

第四章 OFDM 系統之通道估測

(Channel Estimation for OFDM Systems)

4.1 OFDM 系統之通道估測問題介紹

OFDM 系統採用保護區間(Guard Interval)有效的消除多路徑延遲伸展(Multi-path Delay Spread)在時域上所引起的擴散效應，同時亦藉由具週期延伸(Cyclic Extension)特性的保護區間來減少區塊之間干擾(Inter-Block-Interference, IBI)的影響。因此，如果總合通道(Overall Channel)的最長多路徑延遲小於保護區間時，時域上之訊號並沒有遭受到通道擴散效應所造成之區塊干擾的影響；載波亦可維持正交性，只是每個載波乘上一不同大小的通道係數。雖然如此，接收端收到信號經過 FFT 後亦須知道通道係數才能解調，所以如何作通道估測便是本章所要探討的主題。

傳送端送出來的類比訊號定義為 $u(t)$ ，

$$u(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-N_g}^{N-1} x_{n,l} g_T(t - nT_s - lN_{OFDM}T_s) \quad (4.1)$$

其中 $g_T(t)$ 為傳送端濾波器(Transmit Filter)， $x_{n,l}$ 為 IFFT 輸出第 l 個 OFDM 符元之第 n 個時域取樣點，如式(4.2)所示：

$$x_{n,l} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{k,l} e^{j2\pi kn/N} \quad (4.2)$$

經過通道 $c(t)$ (Equivalent-Low-pass Channel)，在接收端所看到的基頻類比訊號為：

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_F(t) &= \left((u(t) \otimes c(t) + w(t)) \cdot e^{-j2\pi\Delta f_c t} \right) \otimes g_R(t) \\
&= \left((u(t) \otimes c(t)) \cdot e^{-j2\pi\Delta f_c t} \right) \otimes g_R(t) + \underbrace{\tilde{w}(t) \otimes g_R(t)}_{\triangleq z(t)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (u(t-\tau) \otimes c(t-\tau)) e^{-j2\pi\Delta f_c(t-\tau)} g_R(\tau) d\tau + z(t) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u(t-\tau) \otimes c(t-\tau)) \tilde{g}_R(\tau) d\tau \right) e^{-j2\pi\Delta f_c t} + z(t) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-N_g}^{N-1} x_{n,l} h(t - nT_s - lN_{OFDM}T_s) \cdot e^{-j2\pi\Delta f_c t} + z(t) \tag{4.3}
\end{aligned}$$

其中 $c(t)$ 定義為通道脈衝響應， $c(t) = \sum_{i=0}^2 c_i \delta(t - n_i T_{sa})$ ， T_{sa} 為升高取樣率之取樣週期。 Δf_c 為傳送端與接收端之間載波頻率偏移。 $g_R(t)$ 為接收端濾波器， $\tilde{g}_R(t)$ 定義為受到載波頻偏影響，接收端觀察到之接收端濾波器， $\tilde{g}_R(t) = e^{j2\pi\Delta f_c t} g_R(t)$ 。 $w(t)$ 為高白斯雜訊， $\tilde{w}(t)$ 定義為受到載波頻偏影響，接收端觀察到之高斯白雜訊， $\tilde{w}(t) = w(t) e^{-j2\pi\Delta f_c t}$ ，經過濾波器之雜訊定義為 $z(t)$ ， $z(t) = \tilde{w}(t) \otimes g_R(t)$ 。從(4.3)式可發現接收端觀察到之總合通道脈衝反應(Overall Impulse Response)， $h(t)$ ，為傳送端濾波器、多路徑通道、接收端濾波器三者組合而成，

$$h(t) = g_T(t) \otimes c(t) \otimes \tilde{g}_R(t)。$$

現在，我們已經考慮了傳送端與接收端之間的載波頻率偏移與取樣頻率偏移，其中載波頻率與取樣頻率亦滿足 IEEE802.16a 標準中指定的『同一來源』。

$$\frac{f_c}{f_s} = \frac{\tilde{f}_c}{\tilde{f}_s}, \quad \xi = \frac{\Delta f_c}{f_c} = \frac{\Delta f_s}{f_s} \tag{4.4}$$

其中 f_c 為傳送端載波頻率， f_s 為傳送端取樣頻率， \tilde{f}_c 為接收端載波頻率， \tilde{f}_s 為接收端取樣頻率， ξ 為共同之頻偏比例。傳送端載波頻率與接收端載波頻率有 $\tilde{f}_c = f_c(1+\xi) = f_c + \Delta f_c$ 的關係。傳送端取樣頻率與接收端取樣頻率有 $\tilde{f}_s = f_s(1+\xi) = f_s + \Delta f_s$ 的關係，並且由此式可導出(4.5)式。

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_s &= 1/\tilde{f}_s = 1/(f_s(1+\xi)) = T_s(1-\xi) \\
T_s &= (1+\xi)\tilde{T}_s \tag{4.5}
\end{aligned}$$

將(4.5)式代入(4.3)式，可把收到的訊號用接收端取樣週期 \tilde{T}_s 來表示。

$$\begin{aligned}\tilde{r}_F(t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-N_g}^{N-1} x_{n,l} h(t - nT_s - lN_{OFDM}T_s) \cdot e^{-j2\pi\Delta f_c t} + z(t) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-N_g}^{N-1} x_{n,l} h\left[t - n(1 + \xi)\tilde{T}_s - lN_{OFDM}(1 + \xi)\tilde{T}_s\right] \cdot e^{-j2\pi\Delta f_c t} + z(t)\end{aligned}$$

此類比基頻訊號經過類比至數位轉換器(A/D Converter)取樣得到之離散訊號定義為 $\tilde{r}_F(n, l)$ ：

$$\begin{aligned}\tilde{r}_F(n, l) &\triangleq \tilde{r}_F(n\tilde{T}_s + lN_{OFDM}\tilde{T}_s), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad l = 0, 1, 2, \dots \\ &= \sum_{\tilde{l}=0}^{\infty} \sum_{m=-N_g}^{N-1} x_{m,\tilde{l}} h\left[(n-m)\tilde{T}_s - m\xi\tilde{T}_s + lN_{OFDM}\tilde{T}_s - \tilde{l}N_{OFDM}(1 + \xi)\tilde{T}_s\right] \\ &\quad \exp\left[-j2\pi\Delta f_c (n\tilde{T}_s + lN_{OFDM}\tilde{T}_s)\right] + z(n, l) \quad (4.6) \\ z(n, l) &\triangleq z(t)\Big|_{t=n\tilde{T}_s + lN_{OFDM}\tilde{T}_s}\end{aligned}$$

由(4.6)式可以看出：解調出的離散訊號 $\tilde{r}_F(n, l)$ 就是原來的總合通道 $h(n\tilde{T}_s)$ 偏移了 $-m\xi\tilde{T}_s + lN_{OFDM}\tilde{T}_s - \tilde{l}N_{OFDM}(1 + \xi)\tilde{T}_s$ 之後與傳送出來的原本訊號 $x_{n,l}$ 作迴旋積分(Convolution)後，乘上載波頻偏所造成相位旋轉而得到。意思就是說，收到的訊號可看作是原本傳送訊號 $x_{n,l}$ 經過一個時變通道(這個時變量與取樣率頻偏 ξ 、第 l 個 OFDM 符元、第 m 個取樣點有關)，然後再乘上載波頻偏所造成相位。

這裡有幾個重要觀察值得注意：第一， $-N_g \leq m \leq N-1$ ， $\xi \leq 8 \text{ ppm}$ ，所以 $m\xi\tilde{T}_s \approx 0$ ，也就是忽略在一個 OFDM 符元裡面，因為取樣頻偏 ξ 造成不同取樣點位移。第二，如果總合通道最大延遲擴散(Maximum Delay Spread)小於保護區間，則不會有不同 OFDM 區塊間干擾(Inter-Block-Interference, IBI)產生，在接收端適當選取 FFT 的 256 點區間，皆不會受到上一個或下一個 OFDM 符元的干擾，所以對於收到第 l 個 OFDM 符元中的 FFT 256 點而言，其實只需在乎傳送出來第 \tilde{l} 個 OFDM 符元與總合通道作迴旋積分。第三，在假設同步完成的前提

下，抓到正確 OFDM 符元， $l = \tilde{l}$ ， $lN_{OFDM}\tilde{T}_s$ 與 $\tilde{l}N_{OFDM}\tilde{T}_s$ 可以互相抵銷。在以上三點前提下，可以把(4.6)式改寫成為(4.7)式：

$$\begin{aligned} \tilde{r}_F(n, l) = & \exp\left[-j2\pi\Delta f_c (n + lN_{OFDM})\tilde{T}_s\right] \cdot \\ & \sum_{m=-N_g}^{N-1} x_{m,l} h\left[(n-m)\tilde{T}_s - lN_{OFDM}\xi\tilde{T}_s\right] + z(n, l) \quad (4.7) \\ n = & 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

