

# 國立交通大學

理學院科技與數位學習學程

## 碩士論文

虛擬教具應用於國中學生學習多項式展開與因式  
分解之影響

A Study of the Effect of Applying Virtual Manipulatives on Junior  
High School Students' Learning of Expanding Polynomials and  
Factorization

研究生：楊惠雯

指導教授：袁媛教授

陳明璋教授

中華民國九十九年七月

虛擬教具應用於國中學生學習多項式展開與因式分解之影響  
A Study of the Effect of Applying Virtual Manipulatives on Junior High  
School Students' Learning of Expanding Polynomials and Factorization

研究生：楊惠雯

Student : Hui-Wen Yang

指導教授：袁媛

Advisor : Yuan Yuan

陳明璋

Ming-Jang Chen

國立交通大學  
理學院科技與數位學習學程  
碩士論文



A Thesis  
Submitted to Degree Program of E-Learning  
College of Science  
National Chiao Tung University  
in partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master  
in

Degree Program of E-Learning

July 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年七月

# 虛擬教具應用於國中學生學習多項式展開與因式分解之影響

學生：楊惠雯

指導教授：袁 媛 教授

陳明璋 教授

國立交通大學理學院科技與數位學習學程碩士班

## 摘 要

本研究以 NLVM 的 Algebra Tiles 為教學輔具，設計國中一年級多項式展開與因式分解活動，並進一步探討將此教學輔具應用於教學的成效。

本研究採不等組前後測準實驗研究設計，以桃園縣一所國中的兩個班級學生為研究樣本，隨機抽取一班為實驗組，一班為控制組。實驗組學生接受以 NLVM 的 Algebra Tiles 作為教學輔具的教學，而控制組的學生接受以具體教具作為輔具的教學，並以研究者自編的多項式展開與因式分解測驗、學習單、心得及感想問卷、教學過程中的觀察記錄與影片為工具，進行學習成效資料之收集。實驗研究主要發現如下：

- 一、不同性別與使用不同的教學輔具，對學生學習多項式展開概念有顯著的交互作用：
  1. 就教學輔具的使用而言，使用具體教具的女生在多項式展開測驗的成績顯著優於男生。
  2. 就性別而言，使用虛擬教具組的男生在多項式展開測驗的成績顯著優於使用具體教具的男生。
- 二、不同能力程度與不同的教學輔具，對學生學習多項式展開概念沒有顯著的交互作用：
  1. 高分組、中分組與低分組的學生，在多項式展開測驗的成績並無顯著差異。
  2. 使用虛擬教具的實驗組學生與使用具體教具的控制組學生，在多項式展開測驗的成績並無顯著差異。
- 三、不同性別與使用不同的教學輔具，對學生學習因式分解概念沒有顯著的交互作用：
  1. 不管使用虛擬教具或具體教具於因式分解概念的教學，女生在因式

分解測驗的成績顯著優於男生。

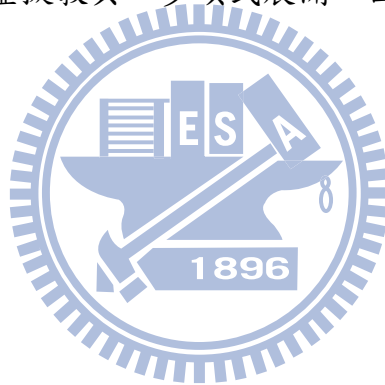
2. 使用虛擬教具的實驗組學生與使用具體教具的控制組學生，在因式分解的測驗成績並無顯著差異。

四、不同能力程度與不同的教學輔具，對學生學習因式分解概念沒有顯著的交互作用：

1. 高分組、中分組與低分組的學生，在因式分解測驗的成績有顯著差異。
2. 使用虛擬教具的實驗組學生與使用具體教具的控制組學生，在因式分解的測驗成績並無顯著差異。

五、使用虛擬教具與具體教具於數學的教學，對學生學習數學動機的提升並沒有顯著的差異。

關鍵字：代數磚、虛擬教具、多項式展開、因式分解



# A Study of the Effect of Applying Virtual Manipulatives on Junior High School Students' Learning of Expanding Polynomials and Factorization

Student : Hui-Wen Yang

Advisor : Dr. Yuan Yuan

Dr. Ming-Jang Chen

Degree Program of E-Learning College of Science  
National Chiao Tung University

## Abstract

This study used Web-based virtual manipulatives, Algebra Tiles, as aids to design instructional materials for the use of teaching junior high school students expanding polynomials and factorization. The effect of applying the instructional materials on students' learning was also explored in this study.

A pretest-posttest quasi-experimental design was used. The study involved 56 students in two different classes of a junior high school in Taoyuan county of Taiwan. The classes were randomly assigned to two methods of instruction; a virtual manipulative group and a physical manipulative group. The posttest developed by the researcher was conducted to measure effect. For an in-depth comparison between the two groups, the classroom climate and interactions among students and teachers were also investigated. Research results were as following:

1. Gender and the use of different manipulatives for students to learn the concept of expanding polynomials have significant interaction:
  - (1) For the use of manipulatives, the expanding polynomials test results of the girls using physical manipulatives are significantly better than boys.
  - (2) For gender, the expanding polynomials test results of the boys using virtual manipulatives are significantly better than boys using physical manipulatives.
2. Different ability levels and different manipulatives for students to learn the concept of expanding polynomials have no significant interaction:

- (1) For high level group, middle level group and low level group of students, there was no significant difference in the test scores of expanding polynomials.
- (2) For virtual manipulatives in the experimental group and the use of physical manipulatives in the control group, there was no significant difference in the test scores of expanding polynomials.
3. Gender and the use of different manipulatives for students to learn the concept of factorization have no significant interaction:
  - (1) Whether to use virtual manipulatives or physical manipulatives in the factorization concept, girls in the test results are significantly better than boys.
  - (2) For virtual manipulatives in the experimental group and the use of physical manipulatives in the control group, there was no significant difference in the test scores of the factorization.
4. Different ability levels and different manipulatives for students to learn the concept of factorization have no significant interaction:
  - (1) For high level group, middle level group and low level group of students, the scores of the factorization are significant different.
  - (2) For virtual manipulatives in the experimental group students and the use of physical manipulatives in the control group, the scores in the factorization test are not significant different.
5. Using virtual manipulatives and physical manipulatives in mathematics teaching, there is no significant difference in enhancing students' motivation to learn mathematics.

Keywords: algebra tiles, virtual manipulatives, expanding polynomials, factorization

## 誌 謝

兩年前，挺著肚子在狹窄的位子裡參加入學考試，抱著期待的心情等待放榜及老大明軒的誕生。兩年後，再度挺著肚子期待畢業典禮及老二明碩的降臨。

在這兩年的學習過程中，人生發生了很大的轉變。學到很多以往不曾接觸、不曾思考的事物，讓自己耳目一新、視野大開，當然也遇到了很多的困難。工作、家庭、學業上的兼顧，我相信每位同學都能體會。每當一邊趕著整理資料、孩子一邊不停的呼喚媽咪~~媽咪，那種煩躁和不忍，馬上讓人陷入高度的緊張和壓力之中。

幸運的是，在這兩年中，袁媛老師及陳明璋老師細心、包容的指導，雖說有時也會進度落後，但仍讓我一步步的進入狀況、往目標前進，省卻了盲目摸索的慌亂與無助。也感謝公公、婆婆，在這幾年無私的付出和培養，讓我在忙碌之餘，明軒仍可日益茁壯。最後，感謝先生在背後無怨尤的付出及每位家人的相互支援、扶持都是我最大的助力。

# 目 錄

中文摘要	.....	i
英文摘要	.....	iii
誌謝	.....	v
目錄	.....	vi
表目錄	.....	vii
圖目錄	.....	viii
一、	緒論.....	1
1.1	研究動機.....	1
1.2	研究目的.....	3
1.3	研究問題.....	3
1.4	名詞釋義.....	4
1.5	研究限制.....	5
二、	文獻探討.....	6
2.1	代數思維的發展與教學設計.....	6
2.2	多項式展開與因式分解的數學內涵.....	16
2.3	數學學習成就的性別差異.....	21
2.4	具體教具與虛擬教具的探討.....	24
三、	研究設計與方法.....	30
3.1	研究設計與架構.....	30
3.2	研究對象.....	36
3.3	研究工具.....	37
3.4	資料分析.....	47
四、	研究結果與討論.....	49
4.1	使用虛擬教具與具體教具於多項式展開與因式分解教學後對學生學習的影響.....	49
4.2	實驗組與控制組學生學習歷程分析.....	59
4.3	學生在學習單與心得及感想問卷的質化分析.....	71
五、	結論與建議.....	81
5.1	結論.....	81
5.2	建議.....	83
參考文獻	.....	85
附錄	.....	91



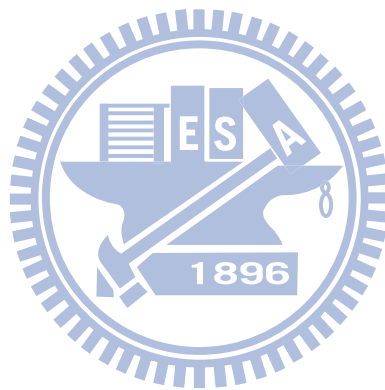
## 表 目 錄

表 2-1-1	文字符號意義分類表.....	8
表 2-1-2	代數的概念與所使用的變數.....	9
表 2-1-3	算術思維與代數思維之差異.....	12
表 2-1-4	代數活動的分類.....	14
表 2-2-1	NCTM 6-12 年級代數課程標準.....	16
表 2-3-1	國中學生之代數及數與量學習成就測驗之相關研究.....	21
表 2-4-1	使用虛擬教具部分研究結果.....	27
表 3-1-1	不等組前後測準實驗設計.....	30
表 3-1-2	實驗組與控制組教學環境比較表.....	32
表 3-1-3	虛擬教具與具體教具之異同.....	33
表 3-2-1	研究樣本人數統計表.....	36
表 3-3-1	數學動機量表考慮主成分分析之結果.....	38
表 3-3-2	給分標準示例.....	40
表 3-4-1	實驗研究假設的統計方法.....	47
表 4-1-1	兩組學生依性別在多項式展開的後測成績.....	50
表 4-1-2	不同性別與不同教學輔具在多項式展開成績之二因子共變數分析摘要表.....	50
表 4-1-3	不同性別與不同教學輔具單純主要效果考驗分析摘要表..	51
表 4-1-4	兩組學生依能力組別在多項式展開的後測成績.....	52
表 4-1-5	不同能力與不同教學輔具在多項式展開成績之二因子共變數分析摘要表.....	53
表 4-1-6	兩組學生依性別在因式分解的後測成績.....	54
表 4-1-7	不同性別與不同教學輔具在因式分解成績之二因子共變數分析摘要表.....	54
表 4-1-8	兩組學生依能力組別在因式分解的後測成績.....	56
表 4-1-9	不同能力與不同教學輔具在因式分解成績之二因子共變數分析摘要表.....	56
表 4-1-10	實驗組與控制組教學實驗前後的數學動機量表成績平均數.....	57
表 4-1-11	實驗組與控制組在數學動機的 t 考驗摘要表.....	57
表 4-3-1	學生於矩形面積學習單的作答情形.....	72
表 4-3-2	學生於拼圖大賽學習單的作答情形.....	74

## 圖 目 錄

圖 3-1-1	研究流程.....	31
圖 3-1-2	研究架構.....	32
圖 3-1-3	Algebra Tiles 介面.....	34
圖 3-1-4	Algebra Tiles 功能介紹.....	34
圖 3-1-5	學生版具體教具.....	35
圖 3-1-6	教師版具體教具.....	35
圖 3-3-1	圖形拼法算式正確.....	39
圖 3-3-2	圖形拼法正確但算式錯誤.....	40
圖 4-2-1	教師在黑板上畫兩組藍色基準線.....	59
圖 4-2-2	教師複習矩形面積及介紹多項式.....	59
圖 4-2-3	教師介紹具體教具的種類.....	60
圖 4-2-4	教師講解多項式展開範例.....	60
圖 4-2-5	學生上台展示.....	60
圖 4-2-6	教師講解問題探索.....	60
圖 4-2-7	教師複習矩形面積.....	61
圖 4-2-8	教師引導學生認識多項式.....	61
圖 4-2-9	教師介紹虛擬教具畫面.....	62
圖 4-2-10	教師講解多項式展開範例.....	62
圖 4-2-11	教師講解多項式展開算式寫法.....	63
圖 4-2-12	教師講解錯誤拼法.....	63
圖 4-2-13	學生示範畫面.....	63
圖 4-2-14	學生示範畫面.....	63
圖 4-2-15	教師講解問題探索.....	63
圖 4-2-16	$x$ 與 $y$ 大小關係成比例時的錯誤.....	64
圖 4-2-17	$x$ 與 $y$ 大小關係成比例時的錯誤.....	64
圖 4-2-18	教師講解因式分解範例.....	65
圖 4-2-19	教師講解因式分解算式的寫法.....	65
圖 4-2-20	學生上台示範.....	65
圖 4-2-21	學生上台示範.....	65
圖 4-2-22	學生拼法錯誤.....	66
圖 4-2-23	教師講解範例.....	67
圖 4-2-24	教師講解錯誤拼法.....	67
圖 4-2-25	教師講解問題探索.....	67
圖 4-2-26	學生錯誤拼法.....	68
圖 4-2-27	學生錯誤拼法.....	68
圖 4-2-28	學生拼出與課程無關的圖形.....	68

圖 4-2-29	學生自創的圖形.....	68
圖 4-2-30	控制組的桌面.....	69
圖 4-2-31	實驗組的桌面.....	69
圖 4-3-1	矩形面積單元圖形及算式皆正確.....	71
圖 4-3-2	矩形面積單元圖形正確但算式錯誤.....	72
圖 4-3-3	矩形面積單元圖形及算式皆錯誤.....	72
圖 4-3-4	拼圖大賽單元圖形及算式皆正確.....	73
圖 4-3-5	拼圖大賽單元圖形正確但算式錯誤.....	74
圖 4-3-6	拼圖大賽單元圖形及算式皆錯誤.....	74



# 一、緒論

## 1.1 研究動機

70年代至80年代初期，美國面臨國際上日漸嚴峻的競爭與挑戰，社會大眾認為相較於國際上其他國家，美國無法提供國民優質的教育，造成國民素質的落後，是競爭力消退的關鍵原因，並以此展開了一連串的教育改革。在一份名為《危機中的國家》的文件中（1983），明確的揭櫫國民應具有基本的數學能力並指出，一個完成中學教育的國民應具有幾個能力：（1）了解幾何和代數概念；（2）了解基礎的機率與統計；（3）將數學應用於日常生活中；（4）估計、近似、測量、檢驗計算的正確性。我國教育部在「九年一貫數學領域課程綱要」中提到，數學是人類最重要的資產之一，且數學能力是國民素質的一個重要指標，在進入二十一世紀且處於高度文明化的世界中，數學知識及數學能力，已經逐漸成為日常生活中及職場裡應具備的基本能力（教育部，2008）。

美國全國數學教師會（The National Council of Teachers of Mathematics，簡稱NCTM）因此建議所有的學生都要學習代數，且數學的教學應該建立在學生非正式以及先備的知識基礎上。數學家Cajorih（1895-1930）曾經說過：「要探索算術最好的方法就是研究代數」。除此之外，我國教育部於民國八十九年在《九年一貫課程暫行綱要草案》中也提到，將代數的主題向下延伸到小學階段，這與Kaput於1999年的主張相同，他主張代數的教與學應該注意以下五點：（一）從早期就可以開始，並且有部分可從學生的非正式知識中建構出來；（二）藉由數學知識的擴展與應用，可以將代數的學習與其他學科的學習加以統整；（三）經由數學知識的應用，融於不同形式的代數思考；（四）以學生固有的語言及認知能力為基礎建構知識，鼓勵學生在學習過程中進行省思及說明學習歷程；（五）鼓勵積極地學習，並將價值放在意義與理解上。依照皮亞傑的認知發展論，我國的小學數學以具體操作的算術為主，而進入國中之後，數學課程則是以形式運思期的抽象思考與邏輯推理為主，學生由原本的算術轉換到不同的思考方式，代數扮演了重要的角色。在現行的數學課程中代數扮演了重要的角色，學生從學習代數開始而進入更高層的數學知識，進而可以增加未來在教育及經濟上的發展機會。

以教育機會來看，代數可以視為進入大學教育或技職教育的重要路徑，美國教育部研究指出：修習並通過代數 2 的學生，獲得大學學歷的比例為其他高中畢業生之 4.15 倍 (Adelman, 1998)，所有的學生都需要在中學階段就學習並了解代數的概念，以便獲得其他領域更完整、更有意義的數學能力。然而對許多學生言，從算術轉換到代數的過程中，學習變數的概念及變數間的運算是有困難的。其中多項式展開及因式分解為中學代數學習之起點，亦為算術思維轉換為代數思維的過渡。

國外有許多研究結果顯示，在數學課堂中使用教具來輔助教學可以提升學生對數學的理解 (Raphael & Wahlstrom, 1989; Sowell, 1989)。因此，藉由教具的使用可以改善學生在數學領域上的學習困難。例如：Algebra Tiles 可以表現出二項式的乘法，學生可以將矩形面積等於長乘以寬的形式連結到二項式的乘法上 (Goins, 2001)。像這樣以簡單的幾何圖形來表現抽象的數學概念，可以有助學生了解並學習數學。美國全國數學教師會 (NCTM) 於 2000 年出版的《學校數學的原則與標準》(Principles and Standards for School Mathematics) 中有提到，科技已成為學校數學教育六大主要原則之一，而且強調科技在數學的教與學當中是必要的，它影響學生所學以及可提升學生學習。隨著科技的日新月異，美國全國數學教師會 (NCTM) 以及美國國家科學基金會 (National Science Foundation, 簡稱 NSF) 開發了許多虛擬教具 (Virtual Manipulatives)。這類型的教具是利用電腦模擬具體教具的樣子，讓老師以及學生可以透過滑鼠及鍵盤等電腦周邊設備來進行操作 (王智弘, 2006)。

雖然學生都了解數學的重要性，但有不少的學生對於數學這門科目總是抱持著畏懼的心態，尤其是進入到國中階段之後，這種情況更是嚴重。在國內已經有許多的教師運用電腦來實施教學活動，不再只是單純的以黑板或是利用現有的具體教具來教學。故如何利用虛擬教具，提升學習者學習代數之成效是本研究想要了解的。針對不同能力的學生使用虛擬教具與具體教具於數學課堂中的影響，有研究顯示虛擬教具對高分組效果較好 (張玉琪, 2009)；而亦有研究呈現使用虛擬教具的學生，低分組的學生比高分組的學生產生較大的進步空間 (王智弘, 2006)。因此，本研究亦針對數學能力高、中、低三組的學生，在不同的教學環境中學習多項式展開與因式分解單元是否有所差異。除此之外，男女生數學成就的差異也有許多人做過相關的研究 (黃幸美, 1996; 黃國清, 2008)，其結論都不盡相同，針對目前國中一年

級的學生來說，學習多項式展開與因式分解是否會存在著性別的差異亦是本研究想要了解的目的之一。

## 1.2 研究目的

本研究的主要目的是利用國家虛擬教具圖書館（National Library of Virtual Manipulatives，簡稱 NLVM）的 Algebra Tiles 教具做為教學輔具，設計多項式展開與因式分解教學活動，並比較操作虛擬教具與操作具體教具對學生學習多項式展開概念與因式分解概念之成效。綜合上述，茲將本研究目的分為下列三點：

1. 探討使用虛擬教具與具體教具的教學環境，對於學生學習多項式展開概念之影響。
2. 探討使用虛擬教具與具體教具的教學環境，對於學生學習因式分解概念之影響。
3. 比較使用虛擬教具與具體教具為教學輔具，對於學生學習數學動機之影響。



## 1.3 研究問題

根據上述的研究目的，提出下列五個研究問題。

1. 不同性別與使用不同的教學輔具，對學生學習多項式展開概念是否有顯著的交互作用？
2. 不同能力程度與不同的教學輔具，對學生學習多項式展開概念是否有顯著的交互作用？
3. 不同性別與使用不同的教學輔具，對學生學習數學因式分解概念是否有顯著的交互作用？
4. 不同能力程度與不同的教學輔具，對學生學習數學因式分解概念是否有顯著的交互作用？
5. 使用虛擬教具與具體教具為教學輔具，對學生學習數學動機的提升是否有顯著的差異？

## 1.4 名詞釋義

### 1.4.1 具體教具 (Physical Manipulatives)

具體教具是實際的物件，使用者可以實際看得到也摸得到，學生可以藉由操作具體教具來幫助抽象概念的建立。例如：七巧板。

### 1.4.2 虛擬教具 (Virtual Manipulatives)

在電腦上模擬出具體教具的形體，並進而透過滑鼠來操作與互動，稱之為虛擬教具。經由這樣的技術所產生的數位化影像，能幫助學生對於數學抽象概念的理解。許多具體教具需要較大的空間來讓學生實際操作，虛擬教具模擬了具體教具的形狀，讓學生透過電腦的模擬來操作物件，甚至可提供即時性的回饋。例如：萬用揭示板。

### 1.4.3 數學動機

本研究所指的數學動機是指學習數學的信心以及數學探究的動機兩個主題合併成。在學習數學的信心部分是指受試者對於自己數學表現與學習數學的信心程度。如：我認為我可以處理更難的數學。在數學探究的動機部分是指受試者對數學的探索與尋求挑戰的行為。如：當我遇到不能立即解答的數學題目時，在課後我會繼續想它。而本研究將使用包含以上兩個主題的數學動機量表來檢測學生的數學動機，分數愈高代表對數學的動機愈佳，反之則愈差。

### 1.4.4 能力程度

本研究所定義的能力程度是指依研究對象 56 位學生，依照前一學期三次數學定期平均來分為高分組、中分組及低分組，每組的人數大約占三分之一的研究對象人數。高分組的成績為平均 65 分以上的學生；中分組的成績為平均 40 分以上而未滿 65 分的學生；低分組為平均未滿 40 分的學生。

### 1.4.5 代數磚 (Algebra Tiles)

代數磚是一種數學教具，此種教具多由不同顏色的卡片製作而成，不同顏色代表不同的面積，這類型的教具是藉由幾何圖形的表現來幫助學生了解代數的思維及代數的概念。例如：多項式的運算、因式分解。在本研究中的

實驗組所使用的是 NLVM 虛擬教具的代數磚，而控制組所使用的是研究者自行製作之具體教具的代數磚。

## 1.5 研究限制

本研究之研究對象為研究者任教學校的國一學生，且研究者教學實驗的時間為寒假輔導課的時間，且學生於後測時，實驗組有以虛擬教具為輔助作答，而控制組則是以具體教具為輔助作答。故研究結果只能推論至相當程度的學生及情境，不宜過度推論研究結果。





## 二、 文獻探討

本章分為四節探討本研究的相關文獻，做為研究的理論基礎，並藉以建立本研究的架構。第一節是代數思維的發展與教學設計，第二節是多項式展開與因式分解的數學內涵，第三節是數學學習成就的性別差異；第四節是具體教具 (physical manipulatives) 與虛擬教具 (virtual manipulateves) 的探討。

### 2.1 代數思維的發展與教學設計

在學習過程中，如何提升學習者的代數學習成效，一直是個令人注目的問題，其受到注目的原因有二：一是代數的重要性；另一則是代數學習的困難。經過長期的研究，關於代數概念的學習，也由傳統的如何操弄文字符號、掌握等號結構，擴展到如何形成一種結構性、抽象性的思維方式，並以此解決問題，即代數思維的形成。而代數學習的方式亦從單一的文字符號表徵，擴展至多重表徵的學習方式 (Kieran, 1996)。而具體教具及虛擬教具便扮演提供多重表徵重要的角色，利用不同的表徵方式，讓學習者在學習的過程中，獲得意義上的連結，達到有意義的學習。

#### 2.1.1 代數思維的演進

早期研究認為，數學的學習和學習者的認知發展有關。依照皮亞傑的認知發展論，我國的小學數學以具體操作的算術為主，而進入國中之後，數學課程則是以形式運思期的抽象思考與邏輯推理為主，學生由原本的算術轉換到不同的思考方式，代數扮演了重要的角色。Kuchemann (1978) 在 CSMS 計畫中，對 13-15 歲學生施測，將學生對於文字符號的解釋方式，分成四個層次如下：

層次一：此層次的學生能處理純數值的問題，也可處理能藉由將文字符號當作物件、文字符號的求值、忽略文字符號等方法可求得答案的簡單結構之問題。

層次二：此層次的學生雖然仍在將有文字符號的求值、將文字符號當作物件的階段，但所能處理之問題的複雜度高於層次一，在某些

部分也能正確使用代數結構的句法。

層次三：此層次的學生在結構簡單的問題中，能將文字符號視為特定的未知數、一般數、變數。

層次四：此層次的學生能在結構較為複雜的問題中，將文字符號視為特定的未知數、一般數、變數。

而其研究結果顯示，15 歲學生中能達到層次三的僅有 40%，能達到層次四的更僅有 9%。國內林光賢、林福來和郭汾派（1989）之研究，其參考 Kuchemann 之測驗，將國中生對於文字符號的理解分成四個層次，也得到和 Kuchemann 類似之研究結果，有 43% 的國三學生達到層次三，僅 12% 的學生達到層次四。這種由低至高的認知層次概念，和皮亞傑的認知層次，恰是互相對應的，這代表：代數的學習是一個認知發展的問題（袁媛，1993），應以認知發展的方式解決，另一則點出代數學習的困難，僅有少部分人達到了較高的理解層次。

