

國立交通大學

電機與控制工程研究所

碩士論文

最小最大最佳化頻譜近似FIR濾波器設計

Spectrum Approximation with Min-Max Criterion by

FIR filter



研究生：陳志宏

指導教授：李福進 博士

中華民國九十三年七月

最小最大最佳化頻譜近似FIR濾波器設計

Spectrum Approximation with Min-Max Criterion by FIR filter

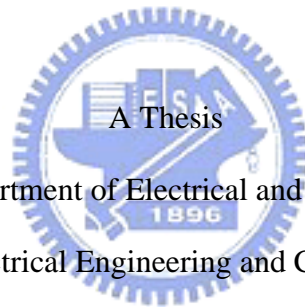
研究生：陳志宏 Student: Chih-hung Chen

指導教授：李福進 博士 Advisor: Dr. Fu-Ching Lee

國立交通大學

電機與控制工程研究所

碩士論文



Submitted to Department of Electrical and Control Engineering

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao-Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master

in

Electronics and Control Engineering

June 2004

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十三年七月

最小最大最佳化頻譜近似FIR濾波器設計

研究生：陳志宏

指導教授：李福進 博士

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文



本篇論文在於找出一串有限長度正數列頻譜，使其能夠近似於一個已給定的非負頻譜。我們利用最小化最大誤差指標，及 Parks-McClellan 演算法，設計出具有最佳誤差的頻譜，並對此頻譜做限制式上的處理，來得到正數列頻譜，並將所得到之正數列頻譜利用分解理論做分解，並以 FIR 系統實現之。我們在此也舉出例子，來比較我們所設計出的頻譜其最大誤差，並討論其結果。最後我們利用不同權重函數 K 值的模擬而得出，在 K 值設定為 2 時正數列具有最佳之最大誤差。

Spectrum Approximation with Min-Max Criterion by FIR filter

Student: Chih-hung Chen Advisor: Dr. Fu-Ching Lee

Institute of Electrical and Control Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

The purpose of this thesis is searching for a finite-length positive sequence so that its spectrum can optimally approximate to a given spectrum. In this thesis, we use the Min-Max criterion and Parks-McClellan algorithm to design this optimal approximation error of spectrum. Moreover, we give constraint of this optimal spectrum to get the positive spectrum. Then the positive spectrum can be factored by Spectrum Factorization Theorem and can be realized by FIR system. Moreover, we also give some examples to compare with our spectrum with maximal approximation error and discuss its result. Finally, we simulate different weighting functions of K and give some comparisons. From the results we can get the optimal approximation error of positive spectrum when K equal to 2.

誌 謝

首先由衷的感謝我的指導老師 李福進博士，兩年來悉心的指導，使得本篇論文能夠順利的完成，並且感謝在我碩士生涯陪著我度過的每個人，在此至上我心目中最崇高的敬意以及謝意。

另外也非常感謝一路走來，在背後支持我的父母和家人，在此也由衷感謝他們，能夠讓我在沒有後顧之憂下，全心的完成學業，謝謝你們。



目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目 錄.....	iv
表目錄.....	vi
圖目錄.....	vii
第一章 緒論	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 章節介紹.....	2
第二章 定理及演算法	3
2.1 正數列的特性.....	3
2.2 交替定理(ALTERNATION THEOREM).....	6
2.3 派克司-麥克連演算法(PARKS-MCCLELLAN ALGORITHM).....	8
2.3.1 Parks-McClellan algorithm.....	8
2.3.2 Parks-McClellan 演算法流程圖及分析.....	13
2.4 頻譜分解定理.....	14
第三章 演算法模擬	18
3.1 演算法分析.....	18
3.2 數值範例.....	19
3.3 方法比較.....	24
3.3.1 範例比較.....	24
3.3.2 比較結果.....	27
3.4 最佳正數列.....	29

第四章	結論.....	41
參考文獻	43



表 目 錄

表 3.2-1	原始數列	20
表 3.2-2	原始最大誤差 δ 值	20
表 3.2-3	正數列	20
表 3.2-4	正數列最大誤差 值	20
表 3.3-1	$x \in R^5$ 最大誤差	28
表 3.3-2	$x \in R^7$ 最大誤差	28
表 3.3-3	$x \in R^9$ 最大誤差	28
表 3.3-4	原始數列	29
表 3.3-5	原始數列最大誤差 值	29
表 3.3-6	正數列	29
表 3.3-7	正數列最大誤差 值	29
表 3.3-8	$x \in R^5$ 最大誤差比較	32
表 3.3-9	$x \in R^7$ 最大誤差比較	33
表 3.3-10	$x \in R^9$ 最大誤差比較	33
表 3.3-11	$x \in R^5$ K值變化之最大誤差 值	35
表 3.3-12	$x \in R^7$ K值變化之最大誤差 值	35
表 3.3-13	$x \in R^9$ K值變化之最大誤差 值	35

圖目錄

圖 2.3-1 演算法流程圖	14
圖 3.2-1 $x \in R^5$ 原始數列和正數列模擬結果	21
圖 3.2-2 $x \in R^7$ 原始數列和正數列模擬結果	21
圖 3.2-3 $x \in R^9$ 原始數列和正數列模擬結果	22
圖 3.3-1 $x \in R^5$ 利用min max指標所設計出之濾波器與最小平方差指標之比較	26
圖 3.3-2 $x \in R^7$ 利用min max指標所設計出之濾波器與最小平方差指標之比較	26
圖 3.3-3 $x \in R^9$ 利用min max指標所設計出之濾波器與最小平方差指標之比較	27
圖 3.3-4 $x \in R^5$ 原始數列與正數列模擬結果	30
圖 3.3-5 $x \in R^7$ 原始數列與正數列模擬結果	30
圖 3.3-6 $x \in R^9$ 原始數列與正數列模擬結果	31
圖 3.3-7 $x \in R^5$ K值設定為2時的比較	33
圖 3.3-8 $x \in R^7$ K值設定為2時的比較	34
圖 3.3-9 $x \in R^9$ K值設定為2時的比較	34
圖 3.3-10 $x \in R^5$ 各K值最大誤差	36
圖 3.3-11 $x \in R^5$ 各K值通帶最大誤差	36
圖 3.3-12 $x \in R^5$ 各K值滯帶最大誤差	37
圖 3.3-13 $x \in R^7$ 各K值最大誤差	37
圖 3.3-14 $x \in R^7$ 各K值通帶最大誤差	38
圖 3.3-15 $x \in R^7$ 各K值滯帶最大誤差	38
圖 3.3-16 $x \in R^9$ 各K值最大誤差	39
圖 3.3-17 $x \in R^9$ 各K值通帶最大誤差	39
圖 3.3-18 $x \in R^9$ 各K值滯帶最大誤差	40

第 1 章 緒論

1.1 研究背景

一串數列的離散傅立葉轉換，亦稱為傅立葉頻譜或簡稱為頻譜，若其頻譜在所限定的頻率之內皆大於或等於零，如假設 $\omega \in [0, \pi]$ ，而在 $\omega \in [0, \pi]$ 內此數列的頻譜沒有負的部分，則這個數列即可稱之為正數列。本論文就是要找到一串有限長度正數列，利用 min-max 的評判標準[1]，去近似一個已給定的頻譜(例如低通理想濾波器)，而得到將誤差最大值最小化的最佳頻譜，再經處理後即可得正數列頻譜。而此有限長度正數列頻譜即可作頻譜分解，並以 FIR(finite impulse response)系統實現。

首先我們討論 min max 指標的數學表示式，再加上限制條件下，我們可將頻譜設計的問題表示為：

$$\begin{aligned} & \min \{ \max_{\omega \in [0, \pi]} W(\omega) | H(e^{j\omega}) - A(e^{j\omega}) | \} \\ & \text{s.t. } A(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \omega \in [0, \pi] \\ & A(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L}^L h[n] e^{-j\omega n} \end{aligned} \quad (1.1-1)$$

表示式中 $A(e^{j\omega})$ 為我們所要找的頻譜， $H(e^{j\omega})$ 為給定的理想頻譜，而 $W(\omega)$ 為權重函數(weighted function)，然而對每一個 ω ， $A(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \omega \in [0, \pi]$ ，每一頻率 ω 均有一個限制，因此限制條件有無限多個，因此文獻上我們稱此問題為半無限維規劃問題。

在這裡權重函數我們定義為：

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{K}, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 1, & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (1.1-2)$$

其中 ω_p 、 ω_s 分別稱為通帶邊緣頻率(passband edge frequency)及滯帶邊緣頻率(stopband edge frequency), 藉由權重函數中 K 值的變化, 可以讓我們得到不同比率的 δ_1 、 δ_2 近似誤差值, 而此特性對於得到正數列最佳頻譜, 將有極大的用途。

1.2 章節介紹

第二章裡我們先介紹正數列的一些基本特性, 以及本論文中設計方法 min max 指標的定理基礎和 Parks-McClellan 利用此定理基礎下所發展出的演算法, 最後再介紹頻譜分解理論。第三章裡我們將利用這一套演算法, 模擬出設計結果, 並且求出具有最佳之最大誤差正數列頻譜, 其中再和一些其它方法的模擬結果做最大誤差上的比較。第四章則為本論文之結論。



第二章 定理及演算法

在本章節裡我們在 2.1 節中首先介紹正數列特性,接著 2.2 節再介紹 min max 指標問題所需使用解多項式方法的交替定理,和此定理其應用在設計濾波器上出現的性質,而交替定理並沒有確切指出如何解得濾波器。因此 2.3 節我們再討論 Parks-McClellan 疊代演算法,這個演算法將會實現交替定理應用到濾波器上的設計。2.4 節再介紹分解理論來分解所設計出之頻譜,即可以 FIR 系統做近似。

2.1 正數列的特性

我們稱一串數列 $\{x(n)\}$ 為正數列其數學式子上的定義,即為:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \geq 0 \quad (2.1-1)$$

也就是說若且為若其離散傅立葉轉換大於或等於零,在此需注意的一點 (2.1-1) 之定義並非指數列 $\{x(n)\}$ 內之元素皆為正數,而是指這串數列的離散傅立葉轉換後的函數值大於或等於零。而一串數列所有元素皆為非負仍有可能具有負的離散傅立葉轉換函數。然而正數列總是有實數值的離散傅立葉轉換,如此一來,此正數列同時也必須遵守共軛對稱(Conjugate Symmetric)性質,亦即:

$$x(-n) = \bar{x}(n) \quad \forall n \quad (2.1-2)$$

\bar{x} 表示 x 的共軛複數。我們以一個代數上的表示法來說明正數列的特性,此表示法即是 Parseval's 關係式的應用,如下所示:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) |W(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m-k) w(m) \bar{w}(k) \end{aligned} \quad (2.1-3)$$

其中 $X(e^{j\omega})$ 和 $W(e^{j\omega})$ 為任意兩數列 $\{x(n)\}$ 和 $\{w(n)\}$ 的離散傅立葉轉換。

(2.1-3)是構成正數列的一個必要但不是充分條件，因為有很多數列雖滿足(2.1-3)卻不是一個正數列。假如 $X(e^{j\omega})$ 為離散傅立葉函數轉換的非負實數，則(2.1-3)即為非負實數值。因此建立了如下正數列的基礎特性[3]。

定理 2.1.1 一串共軛對稱數列 $\{x(n)\}$ 為正數列之充分必要條件為

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m-k)w(m)\bar{w}(k) \geq 0 \quad (2.1-4)$$

對於每個複數數列 $\{w(n)\}$ ，上述定理提供了我們對於測試數列一串無限數列是否為正的方法，我們進而可以將之利用到有限數列上，把(2.1-4)改為如下所示：

$$\sum_{k=-L}^L \sum_{m=-L}^L x(m-k)w(m)\bar{w}(k) \geq 0 \quad (2.1-5)$$

我們把(2.1-5)中的共軛對稱數列 $\{x(n)\}$ 轉換成相關的 k 階資料矩陣(data matrix)來考量。這個矩陣具有下列型式：

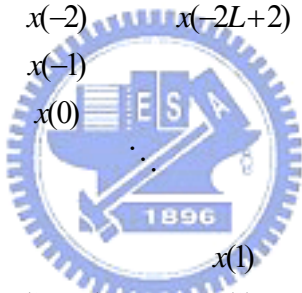
$$X_k = \begin{bmatrix} x(0) & \bar{x}(1) & \cdots & \bar{x}(k) \\ x(1) & x(0) & \cdots & \bar{x}(k-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(k) & x(k-1) & \cdots & x(0) \end{bmatrix} \quad (2.1-6)$$

(2.1-5)的 $(k+1) \times (k+1)$ 的資料矩陣是一個 Hermitian-Toeplitz 的矩陣，而 Hermitian-Toeplitz 矩陣我們可以利用(2.1-5)來得到。

下列我們做簡單的推導，

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-L}^L \sum_{m=-L}^L x(m-k)w(m)\bar{w}(k) \\
&= \sum_{k=-L}^L [x(-L-k)w(-L)\bar{w}(k) + x(-L+1-k)w(-L+1)\bar{w}(k) + x(-L+2-k)w(-L+2)\bar{w}(k) \\
&+ \cdots + x(-L-2-k)w(L-2)\bar{w}(k) + x(L-1-k)w(L-1)\bar{w}(k) + x(L-k)w(L)\bar{w}(k)] \\
&= x(-L+L)w(-L)\bar{w}(L) + x(-L+L-1)w(-L)\bar{w}(L+1) + x(-L+L-2)w(-L)\bar{w}(L+2) + \cdots \\
&x(-L-L+2)w(-L)\bar{w}(L-2) + x(-L-L+1)w(-L)\bar{w}(L-1) + x(-L-L)w(-L)\bar{w}(L) + \\
&x(-L+L+1)w(-L+1)\bar{w}(-L) + x(-L+1+L-1)w(-L+1)\bar{w}(-L+1) + \cdots + \\
&x(L-1+L)w(L-1)\bar{w}(-L) + x(L-1+L-1)w(L-1)\bar{w}(-L+1) + x(L-1-L+2)w(L-1)\bar{w}(-L+2) \\
&x(L-1-L+2)w(L-1)\bar{w}(L-2) + x(L-1-L+1)w(L-1)\bar{w}(L-1) + x(L-1-L)w(L-1)\bar{w}(L) + \\
&\cdots + x(L+L)w(L)\bar{w}(-L) + x(L+L-1)w(L)\bar{w}(-L+1) + x(L+L-2)w(L)\bar{w}(-L+2) + \cdots + \\
&x(L-L+2)w(L)\bar{w}(L-2) + x(L-L+1)w(L)\bar{w}(L-1) + x(L-L)w(L)\bar{w}(L)
\end{aligned} \tag{2.1-7}$$