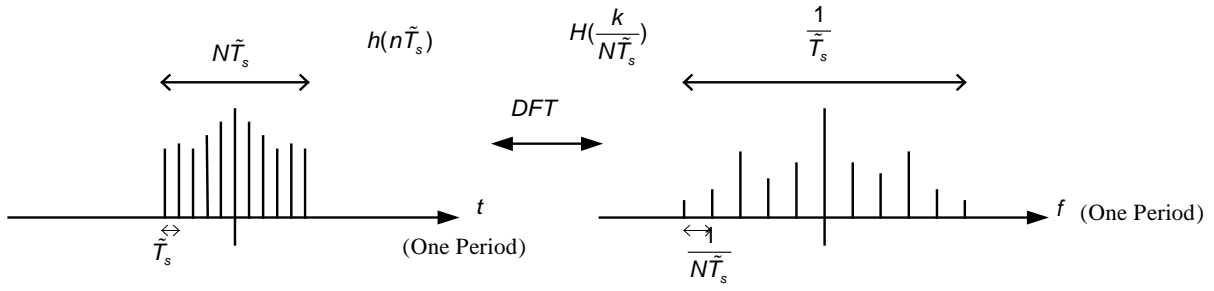
式子(4.7)為收到基頻時域 FFT 區間訊號表示式，之後便可利用 FFT 把時域訊號轉到頻域作解調的動作。但是在這之前通常會先對載波頻率偏移做估測以及補償動作[2,6,23]，如果估算有些許誤差， $\Delta\hat{f}_c \neq \Delta f_c$ ，則會留下殘餘載波頻偏(Residue Carrier Frequency Offset) Δf_r ，因此最後真正送進 FFT 的訊號表示式變成

$$\begin{aligned} \tilde{r}_F(n, l) = & \exp\left[-j2\pi\Delta f_r (n + lN_{OFDM})\tilde{T}_s\right] \cdot \\ & \sum_{m=-N_g}^{N-1} x_{m,l} h\left[(n-m)\tilde{T}_s - lN_{OFDM}\xi\tilde{T}_s\right] + z(n, l) \quad (4.8) \end{aligned}$$

因為保護區間具有週期延伸(Cyclic Extension)的特性以及總合通道最大延遲擴散(Maximum Delay Spread)小於保護區間的關係，時域上 OFDM 符元與通道之間的迴旋積分(Convolution)就相當於作週期迴旋積分(Periodic Convolution)，因此等效地頻域上兩者之間作相乘。又由於時域訊號時間上的平移造成其頻域訊號相位旋轉(Phase Rotation)，

$$\begin{aligned} h(t) & \xleftrightarrow{\mathbb{F}} H(\omega), \quad h(t - lN_{OFDM}\xi\tilde{T}_s) \xleftrightarrow{\mathbb{F}} H(\omega)e^{-j\omega lN_{OFDM}\xi\tilde{T}_s} \\ h(t - lN_{OFDM}\xi\tilde{T}_s) \Big|_{t=n\tilde{T}_s} & \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{\tilde{T}_s} H(\omega)e^{-j\omega lN_{OFDM}\xi\tilde{T}_s} \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N\tilde{T}_s}} \end{aligned}$$

其中 \mathbb{F} 定義為 Fourier Transform 的運算元。



所以(4.8)式可寫成

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_F(n, l) &= y(n, l) + z(n, l) \\
 &= \exp\left(-j2\pi\Delta f_r(n + lN_{OFDM})\tilde{T}_s\right) \\
 &\quad \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(X_{k,l} H_k e^{\frac{-j2\pi k l N_{OFDM} \xi}{N}} \right) \cdot e^{\frac{j2\pi k n}{N}} \right] + z(n, l)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$y(n, l)$ ， $n = 0 \sim N - 1$ 經由 FFT 轉到頻域定義為 $Y(k, l)$ ， $k = 0 \sim N - 1$ ：

$$\begin{aligned}
 Y(k, l) &\triangleq DFT \{ y(n, l) \} = \sum_{n=0}^{N-1} y(n, l) e^{\frac{-j2\pi k n}{N}} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\exp\left(-j2\pi\Delta f_r(n + lN_{OFDM})\tilde{T}_s\right) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{\tilde{k}=0}^{N-1} \left(X_{\tilde{k},l} H_{\tilde{k}} e^{\frac{-j2\pi \tilde{k} l N_{OFDM} \xi}{N}} \right) \cdot e^{\frac{j2\pi \tilde{k} n}{N}} \right] \right] \cdot e^{\frac{-j2\pi k n}{N}}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

將所有項次逐一展開重新整理可得

$$\begin{aligned}
Y(k,l) &= \sum_{\tilde{k}=0}^{N-1} X_{\tilde{k},l} H_{\tilde{k}} \exp\left(\frac{-j2\pi\tilde{k}lN_{OFDM}\xi}{N}\right) \exp(-j2\pi\Delta f_r l N_{OFDM} \tilde{T}_s) \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(j\left(\frac{2\pi(\tilde{k}-k)n}{N} - 2\pi\Delta f_r n \tilde{T}_s\right)\right) \right) \\
\Rightarrow Y(k,l) &= X_{k,l} H_k e^{\frac{-j2\pi k l N_{OFDM} \xi}{N}} e^{-j2\pi\Delta f_r l N_{OFDM} \tilde{T}_s} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\Delta f_r n \tilde{T}_s} \right) \\
&\quad + \underbrace{\left(\sum_{\substack{\tilde{k}=0 \\ \tilde{k} \neq k}}^{N-1} X_{\tilde{k},l} H_{\tilde{k}} \exp\left(\frac{-j2\pi\tilde{k}lN_{OFDM}\xi}{N}\right) \exp(-j2\pi\Delta f_r l N_{OFDM} \tilde{T}_s) \right.} \\
&\quad \left. \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(j\left(\frac{2\pi(\tilde{k}-k)n}{N} - 2\pi\Delta f_r n \tilde{T}_s\right)\right) \right) \right)}_{ICI(k,l)} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

(4.11)式即為 FFT 輸出看到的訊號表示式。在下一節中，我們將說明如何利用 FFT 輸出訊號來達到通道檢測的目的。

4.2 OFDM 系統之通道估測方法

通道估測有許多的方法：如線性最小均方差(Linear Minimum Mean Square Error, LMMSE)估測器，最小平方差(Least Square, LS)估測器，最有可能性(Maximum Likelihood, ML)估測器等等。其中利用 LMMSE 雖然可達到不錯的效果，卻有通道不符合(Channel Mismatch)的問題，因此並不是適用在所有可能的通道中。以下我們針對 OFDM 系統中的通道估測提出解決之道。

根據(4.11)式可發現，在考慮有取樣頻偏、殘餘載波頻偏、多路徑通道情況下，收到訊號是由原本傳送出來訊號 $X_{k,l}$ 乘上頻域通道係數 H_k 以及三項干擾源，再加上其他相鄰載波干擾(Inter-Carrier-Interference, ICI)所構成。根據中央

極限定理(Central Limit Theorem)，我們可以把相鄰載波干擾當作一個高斯雜訊(Gaussian Noise)，暫且將相鄰載波干擾與原來高斯雜訊放在一起，變成一個總合高斯雜訊 $N_{k,l}$ ，

$$N_{k,l} = ICI(k,l) + Z_{k,l} \quad (4.12)$$

另外，原本傳送出來訊號 $X_{k,l}$ 受到三項干擾源，第一項來自取樣頻偏 ξ 所造成，第二、三項皆由殘餘載波頻偏 Δf_r 所造成，其中第二項來自殘餘載波頻偏旋轉 l 個 OFDM 符元的量 (l 為一正整數)，第三項來自殘餘載波頻偏旋轉 n 個取樣點的量總合。由(4.11)式可發現第一、二項所造成的影響只有相位旋轉，第三項所造成的影響不僅有相位旋轉，尚有振幅縮小(Amplitude Reduction)。因為第三項一直存在於每一個 OFDM 符元的每一個載波位置，因此我們將它與原本的通道係數結合一起來估測與補償：

$$\tilde{H}_k = H_k \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\Delta f_r n \tilde{T}_s} \right) \quad (4.13)$$

由於取樣率頻偏 $\xi \ll 1$ ，以及取樣週期 $\tilde{T}_s \ll 1$ ，故前面幾個 OFDM 符元 $l = 0, 1, 2, \dots$ 的相位旋轉皆很小且可忽略，加上恰巧前面幾個 OFDM 符元包含 Long Preamble，因此可利用其一些已知特性來達到通道估測的目的。另外，觀察式(4.11)發現，若是沒有取樣頻偏、殘餘載波頻偏存在，則收到訊號便只是原來傳送出來訊號乘上頻域通道係數，不會受到相位旋轉與載波之間干擾影響，所以在此情況下估算通道會受到較小干擾。接著我們介紹最有可能性通道估測法(Maximum Likelihood Channel Estimation)。

4.2.1 最有可能性通道估測法

考慮 FFT 輸出的其中一個載波 k ，觀察幾個連續收到 OFDM 符元 $l = 0, 1, 2, \dots, L$ ，由以上討論及(4.11)、(4.12)、(4.13)式可知觀察到的訊號為

$$\begin{aligned}
 R_{k,l} &\approx X_{k,l} \tilde{H}_{k,l} + N_{k,l} = S_{k,l} + N_{k,l} & l = 0, 1, 2, 3, \dots & \quad (4.14) \\
 * \tilde{H}_{k,l} &= H_{k,l} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\Delta f_r n \tilde{T}_s} \right) \\
 * S_{k,l} &= X_{k,l} \tilde{H}_{k,l}
 \end{aligned}$$