數學是一個藉由抽象化的文字符號描述、簡化現象的過程。而代數的學習，則視為一種語言的學習。學習者對於文字符號應有特定的解釋和分類，Philipp（1992）將英文字母在數學上分成標記、常數、未知數、一般數、變量、參數、抽象符號七種不同的用法，而 Kuchemann（1978）在 CSMS 計畫中，對 13-15 歲學生施測，將學生關於文字符號的解釋分為六類，如表 2-1-1。文字符號的意義對於達到較高層次的學習者而言，依照不同的情境，可以有不同的解釋，例如：將文字視為一般化的數字或是將文字當作變數。而較低層次的學習者，而多半局限在文字為可算出的值或文字符號可忽略不用的二種解釋。這也代表學習者不同的思維模式，會影響學習者代數學習的表現。

表 2-1-1 文字符號意義分類表

文字符號的分類	意義	例子
文字符號為可算出的值	文字符號是一個被設定的數，藉由嘗試錯誤或是具體運算的方式，可以直接求出文字符號所代表的數值。	$n+5=8$ 中的 $n$
文字符號可忽略而不用	文字符號出現在題目 中，但在解題的過程中可以放在一旁不用考慮。	若 $x+y=23$ 求 $x+y+5=?$
文字符號當作物件	將文字符號當作是一個物件，用來代表某一物的名稱或是縮寫。	以 $a$ 表示某一個多邊形的一邊
文字符號當作特定的未知數	不要求出文字符號的值，可以直接加以運算。	一多邊形有 $n$ 個邊，每邊邊長是 2，周長是多少？
文字符號當作一般化的數字	文字符號可代表超過一個以上的數值，而非單一數值。	$a+b=10$ ，且 $a>b$ ， $a$ 是代表大於 5 的數
文字符號當作變數	當文字符號的數值有規律的改變時，能瞭解它們之間存在的關係。	設 $a=b+3$ ，當 $b$ 增加 2 時， $a$ 會增加或是減少多少？

文字符號在代數運算中，常因不同情境代表許多不同的意義。學生初接觸代數，對代數中的文字符號與英文字母、合成運算、運算符號及運算規則常無感覺（戴文賓、邱守榕，2000），無法正確描述文字符號的意義，便會造成代數學習的困難。綜合此階段的研究，除了了解代數學習和認知發展的關係外，亦可以發現這些研究皆以“數學是一種語言”、“代數為文字符號的理解和操弄”的觀點出發。

隨著時代的發展，我們發現對於文字符號的了解，仍無法解決學習代數

所遇到的困難，對學習者而言，傳統的代數學習仍僅是一連串符號操作的記憶過程，解特定且和生活無關的問題，充滿了挫折和排斥（Kaput, 1999）。而 Kieran (1996) 認為分析數量之間的關係，注意結構、學習的變化、概括、解決問題、建模、辯解、證明和預測。不使用任何文字表徵的代數活動，亦可促進代數的學習。對於代數的關注亦由文字符號，逐漸轉換至算術與代數思維。

Kieran (1996) 曾表示，代數與算術具有思維結構上的差異，而由算術思維過渡至代數思維，必需經過思維結構的轉化。單以練習或經驗的累積固然可以使算術思維結構獲得加強，卻不代表可以轉化為代數思維。在算術與代數的教學中，應有不同的教學內容及策略，才能有效提升代數學習的成效。目前雖然許多研究都認同代數思維的概念，但對於代數思維的內涵卻是具有許多差異。

Usiskin (1988) 認為代數思維牽涉四個概念：算術的一般化、解特定問題的過程、數量關係的探索和結構的探索，而不同的代數概念中，變數的運用、角色亦有所不同，如表 2-1-2。

表 2-1-2 代數的概念與所使用的變數

代數的概念	變數的運用
算術的一般化	樣式的歸納者
解決特定問題的過程	未知數、條件限制
數量關係的探索	辯證、參數
結構的探索	文章的任意標記

1. 算術的一般化乃利用文字符號，描述計算過程中一般化的規則，而此類符號，稱之一般數，此處將符號視為描述規則的一種數學語言，例如： $3+5.7=5.7+3$  左右兩式相等的性質，是屬於交換律的規則，則可用  $a+b=b+a$  描述。
2. 解特定問題的過程，則將符號視同未知數，應用於等價式的替換，當作簡化或解題的過程，此時的文字符號，仍是數字意義的延伸，未知數代表著一個尚不知道的確定數，經過運算後，可以得知確定的數值。例如：方程式求解，即是解特定問題的過程。
3. 數量關係的探索，為探討數與數之間的關係。例： $x$  漸大時， $1/x$  會

有什麼變化，此時的文字符號無法以運算解出一個特定解，相較於算術思維，思維重心已不是單純的答案，而是數與數之間的關係。

4. 結構的探索，則是更進一步的抽象化，文字符號在此以一個未知的數代表並不適切，若以物件的概念描述，可將結構的探索視為物件與物件間的結構操弄與變化，以多項式展開或因式分解為例，展開的學習或分解的過程，思維的重心為因式與倍式不同結構間的轉換。

在算術思維中，文字符號大多代表可算出的值或可忽略不同的文字符號，而算術思維及代數思維的區別，除了在變數的意義有所不同外，在思維結構或解題歷程亦有所差異。算術思維在解題過程中，運算本身為一個程序性的過程，亦是一個連續、線性的思考歷程，而代數運算則是著重於操弄物件，是一個結構化的過程，具有正規的解法和作法，思考脫離了問題本身的情境。算術思維及代數思維的具體比較，可由下列例題表示：

例題：小明有 24 元，買了 5 枝相同的鉛筆後，還剩 4 元。問每枝鉛筆多少錢？

$24-4=20$  ……………(1) (還剩 4 元，表示花掉了 24-4 元，也就是 5 枝筆的價格為 20 元)

$20/5=4$  ……………(2) (5 枝筆的價格為 20 元，因此每枝筆為 20 除以 5，也就是 4 元)

其中式子(2)學生也可能採用這樣的方式：

$20=5*4$   
或 ……………(3) (5 枝筆的價格為 20 元，又因為  $5*4$  為 20，  
 $5*4=20$  所以每枝筆是 4 元)

(1)(2)(3)式可視為運用算術思維，其中(1)(2)是逆向思考，(3)是數的合成分解

設每枝鉛筆的價格為  $x$  元：

$24-5x=4$  ……………(4) 再利用等量公理或移項法則求  $x$  值

(4)式則可視為利用代數思維。

從上述示例說明可以發現，算術思維表現在運算中。運算本身就是含有情境的思考過程紀錄。不同的運算方式，代表著不同的思考方式。運算式的先後則代表推演的程序，運算過程常具有特殊性，即解法常因情境而無固定的形式。而代數思維在解題過程中，分成轉譯問題、形式運算，即列式及求解兩部分。轉譯問題著重的是問題中的數量關係，形式運算則是一個去情境、抽象化且不針對原問題的運算過程。代數解法藉由：引入未知數符號，以代數方程式表示，利用符號運算求得具普遍性的解（謝佳叡，2004）。

以概念發展的角度來看代數思維的建立需要經過三個階段，內化、壓縮、物化，內化是指藉由過程的熟悉得到新概念；壓縮是指認知上一長串的壓縮成一個較易處理的單元，類似認知過程的自動化；而物化則是指概念已被視為一個整體或物件，為結構的一部分，可以通盤考量及操作，為另一個概念內化過程的開端，而概念的形成就如此螺旋循環而上（Sfard, 1991）。故代數思維亦是結構、程序的性質兼具。

算術思維與代數思維可由數種見解綜合成下表 2-1-3（劉家樟，2005）：



表 2-1-3 算術思維與代數思維之差異

	算術思維	代數思維
思維重心	算術思維著重於利用數量的計算求出答案的過程，這過程是程序性的、含情境的、具有特殊性的、計算性的。	代數思維倚重的是關係的符號化及其運算，這個運算是結構性的、去情境的、具有一般性的、形式化的。
數量關係	探討常數之間的關係。	探討變數之間的關係。
運算的重點	算術活動的重點在找出一個特定的數字代表最後的答案；即答案是一個數字。	代數活動的重點在了解運算步驟的理由及關係；答案是以包含文字符號及數字簡化之後的形式來表示。
運算式的功用	運算式的功用是一種思考的紀錄，是直接聯接題目與答案的橋樑。	運算式的功用，不再直接聯結問題與答案之間的過程紀錄，也充當一個問題轉譯的角色。
解題思維與歷程	算術思維的解題是結構性的思考型態，運算過程是程序性的。	代數思維的解題是程序性的思考型態，運算過程是結構性的。
解題策略	1、通常先計算出答案，再描述 2、直接由已知數算出未知數。	1、先描述再計算。 2、間接由未知數出發，經由已知數、方程式來解出答案。
解題特性	算術的解法常無固定的形式。	代數的解法則強調正規的形式。

資料來源：小六學生解題表現與國小教師對學生解文字題信念之差異（頁 27），劉家樟，民 94，中原大學教育研究所碩士論文，中壢市。

當思維方式由算術思維轉變至代數思維，代表：一、改變解題思維的動向；二、讓解法跳脫題目所給的情境與數字，而聚焦一般性的解題方法；三、能保留對運算的程序或結構；四、擴展了運算的客體範疇（謝佳叡，2004）。故代數的學習可以大大的增強學生的解題技能，代數的學習在數學領域中是非常豐富的，然而代數和算術階段的學習卻具有相當大的差異。算術階段只學習數字，而學習代數除了具有新符號的運算，還有方程式、公式、函數、參數等新概念，要學生學會分辨、理解、應用這些新的數學物件是比較困難的。但學校經常在學生還沒掌握到符號的意義時，便進行抽象符號的操弄，由於缺少具體情境的連結，因此造成學生無法有效地由算術轉型到代數思維（李美蓮、劉祥通，2003）。

Kieran (1989, 1992) 認為學生代數學習的困難，主要可分為三個部分(1) 文字符號的意義；(2) 由算術結構到代數結構的轉移；(3) 結構的辨識和使用。文字符號的理解和代數學習成就有關，在初學代數時，對於代數符號直觀的假定、將日常生活或其他課程所學到的文字符號代入、新課程學習過程的干擾、不當的教學引導，都會造成文字符號學習上的困難 (MacGregor, 1997)，文字符號的理解雖無法立即改善代數學習的成就表現，不了解符號意義卻會導致更多的學習障礙 (楊中宜，2006)。而許多學生無法正確的分辨、理解不同文字符號的角色 (Phillip, 1992)。

結構轉移造成的問題則是源自於算術與代數思維及解題歷程上的差異，算術運算的重點在於解出一個數字作為答案，而代數運算則在於了解運算間的關係。故等號在算術中代表的是結果，而代數卻是代表等價的關係。代數的初學者常將其在算術上的運算法則及概念延續至代數的學習。造成等號錯誤，或過度化簡直至出現特定數字的問題。而解題的過程，算術是一個線性、連貫的過程，但並沒有固定、正式的解法。而代數卻強調先描述問題，找出數與數彼此的關係。再以正式的解法操作、求解。故學生在學習算術時的舊經驗是影響代數學習的重要因素。

此外代數運算中，充滿了大量結構性且複雜的文字符號及規則，例：交換律、分配律、未知數乘法、代數式的化簡、未知數合併運算，何時選擇正確的運算規則，亦會影響代數運算的結果，結構的辨識與使用也是造成學習代數困難的因素。為減少初學代數者的學習困難、增加學習成效，以多重表徵的方式提供代數教學一個新的方式 (Kieran & Yerushalmy, 2004)，許多的研究亦支持教具有建立數學理解的效果，而教材以多重表徵方式呈現時，學



習者更容易理解 (Picciotto, 1993)。

在教學內容上，應該一、專注於關係，而不僅僅於計算數值上的答案；二、專注於操作、反向操作及其相關的概念，例如：執行與復原；三、專注於問題的描述和解決，而不僅僅解題；四、同時專注數字與文字符號，而非單獨於數字。這包括了：使用可能作為未知數、變數、參數的文字符號；允許學生非封閉、非正規的表達回應；比較性質上的等價；五、重覆注意等號的意義 (Kieran, 2004)。

並以提出代數活動的概念作為學習代數的方式，並替學校教學中眾多的代數活動提供了一個框架和模式。代數活動在此分為三類 (Kieran, 1996, 2004)，如表 2-1-4：

表 2-1-4 代數活動的分類

<p>一般化活動 Generational activity</p>	<p>包含了建立代數的表示和方程式的活動。在此專注於情境、性質、模式、關係的表徵和解釋。很多有意義的代數學習都發生在這個階段。</p>
<p>遷移活動 Transformational activity</p>	<p>這包括了”以規則為基礎”的代數活動，例如：化簡、展開、相加、相減、多項式表示、解方程式、等價式的替換等。關鍵則在於讓代數的表示和一般化的活動相連結。</p>
<p>世界/元活動 Global/meta-level activity</p>	<p>在這種活動中，代數被作為一種工具、但卻不純粹為代數活動，包含問題解決、建模、注意結構、研究變化、一般化、分析關係、修正、証明、預測等。這也是代數學習最重要的目的。</p>

此種分類的特色在於跳脫早期階層式的分類，擴大了代數學習的範圍也兼顧了初級代數學習和高級代數學習不同的學習目標。在一般化的活動中，重點在於思維的建立，及賦予學習意義，大部分的代數活動，尤其是初級代數的活動都屬於此類，而多樣的教材、教具亦多應用於此。而高級代數的學習多將代數視為解決問題的工具。這個模型隱含的基本假定為：推理的思考透過圖像、表格與符號等多重表徵，有助於代數思維的形成 (陳嘉皇, 2007)，我們亦可反推假定多重表徵的教具對於已具有代數思維，而著重於複雜文字操弄的代數學習，成效較不顯著。簡而言之，多重表徵之代數學習對於初學

者或低學習成效影響較大，對於高級代數的學習成效影響較小。

以解題歷程來看，如何轉譯問題，並尋找一般化的規則，亦是代數思維和算術思維的重要差異，文字表徵的了解、練習與經驗的累積，是無法造成思維結構上的改變。一些益智類的學習活動，例如：魔方陣則被認為有助於初期代數思維的培養（Gardiner, 2003）。魔方陣本身是一個方形的矩陣，而每行、每列及對角線總合必需為定值。在解題的過程中，學習者可以使用試誤法作為解題的技巧，而試誤法為一種結構性的思考型態，屬於算術思維。但在反覆的操作、累積而後觀察，讓學習者發現隱含於魔方陣中的等差數列。其中觀察、尋求規則的過程，即是代數思維的轉譯問題，而利用文字符號描述等差數列，則是一般化的概念。在這個活動中學習者可以發現，算術思維在面對魔方陣等學習活動時，無法順利解題，而代數思維的解題過程，則可大幅的簡化問題，並形成一般化的解答廣泛推廣至不同的情境，亦可提高學習者學習代數的動機。由以上可知，代數思維的建立可以不依賴文字表徵的描述，且減少學習者因文字符號的困難，造成代數學習的困境。



## 2.2 多項式展開與因式分解的數學內涵

從各國關於初等代數的課程標準看來，便可發現：多項式展開與因式分解蘊含了許多的數學概念在其中。NCTM 關於數學學習分為四個要項：(1) 了解樣式、關係及函數；(2) 使用數學符號陳述用途及分析數學情境及結構；(3) 使用數學模式陳述及了解量化關係；(4) 在多種情境脈絡下分析改變。若分析 6-8 及 9-12 代數的課程目標，如表 2-2-1。對於多項式的學習目標是了解其性質，因為多項式與因式分解是一個綜合性的概念，開始加入文字符號的抽象運算規則，跳脫早期文字符號為一個未知數的概念，若多項式及因式分解的概念不了解，會造成爾後代數學習的困難。

表 2-2-1 NCTM 6-12 年級代數課程標準

教學目標	6-12 年級學生代數能力指標
了解樣式、關係及函數	<ul style="list-style-type: none"><li>• 以圖表、文字或是必要時以符號法則陳述、分析及歸納多種樣式的規則。</li><li>• 能關聯、比較不同形式的關係表徵。</li><li>• 能從圖表、方程式的性質對照、辨認線性及非線性函數。</li><li>• 利用明確、反覆定義的函數產生樣式。</li><li>• 了解函數與關係，用不同的方式陳述並可彈性的轉換。</li><li>• 藉由觀察變化程度、截距、原點、漸近線、局部或全體的特性、分析一個變數的函數。</li><li>• 理解並操作函數的算術合併、繪圖、逆推等轉換。並利用技術以較複雜的代數表示。</li><li>• 了解、比較使用函數如：指數、多項式、分數、對數和周期性函數的性質。</li><li>• 描述兩個變數的函數。</li></ul>

(接下頁)

表 2-2-1 (續 1)

使用數學符號陳述及分析數學情境及結構	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 發展對於變項不同用途的初始概念理解。</li> <li>• 推展符號表徵及圖形線段間的關係，尤其是截距和斜率。</li> <li>• 使用代數表示情境及解題，尤其是包含線性關係的問題。</li> <li>• 辨認、一般化簡單代數表示的等價形式，並解線型方程式。</li> <li>• 理解代數式、方程式、不等式和關係式…等，等價形式之意義。</li> <li>• 寫下等式、不等式、聯立方程式的等價式，並流利的解出(以心算、紙筆運算解簡單問題，運用科技解大部分問題)。</li> <li>• 利用代數符號描述、解釋數學關係。</li> <li>• 利用包括遞迴式、參數式等多種代數表徵、表示函數及關係。</li> <li>• 判斷代數操作結果(含利用科技獲得的結果)的意義、實用性及合理性。</li> </ul>
使用數學模式陳述及了解量化關係	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 使用圖表、方程式等不同表徵，歸納與解決情境問題。</li> <li>• 辨別情境中必要的量化關係，決定可模組化關係的函數類別。</li> <li>• 利用符號表示(包括反覆及遞迴的形式)，表示多變脈絡中的關係。</li> <li>• 從模組化的情境中獲得合理的結論。</li> </ul>
在多種情境脈絡下分析改變	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 利用圖形分析自然中線型關係的變化。</li> <li>• 從圖形或數據中估計並描述變化程度。</li> </ul>

### 2.2.1 多項式展開的數學內涵

代數經由長時間的發展，產生了許多領域，經由文字符號的表現，讓加、減、乘、除等運算規則，擴展到符號的範圍。一般而言，多項式可以下列形式表示： $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ，然  $x$  在代數運算中可以視為函數關係，亦可視為未知數，具有多重的意涵，故須對多項式先做完整的定義與了解。

國立編譯館九十年八月再版二刷，國中數學教科書第三冊及康軒九十七年九月第三版國中數學教科書第三冊對多項式的定義為：

由數和文字符號  $x$  進行加法和乘法運算所構成的式子，稱為  $x$  的多項式。

參考康軒數學教學手冊，關於乘法公式、多項式的教學目標，乃透過面積的具體表徵，以文字符號表示正方形與長方形面積。在多項式乘法中，康軒版教科書是以單項式乘法出發，其單項式運算是這樣敘述的：單項式連乘的時候，是將係數與文字分開相乘，然後把係數乘積寫在文字符號前面。而多項式運算則可分直式運算、分離係數法及橫式運算，直式運算的模式較類似國小算術乘法的過程如下：

$$\begin{array}{r}
 \times) \quad \begin{array}{l} \overset{(4)}{\curvearrowright} \begin{array}{l} x+2 \\ \hline x+3 \end{array} \overset{(1)}{\curvearrowleft} \\ \hline \end{array} \\
 \quad \quad \quad 3x+6 \\
 \quad \quad \quad \underline{x^2+2x} \\
 \quad \quad \quad x^2+5x+6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 (1) 3 \times 2 = 6 \\
 (2) 3 \times x = 3x \\
 (3) x \times 2 = 2x \\
 (4) x \times x = x^2
 \end{array}
 \end{array}$$

其中不同幕次的項式可對應至算術中不同位數的概念，而  $x$  相乘則表示成指數的形態，而橫式運算則以分配律作為運算規則。

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \overset{(1)}{\curvearrowleft} \quad \overset{(2)}{\curvearrowright} \\ \hline \end{array} \\
 (x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6 \\
 \begin{array}{c} \overset{(3)}{\curvearrowright} \quad \overset{(4)}{\curvearrowleft} \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccc}
 (1) & (2) & (3) & (4)
 \end{array}$$

在此可以發現，在敘述過程中，多項式運算規則的描述，少有意義的描述，亦少有代數與早期算術運算的連結，卻多援用算術運算的方法，故學習者多易將早期算術運算的概念，帶入代數運算中 (Van Amerom, 2003)，常只知道計算方法卻不知道理由，變成機械式而非理解式的學習 (謝宜玲, 2002)。常見的文字符號的錯誤類型有：(1) 代數符號具有序列性，例  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ， $a$  是排在  $b$ 、 $c$  之前的數；(2) 代數符號代表特定數；(3) 代數符號與過去相似錯誤的連結；(4) 賦予代數符號特定數值 (楊中宜, 2006)，而戴文賓、邱守榕 (2000) 亦歸納學習代數常見的錯誤有：(1) 缺乏對代數式簡記的認識，例如： $3x=3+x$ ；(2) 缺乏對「同類項」的瞭解，例如： $3x+4+5x+3=8x+4+3$ ；(3) 括號的去留問題；(4) 運算符號、性質符號與等號，例如：不允許運算結果還有運算符號的存在，故會繼續化簡至運算符

號消失為止。此外對於文字符號概念的發展，亦發現學生無法聯結代數表徵及圖形表徵。表現在多項式展開與因式分解形成幾個錯誤：一、未知數  $x$  和係數是分開的兩個數。二、同類項之錯誤，例： $3 \times x = 3x$ 、 $x \times 2 = x2$ ，兩者是否為同類項，是否合併？三、指數的形式困難，指數運算對於學習者亦是學習上的困難，若學習者過度化簡指數運算的內涵，單代表  $x$  的次數，則易發生  $xy$ 、 $yx$  及  $x^2y$ 、 $xy^2$  是否等價的問題。四、運算過程的講述仍是程序性的過程，等號仍代表操作，不代表關係。五、多項式展開本身屬於結構上的操弄，本質為兩個等價式的替換，文字表示無法表現兩者等價之數學意涵。因此，代數的學習困難常受限於早期經驗、文字符號的理解及規則的掌握，造成無法了解數學意涵，流於零碎及缺乏意義的學習。

### 2.2.2 因式分解的數學內涵

歸納各版本數學教科書對因式分解的定義為：將一個  $x$  的二次式寫成兩個一次式的乘積，叫作二次式的因式分解。故因式分解與乘積展開互成正反。而解題方式可分為下列幾種：提出公因式、分組分解、利用乘法公式做因式分解與利用十字交乘法做因式分解。

#### 1. 提出公因式：

$$3ax^2 - 6ax$$

其公因式為  $3ax$  提出後得到

$$3ax^2 - 6ax = 3ax(x - 2)$$

#### 2. 分組分解

$$x^2 - 3x - bx + 3b$$

上式可以發現並沒有公因式可提取，故採用分組分解的方式其方式如下：

(1) 將原式的項作適當分組。

(2) 分別提出每一組的公因式。

(3) 將經過處理後的每一組當作一項，再將各項提出公因式。

$$x^2 - 3x - bx + 3b = (x^2 - 3x) - (bx - 3b) = x(x - 3) - b(x - 3) = (x - 3)(x - b)$$

### 3. 利用乘法公式

$$36 - 25x^2 = 6^2 - (5x)^2 = (6 + 5x)(6 - 5x)$$

便是利用平方差公式作為因式分解

### 4. 十字交乘法

此時考慮  $x^2$  項及常數項的係數

$$21 = 1 \times 21 = 3 \times 7$$

$$-22 = 1 \times (-22) = 2 \times (-11) = (-2) \times 11$$

$$\text{經嘗試可得 } 21x^2 - 31x - 22 = (x - 2)(21x + 11) \quad (\text{薛圳宏, 2002})$$

在此可以發現，因式分解的動作，大量仰賴多項式展開的概念與了解。運算過程是一個逆向的過程，故思維結構和多項式展開迥異。故在因式分解方面的學習困難，常發生在：一、多項式乘法理解不足或有錯誤概念。二、思維結構上的困難。表現在解題上，可以發現學習者無意義的作答或是空白。

綜合上述，多項式展開與因式分解依分類而言，都是屬於結構的探索與操弄，其中牽扯的概念很多，有括號去留的問題、對同類項是否了解？運算符號、等號的認知及分配律等代數規則的運用。這些概念都會造成學習上的困難。其中因式分解在數學上是多項式展開的反向操作，在思維結構上更是困難。

### 2.3 數學學習成就的性別差異

在數學學習中，不同性別是否造成學習上的差異？一直是個令人注目的問題，但兩者的關連還受許多其他因素的影響。在文獻中可以發現，常因施測時空的不同，造成結果的差異，部分相關研究整理如表 2-3-1。

