

# 國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

建立遠期 LIBOR 利率的聯合機率分配

**Construct Joint Probability Distribution of Forward LIBOR Rate**



研究生：陳雅雯

指導教授：戴天時 博士

中華民國九十九年六月

# 建立遠期 LIBOR 利率的聯合機率分配

## **Construct Joint Probability Distribution of Forward LIBOR Rate**

研 究 生：陳雅雯

Student : Ya-Wen Chen

指 導 教 授：戴天時 博士

Advisor : Dr. Tian-Shyr Dai



A Thesis Submitted to Graduate Institute of Finance  
National Chiao Tung University  
in partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master of Science in  
Finance

June 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年六月

# 建立遠期 LIBOR 利率的聯合機率分配

研究生：陳雅雯

指導教授：戴天時 博士

國立交通大學財務金融研究所碩士班

2010 年 6 月

## 摘 要

本論文將以 LIBOR 市場模型為基礎，根據不同到期日生效之節點重合遠期利率樹，提出創新方法建造多期間的遠期利率樹之聯合機率分配。由於 LIBOR 市場模型屬於非馬可夫過程，因此在建立樹狀結構時，因路徑相依的特性造成每期節點無法重合。本論文採用 Ho、Stapleton 和 Subrahmanyam(1995)提供節點重合的建樹方法，建構遠期 LIBOR 利率之樹狀結構模型。本文考慮多期的遠期利率之相關性，利用 Cholesky 分解定理的概念，並結合 Andricopoulos et al.(2003) 求面積法，推導出遠期 LIBOR 利率的聯合機率分配。不僅能夠求算不同期間生效的遠期利率之條件機率，亦能評價各種型式的利率衍生性商品，並與實務上常受應用的蒙地卡羅模擬法做比較，證明樹狀模型評價之準確性。

**關鍵字：LIBOR 市場模型、Cholesky 分解定理、蒙地卡羅模擬法**

# Construct Joint Probability Distribution of Forward LIBOR Rate

Student: Ya-Wen Chen

Advisors: Dr. Tian-Shyr Dai

Graduate Institute of Finance  
National Chiao Tung University  
June 2010



This thesis proposes the innovative method of constructing the joint probabilities of forwards rates based on the trees for LIBOR market model. Ho (2008) builds recombined interest trees for simulating the evolution of forwards rates. We suggest that the joint probabilities of forward rates can be constructed by calibrating the correlations with Cholesky decomposition and Andricopoulos et al. (2003) quadrature method. The Monte Carlo simulation is given to verify the correctness of our method in pricing the interest rate derivatives.

**Keywords: LMM, Cholesky decomposition, Monte Carlo simulation**

## 誌謝

對於本篇論文研究能夠順利的達成，首先要感謝戴天時老師的協助，這段期間老師除了對學生不厭其煩的耐心指導，也給予學生很大的鼓勵，試著用最簡單的方式表達，使學生能夠明瞭研究的主軸，這樣深入淺出的方式幫助學生愈快進入情況，也對本篇論文有深刻的體悟。感謝呂育道博士、王之彥博士參與我的論文口試，並給予諸多寶貴的意見，使論文內容更加充實、完善。

接著感謝敏誠、政宏、偲維和亮志研究夥伴們，在論文研究期間給我很多的鼓勵與陪伴，這一年多來，大家一起同甘共苦、努力不懈的態度，是讓我成長的力量。再來要感謝王薇婷學姊，因為有她的帶領，我才能很快的進入狀況。感謝我的好朋友們，任萱、淑雯、郁婷…等適時的給予鼓勵與安慰，替我分憂解勞，使我心靈獲得很大的安慰。以及其他財金 97 級同學，相處這兩年大家帶來很多歡笑，使得研究期間增添不同的色彩，相信你們未來必定會很有自己的一片天。

最後更要感謝我最親愛的家人，尤其是爸爸，有您辛苦的付出，使我在求學路上無後顧之憂，也謝謝家人的陪伴與溫暖，讓我更有勇氣朝自己想走的路邁進，以致今日順利完成碩士學業。

在這裡，將我的論文獻給親人與所有朋友，將論文完成的喜悅與您們分享，並再次獻上感謝與感恩的心，與最誠摯的祝福。

陳雅雯 謹誌于

國立交通大學財務金融研究所

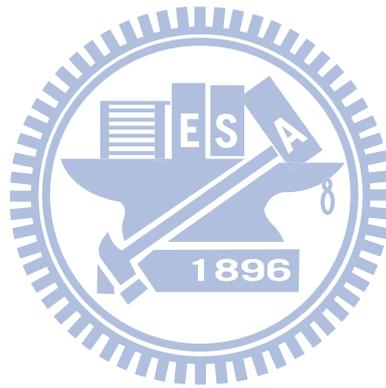
民國九十九年六月

# 目錄

摘要.....	i
Abstract.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	v
圖目錄.....	vi
第一章 緒論.....	1
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究流程與論文架構.....	2
第二章 文獻探討.....	4
第一節 利率模型之演進.....	4
第二節 LIBOR 蒙地卡羅模擬的運用.....	9
第三節 離散時間之 LIBOR 市場模型期望值.....	10
第四節 建造樹狀節點重合的遠期利率 LIBOR 市場模型.....	11
第三章 研究方法.....	16
第四章 實證分析.....	31
第一節 描述利率期限結構的變化.....	31
第二節 評價債券選擇權.....	34
第三節 敏感度分析.....	40
第五章 結論.....	44
參考文獻.....	45

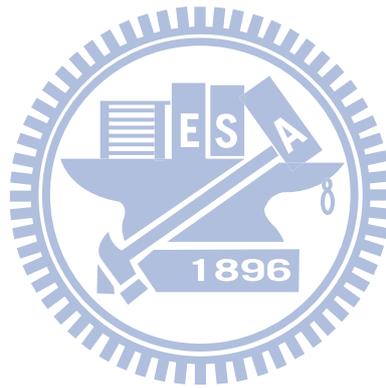
## 表目錄

表 1. 各期的初始遠期利率.....	36
表 2. 初始波動度結構.....	38
表 3. 用樹狀模型來評價債券選擇權.....	39
表 4. 用蒙地卡羅法評價債券選擇權.....	40
表 5. 敏感度分析: 初始遠期利率曲線平移幅度對選擇權價值的影響.....	41
表 6. 敏感度分析: 波動度期間結構平移幅度對選擇權價值的影響.....	42



## 圖目錄

圖 1. $t=0$ 至 $t=1$ 的零息利率結構.....	32
圖 2. 初始遠期利率曲線變動對選擇權價值的影響 .....	41
圖 3. 波動度期間結構變動對選擇權價值的影響 .....	43



## 第一章 緒論

### 第一節 研究背景與動機

近年來，隨著利率模型趨近成熟，日新月異的利率相關性商品也隨之蓬勃發展，而在商品推出之際的成敗取決於訂價是否合理，評價方式能否精確影響評價的結果。

早期傳統的利率模型為描繪瞬間短期利率的隨機過程（如：Vasicek 模型、Hull and White 模型）或是瞬間遠期利率的隨機過程（如：HJM）等。應用這些方式理論上可行，但因為從真實市場無法觀察得知這些瞬間利率，使用模型前為了符合市場資訊還須先做校準的動作，因此自西元 1997 年，由 Brace, Gatarek, and Musiela（BGM）所提出的 LIBOR 市場模型（LIBOR Market Model），此模型為將 HJM 模型間斷化，直接推導市場上可觀察到之 LIBOR 利率的隨機過程，因此不需像傳統利率模型尚須對利率做轉換，可以直接以市場上觀察到之 LIBOR 報價帶入模型中做評價，不僅增加評價的準確性，亦能符合利率波動度結構，更能貼切的描述市場上的利率期間結構。

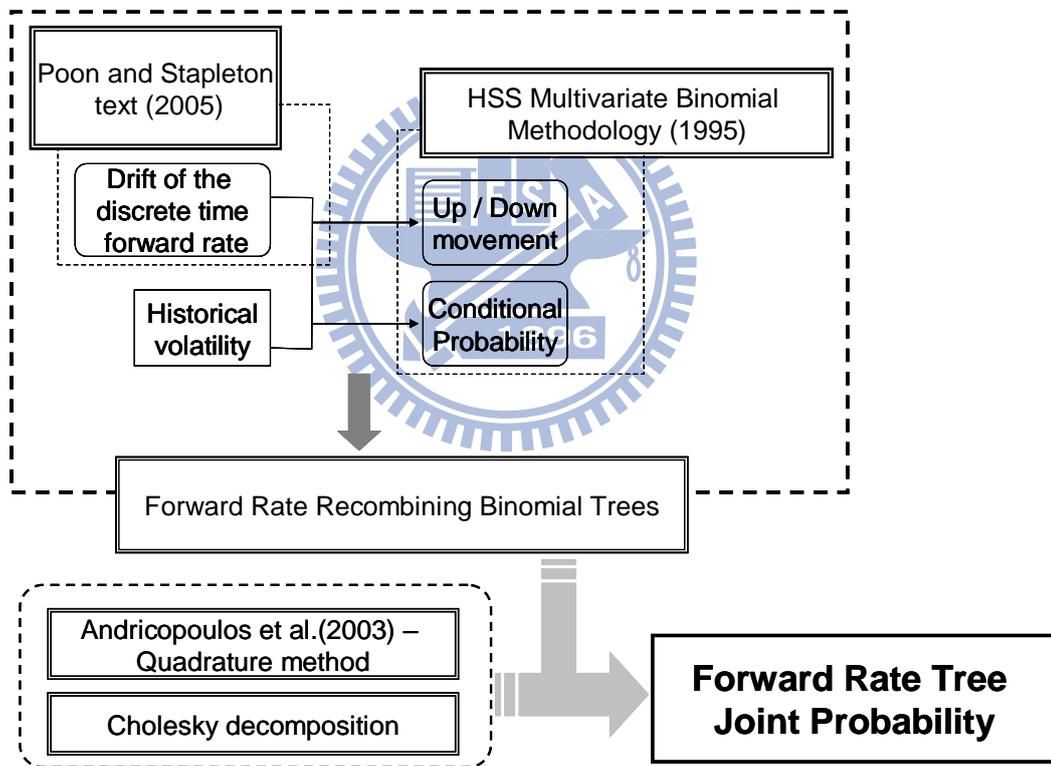
LIBOR 市場模型假設遠期 LIBOR 利率服從對數常態分配，由於 LIBOR 市場模型中的利率隨機過程屬於非馬可夫過程（Non-Markov process），所以在建立樹狀結構時，因路徑相依的特性造成每期節點無法重合，使得節點成指數成長，不僅降低評價的效率，亦提高困難度。

為了克服這個問題，何俊儒（2008）採用與 LIBOR 市場模型相同假設—Ho, Stapleton, and Subrahmanyam（1995）所提出的建樹方法，建立同時描繪利率期間結構與波動度結構，並讓節點重合的二項樹，用來逼近多變量的對數常態過程。但是由於不同到期日生效的遠期利率間含有相關性，所以在我們考慮多期不同生效日之遠期利率的商品時，例如債券選擇權、利率上限選擇權等這類的利

率衍生性商品，就必須求得不同期間生效日之遠期利率樹的聯合機率分配。

本研究根據 Ho, Stapleton, and Subrahmanyam (HSS) (1995) 所提出的建樹方法，將它應用至遠期利率樹上，並同時考慮多期遠期利率之相關性，以 Cholesky 分解定理和 Andricopoulos et al.(2003) 介紹的求面積法 (quadrature method) 推導出此聯合機率分配，如此便可評價多期不同生效日的利率樹之相關金融商品。

## 第二節 研究流程與論文架構



整個研究架構為：根據 Ho, Stapleton, and Subrahmanyam (HSS) (1995) 提供建造多變量且讓節點重合的建樹方法，建立遠期利率樹，並考慮多期的遠期利率之相關性，結合 Cholesky 分解定理和 Andricopoulos et al. (2003) 求面積法，推導出聯合機率分配。

其中，第二章介紹的內容有：簡介利率模型的演進、介紹 LIBOR 市場模型蒙

地卡羅模擬法、根據 Poon 與 Stapleton (2005) 推導出離散時間下之 LIBOR 市場模型的漂浮項，介紹離散的 BGM 模型，最後透過 Ho, Stapleton, and Subrahmanyam 建造樹狀節點重合的數值方法，建立遠期 LIBOR 利率市場模型。

第三章為研究方法，在考慮多期遠期利率的相關性下結合 Cholesky 分解定理和 Andricopoulos et al. (2003) 求面積法，推導出遠期 LIBOR 利率的聯合機率分配。

第四章為實證分析—評價債券選擇權。第五章為本研究之結論與貢獻。



## 第二章 文獻探討

本章將介紹利率模型的演進及蒙地卡羅模擬法在 LIBOR 市場模型的運用，並透過遠期利率協定推導出在離散時間下的 LIBOR 市場模型的漂浮項，並說明 Ho, Stapleton, and Subrahmanyam 建造樹狀節點重合運用至遠期利率的數值方法。

### 第一節 利率模型之演進

利率模型對風險控管及利率衍生性商品的評價方面，皆扮演很重要的角色，好的利率模型須能準確描述現行的利率期間結構，和不同到期日的利率波動度期間結構及相關係數結構，利率模型一般可分為均衡模型 (Equilibrium Models) 和無套利模型 (No Arbitrage Models)。

#### (一) 均衡模型

均衡模型旨在當資本市場的需求與供給達均衡時，可以決定唯一的利率解，此時推導出的利率模型為內生模型 (Exogeneous Models)。典型之均衡模型如下：

##### 1. Vasicek (1977)

Vasicek 為短期利率模型的一種，在風險中立的假設下，其利率  $r$  服從 Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 的隨機過程：

$$dr(t) = \alpha(\beta - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

其中  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\sigma$  皆為常數，而  $\alpha$  為均數復歸的速度、 $\beta$  為短期利率的長期平均水準、 $r(t)$  為短期利率、 $\sigma$  為短期利率的波動度， $dW(t)$  為 Wiener process， $dW(t) \sim N(0, dt)$ 。

另外，當利率偏離平均長期水準  $\beta$  時，會以  $\alpha$  的速度回到長期平均水準  $\beta$ 。而因為 O-U 隨機過程服從常態分配，利率有可能為負數，因此不符合真

實市場情況，也無法準確描述利率期間結構。

## 2. CIR (1985)

Cox, Ingersoll, and Ross(CIR)為改善 Vasicek 模型利率可能為負的缺點，將  $dW(t)$  的係數重新設定為  $\sigma\sqrt{r(t)}$ ，因此短期利率波動度恆為正，符合真實情況，且波動度隨著利率上升而增加，而漂浮項則與 Vasicek 模型設定相同。在風險中立的假設下，其隨機過程如下：

$$dr(t) = \alpha(\beta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t)$$

CIR 模型雖然為同時考量實質商品及金融市場的經濟模型的基礎下所推導出的利率模型，但因 CIR 模型為均衡理論下的內生模型，無法符合現在的利率期間結構，且其利率服從非中央卡方分配，並不利於模型參數的校準。

### (二) 無套利模型

由於均衡模型與目前市場利率期間結構並不一致，為了解決這個缺點，因此在無套利模型中的假設為：目前市場利率為輸入的參數，漂浮項 (drift term) 則為時間的函數，讓期初零息利率曲線在無套利模型中會影響未來利率的平均路徑。以無套利理論推導，並根據市場期間結構來校準的利率模型。典型之無套利模型如下：