將觀察到的 L 個值寫成以下的向量式：

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{R}}_k &= \begin{bmatrix} R_{k,1} \\ R_{k,2} \\ \vdots \\ R_{k,L} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{X}}_k = \begin{bmatrix} X_{k,1} \\ X_{k,2} \\ \vdots \\ X_{k,L} \end{bmatrix}, \quad \underline{\tilde{\mathbf{H}}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{k,1} \\ \tilde{H}_{k,2} \\ \vdots \\ \tilde{H}_{k,L} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{S}}_k = \begin{bmatrix} S_{k,1} \\ S_{k,2} \\ \vdots \\ S_{k,L} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{N}}_k = \begin{bmatrix} N_{k,1} \\ N_{k,2} \\ \vdots \\ N_{k,L} \end{bmatrix}, \\
 \max_{\tilde{\mathbf{H}}_k} P[\underline{\mathbf{R}}_k | \underline{\mathbf{X}}_k, \tilde{\mathbf{H}}_k] &= \frac{e^{-\frac{1}{2}[(\underline{\mathbf{R}}_k - \underline{\mathbf{S}}_k)^H \mathbf{Q} (\underline{\mathbf{R}}_k - \underline{\mathbf{S}}_k)]}}{\sqrt{(2\pi)^N |\mathbf{\Lambda}|}}, & (4.15) \\
 \Rightarrow \max_{\tilde{\mathbf{H}}_k} -[(\underline{\mathbf{R}}_k - \underline{\mathbf{S}}_k)^H \mathbf{Q} (\underline{\mathbf{R}}_k - \underline{\mathbf{S}}_k)] & & (4.16)
 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{\Lambda}$ 定義為 $\underline{\mathbf{N}}_k$ 的相關矩陣(Covariance Matrix)， $\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}^{-1}$ 。因為 $\underline{\mathbf{N}}_k$ 的每一個元素都是統計平均為零(Zero Mean)、同樣機率分佈(Identically Distributed)、彼此之間都是不相關(Uncorrelated)，所以 $\underline{\mathbf{N}}_k$ 的 Covariance Matrix $\mathbf{\Lambda}$ 是對角矩陣(Diagonal Matrix)，並且每個對角元素亦相同，其反矩陣 \mathbf{Q} 亦是對角矩陣。因此，(4.16)式可進一步化簡為：

$$\begin{aligned}
& \max_{\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_k} -\left[(\underline{\mathbf{R}}_k - \underline{\mathbf{S}}_k)^H (\underline{\mathbf{R}}_k - \underline{\mathbf{S}}_k) \right] \\
\Rightarrow & \max_{\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_k} 2 \operatorname{Re} \left[\underline{\mathbf{R}}_k^H \underline{\mathbf{S}}_k \right] - \underline{\mathbf{S}}_k^H \underline{\mathbf{S}}_k \\
& = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{l=1}^L R_{k,l}^* S_{k,l} \right] - \sum_{l=1}^L |S_{k,l}|^2
\end{aligned} \tag{4.17}$$

定義 $\tilde{R}_{k,l} \triangleq R_{k,l} X_{k,l}^*$ ，將(4.14)式代入(4.17)式可得

$$\begin{aligned}
& \max_{\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_k} 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{l=1}^L R_{k,l}^* X_{k,l} \tilde{H}_{k,l} \right] - \sum_{l=1}^L |X_{k,l}|^2 |\tilde{H}_{k,l}|^2 \\
& = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{l=1}^L (R_{k,l} X_{k,l}^*)^* \tilde{H}_{k,l} \right] - \sum_{l=1}^L |X_{k,l}|^2 |\tilde{H}_{k,l}|^2 \\
& = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{l=1}^L \tilde{R}_{k,l}^* \tilde{H}_{k,l} \right] - \sum_{l=1}^L |X_{k,l}|^2 |\tilde{H}_{k,l}|^2 \\
& = \sum_{l=1}^L \tilde{R}_{k,l}^* \tilde{H}_{k,l} + \sum_{l=1}^L \tilde{R}_{k,l} \tilde{H}_{k,l}^* - \sum_{l=1}^L |X_{k,l}|^2 |\tilde{H}_{k,l}|^2 \\
& = \underline{\tilde{\mathbf{R}}}_k^H \underline{\tilde{\mathbf{H}}}_k + \underline{\tilde{\mathbf{H}}}_k^H \underline{\tilde{\mathbf{R}}}_k - \underline{\tilde{\mathbf{H}}}_k^H \underline{\mathbf{X}}_k \underline{\tilde{\mathbf{H}}}_k
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$* \underline{\tilde{\mathbf{R}}}_k = \begin{bmatrix} R_{k,1} \\ R_{k,2} \\ \vdots \\ R_{k,L} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{X}}_k = \begin{pmatrix} |X_{k,1}|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & |X_{k,L}|^2 \end{pmatrix}$$

找一個 $\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_k$ 讓(4.18)式最大的必要條件為：

$$\begin{aligned}
& \nabla_{\hat{\mathbf{H}}_k} \left(\tilde{\mathbf{R}}_k^H \tilde{\mathbf{H}}_k + \tilde{\mathbf{H}}_k^H \tilde{\mathbf{R}}_k - \tilde{\mathbf{H}}_k^H \mathbf{X}_k \tilde{\mathbf{H}}_k \right) \Big|_{\hat{\mathbf{H}}_k} = 0 \\
& \Rightarrow \tilde{\mathbf{R}}_k + \tilde{\mathbf{R}}_k - 2\mathbf{X}_k \tilde{\mathbf{H}}_k \Big|_{\hat{\mathbf{H}}_k} = 0 \\
& \Rightarrow \hat{\mathbf{H}}_k = \mathbf{X}_k^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_k = \begin{bmatrix} \frac{R_{k,1} X_{k,1}^*}{|X_{k,1}|^2} \\ \frac{R_{k,2} X_{k,2}^*}{|X_{k,2}|^2} \\ \vdots \\ \frac{R_{k,L} X_{k,L}^*}{|X_{k,L}|^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_{k,1}}{X_{k,1}} \\ \frac{R_{k,2}}{X_{k,2}} \\ \vdots \\ \frac{R_{k,L}}{X_{k,L}} \end{bmatrix} \quad (4.19)
\end{aligned}$$

此即為最有可能性通道估測(Maximum Likelihood Channel Estimation)的解。

至於傳送出來的訊號如何得知，則可仰賴 Long Preamble 來作通道估測。幸運的是，在 IEEE802.16a 無線都會網路標準中已經包含 Long Preamble，其中每個載波所傳送的資料是固定且被傳送端及接收端所知道，所以可拿來當作通道估測使用。接著我們可利用 Long Preamble 所估測得到的通道值，來檢測傳送的資料。然後，再進一步地使用檢測出的傳送訊號值來估測目前的通道。但是此種做法容易有判錯誤傳遞(Error Propagation)，因此可採用別種做法，即利用外部接收機(Outer Receiver)的編碼/解碼(Coding/Decoding)功能將錯誤更正過來，再拉回內部接收機(Inner Receiver)重建正確資料，拿來作通道估測，以提高演算法的正確性。

因為 IEEE802.16a 無線都會網路設計的考量主要是給室外環境使用，所以在基地台(Base Station)及用戶端(Subscriber)位置均是固定的情況之下，傳送端送出一個封包(Packet)之後，封包裡相鄰 OFDM 符元所遭遇到的通道環境非常相似，幾乎沒有太大改變，所以(4.19)式可以利用不同 OFDM 符元的通道相似性來達到壓抑雜訊(Suppressing Noise)的效果，如(4.20)式所示。

$$\widehat{H}_k = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{R_{k,l}}{X_{k,l}} \quad (4.20)$$

模擬中所採用的通道模型為 IEEE 802.16 Handbook[21]所提的多路徑通道 (Multi-path Channel)模型，此通道模型共有三條路徑。至於為何三條路徑就可以代表整個多路徑通道，原因在於無線都會網路是在室外環境傳送，且基地台及用戶端均是置高點固定的設備，所以經由量測結果發現在這三條路徑就已經能代表整個多路徑通道的能量，但是有一點值得注意的就是此三條路徑彼此之間的延遲時間差是不相同的，也就是說第一根路徑與第二根路徑到達接收端的延遲時間差和第二根路徑與第三根路徑到達接收端的延遲時間差是不盡相同的。

圖 4.2.1 是多路徑通道模型的示意圖。其中 T_{C_0} 、 T_{C_1} 、 T_{C_2} 分別代表第一根路徑、第二根路徑及第三根路徑到達接收端的延遲時間。