表 2-3-1 國中學生之代數及數與量學習成就測驗之相關研究

研究者	年份	研究對象	研究結果
Man,Wang & Magone	1977	七年級	比率題對男生較有利
Fennenma & Sherman	1978	中學時期	1、女生在計算方面比男生有較高之成功率。 2、男生在解決情境敘述之文字題的成功率則高於女生。
Linn & Hyde	1989	七年級	女生在數學成就上優於男生
Becker	1990	七到九年級	男生在代數是上表現較佳，算術題的表現並無差異。
Forst, Hyde & Fennema	1994	中學時期	1、數學整體表現及在計算能力上女生稍優於男生。 2、在問題解決上女生稍佔優勢。
黃財尉、李信宏	1999	七年級	1、分數運算對女生較有利，整數加減對男生較有利。 2、計算題及應用題並未產生顯著的性別 DIF 結果。
陳慧珍	2000	七年級	1、在傳統式代數文字題的解題能力沒有顯著差異。 2、有在引導式代數文字題的解題能力，男優於發。
林詠娟	2003	七年級	在分數診斷測驗的表現上沒有顯著差異。

(接下頁)



表 2-3-1 (續 1)

黃有義	2004	八年級	不同性別的學生在代數越級學習成就上並無顯著差異
張靖宜	2005	八年級	在以代數、比例與計算為內容之測驗，性別無顯著差異。
陳亮君	2005	七年級	在以 pattern(數與量之連結)為內容之測驗，性別無顯著差異。
蔡逸勝	2006	七年級	在以數型與規律(數與量之連結)為內容之測驗，實驗前之測驗結果，性別無顯著差異。
曾建銘	2006	七年級	男生與女生在成就測驗上的表現有顯著差異，達.01 顯著水準，研究顯示女生之表現優於男生。

資料來源：“數學學習成就之性別差異研究—以九年一貫課程七年級數學綱要為例”，黃國清，民 97，*中等教育*，59 (4)，46。

綜合研究發現，在數學學業表現上，高中階段前的性別差異不大，甚至在某些領域女生的表現較優（簡茂發，1994；吳明隆，1999）。例如：女生在算術、初級代數較男生稍有優勢，而男生在具有情境、引導內容的解題有較好的表現。

一般來說，有幾個因素會造成性別表現上的差異：一、生物因素：包括智力分布不同、認知風格不同、性格差異。二、社會因素：自我期許、刻板印象威脅、社會期望差異。男女智力在整體上並無明顯差異，但在特定幾個分項可以發現男女的智力表現是不同的，多數的女生語文測驗上表現稍佳，而在數學和空間視覺方面則為男生表現較佳，智力商數上沒有明顯差異，兩性間在智力上縱有差異存在，也只是質的問題，而非量的問題（張春興，1994），數學方面，女生則在數字計算技能、分數演算、符號關係的分析及新觀念的衍生較佔優勢，男生則在數學推理與空間視覺問題解決（黃幸美，1995），男女的認知風格亦有所不同：一、男生傾向從內容中獲得資訊而女生著重於內容、情境本身。二、道德推理或其他問題解決時，男生傾向在規則的基礎上作分析，而女生則傾向整體式的方式並重視同理。三、男生傾向於急躁且願意冒險，而女生傾向小心、細膩。四、男生常將成功歸功於

己、失敗歸究於人，而女生則相反，且失敗的歸因常影響後續的表現。五、男生的互動包含對話充滿競爭，而女生傾向於合作的方式，對話則常因參照不同的發言人而決定 (Murphy & Gipps, 1996)。而刻板印象威脅是性別差異的社會化原因，刻板印象指對團體成員典型特性所抱持的信念，在性別上就是男女有別的知覺。刻板印象不一定完全正確，卻常普遍存在於團體中 (陳皎眉、孫旻暉，2006)，其具有五個特性：一、刻板印象威脅不僅限於心理學中被歧視的團體而是普遍性的威脅。二、刻板印象威脅的發生機制在於與刻板印象有關的情境。三、刻板印象威脅的類型及強度依不同情境而改變。四、個體不需認同、擔憂刻板印象，仍受促發的刻板印象威脅影響。五、即便個體努力克服，仍受刻板印象威脅影響 (Steele, 1997)。依趨勢來說，性別差異和學習成就在某些部分是有關連的：一、隨時代演進男性數學成就優勢漸弱女性數學成就優勢漸增。二、年級增長，女生數學優勢漸減而男生漸增。三、國二女生在初級代數的表現較男性稍佳。四、性別差異在高學習成就的現象，較低學習成就明顯。五、男性在數學成就的分佈較為兩極化 (盧雪梅、毛國楠，2008)。

而許多研究亦顯示女生對於非標準化測驗之數學成績較男生高，但在標準化測驗中男性表現則較好。而可能的原因有：一、男生數學或科學活動有較多經驗。二、女生在類似作業表現較好，而男生在新奇工作中表現較佳。三、男生和女生的學習風格不同，男生偏向獨立完成，女生偏重背誦 (Kimball, 1989)。

以基測作樣本，可以發現在國文、英文題目中，「字形、字音、字義」的表現女生較優，而「工具、國學和文化知識」的差異最小，而數學測驗中題幹文字敘述轉成未知數列式對女生比較有利，而幾何和問題解決的問題較有利於男生 (盧雪梅，2007)。由 Maccoby 和 Jacklin (1974) 指出女性在語言能力是高於男性，若文字敘述轉成未知數題目或初級代數的學習表現優於男性，可能源自於代數具有語言性質的因素，而引入多重表徵可能有助於克服男生在初等代數表現較差的學習現象。

## 2.4 具體教具與虛擬教具的探討

本節分別就具體教具（physical manipulatives）與虛擬教具（virtual manipulatives）兩個部份來探討。

### 2.4.1 具體教具（physical manipulatives）

具體教具是能讓使用者拿起、旋轉或重新排列的真實物體，並藉以了解數學的抽象概念，例如：七巧板、幾何版、十格版……等（Suh, 2005）。在目前的教學現場中，具體教具的取得很方便，學生所使用的教科書出版商會於開學初提供教師當學期可使用的教具，教師亦可自行設計、製作並於課堂上使用來輔助教學活動。

根據瑞士籍的兒童心理學家皮亞傑（Jean Piaget, 1896~1980）的認知發展論（cognitive-developmental theory），兒童的思考模式不同於大人，必須經過不同的階段才接近成人的想法（張春興，1994）。

1. 感覺動作期（出生至兩歲）  
靠感覺獲取經驗。感覺動作期的末期發展出物體恆存的概念，逐漸從純反射性行為進步到有目的的行為。
2. 前運思期（二歲至七歲）  
有使用符號來代表事物的能力，思考仍然是自我中心而且只注意到事物的某一面，無法同時考慮多個向度。
3. 具體運思期（七歲至十一歲）  
具備邏輯推理能力，能根據具體經驗的思維來解決問題；具有可逆性及新的思考運作能力；思考不再限於單一向度，解決問題較少受到自我中心的限制；但還無法抽象思考。
4. 形式運思期（十一歲以上）  
能夠做抽象和純符號思考；能使用有系統的實驗來解決問題。

認知是一個複雜的歷程，而符合認知的學習才能獲得成效。在此我們可以發現，不同的發展階段是需要不同的教學方法，而具體操作與多重表徵是有助於學習者的類化與統整。以折紙來說明正方形與畢氏定理、用圖形說明分配律展開 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，這些具體操作的方式不但簡單還可了解幾何與代數間的關連（楊淑芬，1992）

以等號為例，在許多關於代數文字表徵的文獻中都表現，在算術思維及代數思維中等號代表的意義不同，在算術思維中，等號代表的是一種操作、一個運算的結果，而在代數思維中等號則代表關係上的等價。在算術思維過渡至代數思維時，學習者常受早期認知的影響，若一味的使用傳統的文字表徵教學，會發現代數學習困難重重。而使用多重表徵的一般化代數活動，可以處理文字表徵在等號學習造成的困難。Hands-On Equations 是一個代數學習上著名的教具，常用在學習初級代數（Borenson, 1997），近來亦應用於中學代數的學習，以天平兩端的不同物件代表已知數及未知數，以平衡的關係表示等號。若對應 Kuchemann 關於文字符號的分類，可以發現物件的概念是較高層次的認知解釋。具體操作的動作表徵及視覺表徵，也讓學習者在學習的過程中更容易注意到彼此的結構與關係，跳脫等號就是運算結果的先備經驗（Suh & Moyer, 2007）。

然而國中階段的學生正處於具體運思期與形式運思期當中，皮亞傑也提到這四個階段會因為不同的個體而有很大的個別差異，有人發展得快，也有人發展得慢，但各階段的前後順序是不變的。而具體教具能幫助學生建立、增強與連接不同的數學表徵。學生透過實際動手操作實體物件，可以更強化學生的理解。另外，在數學課中有使用教具來輔助學生學習比未使用的學生表現好（Raphael & Wahlstorm, 1989；Sowell, 1989）。因此，使用教具是可以促進數學抽象概念的理解（Terry, 1995）。Suydam 與 Higgins 也於 1977 年發表他們針對幼稚園至八年級的學生使用具體教具的研究結果，他們發現有使用教具的學生有較好的學習成就，且他們也發現要使具體教具產生正面的結果關鍵在於教具是否有好好的運用。根據以往的研究結果顯示，教師使用教具的經驗會影響學生的學習成就（Raphael & Wahlstrom, 1989；Sowell, 1989）。

教具的效用也會受到教師使用教具的目的及方式而有所影響。曾經有研究者針對十位中學教師使用教具來教授數學概念長達一年的研究，發現教師在課堂當中使用教具並非總是了解使用教具的目的，以及他們所選擇的教具

並不能充分表達教師所要傳達的數學概念，而沒有使教具發揮應有的效用 (Moyer, 2001)。因此，教師對教具的了解以及使用方法，也是會影響教學的效果。

#### 2.4.2 虛擬教具 (virtual manipulatives)

隨著科技的進步，教具的形式也有了改變，在電腦上模擬出具體教具的形體，並進而透過滑鼠來操作與互動，稱之為虛擬教具。經由這樣的技術所產生的數位化影像，能幫助學生對於數學抽象概念的理解。許多具體教具需要較大的空間來讓學生實際操作，虛擬教具模擬了具體教具的形狀，讓學生透過電腦的模擬來操作物件，甚至可提供即時性的回饋。Moyer, Bolyard 與 Spikell (2002) 認為虛擬教具是具有互動性的，且以網路為基礎並可建構數學知識的動態物件。虛擬教具能夠達到具體教具所要表現的概念，且能夠補足具體教具無法呈現的概念 (王智弘, 2006)。

相關研究發現虛擬教具優於具體教具有以下五點 (Char, 1991)：

1. 可降低教室管理的困難度。
2. 由於教學系統可以提供指引、回饋以及提示，因此可以減少對學生作業的組織、監控及批改的困難。
3. 幫助學生在數學的概念表徵中建立概念上的連結。
4. 透過視覺科技來提供更清楚的數學概念模型，例如：動態模擬。
5. 鼓勵學生之間的合作以及使學生的作業可以快速的再次展現及查看。

在教學過程中具體教具的價錢以及管理限制了學生使用的機會。然而，虛擬教具的發展提供給所有的學生使用卻沒有額外的花費。而且虛擬教具的設計通常是以現今數學課程中已包含的具體教具為模型，利用虛擬教具促進學生理解代數中以具體教具呈現的相同概念。此外，學生的注意力會集中在螢幕以及新穎的課程當中，而專注於手邊的作業。虛擬教具的指引、回饋及提示可以提供學生一個問題解決的環境去發展數學的概念理解。換句話說虛擬教具可以是一個充滿簡單、方便，甚至立體教具的虛擬環境。除此之外，虛擬教具除了以上所提到優於具體教具的論點，Izydorczak (2003) 也曾經整理出虛擬教具的八大優點如下：

1. 虛擬教具可以監控學生學習活動。

2. 虛擬教具比具體教具更具有擴張性。
3. 虛擬教具能夠呈現出更細微的概念。
4. 虛擬教具比具體教具更容易操作。
5. 虛擬教具適合大團體的教學。
6. 透過輔助說明的連結，虛擬教具可以清楚的表徵數學符號和程序。
7. 虛擬教具所需的經費比具體教具來的少。
8. 相較於具體教具，虛擬教具所產生較少的班級管理問題。

國內外有許多學者正積極致力於虛擬教具的開發及執行實證研究，也得到了許多研究結果，整理部分研究結果如表 2-4-1：

表 2-4-1 使用虛擬教具部分研究結果

研究者	研究主題	研究對象	研究結果
Goins (2001)	多項式乘法	修習代數 一的 32 個 班	在技巧與理解部分有使用教具的比未使用教具的效果來得好。
Reimer & Moyer (2005)	分數概念	三年級 19 位學生	學生的概念知識有顯著的提高，且虛擬教具提供立即性的回饋有助於學生學習更多的分數概念，且比傳統的紙筆快，讓學生更喜歡學習數學。
Suh (2005)	分數加法 及等號	三年級 2 個班	虛擬教具組表現比具體教具組好，且能幫助學生更清楚分數的運算過程。
Smith (2006)	代數概念的 理解	五年級 39 位學生	後測成績虛擬教具組與具體教具組沒有顯著的差異，但是學生較喜歡使用虛擬教具來學習代數概念。
Steen, Brooks & Lyon (2006)	幾何教 學、學習 態度、互 動	一年級 31 位學生	在前測成績虛擬教具組低於控制組，但在後測試題上卻超越了控制組，有顯著的進步。

(接下頁)

表 2-4-1 (續 1)

王智弘 (2006)	探討多方塊	七年級 60 位學生	虛擬教具組與具體教具組沒有顯著差異，但使用虛擬教具的學生較專心、想法比較多元、方塊重複的數目也較少。另外在虛擬教具的環境下，低分組比高分組有較大的進步空間，另外，在虛擬教具組中，男生的表現比女生好。
劉賢建 (2006)	數字樣式一般化	七年級 2 個班	虛擬計算機的教學與傳統教學的效果相同，但是虛擬計算機能增加延宕效果，且能提升學生的數學學習態度，以及有助於學生澄清錯誤觀念。
Verharen (2007)	前代數及幾何	七年級 34 位學生	虛擬教具組優於傳統教學且有顯著的差異，另有 70% 的學生認為線上的虛擬教具是有用的學習活動。
林瑞蘭 (2008)	周長與面積	三年級 2 個班	使用萬用揭示板比傳統教具更具有立即性與保留性的學習成效，以及學生可澄清迷思概念且能增進學生學習數學的正向態度。
彭健彰 (2008)	重量概念	四年級 2 個班	虛擬教具組優於具體教具組且達顯著差異，而延後測的部分虛擬教具組優於具體教具組但未達顯著差異。
張玉琪 (2009)	鑲嵌圖形	八年級 2 個班	使用虛擬教具與具體教具的效果相同，但是虛擬教具教學對於高分組學生學習比具體教具好，以及使用虛擬教具對不同性別的學生在後測成績上沒有顯著的差異。

因為虛擬教具與具體教具本質上的雷同，可以發現研究結果依研究設計、課程設計、教學者的經驗以及使用的虛擬教具而有所差異，但隨著科技的進步，虛擬教具可具有更多具體教具不具有種類和性質。Smith (2006) 以 39 位 5 年級的學生為對象，比較學生在多項式展開的學習過程中，使用具體教具或虛擬教具所造成的影響，雖然實驗結果並未獲得顯著差異，但可以發現學生是偏好使用虛擬教具作為操作的工具，這即代表虛擬教具相較於具

體教具是有一些優點存在，而能否取代傳統的具體教具是需要更多的研究來檢核及修改，因此這是值得去探究的領域。

代數磚(Algebra Tile)是一種利用幾何圖形幫助學生了解代數思維及代數概念的數學教具，由多種卡片製作而成，而不同色塊的卡片代表不同的面積，用於教學上，它可以非常巧妙的處理代數學習上的困難 (Picciotto, 1993)。若分析該教具在多項式展開與因式分解教學中，所代表的數學意涵可得：

1. 代數的相乘可視為兩個代數項的二項式展開：二項式為矩形的長與寬，矩形面積則形成二項式展開的乘積。
2. 其中長、寬未知數與已知數的混同，即代表代數的加法。
3. 而全長本身為未知數與已知數的集合，即代表括號：括號分處矩形的長、寬，可由空間上判別括號的異同。
4. 同類項可以邊長和矩形形狀的圖形分類表示。
5. 分配律以分割出的小矩形代表：矩形的總面積與分開各個小矩形求得的面積總合，在幾何意義上相等。
6. 代數表徵與圖形表徵相連結：許多初學代數者在算術思維可以解決問題的情境下認為代數的學習是不必要的(Ainley, 2005)，而代數表徵對初學者亦是無意義的符號，然幾何表徵對學習者而言，是熟悉且有意義的，連結代數表徵與圖形表徵，可讓學習者賦予代數學習上的意義。

這種代數與基礎幾何的連結，以具體可操作的教具代替講述，可促進學習成就的進步，Goins (2001) 以 32 個班為對象利用 Algebra Tile 作為教材，比較一般、視覺化呈現及教具操作三種不同的教學方式在多項式乘法單元中，學生學習成就的表現，發現教具對於學生學習有正面的影響，尤其是技巧和理解的部分，學習者更能掌握、解釋運算過程的意涵。而 Sharp (1995) 以 5 個班級為對象，比較使用 Algebra Tile 為教具與未使用教具在代數學習成就上的差異，亦得到透過教具操作的學生，更能增進代數中概念的了解，雖在一般的紙筆測驗中，可能無法在短期間展現效果，卻可以引發多項式展開和其他概念的連結，尤其是低學習成就者。讓學生擺脫單純記憶，體會面積與分配律的關連性 (方鳳娟, 2002)。因為低學習成就者可能代表原有的表徵方式無法促進學習，而需要不同的表徵促進學習。這代表學習者可比單純的練習、運算獲得更深入的理解 (江佳蕙, 2001; Picciotto, 1993)。



### 三、 研究設計與方法

本章共分為四節，主要探討本研究的設計與方法，第一節為研究設計與架構，第二節為研究對象，第三節為研究工具，第四節為資料分析。

#### 3.1 研究設計與架構

本研究是比較虛擬教具與具體教具教學的環境，對學生學習數學多項式展開概念與因式分解概念的影響。由於無法隨機選取受試者，因此本研究採取不等組前後測準實驗設計，如表 3-1-1。

表 3-1-1 不等組前後測準實驗設計

自變項	前測	實驗處理	後測
實驗組	T1 T2	X <sub>1</sub>	T2 T3 T4
控制組	T1 T2	X <sub>2</sub>	T2 T3 T4

註：T1 為學生前一學期三次數學定期評量平均

T2 為數學動機量表

T3 為多項式展開與因式分解測驗

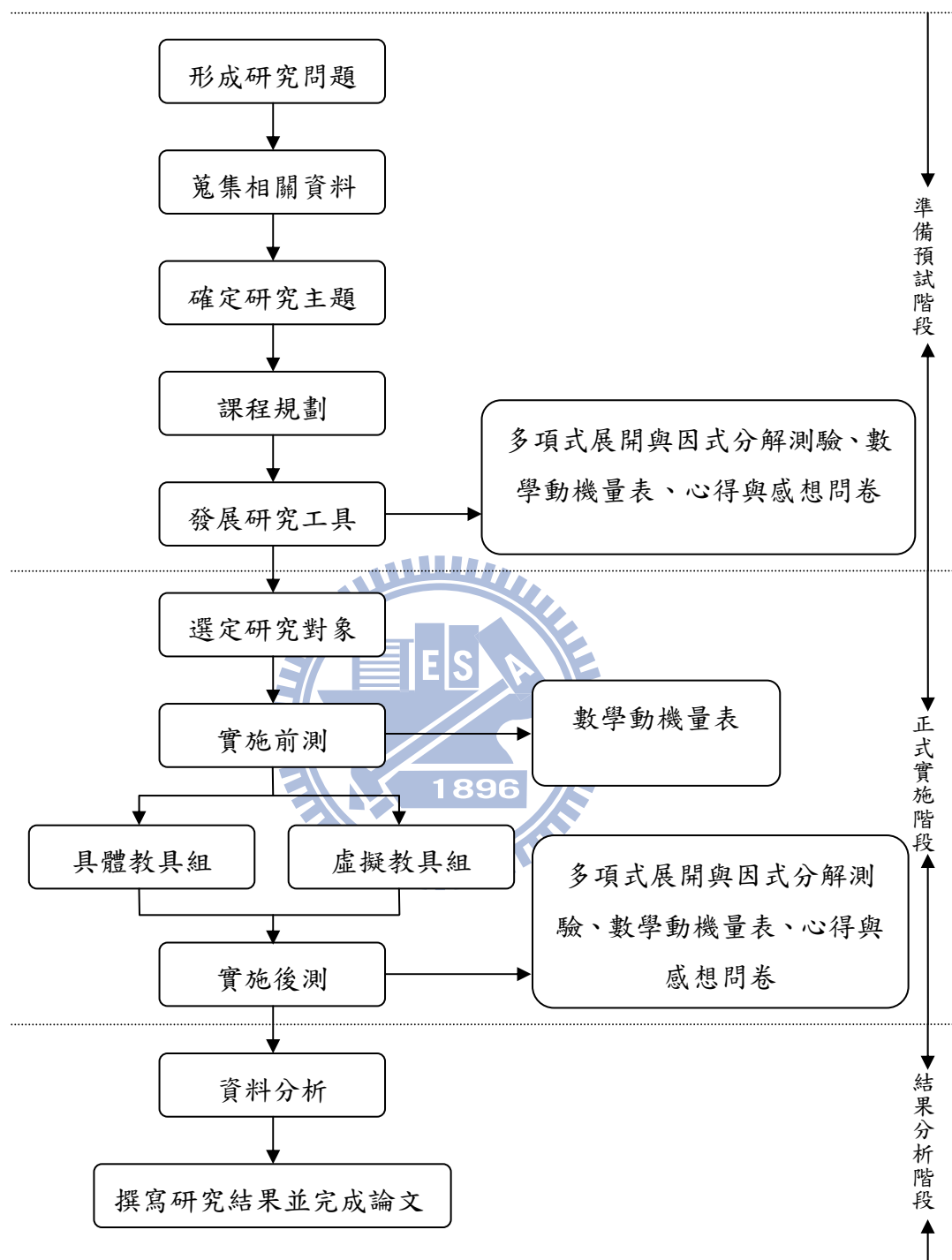
T4 為心得及感想問卷

X<sub>1</sub> 使用虛擬教具為教學輔具的多項式展開與因式分解教學

X<sub>2</sub> 使用具體教具為教學輔具的多項式展開與因式分解教學

實驗組與控制組的學生均接受前測（數學動機量表）；兩組的學生在前測後，分別實施以多項式展開與因式分解課程為教材的虛擬教具教學與具體教具教學，在實驗後第二天，兩班學生進行後測（多項式展開與因式分解測驗、數學動機量表、心得與感想問卷）。本研究以學生上學期數學定期評量平均分數為共變數，利用共變數分析法分析兩組後測成績是否有顯著差異；另外，從教學過程中所蒐集的學習單及心得與感想問卷，做質性的研究分析，藉以更深入了解虛擬教具教學與具體教具教學的環境，對學生學習多項式展開與因式分解所產生的影響。本研究詳細的流程如圖 3-1-1。

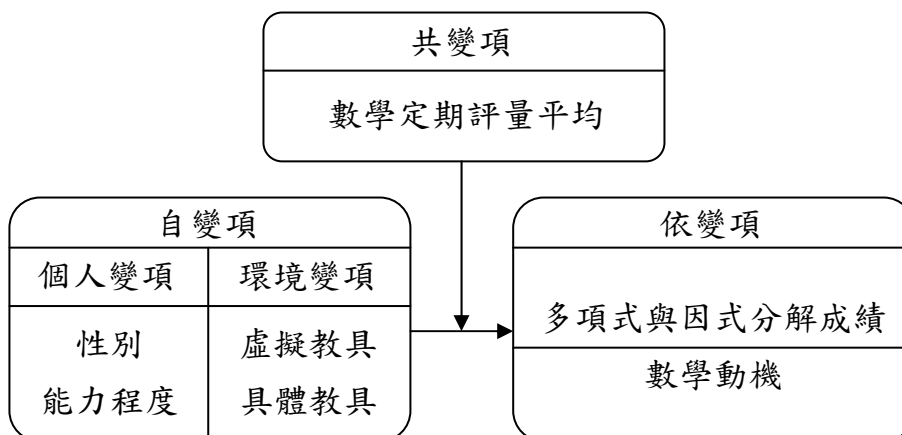
圖 3-1-1 研究流程



本研究的研究架構的自變項分為兩個部分：一、個人變項：包含性別與能力程度。二、環境變項：分為虛擬教具與具體教具兩種。依變項為多項式展開與因式分解測驗及數學動機量表，並以數學定期評量平均為共變數。研

究架構如下圖 3-1-2。

圖 3-1-2 研究架構



另外，兩組的教學過程除了教具的樣式不同外，教學活動的安排是一樣的，使用相同的學習單以及進行相同的教學活動，讓實驗更加嚴謹，控制不必要的干擾。實驗組與控制組的教學環境比較，如表 3-1-2 所示。

