C'}(p^{(1)},v,t) - f_{C'}(p^{(2)},v,t) \\
& \ge \widetilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(P_\tau^{(1)} - k_C)^+ \cdot 1_{\{\tau = \tau_{C'}^{(2)}\}} \middle| F_t\right] - \widetilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(P_\tau^{(2)} - k_C)^+ \cdot 1_{\{\tau = \tau_{C'}^{(2)}\}} \middle| F_t\right] > 0 \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

在(A.11)中，因為$r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow \beta_{t,\tau}^{(1)} > \beta_{t,\tau}^{(2)}$ 且 $P_\tau^{(1)} \ge P_\tau^{(2)}$ ，故得證。

證明特性(2)：

令在時間t時 state 1 與 state 2 的無風險債券價格 $p^{(1)} > p^{(2)}$ 然而我們欲證 $f_{C'}(p^{(2)},v,t) - f_{C'}(p^{(1)},v,t) \geq p^{(2)} - p^{(1)}$。令 $r^{(1)} < r^{(2)}$，且令 τ 是 state 1 的最佳停止時間，$V_t = v$，則

$$
\begin{aligned}
& f_{C'}(p^{(2)},v,t) - f_{C'}(p^{(1)},v,t) \\
& \geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)}(P_t^{(2)} - k_C)^+ \cdot 1_{\{\tau=\tau_{C'}^{(1)}\}} \middle| F_t\right] - \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(1)}(P_\tau^{(1)} - k_C)^+ \cdot 1_{\{\tau=\tau_{C'}^{(1)}\}} \middle| F_t\right] && \text{(A.12)} \\
& = \tilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(2)}(P_\tau^{(2)} - k_C)^+ - \beta_{t,\tau}^{(1)}(P_\tau^{(1)} - k_C)] \cdot 1_{\{P_\tau^{(1)} > k_C\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{C'}^{(1)}\}} | F_t] && \text{(A.13)} \\
& \geq \tilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(2)}(P_\tau^{(2)} - k_C) - \beta_{t,\tau}^{(1)}(P_\tau^{(1)} - k_C)] \cdot 1_{\{P_\tau^{(1)} > k_C\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{C'}^{(1)}\}} | F_t] \\
& = \tilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)}] \cdot 1_{\{P_\tau^{(1)} > k_C\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{C'}^{(1)}\}} | F_t] \\
& \qquad + \tilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(1)} k_C - \beta_{t,\tau}^{(2)} k_C] \cdot 1_{\{P_\tau^{(1)} > k_C\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{C'}^{(1)}\}} | F_t] && \text{(A.14)} \\
& \geq \tilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)}] \cdot 1_{\{P_\tau^{(1)} > k_C\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{C'}^{(1)}\}} | F_t] && \text{(A.15)} \\
& \geq \tilde{E}\left[\beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)} \middle| F_t\right] && \text{(A.16)} \\
& \geq p^{(2)} - p^{(1)} && \text{(A.17)}
\end{aligned}
$$

在(A.12)中，因為 $r^{(1)} < r^{(2)} \Rightarrow P_\tau^{(1)} > P_\tau^{(2)}$、$\beta_{t,\tau}^{(1)} > \beta_{t,\tau}^{(2)}$，如果 $P_\tau^{(1)} \leq k_C$，則 $P_\tau^{(2)} \leq k_C$，因此得到(A.13)。在(A.14)中，因為 $\beta_{t,\tau}^{(1)} > \beta_{t,\tau}^{(2)}$，因此 $\tilde{E}[[\beta_{t,\tau}^{(1)} k_C - \beta_{t,\tau}^{(2)} k_C] \cdot 1_{\{P_\tau^{(1)} > k_C\}} \cdot 1_{\{\tau=\tau_{C'}^{(1)}\}} | F_t] \geq 0$，得到(A.15)。因為 $\beta_{t,\tau}^{(2)} P_\tau^{(2)} - \beta_{t,\tau}^{(1)} P_\tau^{(1)} < 0$ 所以得到(A.16)，再根據 Lemma 1，得證(A.17)。

參考文獻

中文文獻

[1] 杜宛珮, “運用在信用風險模型的創新數值方法DFPM”,國立交通大學,碩士論文,民國96年。

[2] 鍾明璋, “隨機利率下信用風險之衡量-使用創新之立體樹狀模型”,國立交通大學,碩士論文,民國97年。

[3] 陳博宇, “在 Hull-White 隨機利率下信用風險之衡量—運用創新的數值方法 DFPM-HWT”,國立交通大學,碩士論文,民國 98 年。

英文文獻

[1] Acharya, V. V., and Carpenter J.N., “Corporate Bond Valuation and Hedging with Stochastic Interest Rates and Endogenous Bankruptcy,” *The Review of Financial Studies,* 15, 1355-1383, 2002.

[2] Black, F., and Cox, J.C., “Valuing Corporate Securities：Some Effects of Bond Indenture provisions,” *Journal of Finance,* 31, 361-367, 1976

[3] Brennan, M., and Schwartz, E., “Analyzing Convertible Bonds,” *Journal of Finance and Quantitative Analysis,* 15, 907-929, 1980.

[4] Briys, E., and De Varenne, F., “Valuing Risky Fixed Rate Debt：An Extension,” *Journal of Finance and Quantitative Analysis,* 32, 239-248, 1997.

[5] Dai, T.S., and Lyuu, Y.D., “The Bino-Trinomial Tree：a Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing.”, *Journal of Derivatives,* 17,7-24, 2010.

[6] Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivatives* 6^{Th}. *Englewood Cliffs,* NJ Prentice-Hall, 2006.

[7] Hull, J., and A. White, "Using Hull-White Interest-Rate Trees," *Journal of derivatives*, 3, 26-36, 1996.

[8] Kim, I. J., Ramaswamy, K., and Sundaresan, S. M., "Does default risk in coupons affect the valuation of corporate bonds?: A contingent claims model," *Financial Management* 22, 117-131, 1993.

[9] Leland, H., "Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure," *Journal of Finance*, 49, 1213-1252, 1994.

[10] Longstaff, F.A.Schwartz, E.S., "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt," *Journal of Finance*, 50, 789-819, 1995.

[11] Merton, R. C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest rates," *Journal of Finance* 29, 449-470, 1974.

[12] Shreve, S., *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models,* Springer Finance**,** 2007.

[13] Vasicek, O., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics* 5, 177-188, 1977.