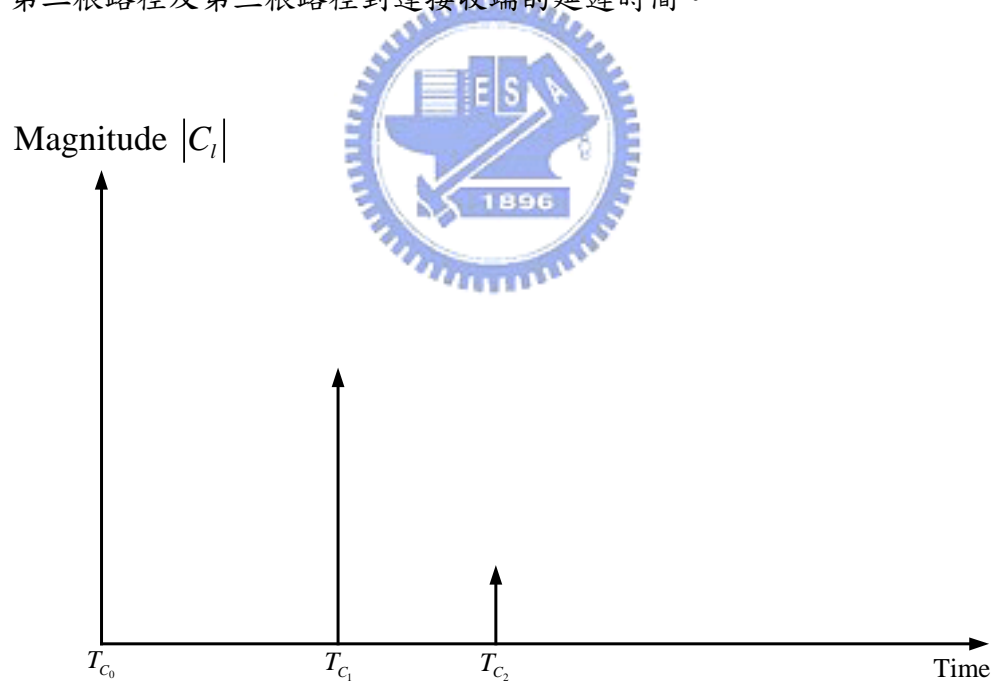


圖 4.2.1 多路徑通道模型示意圖

其中每一根路徑標示為 c_l , $l=0,1,2$, 每一根路徑都是由平均值為零, 變異數(Variance)為 σ_l^2 的高斯隨機變數所構成。根據此通道模型文件[21]我們可以發現此三根路徑功率總和的平均值為一, 也就是說 $E\left[\sum_{l=0}^2 |C_l|^2\right]=1$ 。此外, 由於傳送器與接收器是固定不動的設備, 所以我們可以假設通道變化非常緩慢。因此在程式模擬裏, 每一個封包的所有 OFDM 符元都感受到一樣的通道影響, 並且不同的封包有不同的通道反應。

圖 4.2.2 假設調變方式為 QPSK、編碼率是 1/2、升高取樣率 2 倍 (Up-sampling, $M=2$)且其他條件皆為完美同步情況, 我們模擬最有可能性通道估測法(Maximum Likelihood Channel Estimation)的效能比較。

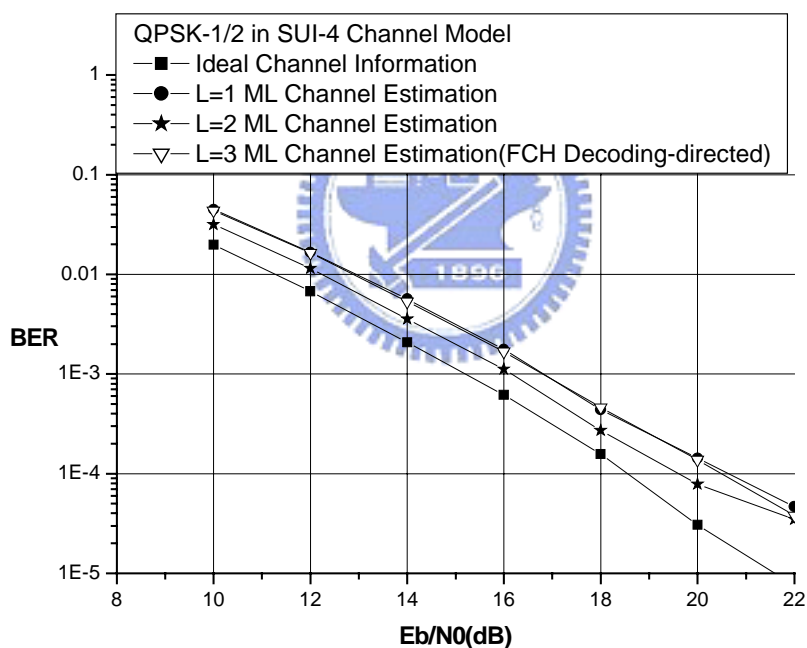


圖 4.2.2 最有可能性通道估測法, QPSK-1/2 下不同平均個數 L 之比較

$L=1, 2, 3$ 是意指累加哪些符元來作為通道估測之用; 由圖 4.2.3 所示, L 與 DL Preamble 及碼框控制標頭(FCH)的架構有關係。所謂 $L=1$ 就是指採用 Long Preamble 第一塊 128 個取樣點來估算通道, $L=2$ 就是意指採用 Long Preamble 中

二塊 128 個取樣點估算通道，同理， $L=3$ 就是指採用 Long Preamble 中兩塊 128 個取樣點及碼框控制標頭(FCH)來執行通道估算。Long Preamble 是由連續兩個相同 128 個取樣點所構成，我們從第三章知道 Long Preamble 並不是每根載波 (sub-carrier)都是有值的，所以 Long Preamble 在時域會呈現這樣的架構。

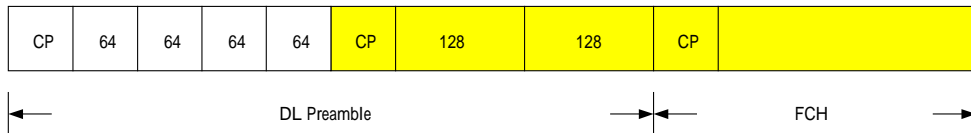


圖 4.2.3 DL Preamble 架構及碼框控制標頭(FCH)架構

因為 Long Preamble 中只有一百根有用載波(useful sub-carrier)是有值的，另外一百根有用載波(useful sub-carrier)的值是為零。並且，這兩百根載波(sub-carrier)是相鄰載波中一根有值，另一根為零，所以我們可以先用最有可能性通道估測法估算出這一百根有值的載波通道係數，然後藉由相鄰通道的相關性，利用簡單的內插法來估算出另外一百根的通道係數。例如：假設第一根載波和第三根載波是有值的，第二根載波的值是為零，所以我可以藉由最有可能性通道估測法先估算出第一根載波及第三根載波的通道係數，然後把第一根載波的通道係數及第三根載波的通道係數加總起來，再取平均，如此平均後得到的值就是第二根載波的通道係數。

從圖 4.2.2 模擬可以發現，當 L 變大，通道估測的效能會變好。但是當 L 從 2 變到 3 時，效能不但沒有變更好，反而比較糟，原因在於我們先用 Long Preamble($L=2$)來估測所有的通道係數，然後把估測出來的通道係數拿來解碼框控制標頭(FCH)的資料。但此動作不但無法精確解出碼框控制標頭(FCH)的資料，而且由碼框控制標頭(FCH)所估測出來的通道係數和 Long Preamble 所估測的通道係數做加總及平均的動作，會造成整個通道估測的效能變差。接著我們來探討實現演算法的成本問題，IEEE802.16a 無線都會網路標準中 Long Preamble 已經規定載波上鏈送的資料為 ± 1 的 BPSK 調變，因此實現(4.20)式不需要用到除法器，但如果把碼框控制標頭(FCH)估測的通道係數納入考量，則除法器的存在

就是需要的，原因在於碼框控制標頭(FCH)採用的是 QPSK 調變方式，所以需要除法的動作存在，因此在考慮效能越好及實現演算法成本越小的前提下，可得到一個結論， $L=2$ 是一個較佳的平均個數選擇。

由圖 4.2.2 模擬結果我們可以發現在位元錯誤率(BER)為 10^{-4} 情況下， $L=2$ 的效能和在已知真正通道資訊下的效能約有 1 dB 左右的差異。因此我們將加入平滑濾波器來增加效能，來縮小此差異。以下章節將介紹平滑濾波器的概念及其改善效能的能力。

4.2.2 平滑濾波器

雖然經由最有可能性通道估測可達到一低成本的通道估測法，但是由以上模擬可發現：它與利用正確通道資訊來解調的效能仍有 1dB 的效能差異。因此如何降低通道估測所造成的效能損失(Performance Loss)便是此小節的課題。

平滑濾波器(Smooth-Filter)將以上粗估的通道係數，經過權重平均來得到更精確的通道係數。首先，我們猜測時域通道的長度（或忽略最後幾根路徑很小的值），藉由訊號的向量空間投影法，只保留幾個真正包含通道資訊的維度空間，其餘維度空間因為只包含雜訊所以全去掉。保留下來的維度空間經過投影後，可去掉部分雜訊。經過一番推導可得到粗估通道係數與平滑濾波後通道係數的關係，此平滑濾波後的每個通道係數是所有粗估通道係數的線性組合。其中距離越靠近的載波粗估通道係數給予越大的權重，距離越遠的載波通道係數給予越小的權重，所有載波乘上其權重相加起來即是所謂經過平滑濾波器的細估通道係數，如式(4.21)所示。

$$\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{F}_{uh} \left(\mathbf{F}_{uh}^H \mathbf{F}_{uh} \right)^{-1} \mathbf{F}_{uh}^H \widehat{\mathbf{H}} \quad (4.21)$$

其中 \mathbf{F}_{uh} 為 DFT 矩陣切割後的其中一部分矩陣，行(Column)數為時域總合通道的長度 N_c ，列(Row)數為真正想要估算頻域通道的載波個數，因為在 IEEE802.16a