表 3-1-2 實驗組與控制組教學環境比較表

項目	實驗組	控制組
教具樣式	研究者先在電腦教室安裝好虛擬教具的軟體，學生一人一台電腦。	研究者先以紙卡做好具體教具，學生一人一份教具。
前測方式	數學定期評量平均、數學動機量表。	數學定期評量平均、數學動機量表。
使用教材	教師自編教材、教案、學習單。	教師自編教材、教案、學習單。
教學時間	2 節課	2 節課
教學方式	教師引導、實際操作	教師引導、實際操作
作業型態	學習單	學習單
後測時間	多項式展開與因式分解測驗 50 分鐘、數學動機量表 10 分鐘、心得及感想問卷 15 分鐘。	多項式展開與因式分解測驗 50 分鐘、數學動機量表 10 分鐘、心得及感想問卷 15 分鐘。

本研究採用 NLVM 的「Algebra Tiles」為虛擬教具以及研究者自行設計的紙卡為具體教具。虛擬教具是使用 NLVM 的「Algebra Tiles」作為教學輔具，其是以 Java Applet 程式撰寫的軟體。由於考慮到實驗當時網路連線的狀況，因此使用的是下載的桌面試用版本，試用時間是 60 天足夠教學實驗使用，網路版與下載試用版並無差異。具體教具是研究者仿照虛擬教具的形態所設計，採用的紙張是美國裱版紙，這種紙張厚度足夠可以避免被風吹走的困擾，且有顏色，但若要以人工來裁切會比較困難且費時，因此決定將紙張送至裁紙廠來製作。裁出來的紙卡雖有一點點的誤差，但是不影響學生在課堂當中使用。除了製作學生所需使用的具體教具外，研究者亦製作一套教師在教學時所用的教具，學生版與教師版兩者的教具只有大小不同，其顏色都相同。虛擬教具與具體教具的異同整理如下表 3-1-3。而教具的樣式如下圖 3-1-3、圖 3-1-4、圖 3-1-5 及圖 3-1-6。

表 3-1-3 虛擬教具與具體教具之異同

	虛擬教具	具體教具
相同	有六種不同面積的矩形可以使用： $1 \times 1$ 、 $1 \times x$ 、 $1 \times y$ 、 $x \times y$ 、 $x \times x$ 、 $y \times y$	有六種不同面積的矩形可以使用： $1 \times 1$ 、 $1 \times x$ 、 $1 \times y$ 、 $x \times y$ 、 $x \times x$ 、 $y \times y$
相異	在電腦教室，學生透過滑鼠來操作矩形。	在普通教室，學生每人一套紙卡。

圖 3-1-3 Algebra Tiles 介面



可控制  $x \cdot y$  的大小

圖 3-1-4 Algebra Tiles 功能介紹

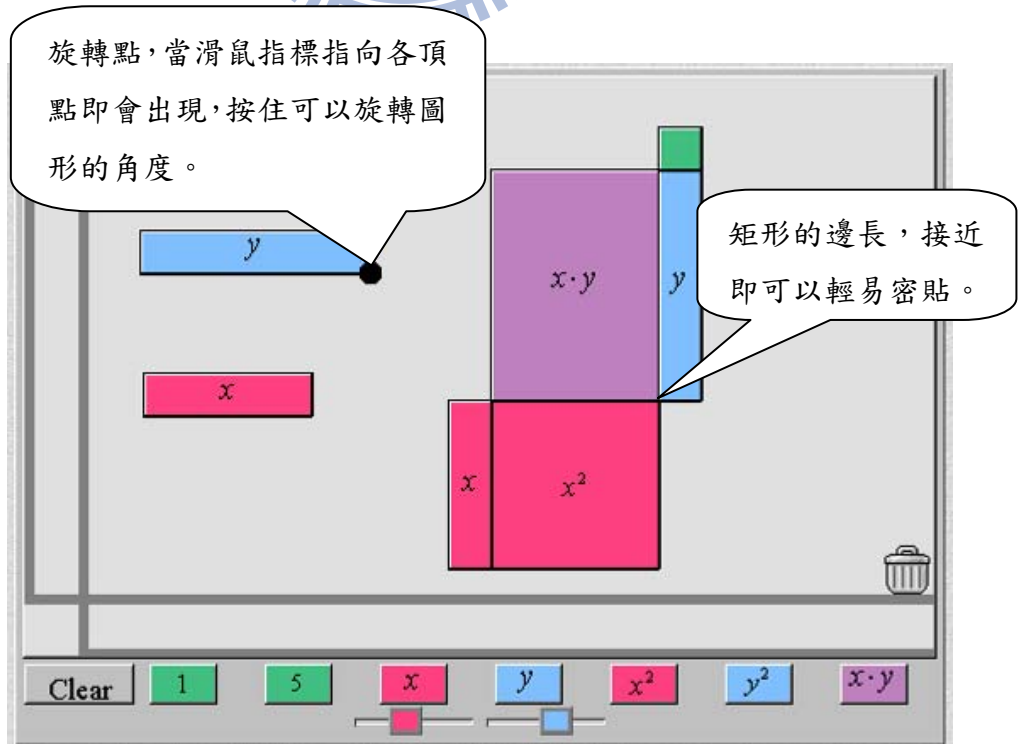


圖 3-1-5 學生版具體教具

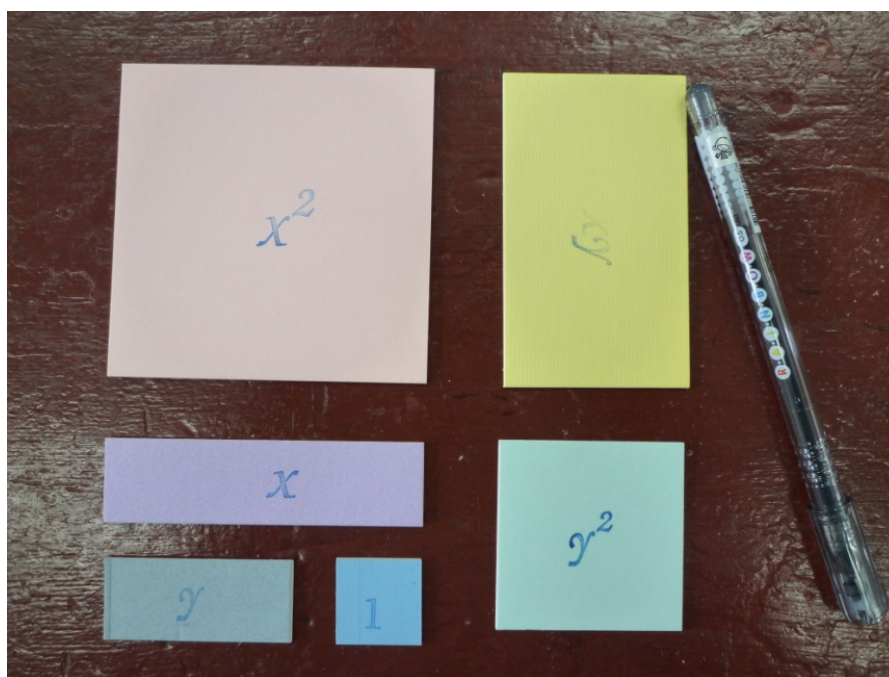
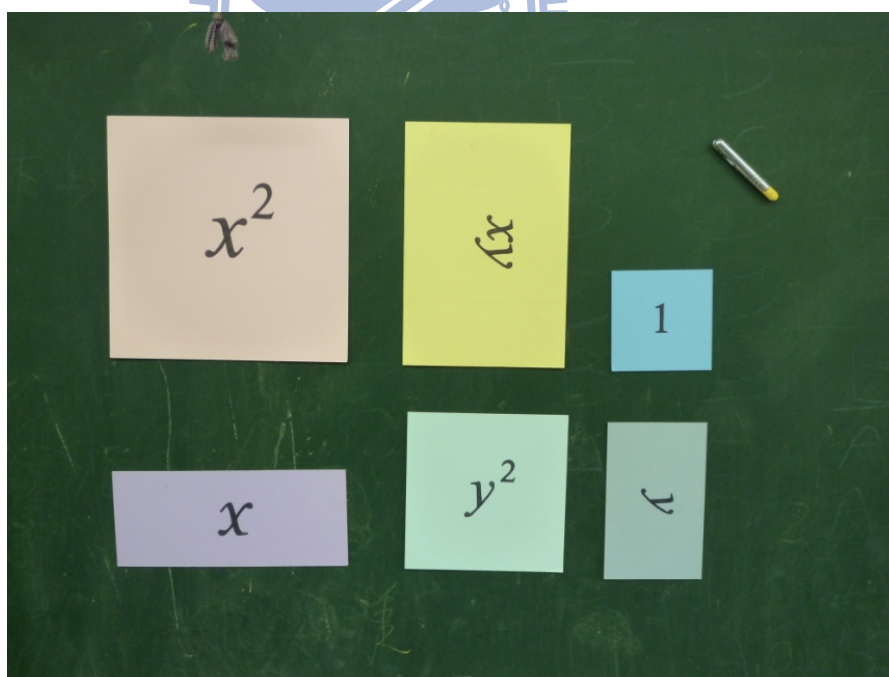


圖 3-1-6 教師版具體教具



學生使用的具體教具與教師所使用的具體教具唯一的相異之處在於大小規格的不同，以  $x^2$  來說，教師的規格為 31 公分×31 公分；而學生的規格為 8.7 公分×8.7 公分，其餘的顏色及樣式皆相同。

### 3.2 研究對象

本研究的研究對象是桃園縣某縣立國民中學一年級寒假輔導課的學生，全校一年級學生共有 14 班，每班大約 33 人，寒假期間並非所有的學生都有參加輔導課，大約有一半以上的學生參加，而參加的人並無成績高低之分，因此教務處採取兩班併為一班的模式，研究者選取兩班為實驗研究對象，這兩班的學生在學期當中的數學任課老師皆為同一人，本研究自此寒假輔導課編班的兩班中，隨機選取一個班為實驗組，另一個班為控制組。以下為實驗組和控制組的班級學生人數和男女生人數，如表 3-2-1。

表 3-2-1 研究樣本人數統計表

組別	男生人數	女生人數	總人數
實驗組	14	16	30
控制組	11	15	26
合計	26	30	56

本實驗研究教學實驗組及控制組教師由同一位教師教學，即為研究者本人，研究者目前是第六年任教於國中，平時擔任導師的工作，並教授數學及電腦課程，在實驗前，受試學生均不是研究者平時的授課班級。研究對象的實驗組學生和控制組學生均接受教學教師指引，熟悉該組教具的操作方式。

### 3.3 研究工具

本研究的研究工具主要有多項式展開與因式分解測驗、數學定期評量平均成績與數學動機量表。另外，也以心得及感想問卷、學習單、數位攝影機以及數位相機紀錄上課情形，進一步分析學生學習上的差異。

#### 3.3.1 數學定期評量成績（前測）

本研究以實驗對象九十八學年度第一學期三次的數學定期評量成績的平均，做為兩組學生教學實驗前的數學能力指標。實驗學校的定期評量試題皆由數學領域教師來命題，在考試之前試題皆必須經由審題老師審完無誤之後才可當作定期評量試題。定期評量時間由教務處統一安排，測驗時間為45分鐘，滿分為100分。本研究將以三次定期評量成績的平均分數(0~100分)，以其作為本實驗研究的共變量，並以共變數分析來分析教學實驗的成效。

#### 3.3.2 數學動機量表（前測、後測）

本研究所使用的數學動機量表是採用李默英（1983）修訂自 Fennema 和 Sherman（1987）編訂的「數學態度量表」(Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales) 為藍本，經過翻譯、施測、統計分析後修訂而成。該量表原有九個分量表，每一個分量表有12題，總共有108題。本研究取用其與本研究主題有關之「信心量表」及「動機量表」兩個分量表合併而成，每個分量表12題，共24題。各項目的分數統計採用李克特氏五點量表，「非常不同意」、「不同意」、「無意見」、「同意」、「非常同意」。正向題之「非常同意」計5分，逐次降低至「非常不同意」1分；反向題之「非常同意」計1分，逐次增加至「非常不同意」5分，然後將各分量表所含題目之得分累加，即為各分量表之得分數；將各分量表得分累加，即為全量表之總分，分數愈高，表示對數學的動機愈佳，反之則愈差。

因本研究只取用「信心量表」及「動機量表」兩個分量表，因此，經由實驗對象學校317名國中一年級的學生預試，測驗時間為10分鐘，採用SPSS統計軟體進行因素分析與信度考驗，在因素分析方面所獲得之資料，先經過KMO取樣適當性檢定及巴氏球形檢定， $KMO=0.897$ 、巴氏球形檢定值1266.25，顯著性=0.000，結果顯示資料應該是適合進行因素分析。通過檢定



之後，續以因素分析中的主成分分析來萃取共同因素，依據特徵值大於 1 作為選取共同因素個數的原則，結果選取兩個主要因素，共可解釋全部變異量之 53.33%。再經過最大變異數轉軸法 (varmax)，對選出的因素進行轉軸，使各因素之代表意義更明顯且更易於解釋。如表 3-3-1 數學動機量表考慮主成分分析之結果。

表 3-3-1 數學動機量表考慮主成分分析之結果

因素/變數名稱	因素負荷量	特徵值	解釋變異量
<b>因素一：信心</b>			
我認為我可以處理更難的數學。	.443	1.576	23.105%
數學曾經是我最差的一科。	.759		
大部分的科目我都能應付，唯對數學不開竅。	.752		
因為某些理由，我雖用功學習數學，但數學對我好像很難。	.743		
我的數學並不好。	.621		
在數學考試中，我常感到輕鬆自在。	.499		
<b>因素二：動機</b>			
當數學課上有未解答的數學題目時，在課後我會繼續想它。	.780	4.824	30.225%
當我遇到不能立即解答的數學難題時，我會一直想，直到解出答案為止。	.775		
我寧可別人把數學難題的答案告訴我，而不願自己去解題。	.734		
不能立即解出的數學題目對我來說是一項很好的挑戰。	.673		
學數學是件浪費時間的事。	.654		
數學題目引起的挑戰我並不感到興趣。	.646		

在信度考驗方面，總分量表的  $\alpha$  係數為 .858，代表此數學動機量表的信度良好。

### 3.3.3 多項式展開與因式分解教案設計(附錄一)與學習單(附錄二)

以實際操作的方式，讓學生透過矩形面積來探索多項式展開與因式分解的意義，藉由探索的過程，引導、發現多項式展開的規則及因式分解的概念。啟發學生的整合分析能力，並能實際應用所學，與日常生活結合。上課時間為兩節課，共 100 分鐘。課程內容為多項式展開與因式分解的基本概念，並不涉及負數的部分，並依據此教學設計配合學習單來實施教學。教案及學生所使用的學習單詳見附錄。

### 3.3.4 多項式展開與因式分解測驗（後測）

測驗的目的在了解學生在多項式展開與因式分解課程實施後的學習成效，測驗的時間為 50 分鐘。研究者針對教學目標以及學習內容編製而成，初稿完成後，分別請指導教授及數學領域教師給予專家意見，而進行修改。題目涵蓋所有的教學內容，包含多項式展開以及因式分解的基本概念，共有 10 大題，每大題 10 分，總分為一百分，預試結果測得的信度為.846，代表此多項式展開與因式分解測驗的信度良好。本測驗要求學生繪出圖形及寫出算式如圖 3-3-1，若無法完整回答將給予部分給分如圖 3-3-2，給分標準如表 3-3-2 所示：

圖 3-3-1 圖形拼法及算式皆正確

1. 如右圖，籃球場的長、寬分別是  $4x+1$  及  $3x$ ，請問這個籃球場的面積是多少？  
(請將結果以多項式展開式表示)

1	x	x	x
x	x <sup>2</sup>	x <sup>2</sup>	x <sup>2</sup>
x	x <sup>2</sup>	x <sup>2</sup>	x <sup>2</sup>
x	x <sup>2</sup>	x <sup>2</sup>	x <sup>2</sup>
x	x	x	

$$(4x+1)(3x) = 12x^2 + 3x$$

10分

圖 3-3-2 圖形拼法正確但算式錯誤

1. 如右圖，籃球場的長、寬分別是  $4x+1$  及  $3x$ ，請問這個籃球場的面積是多少？  
 (請將結果以多項式展開式表示)

$8分$

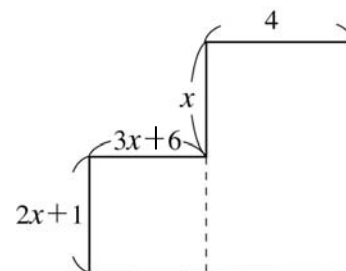
表 3-3-2 給分標準示例

題目 1：如右圖，籃球場的長、寬分別是 $4x+1$ 及 $3x$ ，請問這個籃球場的面積是多少？(請將結果以多項式展開式表示)			
學生答案	拼法正確或算式正確	拼法正確但展開式錯誤	未作答或拼法錯誤
給分標準	10分	8分	不給分
給分理由	觀念正確	僅不熟悉算式的表達	不正確

(接下頁)

表 3-3-2 (續 1)

題目 2：請以  $x$  表示右圖的面積。(請將結果以多項式展開式表式)



學生答案	拼法正確或算式正確	拼法正確但展開式錯誤	未作答或拼法錯誤
給分標準	10 分	8 分	不給分
給分理由	觀念正確	僅不熟悉算式的表達	不正確

題目 3-1：參考右圖，請在下列算式中的空格填入適當的答案。

$$\begin{aligned}
 &(2x+y)(x+2y) \\
 &= 2x \times \underline{\hspace{2cm}} + y \times \underline{\hspace{2cm}} \\
 &= \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} \\
 &= 2x^2 + 5xy + 2y^2
 \end{aligned}$$



$y$	$xy$	$y^2$	$y^2$
$x$	$x^2$	$xy$	$xy$
$x$	$x^2$	$xy$	$xy$
$x$	$y$	$y$	$y$

學生答案	$(x+2y) \cdot (x+2y)$ $2x^2 \cdot 4xy \cdot xy \cdot 2y^2$	未作答或錯誤
給分標準	6 分	不給分
給分理由	正確	不正確

(接下頁)

表 3-3-2 (續 2)

題目 3-2：參考右圖，根據(1)的求解過程，請問斜線部分的 4 個  $xy$  是如何求得的？

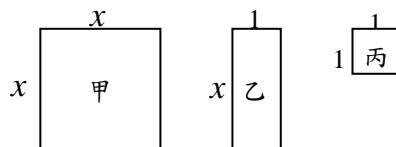
$y$	$xy$	$y^2$	$y^2$
$x$	$x^2$	$xy$	$xy$
$x$	$x^2$	$xy$	$xy$
	$x$	$y$	$y$

學生答案	$2x \times 2y$	$x \times y$	未作答或錯誤
給分標準	4 分	2 分	不給分
給分理由	正確	未注意到“4 個”	不正確
題目 4：請展開 $(3x+2y)(x+5y)$ 。(請將你所拼出的圖形畫出來)			
學生答案	拼法正確		未作答或拼法錯誤
給分標準	10 分		不給分
給分理由	正確		不正確
題目 5：請展開 $(x-3)(x+2)$ 。			
學生答案	$x^2 - x - 6$		未作答或錯誤
給分標準	10 分		不給分
給分理由	正確		不正確

(接下頁)

表 3-3-2 (續 3)

題目 6-1：已知甲、乙、丙三個矩形，其長與寬分別如圖所示。王老先生有塊矩形的農地，農地的大小是由 1 個甲、3 個乙和 2 個丙所組成。

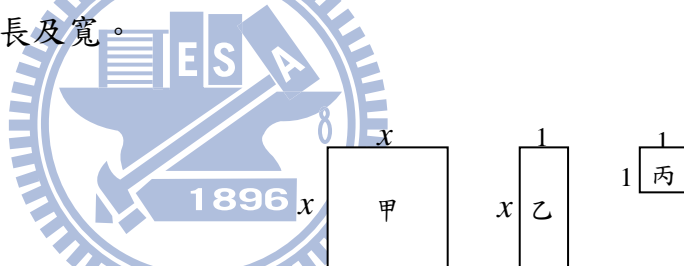


(1) 請畫出代表此農地的矩形(要把甲、乙、丙的放置位置標示出來)。

學生答案	拼法正確	未作答或拼法錯誤
給分標準	5 分	不給分
給分理由	正確	不正確

題目 6-2：已知甲、乙、丙三個矩形，其長與寬分別如圖所示。王老先生有塊矩形的農地，農地的大小是由 1 個甲、3 個乙和 2 個丙所組成。

(2) 請寫出此農地的長及寬。

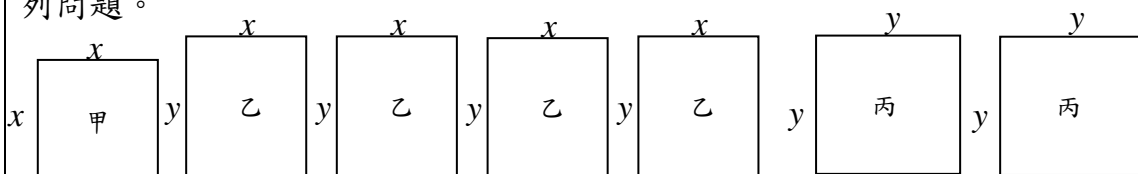


學生答案	$(x+1)$ 、 $(x+2)$	未作答或錯誤
給分標準	5 分	不給分
給分理由	正確	不正確

(接下頁)

表 3-3-2 (續 4)

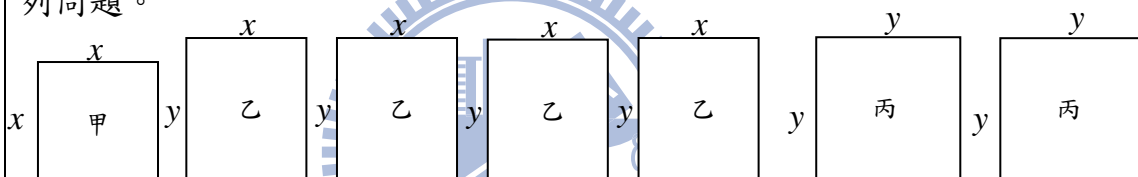
題目 7-1：若想將下列全部的甲、乙、丙矩形組合成一個正方形，請依序下列問題。



(1) 還需要幾個丙才可組合成一個正方形？

學生答案	2 個	未作答或錯誤
給分標準	2 分	不給分
給分理由	正確	不正確

題目 7-2：若想將下列全部的甲、乙、丙矩形組合成一個正方形，請依序下列問題。



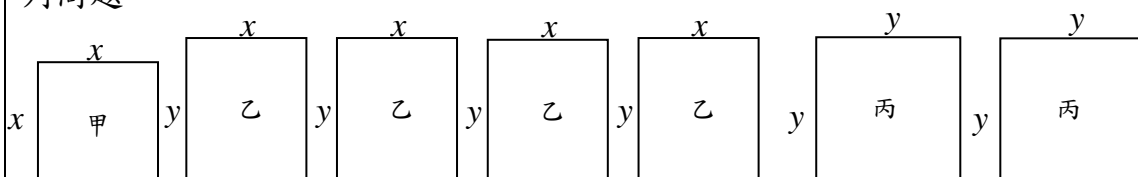
(2) 請將組合好的正方形畫出來(要把甲、乙、丙的放置位置標示出來)。

學生答案	拼法正確	未作答或拼法錯誤
給分標準	5 分	不給分
給分理由	正確	不正確

(接下頁)

表 3-3-2 (續 5)

題目 7-3：若想將下列全部的甲、乙、丙矩形組合成一個正方形，請依序下列問題。



(3) 請寫出此正方形的邊長。

學生答案	$(x+2y)$ 或 $(2y+x)$	未作答或錯誤
給分標準	3 分	不給分
給分理由	正確	不正確

題目 8：因式分解  $2x^2+11x+5$ 。(請將你所拼出的圖形畫出來)

學生答案	完整拼出	有拼出但未表示邊長	未作答或拼法錯誤
給分標準	10 分	8 分	不給分
給分理由	正確	未把矩形的長、寬表示出來	不正確

題目 9：因式分解  $x^2+5xy+6y^2$ 。(請將你所拼出的圖形畫出來)

學生答案	完整拼出	有拼出但未表示邊長	未作答或拼法錯誤
給分標準	10 分	8 分	不給分
給分理由	正確	未把矩形的長、寬表示出來	不正確

題目 10：因式分解  $x^2-4x+3$ 。

學生答案	$(x-1)(x-3)$	未作答或拼法錯誤
給分標準	10 分	不給分
給分理由	正確	不正確



### 3.3.5 學生心得及感想問卷（後測）

這分問卷的目的在於了解學生對於實施多項式展開與因式分解教學後的心得及感想，以及對與數學態度的影響，撰寫時間為 15 分鐘。初稿完成後，分別請指導教授及數學領域教師給予專家意見，進行修改，以使問卷具有內容效度。題目內容包含：

1. 你認為教具的使用及操作最困難的地方在哪？請說明原因。
2. 在這次的課程當中，你覺得哪裡最難理解？請寫出原因。
3. 你對這次數學課的感想為何？
4. 這次的數學課程，有什麼特別的地方？你喜歡嗎？為什麼？
5. 你覺得透過一些操作來學習數學，有比較容易瞭解數學嗎？為什麼？

根據學生的撰寫內容，分析學生對於使用不同教具做為教學輔具進行多項式展開與因式分解教學的看法和影響。



### 3.4 資料分析

本研究採量與質的方式進行分析。在量的資料蒐集有數學定期評量平均成績以及數學動機量表之前測，與多項式展開與因式分解成就測驗與數學動機量表之後測。在質的方面蒐集的資料有學生學習活動過程的錄影、學生學習單、學生心得與感想問卷。