⇒

$$\begin{bmatrix} w(-L) \\ w(-L+1) \\ w(-L+2) \\ \vdots \\ w(L-2) \\ w(L-1) \\ w(L) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} x(0) & x(-1) & x(-2) & \cdots & x(-2L+2) & x(-2L+1) & x(-2L) \\ x(1) & x(0) & x(-1) & \cdots & x(-2L+2) & x(-2L+1) & x(-2L) \\ x(2) & x(1) & x(0) & \cdots & x(-2L+2) & x(-2L+1) & x(-2L) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(2L-2) & & & & & & x(-2) \\ x(2L-1) & x(2L-2) & & & x(1) & x(0) & x(-1) \\ x(2L) & x(2L-1) & x(2L-2) & \cdots & x(2) & x(1) & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(-L) \\ w(-L+1) \\ w(-L+2) \\ \vdots \\ w(L-2) \\ w(L-1) \\ w(L) \end{bmatrix}$$


$$\tag{2.1-8}$$

在此令 $2L = k$, \therefore 上式可改寫為 :

⇒

$$W(k)^* \begin{bmatrix} x(0) & x(-1) & x(-2) & \cdots & x(-k+2) & x(-k+1) & x(-k) \\ x(1) & x(0) & x(-1) & \cdots & & x(-k+2) & x(-k+1) \\ x(2) & x(1) & x(0) & \cdots & & & x(-k+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(k-2) & & & \cdots & & & x(-2) \\ x(k-1) & x(k-2) & & \cdots & x(1) & x(0) & x(-1) \\ x(k) & x(k-1) & x(k-2) & \cdots & x(2) & x(1) & x(0) \end{bmatrix} W(k)$$

$$\tag{2.1-9}$$

由(2.1-2) $x(-k) = \bar{x}(k)$, 所以 Hermitian-Toeplitz 矩陣 X_k 即為所求。由這個資料

矩陣我們可得以下定理。

定理 2.1.2 共軛對稱數列 $\{x(n)\}$ 是正數列，則若且唯若其相關資料矩陣

$X_k, k = 0, 1, 2, \dots$ 為半正定。

由(2.1-5)所示，這個數列稱之為正數列的條件為大於等於零，因此(2.1-9)

$W(k)^* X_k W(k) \geq 0$ ，其中 $W(k) = \{w(n)\}$ 為任意複數數列，因此 $X_k \geq 0$ ，也就是說

若 X_k 為半正定則這個數列即為正數列。

這個定理可以讓我們更明確的測試出，一串數列是否為正數列，然而這裡有一項需要注意的是，在測試這串數列否為正數列時，這個數列的所有資料矩陣都應該是半正定。也就是說這個數不論取數列中對稱的任何一段數列，其 X_k 都應該是半正定。因此若整個資料矩陣族皆為半正定時，此數列不論是有限或無限長度，都可稱之為正數列。



在介紹完正數列的定義以及測試正數列的方法後，我們接下來再介紹濾波器設計上，所需使用到的定理基礎也就是交替定理[1]和設計的演算法。

2.2 交替定理(Alternation Theorem)

假設 F 表示包含在實軸 x 上之封閉子集所成的不連續聯集。 $P(x)$ 表示一個 L 階多項式，如下所示：

$$P(x) = \sum_{k=0}^L a_k x^k \quad (2.2-1)$$

在此我們定義一個誤差函數 $E_p(x)$ ，使其具有以下的表示方式：

$$E_p(x) = W_p(x)[H_p(x) - P(x)] \quad (2.2-2)$$

$H_p(x)$ 為一個給定之理想函數，它在 F 上連續； $W_p(x)$ 是一個權重函數，在 F 上連續。此外我們再定義出最大誤差 $\|E\|$ 為：

$$\|E\| = \max_{x \in F} |E_p(x)| \quad (2.2-3)$$

在定理中指出，當一個使 $\|E\|$ 為最小的唯一 L 階多項式 $P(x)$ ，若且唯若條件為 $\|E\|$ 最少有 $(L+2)$ 個 x_i 在 F ，使得 $x_1 < x_2 < \dots < x_{r+2}$ ，而且 $E_p(x_i) = -E_p(x_{i+1}) = \pm \|E\|$ ， $i = 1, 2, \dots, (r+1)$ 。也就是說當我們找到了一個 L 階多項式 $P(x)$ ，而這個多項式在不連續聯集 F 中，最少有 $(L+2)$ 個端點存在，且此 $(L+2)$ 個極端點之誤差絕對值大小皆相等，並具有一正極端值後為一負端極值順序特性者，則此 L 階多項式 $P(x)$ 即為一個使得(2.2-2)中 $E_p(x)$ 為最大，且為唯一的多項式解。



定理 2.2.1

在一個 L 階的多項式之最大可能交替數目是 $(L+3)$ 個且最少有 $(L+2)$ 個交替。

我們對這個定理做簡單說明如下，由於在等漣波濾波器的設計中，一個 L 階的多項式最多會有 $(L-1)$ 個極端值，而在 $\omega = 0, \omega_p, \omega_s, \pi$ 亦有可能有交替，所以最大可能的交替數目為 $(L-1)$ 個極端值，再加上四個邊緣頻率，因此最多會有 $(L+3)$ 個交替，而由交替定理可知最少有 $(L+2)$ 個交替，若交替數達到最大可能交替數目 $(L+3)$ 個時，則此濾波器也可稱為超越漣波濾波器(extraripple filter)。

在此我們考慮一個三角多項式

$$H(\cos \omega) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos \omega)^k$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dH(\cos \omega)}{d\omega} &= -\sin \omega \cdot \left(\sum_{k=0}^L k \cdot a_k (\cos \omega)^{k-1} \right) \\ &= -\sin \omega \cdot \left(\sum_{k=0}^{L-1} (k+1) \cdot a_{k+1} (\cos \omega)^k \right) \end{aligned} \quad (2.2-4)$$

其在 $\omega = 0$ 及 π 兩點上總是零，而 $(L-1)$ 次多項式的 $(L-1)$ 個根也會使(2.2-4)為零，在此交替頻率已有 $(L+1)$ 個，因此再來討論 ω_p 和 ω_s 是否也必定為交替，由於在交替定理中，我們已知交替頻率點上，其誤差必須要在 $\delta = \pm \|E\|$ 間，且 ω_p 和 ω_s 為相連接之交替頻率，也就是說 $|E(\omega_p)| = -|E(\omega_s)|$ ，因此若 ω_p 和 ω_s 其中有一個不為交替頻率會連帶移走兩個交替，而使得交替頻率少於 $L+2$ 個，不合定理。

2.3 派克司-麥克連演算法(Parks-McClellan algorithm)

2.3.1 Parks-McClellan 演算法介紹

交替定理提供了誤差在 $\min \max$ 下是否具最佳性的充分且必要條件。而這個定理並沒有明確告訴我們，如何尋找最佳濾波器，但是這個條件卻提供了尋找濾波器的基礎，而 Parks-McClellan 演算法[1]則提供了我們，利用交替定理為基礎下所發展出的一套疊代設計方法。

以下我們介紹交替定理如何套用在濾波器設計上，以及 Parks-McClellan algorithm 演算法做詳細的介紹。通常我們可以先考慮設計一個零相位的濾波器，也就是說濾波器之係數有以下性質：

$$h[n] = h[-n] \quad n \in R \quad (2.3-1)$$

而這個濾波器可以假設為：

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L}^L h[n]e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow A(e^{j\omega}) = h[0] + \sum_{n=1}^L 2 \cdot h[n] \cdot (\cos(\omega \cdot n)) \quad (2.3-2)$$

再令 $h[0] = d_0$, $2 \cdot h[1] = d_1$, $2 \cdot h[2] = d_2$, \dots

$$\Rightarrow A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^L d_n \cdot \cos(\omega \cdot n) \quad (2.3-3)$$

套用交替定理，我們知道最佳濾波器 $A(e^{j\omega})$ 必會滿足下列方程組：

$$d_0 = h[0], \quad d_1 = 2 \cdot h[1], \quad d_2 = 2 \cdot h[2], \quad \dots$$

$$W(\omega_k)[H(e^{j\omega_k}) - A(e^{j\omega_k})] = (-1)^{k+1} \cdot \delta, \quad k = 1, 2, \dots, (L+2)$$

$$\Rightarrow H(\omega_k) = A(e^{j\omega_k}) + \frac{(-1)^{k+1} \cdot \delta}{W(\omega_k)}$$

$$= \sum_{n=0}^L d_n \cdot \cos(\omega_k \cdot n) + \frac{(-1)^{k+1} \cdot \delta}{W(\omega_k)} \quad (2.3-4)$$

$$= d_0 + d_1 \cos(\omega_k \cdot 1) + d_2 \cos(\omega_k \cdot 2) + \dots + \frac{(-1)^{k+1} \cdot \delta}{W(\omega_k)}$$

可將上式改寫成為矩陣形式，可得：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \cos \omega_0 & \cos 2 \cdot \omega_0 & \dots & \cos n \cdot \omega_0 & \frac{1}{W(\omega_0)} \\ 1 & \cos \omega_1 & & & & \frac{-1}{W(\omega_1)} \\ \vdots & \cdot & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & \cos \omega_{L+2} & \cdot & \dots & & \frac{(-1)^{L+3}}{W(\omega_{L+2})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(\omega_0) \\ H(\omega_1) \\ \cdot \\ \vdots \\ H(\omega_{L+2}) \end{bmatrix} \quad (2.3-5)$$

在 Parks-McClellan 演算法中，它的目的是為了把一個濾波器的設計問題轉換成一個多項式近似問題，再利用解多項式的方法而來得到所要求的濾波器。因此就必須將(2.3-5)改成多項式的型式。明確的說，就是把 $A(e^{j\omega})$ 中的 $\cos(\omega n)$ 能夠表示成為 $\cos(\omega)$ 的多項式，因此在這個演算法裡套用了：

$$\cos(n\omega) = T_n(\cos \omega) \quad (2.3-6)$$

其中 $T_n(x)$ 是一個 n 階柴比雪夫多項式，其定義為 $T_n(x) = \cos(n(\cos^{-1} x))$ ，由定義

可得知柴比雪夫多項式有以下特性：

$$T_{n+1}(x) = 2 \cdot x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (2.3-7)$$

以下我們做簡單證明：

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \cos^{-1} x)$$

$$\begin{aligned} T_{n-1}(x) &= \cos((n-1) \cdot \cos^{-1} x) = \cos(n \cdot \cos^{-1} x - \cos^{-1} x) \\ &= \cos(n \cdot \cos^{-1} x) \cdot \cos(\cos^{-1} x) + \sin(n \cdot \cos^{-1} x) \cdot \sin(\cos^{-1} x) \\ &= T_n(x) \cdot x - \sin(n \cdot \cos^{-1} x) \cdot \sin(\cos^{-1} x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos((n+1) \cdot \cos^{-1} x) = \cos(n \cdot \cos^{-1} x + \cos^{-1} x) \\ &= \cos(n \cdot \cos^{-1} x) \cdot \cos(\cos^{-1} x) - \sin(n \cdot \cos^{-1} x) \cdot \sin(\cos^{-1} x) \\ &= T_n(x) \cdot x + \sin(n \cdot \cos^{-1} x) \cdot \sin(\cos^{-1} x) \end{aligned}$$

$$\therefore T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2 \cdot T_n(x) \cdot x$$

$$\Rightarrow T_{n+1}(x) = 2 \cdot T_n(x) \cdot x - T_{n-1}(x)$$

由(2.3-5)我們便可以將之改寫成 $\cos(\omega)$ 之 L 階多項式。代換如下：

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^L d_n \cdot \cos(n\omega) = \sum_{n=0}^L d_n \cdot T_n(\cos\omega) \quad \text{let, } x = \cos\omega \\ \Rightarrow \begin{cases} d_0 \cdot T_0(\cos\omega) = d_0 \cdot 1 = d_0 \\ d_1 \cdot T_1(\cos\omega) = d_1 \cdot x \\ d_2 \cdot T_2(\cos\omega) = d_2 \cdot (2 \cdot x^2 - 1) = 2 \cdot d_2 \cdot x^2 - d_2 \\ d_3 \cdot T_3(\cos\omega) = d_3 \cdot (2 \cdot (2 \cdot x^2 - 1) \cdot x - x) = 4 \cdot d_3 \cdot x^3 - 3 \cdot d_3 \cdot x \\ d_4 \cdot T_4(\cos\omega) = d_4 \cdot (2 \cdot (4 \cdot x^3 - 3 \cdot x) - (2 \cdot x^2 - 1)) = 8 \cdot d_4 \cdot x^4 - 8 \cdot d_4 \cdot x^2 + d_4 \\ \vdots \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3-8)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(e^{j\omega}) &= d_0 + d_1 \cdot x + 2 \cdot d_2 x^2 - d_2 + 4 \cdot d_3 x^3 - 3 \cdot d_3 x + 8 \cdot d_4 x^4 - 8 \cdot d_4 x^2 + d_4 + \dots \\ &= (d_0 + d_4 + \dots) + (d_1 - 3 \cdot d_3 + \dots) \cdot x + (2 \cdot d_2 - 8 \cdot d_4 + \dots) \cdot x^2 + \dots \\ &= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^L a_k \cdot x^k = \sum_{k=0}^L a_k \cdot (\cos\omega)^k \end{aligned} \quad (2.3-9)$$

將(2.3-4)求解方程式改寫成為：

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(e^{j\omega_k}) &= A(e^{j\omega_k}) + \frac{(-1)^{k+1} \cdot \delta}{W(\omega_k)} = \sum_{n=0}^L a_n \cdot x_k^n + \frac{(-1)^{k+1} \cdot \delta}{W(\omega_k)} \\ &= a_0 + a_1 \cdot x_k + a_2 \cdot x_k^2 + \dots + \frac{(-1)^{k+1} \cdot \delta}{W(\omega_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, L+2 \end{aligned} \quad (2.3-10)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^L & \frac{1}{W(\omega_0)} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^L & \frac{-1}{W(\omega_1)} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_{L+2} & x_{L+2}^2 & \dots & x_{L+2}^L & \frac{(-1)^{L+3}}{W(\omega_{L+2})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(\omega_0) \\ H(\omega_1) \\ \cdot \\ \vdots \\ H(\omega_{L+2}) \end{bmatrix} \quad (2.3-11)$$

而(2.3-11)的矩陣方程式就是用來找最佳 $A(e^{j\omega})$ 演算法的基礎。這個方法是從取樣一組在通帶和滯帶間交替頻率開始， $\omega_i, i = 0, 1, 2, \dots, (L+2)$ 。而 ω_p 和 ω_s 是固定的數，由交替定理可知，這兩個頻率也一定在交替頻率集合裡，也就是說交替頻率裡必有 $\omega_k = \omega_s$ ， $\omega_{k+1} = \omega_p$ ，由這些交替頻率以及利用(2.3-11)，就能用來解一組係數 a_k 和 δ ，而 Parks-McClellan 利用多項式的內插，找到了一個公式；對於一組給定之極端頻率， δ 可由下式求得：

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k H(e^{j\omega_k})}{\sum_{k=1}^{L+2} \frac{b_k (-1)^{k+1}}{W(\omega_k)}} \quad (2.3-12a)$$

其中

$$b_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+2} \frac{1}{(x_k - x_i)} \quad (2.3-12b)$$