#### 1. Ho and Lee (1986)

Ho and Lee 模型是最早提出的無套利模型，其短期利率的隨機過程為

$$dr(t) = \theta(t) dt + \sigma dW(t)$$

其中  $\sigma$  為瞬間短期利率的波動度，為常數， $\theta(t)$  為時間的函數，且須符合期初的利率期間結構，雖然 Ho-Lee 模型改善均衡模型與目前市場利率結

構不一致的缺點，但因為此模型不具有均數復歸的特性，且利率有可能為負，因此與真實市場情況不符。

## 2. Hull and White (1990)

Hull-White 模型為 Vasicek 模型延伸出來的模型，此模型可以符合期初的利率期間結構，其模型在風險中立下的隨機過程為

$$dr(t) = [\theta(t) - \alpha r(t)] dt + \sigma dW(t)$$

或

$$dr(t) = \alpha \left[ \frac{\theta(t)}{\alpha} - r(t) \right] dt + \sigma dW(t)$$

其中  $\alpha$ 、 $\sigma$  皆為常數， $\theta(t)$  為使模型符合期初利率期間結構的時間函數，而此模型在 Vasicek 模型中，可視為利率在時間  $t$  時，會以  $\alpha$  的速度回歸到  $\frac{\theta(t)}{\alpha}$  平均水準。而  $\theta(t)$  可由期初利率期間結構導出：

$$\theta(t) = F_t(0, t) + \alpha F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t})$$

其中最後一項因值過小，如果將它忽略不計，隱含著利率的漂浮項變為  $F_t(0, t) + \alpha[F(0, t) - r]$ 。表示平均而言，利率的變動遵循期初瞬間遠期利率的斜率，當它偏離利率曲線時，會以  $\alpha$  的速度回到平均利率水準。

## 3. HJM (1992)

HJM 模型由 Heath, Jarrow and Morton 所提出的以瞬間遠期利率為基礎，在無套利架構下，推導出連續時間下的多因子遠期利率模型，在傳統風險中立下，此模型的隨機過程為

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW(t)$$

其中  $f(t, T)$  為在時間  $t$  所觀察到的時間  $T$  的遠期利率

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds = \sum_{i=1}^d \sigma_i(t, T) ds \text{ 為漂浮項}$$

$\sigma(t, T) = (\sigma_1(t, T), \dots, \sigma_d(t, T))$  為波動度多維度向量

$W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))$  為多維度的布朗運動

不過因為其隨機過程為非馬可夫(non-Markov)過程，且利率為瞬間遠期利率，無法直接從市場上觀察到，因此增加了校準的困難度。而且因為樹狀結構中節點無法重合，導致在評價利率衍生商品時，計算很複雜，亦很難使用樹狀結構來評價。

#### 4. BGM (1997)

由於HJM模型所描繪的瞬間遠期利率較為抽象存在，無法直接從真實市場上觀察，因此有另一群學者以HJM模型為基礎，發展出可直接在市場上觀察得到的利率報價，推導出的LIBOR市場模型。

這類型的研究，依據指標利率的不同，市場模型可分為兩類：第一類為由Brace, Gatarek, and Musiela (BGM)所提出的對數常態遠期LIBOR利率模型，稱為BGM模型；第二類則為Jamshidian所發展出的對數常態遠期交換利率模型。

其中BGM模型介紹如下：

令 $Q^{i+1}$ 為以零息債券價格 $P(t, T_{i+1})$ 為計價單位的風險中立測度，

$f(t, T_i, T_{i+1})$ 為在時間點 $t$ 看 $T_i$ 到 $T_{i+1}$ 期間的遠期利率，我們可以知道債券價格與遠期利率之間的關係為

$$\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} = 1 + \delta_i f(t, T_i, T_{i+1}) \quad \delta_i = T_{i+1} - T_i$$

我們由上式可得到  $f(t, T_i, T_{i+1}) = \delta_i \left( \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} - 1 \right)$ ，其中  $\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})}$  為

$Q^{i+1}$ -martingale，根據 Ito's Lemma， $f(t; T_i, T_{i+1})$  以  $P(t, T_{i+1})$  為計價單位， $f(t; T_i, T_{i+1})$  為  $Q^{i+1}$ -martingale，可知  $f(t; T_i, T_{i+1})$  在  $Q^{i+1}$  測度下的隨機過程為

$$df(t; T_i, T_{i+1}) = f(t; T_i, T_{i+1})\sigma_i(t)dW_i(t) \quad i=1, 2, \dots, n$$

其中  $\sigma_i(t)$  為已知函數， $W_i(t)$  為  $Q^{i+1}$  測度下的布朗運動。可解出 LIBOR 遠期利率的隨機微分方程式為

$$f(t; T_i, T_{i+1}) = f(0; T_i, T_{i+1}) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2(s) ds + \int_0^t \sigma_i(s) dW_i(s)\right) \quad (1)$$

當上式  $i=n$ ，則以  $P(t, T_{n+1})$  為計價單位， $f(t; T_n, T_{n+1})$  為  $Q^{n+1}$ -martingale。

為了推導  $f(t; T_n, T_{n+1})$  在  $Q^{k+1}$  測度之一般化隨機微分方程式，對所有

$i=1, 2, \dots, n$  透過測度轉換到  $Q^i$  測度下的隨機微分方程式可寫成：

$$df(t; T_n, T_{n+1}) = \sigma_n(t)[v_i(t) - v_{n+1}(t)]f(t; T_n, T_{n+1})dt + \sigma_n(t)f(t; T_n, T_{n+1})dW_n(t) \quad (2)$$

其中  $v_i(t)$  為在  $t$  時間點的債券價格  $P(t, T_i)$  之波動度， $v_{n+1}(t)$  為在  $t$  時間點的債券價格  $P(t, T_{n+1})$  之波動度。

接著說明如何求得  $v_i(t) - v_{n+1}(t)$ ：

$$\text{由於 } \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} = 1 + \delta_i f(t; T_i, T_{i+1}),$$

$$\Rightarrow \ln P(t, T_i) - \ln P(t, T_{i+1}) = \ln[1 + \delta_i f(t; T_i, T_{i+1})] \quad (3)$$

在傳統風險中立假設下，零息債券價格的隨機過程為：

$$dP(t, T_k) = r(t)P(t, T_k)dt + v_k(t)P(t, T_k)dW(t)$$

利用 Ito's Lemma，讓 (3) 式等號兩邊的  $dW$  項相等，可得到

$$v_i(t) - v_{i+1}(t) = \frac{\delta_i f(t; T_i, T_{i+1}) \sigma_i(t)}{1 + \delta_i f(t; T_i, T_{i+1})} \quad (4)$$

並由(3)式可得知

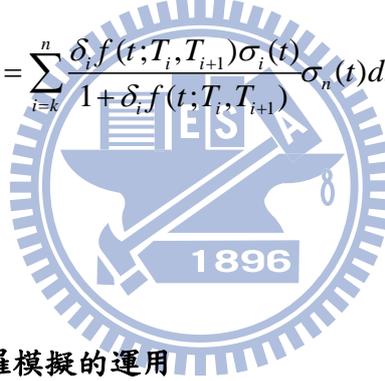
$$\begin{aligned} \ln \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{n+1})} &= \ln \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} \frac{P(t, T_{i+1})}{P(t, T_{i+2})} \dots \frac{P(t, T_n)}{P(t, T_{n+1})} = \sum_{k=i}^n \ln \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_{k+1})} \\ &= \sum_{k=i}^n \ln[1 + \delta_k f(t; T_k, T_{k+1})] \quad (5) \end{aligned}$$

則由(4)式與(5)式

$$v_i(t) - v_{n+1}(t) = \sum_{k=i}^n v_k(t) - v_{k+1}(t) = \sum_{k=i}^n \frac{\delta_k f(t; T_k, T_{k+1}) \sigma_k(t)}{1 + \delta_k f(t; T_k, T_{k+1})}$$

代回(2)式，則對所有  $k < n$ ，BGM 模型在  $Q^k$  測度下的隨機過程為：

$$\frac{df(t; T_n, T_{n+1})}{f(t; T_n, T_{n+1})} = \sum_{i=k}^n \frac{\delta_i f(t; T_i, T_{i+1}) \sigma_i(t)}{1 + \delta_i f(t; T_i, T_{i+1})} \sigma_n(t) dt + \sigma_n(t) dW_n(t) \quad (6)$$



## 第二節 LIBOR 蒙地卡羅模擬的運用

由於  $f(t; T_i, T_{i+1})$  服從對數常態分配，透過 *Itô's Lemma* 運算可得

$$d \ln f(t; T_i, T_{i+1}) = \left( \sum_{j=k}^i \frac{\rho_{ji} \delta_j f(t; T_j, T_{j+1}) \sigma_j(t)}{1 + \delta_j f(t; T_j, T_{j+1})} \sigma_i(t) - \frac{1}{2} \sigma_i^2(t) \right) dt + \sigma_i(t) dW_i(t)$$

利用尤拉吉米斯定理 (Euler and Milstein Schemes) 進行斷續化

(Discretization)，得

$$\ln f(t + \Delta t; T_i, T_{i+1}) = \ln f(t; T_i, T_{i+1}) + \left( \sum_{j=k}^i \frac{\rho_{ji} \delta_j f(t; T_j, T_{j+1}) \sigma_j(t)}{1 + \delta_j f(t; T_j, T_{j+1})} \sigma_i(t) - \frac{1}{2} \sigma_i^2(t) \right) \Delta t + \sigma_i(t) \Delta W_i(t)$$

其中  $\Delta W_i(t) \sim N(0, \rho \Delta t)$ 。

所以在時點之遠期利率可表示為

$$f(t+\Delta t; T_i, T_{i+1}) = f(t; T_i, T_{i+1}) \exp \left\{ \left( \sum_{j=k}^i \frac{\rho_{ji} \delta_j f(t; T_j, T_{j+1}) \sigma_j(t)}{1 + \delta_j f(t; T_j, T_{j+1})} \sigma_i(t) - \frac{1}{2} \sigma_i^2(t) \right) \Delta t + \sigma_i(t) \Delta W_i(t) \right\}$$

其中  $\Delta W_i(t) \sim N(0, \rho \Delta t)$

如此可使用此方程式作為蒙地卡羅模擬未來各區間遠期利率變化的路徑。

### 第三節 離散時間之 LIBOR 市場模型期望值

此章節我們說明 Poon 與 Stapleton(2005)推導出 LIBOR 市場模型的漂浮項，一開始先介紹遠期利率協定 (Forward Rate Agreement; FRA)，再透過交易雙方簽訂 FRA 時，損益皆為零，推導出無套利的離散時間下之 LIBOR 市場模型期望值。

#### (一) 遠期利率協定(Forward Rate Agreements; FRAs)

在  $t$  時間約定  $T_n$  到  $T_{n+1}$  時間的固定利率  $k$ ，在  $T_n$  時間以  $k$  交換從  $T_n$  到  $T_{n+1}$  之年化即期利率  $y(T_n, T_{n+1})$ 。則在  $T_n$  時間支付固定利率一方的支出為

$$FRA(T_n) = \frac{A(y(T_n, T_{n+1}) - k)\delta}{1 + y(T_n, T_{n+1})\delta}$$

其中  $\delta = T_{n+1} - T_n$ ， $A$  為本金。在無套利條件下，期初建立協定時價值為零，因此

$k$  會等於市場的遠期利率  $f(t; T_n, T_{n+1})$ ，可得在一開始  $t$  時間的遠期利率協定

$FRA(t, T_n)$  價值

$$FRA(t, T_n) = E_t \left[ \frac{A(y(T_n, T_{n+1}) - f(t; T_n, T_{n+1}))\delta}{1 + y(T_n, T_{n+1})\delta} \right] = 0$$

#### (二) 離散時間之 LIBOR 市場模型期望值

在這個部分我們介紹 Poon 與 Stapleton(2005)推導的重要結果

1. 在風險中立下的零息債券價格為

$$B(t, T_n) = B(t, T_1) E_t [B(T_1, T_n)]$$

亦可求得遠期債券價格

$$E_t[B(T_1, T_n)] = \frac{B(t, T_n)}{B(t, T_1)} = F(t; T_1, T_n)$$

2. 遠期債券價格的漂浮項

$$E_t[F(T_1; T_i, T_n)] - F(T_1; T_i, T_n) = -\frac{B(t, T_1)}{B(t, T_i)} \text{Cov}_i[F(T_1; T_i, T_n), B(T_1, T_i)]$$

3. 利用遠期利率協定推導出在  $T_n$  期間的遠期利率漂浮項

$$\begin{aligned} E_t[f(T_1; T_n, T_{n+1})] - f(t; T_n, T_{n+1}) = \\ -\frac{1}{\delta} \text{Cov}_i(\delta f(T_1; T_n, T_{n+1}), \frac{1}{1 + \delta y(T_1, T_2)} \frac{1}{1 + \delta f(T_1; T_2, T_3)} \cdots \frac{1}{1 + \delta f(T_1; T_n, T_{n+1})}) \\ \times (1 + \delta f(t; T_1, T_2)) \cdot (1 + \delta f(t; T_2, T_3)) \cdots (1 + \delta f(t; T_n, T_{n+1})) \end{aligned}$$

再藉著 Stein's Lemma for lognormal variables 我們可以把上述式子修改成

$$\begin{aligned} E_t[f(T_1; T_n, T_{n+1})] - f(t; T_n, T_{n+1}) = \\ f(t; T_n, T_{n+1}) \times \frac{\delta f(t; T_1, T_2)}{1 + \delta f(t; T_1, T_2)} \times \text{Cov}_i[\ln f(T_1; T_n, T_{n+1}), \ln f(T_1; T_1, T_2)] \\ + \cdots \\ + f(t; T_n, T_{n+1}) \times \frac{\delta f(t; T_n, T_{n+1})}{1 + \delta f(t; T_n, T_{n+1})} \times \text{Cov}_i[\ln f(T_1; T_n, T_{n+1}), \ln f(T_1; T_n, T_{n+1})] \end{aligned}$$

其中  $\text{Cov}_i[\ln f(T_1; T_i, T_{i+1}), \ln f(T_1; T_n, T_{n+1})]$  為  $i$  期間生效的遠期利率與  $T_n$  期間生效的遠期利率之共變異數，為了方便起見，我們將它以  $\sigma_{i,n}$  表示，定義為：

$$\text{Cov}_i[\ln f(T_1; T_i, T_{i+1}), \ln f(T_1; T_n, T_{n+1})] \equiv \sigma_{i,n} \quad i=1, 2, \dots, n$$

經由移項整理可以得到 Poon 與 Stapleton(2005)推導的離散時間之 LIBOR 市場模型的漂浮項：

$$\begin{aligned} \frac{E_t[f(T_1; T_n, T_{n+1})] - f(t; T_n, T_{n+1})}{f(t; T_n, T_{n+1})} = \\ \frac{\delta f(t; T_1, T_2)}{1 + \delta f(t; T_1, T_2)} \times \sigma_{1,n} + \frac{\delta f(t; T_2, T_3)}{1 + \delta f(t; T_2, T_3)} \times \sigma_{2,n} + \cdots + \frac{\delta f(t; T_n, T_{n+1})}{1 + \delta f(t; T_n, T_{n+1})} \times \sigma_{n,n} \end{aligned} \quad (7)$$