#### 1. 量的分析

量的資料部分以 SPSS 統計軟體進行資料分析。本實驗所選取的班級為避免兩組學生在實驗前的能力是不相等的狀況，所以以三次數學定期評量平均成績為共變數進行統計控制，增加實驗的內在效度。表 3-4-1 為本實驗研究假設的統計方法。

表 3-4-1 實驗研究假設的統計方法

研究假設	統計方法
不同性別與使用不同的教學輔具，對學生學習多項式展開概念沒有顯著的交互作用。	以學生性別與不同教學輔具為自變項，多項式展開成績為依變項，數學定期評量平均為共變量，進行二因子單變量共變數分析。若有交互作用則進行單純主要效果考驗，若無則進行主要效果考驗。
不同能力程度與不同的教學輔具，對學生學習多項式展開概念沒有顯著的交互作用。	以不同能力程度與不同教學輔具為自變項，多項式展開成績為依變項，數學定期評量平均為共變量，進行二因子單變量共變數分析。若有交互作用則進行單純主要效果考驗，若無則進行主要效果考驗。

(接下頁)

表 3-4-1 (續 1)

<p>不同性別與使用不同的教學輔具，對學生學習數學因式分解概念沒有顯著的交互作用。</p>	<p>以學生性別與不同教學輔具為自變項，因式分解成績為依變項，數學定期評量平均為共變量，進行二因子單變量共變數分析。若有交互作用則進行單純主要效果考驗，若無則進行主要效果考驗。</p>
<p>不同能力程度與不同的教學輔具，對學生學習數學因式分解概念沒有顯著的交互作用。</p>	<p>以不同能力程度與不同教學輔具為自變項，因式分解成績為依變項，數學定期評量平均為共變量，進行二因子變量共變數分析。若有交互作用則進行單純主要效果考驗，若無則進行主要效果考驗。</p>
<p>使用虛擬教具與具體教具為教學輔具，對學生學習數學動機的提升沒有顯著的差異。</p>	<p>利用獨立樣本 t 檢定，來考驗實驗組與控制組的學生，學習數學的動機是否有提升。</p>

## 2. 質的分析

所蒐集的資料包含：學生學習活動過程的錄影、學生學習單與學生心得與感想問卷等。

### (1) 學生學習活動過程的錄影

實驗組及控制組皆由研究者來授課，在課程的進行中需對學生的學習活動作指引，必須掌握學生學習的進度，因此無法兼顧整班的學生，所以安排同事全程錄影，以及兩位研究生幫忙做課堂的紀錄，以取得教學活動真實的情況。

### (2) 學生學習單

本研究依照課程內容設計的學習單，引導學生依照範例、操弄教具並把結果表現出來，藉此觀察學生同的教學模式下學習態度的改變。

### (3) 學生心得感想問卷

心得感想問卷於後測結束後請兩組的學生填寫，其目的在了解學生在學習多項式展開與因式分解的過程中的感想。

## 四、 研究結果與討論

本章分為三節探討本研究的結果，第一節說明使用虛擬教具與具體教具於多項式展開與因式分解教學後對學生學習的影響，第二節為實驗教學過程中，實驗組與控制組學生學習歷程分析，第三節為學生在學習單與心得及感想問卷的質化分析。

### 4.1 使用虛擬教具與具體教具於多項式展開與因式分解教學後對學生學習的影響

本研究的目的是在於了解使用虛擬教具的教學環境和具體教具的教學環境，對於國中學生學習多項式展開與因式分解之影響。在教學實驗前，研究者先收集實驗組與控制組學生前一學期的三次數學定期平均成績作為前測成績，利用 Levene 檢定兩組變異數的同質性，將統計  $\alpha$  值（顯著水準）設定為 .05，統計結果顯示未達顯著（ $F=.078$ ， $p=.781>.05$ ），表示實驗前這兩組的變異數是具有同質性的。在教學實驗結束後第二天實施後測「多項式展開與因式分解測驗」，施測完畢之後以學生的前一學期三次數學段考平均成績為共變數，後測多項式展開與因式分解測驗成績為依變數，進行二因子共變數分析。根據本實驗的研究假設逐項分析與討論研究結果。

#### 4.1.1 研究假設 1：不同性別與使用不同的教學輔具，對學生學習多項式展開概念沒有顯著的交互作用。

本研究假設的依變數之一為兩班學生後測「多項式展開與因式分解測驗」中多項式展開的成績，如表 4-1-1，共變量為兩班學生前一學期三次數學定期評量平均的成績，於教學實驗後進行二因子共變數分析。

表 4-1-1 兩組學生依性別在多項式展開的後測成績

性別	教學組別	樣本數	平均數	標準差
男生	實驗組	14	25.41	11.116
	控制組	11	12.00	10.188
	總和	25	19.40	12.450
女生	實驗組	16	29.50	10.033
	控制組	15	28.60	14.009
	總和	31	29.06	11.922
總和	實驗組	30	27.50	10.592
	控制組	26	21.58	14.879
	總和	56	24.75	12.987

在進行共變數分析前須先檢定組內迴歸係數同質性之假定，將統計  $\alpha$  值設定為.05，考驗原分組前測成績和後測成績間是否有顯著的交互作用，檢定結果顯示未達顯著 ( $F=1.86$ ,  $p=.148>.05$ )，接受虛無假設，表示兩組的迴歸線的斜率相同，代表兩組的共變項（前測成績）與依變項（後測成績）之間的關係，不會因為實驗各處理水準的不同而有所差異，符合共變數分析中組內迴歸係數同質性的檢定，所以繼續進行共變數分析，分析不同性別與使用不同的教學輔具，對於學生學習多項式展開概念之影響，如表 4-1-2。

表 4-1-2 不同性別與不同教學輔具在多項式展開成績之二因子共變數分析摘要表

變異來源	SS	Df	MS	F
性別	240.241	1	240.241	2.880
教學輔具	329.403	1	329.403	3.948
性別*教學輔具	401.351	1	401.351	4.811*
誤差	4254.984	51	83.431	

\* $p<.05$

從二因子共變數分析摘要表，可以發現：排除數學段考平均成績的影響後，不同性別與不同教學輔具在多項式展開成績的學習效果上有顯著的交互作用 ( $F=4.811$ ,  $P=.033<.05$ )，因而需進一步進行單純主要效果考驗，考驗結果如表 4-1-3。

表 4-1-3 不同性別與不同教學輔具單純主要效果考驗分析摘要表

變異來源	SS	DF	MS	F	事後比較
性別因子					
實驗組	27.240	1	27.240	.756	
控制組	708.776	1	708.776	5.219**	女生>男生
教學輔具因子					
男生	705.799	1	705.799	9.879**	實驗組>控制組
女生	5.072	1	5.072	.055	
誤差	4254.984	51	83.431		

\*\* $p < .05$

在單純主要效果考驗分析摘要表上，可以得知：

1. 在實驗組中，男女生實驗處理效果沒有顯著差異。
2. 在控制組中，女生（ $M=28.6$ ）的學習結果顯著優於男生（ $M=12.00$ ）的學習結果（ $F=5.219$ ， $p=.032 < .05$ ）。
3. 就男生群體而言，不同教學輔具，其學習結果有顯著不同（ $F=9.879$ ， $p=.005 < .05$ ），在實驗組（ $M=25.21$ ）的男生群體，其學習結果顯著優於在控制組（ $M=12.00$ ）的男生群體。
4. 就女生群體而言，不同教學輔具，其學習結果並沒有顯著的不同（ $F=.055$ ， $p=.816 > .05$ ）。

本研究多項式展開概念屬於代數學習的範疇之內，在實驗組中男女生並無顯著的差異，而控制組的結果顯示女生在多項式展開的成績上顯著高於男生成績。即女生在使用具體教具的環境下學習多項式展開的表現優於男性，但在虛擬教具的環境中，則未見此性別差異現象。國際學生學習成就表現調查研究（TIMSS 2003）顯示，我國 8 年級女生在代數的平均數顯著高於男生（曹博盛，2005），而黃國清於 2008 年所發表的研究結果也顯示，在數學內容中之代數學習，女生的成就表現顯著優於男生。可能使用虛擬教具較能提升男生代數的學習表現，因此可以和女生具有相同的成就表現。

Kimball（1989）曾做過相關的研究，女生在與學習類似的作業表現較好，而男生在新奇的或具挑戰的工作中表現較佳。在本研究中，女生面對虛擬教具或具體教具，其成績並沒有顯著的差異，但在男生而言，虛擬教具又比具體教具來得新奇，因此，可能導致使用虛擬教具的男生其成績比使用具

體教具的男生來得好，因而能和女生有相同的成就表現。

#### 4.1.2 研究假設 2：不同能力程度與不同的教學輔具，對學生學習多項式展開概念沒有顯著的交互作用。

本研究假設的依變數之一為兩班學生在後測「多項式展開與因式分解測驗」中多項式展開的成績，如表 4-1-4，共變量為兩班學生前一學期三次數學定期評量平均的成績，不同能力程度分為高分組、中分組與低分組，高分組為數學定期評量平均為 65 分以上的學生，而低分組為數學定期評量平均分數為未滿 40 分的學生，其於分數為 40 分以上而未滿 65 分的學生為中分組。於教學實驗後進行二因子共變數分析。

表 4-1-4 兩組學生依能力分組在多項式展開的後測成績

能力組別	教學組別	樣本數	平均數	標準差
高分組	實驗組	10	38.40	6.501
	控制組	8	30.87	14.187
	總和	18	35.06	10.957
中分組	實驗組	10	26.10	5.820
	控制組	10	22.60	14.585
	總和	20	24.35	10.956
低分組	實驗組	10	18.00	7.134
	控制組	8	11.00	9.366
	總和	18	14.89	8.710
總和	實驗組	30	27.50	10.592
	控制組	26	21.58	14.879
	總和	56	24.75	12.987

在進行共變數分析前須先檢定組內迴歸係數同質性之假定，將統計  $\alpha$  值設定為 .05，考驗原分組的前測成績和後測成績間是否有顯著的交互作用，檢定結果顯示未達顯著 ( $F=.47$ ,  $p=.797>.05$ )，接受虛無假設，表示兩組的迴歸線的斜率相同，代表兩組的共變項（前測成績）與依變項（後測成績）

之間的關係，不會因為實驗各處理水準的不同而有所差異，符合共變數分析中組內迴歸係數同質性的檢定，所以繼續進行共變數分析，分析不同能力與不同的教學輔具，對於學生學習多項式展開概念之影響，分析結果如表 4-1-5。

表 4-1-5 不同能力與不同教學輔具在多項式展開成績之二因子共變數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F
能力組別	43.443	2	21.722	.222
教學組別	253.020	1	253.020	2.587
能力組別*教學組別	9.255	2	4.628	.047
誤差	4792.653	49	97.809	
全體	9276.500	55		

從二因子共變數分析摘要表，可以發現：排除數學段考平均成績的影響後，不同能力程度與不同教學輔具在多項式展開成績的學習效果上沒有顯著的交互作用 ( $F=.047$ ,  $p=.954>.05$ )，未達到顯著水準，代表不同能力程度與不同教學輔具在排除數學段考平均成績的影響後，在多項式展開成績方面並無顯著的交互作用。在能力組別與教學組別的主要效果之 F 值，分別為.222 ( $p=.802$ )、2.587 ( $p=.114$ ) 均未達顯著水準，代表高分組 ( $M=35.06$ )、中分組 ( $M=24.35$ ) 及低分組 ( $M=14.89$ ) 的學生在多項式展開的平均成績雖有差異但並未達到顯著水準，且在能力分組中，高分組成績高於中分組及低分組，中分組成績高於低分組成績，即使達到顯著水準也是自然現象，因此並無討論的意義；而使用虛擬教具或具體教具對學生學習多項式展開的成績也沒有差異，這與 Smith (2006) 的研究結果相同，使用具體教具或虛擬教具在多項式展開的實驗結果上並沒有顯著的差異。

4.1.3 研究假設 3：不同性別與使用不同的教學輔具，對學生學習數學因式分解概念沒有顯著的交互作用。

本研究假設的依變數之一為兩班學生後測「多項式展開與因式分解測



驗」中因式分解的成績，如表 4-1-6，共變量為兩班學生前一學期三次數學定期評量平均的成績，於教學實驗後進行二因子共變數分析。

表 4-1-6 兩組學生依性別在因式分解的後測成績

性別	教學組別	樣本數	平均數	標準差
男生	實驗組	14	8.57	9.882
	控制組	11	12.45	17.523
	總和	25	10.28	13.591
女生	實驗組	16	22.44	14.971
	控制組	15	25.33	13.983
	總和	31	23.84	14.334
總和	實驗組	30	15.97	14.464
	控制組	26	19.88	16.566
	總和	56	17.79	15.458

在進行共變數分析前須先檢定組內迴歸係數同質性之假定，將統計  $\alpha$  值設定為.05，考驗原分組前測成績和後測成績間是否有顯著的交互作用，檢定結果顯示未達顯著 ( $F=.68$ ,  $p=.571>.05$ )，接受虛無假設，表示兩組的迴歸線的斜率相同，代表兩組的共變項（前測成績）與依變項（後測成績）之間的關係，不會因為實驗各處理水準的不同而有所差異，符合共變數分析中組內迴歸係數同質性的檢定，所以繼續進行共變數分析，分析不同性別與使用不同的教學輔具，對於學生學習因式分解概念之影響，分析結果如表 4-1-7。

表 4-1-7 不同性別與不同教學輔具在因式分解成績之二因子共變數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F
性別	652.067	1	652.067	4.261
教學輔具	403.787	1	403.787	2.639
性別*教學輔具	20.807	1	20.807	.136
誤差	7804.800	51	153.035	
全體	13141.429	55		

從二因子共變數分析摘要表，可以發現：排除數學段考平均成績的影響後，不同性別與不同教學輔具在因式分解成績的學習效果上沒有顯著的交互作用 ( $F=.136, p=.714 > .05$ )，未達到顯著水準，代表性別與教學輔具在排除數學段考平均成績的影響後，在因式分解成績方面並無顯著的交互作用。在主要效果中，女生的因式分解後測成績 ( $M=23.84$ ) 顯著高於男生後測成績 ( $M=10.28$ ) ( $F=4.261, p=.044$ )。因式分解概念屬於代數學習的範疇之內，本研究針對因式分解成績來看，顯示女生在因式分解的成績顯著高於男生成績，這與國際學生學習成就表現調查研究 (TIMSS 2003) 結果相似，該研究結果顯示我國 8 年級女生在代數的平均數顯著高於男生 (曹博盛, 2005)。而黃國清 (2008) 的研究結果也顯示，在數學內容之學習，女生在代數的成就表現顯著優於男生。

#### 4.1.4 研究假設 4：不同能力程度與不同的教學輔具，對學生學習數學因式分解概念沒有顯著的交互作用。

本研究假設的依變數之一為兩班學生後測「多項式展開與因式分解測驗」中因式分解的成績，如表 4-1-8，共變量為兩班學生前一學期三次數學定期評量平均的成績，不同能力程度分為高分組、中分組與低分組，高分組為數學定期評量平均為 65 分以上的學生，而低分組為數學定期評量平均分數為未滿 40 分的學生，其於分數為 40 分以上而未滿 65 分的學生為中分組。於教學實驗後進行二因子共變數分析。

表 4-1-8 兩組學生依能力分組在因式分解的後測成績

能力組別	教學組別	樣本數	平均數	標準差
高分組	實驗組	10	30.90	10.159
	控制組	8	32.88	9.311
	總和	18	31.78	9.558
中分組	實驗組	10	13.60	10.384
	控制組	10	17.80	17.580
	總和	20	15.70	14.217
低分組	實驗組	10	3.40	5.797
	控制組	8	9.50	13.180
	總和	18	6.11	9.952
總和	實驗組	30	15.97	14.464
	控制組	26	19.88	16.566
	總和	56	17.79	15.458

在進行共變數分析前須先檢定組內迴歸係數同質性之假定，將統計  $\alpha$  值設定為 .05，考驗原分組前測成績和後測成績間是否有顯著的交互作用，檢定結果顯示未達顯著 ( $F=.85, p=.525 > .05$ )，接受虛無假設，表示兩組的迴歸線的斜率相同，代表兩組的共變項（前測成績）與依變項（後測成績）之間的關係，不會因為實驗各處理水準的不同而有所差異，符合共變數分析中組內迴歸係數同質性的檢定，所以繼續進行共變數分析，分析不同能力與不同的教學輔具，對於學生學習因式分解概念之影響，分析結果如表 4-1-9。

表 4-1-9 不同能力與不同教學輔具在因式分解成績之二因子共變數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F
能力組別	1751.494	2	875.747	6.460**
教學輔具	109.113	1	109.113	.805
能力組別*教學輔具	41.114	2	20.557	.152
誤差	6642.639	49	135.564	
全體	13141.429	55		

\*\* $p < .01$

從二因子共變數分析摘要表，可以發現：排除數學段考平均成績的影響後，不同能力程度與不同教學輔具在因式分解成績的學習效果上沒有顯著的交互作用 ( $F=.152, p=.860>.05$ )，未達到顯著水準，代表不同能力程度與不同教學輔具在排除數學段考平均成績的影響後，在因式分解成績方面並無顯著的交互作用。在能力組別與教學組別的主要效果之 F 值，分別為 6.460 ( $p=.003$ )、.805 ( $p=.374$ )，在能力組別雖然有達到顯著水準，但此為自然現象，因此無探討的意義。而使用虛擬教具或具體教具來教學，學生在因式分解的成績沒有差異。

4.1.5 研究假設 5：使用虛擬教具與具體教具於數學的教學現場中，對學生學習數學動機的提升沒有顯著的差異。

本研究於教學實驗前與教學實驗後均對實驗組與控制組的學生施以數學動機量表，如表 4-1-10。

表 4-1-10 實驗組與控制組教學實驗前後的數學動機量表成績平均數

教學組別	實驗前平均數	實驗後平均數	實驗後減實驗前
實驗組	34.43	33.66	-.77
控制組	36.08	37.54	1.46

並利用獨立樣本 t 檢定，考驗實驗組使用虛擬教具與控制組使用具體教具在多項式展開與因式分解教學實驗之後，其學習數學的動機提升是否有顯著的差異，分析結果如表 4-1-11。

表 4-1-11 實驗組與控制組在數學動機的 t 考驗摘要表

變項	人數	實驗後平均數減實驗前平均數	標準差	t 值
實驗組	30	-.77	6.290	.595
控制組	26	1.46	5.867	

從上述實驗組與控制組學生在數學動機之 t 統計考驗摘要表中可以發現：實驗組與控制組在教學後其數學動機的提升沒有顯著的不同，獨立樣本

考驗  $t$  統計量 $=.595>.05$ ，未達到 $.05$  的顯著水準，意即使用虛擬教具與具體教具於數學的教學，對學生學習數學的動機的提升並沒有顯著的差異。

本節針對實驗成效做分析後，在排除數學定期評量平均此共變數後，研究結果發現不同性別與使用不同的教學輔具，對學生學習多項式展開概念有顯著的交互作用，且在控制組中女生的成績顯著優於男生、實驗組男生的成績顯著優於控制組男生的成績。而不同能力程度與不同的教學輔具，對學生學習多項式展開概念是沒有顯著的交互作用，其主要效果顯示不同能力程度的學生，其多項式展開的成績並未達到顯著差異；而實驗組與控制組的學生，在多項式展開的成績亦無顯著差異。其次，不同性別與使用不同的教學輔具，對學生學習數學因式分解概念雖然沒有顯著的交互作用，但是，女生整體的成績是顯著優於男生的成績，而不同能力程度與不同的教學輔具，對學生學習數學因式分解概念沒有顯著的交互作用，其主要效果顯示高、中、低分組的成績皆有顯著差異，但無討論的意義；而實驗組與控制組的學生，在因式分解的成績並無顯著差異。最後，使用虛擬教具與具體教具於數學的教學現場中，對學生學習數學動機的提升沒有顯著的差異。



## 4.2 實驗組與控制組學生學習歷程分析

研究者透過教學過程的觀察及分析，並根據學生的學習單與心得及感想問卷，來探討學生在不同教學環境對相同的學習課程所產生的影響，以下內容分別針對矩形面積（多項式展開）與拼圖大賽（因式分解）兩個主題，描述控制組與實驗組中教學者和學習者的行為，最後並針對兩個主題做綜合分析。

### 4.2.1 主題一：矩形面積（多項式展開）

#### 1. 控制組的學習歷程描述

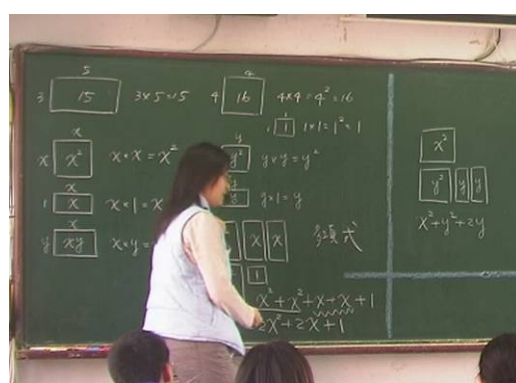
##### (1) 教學者行為

在課程開始之前，教師先在黑板上用藍色的粉筆畫上兩組大型的基準線如圖 4-2-1，以利教師在講解過程中明確表示矩形的面積以及矩形邊長的位置。在這堂課的一開始，教師引導學生複習矩形面積的求法、指數律以及以符號代表數字的單元，因此先問學生矩形面積該如何求出？先從邊長為實際數字開始，進而將數字轉變為文字符號，所舉的例子分別有： $3 \times 5$ 、 $4 \times 4$ 、 $1 \times 1$ 、 $x \times x$ 、 $y \times y$ 、 $1 \times x$ 、 $1 \times y$  以及  $x \times y$  共八種。當學生都了解之後，接著引導學生認識多項式，同樣以矩形面積來舉例，教師在黑板上畫上多個不同的矩形，請問學生這些矩形的面積總和為多少？由於這些矩形的邊長皆由文字符號來代表，因此將各矩形面積相加之後即會形成多項式，並講解同類項合併的概念，如圖 4-2-2。

圖 4-2-1 教師在黑板上畫兩組藍色基準線



圖 4-2-2 教師複習矩形面積及介紹多項式



接著教師請學生將桌面收拾乾淨以減少學生操作教具的困難，之後教師將具體教具發給學生，並請學生檢查教具袋內教具的數量是否有少，教具袋內有六種不同顏色及小的矩形，分別為： $x \times x$ 、 $1 \times x$ 、 $y \times y$ 、 $1 \times y$ 、 $x \times y$ 以及 $1 \times 1$ ，且解釋每種矩形的邊長及面積為何，如圖 4-2-3。學生確認無誤之後，教師開始講解矩形面積此單元的範例。教師總共示範三題，題型分別為： $x \times x$ （單項式 $\times$ 單項式）、 $x \times (x+1)$ （單項式 $\times$ 多項式）、 $(y+1) \times (y+2)$ （多項式 $\times$ 多項式），教師除了講解多項式展開的方法之外，也解說算式的寫法，如圖 4-2-4。範例說明完之後，就請學生依照學習單上的題目來練習，當大部分的學生都完成四題練習題時，教師請四位學生上來展示他們所拼出的圖形，如圖 4-2-5。學生展示完之後，教師講解問題探索的部分，針對這個主題做個小結，如圖 4-2-6。

圖 4-2-3 教師介紹具體教具的種類



圖 4-2-4 教師講解多項式展開範例



圖 4-2-5 學生上台展示



圖 4-2-6 教師講解問題探索



## (2) 學習者行為

當教師詢問矩形面積如何求時，無論矩形的邊長是實際數字或是以文字

符號來代表，學生都能回答得出來，並且都能專心看老師在台上講解。例如：教師問：「一個矩形的邊長分別為  $x$  與  $y$  時，請問此矩形的面積為何？」，學生回答：「 $x$  乘  $y$ 」。教師進而繼續問說：「中間的乘號可以用什麼代替？」，學生回答：「一點」，甚至有些學生直接說：「可以不寫」。對於教師所問的問題，學生大多都可以順利的回答。

前面引導的部分結束後，學生拿到教具後很興奮，因此老師要不斷提醒學生將教具先放下，請先看學習單的說明及範例。學生剛開始操作教具時會有點不習慣，而顯得手忙腳亂的，但是很快就能上手了。學生在練習的時候很少與旁邊同學討論，幾乎都是自己獨自操作，有問題時會舉手問教師。

## 2. 實驗組的學習歷程描述

### (1) 教學者行為

由於學生第一次到電腦教室上數學課，因此教師在課程開始之前先將學生的電腦開機並且將螢幕調整到虛擬教具操作的畫面，當學生一進教室時，要求學生先按照座位表就坐並且先不要動電腦。接著教師請學生先看黑板，開始列舉數個矩形，並詢問矩形面積如何計算，矩形的邊長由實際數字進而引導用文字符號來表示，所舉的例子分別有： $3 \times 5$ 、 $4 \times 4$ 、 $1 \times 1$ 、 $x \times x$ 、 $y \times y$ 、 $1 \times x$ 、 $1 \times y$  以及  $x \times y$  共八種，如圖 4-2-7。複習完之後，接著引導學生認識多項式，如圖 4-2-8，同樣是以矩形面積來舉例，教師在黑板上畫上多個不同的矩形，請問學生這些矩形的面積總和為多少，由於這些矩形的邊長皆由文字符號來代表，因此將各矩形面積相加之後即會形成多項式，並講解同類項合併的概念。