由這個方程式裡我們可以直接求得 δ 值，而不用再解(2.3-11)，然而如果這個 δ 值是最佳誤差，則這一組交替頻率就必定是濾波器上的極端值，也就是說若在

$0 \leq \omega \leq \omega_p$ (通帶)處的交替頻率 ω_i , $A(e^{j\omega_i}) = 1 \pm K\delta$, 在 $\omega_s \leq \omega \leq \pi$ (滯帶)處交替頻率 ω_i , $A(e^{j\omega_i}) = \pm\delta$, 且 $E(\omega) \leq \delta, \omega \in [0, \pi]$ 。如果有 $E(\omega) \geq \delta$ 則表示這並非是最佳的, 必須再找一組新極端點, 而我們所找的新極端點為誤差曲線(在此我們稱還未得到最佳誤差濾波器時, 疊代過程中所得到的曲線為誤差曲線)中 $(L+2)$ 個最大尖點頻率, 重新計算直到找到最大誤差為止, 而這個重複的程序也一定可以收斂, 並找到最佳濾波器。在這裡 Parks-McClellan 運用 Lagrange 內插法, 得到可以直接求得 $A(e^{j\omega})$ 和 $E(\omega)$ 的公式。

$$A(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} \left[\frac{m_k}{(x - x_k)} \right] C_k}{\sum_{k=1}^{L+1} \left[\frac{m_k}{(x - x_k)} \right]} \quad (2.3-13a)$$

其中

$$C_k = H(e^{j\omega_k}) - \frac{(-1)^{k+1} \delta}{W(\omega_k)} \quad (2.3-13b)$$

$$m_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{(x_k - x_i)} = b_k (x_k - x_{L+2}) \quad (2.3-13c)$$

其中 $\omega_k, k = 0, 1, \dots, L+1$, 為原先所猜測的極值頻率, 但並不限定是前 $(L+1)$ 個, 也就是說 ω_k 只要是這一組極值頻率中任意 $L+1$ 個頻率即可。

我們將整體設計流程整理如下, 首先我們將所要設計的頻譜 $A(e^{j\omega})$ 表示式改換成多項式形式, 並且套用至交替定理上可得(2.3-11), 而由(2.3-11)為基礎下 Parks-McClellan 找出了一組公式, 此公式可以得出演算法每次疊代時所需之數據, 也就是誤差 δ 值和新的誤差曲線, 在這些數據的獲得後, 我們即可做演算法的疊代, 而此演算法之疊代必定收斂至得到最佳誤差濾波器為止, 而得到此最佳

誤差濾波器後，我們再做第三章所介紹之處理方法，即可得到我們所要的正數列頻譜。下一章節我們將把演算法疊代過程以條列表示出，並展示其流程圖。

2.3.2 Parks-McClellan 演算法疊代過程及流程圖

2.3.1 演算法

- 1、一開始先猜測 $L+2$ 個交替頻率， $\omega_i, i = 0, 1, 2, \dots, (L+2)$ ，而這個 $L+2$ 個頻率，包含通帶邊緣頻率 ω_p 和滯帶邊緣頻率 ω_s 。
- 2、此 $L+2$ 個頻率利用(2.3-12)可計算出 δ 值。
- 3、將猜測之交替頻率中 $L+1$ 個極端點頻率代入(2.3-13)中，可以得到 $A(e^{j\omega})$ 。
- 4、由 $A(e^{j\omega})$ 可以算出 $E(\omega)$ 值，若 $|E(\omega)| \geq \delta$ ，尋找 $A(e^{j\omega})$ 的極端點。
- 5、比較新找出的極端點是否為原先之頻率，若不是則重新 2 的步驟。
- 6、演算終止，所得到的 δ 值即為最佳值，而此 $L+2$ 個頻率即為交替頻率。

以下我們將這個演算法展示出其流程圖。

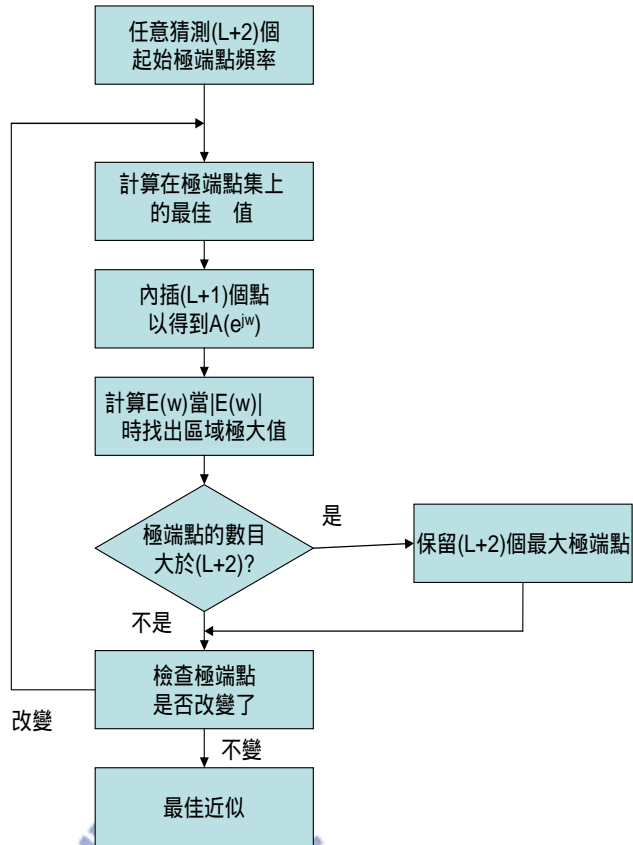


圖 2.3-1 演算法流程圖

2.4 頻譜分解定理

在介紹頻譜分解定理[3]之前，我們首先要將一串數列轉換到 z -domain 來分析，因為在 z -domain 下我們可以更了解數列上的特性，以及更容易分析這串數列，在此我們舉出一串典型的共軛對稱數列來敘述這個定理，其 z 轉換表示如下：

$$X(z) = x(0) + \sum_{n=1}^q [x(n)z^{-n} + \bar{x}(n)z^n] \quad (2.4-1)$$

而由於此數列具有共軛對稱的特性，因此我們可以得到：

$$X(z) = x(0) + \sum_{n=1}^q [x(n)z^{-n} + \bar{x}(n)z^n] = \bar{x}(0) + \sum_{n=1}^q [\bar{x}(n)z^n + x(n)z^{-n}] = \bar{X}(z^{-1}) \quad (2.4-2)$$

其中 $x(0) = \bar{x}(0)$ 為實數取共軛相等且 $z = \bar{z}$ ，而由(2.4-2)我們可得到若 z_0 是 $X(z)$

的一個零點(zero)，則其共軛倒數(Conjugate Reciprocal) z_0^{-1} 也會是一個零點。而這項特性我們將在以下定理介紹中將會用到，接著我們再對(2.4-1)做式子上的處理，我們對(2.4-1)提出 z^{-q} 次方：

$$\begin{aligned} X(z) &= z^{-q}[\bar{x}(q)z^{2q} + \bar{x}(q-1)z^{2q-1} + \cdots + x(0)z^{-q} + \cdots + x(q-1) + x(q)] \\ &= z^{-q} \cdot \bar{x}(q)[z^{2q} + \frac{\bar{x}(q-1)}{\bar{x}(q)}z^{2q-1} + \cdots + \frac{\bar{x}(0)}{\bar{x}(q)}z^{-q} + \cdots + \frac{x(q-1)}{\bar{x}(q)} + \frac{x(q)}{\bar{x}(q)}] \end{aligned} \quad (2.4-3)$$

可得一個 $2q$ 階的 z 多項式，因此我們可將(2.4-3)化為：

$$X(z) = z^{-q} \cdot \bar{x}(q) \prod_{k=1}^{2q} (z - z_k) \quad (2.4-4)$$

其中 z_k 為 (2.4-4)的零點，也就是 $X(z_k) = 0$ 對於 $1 \leq k \leq 2q$ ，由此我們可以得到以下的定理。

定理 2.4.1

一串有限長度 $2q+1$ 的共軛對稱數列 $\{x(n)\}$ ，其值在整數區間 $[-q \quad q]$ 外為零，若且為若其 z 轉換必可分解為下：

$$X(z) = z^{-q} \cdot \bar{x}(q) \prod_{k=1}^{2q} (z - z_k) \quad (2.4-5)$$

此定理我們可以看出，若 z_k 是 $X(z)$ 的一個零點，則其共軛倒數 z_k^{-1} 也是一個零點。而在這裡我們分析其可能零點分佈的情形，以及所具有的特性。我們由一個 $X(z)$ 的零點來討論，假設 $z_k = r \cdot e^{j\omega}$ 為一個零點，由之前的結論可得到， $z_k^{-1} = r^{-1} \cdot e^{-j\omega}$ 必定也是一個零點，在此會有兩種零點分佈，也就是 $r \neq 1$ 和 $r = 1$ 。當 $r \neq 1$ 時，會產生一組成對的零點出現，而當 $r = 1$ 時則出現單一在單位圓上的點。所以我們可得到一個結論，就是說這一串有限長度共軛對稱數列，其零點若

非落在單位圓上便會以共軛倒數成對出現。


定理 2.4.2 分解理論(Factorization Theorem)

一串有限長度 $2q+1$ 的正數列 $\{x(n)\}$ 若且為若其 z 轉換可被因式分解為下：

$$X(z) = \alpha^2 \prod_{k=1}^q (1 - z_k z^{-1})(1 - \bar{z}_k z) \quad (2.4-6)$$

此處 α^2 為一正數，由(2.4-6)我們可以發現一個正數列的特性，也就是其在單位圓上的零點會以偶數重數出現，如 2、4、6....個，因此我們可以比較出正數列以及一般共軛對稱數列的不同點，就在於單位圓上零點，正數列會出現偶數個數，而一般共軛對稱數列則奇、偶數重數都有可能，如 2、3、4...個出現。

利用(2.4-6)我們可以得到以下型式：



$$X(z) = B_q(z) \cdot \bar{B}_q(z^{-1}) \quad (2.4-7)$$

其中

$$B_q(z) = \alpha \prod_{k=1}^q (1 - z_k z^{-1}) = b(0) + b(1)z^{-1} + \dots + b(q)z^{-q} \quad (2.4-8)$$

$$\bar{B}_q(z^{-1}) = \alpha \prod_{k=1}^q (1 - \bar{z}_k z) = \bar{b}(0) + \bar{b}(1)z^1 + \dots + \bar{b}(q)z^q \quad (2.4-9)$$

在此我們必須注意到一點，也就是(2.4-8)和(2.4-9)之組合解非唯一，而這個原因和零點 z_k 及 z_k^{-1} 有關，也就是說當我們沒有限定 $B_q(z)$ 內的零點，皆為單位圓內或是單位圓外，則此解便非唯一，因此若我們有限定時，則這個解才唯一。

而我們再從頻域上看，也就是等同於：

$$X(e^{j\omega}) = B_q(e^{j\omega}) \cdot \bar{B}_q(e^{j\omega}) = |B_q(e^{j\omega})|^2 \quad (2.4-10)$$

由(2.3-10)我們可以得到以下定理：

定理 2.4.3

一串有限長度 $2q+1$ 的正數列 $\{x(n)\}$ 之充分必要條件為存在常數 $b(0)$ 、 $b(1)$ 、 $b(2)$ 、...、 $b(q)$ 使得

$$x(n) = \sum_{k=0}^{q-n} b(k)b(k+n) \quad \text{對 } 0 \leq n \leq q \quad (2.4-11)$$

這個定理我們在模擬後，再分解為 FIR 系統時將會使用到，此外如果 $\{x(n)\}$ 為實數則 $\{b(n)\}$ 也會是實數。



第三章 演算法模擬

3.1 演算法分析

在我們的研究裡我們可將問題表示為：

$$\begin{aligned} & \{\min \max_{\omega \in [0, \pi]} W(\omega) | H(e^{j\omega}) - A(e^{j\omega}) |\} \\ & \text{s.t. } A(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \omega \in [0, \pi] \end{aligned} \quad (3.1-1)$$

$$\text{其中 } A(e^{j\omega}) = \sum_{-L}^L h[n] e^{-j\omega n}$$

利用 Parks-McClellan 演算法的方法[6]，以及選取適合的 ω_p 及 ω_s 值，選擇所要階數利用 MatLab 程式，我們可以得到原始 $h[n]$ 數列，並再對這個數列做處理，使其成正數列，敘述如下。

首先我們將所得到的最佳頻譜做以下的表示法表示之：


$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L}^L h[n] e^{-j\omega n} \quad (3.1-2)$$

由於此數列為共軛對稱數列，因此有

$$h[n] = h[-n] \quad (3.1-3)$$

特性，所以我們將這個表示法化為下列式子：

$$A(e^{j\omega}) = h[0] + \sum_{n=1}^L 2h[n] \cos(\omega n) \quad (3.1-4)$$

而在所繪出之頻譜中我們可以利用 δ 的公式，來得到 δ_2 值，其中

$\omega_k, k = 1, 2, \dots, L+2$ 為交替頻率：

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k H(e^{j\omega_k})}{\sum_{k=1}^{L+2} \frac{b_k (-1)^{k+1}}{W(\omega_k)}} \quad (3.1-5a)$$

$$b_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+2} \frac{1}{(x_k - x_i)} \quad (3.1-5b)$$

而此 δ_2 值我們可以將之設為 DC 增益 $h[0]$ 的上移的指標，因此可得到：

$$A(e^{j\omega}) = \{h[0] + \delta_2\} + \sum_{n=1}^L 2h[n] \cos(\omega n) \quad (3.1-6)$$

在上移後，此時的 $A(e^{j\omega}) \geq 0$ ，但還需再做修正使得通帶的振盪漣波的中間值維持在 1 處，因此再對這個頻譜做以下處理：

$$A'(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) \times \frac{1}{1 + \delta_2} \quad (3.1-7)$$

在處理為正數列的過程中，此正數列在頻譜上的極值並沒有改變，也就是說並沒有改變到交替頻率，且最大漣波誤差仍然在交替頻率上，因此我們可以利用交替頻率，來計算出正數列最大誤差 $|\delta|$ 值。

3.2 數值範例

在這一節裡我們將舉出例子，設計出正數列頻譜，並算出原始數列以及正數列的 $|\delta|$ 值。其原始數列和處理後所得到的正數列，如表 3.2-1, 3.2-3 所示，例子中我們設定最大誤差權重 $K = \delta_1 / \delta_2 = 1$ ，在原始數列中，通帶及滯帶的最大誤差相等，而正數列最大誤差不等，因此在正數列頻譜，我們分別列出通帶和滯帶最大誤差 $|\delta|$ 值，如表 3.2-2 及 3.2-4 所示。而在找出正數列後，我們再利用分解理論分解正數列頻譜，找出適當的 FIR 系統來作近似。

(附註：程式以 matlab 6.5 版本實現)

例題：(在此我們定義 FIR 5 階為 $x \in R^5$, 7 階為 $x \in R^7$, 9 階為 $x \in R^9$)

我們舉出一個低通濾波器 $x \in R^5$ $x \in R^7$ $x \in R^9$ 的系統進行設計。

其規格如下：

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0, & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

$$W(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \omega_s \leq \omega \leq \pi \\ 0, & \omega_p \leq \omega \leq \omega_s \end{cases}$$