無線都會網路標準中有 56 個虛擬載波(Virtual Carrier)，所以列數等於 200。 $\hat{\mathbf{H}}$ 為最有可能性通道估測器輸出每個載波上之粗估通道係數。 $\hat{\hat{\mathbf{H}}}$ 為平滑濾波器輸出每個載波上之細估通道係數。 $\mathbf{F}_{uh} (\mathbf{F}_{uh}^H \mathbf{F}_{uh})^{-1} \mathbf{F}_{uh}^H$ 為平滑濾波器。最後估算出來的通道係數是經過二維的平滑濾波所得到的結果，如圖 4.2.4 所示。

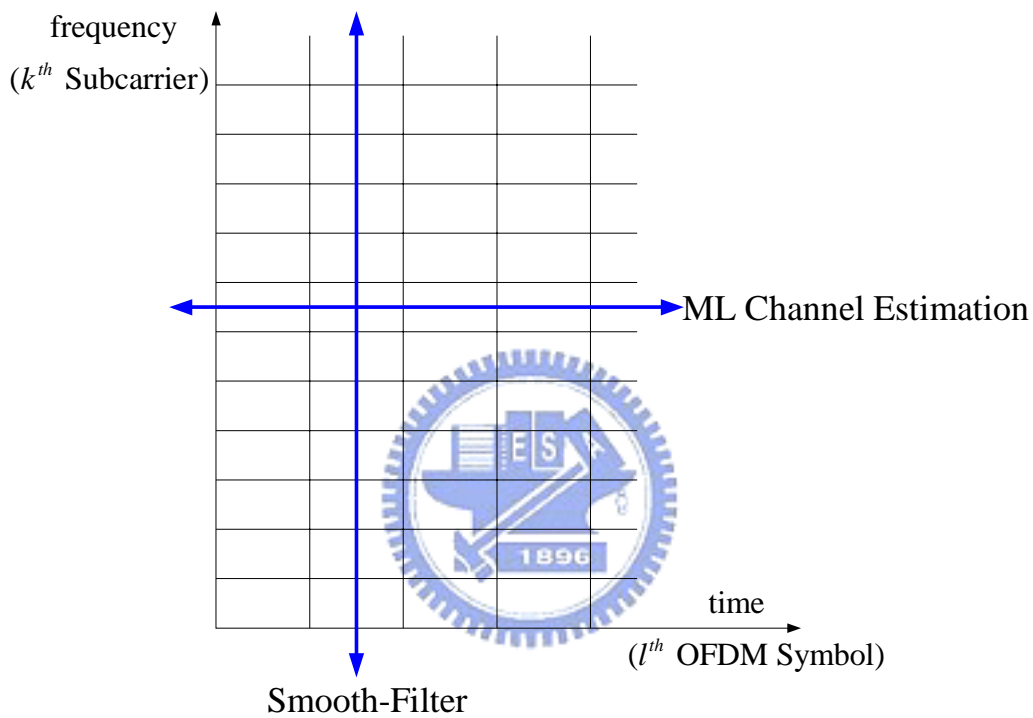


圖 4.2.4 二維平滑濾波之通道估測示意圖

圖 4.2.5 指出在位元錯誤率(BER)為 10^{-4} 情況下，加上平滑濾波器後所得到的效能和在已知真正通道資訊下的效能只約有 0.4 dB 左右的差異，也就是說加入平滑濾波器前後大約相差了 0.6 dB。從模擬結果發現即使加入平滑濾波器，效能仍然有些微的損失，原因在於就算使用二維的平滑濾波器還是有一些雜訊含在裡面，造成通道估算的誤差。由於平滑濾波器只是對想要的維度空間做空間作投影，所以無法去掉本來就存在這些維度空間中的雜訊。其他不想要的維度空間，因著被去掉，所以在這些空間的雜訊就消失了。因此，無法消除全部維度空間的雜訊干擾，只去除部份雜訊。

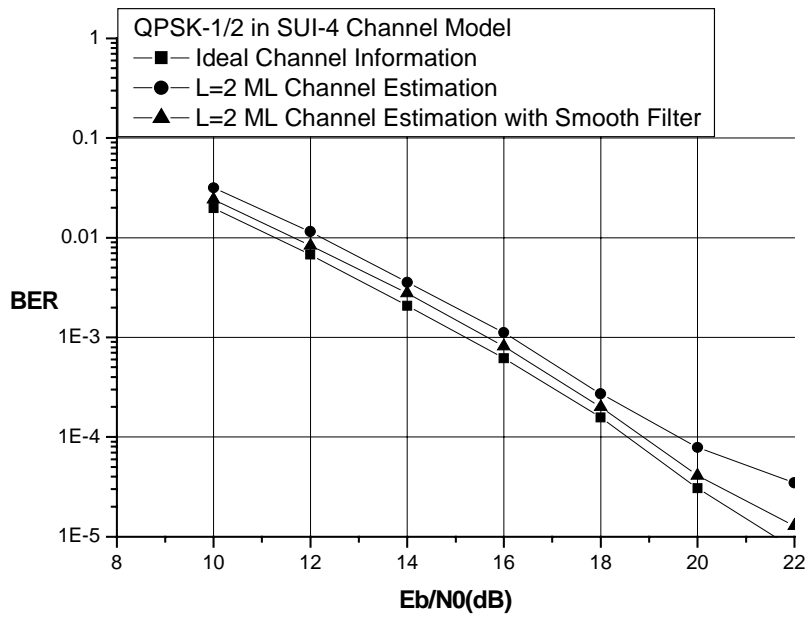


圖 4.2.5 在 QPSK-1/2 情況下，加入平滑濾波器前後通道估測之比較



本章所討論的通道估測器，最有可能性通道估測合併平滑濾波器，運作方塊圖示於圖 4.2.6。

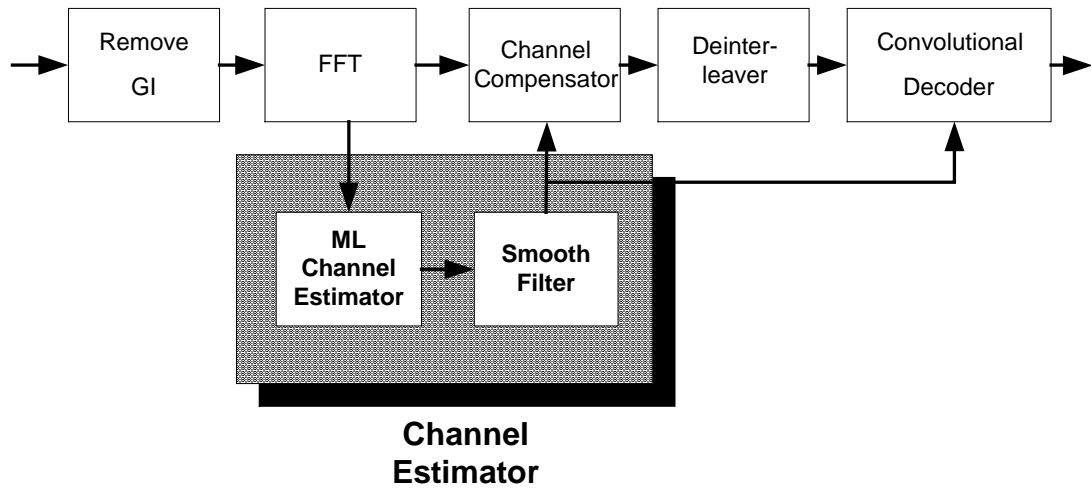


圖 4.2.6 最有可能性通道估測器合併平滑濾波器之運作方塊圖

4.2.3 低複雜度之平滑濾波器

由 4.2.2 章節中我們可以知道平滑濾波器是個矩陣，而這矩陣的架構由式 (4.22) 所表示。在這式子中，我們發現這個矩陣的維度是 200×200 ，也就是說平滑濾波器共儲存 40000 筆資料，這 40000 筆資料就會造成 40000 次的乘法運算，這對硬體來說是很大的負擔，因此我們必須降低乘法的運算量。

$$\mathbf{F}_{uh} \left(\mathbf{F}_{uh}^H \mathbf{F}_{uh} \right)^{-1} \mathbf{F}_{uh}^H \quad (4.22)$$

首先我們可以先回憶原始的通道估測方法，此方法一開始就是使用最有可能性通道估測法估算出一百根載波(sub-carrier)的通道係數，然後藉由內插法估算出另外一百根載波(sub-carrier)的通道係數，最後再經過平滑濾波器得到最後的通道係數。所以，我們是先估算出這兩百根載波(sub-carrier)的通道係數，再讓這兩百根載波(sub-carrier)經過平滑濾波器，以致於造成大量的乘法運算。

此降乘法運算量的方法可以分成兩個步驟：

步驟一：

由於原始方法是先用最有可能性通道估測法估算出兩百根載波(sub-carrier)的通道係數，然後再經過平滑濾波器，因此我們可以在過程中做個改變。也就是在使用 Long Preamble 架構估算出一百根載波(sub-carrier)的通道係數後，先不執行內插法來求得另外一百根載波(sub-carrier)的通道係數，我們將這估算出來的一百根載波(sub-carrier)先經過平滑濾波器，然後再利用這一百根載波(sub-carrier)的(微調)通道係數經過內插法來得到另外一百根載波(sub-carrier)的係數。因著這樣的過程，使得平滑濾波器只需要儲存 10000 筆資料，那也就是說它只需要做 10000 次的乘法運算。但這 10000 次的乘法運算對硬體來說負擔還是很大，因此我們將由步驟二繼續降低乘法運算量。