#### 第四節 建造樹狀節點重合的遠期利率 LIBOR 市場模型

由於 LIBOR 市場模型中的利率隨機過程屬於非馬可夫過程，因此 Ho, Stapleton, and Subrahmanyam (1995) 提供一個建樹方法，建造多變量且讓節

點重合的二元樹，用來逼近多變量的對數常態過程。且 LIBOR 市場模型符合 HSS 的假設條件（資產為對數常態分配），本文將它應用至遠期 LIBOR 利率市場模型。我們可以得到  $T_N$  期間遠期利率在  $i$  時間的值為

$$f(i; T_n, T_{n+1}) = f(0; T_n, T_{n+1}) u_i^{N_i - r} d_i^r, \quad i = T_1, T_2, \dots, T_N \quad (8)$$

其中

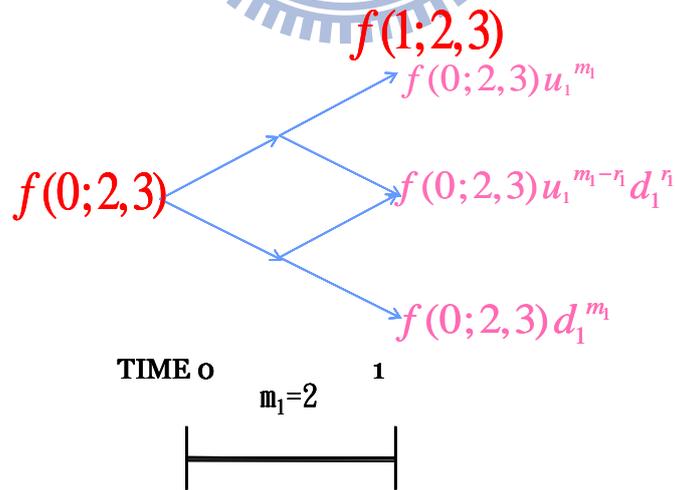
$$u_i = 2[E(f(i; T_n, T_{n+1}) / f(0; T_n, T_{n+1}))]^{\frac{1}{N_i}} - d_i$$

$$d_i = \frac{2[E(f(i; T_n, T_{n+1}) / f(0; T_n, T_{n+1}))]^{\frac{1}{N_i}}}{1 + \exp(2\sigma_{i-1,i} \sqrt{(T_i - T_{i-1}) / n_i})}$$

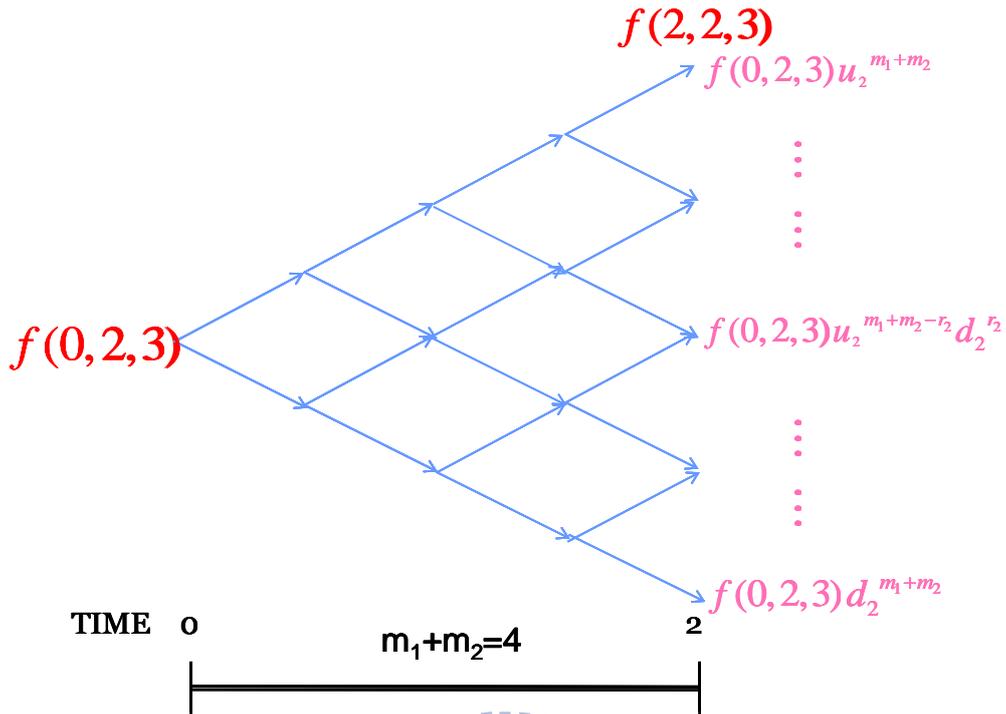
$$N_i = N_{i-1} + m_i$$

$r$ ：在時間  $T_N$  從上面開始數第  $r$  個節點， $r = 0, 1, 2, \dots, N_i$

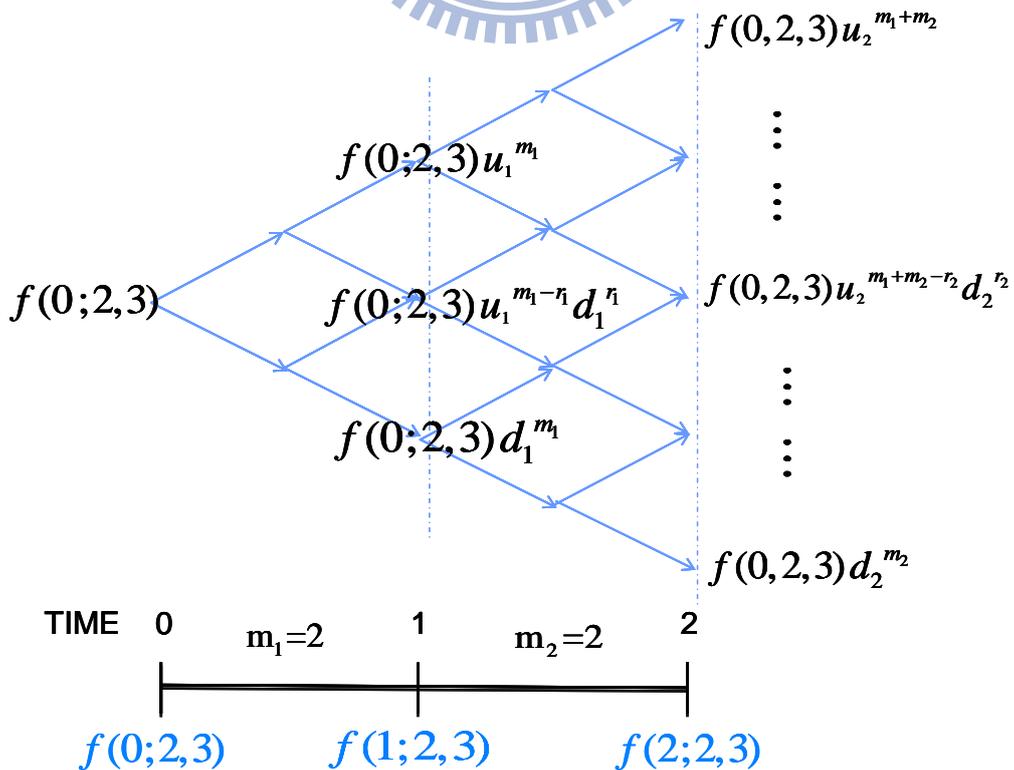
1. 先以  $f(0; 2, 3)$  延伸出一期的遠期利率樹為例，造出在  $T_1$  期會有  $m_1 + 1$  個節點， $r_1 = 0, 1, 2, \dots, m_1$  在  $T_1$  時間從上往下數第  $r_1$  個節點，結果如下圖所示：



2. 再以  $f(0; 2, 3)$  延伸出兩期的遠期利率樹為例，則在  $T_2$  期會有  $m_1 + m_2 + 1$  個節點， $r_2 = 0, 1, 2, \dots, m_1 + m_2$  在  $T_2$  時間從上往下數第  $r_2$  個節點，結果如下圖所示：



3. 由 1 與 2，可得知  $f(0; 2, 3)$  延伸出兩期的遠期利率樹時，其利率期限結構的變化為在  $T_1$  期會有  $m_1 + 1$  個節點， $r_1 = 0, 1, 2, \dots, m_1$  在  $T_1$  時間從上往下數第  $r_1$  個節點；在  $T_2$  期會有  $m_1 + m_2 + 1$  個節點， $r_2 = 0, 1, 2, \dots, m_1 + m_2$  在  $T_2$  時間從上往下數第  $r_2$  個節點，結果如下圖所示：



在假設遠期利率市場服從對數常態分配下，遠期利率  $f(i; T_n, T_{n+1})$ ， $i = T_1, T_2, \dots, T_n$  可以用二項分配近似，利用上式的  $u_i$ 、 $d_i$ ，求得給定  $i-1$  時間下的第  $r$  個節點， $i$  時間上漲的條件機率為

$$q(x_i | x_{i-1} = x_{i-1,r}) = \frac{E_{i-1}(x_i) - (N_{i-1} - r) \ln u_i - r \ln d_i}{n_i (\ln u_i - \ln d_i)} - \frac{\ln d_i}{\ln u_i - \ln d_i} \quad \forall i, r \quad (9)$$

其中

$$x_i = \ln \frac{f(i; T_n, T_{n+1})}{f(0; T_n, T_{n+1})}$$

由於  $x_i$  服從常態分配，

$$x_i = \beta_i + \gamma_i x_{i-1} + \varepsilon_i, \quad E_{i-1}(\varepsilon_i) = 0$$

利用時間序列方法可求得迴歸係數

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{t_i \sigma_{0,i}^2 - (t_i - t_{i-1}) \sigma_{i-1,i}^2}{t_{i-1} \sigma_{0,i-1}^2}}$$

$$\beta_i = E(x_i) - \gamma_i E(x_{i-1})$$

接著計算給定  $x_{i-1}$  下， $x_i$  之條件期望值

$$E_{i-1}(x_i) = \beta_i + \gamma_i x_{i-1,r} = E(x_i) - \gamma_i E(x_{i-1}) + \gamma_i x_{i-1,r}$$

由於  $f(i; T_n, T_{n+1})$  服從對數常態分配

$$E(x_i) = \ln \left[ \frac{E(f(i; T_n, T_{n+1}))}{f(0; T_n, T_{n+1})} \right] - \frac{1}{2} \sigma_{0,i}^2 \quad (10)$$

接下來說明如何藉由求得  $E_{i-1}(x_i)$ ，來計算  $q(x_i | x_{i-1})$ ：

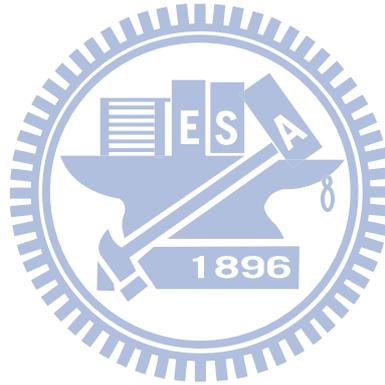
我們可由 (7) 式整理成下列式子：

$$\begin{aligned} \frac{E_i[f(T_1; T_n, T_{n+1})]}{f(t; T_n, T_{n+1})} &= 1 + \frac{\delta f(t; T_1, T_2)}{1 + \delta f(t; T_1, T_2)} \times \sigma_{1,n} + \frac{\delta f(t; T_2, T_3)}{1 + \delta f(t; T_2, T_3)} \times \sigma_{2,n} \\ &\quad + \dots + \frac{\delta f(t; T_n, T_{n+1})}{1 + \delta f(t; T_n, T_{n+1})} \times \sigma_{n,n} \end{aligned} \quad (11)$$

再將 (11) 式左右兩邊同乘  $\frac{f(t; T_n, T_{n+1})}{f(0; T_n, T_{n+1})}$ ，可得到下列式子：

$$\begin{aligned} \frac{E_i[f(T_1; T_n, T_{n+1})]}{f(0; T_n, T_{n+1})} &= \frac{f(t; T_n, T_{n+1})}{f(0; T_n, T_{n+1})} \times \left(1 + \frac{\delta f(t; T_1, T_2)}{1 + \delta f(t; T_1, T_2)} \times \sigma_{1,n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta f(t; T_2, T_3)}{1 + \delta f(t; T_2, T_3)} \times \sigma_{2,n} + \dots + \frac{\delta f(t; T_n, T_{n+1})}{1 + \delta f(t; T_n, T_{n+1})} \times \sigma_{n,n} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

因此可利用 (12) 式代入 (10) 式求得  $E(x_i)$  後，接著計算  $E_{i-1}(x_i)$  即可求得給定  $x_{i-1}$ ， $x_i$  之上漲條件機率  $q(x_i | x_{i-1})$ 。



### 第三章 研究方法

本章將遠期利率樹應用至透過 Ho, Stapleton, and Subrahmanyam (1995) 提出的建樹方法，並結合 Cholesky 分解定理的概念，利用 Andricopoulos et al.(2003) 求面積法，求得  $T_i$  期間生效的遠期利率樹之條件機率，進而推導出遠期 LIBOR 利率的聯合機率分配。

**目標：**由 Ho, Stapleton, and Subrahmanyam (1995) 得知，我們只有  $f(0;T_i,T_{i+1})$  至  $f(t;T_i,T_{i+1})$ ， $i=1,2,\dots,n$  的邊際機率，卻沒有遠期利樹擴展至  $t$  期時，此遠期利率曲線之條件機率。舉例來說，當  $t=1$  時，我們可根據 (9) 式求出  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$ 、 $f(0;2,3)$  至  $f(1;2,3)$ 、 $f(0;3,4)$  至  $f(1;3,4)$ 、 $\dots$ 、 $f(0;T_n,T_{n+1})$  至  $f(1;T_n,T_{n+1})$  所有可能性之邊際機率，卻無法得知在給定  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第  $\ell_1$  個節點時， $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  第  $\ell_2$  個節點的條件機率。因此我們考慮當 0 至  $t$  時間點分割  $m$  期，且此  $n$  個遠期利率樹中兩兩之間都有相關性的情況下，建構出遠期利率的聯合機率分配。

先介紹 Cholesky 分解定理：

假設  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  為  $n$  個標準常態隨機變數  $\alpha_i$  所組成的向量，任兩個元素  $\alpha_i$  和  $\alpha_j$  的相關係數為  $\rho_{ij}$ ，則向量  $\alpha$  中的元素，可由  $n$  個獨立的常態隨機變數所組成的向量  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  代入  $\alpha = Bb^T$  去模擬。其中，矩陣  $B$  為由 Cholesky 分解定理求得的一個  $n \times n$  下三角矩陣。其中矩陣表示式如下：

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 & 0 \\ R & R & R & R & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中  $B_{i1} = \rho_{i1} \quad \forall i$

$$B_{ij} = \frac{\rho_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} B_{ik} \times B_{jk}}{B_{jj}}, \quad j < i$$

$$B_{ii} = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{i-1} B_{ik}^2}, \quad i \geq 2$$

將此矩陣展開成數學式表示：

$$\alpha_i = b_i$$

接著由遠期 LIBOR 利率的隨機微分方程式 (1) 式推導與  $\alpha_i$  有關的方程式：

$$\begin{aligned} f(t; T_i, T_{i+1}) &= f(0; T_i, T_{i+1}) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2(s) ds + \int_0^t \sigma_i(s) dW_i(s)\right) \\ &= f(0; T_i, T_{i+1}) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_i^2 t + \sigma_i W_i(t)\right) \end{aligned} \quad (13)$$