其原始數列和正數列分列如下。極端頻率和 $\delta = \delta_1 = \delta_2$ 值設定為：

系統	原始數列	$K = \frac{\delta_1}{\delta_2} = 1, \omega_p = 0.3 * \pi, \omega_s = 0.5 * \pi$
$x \in R^5$	[0.4107,0.2857,0.1010,-0.0691,-0.0637]	
$x \in R^7$	[0.3980,0.2953,0.0837,-0.0590,-0.0638,-0.0065,0.0312]	
$x \in R^9$	[0.4011,0.2989,0.0877,-0.0557,-0.0597,0.0016,0.0316,0.0166,-0.0101]	

表 3.2-1：原始數列

系統	$ \delta $ 值
$x \in R^5$	0.0814
$x \in R^7$	0.0407
$x \in R^9$	0.0230

表 3.2-2：原始最大誤差 $|\delta|$ 值

系統	正數列
$x \in R^5$	[0.4551,0.2642,0.0934,-0.0639,-0.0589]
$x \in R^7$	[0.4215,0.2838,0.0804,-0.0567,-0.0613,-0.0062,0.0300]
$x \in R^9$	[0.4146,0.2922,0.0857,-0.0544,-0.0584,0.0016,0.0309,0.0162,-0.0099]

表 3.2-3：正數列

系統	$ \delta $ 值	系統	$ \delta $ 值
passband		stopband	
$x \in R^5$	0.0753	$x \in R^5$	0.151
$x \in R^7$	0.0391	$x \in R^7$	0.0782
$x \in R^9$	0.0225	$x \in R^9$	0.0449

表 3.2-4：正數列最大誤差 $|\delta|$ 值

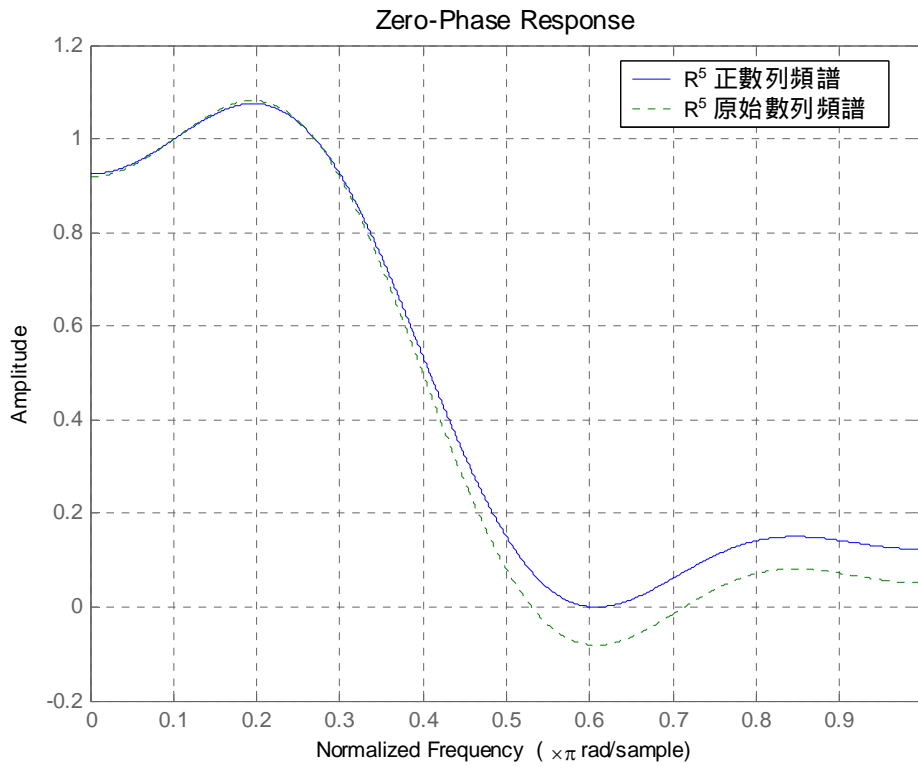


圖 3.2-1 : $x \in R^5$ 原始數列和正數列模擬結果

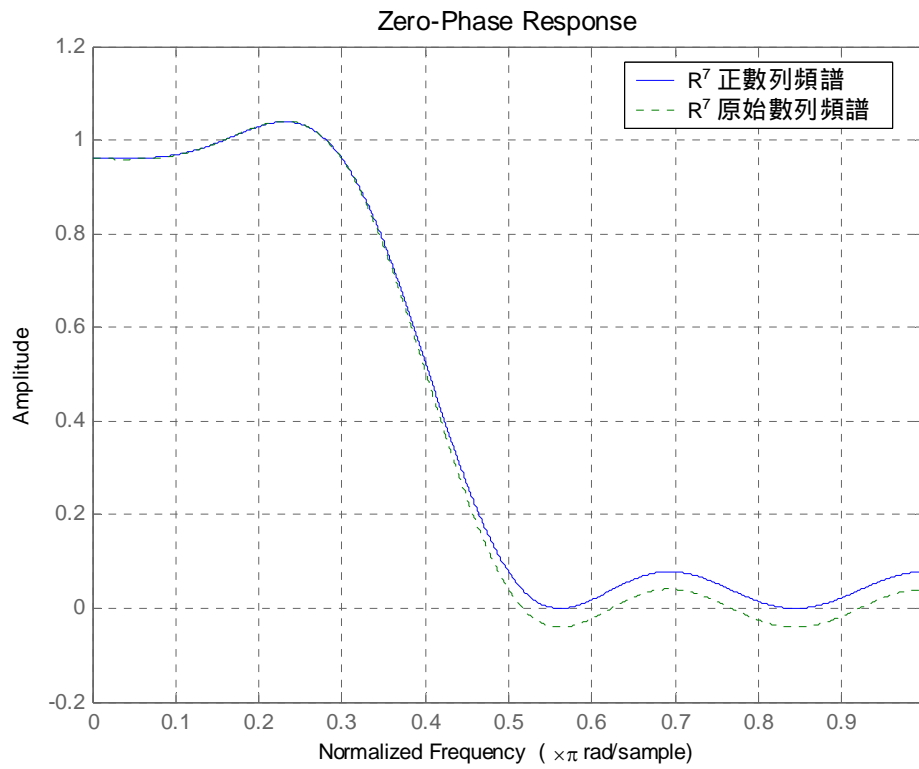


圖 3.2-2 : $x \in R^7$ 原始數列和正數列模擬結果

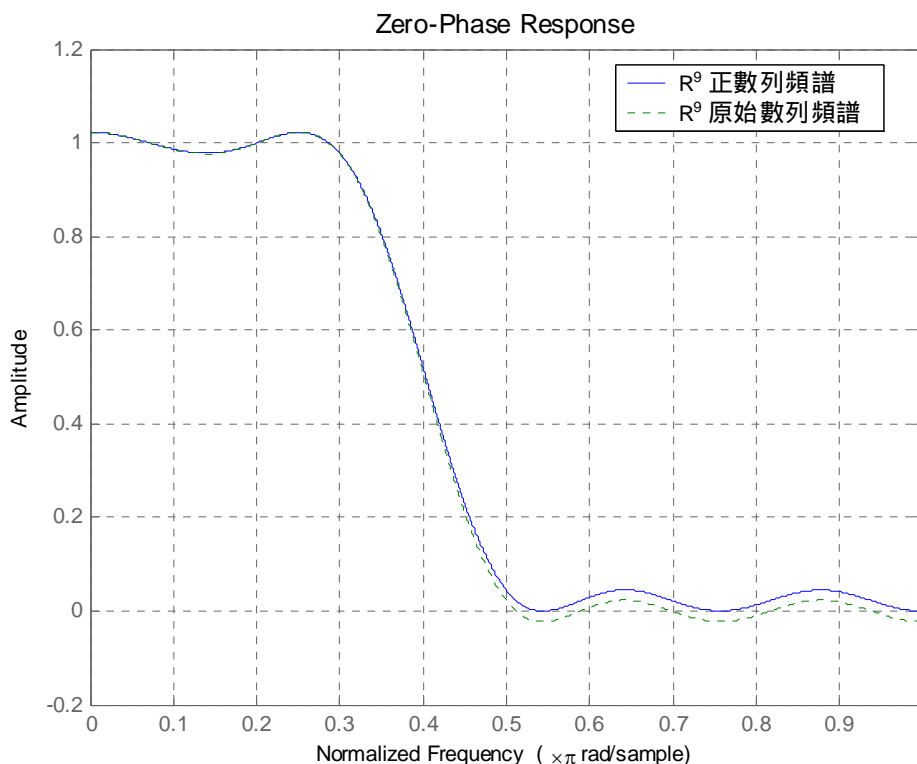


圖 3.2-3 : $x \in R^9$ 原始數列和正數列模擬結果

我們得到的頻譜如下，依據定理 2.4.3 的特性，我們可對頻譜做頻譜分解得結果如下：

$$x(n) = \sum_{k=0}^{q-n} b(k)b(k+n) \quad 0 \leq n \leq q \quad (2.4-11)$$

1、 $x \in R^5$ ($q=5$)

$$A(e^{j\omega}) = -0.0589e^{j4\omega} - 0.0639e^{j3\omega} + 0.0934e^{j2\omega} + 0.2642e^{j\omega} + 0.4551 + 0.2642e^{-j\omega} + 0.0934e^{-j2\omega} - 0.0639e^{-j3\omega} - 0.0589e^{-4j\omega}$$

$$\text{令 } z = e^{j\omega}$$

$$\Rightarrow A(z) = -0.0589z^4 - 0.0639z^3 + 0.0934z^2 + 0.2642z + 0.4551 + 0.2642z^{-1} + 0.0934z^{-2} - 0.0639z^{-3} - 0.0589z^{-4}$$

$$\text{Let } A(z) = H(z)H(z^{-1})$$

$$\Rightarrow H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4},$$

$$H(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}$$

$$[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4] = [0.4498, 0.3463, 0.3377, -0.0412, -0.1309]$$

2、 $x \in R^7$ (q=7)

$$A(e^{j\omega}) = 0.0300e^{j6\omega} - 0.0062e^{j5\omega} - 0.0613e^{j4\omega} - 0.0567e^{j3\omega} + 0.0804e^{j2\omega} + 0.2838e^{j\omega} + 0.4215 + 0.2838e^{-j\omega} + 0.0804e^{-j2\omega} - 0.0567e^{-j3\omega} - 0.0613e^{-j4\omega} - 0.0062e^{-j5\omega} + 0.0300e^{-j6\omega}$$

$$\text{令 } z = e^{j\omega}$$

$$\Rightarrow A(e^{j\omega}) = 0.0300z^6 - 0.0062z^5 - 0.0613z^4 - 0.0567z^3 + 0.0804z^2 + 0.2838z + 0.4215 + 0.2838z^{-1} + 0.0804z^{-2} - 0.0567z^{-3} - 0.0613z^{-4} - 0.0062z^{-5} + 0.0300z^{-6}$$

$$\text{Let } A(z) = H(z)H(z^{-1})$$

$$\Rightarrow H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6},$$

$$H(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6}$$

$$[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6] = [0.3407, 0.4121, 0.3103, 0.0629, -0.1094, -0.1244, 0.0879]$$

3、 $x \in R^9$ (q=9)

$$A(e^{j\omega}) = -0.0099e^{j8\omega} + 0.0162e^{j7\omega} + 0.0309e^{j6\omega} + 0.0016e^{j5\omega} - 0.0584e^{j4\omega} - 0.0544e^{j3\omega} + 0.0857e^{j2\omega} + 0.2922e^{j\omega} + 0.4146 + 0.2922e^{-j\omega} + 0.0857e^{-j2\omega} - 0.0544e^{-j3\omega} - 0.0584e^{-j4\omega} + 0.0016e^{-j5\omega} + 0.0309e^{-j6\omega} + 0.0162e^{-j7\omega} - 0.0099e^{-j8\omega}$$

$$\text{令 } z = e^{j\omega}$$

$$\Rightarrow A(e^{j\omega}) = -0.0099z^8 + 0.0162z^7 + 0.0309z^6 + 0.0016z^5 - 0.0584z^4 - 0.0544z^3 + 0.0857z^2 + 0.2922z + 0.4146 + 0.2922z^{-1} + 0.0857z^{-2} - 0.0544z^{-3} - 0.0584z^{-4} + 0.0016z^{-5} + 0.0309z^{-6} + 0.0162z^{-7} - 0.0099z^{-8}$$

$$\text{Let } A(z) = H(z)H(z^{-1})$$

$$\Rightarrow H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6} + b_7z^{-7} + b_8z^{-8},$$

$$H(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6} + b_7z^{-7} + b_8z^{-8}$$

$$[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8] = [0.3016, 0.4113, 0.3374, 0.0948, -0.1033, -0.1012, 0.0049, 0.0985, -0.0328]$$

3.3 方法比較：

在本節中我們把由 min max 指標下，所得到有限長度正數列頻譜模擬結果，和在最小平方差指標下[8][9]，轉化為二維規劃最佳化問題，利用取樣頻率法所設計出的頻譜，和其最大誤差 $|\delta|$ 做比較，並將結果做討論。

3.3.1 範例比較

在這裡所要比較的方法是利用最小平方差(Least Square Error)的指標，化為二維規劃最佳化問題，我們把這個問題大略說明如下：

這個原最佳化問題表示法為：

$$\min \int_0^{\pi} w(\omega) \left| \phi(\omega) - \sum_{n=0}^N a(n) \cos(n\omega) \right|^2 d\omega$$
$$s.t. \quad \sum_{n=0}^N a(n) \cos(n\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in [0, \pi]$$

$w(\omega)$ 為權重函數(weighted function)，利用此權重函數可以設計出不同規格之頻譜， $\phi(\omega)$ 為所要近似的理想頻譜。

$$\text{在這裡 } \phi(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in [0, \omega_p] \\ 0 & \omega \in [\omega_s, \pi] \end{cases}$$

$$\text{令 } x = [a(0), a(1), a(2), \dots, a(N)]^T, s(\omega) = [1, \cos(\omega), \cos(2\omega), \dots, \cos(N\omega)]^T,$$

因此可將這個問題簡化為二維規劃型式為：

$$\min \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x$$

$$s.t. \quad s(\omega)^T x \geq 0, \quad \omega \in [0, \pi]$$

$$\text{其中 } Q = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} w(\omega) s(\omega) s(\omega)^T d\omega$$

$$c = -2 \int_0^{\omega_p} s(\omega) d\omega$$

在這個問題裡由於直接解此二維規劃問題，取樣頻率後頻譜上會有某些部位，無法滿足要求，也就是說頻譜上會有小於零的部分產生，因此[9]再加了上三種限制條件方法，近而再解此問題。其三種限制條件的方法如下：

方法一：

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ \text{s.t.} & \quad s(\omega_j)^T x \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ & \quad \frac{ds(\omega_i)^T}{d\omega} x = 0 \\ & \quad s(\omega_i)^T x = 0 \end{aligned}$$