圖 4-2-7 教師複習矩形面積

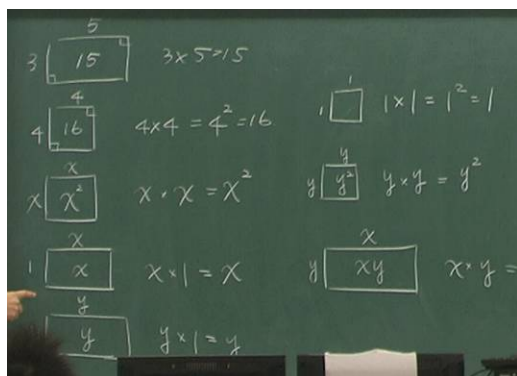
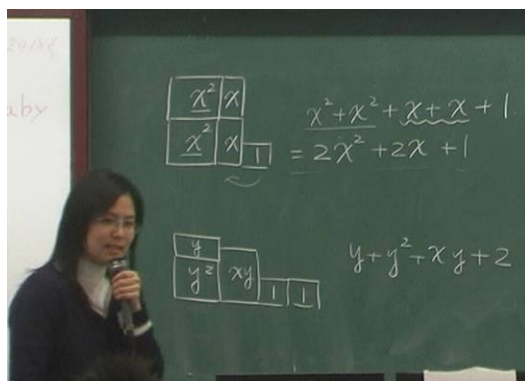


圖 4-2-8 教師引導學生認識多項式





以上的複習及引導結束之後，請學生將注意力轉到電腦的螢幕，教師介紹虛擬教具所提供的小矩形，分別為： $x \times x$ 、 $1 \times x$ 、 $y \times y$ 、 $1 \times y$ 、 $x \times y$ 以及 $1 \times 1$ ，且解釋每種矩形的邊長及面積為何，並且讓學生瞭解矩形旋轉的功能以及如何將矩形刪除，如圖 4-2-9。介紹完之後，教師開始講解學習單上的範例共三題，題型分別為： $x \times x$ （單項式 $\times$ 單項式）、 $x \times (x+1)$ （單項式 $\times$ 多項式）、 $(y+1) \times (y+2)$ （多項式 $\times$ 多項式），在講解圖形拼法的時候，教師請學生注意到， $x$ 、 $y$ 是可以調整大小的，如果答案正確，拼完後去調整大小是不會影響答案，但是如果學生是用拼湊的方式找出矩形面積，拼完之後去調整 $x$ 、 $y$ 的大小，原本的完成圖就會出現空隙。教師除了講解多項式展開的方法之外，也解說算式的寫法，如圖 4-2-10、圖 4-2-11。此外，教師亦講解錯誤的拼法，如圖 4-2-12，此種拼法是用拼湊的方式找出矩形面積，拼完之後去調整 $x$ 、 $y$ 的大小，原本的完成圖就會出現空隙。講解完之後，就請學生依照學習單上的練習題，實際使用電腦來操作練習，當大部分的學生都完成四題練習題時，教師請四位學生直接在電腦上展示他們所拼出的圖形，教師則以廣播系統讓全班同學可以看到，如圖 4-2-13、圖 4-2-14。學生展示完之後，教師講解問題探索的部分，針對這個主題做個小結，如圖 4-2-15。

圖 4-2-9 教師介紹虛擬教具畫面 396 圖 4-2-10 教師講解多項式展開範例

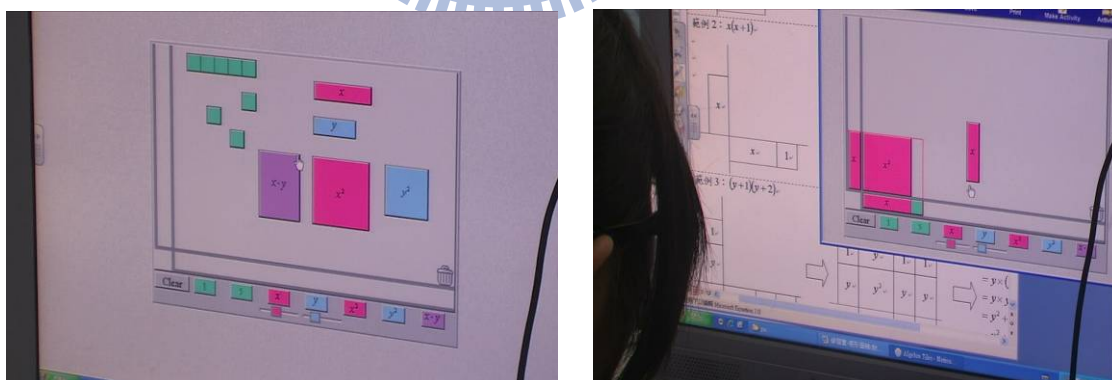


圖 4-2-11 教師講解多項式展開算式  
寫法

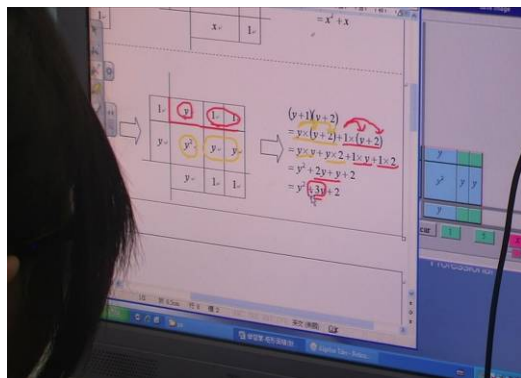


圖 4-2-12 教師講解錯誤拼法



圖 4-2-13 學生示範畫面

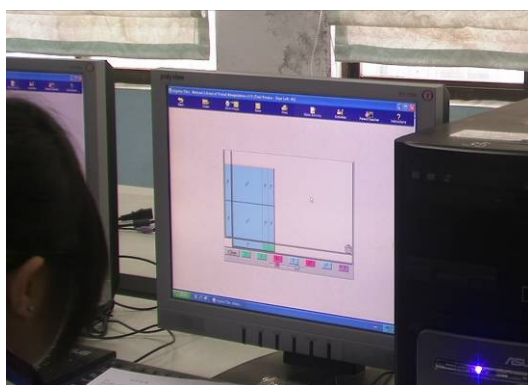
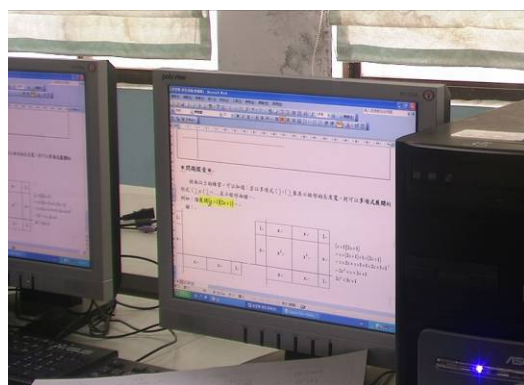


圖 4-2-14 學生示範畫面



圖 4-2-15 教師講解問題探索



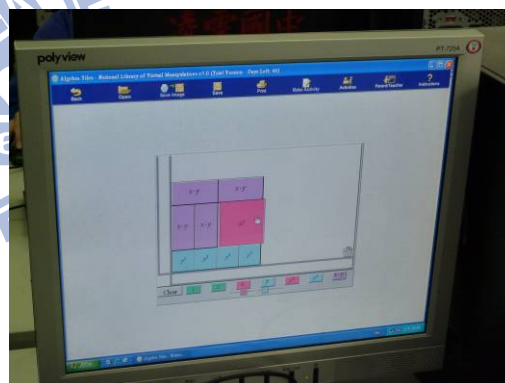
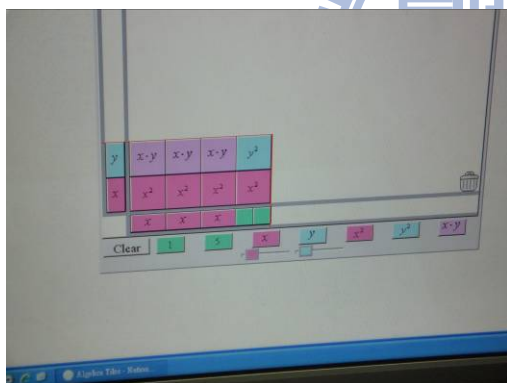
## (2) 學習者行為

學生第一次在電腦教室上電腦課，因此他們在電腦教室外面排隊時就顯得很興奮，很好奇究竟會是怎樣的一堂數學課。學生進到教室後，由於電腦的畫面已經被老師鎖定因此無法先自由操作，不過學生也很安靜的坐在座位

上等候老師開始上課。接著教師在複習矩形面積時，將邊長設定為文字符號的例子，如教師問：「當有個正方形的邊長為  $x$  時，請問此正方形的面積應該如何表示？」，一部分的學生回答：「 $x$  的平方（即  $x^2$ ）」，也有許多學生直接回答：「 $x^2$ 」，教師就以同樣的問題再問一次，學生也發現錯誤的地方，而幾乎所有的學生都能回答：「 $x$  的平方（即  $x^2$ ）」。

教師講解完之後，學生就可開始練習，在練習的過程中，很快的就習慣虛擬教具的操作方式，除了有時圖形設定得太大時，會不小心被垃圾桶吃掉，經過老師提醒之後，就很少有這樣的問題出現。另外，學生是透過滑鼠來操作教具，所有的畫面都呈現在電腦螢幕上，因此學生在練習的過程中不會出現桌面大小不夠的情形。另外，由於學生可以去調整  $x$  與  $y$  的大小，因此當學生將兩個的大小不小心調整成有比例關係時，就會出現如圖 4-2-16 與圖 4-2-17 的錯誤，經過教師的提醒之後，這樣的錯誤有減少許多。

圖 4-2-16  $x$  與  $y$  大小關係成比例時的錯誤      圖 4-2-17  $x$  與  $y$  大小關係成比例時的錯誤



## 4.2.2 主題二：拼圖大賽（因式分解）

### 1. 控制組的學習歷程描述

#### (1) 教學者行為

教師在這個主題當中，向學生講解學習單上的說明，要求學生必須將題目所給定的數個小矩形，拼出一個完整的大矩形。教師在這個單元提供一個範例： $2x^2 + x$ 。經由範例的講解，讓學生瞭解一個完整的大矩形應該是如何，當拼出完整的矩形之後，引導學生經由拼完的圖形來分解出此大矩形的長及寬並說明算式的寫法，如圖 4-2-18、圖 4-2-19。教師講解完之後，請學生使用教具依照學習單上的題目來練習，並且再次提醒學生，桌面只留下要用的

文具就好，以免桌面不夠使用。

圖 4-2-18 教師講解因式分解範例



圖 4-2-19 教師講解因式分解算式的寫法

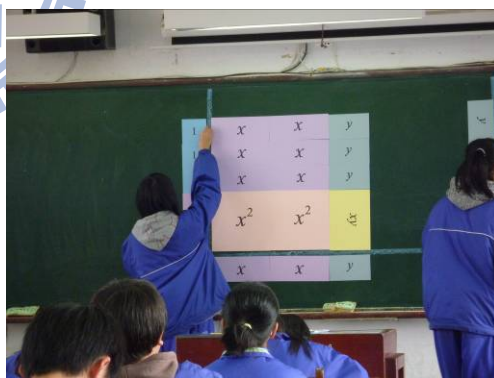


學生練習完之後，教師請四位同學上台示範，使用教師版的教具將自己的答案展示給全班同學看如圖 4-2-20、圖 4-2-21。學生展示完了之後，教師進行最後的問題探索，為這個主題做個小結。

圖 4-2-20 學生上台示範



圖 4-2-21 學生上台示範

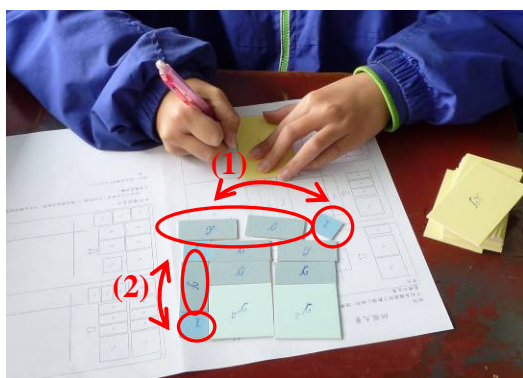


## (2) 學習者行為

休息時間一結束，學生很快地回到座位上準備進行第二個主題，教師在講解主題二的範例時，由於學生的教具也在手邊，因此有部分的學生是邊聽教師講解而邊操作。當教師講解完，學生立刻著手練習，這個部分會讓學生花比較多的時間在思考上，因為學生為了要拼成完整的大矩形，可能會用試試看的方式來拼，因此，在觀察學生的操作過程中，發現了一個學生常犯的錯誤，如圖 4-2-22，學生的確是拼出一個完整的矩形，但是完成圖當中會有

幾個小矩形的位置是錯誤的，如圖中(1)的 2 個面積為  $y$  的矩形與面積為 1 的矩形位置左右交換；及(2)的面積為  $y$  的矩形與面積為 1 的矩形位置上下交換，不過，經過教師的提醒，學生多半能避免相同的錯誤，但還是有少數學生會再犯。

圖 4-2-22 學生拼法錯誤



## 2. 實驗組的學習歷程描述

### (1) 教學者行為

在這個主題當中，教師向學生講解學習單上的說明，提醒學生必須將題目所給定的數個小矩形，拼出一個完整的大矩形，教師在這個單元提供一個範例： $2x^2 + x$ 。經由範例的講解，讓學生瞭解一個完整的大矩形應該是如何，當拼出完整的矩形之後，引導學生經由拼完的圖形來分解出此大矩形的長及寬並說明算式的寫法，如圖 4-2-23，並示範錯誤的拼法，如圖 4-2-24，說明此圖形並不是完整的矩形。教師講解完之後，就將畫面還給學生，讓學生依照學習單上的題目，來使用電腦來操作，當學生在練習時，教師再一次強調  $x$ 、 $y$  是可以調整大小的，如果答案正確，拼完後去調整大小是不會影響答案，但是如果學生是用拼湊的方式找出矩形面積，拼完之後去調整  $x$ 、 $y$  的大小，原本的完成圖就會出現空隙，所以要求學生盡量不要將  $x$ 、 $y$  調整成一樣的大小，以免影響正確答案。

圖 4-2-23 教師講解範例

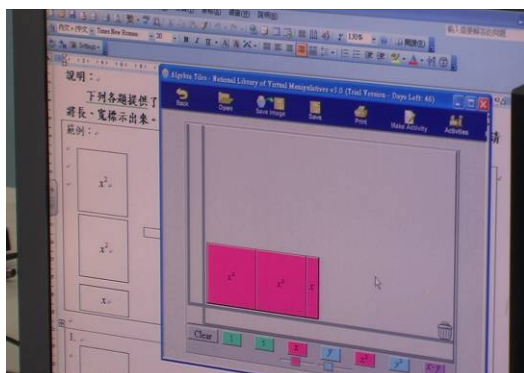
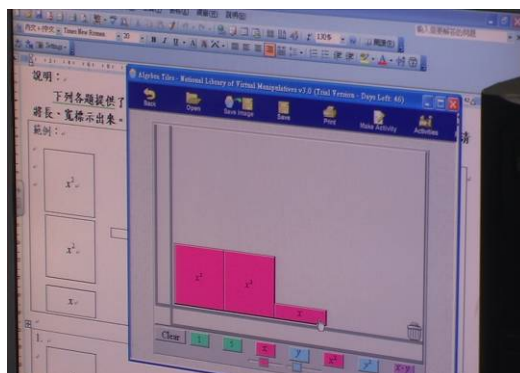


圖 4-2-24 教師講解錯誤拼法



學生練習完之後，教師同樣也請四位同學示範，教師將示範學生的電腦畫面切換給全班同學看，之後進行最後的問題探索部分，針對這個主題做個小結，如圖 4-2-25。

圖 4-2-25 教師講解問題探索



## (2) 學習者行為

學生在這個主題的一開始，可能因為剛休息完，因此有少數幾位學生還未定下心來上課，教師需提醒學生要注意看電腦的畫面。學生對於教師所講解的範例感覺很容易，因此教師講解完詢問學生有沒有問題，學生皆一致地回答：「沒有。」，當畫面還給學生時，大家都馬上開始動手操作滑鼠來練習。在練習的過程中，實驗組的學生也出現與控制組學生相同的錯誤，也就是雖然學生可以拼出一個完整的大矩形，但是，其中會有幾個小矩形的位置是錯誤的，如圖 4-2-26 中紅色框中三個面積為  $xy$  的矩形應與橘色框中三個面積為  $x^2$  的矩形位置上下交換，而圖 4-2-27 中紅色框中面積為  $x^2$  的矩形應與橘色框中面積為  $xy$  的矩形位置上下交換。

圖 4-2-26 學生錯誤拼法

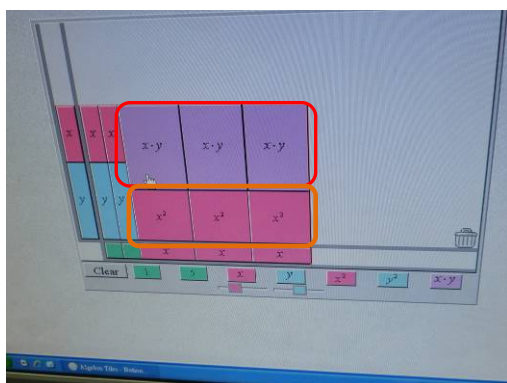
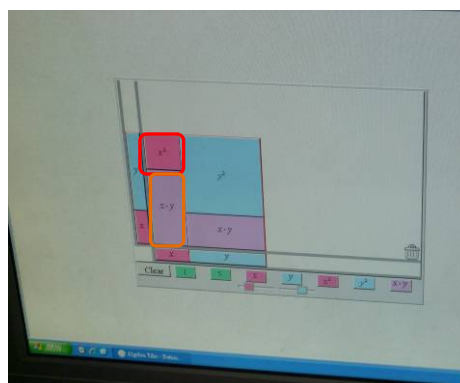


圖 4-2-27 學生錯誤拼法



學生在這個單元中比較常出現與隔壁同學討論的情形，不過有一、二位學生試了幾次都無法拼出完整的矩形時，就會開始用虛擬教具拼出一些與課程無關的圖形，如圖 4-2-28。而也有幾位學生的動作非常快，很快地就把四題練習題做完，也會開始拼他自己想要拼的圖形，如圖 4-2-29。

圖 4-2-28 學生拼出與課程無關的圖形

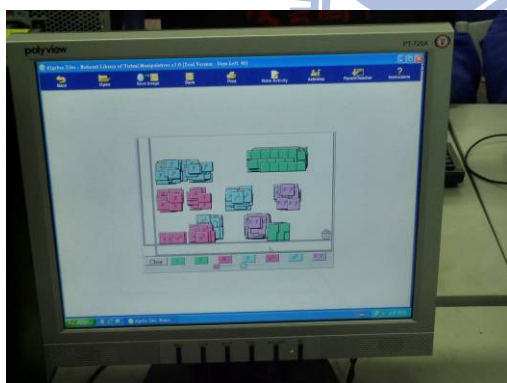
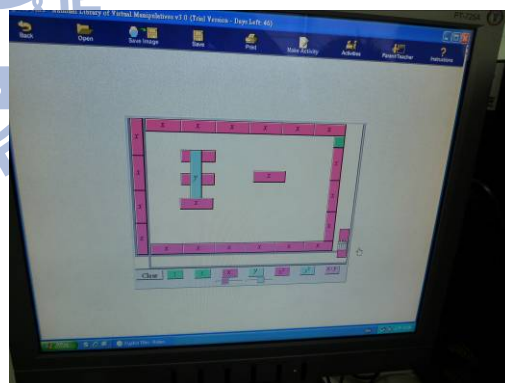


圖 4-2-29 學生自創的圖形



當練習時間結束，教師請學生示範操作時，大部分學生都能專心觀看畫面，並且對照自己與示範同學的圖形是否一樣，如果自己拼錯了，也會在休息時間再拼一次來修正答案。

#### 4.2.3 綜合分析

綜合以上在主題一矩形面積與主題二拼圖大賽的兩個單元中，教學者的教學內容在控制組與實驗組的教學內容是相同的，無論從複習矩形面積或是引導學生認識多項式展開概念與因式分解概念，到講解學習單的範例中，只

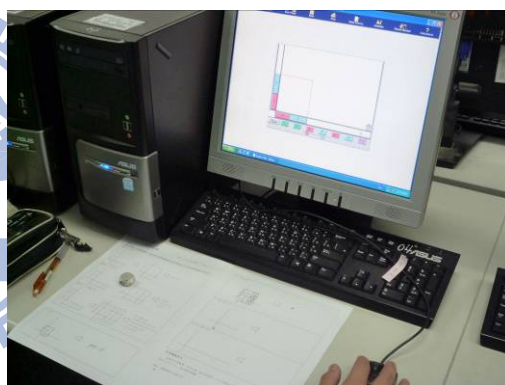
有使用的教具不同而已。在控制組中，教師也使用與學生相同的具體教具，而在實驗組中，教師亦使用與學生相同的虛擬教具。

而在教具的操作方面，控制組的學生會受到桌面的大小，而影響到自己操作教具的方便性，有時教具會掉到地上，有時整個桌面會顯得很雜亂，有時不小心動到已經拼好的圖形會讓學生需要重新調整；而實驗組的學生，桌面上只須要放置學習單以及他所需的文具，教具的操作與呈現都是透過電腦，不會影響到學生寫學習單的方便性，如圖 4-2-30、圖 4-2-31，這與 Izydorczak (2003) 所提出虛擬教具的優點之一相符合：虛擬教具比具體教具更容易操作。除此之外，實驗組的學生比控制組的學生在換練習題時，收教具的時間也比控制組來得快速，也因為如此，實驗組的學生比控制組的學生能較快完成練習題。

圖 4-2-30 控制組的桌面



圖 4-2-31 實驗組的桌面



在學生在練習題目方面，教師在矩形面積單元（多項式展開）中示範三個範例，而在拼圖大賽單元（因式分解）中只講解一個範例，由於範例的題數不多，以至於有些學生剛開始不知該如何動手練習題目。此外控制組與實驗組的學生有時會出現錯誤的拼法，兩組的學生有些是在完成圖中有幾個小矩形的位置錯誤，另外，實驗組有些則是  $x$  與  $y$  的大小太接近而影響學生的判斷，不過這錯誤在教師的講解之後就改善不少了。而學生在主題一矩形面積（多項式展開）的單元中，感覺比較容易作答；在主題二拼圖大賽（因式分解）的單元中，似乎要花多一些時間來思考。因此，學生會認為第二個單元（因式分解）的概念比較難理解。

控制組與實驗組的學生在上課的態度方面，兩組都表現得不錯，原因可能是，無論是使用具體教具或是使用虛擬教具，這兩種方式都與學生以往的



上課方式有所不同，因此較能吸引學生的注意力，所以每個學生都能專心聽教師講解，在練習題目的時候，也能專心操作教具來練習，不會有影響別人或是發呆的情形發生。



### 4.3 學生在學習單與心得及感想問卷的質化分析

研究者想要透過學生的學習單及心得及感想問卷的描述，來了解並分析不同的教學環境對學生學習相同課程內容所產生的影響，本節的內容將分別探討使用虛擬教具的教學環境與具體教具的教學環境下，對於學生的學習行為和學習態度的影響。

#### 4.3.1 學生的學習單分析

##### 1. 主題一：矩形面積（多項式展開）

教學者首先講解矩形面積（多項式展開）的三個範例來讓學生了解多項式展開的方法： $x \times x$ （單項式 $\times$ 單項式）、 $x \times (x+1)$ （單項式 $\times$ 多項式）、 $(y+1) \times (y+2)$ （多項式 $\times$ 多項式），除了講解矩形面積的拼法之外，也引導學生能夠將算式列出。之後分別要兩組的學生使用虛擬教具與具體教具練習學習單上的練習題，並要求學生在學習單上畫出他所拼出的圖形以及寫出算式，圖形及算式皆正確如圖 4-3-1，圖形正確但算式錯誤如圖 4-3-2，圖形及算式皆錯誤如圖 4-3-3。其學習單結果整理如表 4-3-1 學生於矩形面積學習單的作答情形。