由於  $W_i(t)$  為常態隨機變數，並不是標準常態隨機變數，因此透過標準化後  
可得知  $\frac{W_i(t)}{\sqrt{t}} \rightarrow N(0,1)$ ，因此 (13) 式可改寫成下列式子：

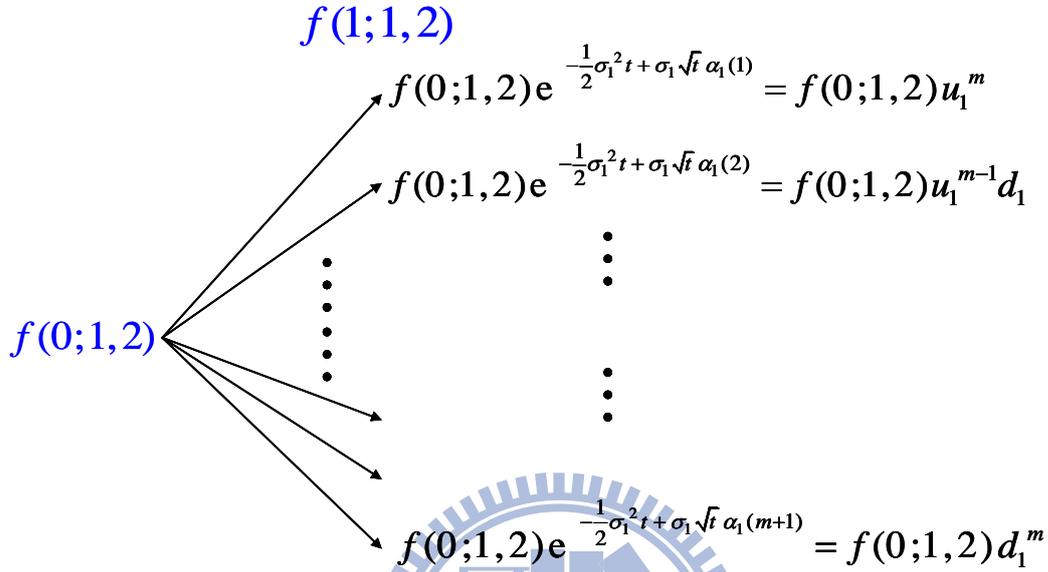
$$\begin{aligned} f(t; T_i, T_{i+1}) &= f(0; T_i, T_{i+1}) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_i^2 t + \sigma_i \sqrt{t} \left(\frac{W_i(t)}{\sqrt{t}}\right)\right) \\ &= f(0; T_i, T_{i+1}) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_i^2 t + \sigma_i \sqrt{t} \alpha_i\right) \end{aligned} \quad (14)$$

接下來我們利用 (8) 式與 (14) 式相等，求得  $\alpha_i$ ，再求出機率。

步驟 (一)：求  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  此遠期利率樹的機率

在  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  分割  $m$  期，在 1 時間點會有  $m+1$  個節點的情況下，由  
(14) 式我們可知  $f(1;1,2) = f(0;1,2) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_1^2 t + \sigma_1 \sqrt{t} \alpha_1\right)$ ，且由 (8) 式

$f(1;1,2) = f(0;1,2)u_1^{m-r}d_1^r$ ,  $r=0,1,\dots,m$ ，讓此兩式相等（但由於我們是在樹狀結構下建立模型，因此根據節點的不同， $\alpha_1$  的值也會有所不同），可建造出如下圖所示的遠期利率樹



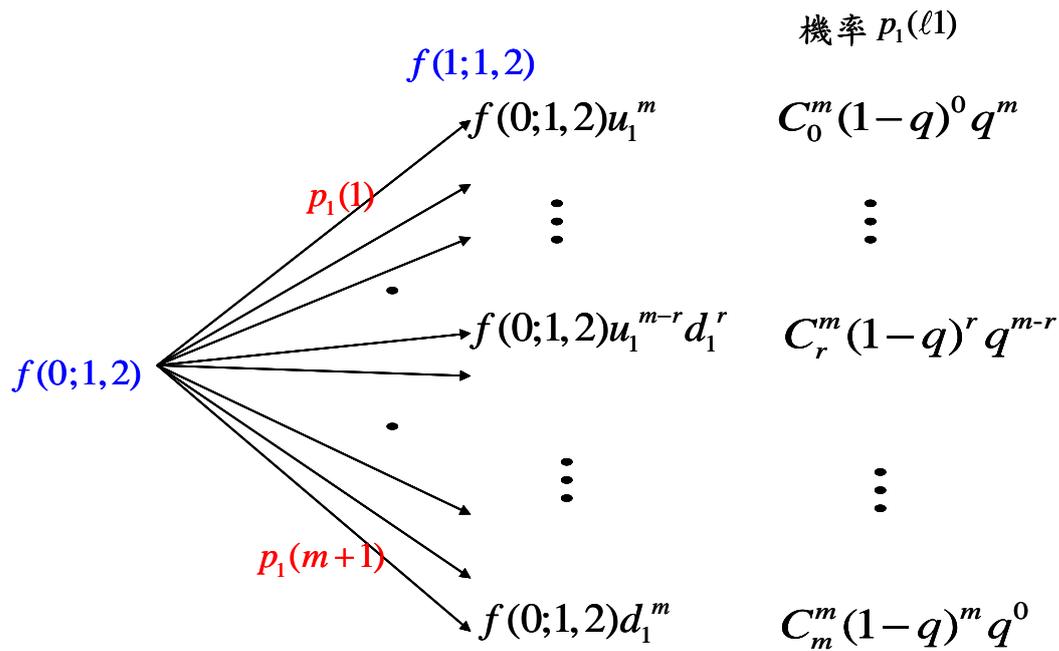
由上圖中的式子我們可推導出  $\alpha_1(\ell)$  在第  $\ell$  個節點下的值：

$$\alpha_1(\ell) = \frac{[m - (\ell - 1)]\ln u_1 + (\ell - 1)\ln d_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t}{\sigma_1\sqrt{t}}, \ell = 1, 2, \dots, m+1$$

而由 Cholesky 分解定理的數學展開式知， $\alpha_1(\ell) = b_1(\ell)$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, m+1$ ，因此

$$b_1(\ell) = \frac{[m - (\ell - 1)]\ln u_1 + (\ell - 1)\ln d_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t}{\sigma_1\sqrt{t}}, \ell = 1, 2, \dots, m+1 \quad (15)$$

此時從  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  有  $(m+1)$  個可能性，其機率從上往下數第  $r$  個節點為  $C_r^m(1-q)^r q^{m-r}$ ,  $r=0,1,2,\dots,m$ ，分別以  $p_1(\ell)$ ,  $\ell=1,2,\dots,m+1$  表示，其中  $q$  則用 (9) 式代入。結果如下圖所示：



步驟(二): 求給定  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第  $\ell$  個節點的情況下,  $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  的條件機率。

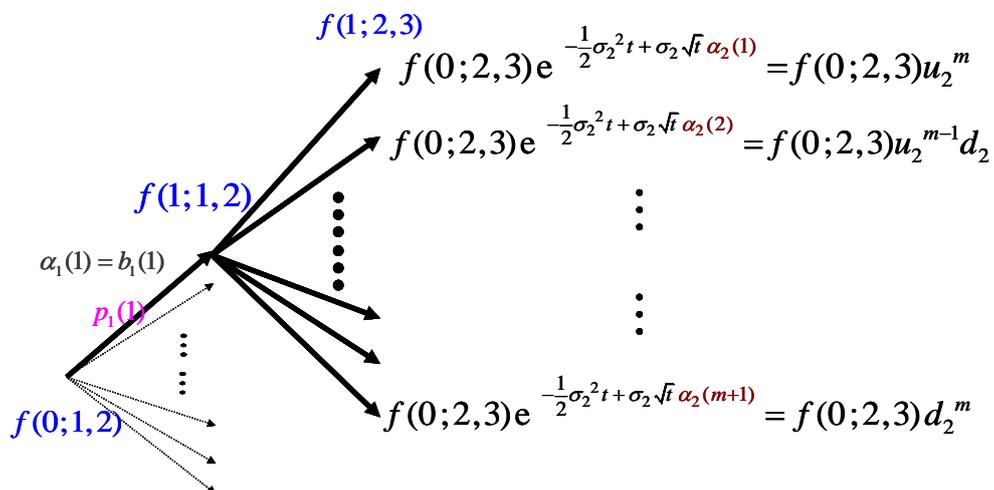
1. 先求當  $\ell=1$  時,  $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  的條件機率:

① 仿照步驟(一), 我們由(8)式與(14)式知

$$f(1;2,3) = f(0;2,3) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_2^2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \alpha_2\right)$$

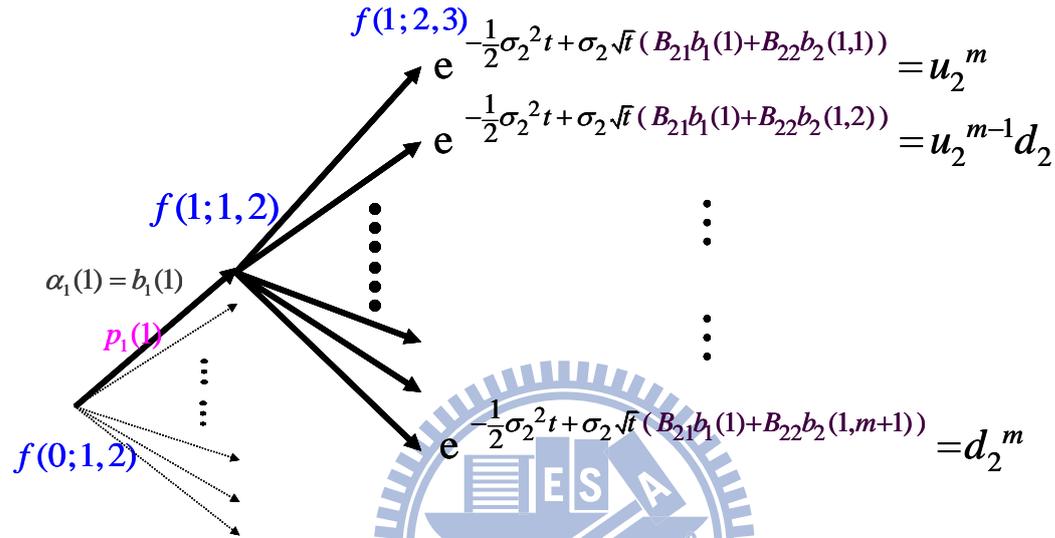
且  $f(1;2,3) = f(0;2,3) u_2^{m-r} d_2^r, r=0,1,\dots,m$

讓此兩式相等, 我們可建造出如下圖所示的遠期利率樹:



此時，這是給定  $f(1;1,2)$  為第一個節點的值下，求  $f(1;2,3)$  的分配，而根據 Cholesky 分解定理的數學展開式知  $\alpha_1(\ell 1) = b_1(\ell 1), \ell 1 = 1, 2, \dots, m+1$ ，代入  $\alpha_2 = B_{21}b_1 + B_{22}b_2$  後，可得知  $\alpha_2 = B_{21}\alpha_1 + B_{22}b_2$ ，在  $\alpha_2$ 、 $B_{21}\alpha_1$ 、 $B_{22}$  已知的情況下，反求  $b_2$ 。

因此，可得到如下圖所示的遠期利率樹：



由上圖中的式子我們可推導出  $b_2(1, \ell 2)$ ：

$$b_2(1, \ell 2) = \frac{(m - (\ell 2 - 1)) \ln u_2 + (\ell 2 - 1) \ln d_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - \sigma_2 \sqrt{t} B_{21} b_1(1)}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}}, \ell 2 = 1, 2, \dots, m+1$$

其中  $b_2(1, \ell 2)$  表示從  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第 1 個節點下， $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  第  $\ell 2$  個節點  $b_2$  的值。

② 接下來求給定  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第 1 個節點下， $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  的條件機率。我們利用 (10) 式知

$$f(1;2,3) = f(0;2,3) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_2^2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \alpha_2\right)$$

由於遠期利率服從對數常態分配，得知  $\left(-\frac{1}{2} \sigma_2^2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \alpha_2\right)$  服從常態分配，

其中，由 Cholesky 分解定理可求出服從常態分配的  $\alpha_2$  之平均數與變異數：

$$\alpha_2 = B_{21}b_1 + B_{22}b_2 = B_{21}\alpha_1 + B_{22}b_2 \sim N(B_{21}\alpha_1, B_{22}^2)$$

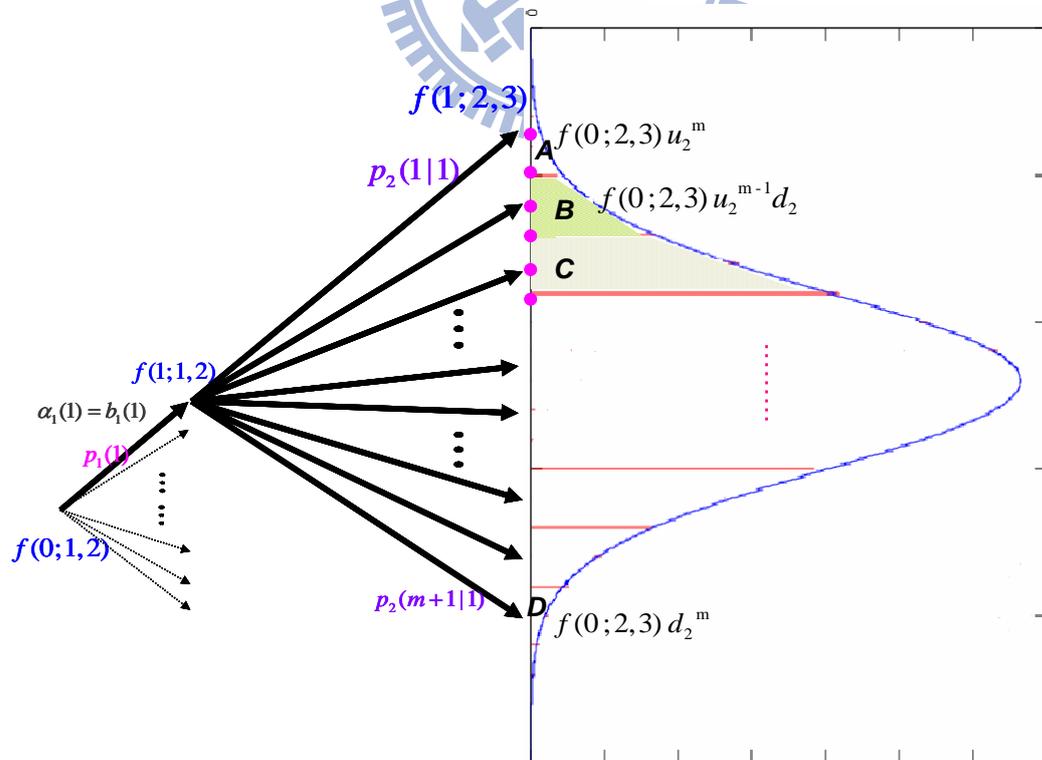
因此代入  $(-\frac{1}{2}\sigma_2^2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \alpha_2)$  可得知其分配，並將其命名為  $Y_2$ ：

$$-\frac{1}{2}\sigma_2^2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \alpha_2 \equiv Y_2 \sim N(-\frac{1}{2}\sigma_2^2 t + \sigma_2 \sqrt{t} B_{21} \alpha_1, \sigma_2^2 t B_{22}^2)$$