其中 ω_i 為落在零之下的頻譜區段跟零軸的第一個交點頻率。

方法二：

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ \text{s.t.} & \quad s(\omega_j)^T x \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ & \quad \int_{\omega}^{\omega+1} s(\omega)^T x d\omega \geq 0 \end{aligned}$$



其中 ω_l, ω_{l+1} 分別是落在零之下的頻譜區段的兩個端點頻率。

方法三：

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ \text{s.t.} & \quad s(\omega_j)^T x \geq \varepsilon, j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

其中 ε 是個很小的正值

在這裡我們把利用這三種方法所解出的頻譜做討論及比較：

$$w(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in [0 \quad 0.3] \\ 0 & \omega \in [0.5 \quad \pi] \end{cases}$$

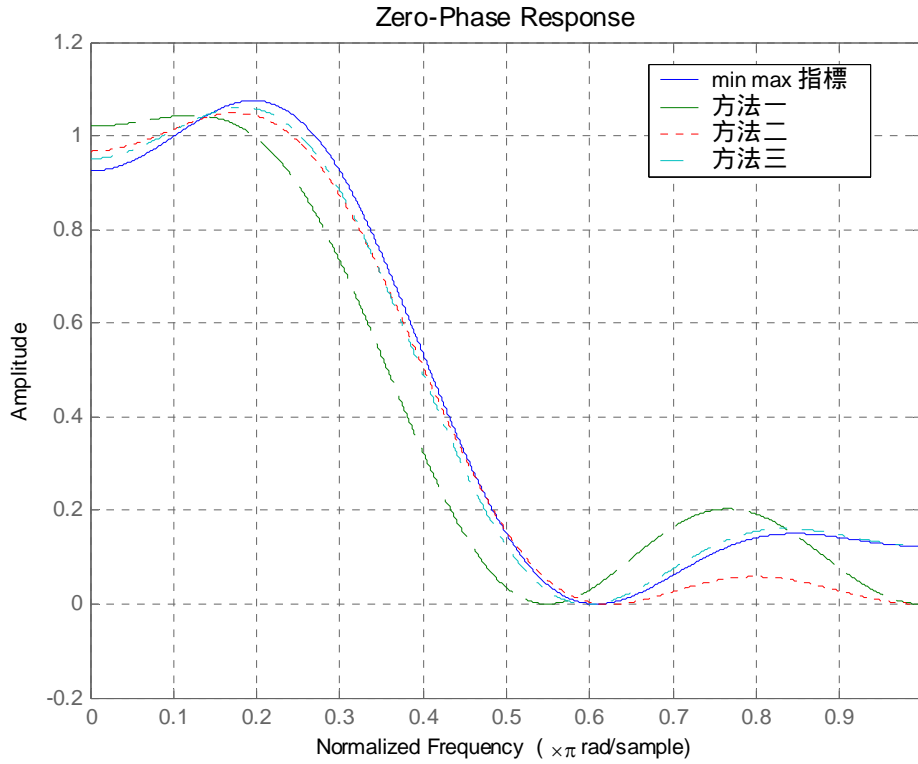


圖 3.3-1： $x \in R^5$ 利用 min max 指標所設計出之濾波器與最小平方差指標之比較

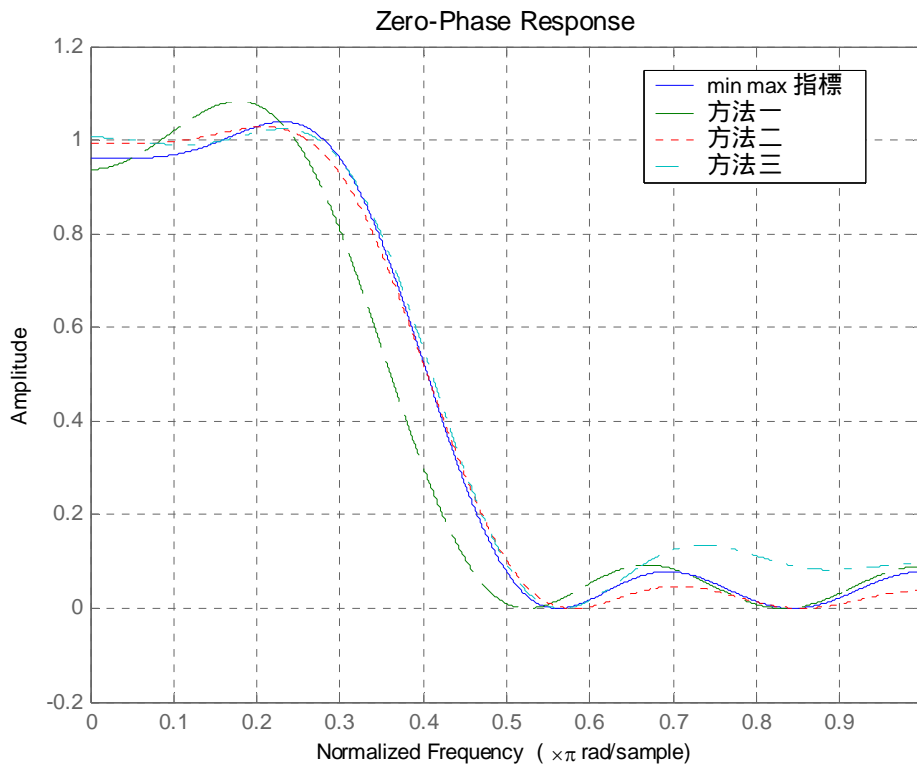


圖 3.3-2： $x \in R^7$ 利用 min max 指標所設計出之濾波器與最小平方差指標之比較

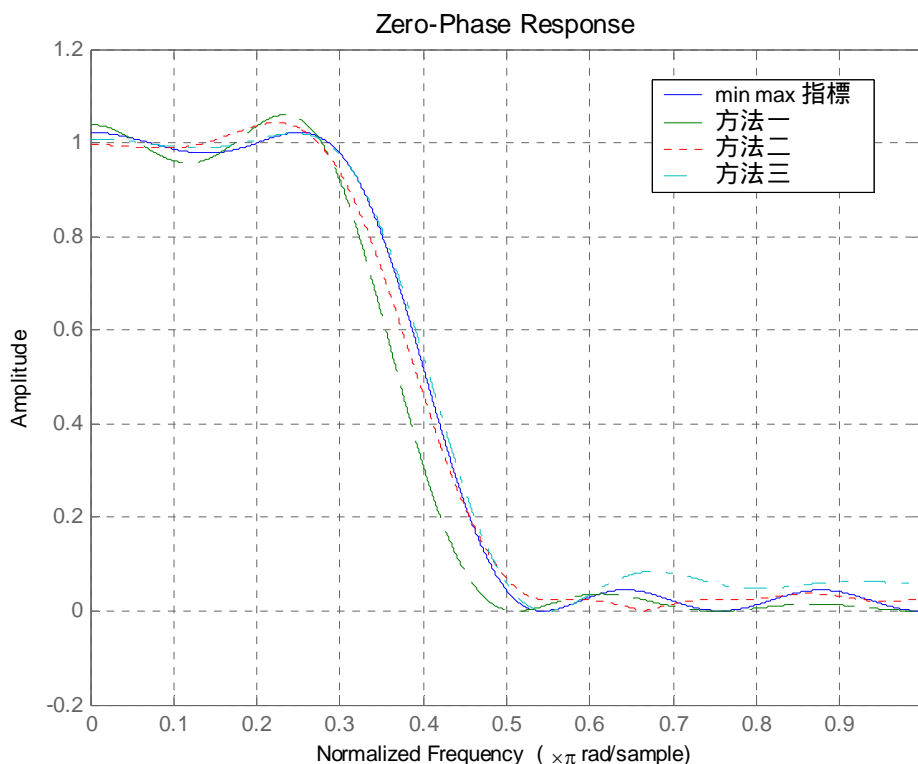


圖 3.3-3： $x \in R^9$ 利用 min max 指標所設計出之濾波器與最小平方差指標之比較

3.3.2 比較結果



在此所比較的規格是在 $0 \leq \omega \leq \omega_p$ 及 $\omega_s \leq \omega \leq \pi$ ， $\omega_p = 0.3, \omega_s = 0.5$ 的範圍內，我們發現利用 Min max 指標所得到的最大誤差 $|\delta|$ 值，可以小於由最小平方 (least square) 指標所設計的濾波器之最大誤差。在 min max 指標下，由於所設計出之濾波器在通帶和滯帶的近似誤差是均勻分佈的，這種指標設計出的濾波器會有等漣波的特性，使得所有的漣波誤差為等值。有了這個特性以後，我們可以發現這種濾波器最大的好處在於，通帶及滯帶的邊緣頻率，可以保證也是最佳的誤差，因為通帶和滯帶邊緣頻率是交替頻率，然而往往其它方法所設計出的濾波器，通帶及滯帶邊緣頻率上，會產生極大最大誤差，且無法掌握最大誤差值，在此之下這種等漣波的設計方法，最大誤差便能夠很容易有最佳誤差上的性能優

勢，以下我們將最大誤差之比較列表如下：

Min max 指標： $[\omega_p, \omega_s] = [0.3 * \pi, 0.5 * \pi]$

	系統 passband :	$ \delta $ 值	系統 Stopband :	$ \delta $ 值
Min max 指標	$x \in R^5$	0.0753	$x \in R^5$	0.151
方法一	$x \in R^5$	0.268	$x \in R^5$	0.2031
方法二	$x \in R^5$	0.128	$x \in R^5$	0.157
方法三	$x \in R^5$	0.117	$x \in R^5$	0.161

表 3.3-1 $x \in R^5$ 最大誤差

	系統 passband :	$ \delta $ 值	系統 stopband :	$ \delta $ 值
Min max 指標	$x \in R^7$	0.0391	$x \in R^7$	0.0782
方法一	$x \in R^7$	0.194	$x \in R^7$	0.0922
方法二	$x \in R^7$	0.071	$x \in R^7$	0.135
方法三	$x \in R^7$	0.042	$x \in R^7$	0.161

表 3.3-2 $x \in R^7$ 最大誤差

	系統 passband :	$ \delta $ 值	系統 stopband :	$ \delta $ 值
Min max 指標	$x \in R^9$	0.0225	$x \in R^9$	0.0449
方法一	$x \in R^9$	0.081	$x \in R^9$	0.0369
方法二	$x \in R^9$	0.065	$x \in R^9$	0.0701
方法三	$x \in R^9$	0.025	$x \in R^9$	0.0846

表 3.3-3 $x \in R^9$ 最大誤差

在這裡我們觀察可得，當 $K=1$ 且修正為正數列時，其最大誤差值產生在滯帶上，而這個結果其最大誤差可以比其它方法的最大誤差還好。但在此處我們希望利用等漣波設計方法，來得到一個具有最佳最大誤差的正數列。而我們知道可以藉由改變 K 值，來得到通帶和滯帶最大誤差比率，因此我們再選定一個新的 K 值，而此 K 值可以使得正數列通帶和滯帶之最大誤差相等，因為由原始數列化

為正數列時，滯帶上的最大誤差為通帶的 2 倍，所以我們選擇了 $K=2$ ，此 K 值可以使得通帶和滯帶在提升後，其最大誤差會相等，選定後再重新分析這個問題

3.4 最佳正數列

其原始數列和修正後之正數列分列如下，選擇 $K=2$ 重新分析：

系統	原始數列	$K = \frac{\delta_1}{\delta_2} = 2$, $\omega_p = 0.3 * \pi, \omega_s = 0.5 * \pi$
$x \in R^5$	[0.4069,0.3098,0.1073,-0.0366,-0.0668]	
$x \in R^7$	[0.3934,0.2951,0.0901,-0.0540,-0.0675,-0.0163,0.0223]	
$x \in R^9$	[0.3941,0.2967,0.0930,-0.0505,-0.0614,-0.0039,0.0299,0.0206,-0.0042]	

表 3.3-4：原始數列

系統	$ \delta_1 $ 值	系統	$ \delta_2 $ 值
passband		stopband	
$x \in R^5$	0.1182	$x \in R^5$	0.0591
$x \in R^7$	0.0674	$x \in R^7$	0.0337
$x \in R^9$	0.0342	$x \in R^9$	0.0171

表 3.3-5：原始數列最大誤差 $|\delta|$

系統	正數列
$x \in R^5$	[0.4400,0.2925,0.1013,-0.0346,-0.0631]
$x \in R^7$	[0.4132,0.2855,0.0872,-0.0522,-0.0653,-0.0158,0.0216]
$x \in R^9$	[0.4043,0.2917,0.0914,-0.0497,-0.0604,-0.0038,0.0294,0.0203,-0.0041]