圖 4-3-1 矩形面積單元圖形及算式皆正確

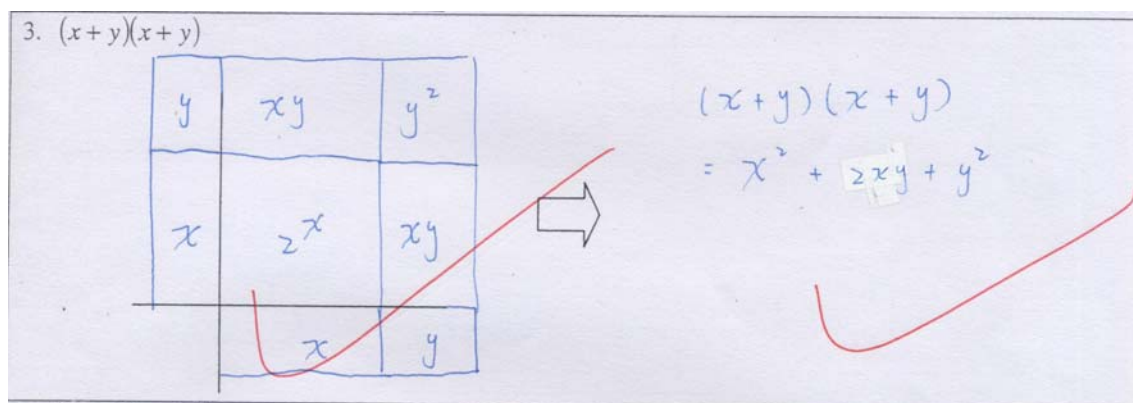


圖 4-3-2 矩形面積單元圖形正確但算式錯誤

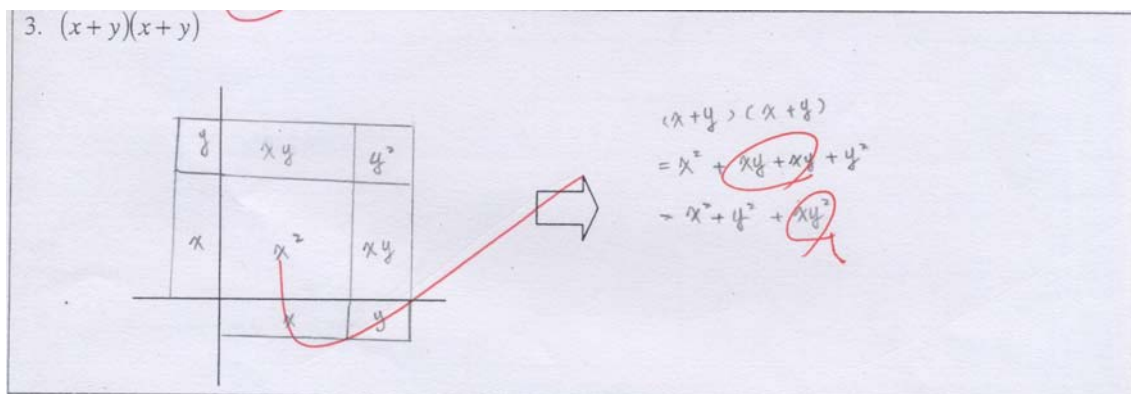


圖 4-3-3 矩形面積單元圖形及算式皆錯誤

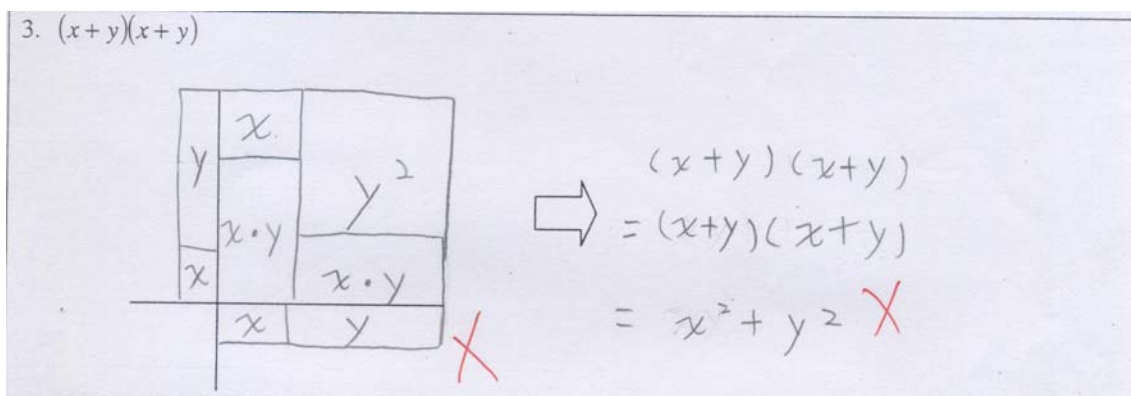


表 4-3-1 學生於矩形面積學習單的作答情形

題目	項目	實驗組	控制組	合計
		30 人	26 人	56 人
練習 1 $y \times y$	能正確拼出圖形及寫出算式	27	24	51
	圖形正確但算式錯誤或未寫算式	2	2	4
	圖形與算式兩者都錯誤	1	0	1
練習 2 $2y \times (y+2)$	能正確拼出圖形及寫出算式	15	10	25
	圖形正確但算式錯誤或未寫算式	14	12	26
	圖形與算式兩者都錯誤	1	4	5
練習 3 $(x+y)(x+y)$	能正確拼出圖形及寫出算式	9	16	25
	圖形正確但算式錯誤或未寫算式	17	7	24
	圖形與算式兩者都錯誤	4	3	7

(接下頁)

表 4-3-1 (續 1)

練習 4 $(x+y)(3x+2)$	能正確拼出圖形及寫出算式	7	7	14
	圖形正確但算式錯誤或未寫算式	22	15	37
	圖形與算式兩者都錯誤	1	4	5

在練習 1 中，實驗組與控制組的學生幾乎都能正確將圖形及算式完整地表達出來(共 51 人)，該題的複雜度不高即使是程度較低的學生也很容易理解。在練習 2 中，實驗組與控制組全部答對的學生相較於練習 1 就少了將近一半。到了練習 3 與練習 4，由於題目的複雜度增加了，全對的學生也就變少許多。

綜合上述，無論是控制組或是實驗組的學生，大部分的人至少都能將圖形畫出，但是算式的表達還不熟練，以至於算式的部分作答情形並不理想。

## 2. 主題二：拼圖大賽 (因式分解)

教學者首先講解拼圖大賽 (因式分解) 的範例  $2x^2 + x$ ，引導學生經由給定的數個小矩形，需將所有小矩形組合成一個完整的大矩形，來觀察組合完成的大矩形其邊長即為因式分解的結果，並引導如何將算式寫出。之後分別要兩組的學生使用虛擬教具與具體教具練習學習單上的練習題，並要求學生在學習單上畫出他所拼出的圖形以及寫出算式，圖形及算式皆正確如圖 4-3-4，圖形正確但算式錯誤如圖 4-3-5，圖形及算式皆錯誤如圖 4-3-6。其學習單結果整理如表 4-3-2。

圖 4-3-4 拼圖大賽單元圖形及算式皆正確

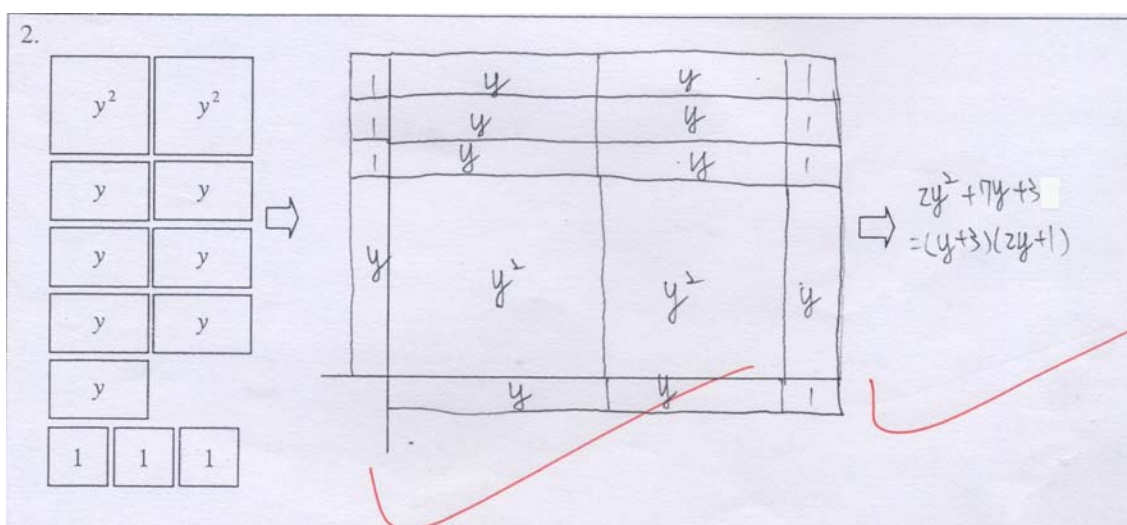


圖 4-3-5 拼圖大賽圖形正確但算式錯誤

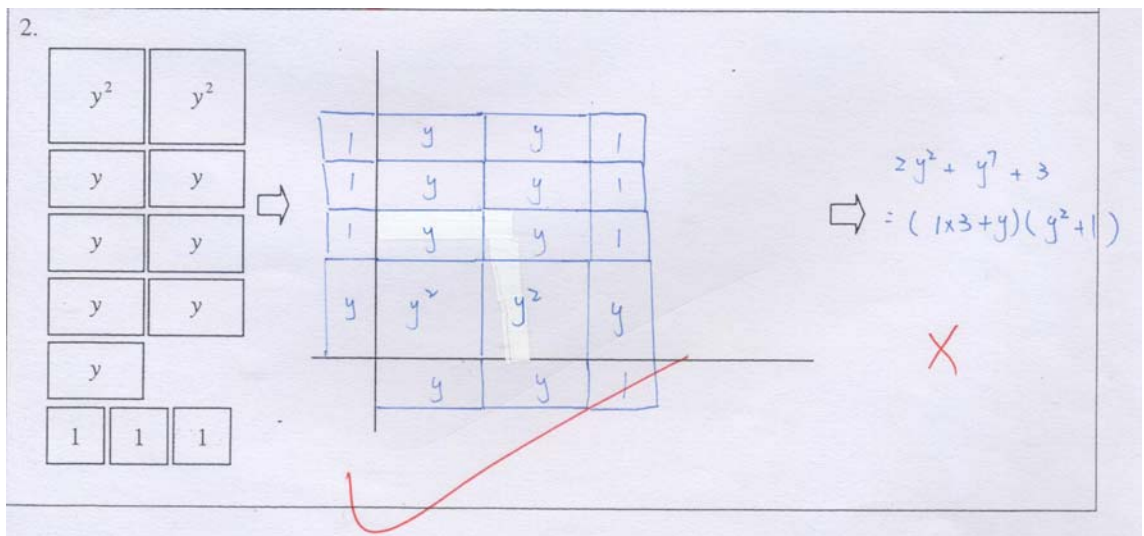


圖 4-3-6 拼圖大賽圖形及算式皆錯誤

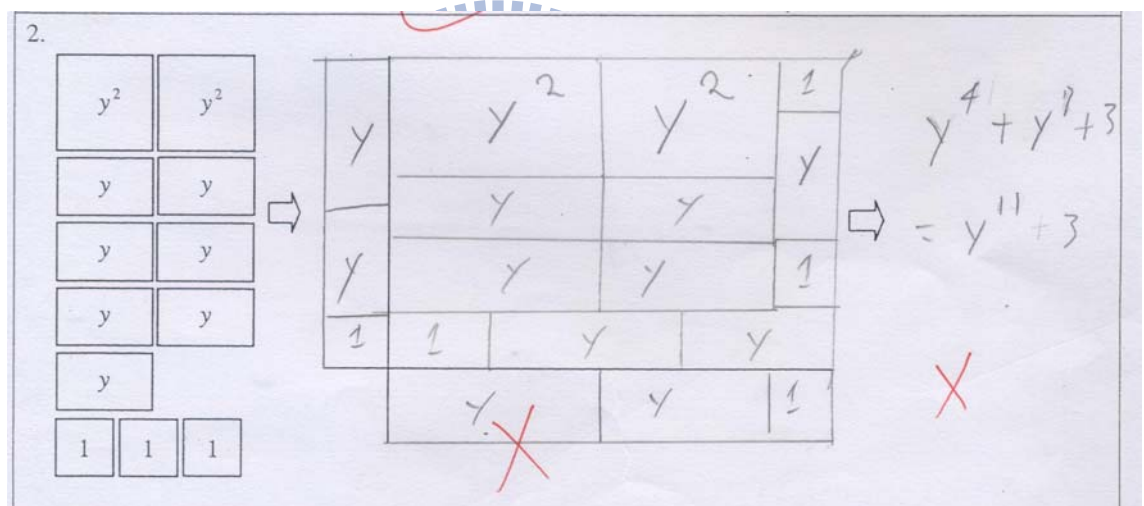


表 4-3-2 學生於拼圖大賽學習單的作答情形

題目	項目	實驗組	控制組	合計
		30 人	26 人	56 人
練習 1 $x^2 + 3x$	能正確拼出圖形及寫出算式	16	19	35
	圖形正確但算式錯誤或未寫算式	14	6	20
	圖形與算式兩者都錯誤	0	1	1

(接下頁)

表 4-3-2 (續 1)

練習 2 $2y^2 + 7y + 3$	能正確拼出圖形及寫出算式	16	14	30
	圖形正確但算式錯誤或未寫算式	13	5	18
	圖形與算式兩者都錯誤	1	7	8
練習 3 $2x^2 + 6x + xy + 3y$	能正確拼出圖形及寫出算式	16	16	32
	圖形正確但算式錯誤或未寫算式	14	7	21
	圖形與算式兩者都錯誤	0	3	3
練習 4 $x^2 + 4xy + 4y^2$	能正確拼出圖形及寫出算式	15	17	32
	圖形正確但算式錯誤或未寫算式	11	3	14
	圖形與算式兩者都錯誤	4	6	10

在這個單元中，兩組的學生都認為比較困難，因為要把給定的數個小矩形拼出一個完整的大矩形，需要花比較多的時間，且這四題練習題中，兩組學生的解題方式幾乎都是先把這四題的圖形先畫出來，畫完之後再去寫算式。其中在實驗組學生常出現的錯誤是學生不小心將  $x$  與  $y$  的大小調到差不多或是接近比例關係時，就會影響到大矩形正確與否。而在控制組學生常出現的錯誤則是，隨著題目的複雜度增加，學生擺在桌面上的教具就愈顯得雜亂，一旦擺錯或是不小心弄亂，就需要重新調整。雖然能正確拼出圖形及寫出算式兩組的人數都差不多，但是在圖形正確但算式錯誤或未寫的部分，控制組就明顯地表現得不如實驗組，因為控制組的學生花較多的時間在將教具排整齊，而剩下的時間就不夠學生去思考如何將算式正確地寫出。

綜合以上兩個主題學生在學習單上作答的情形，學生對於拼出圖形比寫出算式還來得容易，在加上兩組學生都有操作教具，因此對他們來說使用教具來拼出答案的吸引力遠超過研究算式該如何正確表達。

#### 4.3.2 學生心得及感想問卷分析

本小節主要在分析學生對於使用不同的教具做為教學輔具進行多項式展開與因式分解教學的看法和影響，實驗組與控制組的學生在教學後均填寫心得及感想問卷。問卷的題目內容包含你認為教具的使用及操作最困難的地方在哪？請說明原因、在這次的課程當中，你覺得哪裡最難理解？請寫出原因、你對這次數學課的感想為何、這次的數學課程，有什麼特別的地方？你喜歡嗎？為什麼、你覺得透過一些操作來學習數學，有比較容易瞭解數學

嗎？為什麼，以下根據兩組學生撰寫的內容，進行整理與分析。為了研究方便記錄與描述，並保護個人隱私，學生姓名均以化名呈現。

1. 你認為教具的使用及操作最困難的地方在哪？請說明原因。

實驗組有 9 位學生認為完全沒有困難，很快就上手，而有 21 位學生認為有部分的困難，理由是位置有時對不到、旋轉時圖形會變大、圖形太大容易被垃圾桶吃掉。學生的說法整理如下：

小樺：沒有，因為操作的東西都蠻簡單。

小芸：我覺得沒有困難的地方。把數學用在電腦上很好，這樣讓我很快就上手。

阿臻：有些會不聽話！很難擺到想要的位置！

小凱：換方向，有時轉一轉會變大。

小涵：圖形太大會被垃圾桶吃掉，因此就要把圖形縮小。

阿清：全部都很難，因為我沒有想要懂它。

學生剛接觸這種不同的教學方式，對於教具的操作剛開始會不熟悉，同學若是在練習時遇到困難也會當場舉手，經由老師講解過後有比較能適應，在後續的操作上就比較順手了。而認為全部都很難的學生，則是因為對數學完全沒有興趣，只要是跟數學扯上關係即使改變教學方式，他也覺得很難，對於動手操作也是興趣缺缺，只在畫面上點了許多的小矩形，並沒有去練習。

控制組有 11 位學生認為完全沒有困難，且操作方便，而有 15 位學生認為有部分困難，其理由包含了桌面太小、位置不夠，以及排好的圖形容易亂。學生的說法整理如下：

阿純：我覺得教具輕巧又方便，而且在圖卡上有明確的印上數字，大小也很一致，在計算上，對我有很大的幫助。

小誼：應該是教具是否對齊吧！因為這樣會影響答案以及作答時間。

小蓁：很容易弄亂……拼好要收起來時，會這個掉、那個掉的……。

阿宏：在排的時候，因為我感覺我的桌子比別人的小，所以會一直掉。

阿芳：要如何排成矩形，因為從來沒試過這樣的排法，所以剛開始會不習慣。

控制組的學生對於具體教具的使用還算順利，只是學生在實際操作時會受限於桌面的大小，一不小心教具就會掉到地上，或是容易將已經排好的圖形弄亂而需要重新調整或排列。不過經過一兩次的練習之後，學生對於桌面

文具、講義及教具的安排就比較妥當了，手忙腳亂的情況減少了。

綜合上述，無論是實驗組或是控制組在教具的操作方面，由於是第一次接觸這種與以往較不同的教學方式，因此在剛開始時會有些不習慣的地方，實驗組所操作的教具是透過滑鼠，而畫面是呈現在螢幕上，相較於控制組是將教具排放在桌面上會顯得比較不順手，適應的時間也比實驗組要來得長一些。因此，實驗組的學生比控制組的學生在教具的使用上更為方便，這也呼應了 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具比具體教具更容易操作。

## 2. 在這次的課程當中，你覺得哪裡最難理解？請寫出原因。

實驗組與控制組大多數的學生都認為因式分解的部分以及圖形拼出之後，在試著寫算式的時候較困難。學生的說法整理如下：

小昕：我覺得因式分解比較困難，因為要想很久才想得出答案，有些我更是寫不出答案。

阿翔：拼圖大賽（因式分解），很難，要解很久。

小傑：拼圖大賽（因式分解），有時會拼不出來。

小婷：因式分解。如何解因式分解，很難找出長和寬，且比較要花時間。

小瑄：畫完圖要寫算式，就不會寫啊。

小意：要列算式時，不知道要怎麼列。

小宥：算式吧！因為有時候會無法立即反應而寫出算式，需要時間思考一下。

兩組的學生在矩形面積（多項式展開）的單元中較能了解，因為矩形面積等於長乘寬是學生們較為熟悉的部分，即使改成多項式的形式也較能接受，而在拼圖大賽（因式分解）的單元中，學生對於要求把數個小矩形組合成一個完整的大矩形感到比較困難，思考的時間也比較久。在學生拼出圖形之後，教學者希望他們能試著將算式寫出，但是有許多的學生則認為這個部份很困難。

## 3. 你對這次數學課的感想為何？

實驗組與控制組學生的感想多半覺得好玩、有趣，與以往的教學方式有所不同，也有少數人認為要排出圖形好麻煩。學生的說法整理如下：

小芸：很特別的一次數學課，竟然可以用電腦來寫數學，讓我印象深刻。

小慈：我覺得這堂課讓我學到很多東西，不過有些很難，我都不會算。



小涵：原以為數學很無聊，但經過這次數學課後，數學好像變有趣了。

小珮：很棒，可以玩拼圖動腦筋，也關係到重要的數學。

阿凱：這次數學課很好玩，雖然有點困難，可是讓我學到了很多。

小婷：過程中，從不會到可以輕鬆做題，感覺很有成就感。

小意：很特別（很少用圖形計算），更有信心（計算不好，但用圖形拼湊比較容易）。

阿坪：數學好難喔！要排好圖形要花好多時間，好麻煩。

兩組的學生對於不同的教學方式感到新奇，有部分同學認為利用實際的圖形來理解數學是個很好的方式，感覺像在玩拼圖，但是在玩的過程中又可以學到數學的概念。但是有少數同學則認為只要是跟數學扯上關係的都會變得很難，很容易在解題的過程中就輕易的放棄。

#### 4. 這次的數學課程，有什麼特別的地方？你喜歡嗎？為什麼？

實驗組學生一致認為使用電腦來上數學是最特別的地方，對於這樣的方式也感到喜歡。學生的說法整理如下：

小瑄：用電腦解題，喜歡，很新鮮。

小慈：用電腦操作，喜歡，因為第一次用電腦來理解數學，感到非常有興趣。

阿雅：把未知數變成圖形來解出答案。喜歡。這樣藉由圖形來解出數學題目的答案比較有趣。

阿華：上數學課時用電腦上課，我很喜歡，因為很奇特。

小凱：在電腦教室上，我非常喜歡，因為這個方式很方便，老師也可以少用粉筆。

學生以往上數學課的經驗都是在普通教室上課，因此這次的教學實驗將實驗組的學生帶進電腦教室上課，讓他們覺得很新鮮也很興奮，幾乎所有的學生都是第一次接觸虛擬教具，藉由實際操作來了解數學概念也認為相當有趣。

控制組的學生對於自己能夠實際操作感到新鮮，因此幾乎都認為使用教具是最特別的地方。學生的說法整理如下：

阿昌：用教具拼東西，喜歡，因為有自己專用的教具。

小菁：拼拼圖，我喜歡，因為拼拼圖可以讓我動腦筋，而且也讓我學到了很多。

小靜：多了一些圖卡讓我們使用，我也很喜歡，因為這樣操作起來更方便。

小宥：有啊！利用拼圖來解數學，喜歡……因為可以讓我們更愛上數學課，也讓煩悶的數學課增添了樂趣。

阿雅：最特別的地方就是使用教具，因為上了國中後就比較沒在用教具，這是個不錯的教學方法。

控制組的學生在上課地點方面雖然與平常一樣，但是學生每個人都可以擁有一套教具來操作、練習，認為這樣可以動手練習的方式很有趣，因為以往老師有時上課時所使用的教具都只有一組，且是老師在講台上操作給學生看，學生很少有機會實際操作練習。因此學生對此種上課方式是感到非常感興趣的。

綜合上述，無論是實驗組的學生透過電腦來操作教具，或是控制組學生直接操弄矩形紙卡的教具，這兩種教具的形態雖然不同，但是對於學生來說卻是很新奇的，一部分的學生會因為教學方式的改變而對原本不感興趣的科目，願意試著去了解。

5. 你覺得透過一些操作來學習數學，有比較容易瞭解數學嗎？為什麼？

實驗組與控制組的學生大多數認為經過操作來學習數學，能幫助他們理解，少數幾位同學認為自己的理解力不好或是認為數學本來就很難。學生的說法整理如下：

小涵：有，透過操作，把複雜的未知數變成比較好理解。

阿偉：會，因為用這種方式學習比較容易懂。

小翔：有，有圖像的學習就變得簡單多了。

小婷：有，通常都以筆算，而這次算數學用紙卡了解更快更準確，且也不會覺得數學離我愈來愈遠了。

小菁：有，因為光看老師做，根本不了解怎麼做，自己做，就可以輕易的了解數學。

小宥：有呀……因為有實際的操作，總比只用頭腦想來得簡單多了，解題的時間也縮短了許多。

小盈：沒有，因為我學習和理解能力都不好。

小妤：沒有，大腦還是轉不過來。

綜合上述，無論是使用虛擬教具或是使用具體教具的學生，都是經由操弄教具來理解數學概念，學生對於這種將數學抽象概念具體化的方式反應良好，一般教師上課的方式是在黑板上講解，頂多會在講台上使用教具給學生看，但是學生要實際操作教具的機會卻很少。將數學的抽象概念具體化是教具的優點，對這個階段的學生處於兒童心理學家皮亞傑所說的具體運思期與形式運思期的過渡，因此讓學生除了看得到甚至動手可以摸得到，是能夠幫助他們更快更有效的理解數學的抽象概念。Sharp (1995) 的研究中，學生表示”如果我不曾接觸過 Algebra Tile，我永遠不可能解出這些問題。”，這和本實驗中學生的感受是相類似的。學生對於教具的使用有正面的態度，也覺得更容易理解，這和 Goins (2001) 表示教具有助於學習，特別是在技巧與理解的結論也是一致的。



## 五、 結論與建議

本研究主要在探討使用虛擬教具與具體教具於多項式展開與因式分解課程教學實施後，對學生學習此兩種概念的影響。以下依據研究結果歸納結論，並提出建議，做為未來相關研究之參考。

### 5.1 結論

本節主要根據教學後量化的統計數據分析，以及學生課堂上的歷程分析、教學過程中所蒐集的學習單與心得感想問卷的質化分析，進行結果歸納。

一、 不同性別與使用不同的教學輔具，對學生學習多項式展開概念有顯著的交互作用，單純主要效果分析如下：

1. 使用虛擬教具於多項式展開的單元中，男生與女生的成績並無差異。
2. 使用具體教具於多項式展開的單元中，女生成績顯著優於男生成績。
3. 就男生而言，使用虛擬教具的成績顯著優於使用具體教具。
4. 就女生而言，使用虛擬教具與具體教具的成績無顯著差異。

女生對於使用虛擬教具或是具體教具來學習多項式展開概念的單元中，是具有相同的效果；但對於男生來說，使用虛擬教具比具體教具來得新奇，因此研究結果顯示使用虛擬教具的男生成績比使用具體教具的男生成績來的好。