由 Andricopoulos et al.(2003) 求面積法，在  $f(1;2,3)$  中，每個節點取對數之後所形成的常態分配，其每個節點對應的機率  $p_2(1|1)$ 、 $p_2(2|1)$ 、 $\dots$ 、 $p_2(m+1|1)$ ，即為所分割的面積，如下圖所示，此時  $p_2(\ell_2|1)$ ，

$\ell_2=1,2,\dots,m+1$  即為給定  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第 1 個節點時， $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  第  $\ell_2$  個節點的條件機率。其中將每個節點取對數之後，每個節點間的距離相等 ( $\Delta R$ )， $\Delta R$  的作法為：

$$\begin{aligned} \Delta R &= \ln f(0;2,3)u_2^m - \ln f(0;2,3)u_2^{m-1}d_2 \\ &= \ln f(0;2,3)u_2^{m-1}d_2 - \ln f(0;2,3)u_2^{m-2}d_2^2 \\ &= \dots \\ &= \ln f(0;2,3)u_2 d_2^{m-1} - \ln f(0;2,3)d_2^m \\ &= \ln \frac{u_2}{d_2} \end{aligned}$$



因此在上圖中，每個●之間的距離皆為 $\frac{1}{2}\Delta R$ ，此圖中的常態分配圖形即為

$Y_2^1$ 的分配，其中 $Y_2^1$ 表示給定從 $f(0;1,2)$ 至 $f(1;1,2)$ 第1個節點， $f(1;1,2)$ 至

$f(1;2,3)$ 所屬的常態分配。接下來求算每個節點對應的機率 $p_2(1|1)$ 、

$p_2(2|1)$ 、 $\dots$ 、 $p_2(m+1|1)$ ：

圖中 A 部分的面積即為 $p_2(1|1)$ ，

$$p_2(1|1) = \int_{m \ln u_2 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{t} B_{22}} \exp\left(-\frac{(y_2^1 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t \sigma_2 \sqrt{t} B_{21} b_1(1))^2}{2 \sigma_2^2 t B_{22}^2}\right) dy_2^1$$

將其分配標準化後之後可得到

$$p_2(1|1) = \int_{\frac{m \ln u_2 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - B_{21} b_1(1) \sigma_2 \sqrt{t}}}{\sigma_2 \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_2^1)^2}{2}\right) dx_2^1$$

而圖中 B 部分的面積即為 $p_2(2|1)$ ，

$$\begin{aligned} p_2(2|1) &= \int_{(m-1) \ln u_2 + \ln d_2 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2}}^{(m-1) \ln u_2 + \ln d_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{t} B_{22}} \exp\left(-\frac{(y_2^1 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t \sigma_2 \sqrt{t} B_{21} b_1(1))^2}{2 \sigma_2^2 t B_{22}^2}\right) dy_2^1 \\ &= \int_{LB_2(2|1)}^{UB_2(2|1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_2^1)^2}{2}\right) dx_2^1 \end{aligned}$$

我們將 $UB_2(2|1)$ 、 $LB_2(2|1)$ 定義為：常態分配 $Y_2^1$ 經過標準化後，給定從 $f(0;1,2)$

至 $f(1;1,2)$ 第1個節點， $f(1;1,2)$ 至 $f(1;2,3)$ 第2個節點時，積分的上下界。

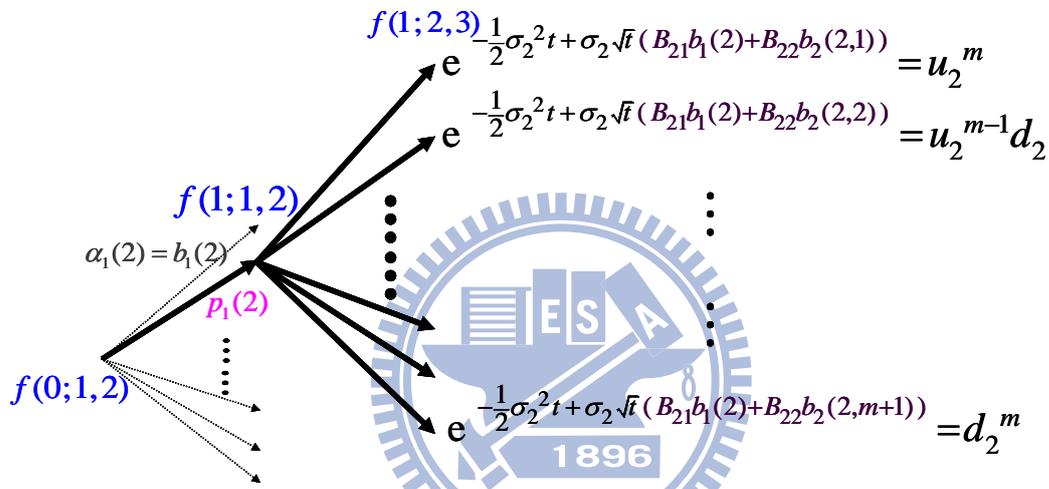
$$\text{其中 } UB_2(2|1) = \frac{(m-1) \ln u_2 + \ln d_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - B_{21} b_1(1) \sigma_2 \sqrt{t}}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}}$$

$$LB_2(2|1) = \frac{(m-1) \ln u_2 + \ln d_2 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - B_{21} b_1(1) \sigma_2 \sqrt{t}}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}}$$

最後，圖中 D 部分的面積即為 $p_2(m+1|1)$ ，

$$\begin{aligned}
p_2(m+1|1) &= \int_{-\infty}^{m \ln u_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{t} B_{22}} \exp\left(-\frac{(y_2^1 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - \sigma_2 \sqrt{t} B_{21} b_1(1))^2}{2 \sigma_2^2 t B_{22}^2}\right) dy_2^1 \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{m \ln u_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - B_{21} b_1(1) \sigma_2 \sqrt{t}}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_2^1)^2}{2}\right) dx_2^1
\end{aligned}$$

2. 同理，現在考慮給定  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第 2 個節點 ( $\ell_2=2$ ) 下， $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  第  $\ell_2$  個節點的情況。如下圖所示：



由上圖中的式子我們可推導出  $b_2(2, \ell_2)$ ：

$$b_2(2, \ell_2) = \frac{(m - (\ell_2 - 1)) \ln u_2 + (\ell_2 - 1) \ln d_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - \sigma_2 \sqrt{t} B_{21} b_1(2)}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}}, \ell_2 = 1, 2, \dots, m+1$$

其中， $b_2(2, \ell_2)$  表示從  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第 2 個節點下， $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  第  $\ell_2$  個節點的值。

而給定  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第 2 個節點下(機率為  $p_1(2)$ )， $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  第  $\ell_2$  個節點，所屬分配為  $Y_2^2$  之對應的機率，亦可仿照上述方式求出，結果如下：

$$\begin{aligned}
p_2(1|2) &= \int_{m \ln u_2 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{t} B_{22}} \exp\left(-\frac{(y_2^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t \sigma_2 \sqrt{t} B_{21} b_1(2))^2}{2\sigma_2^2 t B_{22}^2}\right) dy_2^2 \\
&= \int_{\frac{m \ln u_2 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - B_{21} b_1(2) \sigma_2 \sqrt{t}}{\sigma_2 \sqrt{t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_2^2)^2}{2}\right) dx_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2(2|2) &= \int_{(m-1) \ln u_2 + \ln d_2 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2}}^{(m-1) \ln u_2 + \ln d_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{t} B_{22}} \exp\left(-\frac{(y_2^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t \sigma_2 \sqrt{t} B_{21} b_1(2))^2}{2\sigma_2^2 t B_{22}^2}\right) dy_2^2 \\
&= \int_{LB_2(2|2)}^{UB_2(2|2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_2^2)^2}{2}\right) dx_2^2
\end{aligned}$$

我們將  $UB_2(2|2)$ 、 $LB_2(2|2)$  定義為：常態分配  $Y_2^2$  經過標準化後，給定從  $f(0;1,2)$

至  $f(1;1,2)$  第 2 個節點， $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  第 2 個節點時，積分的上下界。

$$\text{其中 } UB_2(2|2) = \frac{(m-1) \ln u_2 + \ln d_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - B_{21} b_1(2) \sigma_2 \sqrt{t}}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}}$$

$$LB_2(2|2) = \frac{(m-1) \ln u_2 + \ln d_2 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - B_{21} b_1(2) \sigma_2 \sqrt{t}}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}}$$

$$\begin{aligned}
p_2(m+1|2) &= \int_{-\infty}^{m \ln u_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{t} B_{22}} \exp\left(-\frac{(y_2^1 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t \sigma_2 \sqrt{t} B_{21} b_1(2))^2}{2\sigma_2^2 t B_{22}^2}\right) dy_2^1 \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{m \ln u_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - B_{21} b_1(2) \sigma_2 \sqrt{t}}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_2^1)^2}{2}\right) dx_2^1
\end{aligned}$$

3. 由 1 與 2 我們可導出  $b_2(\ell_1, \ell_2)$  與  $p_2(\ell_2 | \ell_1)$  之一般式：

$$b_2(\ell_1, \ell_2) = \frac{(m - (\ell_2 - 1)) \ln u_2 + (\ell_2 - 1) \ln d_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - \sigma_2 \sqrt{t} B_{21} b_1(\ell_1)}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}}, \quad (16)$$

for  $\ell_1, \ell_2 = 1, 2, \dots, m+1$

為給定  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第  $\ell_1$  個節點下， $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  第  $\ell_2$  個節點  $b_2$  的

值。而所對應的機率則為

$$p_2(\ell 2 | \ell 1) = \int_{LB_2(\ell 2 | \ell 1)}^{UB_2(\ell 2 | \ell 1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_2^{\ell 1})^2}{2}\right) dx_2^{\ell 1}$$

for  $\ell 1 = 1, 2, \dots, m+1$  and  $\ell 2 = 2, \dots, m$

此時  $UB_2(\ell 2 | \ell 1)$ 、 $LB_2(\ell 2 | \ell 1)$  則分別為常態分配  $Y_2^{\ell 1}$  經過標準化後，給定從

$f(0; 1, 2)$  至  $f(1; 1, 2)$  第  $\ell 1$  個節點， $f(1; 1, 2)$  至  $f(1; 2, 3)$  第  $\ell 2$  個節點時，積分的上下界。

$$\text{其中 } LB_2(\ell 2 | \ell 1) = \frac{(m - (\ell 2 - 1)) \ln u_2 + (\ell 2 - 1) \ln d_2 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - B_{21} b_1(\ell 1) \sigma_2 \sqrt{t}}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}}$$

$$UB_2(\ell 2 | \ell 1) = \frac{(m - (\ell 2 - 1)) \ln u_2 + (\ell 2 - 1) \ln d_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - B_{21} b_1(\ell 1) \sigma_2 \sqrt{t}}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}}$$

$$p_2(1 | \ell 1) = \int_{\frac{m \ln u_2 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - B_{21} b_1(\ell 1) \sigma_2 \sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_2^{\ell 1})^2}{2}\right) dx_2^{\ell 1}, \ell 1 = 1, 2, \dots, m+1$$

$$p_2(m+1 | \ell 1) = \int_{-\infty}^{\frac{m \ln d_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_2}{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t - B_{21} b_1(\ell 1) \sigma_2 \sqrt{t}}}{\sigma_2 \sqrt{t} B_{22}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_2^{\ell 1})^2}{2}\right) dx_2^{\ell 1}, \ell 1 = 1, \dots, m+1$$

其中  $b_1(\ell 1)$  用 (15) 式代入。

步驟 (三)：求給定  $f(0; 1, 2)$  至  $f(1; 1, 2)$  第  $\ell 1$  個節點，且  $f(1; 1, 2)$  至  $f(1; 2, 3)$  第  $\ell 2$  個節點的情況下， $f(1; 2, 3)$  至  $f(1; 3, 4)$  的條件機率。

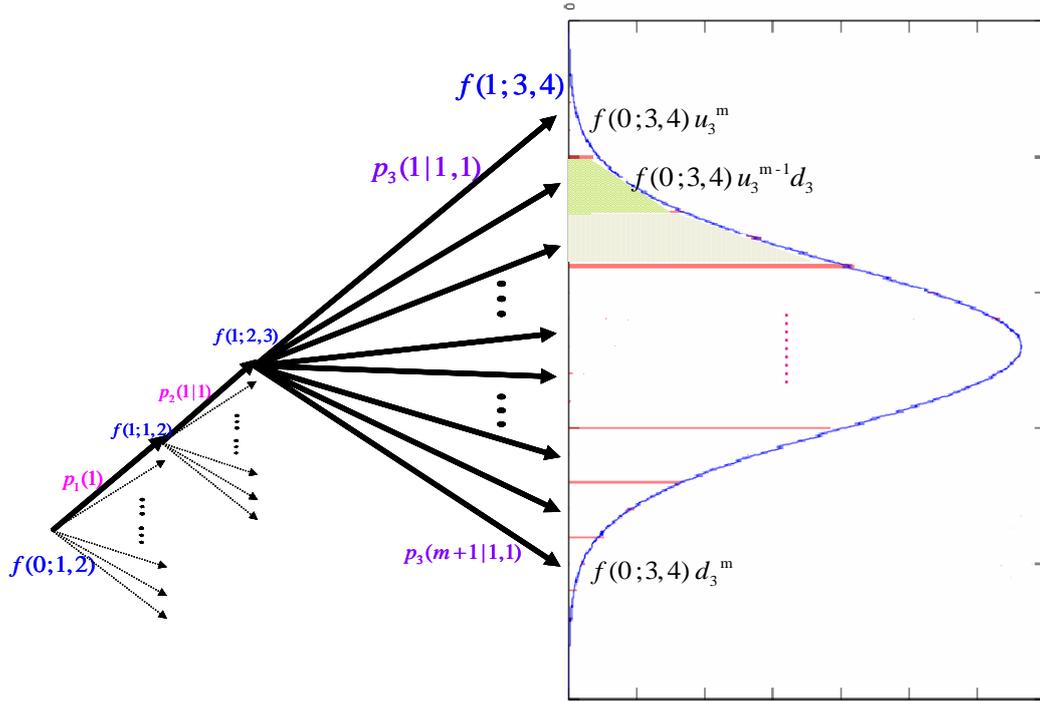
1. 仿照步驟 (二)，我們可以求出給定  $f(0; 1, 2)$  至  $f(1; 1, 2)$  第  $\ell 1$  個節點且  $f(1; 1, 2)$  至  $f(1; 2, 3)$  為第  $\ell 2$  個節點時， $f(1; 2, 3)$  至  $f(1; 3, 4)$  第  $\ell 3$  個節點  $b_3$  的值：根據

Cholesky 分解定理的數學展開式，已知  $b_1(\ell 1)$ ， $\ell 1 = 1, 2, \dots, m+1$

及  $b_2(\ell 1, \ell 2)$ ， $\ell 1, \ell 2 = 1, 2, \dots, m+1$  的情況下，代入  $\alpha_3 = B_{31} \alpha_1 + B_{32} b_2 + B_{33} b_3$ ，反求  $b_3$ 。