步驟二:

首先我們先觀察(4.23)式，左邊向量代表經由最有可能性通道估測法及平滑濾波器所得到的通道係數，中間的矩陣代表平滑濾波器，而右邊的向量則是代表經由最有可能性通道估測法所得到的通道係數。

$$\begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_{98} \\ H_{99} \end{bmatrix}_{100 \times 1} = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & w_{0,2} & \cdots & w_{0,98} & w_{0,99} \\ w_{1,0} & w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,98} & w_{1,99} \\ w_{2,0} & w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,98} & w_{2,99} \\ \vdots & & & & & \\ w_{98,0} & w_{98,1} & w_{98,2} & \cdots & w_{98,98} & w_{98,99} \\ w_{99,0} & w_{99,1} & w_{99,2} & \cdots & w_{99,98} & w_{99,99} \end{bmatrix}_{100 \times 100} \begin{bmatrix} H_{0,ML} \\ H_{1,ML} \\ H_{2,ML} \\ \vdots \\ H_{98,ML} \\ H_{99,ML} \end{bmatrix}_{100 \times 1} \quad (4.23)$$

由(4.23)式可以得知每個載波的通道係數是先由最有可能性通道估測法估算出一百根載波(sub-carrier)的通道係數後，然後再以平滑濾波器來做權重平均。是否每個載波均需要一百個值來做權重平均呢？在做出個結論之前，我們可以先觀察圖 4.2.7，其代表第一根載波所對應到一百個權重大小，也就是 $|w_{0,0}|, |w_{0,1}|, |w_{0,2}|, \dots, |w_{0,99}|$ 。

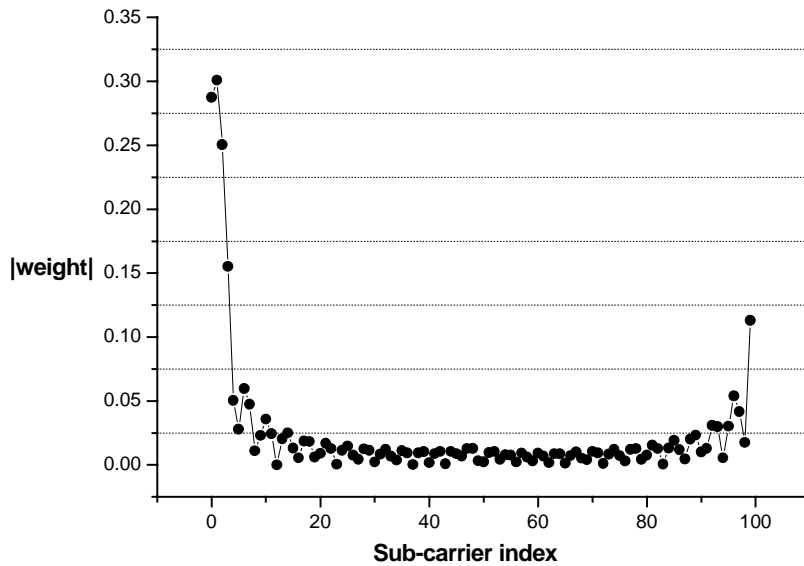


圖 4.2.7 第一根載波所對應到的所有權重大小

由圖 4.2.7 可以得知，有些權重值的大小差異很大。那些較小權重值的是否對整個通道估測會有重大影響呢？圖 4.2.8 是在調變方式為 QPSK，編碼率為 1/2 的情況之下，針對不同數目的權重，觀察其所造成的效能影響。其中我們可以看到括號中的數字有 100、30、20 及 10，其代表的意義就是每個載波只取全部的權重、前三十根大的權重、前二十根大的權重或前十根大的權重當作平滑濾波器。由模擬結果可知，取全部權重和取前三十根或前二十根權重的效能，差異性並不會太大。但當只取前十根權重時，則會得到的效能和單純只做最有可能性通道估測法幾乎一樣。因此在調變方式為 QPSK，編碼率為 1/2 的情況之下，平滑濾波器只需取前二十根大權重就可以達到和一百根權重同樣的效能。至於其他調變方式及編碼率是否也只需要前二十根大的權重當作平滑濾波器，這部分我們將於往後模擬結果做個介紹。現在，我們做複雜度的比較，如果平滑濾波器取一百根權重來改善通道估測效能，則硬體就需要做 10000 次的複數乘法運算，但如果我們只取前二十根大的權重當作平滑濾波器，則其只需要 2000 次的複數乘法運算，如此不但可以減少硬體的運算複雜度，也可以達到相同的效能。

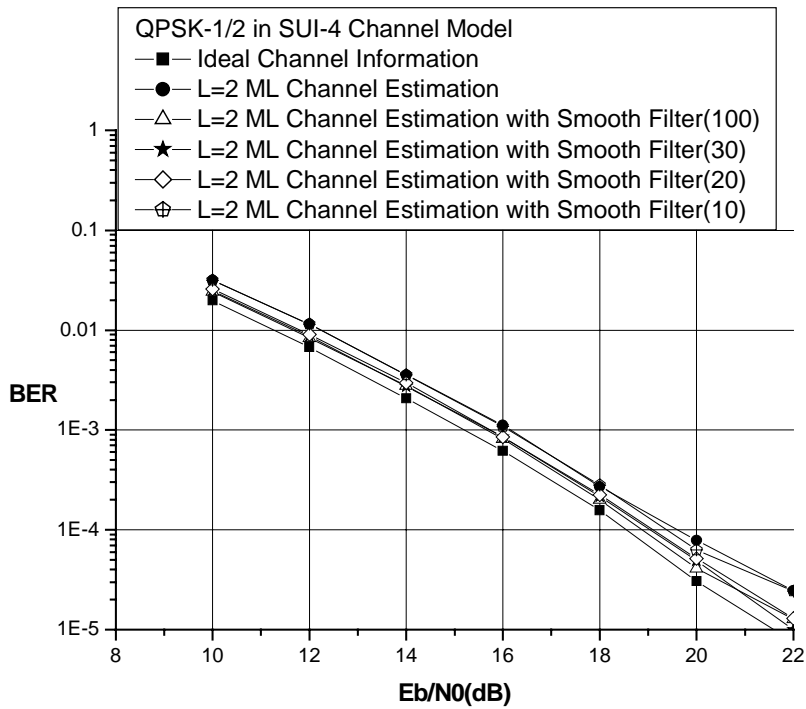


圖 4.2.8 在 QPSK-1/2 下，針對不同數目的權重其所達到的效能比較



4.3 模擬結果

圖 4.3.1 至圖 4.3.5 是針對不同調變方式及不同編碼率的情況下，使用最有可能性通道估測法的結果。由模擬結果我們可以發現除了 64QAM-3/4 之外，其他在 $L=2$ 的效能和理想的通道資訊下的效能約有 1dB 的差異。