表 3.3-6：正數列

系統	$ \delta $ 值
$x \in R^5$	0.111
$x \in R^7$	0.0652
$x \in R^9$	0.0336

表 3.3-7：正數列最大誤差 $|\delta|$ 值

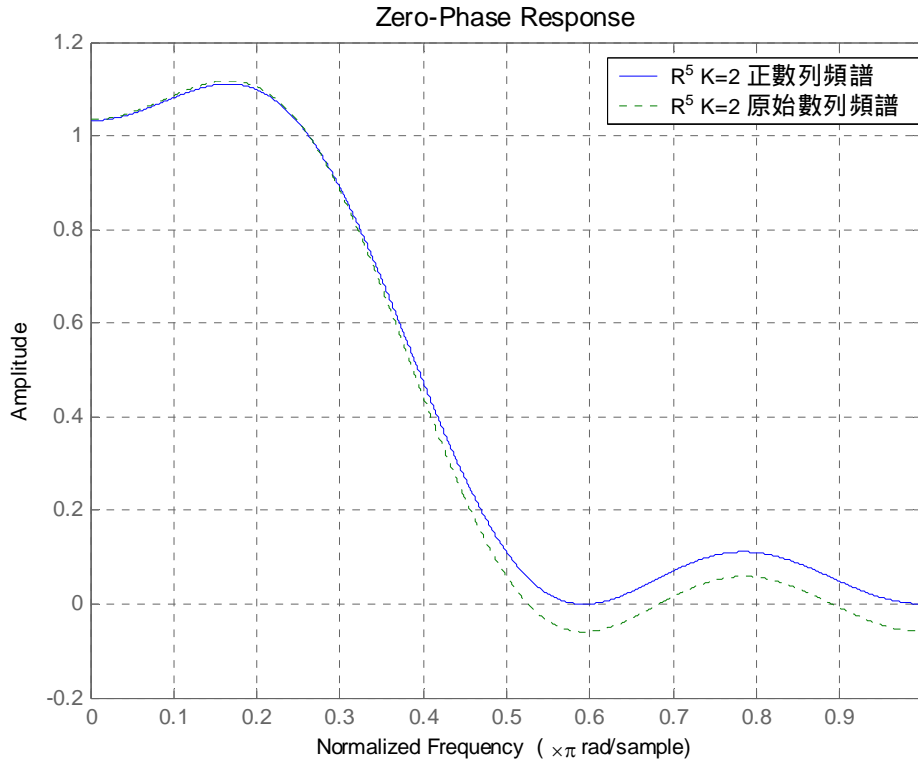


圖 3.3-4 : $x \in R^5$ 原始數列與正數列模擬結果

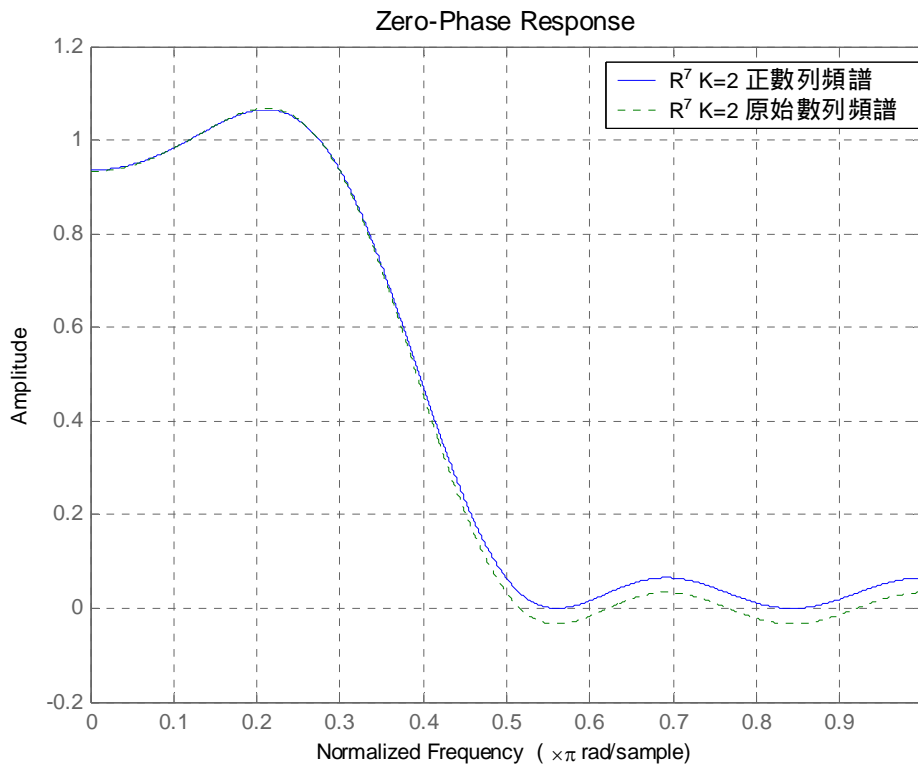


圖 3.3-5 : $x \in R^7$ 原始數列與正數列模擬結果

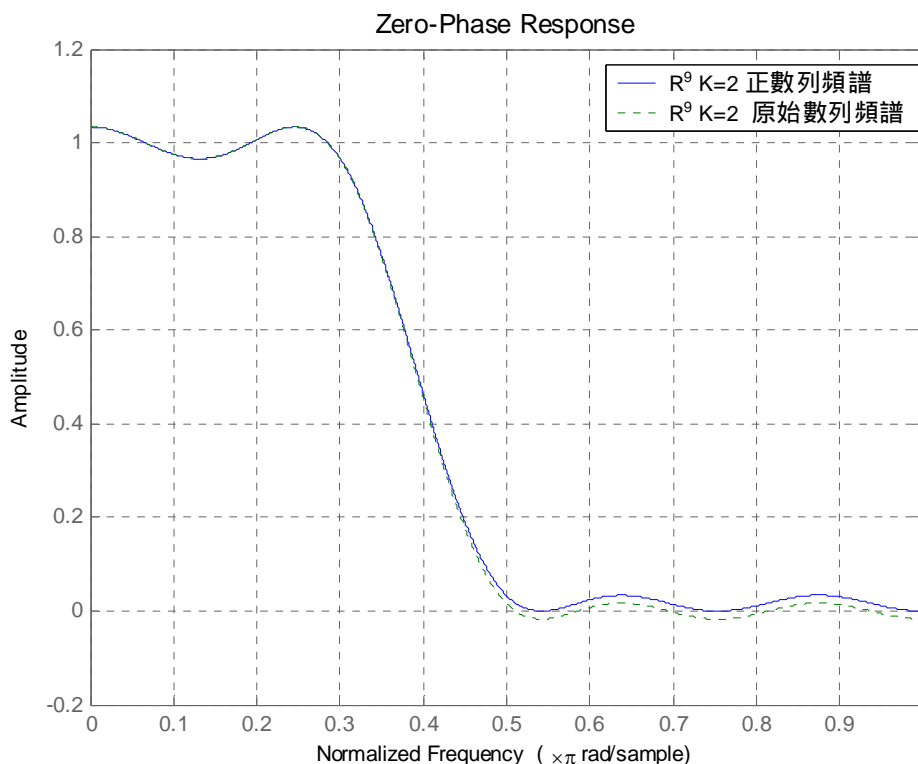


圖 3.3-6 : $x \in R^9$ 原始數列與正數列模擬結果

1、 $x \in R^5$ ($q=5$)

$$A(e^{j\omega}) = -0.0631e^{j4\omega} - 0.0346e^{j3\omega} + 0.1013e^{j2\omega} + 0.2925e^{j\omega} + 0.4400 + 0.2925e^{-j\omega} + 0.1013e^{-j2\omega} - 0.0346e^{-j3\omega} - 0.0631e^{-j4\omega}$$

令 $z = e^{j\omega}$

$$\Rightarrow A(e^{j\omega}) = -0.0631z^4 - 0.0346z^3 + 0.1013z^2 + 0.2925z + 0.4400 + 0.2925z^{-1} + 0.1013z^{-2} - 0.0346z^{-3} - 0.0631z^{-4}$$

Let $A(z) = H(z)H(z^{-1})$

$$\Rightarrow H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4},$$

$$H(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}$$

$$[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4] = [0.3592 \ 0.4015 \ 0.3311 \ 0.0999 \ -0.1756]$$

2、 $x \in R^7$ ($q=7$)

$$A(e^{j\omega}) = 0.0216e^{j6\omega} - 0.0158e^{j5\omega} - 0.0653e^{j4\omega} - 0.0522e^{j3\omega} + 0.0872e^{j2\omega} + 0.2855e^{j\omega} + 0.4132 + 0.2855e^{-j\omega} + 0.0872e^{-j2\omega} - 0.0522e^{-j3\omega} - 0.0653e^{-j4\omega} - 0.0158e^{-j5\omega} + 0.0216e^{-j6\omega}$$

$$\text{令 } z = e^{j\omega}$$

$$\Rightarrow A(e^{j\omega}) = 0.0216z^6 - 0.0158z^5 - 0.0653z^4 - 0.0522z^3 + 0.0872z^2 + 0.2855z + 0.4132 + 0.2855z^{-1} + 0.0872z^{-2} - 0.0522z^{-3} - 0.0653z^{-4} - 0.0158z^{-5} + 0.0216z^{-6}$$

$$\text{Let } A(z) = H(z)H(z^{-1})$$

$$\Rightarrow H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6},$$

$$H(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6}$$

$$[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6] = [0.3232 \ 0.4107 \ 0.3193 \ 0.0789 \ -0.0980 \ -0.1338 \ 0.0668]$$

3、 $x \in R^9$ ($q=9$)

$$A(e^{j\omega}) = -0.0041e^{j8\omega} + 0.0203e^{j7\omega} + 0.0294e^{j6\omega} - 0.0038e^{j5\omega} - 0.0604e^{j4\omega} - 0.0497e^{j3\omega} + 0.0914e^{j2\omega} + 0.2917e^{j\omega} + 0.4043 + 0.2917e^{-j\omega} + 0.0914e^{-j2\omega} - 0.0497e^{-j3\omega} - 0.0604e^{-j4\omega} - 0.0038e^{-j5\omega} + 0.0294e^{-j6\omega} + 0.0203e^{-j7\omega} - 0.0041e^{-j8\omega}$$

$$\text{令 } z = e^{j\omega}$$

$$\Rightarrow A(e^{j\omega}) = -0.0041z^8 + 0.0203z^7 + 0.0294z^6 - 0.0038z^5 - 0.0604z^4 - 0.0497z^3 + 0.0914z^2 + 0.2917z + 0.4043 + 0.2917z^{-1} + 0.0914z^{-2} - 0.0497z^{-3} - 0.0604z^{-4} - 0.0038z^{-5} + 0.0294z^{-6} + 0.0203z^{-7} - 0.0041z^{-8}$$

$$\text{Let } A(z) = H(z)H(z^{-1})$$

$$\Rightarrow H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6} + b_7z^{-7} + b_8z^{-8},$$

$$H(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6} + b_7z^{-7} + b_8z^{-8}$$

$$[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8] =$$

$$[0.2730 \ 0.4057 \ 0.3503 \ 0.1170 \ -0.0874 \ -0.1067 \ -0.0167 \ 0.0967 \ -0.0150]$$

我們再把這個結果和其它方法的最大誤差做比較，比較可得：

	系統	$ \delta $ 值	系統	$ \delta $ 值
	passband :		stopband :	
Min max 指標	$x \in R^5$	0.111	$x \in R^5$	0.111
方法一	$x \in R^5$	0.268	$x \in R^5$	0.2031
方法二	$x \in R^5$	0.128	$x \in R^5$	0.157
方法三	$x \in R^5$	0.117	$x \in R^5$	0.161

表 3.3-8： $x \in R^5$ 最大誤差比較

	系統 passband :	$ \delta $ 值	系統 stopband :	$ \delta $ 值
Min max 指標	$x \in R^7$	0.0652	$x \in R^7$	0.0652
方法一	$x \in R^7$	0.194	$x \in R^7$	0.0922
方法二	$x \in R^7$	0.071	$x \in R^7$	0.103
方法三	$x \in R^7$	0.042	$x \in R^7$	0.135

表 3.3-9 : $x \in R^7$ 最大誤差比較

	系統 passband :	$ \delta $ 值	系統 stopband :	$ \delta $ 值
Min max 指標	$x \in R^9$	0.0336	$x \in R^9$	0.0336
方法一	$x \in R^9$	0.081	$x \in R^9$	0.0369
方法二	$x \in R^9$	0.065	$x \in R^9$	0.0701
方法三	$x \in R^9$	0.025	$x \in R^9$	0.0846