以  $\ell 1 = 1$  且  $\ell 2 = 1$  建造出的遠期利率樹為例，如下圖所示：





以上圖為例，考慮  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第1個節點，且  $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  為第1個節點時，我們可以推導出

$$p_3(1|1,1) = \frac{\int_{m \ln u_3 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_3}{d_3} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 t - \sigma_3 \sqrt{t} (B_{31} b_1(1) + B_{32} b_2(1,1))}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2^{1,1})^2}{2}} dx_2^{1,1}}{\sigma_3 \sqrt{t} B_{33}}$$

$$p_3(\ell_3|1,1) = \int_{LB_3(\ell_3|1,1)}^{UB_3(\ell_3|1,1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2^{1,1})^2}{2}} dx_2^{1,1} \text{ for } \ell_3 = 2, \dots, m$$

我們將  $UB_3(\ell_3|1,1)$ 、 $LB_3(\ell_3|1,1)$  定義為：給定從  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第1個節點，且  $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  亦為第1個節點時， $f(1;2,3)$  至  $f(1;3,4)$  第  $\ell_3$  個節點，標準常態分配  $X_2^{1,1}$  積分的上下界。

其中

$$UB_3(\ell_3|1,1) = \frac{(m - (\ell_3 - 1)) \ln u_3 + (\ell_3 - 1) \ln d_3 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_3}{d_3} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 t - \sigma_3 \sqrt{t} (B_{31} b_1(1) + B_{32} b_2(1,1))}{\sigma_3 \sqrt{t} B_{33}}$$

$$LB_3(\ell_3|1,1) = \frac{(m - (\ell_3 - 1)) \ln u_3 + (\ell_3 - 1) \ln d_3 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_3}{d_3} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 t - \sigma_3 \sqrt{t} (B_{31} b_1(1) + B_{32} b_2(1,1))}{\sigma_3 \sqrt{t} B_{33}}$$

$$p_3(m+1|1,1) = \int_{-\infty}^{\frac{m \ln u_3 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_3}{d_3} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 t - \sigma_3 \sqrt{t} (B_{31} b_1(1) + B_{32} b_2(1,1))}{\sigma_3 \sqrt{t} B_{33}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2^{1,1})^2}{2}} dx_2^{1,1}$$

則在考慮所有  $\ell_1, \ell_2$  的情況下，給定  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第  $\ell_1$  個節點且  $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  為第  $\ell_2$  個節點時， $f(1;2,3)$  至  $f(1;3,4)$  第  $\ell_3$  個節點所對應的機率為：

$$p_3(\ell_3 | \ell_1, \ell_2) = \int_{LB_3(\ell_3 | \ell_1, \ell_2)}^{UB_3(\ell_3 | \ell_1, \ell_2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2^{\ell_1, \ell_2})^2}{2}} dx_2^{\ell_1, \ell_2}$$

for  $\ell_1, \ell_2 = 1, 2, \dots, m+1$  and  $\ell_3 = 2, \dots, m$

此時， $UB_3(\ell_3 | \ell_1, \ell_2)$ 、 $LB_3(\ell_3 | \ell_1, \ell_2)$  為給定從  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第  $\ell_1$  個節點，且  $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  為第  $\ell_2$  個節點時， $f(1;2,3)$  至  $f(1;3,4)$  第  $\ell_3$  個節點，標準常態分配  $X_2^{1,1}$  積分的上下界。

其中

$$UB_3(\ell_3 | \ell_1, \ell_2) = \frac{(m - (\ell_3 - 1)) \ln u_3 + (\ell_3 - 1) \ln d_3 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_3}{d_3} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 t - \sigma_3 \sqrt{t} (B_{31} b_1(\ell_1) + B_{32} b_2(\ell_1, \ell_2))}{\sigma_3 \sqrt{t} B_{33}}$$

$$LB_3(\ell_3 | \ell_1, \ell_2) = \frac{(m - (\ell_3 - 1)) \ln u_3 + (\ell_3 - 1) \ln d_3 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_3}{d_3} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 t - \sigma_3 \sqrt{t} (B_{31} b_1(\ell_1) + B_{32} b_2(\ell_1, \ell_2))}{\sigma_3 \sqrt{t} B_{33}}$$

$$p_3(1 | \ell_1, \ell_2) = \int_{\frac{m \ln u_3 - \frac{1}{2} \ln \frac{u_3}{d_3} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 t - \sigma_3 \sqrt{t} (B_{31} b_1(\ell_1) + B_{32} b_2(\ell_1, \ell_2))}{\sigma_3 \sqrt{t} B_{33}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2^{\ell_1, \ell_2})^2}{2}} dx_2^{\ell_1, \ell_2}$$

for  $\ell_1, \ell_2 = 1, 2, \dots, m+1$

$$p_3(m+1 | \ell_1, \ell_2) = \int_{-\infty}^{\frac{m \ln u_3 + \frac{1}{2} \ln \frac{u_3}{d_3} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 t - \sigma_3 \sqrt{t} (B_{31} b_1(\ell_1) + B_{32} b_2(\ell_1, \ell_2))}{\sigma_3 \sqrt{t} B_{33}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2^{\ell_1, \ell_2})^2}{2}} dx_2^{\ell_1, \ell_2}$$

for  $\ell_1, \ell_2 = 1, 2, \dots, m+1$

其中  $b_1(\ell_1)$  用 (15) 式代入， $b_2(\ell_1, \ell_2)$  用 (16) 式代入。

步驟 (四)：

1. 將遠期利率樹推廣至  $n$  期的情況下，寫成一般式表示，可得到

$$b_i(\ell_1, \dots, \ell_i) = \frac{(m - (\ell_i - 1)) \ln u_i + (\ell_i - 1) \ln d_i + \frac{1}{2} \sigma_i^2 t - \sigma_i \sqrt{t} \left( \sum_{k=1}^{i-1} B_{ik} b_k(\ell_1, \dots, \ell_k) \right)}{\sigma_n \sqrt{t} B_m},$$

$$\ell_i = 1, 2, \dots, m+1 \text{ for } i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

為給定  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第  $\ell_1$  個節點且  $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  為第  $\ell_2$  個節點時， $\dots$ ， $f(1;i-1,i)$  至  $f(1;i,i+1)$  第  $\ell_i$  個節點  $b_i$  的值， $\forall i = 1, 2, \dots, n$ 。

2. 而給定  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第  $\ell_1$  個節點且  $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  為第  $\ell_2$  個節點時， $\dots$ ， $f(1;i-1,i)$  至  $f(1;i,i+1)$  第  $\ell_i$  個節點之條件機率為

$$p_i(\ell_i | \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1}) = \int_{LB_i(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i)}^{UB_i(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i^{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1}})^2}{2}} dx_i^{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1}}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$\ell_j = 1, 2, \dots, m+1 \text{ for } j = 1, 2, \dots, i-1$$

$$\ell_j = 2, 3, \dots, m \text{ for } j = i$$

此時， $UB_i(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i)$ 、 $LB_i(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i)$  為給定從  $f(0;1,2)$  至  $f(1;1,2)$  第  $\ell_1$  個節點，且  $f(1;1,2)$  至  $f(1;2,3)$  為第  $\ell_2$  個節點， $f(1;2,3)$  至  $f(1;3,4)$  第  $\ell_3$  個節點， $\dots$ ， $f(1;i-1,i)$  至  $f(1;i,i+1)$  第  $\ell_i$  個節點時，標準常態分配  $x_i^{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1}}$  積分的上下界。

其中

$$UB_i(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i) = \frac{(m - (\ell_i - 1)) \ln u_i + (\ell_i - 1) \ln d_i + \frac{1}{2} \ln \frac{u_i}{d_i} + \frac{1}{2} \sigma_i^2 t - \sigma_i \sqrt{t} \left( \sum_{k=1}^{i-1} B_{ik} b_k(\ell_1, \dots, \ell_k) \right)}{\sigma_i \sqrt{t} B_{ii}}$$

$$LB_i(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i) = \frac{(m - (\ell_i - 1)) \ln u_i + (\ell_i - 1) \ln d_i - \frac{1}{2} \ln \frac{u_i}{d_i} + \frac{1}{2} \sigma_i^2 t - \sigma_i \sqrt{t} \left( \sum_{k=1}^{i-1} B_{ik} b_k(\ell_1, \dots, \ell_k) \right)}{\sigma_i \sqrt{t} B_{ii}}$$

$$p_i(1 | \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1}) = \int_{LB_i(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1}, 1)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i^{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1}})^2}{2}} dx_i^{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1}}$$

$i = 1, 2, \dots, n$

$\ell_j = 1, 2, \dots, m+1$  for  $j = 1, 2, \dots, i-1$

$\ell_j = 1$  for  $j = i$

其中

$$LB_i(\ell_1, \dots, \ell_{i-1}, 1) = \frac{(m - (\ell_i - 1)) \ln u_i + (\ell_i - 1) \ln d_i - \frac{1}{2} \ln \frac{u_i}{d_i} + \frac{1}{2} \sigma_i^2 t - \sigma_i \sqrt{t} \left( \sum_{k=1}^{i-1} B_{ik} b_k(\ell_1, \dots, \ell_k) \right)}{\sigma_i \sqrt{t} B_{ii}}$$

$$p_i(m+1 | \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1}) = \int_{-\infty}^{LB_i(\ell_1, \dots, \ell_{i-1}, m+1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i^{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1}})^2}{2}} dx_i^{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1}}$$

$i = 1, 2, \dots, n$   $\ell_j = 1, 2, \dots, m+1$  for  $j = 1, 2, \dots, i-1$

$\ell_j = m+1$  for  $j = i$

其中

$$LB_i(\ell_1, \dots, \ell_{i-1}, m+1) = \frac{(m - (\ell_i - 1)) \ln u_i + (\ell_i - 1) \ln d_i - \frac{1}{2} \ln \frac{u_i}{d_i} + \frac{1}{2} \sigma_i^2 t - \sigma_i \sqrt{t} \left( \sum_{k=1}^{i-1} B_{ik} b_k(\ell_1, \dots, \ell_k) \right)}{\sigma_i \sqrt{t} B_{ii}}$$

我們由上述步驟獲得在時間  $t$  的各個遠期利率樹，分割為  $m$  期，有  $m+1$  個節點的情況下， $T_1$  到  $T_2$ 、 $T_2$  到  $T_3$ 、 $T_3$  到  $T_4$ 、 $T_n$  到  $T_{n+1}$  期遠期利率之條件機率。最後，將上述求得的條件機率相乘，即可獲得遠期 LIBOR 利率的聯合機率分配，以

$p_i(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i)$  表示：

$$p_i(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i) = p_1(\ell_1) p_2(\ell_2 | \ell_1) p_3(\ell_3 | \ell_1, \ell_2) \cdots p_i(\ell_i | \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1})$$

for  $i = 1, 2, \dots, n$

## 第四章 實證分析

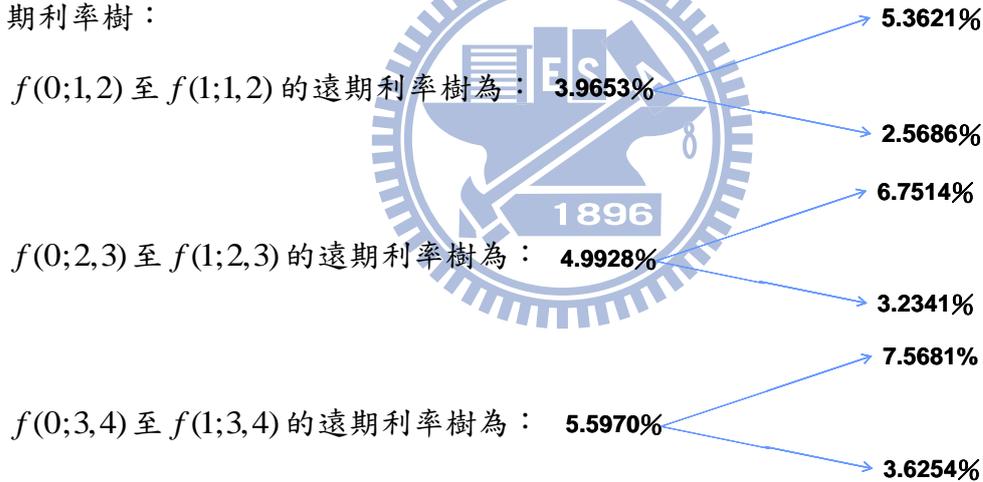
### 第一節 描述利率期限結構的變化

藉由本研究所推導之遠期 LIBOR 利率的聯合機率分配，舉個例子說明如何表達利率期限結構的變化。假設各期的初始遠期利率及波動度如下表：

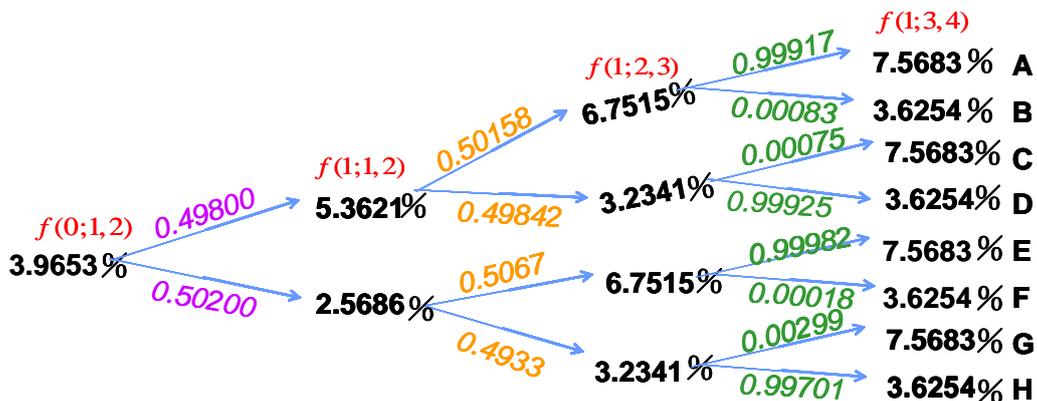
遠期利率	$f(0;0,1)$	$f(0;1,2)$	$f(0;2,3)$	$f(0;3,4)$
%	2.0675	3.9653	4.9928	5.5970

波動度	0~1 年	1~2 年	2~3 年	3~4 年
%	36.8	35.37	29.91	23.10

以 0 至 1 時間點，分割一期的情況下，根據模型假設我們可建造出如下所示的遠期利率樹：



考慮  $T_1$  到  $T_2$ 、 $T_2$  到  $T_3$ 、 $T_3$  到  $T_4$  期遠期利率之條件機率，我們可建構出如下圖所示的各個遠期利率樹：



由上圖知 從  $f(0;1,2)$  跑至  $f(1;3,4)$  共有 8 條利率路徑，分別至 A、B、C、D、E、F、G、H 點。根據遠期利率與即期利率之間的關係式，我們可推導出在 0 時間點的零息利率，其結果如下表所示：

零息利率	$R_{01}$	$R_{02}$	$R_{03}$	$R_{04}$
%	2.0675	3.0164	3.6752	4.1556
$R_{0i}$ 為在時點 0 看，第 $i$ 年的零息利率， $i=1、2、3、4$				

根據模型假設，我們可由  $t=0$  時的零息利率結構，及 A、B、C、D、E、F、G、H 此 8 點在  $t=1$  的遠期利率，推導出下一期的零息利率結構，如下圖所示：