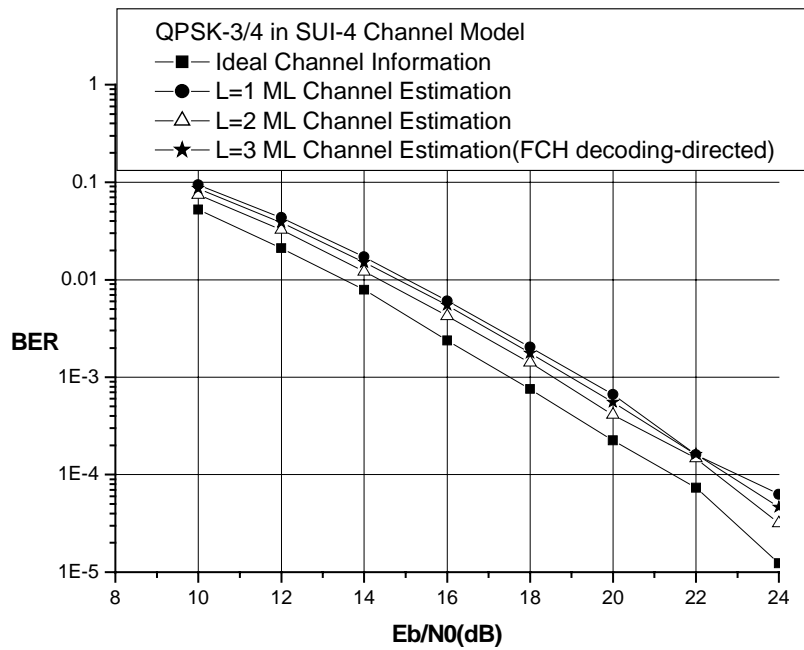


圖 4.3.1 最有可能性通道估測法，QPSK-3/4 下不同平均個數 L 之比較

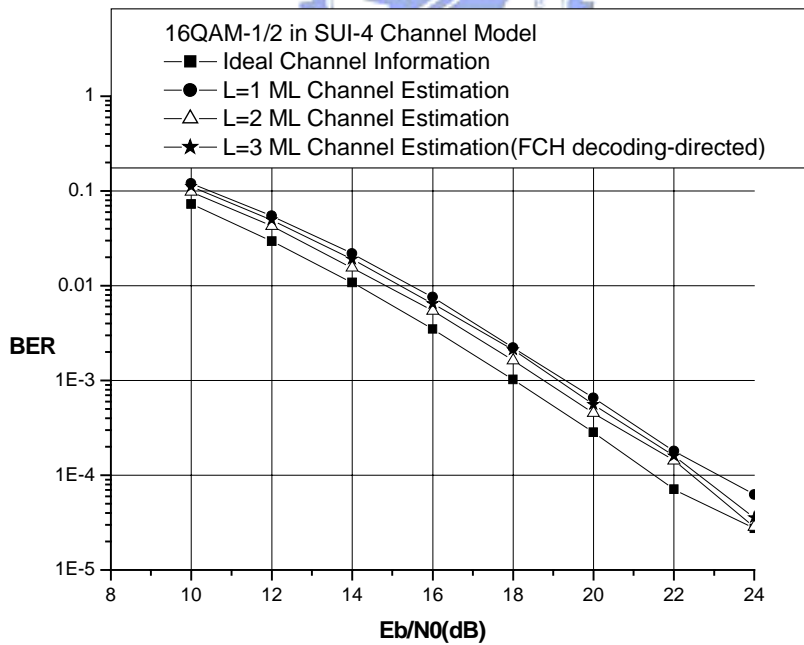


圖 4.3.2 最有可能性通道估測法，16QAM-1/2 下不同平均個數 L 之比較

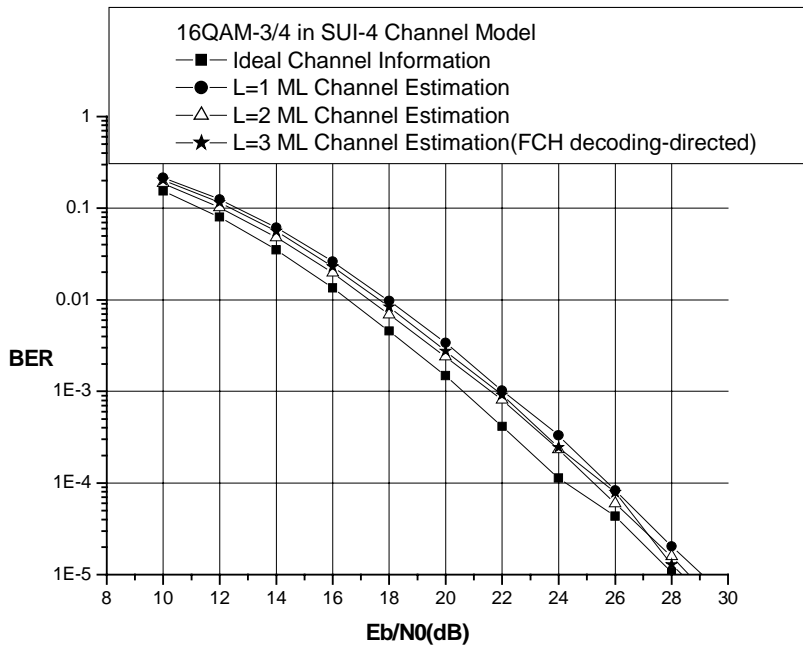


圖 4.3.3 最有可能性通道估測法，16QAM-3/4 下不同平均個數 L 之比較

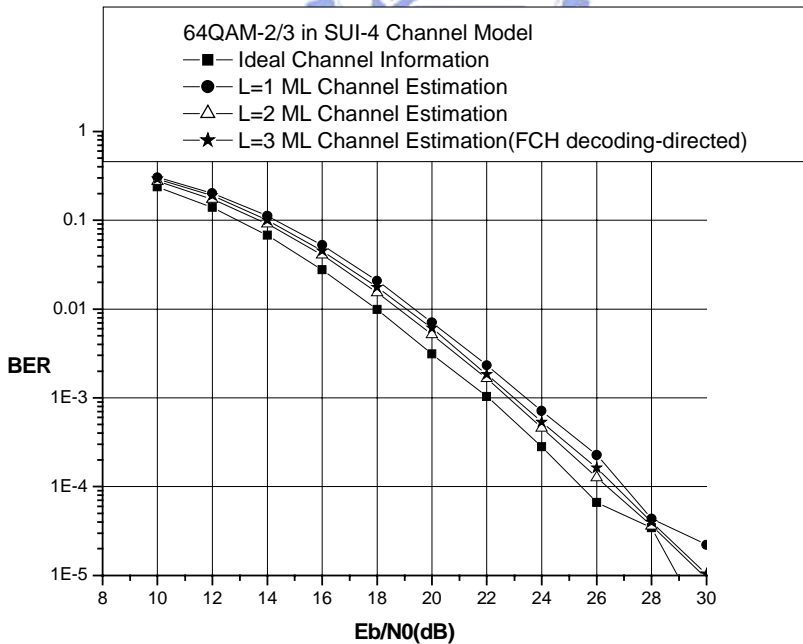


圖 4.3.4 最有可能性通道估測法，64QAM-2/3 下不同平均個數 L 之比較

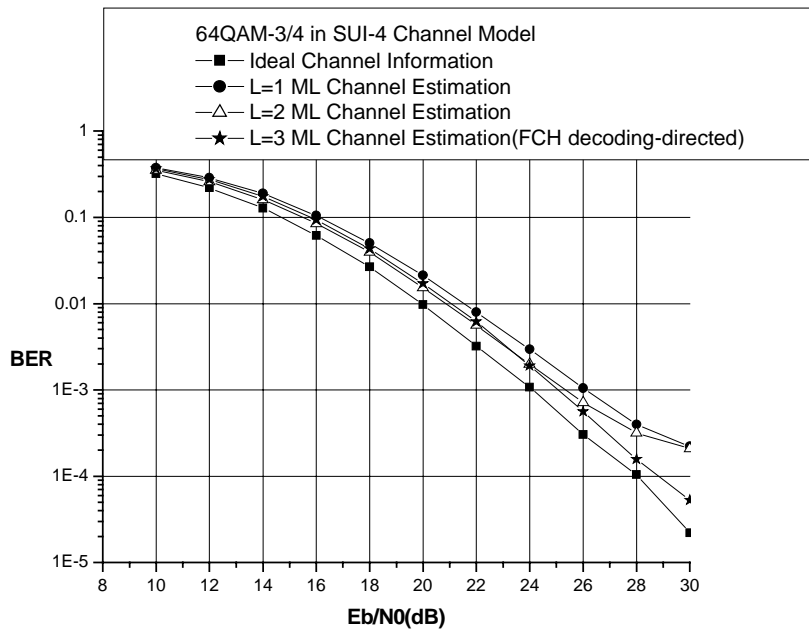


圖 4.3.5 最有可能性通道估測法，64QAM-3/4 下不同平均個數 L 之比較

圖 4.3.6 至圖 4.3.10 是針對不同調變方式及不同編碼率的情況下，不同數目權重的效能比較。

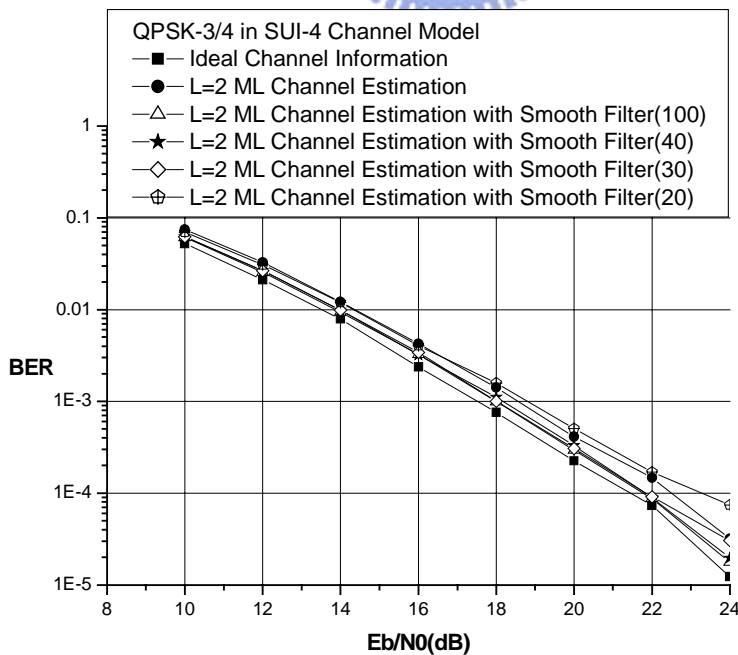


圖 4.3.6 在 QPSK-3/4 下，針對不同數目的權重其所達到的效能比較

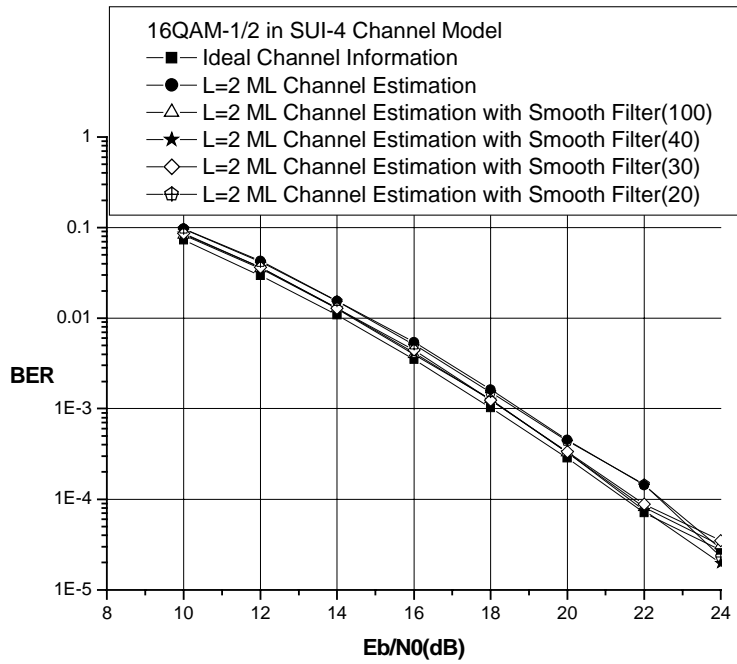


圖 4.3.7 在 16QAM-1/2 下，針對不同數目的權重其所達到的效能比較

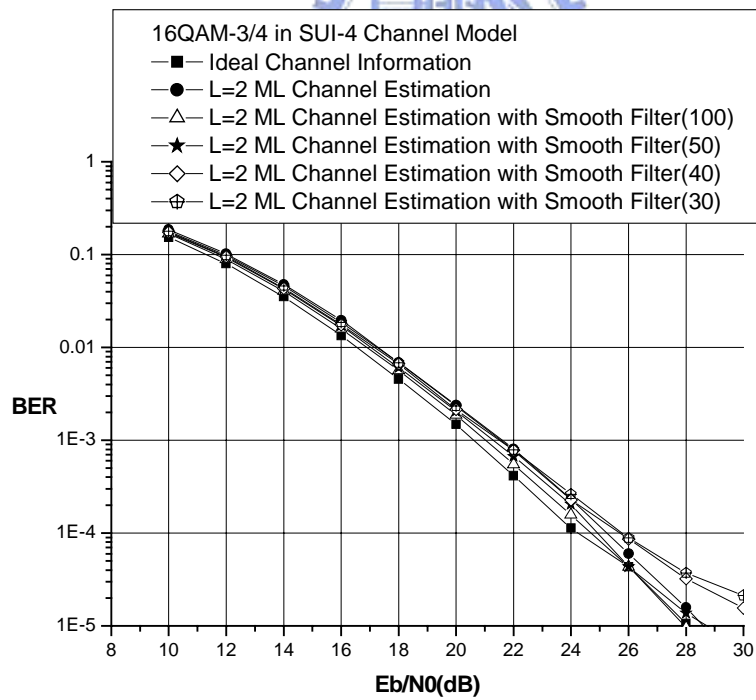


圖 4.3.8 在 16QAM-3/4 下，針對不同數目的權重其所達到的效能比較

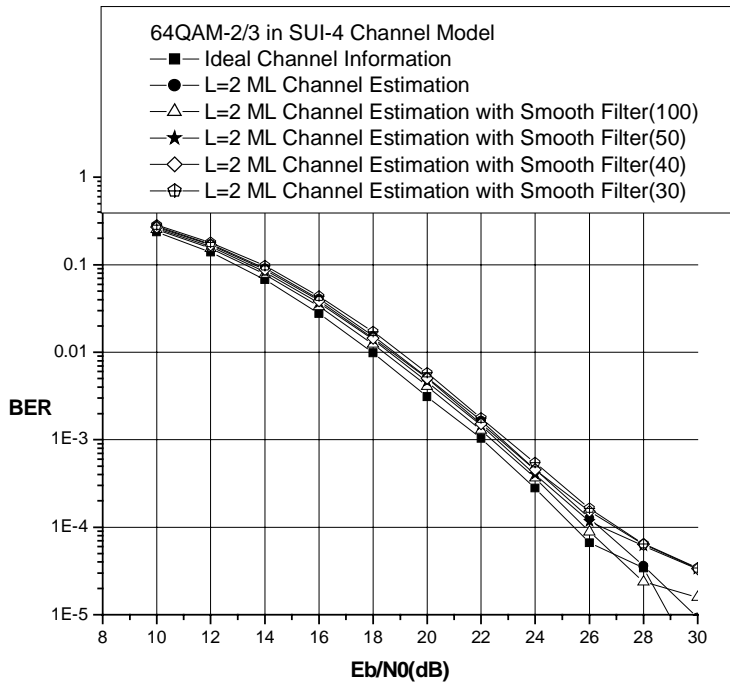


圖 4.3.9 在 64QAM-2/3 下，針對不同數目的權重其所達到的效能比較

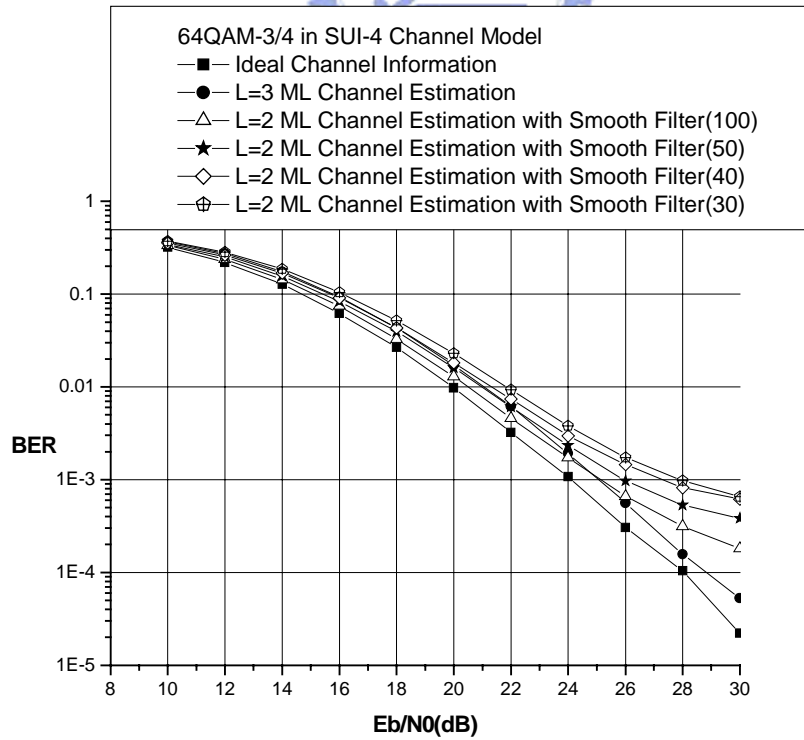


圖 4.3.10 在 64QAM-3/4 下，針對不同數目的權重其所達到的效能比較