表 3.3-10 : $x \in R^9$ 最大誤差比較

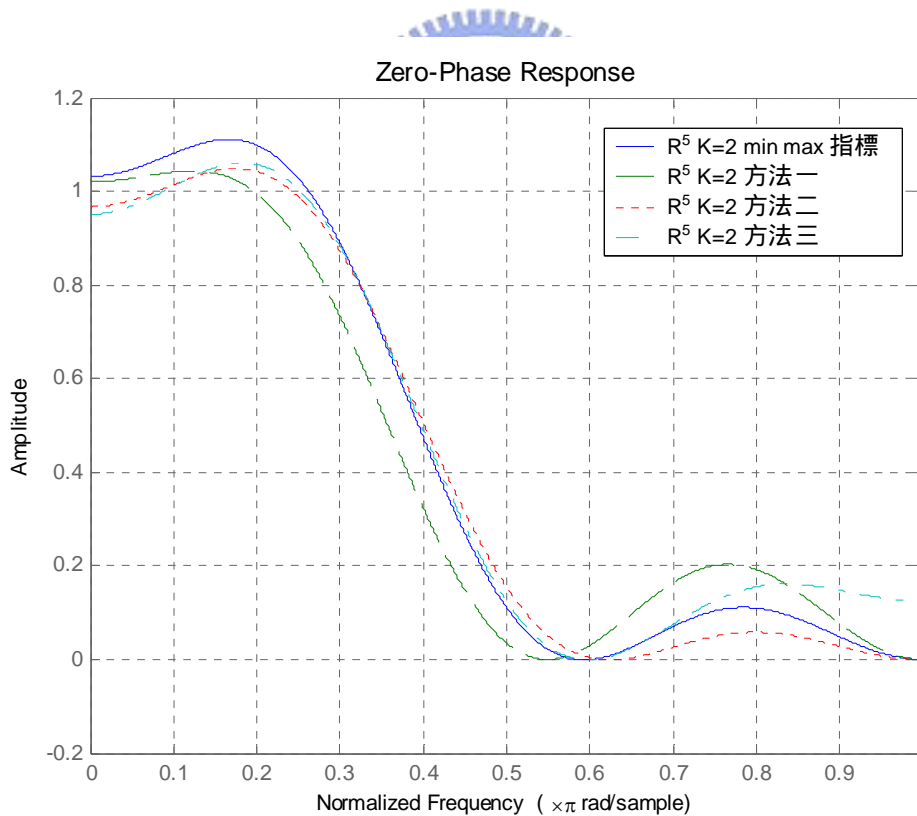


圖 3.3-7 : $x \in R^5$ K 值設定為 2 時的比較

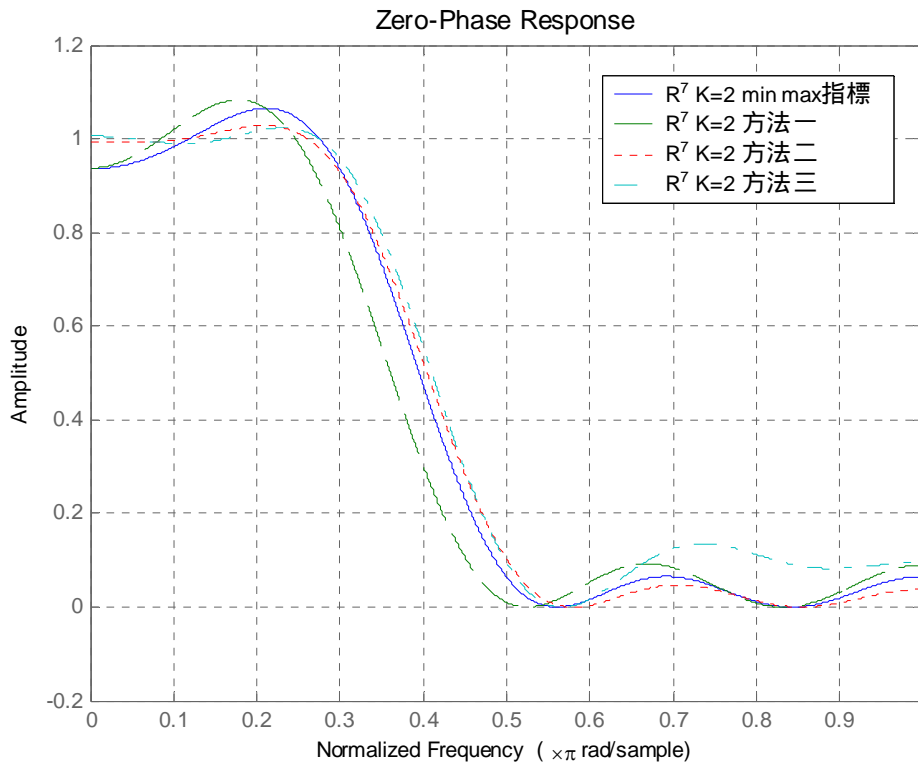


圖 3.3-8 : $x \in R^7$ K 值設定為 2 時的比較

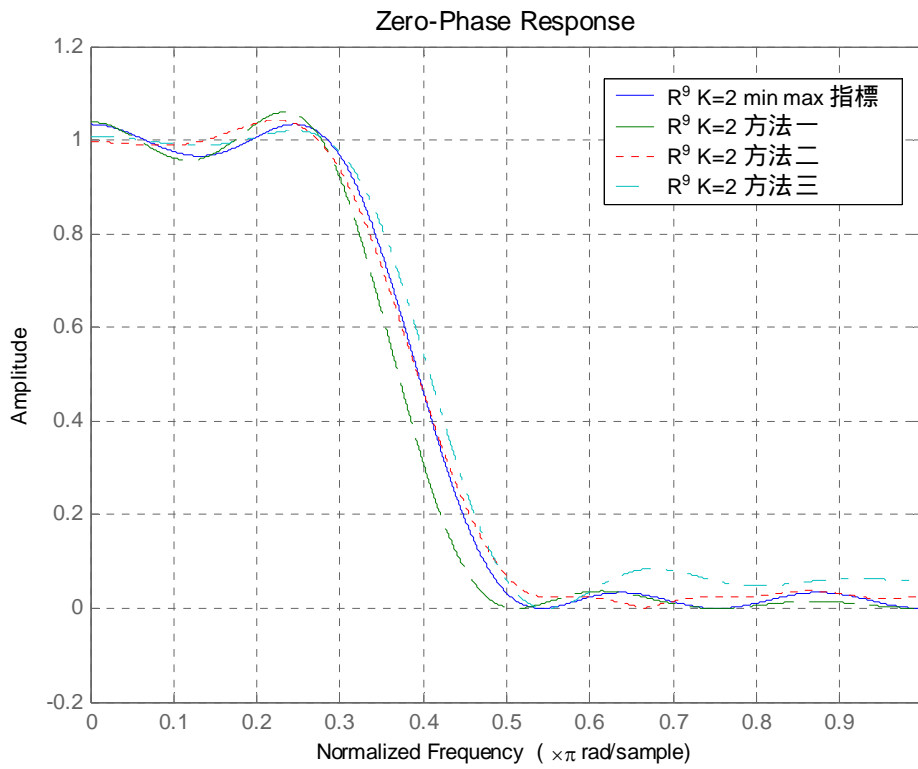


圖 3.3-9 : $x \in R^9$ K 值設定為 2 時的比較

K=2 時通帶和滯帶之最大誤差相等，且此時最大誤差值比 K=1 時之最大誤差還小，因此在比較後仍舊有較佳之最大誤差，在此處我們希望能夠驗證出 K=2 時，是否就為正數列最佳最大誤差值，因此我們再分別模擬出，大於 K 值及小於 K 值的例子討論它。

$x \in R^5$	K 值	$ \delta $ 值	$ \delta $ 值
		passband :	stopband
	1	0.0753	0.151
	1.5	0.0893	0.119
	2	0.111	0.111
	2.5	0.1319	0.105
	3	0.1507	0.100

表 3.3-11 $x \in R^5$ K 值變化之最大誤差 $|\delta|$ 值

$x \in R^7$	K 值	$ \delta $ 值	$ \delta $ 值
		passband :	stopband
	1	0.0390	0.0782
	1.5	0.0531	0.0708
	2	0.0653	0.0653
	2.5	0.0754	0.0603
	3	0.0845	0.0564

表 3.3-12 $x \in R^7$ K 值變化之最大誤差 $|\delta|$ 值

$x \in R^9$	K 值	$ \delta $ 值	$ \delta $ 值
		passband :	stopband
	1	0.0225	0.0449
	1.5	0.0288	0.0384
	2	0.0336	0.0336
	2.5	0.0374	0.0300
	3	0.0408	0.0272