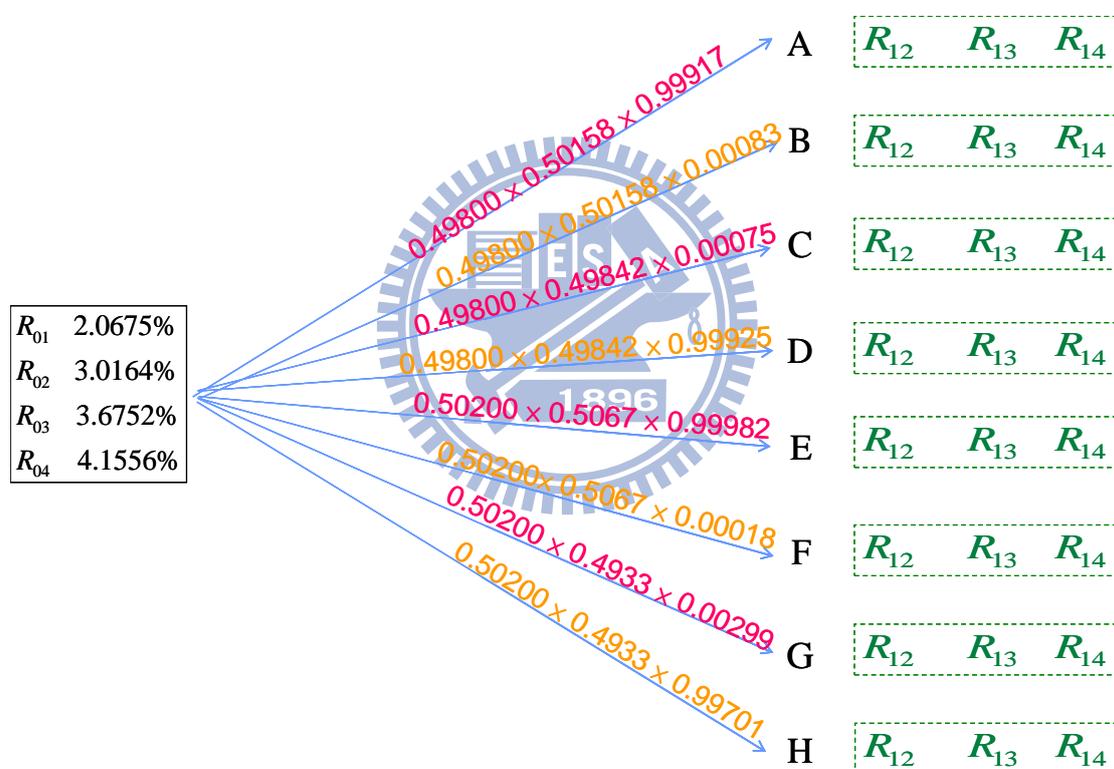
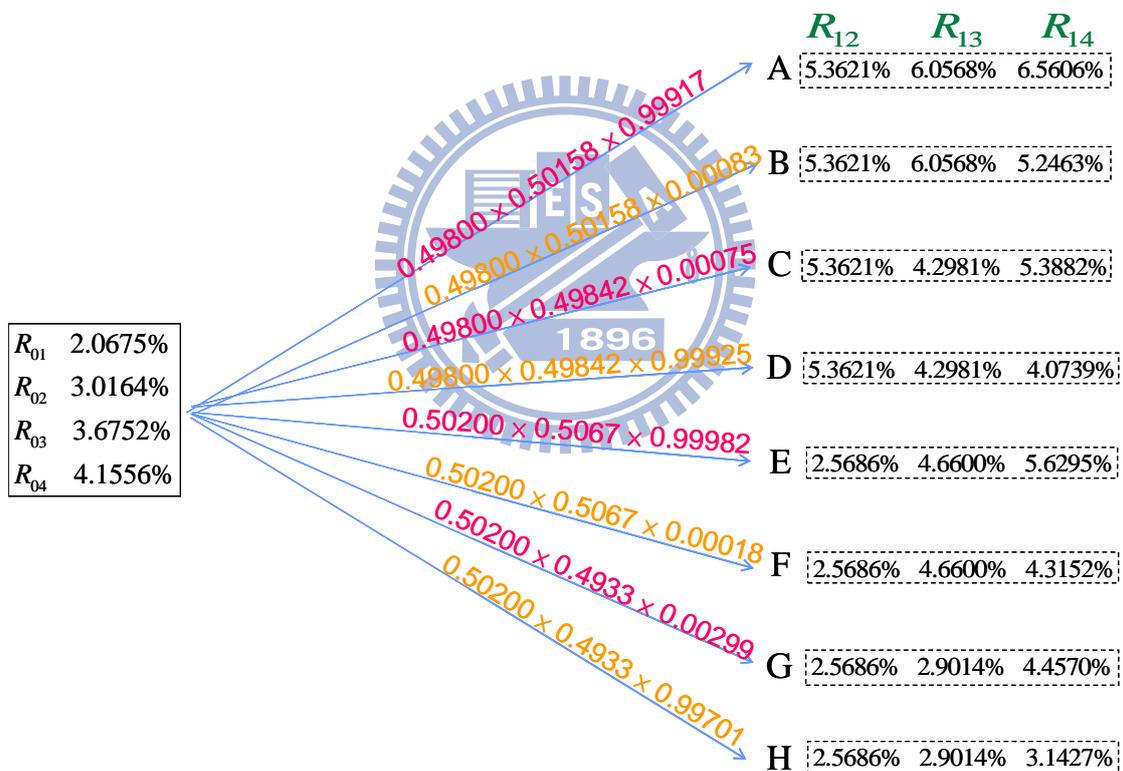


圖 1.  $t=0$  至  $t=1$  的零息利率結構

其中， $R_{1i}$  為在時點 0 看，第  $i$  年的零息利率， $i=1、2、3、4$ 。上圖中，A 點~H 點在  $t=1$  時的零息利率（即  $R_{1i}$ ,  $i=2,3,4$ ），可根據 A 點~H 點在  $t=1$  時的遠期利率，推導出 A~H 此 8 個點個別的零息利率結構。由圖 1. 我們可歸納出 A 點~H 點的遠期利率，結果如下表所示：

		A	B	C	D
遠期利率	$f(1;1,2)$	5.3621%	5.3621%	5.3621%	5.3621%
	$f(1;2,3)$	6.7515%	6.7515%	3.2341%	3.2341%
	$f(1;3,4)$	7.5683%	3.6254%	7.5683%	3.6254%
		E	F	G	H
遠期利率	$f(1;1,2)$	2.5686%	2.5686%	2.5686%	2.5686%
	$f(1;2,3)$	6.7515%	6.7515%	3.2341%	3.2341%
	$f(1;3,4)$	7.5683%	3.6254%	7.5683%	3.6254%

因此，利用上表，並根據遠期利率與即期利率之間的關係式，推導出 A 點~H 點在  $t=1$  時的零息利率結構，並將結果表示如下：



由上圖，利用  $t=0$  至  $t=1$  的零息利率結構，求算出標的物是到期日四年，一年發一次債息，票面利率為 10%，面值 \$100 的債券，而選擇權到期日為一年，履約價為 100 元的債券選擇權在  $t=0$  時的價值，其結果為 13.6213 元。

## 第二節 評價債券選擇權

我們利用此模型來評價歐式債券選擇權，考慮標的物是到期日四年，一年發一次債息，票面利率為 10%，面值 \$100 的債券，而選擇權到期日是一年後，履約價為 100 元。由於 LIBOR 市場模型最大的特色就是直接以市場上觀察到之 LIBOR 報價帶入模型中做評價，但因為市場上可能沒有足夠的資訊供我們評價模型所使用，因此所需參數有些必須進行估計。其中，遠期利率我們採用市場上觀察到的 LIBOR 報價，藉由插補法、拔靴法、預期理論等，獲得不同期限的遠期利率。波動度則使用市場上價平的利率上限選擇權 (CAP) 波動度估計遠期利率的波動度。相關係數則採用歷史資料去估計。先介紹參數估計過程（遠期利率、波動度、相關係數的估計），最後為評價結果。

### 一. 遠期利率的估計

#### 步驟 1：殖利率曲線之估計

由於在市場上觀察到的 LIBOR 利率都是一年以內的即期利率，但是我們需要的參數卻是遠期 LIBOR 利率，且大部分都在一年以上，因此必須藉由目前的即期利率及一年以上的交換利率求得遠期利率。首先，我們在市場上找出以美元計價的 LIBOR 報價，期限分別是 6 個月與 12 個月，及當日一年以上且半年付息一次的交換利率，如下表所示：

LIBOR 報價	
期限 (月)	Rate
6 個月	1.845%
12 個月	2.3725%

交換利率報價	
期限 (年)	Rate
1 年	2.431%
2 年	3.221%
3 年	3.748%
4 年	4.128%

由於市場上美元 LIBOR 報價最長只到 12 個月，而債券選擇權評價期間為四年，為了求出更長期的美元 LIBOR 報價，超過一年的部份需要以一年以上且半年

付息一次的美元利率交換報價，並利用拔靴法（Bootstrapping Approach）轉換成 LIBOR 利率。拔靴法是日前實務上常用來估計殖利率曲線的方法，轉換方式則是利用利率交換的報價會等於一平價發行相同年限、風險等級、付息複利次數債券的票面利率，而轉換成的 LIBOR 利率也會等於其殖利率。

但是由於市場上沒辦法觀察到所有到期日的交換利率，因此利用 MATLAB 軟體的非線性插補法（Cubic Spline）插補出一年以上，且以半年為單位的交換利率。例如：我們有 1 年期與 2 年期的交換利率就可以使用非線性插補法，插補出 1.5 年的交換利率，接著便可使用拔靴法，利用下式即可求出 1.5 年的殖利率：

$$S_{1.5} \times \frac{1}{2} \times e^{-L_{0.5} \times 0.5} + S_{1.5} \times \frac{1}{2} \times e^{-L_1 \times 1} + (S_{1.5} + 1) \times \frac{1}{2} \times e^{-L_{1.5} \times 1.5} = 1$$

其中， $S_{1.5}$ ：由非線性插補法求得的 1.5 年期的交換利率

$L_t$ ： $t$  年期的殖利率， $t = 0.5, 1, 1.5$

由於  $S_{1.5}$ 、 $L_{0.5}$ （即為 1.845%）、 $L_1$ （即為 2.3725%）皆已知，如此便可求得  $L_{1.5}$ 。

接著再次使用相同的方法求出 2 年期的殖利率，運用下式：

$$S_2 \times \frac{1}{2} \times e^{-L_{0.5} \times 0.5} + S_2 \times \frac{1}{2} \times e^{-L_1 \times 1} + S_2 \times \frac{1}{2} \times e^{-L_{1.5} \times 1.5} + (S_2 + 1) \times \frac{1}{2} \times e^{-L_2 \times 2} = 1$$

其中， $S_2$  代表 2 年期的交換利率，而只有  $L_2$  未知，因此可求出  $L_2$ 。不斷重覆此步驟就可估算出 2 年、2.5 年…以半年為單位的殖利率，如下表所示：

年限	殖利率 (%)	
0.5	$L_{0.5}$	1.8450%
1	$L_1$	2.3725%
1.5	$L_{1.5}$	2.8561%
2	$L_2$	3.2118%
2.5	$L_{2.5}$	3.5034%
3	$L_3$	3.7467%
3.5	$L_{3.5}$	3.9561%
4	$L_4$	4.1382%

步驟 2：遠期利率之估計

接著使用即期利率與遠期利率之間的關係式，

$$f(0;T_i,T_{i+1}) = \frac{L_{i+1}T_{i+1} - L_iT_i}{T_{i+1} - T_i} \quad i = 0,1,2,3$$

其中  $T_i$  為  $i$  年，且  $L_i$  即為上表中所表示的殖利率。

因此可求出如下表所示的初始遠期利率：

表 1. 各期的初始遠期利率

遠期利率 (%)	
$f(0;0,1)$	2.3725%
$f(0;1,2)$	4.0512%
$f(0;2,3)$	4.8163%
$f(0;3,4)$	5.3129%

## 二. 波動度估計

一般而言，市場上利率上限選擇權的報價是以波動度作為報價，此波動度指的是利率上限選擇權包含區間內  $[T_{i-1}, T_i]$  的平均波動度，但模型所需的是各個遠期利率的波動度，因此我們需要經過校準過程：

假設各個遠期利率的波動度均為常數，即

$$\sigma_i(t) = s_i = v_{T_{i-1}-caplet}$$

由於利率上限選擇權 (Caps) 是由一系列的利率買權 (caplets) 所組合而成，對於 Cap 內的每一個利率買權 (caplet) 分別評價後加總就是 Cap 的價值。以下先針對利率買權 (caplet) 做討論，在時間  $t$ ，利率買權的價值應用 Black 模型 (1976) 可求得：

$$Cpl(t, T_{i-1}, T_i, K) = \tau_i P(0, T_i) Black_c(t, F_i(t), v_i, K)$$

其中， $\tau_i$  為每個 caplet 的時間長度

$P(t, T_i)$  為在時間點  $t$  觀察到期日  $T_i$  的零息債券價格

$K$  為利率上限選擇權的上限利率 (即履約價)

$F_i(t)$  即為  $f(t; T_{i-1}, T_i)$

$Black_c(t, F_i(t), v_i, K)$  為利用 Black Model 算出的 caplet 價格

其模型介紹如下：

$$Black_c(t, F_i(t), v_i, K) = F_i(t)N(d_{1,i}) - KN(d_{2,i})$$

$$d_{1,i} = \frac{\ln(\frac{F_i(t)}{K}) + \frac{1}{2}v_i^2}{v_i}, \quad d_{2,i} = \frac{\ln(\frac{F_i(t)}{K}) - \frac{1}{2}v_i^2}{v_i} = d_{1,i} - v_i, \quad v_i = \sqrt{T_{i-1}} v_{T_{i-1}-caplet}$$

為方便書寫，我們將  $Black_c(t, F_i(t), v_i, K)$  簡寫為  $Bl(t, F_i(t), v_i, K)$ 。

根據上述說明，利率上限選擇權 (Cap) 的價值則為 caplet 價值的加總，則

$T_j$  年期利率上限選擇權的價值為

$$Cap(t, T_j, K) = \sum_{i=1}^j \tau_i P(t, T_i) Bl(t, F_i(t), v_i, K)$$

再利用  $T_j$  年期利率上限選擇權的報價  $v_{T_j-Cap}$ ，求算現金價格為

$$Cap^{MKT}(t, T_j, K) = \sum_{i=1}^j \tau_i P(t, T_i) Bl(t, F_i(t), \sqrt{T_{i-1}} v_{T_j-Cap}, K)$$

其中， $v_{T_j-CAP}$  為到期日  $T_j$  的利率上限選擇權市場波動度報價

由於市場上利率上限選擇權的波動度報價，可視為其所有包含的 caplets 的平均隱含波動度，因此可利用下列等式求得遠期利率的波動度：

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j \tau_i P(t, T_i) Bl(t, F_i(t), \sqrt{T_{i-1}} v_{T_j-Cap}, K) \\ &= \sum_{i=1}^j \tau_i P(t, T_i) Bl(t, F_i(t), \sqrt{T_{i-1}} v_{T_{i-1}-caplet}, K) \end{aligned} \quad (18)$$