從以上程式模擬結果可以發現，單就最有可能性通道估測法來看，除了 64QAM-3/4 須選擇 $L=3$ 才會達到較好的效能之外，其餘選擇的平均個數 $L=2$ 時，其效能越好，符合當初所預期的。至於為何 64QAM-3/4 把碼框控制標頭(FCH)納入考慮則會得到更好的效能呢？為何它和我們當初討論最有可能性通道估測的結果不同呢？其實是參考位置的問題，也就是說觀察圖 4.3.5，我們發現當 E_b/N_0 大於 24dB 時， $L=3$ 效能優於 $L=2$ ，但是在小於 24 dB 時， $L=2$ 效能優於 $L=3$ ，因此 24dB 是個轉折點，但是為何其他調變方式及編碼率看不到這樣的情況呢？我們可以用 $E_s = 10\log n + 10\log R + 10\log E_b$ (dB) 這式子來做說明， E_s 是每個載波能量， n 是每個載波上的位元數目， R 是編碼率，在用 Long Preamble 執行通道估測時，針對不同調變方式及編碼率，其實 E_s 是固定的，因此計算當 E_b 等於 24dB，則 E_s 為 21dB，那在固定 E_s 為 21dB 情況下換算在 64QAM-2/3 時， E_b 必須為 31dB 才能使得 $L=3$ 效能優於 $L=2$ ，同樣地道理，越低調變方式及越低編碼率，其所需要的 E_b 就要越大，但由於模擬結果只觀察 10dB 至 30dB 的效能，因此才會造成當採用 64QAM-3/4 時，在高訊雜訊比下， $L=3$ 效能優於 $L=2$ 這樣和之前解釋為何 $L=2$ 效能優於 $L=3$ 的矛盾結果。再看加入平滑濾波器的效能，可發現其過濾雜訊的作用非常顯著，因此效能也有明顯的提升，尤其是在低訊雜比(SNR)時。但是在高訊雜比時，就沒有這麼大的改善了，尤調變方式及編碼率為 QPSK-3/4、16QAM-1/2 只需取前三十根大的權重就可和取全部權重當平滑濾波器的效能相似。並且，16QAM-3/4 需取前五十根大的權重當作平滑濾波器，64QAM-2/3 需取全部一百根的權重當作平滑濾波器。因此，以上觀察可以得到一個結論，利用最有可能性通道估測法是一個既簡單又有不錯效能的方法，尤其是在高訊雜比時尤其明顯，在低雜訊比時又可加上低複雜度的平滑濾波器 (Smooth-Filter) 來幫助過濾雜訊，在提升效能方面也有不錯的改善。