二、 不同能力程度與不同的教學輔具，對學生學習多項式展開概念沒有顯著的交互作用。

高分組、中分組與低分組的學生，在多項式展開測驗的成績並無顯著差異。且使用虛擬教具與具體教具的學生，在多項式展開成績上，並無顯著的差異。

三、 不同性別與使用不同的教學輔具，對學生學習數學因式分解概念沒有顯著的交互作用，而討論其主要效果。

使用虛擬教具與具體教具於數學因式分解概念的單元中，整體女生成績

顯著優於男生。且使用虛擬教具與具體教具於因式分解的單元中，學生成績並無顯著的差異。

四、 不同能力程度與不同的教學輔具，對學生學習數學因式分解概念沒有顯著的交互作用。

高分組、中分組與低分組的學生，在因式分解測驗的成績有顯著差異。且使用虛擬教具與具體教具的學生，在因式分解的成績上，並無顯著的差異。

五、 使用虛擬教具與具體教具於數學的教學現場中，對學生學習數學動機的提升並沒有顯著的差異。



## 5.2 建議

本節根據本研究的結論以及研究者在整個研究過程的經歷，在教學、教材設計及未來相關研究上提出下列幾點建議。

### 一、 教學上的建議

1. 由於控制組的學生操作具體教具較為費時，以至於練習時間受到壓縮，而概念的形成本也需要一定的時間，因此，建議能增加教學的時間讓學生能有更多的探索及思考的時間。
2. 本研究的教師在多項式展開單元中舉了三個範例，而在因式分解中僅舉一個範例，因此有些學生在教師結束示範後還不知該如何根據題目來練習。所以日後的研究者在引導學生時所舉的範例可以增加一些，讓學生更能清楚了解教師所要傳達的數學概念。
3. 本研究的結果顯示，使用虛擬教具的男生表現較使用具體教具的男生佳，因此，建議在代數學習中，適度引入虛擬教具協助男生增進代數思維及學習成效。
4. 實驗組學生在操作虛擬教具比控制組學生操作具體教具來得方便，控制組的學生在操作教具時會受限於桌面的大小，而發生教具掉落的狀況或是桌面混亂的情況，實驗組學生所使用的虛擬教具都是透過電腦螢幕來呈現，因此，操作起來比控制組來得方便。因此，針對控制組的學生若能有較大的擺放空間，以減少控制組操作教具的不便。
5. 無論是在電腦教室使用虛擬教具的實驗組或是在普通教室使用具體教具的控制組，兩組的學生在心得與感想問卷中都認為，能夠親自操作教具來學習數學，更能引起他們學習數學的興趣。

### 二、 教材設計上的建議

1. 本研究雖已將教具紙張的厚度增加，但在控制組中的學生常常因不小心動到已經拼好的圖形而造成困擾，因此，往後的研究者若能額外製做一個可對齊的板子，更能增加操作具體教具的方便性。
2. 學生在練習的過程中，最常出現的錯誤是矩形位置錯誤但答案正確，因此，教具操作過程應盡量接近現實，但仍作適度的簡化、限

制，避免操作中過多的干擾，例如：設定方塊間必需邊長吻合，避免湊合答案，反造成學生錯誤認知。

### 三、 未來相關研究的建議

1. 本研究是採方便取樣，一班為實驗組，一班為控制組，且教學時間只有 100 分鐘，因此，有樣本數較小及教學時間較短的限制，日後若有研究者有意進行相關研究，可將這兩點加以改進，使教學實驗更具代表性。
2. 本研究僅選取兩個班的學生為研究對象，一班為虛擬教具組，一班為具體教具組，在未來的相關研究中若能增加一組為傳統教學組，即不使用任何教具的組別，更能使研究設計更為嚴謹。
3. 虛擬教具在本研究中，僅限於國中中型學校的代數學習單元，若能廣泛的在其他教學環境，如城、鄉學校，或應用於其他數學單元來實驗，例如：幾何、統計，可增加對虛擬教具的實證研究。



## 參考文獻

### 中文部分

- 王智弘 (2006)。多方塊虛擬教具的開發與教學研究。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，未出版，新竹市。
- 方鳳娟 (2002)。國中生對乘法公式從幾何呈現轉化到代數描述的學習成效之研究。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版，彰化市。
- 江佳惠 (2001)。以幾何面積為類比物教授國一代數乘法公式之研究。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版，彰化市。
- 李美蓮、劉祥通 (2003)。開啟國中代數教學的新視窗。科學教育月刊，265 (12)，2-15。
- 吳明隆 (1999)。數學教育歷程中性別學習差異的探究。國教之友，553，12-23。
- 林瑞蘭 (2008)。虛擬教具應用於國小三年級周長與面積概念教學之影響研究。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，未出版，新竹市。
- 袁媛 (1993)。國中一年級學生的文字符號概念與代數文字題的解題研究。高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版，高雄市。
- 教育部 (2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。台北：教育部。
- 張玉琪 (2009)。虛擬教具對於國中學生學習鑲嵌圖形之影響。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，未出版，新竹市。
- 張春興 (1994)。教育心理學—三化取向的理論與實踐。台北市：東華出版社。
- 郭汾派、林光賢、林福來 (1989)。國中生文字符號概念的發展。行政院國家科學委員會專題研究成果報告 (編號：NSC76-0111-S008-03，NSC77-0111-S003-05A)。
- 曹博盛 (2005)。TIMSS 2003 台灣國中二年級學生的數學成就及其相關因素之探討。台北：國立台灣師範大學科學教育中心。
- 陳皎眉、孫旻暉 (2006)。從性別刻板印象威脅談學業表現上的性別差異。教育研究月刊，147，19-30 頁。
- 陳嘉皇 (2007)。學童「圖卡覆蓋」代數推理歷程之研究—以三個個案為例。國民教育學報，19，79-107。



- 黃幸美 (1995)。數理與科學教育的性別差異之探討。婦女與兩性學刊，6，95-135。
- 黃國清 (2008)。數學學習成就之性別差異研究—以九年一貫課程七年級數學綱要為例。中等教育，59 (4)，40-56。
- 彭健彰 (2008)。虛擬教具應用於國小四年級重量概念教學之影響研究。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，未出版，新竹市。
- 楊淑芬 (1992)。數學史在數學教育中的重要性。數學傳播，16 (3)，16-22。
- 楊中宜 (2006)。國中生進入代數領域理解符號意義對解題影響之探討—以台北縣 A 國中為例。銘傳大學教育研究所碩士在職專班碩士論文，未出版，台北市。
- 劉家樟 (2005)。小六學生解題表現與國小教師對學生解文字題信念之差異。中原大學教育研究所碩士論文，未出版，中壢市。
- 劉賢建 (2006)。虛擬計算機的開發與教學研究—以探索數字樣試一般化為例。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，未出版，新竹市。
- 簡茂發、李虎雄、陳昭地、林保平、王淑真、陳文典、陳義勳、吳碧霞、黃長司、黃萬居、鄭美雪、曾文雄、吳美麗、卓娟 (1994)。教育部八十三年度國民教育階段學生學習成就評量研究。台北：國立台灣師範大學中等學校研習中心。
- 盧雪梅 (2007)。國民中學學生基本學力測驗國文科和英語科成就性別差異和性別差別試題功能 (DIF) 分析。教育研究與發展期刊，3 (4)，79-95。
- 盧雪梅、毛國楠 (2008)。國中基本學力測驗數學科之性別差異與差別試題功能 (DIF) 分析。教育實踐與研究，21 (2)，95-126。
- 謝宜玲 (2002)。在課堂討論情境下國一學生文字符號概念及運算相關法則的認知。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版，高雄市。
- 謝佳叡 (2004)。從算術思維過渡到代數思維。未發表。
- 薛圳宏 (2002)。發展數學科教學模組之個案研究—以多項式展開和因式分解單元為例。國立高雄師範大學數學系教學碩士論文，未出版，高雄市。
- 戴文賓、邱守榕 (2000)。國一學生由算術領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵。科學教育，10，148-175。

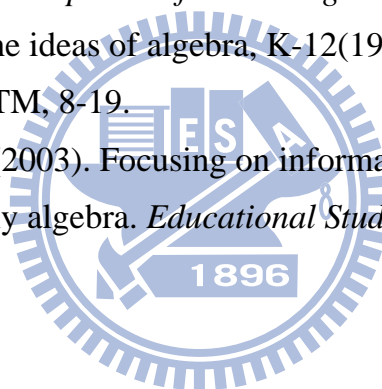
## 英文部分

- Ainley, J., L. Bills, et al. (2005). Designing spreadsheet-based tasks for purposeful algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(3), 191-215.
- Adelman, C. (1998). *Answers in the toolbox*. Washington, DC: U.S. Department of Education.
- Borenson, H. (1997). *Hands-On equations learning system*. Borenson and Associates.
- Char, C. A. (1991). *Computer graphic feltboards: New software approaches to children's mathematical exploration* (Report No. 91-1). Newton, MA: Center for Learning, Teaching, and Technology.
- Gardiner, J., et. al. (2003). Magic squares. *Micro Math*, 19(3), 25-29.
- Gardner, D. P. (1983). *A nation at risk: The imperative for educational reform*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office.
- Goins, K. B. (2001). *Comparing the effects of visual and algebra tile manipulative methods on student skill and understanding of polynomial multiplication*. South Carolina University.
- Hart, K. M. (Ed.). (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.
- Izydorczak, A. E. (2003). A study of virtual manipulatives for elementary mathematics. (Doctoral dissertation, State University of New York at Buffalo, 2003). *Dissertation Abstracts International*.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. in E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*, Erlbaum, Mahwah, NJ, 133–155.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33–56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp.

- 390–419). New York: Macmillan.
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.
- Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 21 – 33). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.
- Kieran, C., Yerushalmy, M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. In K. Stacey, H. Chick and M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 95 – 152). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.
- Kimball, M. M. (1989). A new perspective on women's math achievement. *Psychological Bulletin*, 105(2), 198-214.
- Kuchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematic in School*, 7(4), 23-26.
- Maccoby, E. E., & Jacklin, C. N. (1974). *The psychology of sex differences*. California, Stanford University Press.
- MacGregor, M., Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 1-19.
- Moyer, P. S.(2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 175-197.
- Moyer, P. S., Bolyard, J. J., & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, 8, 372-377.
- Murphy, P., & Gipps, C. V. (1996). Equity in the classroom: towards effective pedagogy for girls and boys. London, Falmer Press/UNESCO.
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.
- Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *Mathematics Teacher*. 85(7), 557-561.

- Picciotto, H. (1993). A new algebra: tool, themes, concepts. *Journal of Mathematical Behavior*, 12(1). [On-line].  
<http://www.mathedpage.org/new-algebra/new-algebra.html>
- Raphael, D., & Wahlstorm, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 173-190.
- Reimer, K., & Moyer, P. S. (2005). Third-Graders learn about fractions using virtual manipulatives: A classroom study. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24(1), 5-25.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- Sharp, J. M. (1995). Results of using algebra tiles as meaningful representations of algebra concepts. Paper presented at the Annual Meeting of the Mid-Western Educational Research Association, Chicago, IL.
- Silver, E. A. (1995). Rethinking Algebra for all. *Educational Leadership*, 52, 30.
- Smith, L. A. (2006). *The impact of virtual and concrete manipulatives on algebraic understanding*. George Mason University.
- Sowell, E. J. (1989). Effect of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), 498-505.
- Steele, C. M. (1997). A threat in the air: How stereotypes shape intellectual identity and performance. *American Psychologist*, 52, 613-629.
- Steen, K., Brooks, D., & Lyon, T. (2006). The impact of virtual manipulatives on first grade geometry instruction and learning. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 25, 373-391, 4.
- Suh, M. J. (2005). *Third grades's mathematics achievement and representation preference using virtual and physical manipulatives for adding fractions and balancing equations*. Unpublished doctoral dissertation. University of George mason. Fairfax, Virginia.
- Suh, J., Moyer, P. S. (2007). Developing students' representational fluency using virtual and physical algebra balances. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 26(2), 155.

- Verharen, S. Action Research: Do test scores increase when using virtual manipulatives? Retrieved August 28, 2008, from <http://www.susan.verharen.us/portfolio/>
- Suydam, M. N., & Higgins, J. L.(1977). Activity-based learning in elementary school mathematics: Recommendations from research. Columbus: ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education.
- Terry, M. K. (1995). An investigation of differences in cognition when utilizing math manipulatives and math manipulative software. (Doctoral dissertation, University of Missouri – Saint Louis, 1996). *Dissertation Abstracts International*, 56(07), 2605.
- Tomlinson, T. M. (2006). A nation at risk. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 517(Psychology and Educational Policy), 7-27.
- Usiskin, Z. (1988). *Conceptions of school algebra and uses of variables*. In A. F. Coxford(Ed.), *The ideas of algebra, K-12*(1988 Yearbook of the NCTM). Reston, VA: NCTM, 8-19.
- Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 63-75.



## 附錄一 多項式展開與因式分解教案設計

### 一、課程簡介

課程名稱	多項式展開與因式分解
設計者	楊惠雯老師
指導者	袁媛教授
學習領域	數學領域
學習範疇	多項式、因式分解
上課模式	透過教具的輔助，讓學生實際操作學習

### 二、教學理念

以實際操作的方式，讓學生探索矩形面積和多項式展開與因式分解的意義，藉由探索的過程，引導、發現多項式展開的規則及因式分解的概念。啟發學生的整合分析能力，並能實際應用所學，與日常生活結合。

### 三、教案設計

課程主題	多項式展開與因式分解
授課年級	國中一年級，具體教具組 26 人、虛擬教具組 30 人
授課時間	二節課，共 100 分鐘
先備知識	矩形、面積、式子的化簡
教學目標	學生能了解未知數與數的意涵。 學生能藉由拼貼不同的矩形，歸納出完整矩形的組成方式。 能了解多項式展開和矩形面積的關連。 能藉由操作，了解多項式展開的規則。
能力指標	A-2-02 能在具體情境中，理解乘法結合律，並運用於簡化計算。 A-4-14 能認識多項式，並熟練其四則運算。 C-S-04 能多層面的理解，數學可以用來解決日常生活所遇到的問題。

#### 四、 內容摘要

1. 以不同的矩形面積代表不同的數及未知數。
2. 教師操作不同的矩形，一個較大的完整矩形可以由許多小矩形合併而成。
3. 包含未知數的矩形，亦可和其他矩形合併而成。
4. 一個矩形即是一個多項式。
5. 一個完整矩形的多項式展開即為其組成矩形的面積。

#### 五、 教學資源

實驗組（虛擬教具）：NLVM（Algebra Tiles）線上虛擬教具、電腦設備、黑板、學習單。

對照組（具體教具）：矩形紙卡、黑板、學習單。



## 六、教學過程

### 1. 矩形面積(多項式展開)

單元	虛擬教具組				具體教具組			
	時間	教學大綱	教學活動	教材	時間	教學大綱	教學活動	教材
矩形面積	10 分鐘	引發動機	引導學生認識多項式，以及教具的使用方法	電腦 黑板	10 分鐘	引發動機	引導學生認識多項式，以及教具的使用方法	黑板 紙卡
	10 分鐘	說明	根據矩形的邊長，用拼圖的方式找出矩形的面積	電腦 學習單	10 分鐘	說明	根據矩形的邊長，用拼圖的方式找出矩形的面積	黑板 紙卡 學習單
	20 分鐘	實際操作	學生依照學習單上的題目練習	電腦 學習單	20 分鐘	實際操作	學生依照學習單上的題目練習	紙卡 學習單
	10 分鐘	討論	請學生發表自己的作法，並進行問題探索	電腦 學習單	10 分鐘	討論	請學生發表自己的作法，並進行問題探索	黑板 紙卡 學習單



## 2. 拼圖大賽(因式分解)

拼圖大賽	5 分鐘	說明	因式分解 拼圖大賽 的拼法	電腦 學習 單	5 分鐘	說明	因式分解 拼圖大賽 的拼法	黑板 紙卡 學習 單
	25 分鐘	實際 操作	學生依照 學習單上 的題目練 習	電腦 學習 單	25 分鐘	實際 操作	學生依照 學習單上 的題目練 習	紙卡 學習 單
	15 分鐘	討論	請學生發 表自己的 作法，並 進行問題 探索	電腦 學習 單	15 分鐘	討論	請學生發 表自己的 作法，並 進行問題 探索	黑板 紙卡 學習 單
	5 分鐘	討論	總結所有 的課程	黑板	5 分鐘	討論	總結所有 的課程	黑板

附錄二 多項式展開與因式分解學習單

矩形面積 (多項式展開) 班級：\_\_\_\_年\_\_\_\_班 座號：\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

說明：


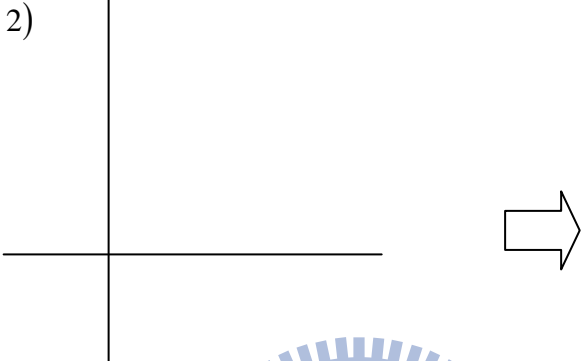


請依照題目，將矩形拼出，並寫出代表該面積的多項式展開式子 (最好能將過程詳細寫出)。

範例 1：  $x \times x$

範例 2：  $x(x+1)$

範例 3：  $(y+1)(y+2)$

$(y+1)(y+2)$   
 $= y \times (y+2) + 1 \times (y+2)$   
 $= y \times y + y \times 2 + 1 \times y + 1 \times 2$   
 $= y^2 + 2y + y + 2$   
 $= y^2 + 3y + 2$

1. $y \times y$	
2. $2y(y+2)$	
3. $(x+y)(x+y)$	
4. $(x+y)(3x+2)$	

**\*問題探索\***

經由以上的練習，可以知道：若以多項式  $( )$ 、 $( )$  來表示矩形的長及寬，則可以**多項式展開**的形式  $( ) \times ( ) = \dots$  表示矩形面積。

例如：請展開  $(2x+1)(x+3)$ 。

解：

# 拼圖大賽(因式分解)

班級：\_\_\_\_年\_\_\_\_班 座號：\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

說明：下列各題提供了數個小矩形，請將每小題的所有矩形組合成一個完整的大矩形，並請將長、寬標示出來。

範例：

$2x^2 + x = x(2x + 1)$

1.

2.

3.

$x^2$	$x^2$		
$x$	$x$		
$x$	$x$		
$x$	$x$		
$xy$	$y$	$y$	$y$

→

→

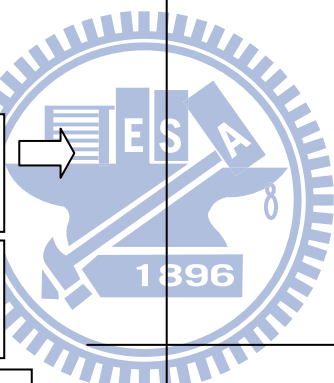
---

4.

$x^2$	$y^2$	
$xy$	$xy$	
$xy$	$xy$	
$y^2$	$y^2$	$y^2$

→

→



**\*問題探索\***

經由以上的練習，可以知道：一個完整的大矩形，可以分解得到它的長及寬，這樣的方法可稱之為**因式分解**。

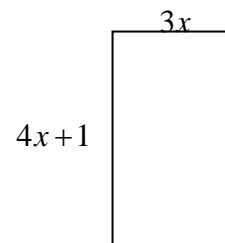
例如：因式分解  $2x^2 + 5x + 2$ 。

解：

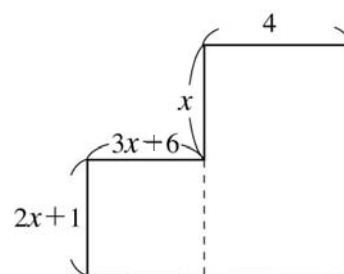
### 附錄三 多項式展開與因式分解測驗

#### <主題：矩形面積>

1. 如右圖，籃球場的長、寬分別是  $4x+1$  及  $3x$ ，請問這個籃球場的面積是多少？  
(請將結果以多項式展開式表示)



2. 請以  $x$  表示右圖的面積。(請將結果以多項式展開式表示)



3. 參考右圖，

(1) 請在下列算式中的空格填入適當的答案。

$$\begin{aligned}
 &(2x+y)(x+2y) \\
 &= 2x \times \underline{\hspace{2cm}} + y \times \underline{\hspace{2cm}} \\
 &= \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} \\
 &= 2x^2 + 5xy + 2y^2
 \end{aligned}$$

$y$	$xy$	$y^2$	$y^2$
$x$	$x^2$	$xy$	$xy$
$x$	$x^2$	$xy$	$xy$
$x$	$y$	$y$	$y$

(2) 根據(1)的求解過程，請問斜線部分的 4個  $xy$  是如何求得的？

4. 請展開  $(3x+2y)(x+5y)$ 。(請將你所拼出的圖形畫出來)

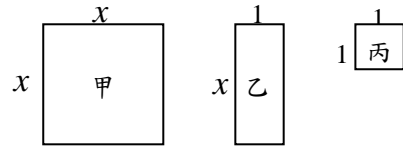
5. 請展開  $(x-3)(x+2)$ 。

<主題：拼圖大賽> 班級：\_\_\_\_\_年\_\_\_\_\_班 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

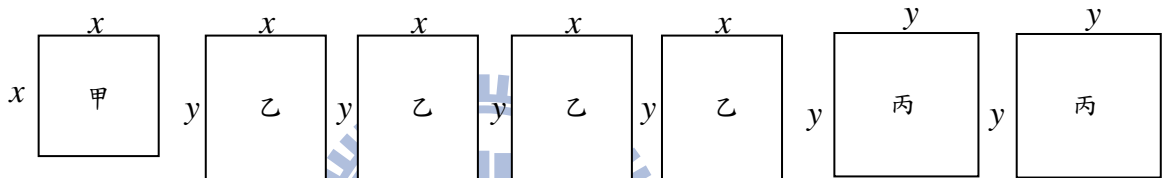
(請填寒假輔導課的班級及座號)

6. 已知甲、乙、丙三個的矩形，其長與寬分別如圖所示。王先生有塊矩形農地，農地的大小是由 1 個甲、3 個乙和 2 個丙所組成。

- (1) 請畫出代表此農地的矩形 (要把甲、乙、丙的位置標示出來)。
- (2) 請寫出此農地的長及寬。



7. 若想將下列全部的甲、乙、丙矩形組合成一個正方形，請依序回答下列問題。



- (1) 還需要幾個丙才可組合成一個正方形？
- (2) 請將組合好的正方形畫出來 (要把甲、乙、丙的位置標示出來)。
- (3) 請寫出此正方形的邊長。 1896

8. 因式分解  $2x^2 + 11x + 5$ 。(請將你所拼出的圖形畫出來)

9. 因式分解  $x^2 + 5xy + 6y^2$ 。(請將你所拼出的圖形畫出來)

10. 因式分解  $x^2 - 4x + 3$ 。

## 數學動機量表

班級：\_\_年\_\_班 座號：\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_(請填寒假輔導課的班級及座號)

同學您好：這份問卷主要是用做調查您在數學科的學習動機，以藉此能夠了解您的學習情形，與方便進行教學改良。希望您能夠協助完成此份問卷，本問卷是沒有正確答案的，請依據您平時的實際經驗，利用 1-5 數字刻度答題。若您認為某題目敘述與您的狀況完全相符，請圈選 5，若題目敘述與您完全不符，則圈選 1；若敘述與您的狀況部分相符，請圈選適當數字。所得到的數據資料作教學之用，絕不會對外公開，請安心作答。謝謝！

**※注意：每題只能選一個選項，填完時請檢查是否有漏答的題目！**

	非常不同意	不同意	無意見	同意	非常同意
1.我認為我可以處理更難的數學。	1	2	3	4	5
2.不能立即解出的數學題目對我來說是一項很好的挑戰。	1	2	3	4	5
3.我的數學並不好。	1	2	3	4	5
4.我寧可別人把數學難題的答案告訴我，而不願自己去解題。	1	2	3	4	5
5.大部分的科目我都能應付，唯對數學不開竅。	1	2	3	4	5
6.數學題目引起的挑戰我並不感到興趣。	1	2	3	4	5
7.數學曾經是我最差的一科。	1	2	3	4	5
8.學數學是件浪費時間的事。	1	2	3	4	5
9.在數學考試中，我常感到輕鬆自在。	1	2	3	4	5
10.當數學課上有未解答的數學題目時，在課後我會繼續想它。	1	2	3	4	5
11.因為某些理由，我雖用功學習數學，但數學對我好像很難。	1	2	3	4	5
12.當我遇到不能立即解答的數學難題時，我會一直想，直到解出答案為止。	1	2	3	4	5

**請同學再次檢查！感謝您！**



附錄五 學生心得及感想問卷

## 學生心得及感想問卷

主題：矩形面積與拼圖大賽

班級：\_\_\_\_\_年\_\_\_\_\_班 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

(請填寒假輔導課的班級及座號)

1. 你認為教具的使用及操作最困難的地方在哪？請說明原因。

2. 在這次的課程當中，你覺得哪裡最難理解？請寫出原因。



3. 你對這次數學課的感想為何？

4. 這次的數學課程，有什麼特別的地方？你喜歡嗎？為什麼？

5. 你覺得透過一些操作來學習數學，有比較容易了解數學嗎？為什麼？