表 3.3-13 $x \in R^9$ K 值變化之最大誤差 $|\delta|$ 值

我們將各個 K 值通帶和滯帶之最大誤差分別圖示之：

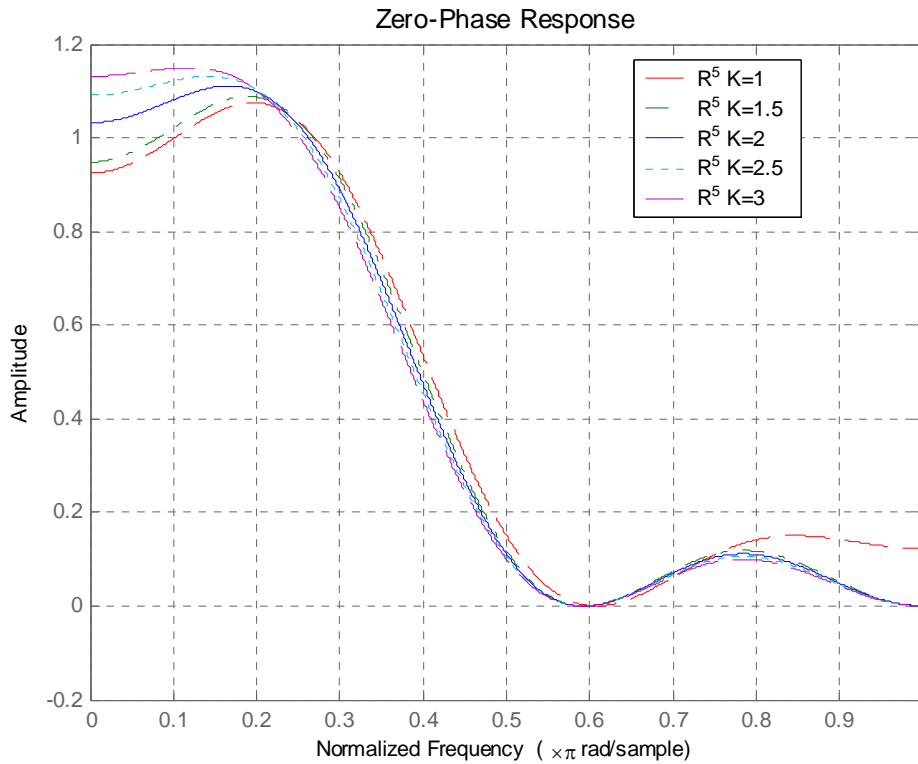


圖 3.3-10 $x \in R^5$ 各 K 值最大誤差

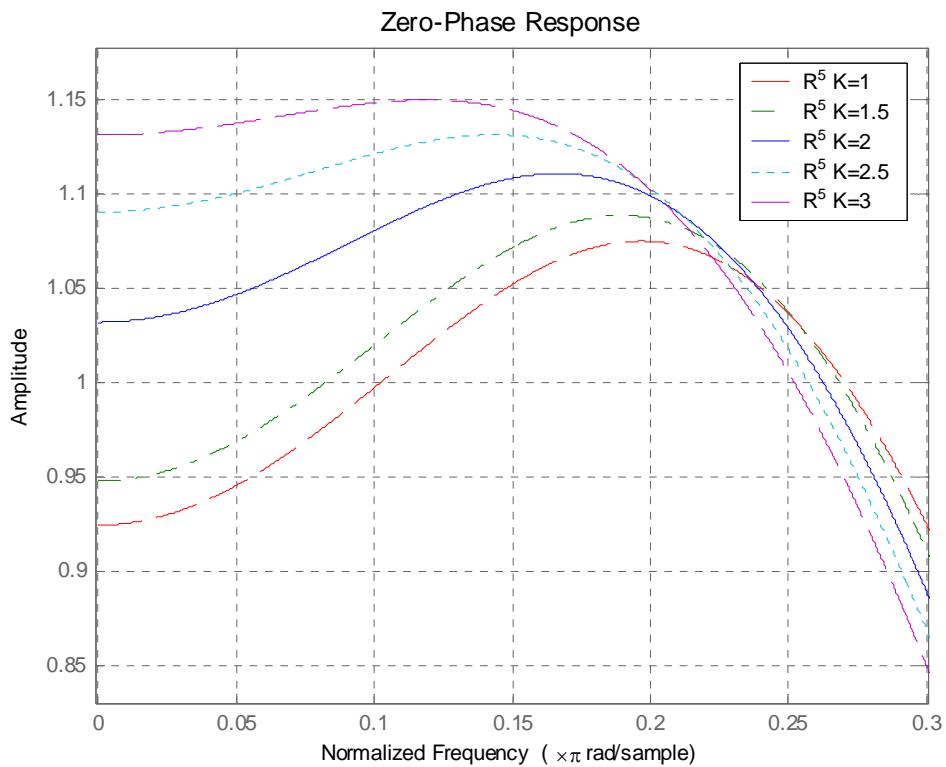


圖 3.3-11 $x \in R^5$ 各 K 值通帶最大誤差

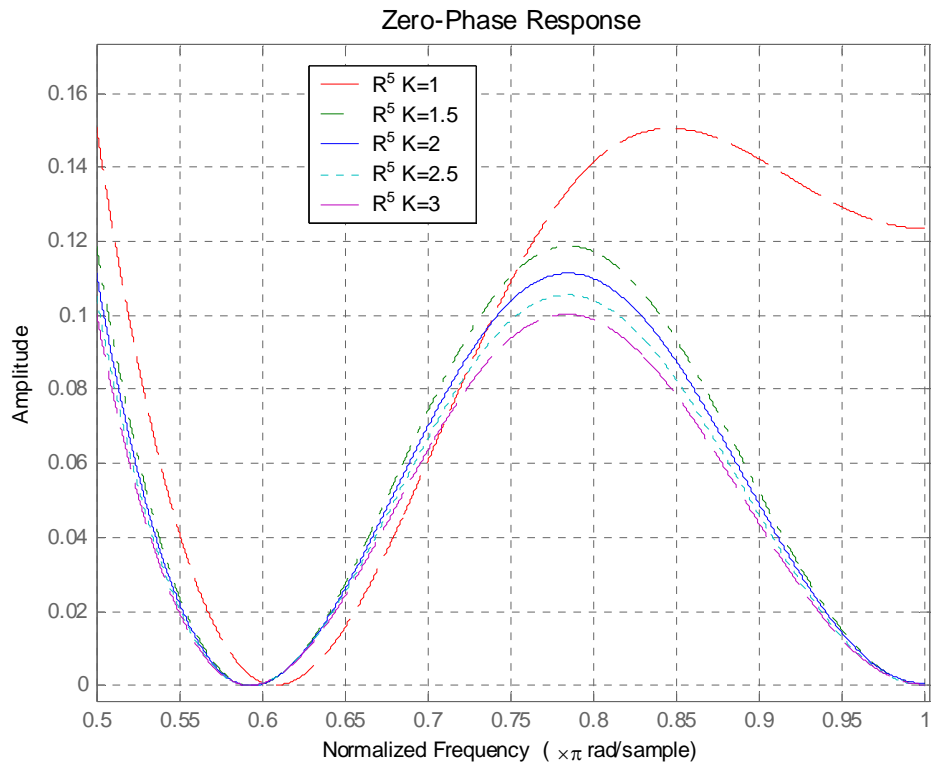


圖 3.3-12 $x \in R^5$ 各 K 值滯帶最大誤差

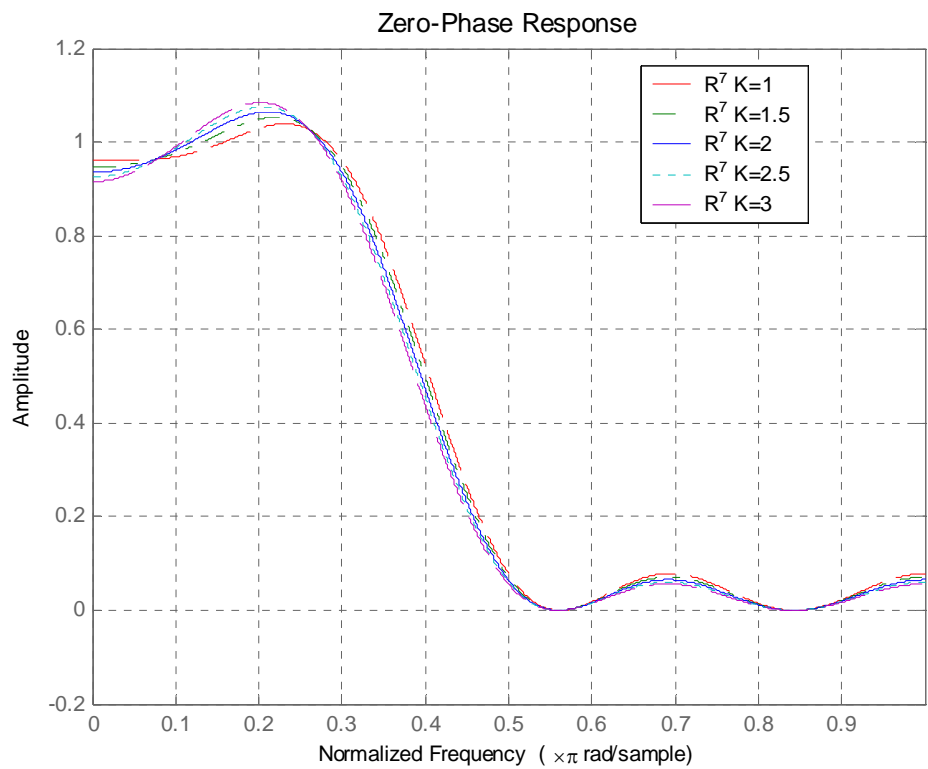


圖 3.3-13 $x \in R^7$ 各 K 值最大誤差

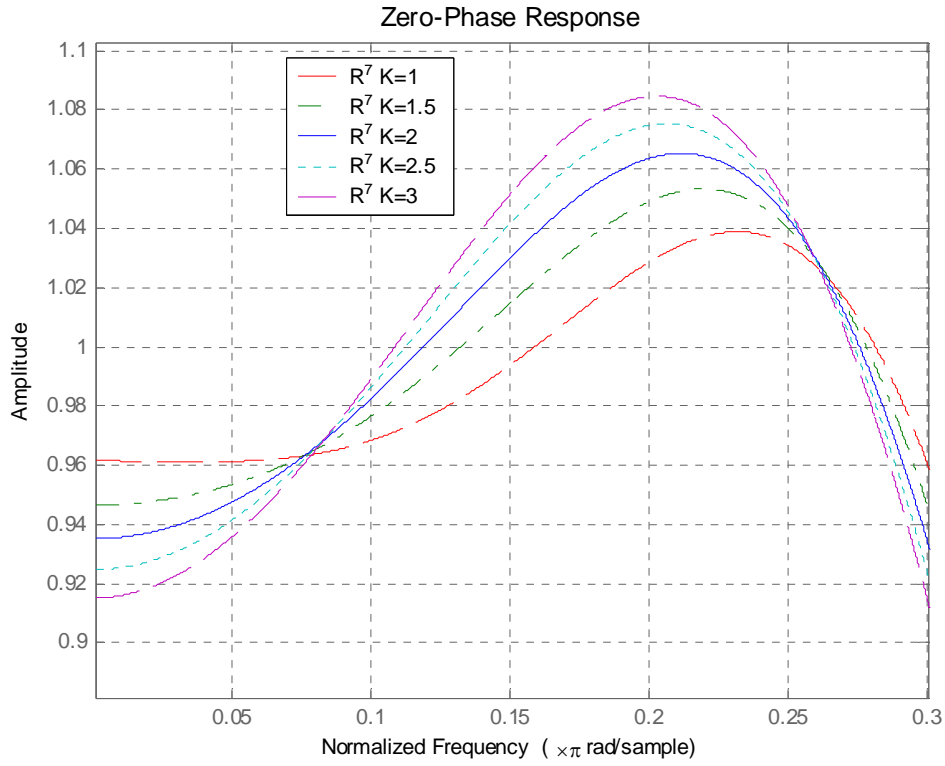


圖 3.3-14 $x \in R^7$ 各 K 值通帶最大誤差

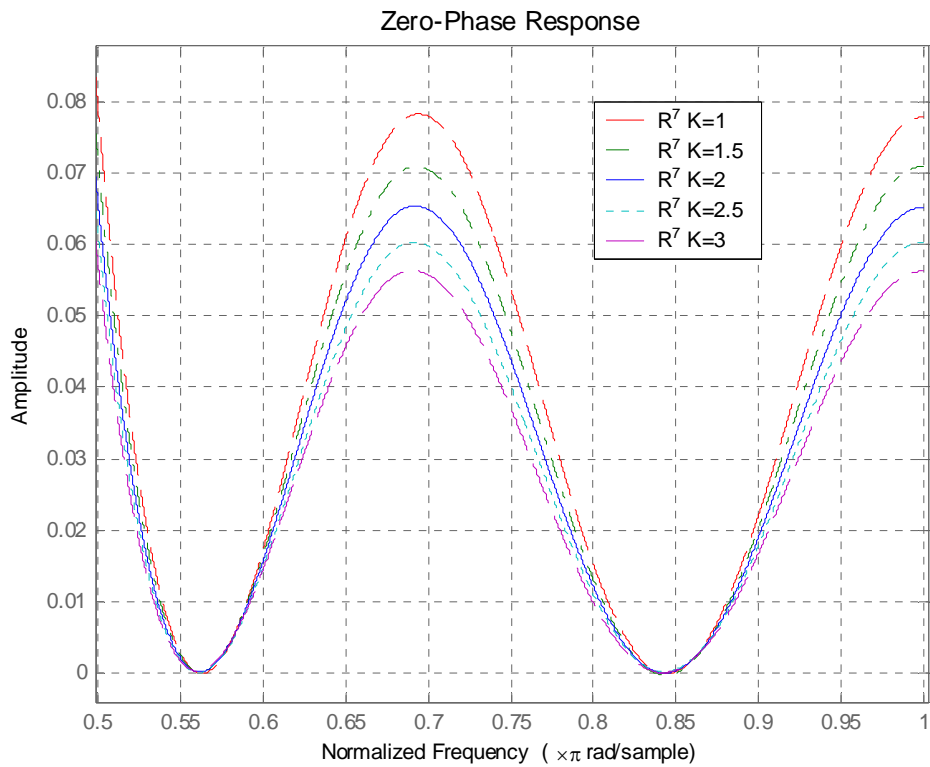


圖 3.3-15 $x \in R^7$ 各 K 值滯帶最大誤差

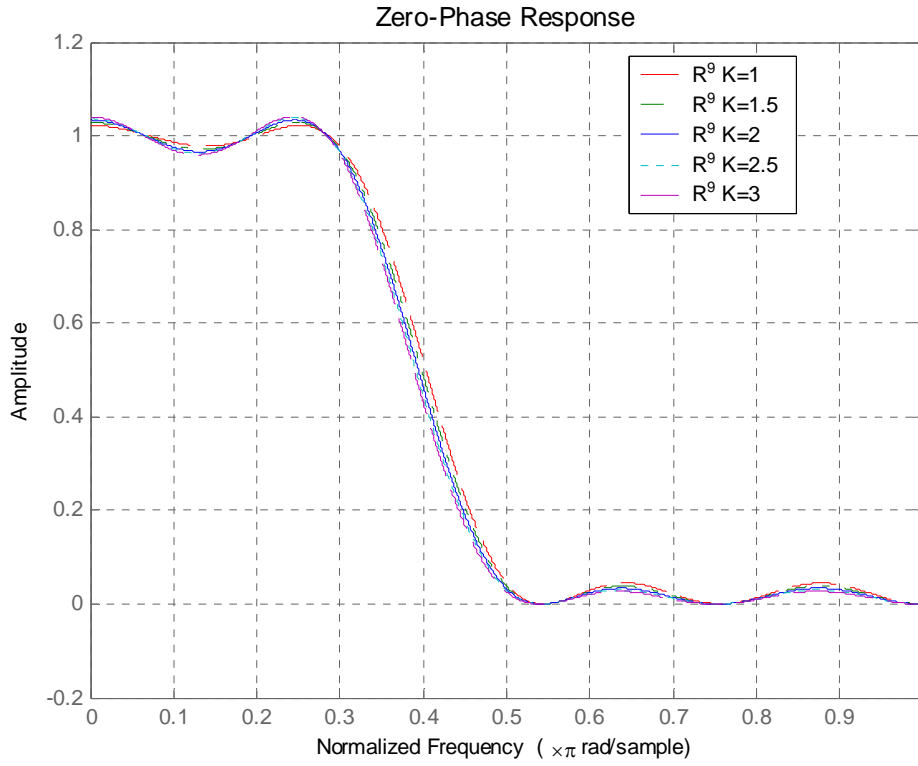


圖 3.3-16 $x \in R^0$ 各 K 值最大誤差

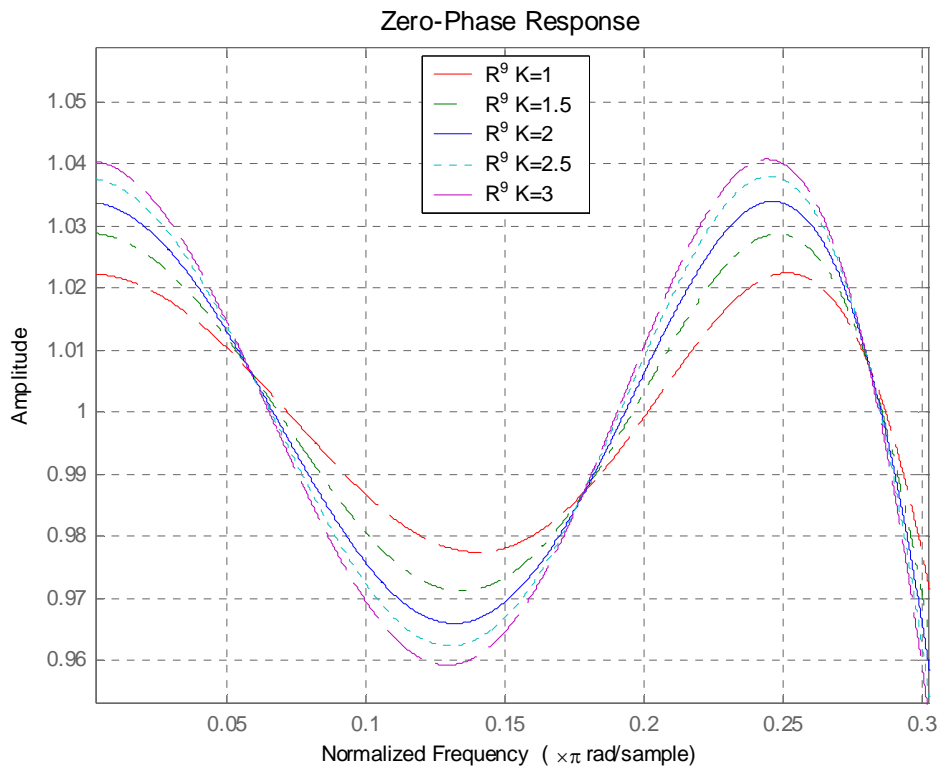


圖 3.3-17 $x \in R^0$ 各 K 值通帶最大誤差

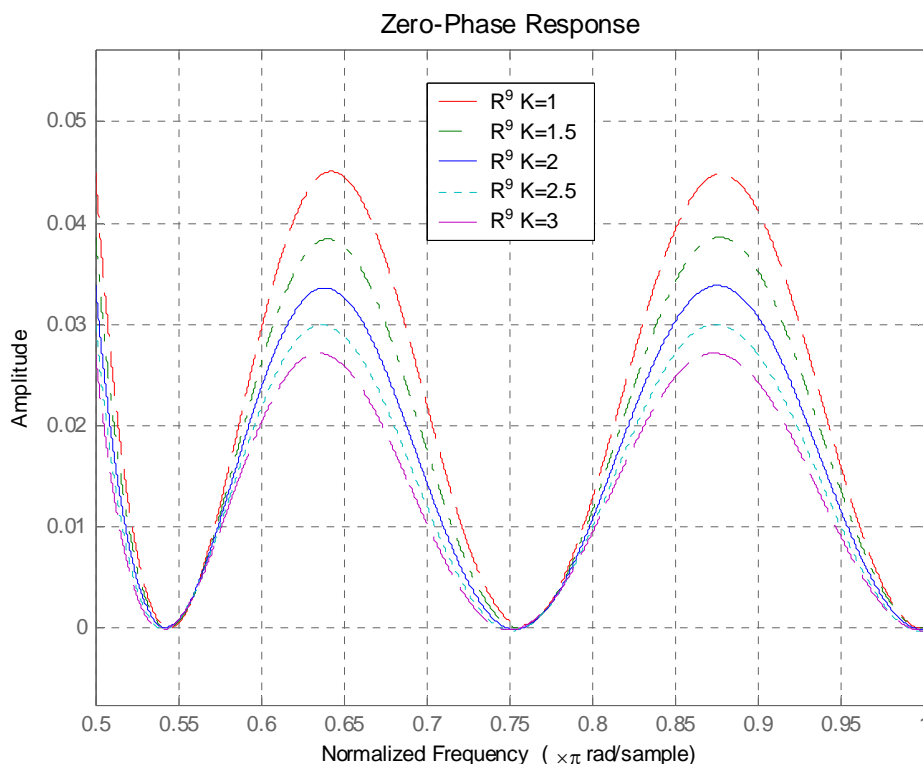


圖 3.3-18 $x \in R^9$ 各 K 值滯帶最大誤差

在我們設定 $K=2$ 時，等漣波濾波器原始數列的最佳最大誤差，產生在通帶部位，而在修正為正數列後，因為通帶和滯帶最大誤差為等值，且比原始數列之最大誤差還小(因為乘上最 $1/(1+)$ 倍)，所以這個正數列之最大誤差，仍舊擁有原始數列最大誤差的最佳性。在我們由不同 K 值模擬結果上來討論，由以上圖表我們可以得到一個結論，當 K 值設定為 2 時，其誤差在修正為正數列後之最大誤差為最佳，也就是說 $K=2$ 時，正數列最大誤差為最佳，因為當我們將 K 值設定為大於或是小於 2 時，必定有一邊通帶或滯帶之最大誤差增加，因而大於 $K=2$ 時之最大誤差，所以在 K 值設定為 2 時，我們可以得到一組具有最佳最大誤差之正數列頻譜。

第四章 結論

本論文裡所探討的是濾波器設計問題，在我們所設計的濾波器中，我們希望它在通帶及滯帶部位能夠有較佳的最大誤差，因此選用了 min max 指標來設計，在利用 Parks-McClellan 演算法求得頻譜後，再做處理可得新的頻譜，詳細解釋，就是說利用 Parks-McClellan 演算法，可以得到一個等漣波 $A(e^{j\omega})$ ，而我們目的是希望得到在頻率區段 $\omega \in [0, \pi]$ 中，皆為正的正數列頻譜，因此再加上 $A(e^{j\omega}) \geq 0$ 之限制條件，在這裡我們解決這個問題的方法為，將所得到的 $A(e^{j\omega})$ 平移上升提升 值，整體再乘上 $1/(1+)$ ，而可得(3.1-7)之正數列頻譜。由於等漣波濾波器的設計方法，我們可以任意調整通帶和滯帶誤差間的比值 K 時，會有不同的最大誤差產生，在此我們分別做了 $K=1, K=2$ 的模擬，並將結果做適當的分解，再以 FIR 系統做近似。設定 $K=2$ 重新分析的原因在於，我們希望此正數列之通帶和滯帶之最大誤差為等值，此處我們也做了不同大小之 K 值模擬，並分析這個結果，由 $K=2$ 模擬結果中我們可以得到一項結論，也就是當通帶和滯帶最大誤差等值時，我們可以產生最佳解。

在這裡我們把這項結論說明之，在 $K=2$ 時我們可以得到，具有最佳最大誤差正數列頻譜，原因在於當 K 值設定大於 2 時，其通帶具有最大誤差，而此誤差大於 $K=2$ 時之最大誤差；當 K 值設定小於 2 時，其滯帶具有最大誤差，此滯帶最大誤差也大於 $K=2$ 時之最大誤差，也就是說 K 值設定為大於或小於 2 時，其最大誤差必定在通帶或滯帶上，且大於 $K=2$ 時的最大誤差，有此結論所以當

K=2 時我們可以得到，其具有最佳最大誤差之正數列頻譜。

本論文中雖然我們可設計出，具有最佳最大誤差之正數列，此處我們並沒有以數學式加以推導和證明，在此我們希望證明出當 K 值遞減時，其通帶會慢慢遞增，而在 K 遞增時其滯帶會慢慢遞增，而在 K=2 時會得到最佳誤差，而由圖表及比較之結果而言，此設計方法也確實可以得到一套具有最佳最大誤差之正數列設計方法。



參考書目

- [1]A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer and J.R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, 2nded. Prentice Hall, 1998.
- [2]V.K. Ingle, J.G. Proakis, *Digital Signal processing using Matlab*, Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Pub., c2000.
- [3]J.A. Cadzow and Yungong Sun, “*Sequence With Positive Semidefinite Fourier Transform*”,IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. Assp-34,No. 6,PP.1502~1510, 1986.
- [4]T. W. Parks and J.H. McClellan ,” *Chebyshev approximation circuit Theory*”,vol.CT-19, pp.189-194,Mar. 1972.
- [5]G. C. Temes and J.A.C. Bingham ,*Iterative Chebyshev approximation technique for network synthesis* ,”IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-14, pp.31-37,Mar.1967
- [6]T. W. Parks and J.H. McClellan, “*A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Digital Filters*”IEEE Trans.on Audio And Electroacoustics,vol.AU-20,NO. 3
- [7]G. Still,”*Discretization in semi-infinite Programming:The rate of convergence* ”Math. Program, Ser. A91: 53~69,2001
- [8]張于真,”*頻譜近似之 FIR 濾波器設計*”,交大電機與控制工程學系碩士論文 , 民國 90 年六月
- [9]陳博偉,”*近似最佳化正數列頻譜 FIR 濾波器設計*”,交大電機與控制工程學系碩士論文 , 民國 91 年六月