下表則為利率上限選擇權市場波動度報價：

到期日	Cap 波動度報價
1 年	34.98%
2 年	34.52%
3 年	31.25%
4 年	28.97%

接著舉例說明運用上述等式(18)求得遠期利率的波動度：

【舉例】已知1年期與2年期的利率上限選擇權的波動度報價，且利率上限選擇權內含的利率上限買權是以六個月為一段區間，因此1年期利率上限選擇權內含1個利率上限買權；2年期利率上限選擇權內含3個利率上限買權。則利用等式關係可寫成在 $t=0$ 時的價值為：

◎ 1年期：

$$0.5 \times P(0,1) \times Bl(0, F_1(0), \sqrt{0.5}v_{1-Cap}, K) = 0.5 \times P(0,1) \times Bl(0, F_1(0), \sqrt{0.5}v_{0.5-caplet}, K)$$

同時假設同一年內的各個遠期利率之波動度均相等，可得到0年至1年間的波動度 $v_{(0,1)-caplet}$ ：

$$v_{0.5-caplet} = v_{(0,1)-caplet} = v_{1-Cap}$$

◎ 2年期：

$$\begin{aligned} & 0.5 \times P(0,1) \times Bl(0, F_1(0), \sqrt{0.5}v_{2-Cap}, K) + 0.5 \times P(0,1.5) \times Bl(0, F_{1.5}(0), \sqrt{1}v_{2-Cap}, K) \\ & + 0.5 \times P(0,2) \times Bl(0, F_2(0), \sqrt{1.5}v_{2-Cap}, K) \\ = & 0.5 \times P(0,1) \times Bl(0, F_1(0), \sqrt{0.5}v_{0.5-caplet}, K) + 0.5 \times P(0,1.5) \times Bl(0, F_{1.5}(0), \sqrt{1}v_{1-caplet}, K) \\ & + 0.5 \times P(0,2) \times Bl(0, F_2(0), \sqrt{2}v_{1.5-caplet}, K) \end{aligned}$$

此時假設 $v_{1-caplet} = v_{1.5-caplet} = v_{(1,2)-caplet}$ ，在已知 $v_{0.5-caplet}$ 及 $v_{2-Cap}$ 的情況下，便可求出1年至2年間的波動度 $v_{(1,2)-caplet}$ 。

藉由以上的估計方法，我們可利用市場上1年期至4年期，間隔時間為半年的利率上限選擇權，進行LIBOR市場模型遠期利率波動度的估計，下表為校準後的波動度結構：

表2. 初始波動度結構

期間	遠期利率波動度
0年~1年	34.98%
1年~2年	34.38%
2年~3年	28.14%
3年~4年	25.61%

### 三. 相關係數估計

我們採用 200 天的歷史資料進行估計，首先在市場上找出這 200 天的每日 6 個月及 12 個月的美元 LIBOR 利率和每日不同期限的交換利率報價，將此 200 天的資訊分成 200 組，每天分為一組，同時對此 200 組中，針對每組的 LIBOR 利率及交換利率報價，運用前述遠期利率的估計過程一，所提到的非線性插補法，插補出一年以上以半年為間隔的 LIBOR 利率及交換利率，再運用拔靴法得到一年以上的 LIBOR 利率（殖利率），最後運用即期利率與遠期利率之間的關係式，可求得 200 組每日不同期限的遠期利率。利用此 200 組不同期限的遠期利率，即可求得遠期利率間的歷史相關係數矩陣：

	1	2	3	4
1	1	-0.12958	0.99238	0.99837
2	-0.12958	1	-0.00642	-0.07270
3	0.99238	-0.00642	1	0.99780
4	0.99837	-0.07270	0.99780	1

### 四. 評價結果

利用市場資料估計完遠期利率、初始波動度結構並求得歷史相關係數後，可利用這些估計出來的參數進行最後的評價過程，接下來我們將樹狀模型的評價結果與蒙地卡羅模擬法做比較，表 3 為用樹狀模型得到的債券選擇權價值；而表 4 是用蒙地卡羅模擬法得到的結果。

表 3. 用樹狀模型來評價債券選擇權

m	tree	m	tree	m	tree	m	tree
1	13.94235	6	13.92684	11	13.92545	16	13.92251
2	13.88081	7	13.92196	12	13.92310	17	13.93678
3	13.92011	8	13.91764	13	13.93608	18	13.93292
4	13.93581	9	13.93266	14	13.93193	19	13.92861
5	13.92094	10	13.92862	15	13.92733	20	13.92661

"m" 為 0 至時間點 t 分割的期數  
 "tree" 為 0 至時間點 t 分割 m 期的債券選擇權價值

表 4. 用蒙地卡羅模擬法評價債券選擇權

N	MC Value	95% C.I.
100	13.94823	[13.29039 , 14.60608]
1000	13.93185	[13.69541 , 14.16828]
10000	13.93421	[13.86762 , 14.00081]
100000	13.93007	[13.24065 , 14.61949]
1000000	13.92984	[13.07544 , 14.78424]

"N" 為使用蒙地卡羅模擬債券價格選擇權的次數  
 "MC Value" 為使用蒙地卡羅模擬法模擬 N 次的平均債券選擇權價格  
 "95% C. I." 為 95%的信賴區間

由表 3 與表 4 可以看出，使用樹狀模型求算的債券選擇權價值會收斂至使用蒙地卡羅模擬法的評價結果，表示樹狀模型在分割期數很少的情況下，債券選擇權的價值仍然與使用蒙地卡羅模擬法的值很接近。

### 第三節 敏感度分析

延續第二節，為了讓本研究的模型增加可靠性，我們透過敏感度分析比較蒙地卡羅模擬法與樹狀模型的結果是否一致。其結果皆以樹狀模型從 0 至時間點  $t$  分割 20 期，而蒙地卡羅模擬法試驗 1000000 次的情況下做比較。表 3 則說明初始遠期利率曲線每次平移變動幅度 0.05%，對債券選擇權價值的影響。從表 3 我們可以知道樹狀模型的評價結果與蒙地卡羅模擬法結果一致，其值也恆落在 95%的信賴區間裡面。我們也可以從圖 2. 看出此結果。另外，債券選擇權價值會隨著初始遠期利率曲線上升而下降，也符合了債券選擇權與利率之間的關係。

表 5. 敏感度分析:初始遠期利率曲線平移幅度對選擇權價值的影響

$\Delta r$	tree	MC value	95% C.I.
0.0005	13.76813	13.71921	[13.69867 , 13.82075]
0.001	13.60897	13.60382	[13.53753 , 13.68011]
0.0015	13.45152	13.40992	[13.34976 , 13.51907]
0.002	13.29405	13.24653	[13.21576 , 13.36731]
0.0025	13.13734	13.12580	[13.06006 , 13.20154]
0.003	12.98110	12.93345	[12.89282 , 13.05407]
0.0035	12.82533	12.81280	[12.75080 , 12.89479]
0.004	12.66994	12.62376	[12.59932 , 12.73819]
0.0045	12.51501	12.50390	[12.42823 , 12.58254]
0.005	12.36073	12.34959	[12.28667 , 12.42250]

" $\Delta r$ " 為初始遠期利率曲線平移幅度  
 "tree" 為使用樹狀模型從 0 至時間點 t 分割 20 期的債券選擇權評價結果  
 "MC value" 為用蒙地卡羅模擬法模擬 1000000 次的平均債券選擇權價值  
 "95% C. I." 為 95%的信賴區間

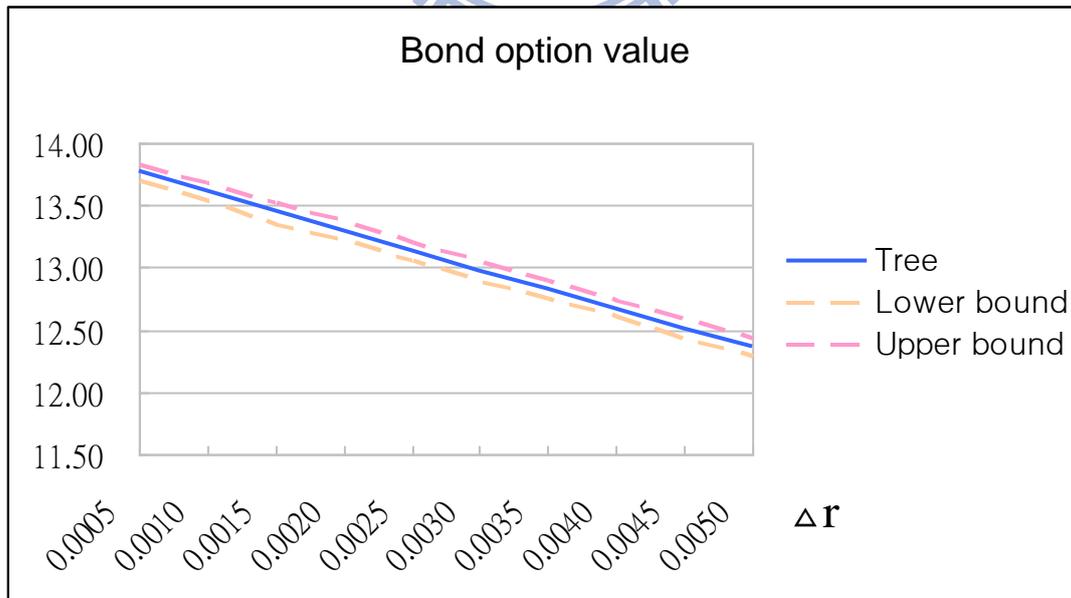


圖 2. 初始遠期利率曲線變動對選擇權價值的影響

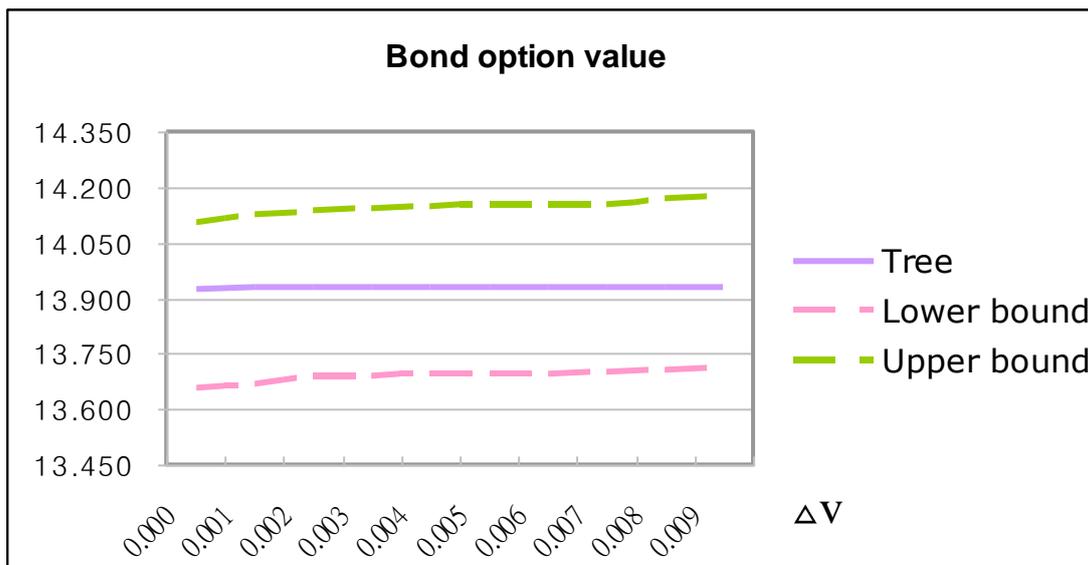
X 軸為初始遠期利率曲線的平移幅度，Y 軸為債券選擇權價值。Lower bound 及 Upper bound 則為蒙地卡羅模擬 95%信賴區間上下界。

表 6 則為檢視波動度期間結構每次平移變動幅度 0.1%，對樹狀結構及蒙地卡羅模擬法評價結果的影響，從表 6 中的結果仍可發現樹狀模型與蒙地卡羅模擬法的評價結果依然很一致，且樹狀模型評價結果也落在 95% 的信賴區間內，而將此結果用圖 3. 表示，也可看出債券選擇權價值隨著波動度上升而上升，也符合了一般的情況。

**表 6. 敏感度分析：波動度期間結構平移幅度對選擇權價值的影響**

$\Delta v$	tree	MC value	95 % C.I.
0	13.92661	13.92696	[13.65334 , 14.10424]
0.001	13.92724	13.92754	[13.66453 , 14.12252]
0.002	13.92782	13.92771	[13.68477 , 14.13440]
0.003	13.97841	13.92886	[13.68707 , 14.14095]
0.004	13.92901	13.92995	[13.69026 , 14.14511]
0.005	13.92960	13.92936	[13.69224 , 14.14812]
0.006	13.93021	13.93044	[13.69474 , 14.15061]
0.007	13.93081	13.93095	[13.69954 , 14.15313]
0.008	13.93142	13.93185	[13.70495 , 14.16538]
0.009	13.93202	13.93277	[13.70896 , 14.17784]

"  $\Delta v$  " 為波動度期間結構的平移幅度  
 " tree " 為使用樹狀模型從 0 至時間點 t 分割 20 期的債券選擇權評價結果  
 " MC value " 為用蒙地卡羅模擬法模擬 1000000 次的平均債券選擇權價值  
 " 95% C. I. " 為 95% 的信賴區間



**圖 3. 波動度期間結構變動對選擇權價值的影響**

X 軸為初始波動度期間結構的的平移幅度，Y 軸為債券選擇權價值。Lower bound 及 Upper bound 則為蒙地卡羅模擬 95% 信賴區間的上下界



## 第五章 結論

本研究為遠期 LIBOR 市場模型提供了更完備的評價方法，使得原本只有各期的邊際機率，可以依據利率衍生性商品的形式建構不同生效日，且建構出具有相關性的遠期利率之聯合機率分配。如此，可評價更多元的利率衍生性商品。

在實證分析的部份，本研究將所建構出之樹狀模型與實務上常受應用的蒙地卡羅模擬法做比較，發現樹狀模型的評價皆與蒙地卡羅模擬法的結果一致，且在分割期數很少的情況下，結果仍然符合，顯示樹狀模型評價的準確性，也確保樹狀方法的評價結果會落在蒙地卡羅模擬法 95% 的信賴區間裡面。

但由於樹狀模型的節點成爆炸性成長，使得電腦運算無法負荷，如能減低計算複雜度，未來必可以廣泛運用至更多元、更長期的利率衍生性商品。



## 參考文獻

### 中文部分

- [ 1 ] 戴天時 (2005), C++財務程式設計, 初版, 證基會
- [ 2 ] 陳松男 (2006), 利率金融工程學: 理論模型及實務應用, 初版, 新陸書局

### 英文部分

- [ 1 ] Hull, J. 2007. *Options, Futures and Other Derivative Securities* (7th ed.)  
Pearson.
- [ 2 ] Ho, T.S., R.C. Stapleton, and M.G. Subrahmanyam, 1995, *Multivariate Binomial Approximations for Asset Prices with Non-Stationary Variance and Covariance Characteristics*, *Review of Financial Studies*, 8, 1125-1152.
- [ 3 ] Hull, J. and A. White, 1994, *Numerical Procedures for Implementing Term Structure Model II : Two-Factor Models*, *Journal of Derivatives*, 2, 7-16.
- [ 4 ] Ho, C.J., “Using the LIBOR Market Model to Price the Interest Rate Derivatives: A Recombining Binomial Tree Methodology”, 2008.
- [ 5 ] Poon, S.H. and R.C. Stapleton, 2005, *Asset Pricing in Discrete Time A Complete Markets Approach*, Oxford.