

# 國立交通大學

交大電信工程學系

碩士論文

未知符元間干擾通道的維特比解調法則之研究  
Viterbi Demodulation in Unknown ISI Channels

研究生：林建宏

指導教授：陳伯寧 教授



中華民國九十三年七月

未知符元間干擾通道的維特比解調法則之研究  
Viterbi Demodulation in Unknown ISI Channels

研究生：林建宏  
指導教授：陳伯寧 教授

Student : Chien-Hung Lin  
Advisor : Dr.Po-Ning Chen

國立交通大學  
電信工程學系  
碩士論文



A Thesis  
Submitted to Department of Communication Engineering  
College of Electrical Engineering and Computer Science  
National Chiao Tung University  
in partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master  
in

Communication Engineering

July 2004

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十三年七月

# 未知符元間干擾通道的維特比解調法則之研究

學生:林建宏

指導教授：陳伯寧 教授

國立交通大學電信工程學系(研究所)碩士班

## 摘 要

最大概度序列估測[5][6][7]在通訊系統有未知訊號間干擾時，常用來等化通道衰減及干擾，是常見的一種演算法機制。在接收端，我們應用最大概度序列估測在維特比解調器當作解調的機制。而實際通訊通道並非理想的白高斯雜訊通道，傳送通道在不同時間點並非個別獨立，而是往往之前傳送的狀態會影響到現在以及未來的狀態，我們稱這種模組為高斯馬可夫通道模組。我們要探討的是現在時間點的通道和前一時間點有關，為一階的高斯馬可夫通道參雜未知訊號間干擾，在論文[1]中，高斯馬可夫在維特比解調時，提出多保留路徑的解調方式，其結果顯示可以得到較好的表現。然而，複雜度會因保留的路徑多寡而增加，使得實際硬體的應用需求相當大，因此我們想要提出預測量度且單一保留的構想。在模擬的時候，首先驗證參考論文[1]的參數，並且說明各參數在通訊系統錯誤率方面的影響，衰減常數以及通道起始值在高斯馬可夫通道中所扮演的角色，在我們此篇論文，第一章為提出動機以及詳述參考論文[1]採用的通道模組及解調機制，第二章用模擬來確認參考論文[1]的參數。第三章則用數學分析來說明我們提出的預測量度演算法，第四章為我們對於推導預測量度的討論。第五章為我們的結論。

# Viterbi Demodulation in Unknown ISI Channels

Student: Chien-Hung Lin

Advisor: Po-Ning Chen

Department (Institute) of Communication Engineering  
National Chiao Tung University

## Abstract

In digital communication equalization field, maximum likelihood sequence estimation (MLSE)[5][6][7] is a popular method to combat with intersymbol interference (ISI). In receivers, we apply MLSE on Viterbi Demodulation. We know that in reality our channels are not ideal white Gaussian Noise channels, and transmission channels are not identical and independent between states, because previous states would influence temporary and future state. These channels are Gauss - Markov channels. Now, we discuss first order Gauss-Markov channel with unknown ISI, which temporary state would be effected by previous one state. In paper [1], multi-survivors on Viterbi Demodulation are applied, and it shows better performance. However, it grows complexity in proportion to the number of survivors so that increasing requirement of hardware. For the reason, we propose one prediction survivor on Viterbi Demodulation. On the processing of simulation, we must check parameters in paper[1] first, and describe what the roles they play in transmission system and explain how fading ratio constant and initial channel value effect BER. In the thesis, Chapter 1 is the decription of our motivation and paper[1] models. Chapter2 is the simulation for checking parameters in [1]. Chapter3 is the detail decription of our proposed prediction metric Viterbi Demodulation. Chapter4 is our discussion. Chapter5 is conclusion.

## 誌 謝

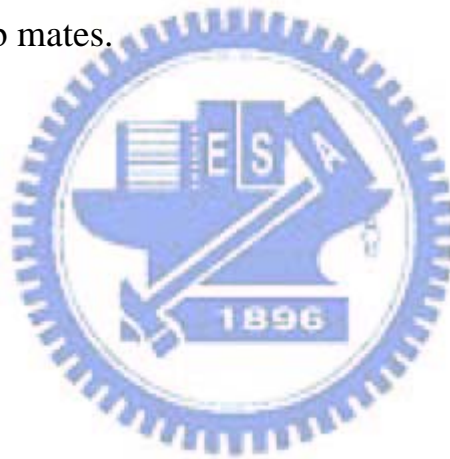
Thank to dear Dr. Po-Ning Chen very much.  
Dr. Chen is very patient with teaching, and I am the luckiest student to have such a nice advisor.  
Dr.Chen always encourages me and leads me to the right direction.

For the two years, I learn much from his instruction.

Thank to Dr. Han for his coding theory course .

Thank to senior Chia-long Wu for his assistance.

Thank my dear lab mates.



# 目 錄

中文提要	i
英文提要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	v
第一章 動機	1
1-1 通道模組	1
1-2 列維特比解調法	3
1-3 列維特比解調法模擬曲線	4
第二章 模擬參數確認	6
2-1 已知高斯馬可夫通道之模擬參數確認	6
2-2 模擬結果	8
2-2-1 當 $\nu=0.001$ 改變通道起始值對上固定的高斯馬可夫衰減參數	8
2-2-2 當 $\nu=0.001$ 改變高斯馬可夫衰減參數對上固定通道起始值	9
2-2-3 當 $\nu=0.01$ 改變通道起始值對上固定的高斯馬可夫衰減參數	25
2-2-4 當 $\nu=0.01$ 改變高斯馬可夫衰減參數對上固定通道起始值	28
第三章 預測量度分析	43
第四章 模擬結果及討論	50
第五章 結論	53
附錄 Average SNR與Steady State的分析	54

## 圖目錄

頁數

圖一. $v=0.001$ , LVA $L=1$ , $L=2$ , $L=3$ 及已知通道的模擬曲線.....	4
圖二 $v=0.01$ , LVA $L=1$ , $L=2$ , $L=3$ 及已知通道的模擬曲線.....	5
圖三 $v=0.001$ 改變通道起始值 , $h_0=[0, 0, 0]$ , $h_0=[1, 1, 1]$ , $h_0=[10, 10, 10]$ , $h_0=[100, 100, 100]$ , $h_0=[1000, 1000, 1000]$ 在已知通道下, 對 $\alpha = 0.995$ 之模擬曲線.....	8
圖四 $v=0.001$ , $\alpha = 0.995$ , 由上而下分別為 $h_0=[1, 0, 0]$ , $h_0=[10, 0, 0]$ , $h_0=[100, 0, 0]$ , $h_0=[1000, 0, 0]$ 之模擬曲線.....	9
圖五. $v=0.001$ , $\alpha = 0.995$ , 分別對 $h_0=[-1, 0, 1]$ , $h_0=[-10, 0, 10]$ , $h_0=[-100, 0, 100]$ , $h_0=[-1000, 0, 1000]$ 之模擬曲線.....	10
圖六. $v=0.001$ , $h_0=[0, 0, 0]$ 由上而下分別為 $\alpha = 0.999$ , $\alpha = 0.995$ , $\alpha = 0.99$ .....	11
圖七. $v=0.001$ , $h_0=[1, 1, 1]$ 由上而下分別為 $\alpha = 0.99$ , $\alpha = 0.995$ , $\alpha = 0.999$ .....	12
圖八. $v=0.001$ , $h_0=[10, 10, 10]$ 由上而下分別為 $\alpha = 0.99$ , $\alpha = 0.995$ , $\alpha = 0.999$ .....	13
圖九 $v=0.001$ , $h_0=[100, 100, 100]$ 由上而下分別為 $\alpha = 0.99$ , $\alpha = 0.995$ , $\alpha = 0.999$ .....	14
圖十. $v=0.001$ , $h_0=[1000, 1000, 1000]$ ; 由上而下為 $\alpha = 0.99$ , $\alpha = 0.995$ , $\alpha = 0.999$ .....	15
圖十一 $v=0.001$ , $h_0=[1, 0, 0]$ ; 由上而下為 $\alpha = 0.99$ , $\alpha = 0.995$ , $\alpha = 0.999$ .....	16
圖十二. $v=0.001$ , $h_0=[10, 0, 0]$ ; 由上而下為 $\alpha = 0.99$ , $\alpha = 0.995$ , $\alpha = 0.999$ .....	17
圖十三 $v=0.001$ , $h_0=[100, 0, 0]$ ; 由上而下為 $\alpha = 0.99$ , $\alpha = 0.995$ , $\alpha = 0.999$ .....	18
圖十四 $v=0.001$ , $h_0=[1000, 0, 0]$ ; 由上而下為 $\alpha = 0.99$ , $\alpha = 0.995$ , $\alpha = 0.999$ .....	19
圖十五. $v=0.001$ , $h_0=[-1, 0, 1]$ ; 由上而下為 $\alpha = 0.99$ , $\alpha = 0.995$ , $\alpha = 0.999$ .....	20

圖十六.	$v=0.001$ , $h_0=[-10, 0, 1-]$ ; 由上而下為 $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.995$ , $\alpha =0.999$ -----	21
圖十七.	$v=0.001$ , $h_0=[-100, 0, 100]$ ; 由上而下為 $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.995$ , $\alpha =0.999$ -----	22
圖十八.	$v=0.001$ , $h_0=[-1000, 0, 1000]$ ; 由上而下為 $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.995$ , $\alpha =0.999$ -----	23
圖十九.	$v=0.001$ , $h_0=[-1000, 0, 1000]$ 由上而下分別為 $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.995$ , $\alpha =0.999$ -----	24
圖二十.	$v=0.01$ , $\alpha =0.995$ 分別對 $h_0=[0, 0, 0]$ ; $h_0=[1, 1, 1]$ ; $h_0=[10, 10, 10]$ ; $h_0=[100, 100, 100]$ ; $h_0=[1000, 1000, 1000]$ -----	25
圖二十一	$v=0.01$ , $\alpha =0.995$ 分別對 $h_0=[1, 0, 0]$ ; $h_0=[10, 0, 0]$ ; $h_0=[100, 0, 0]$ ; $h_0=[1000, 0, 0]$ --	26
圖二十二	$v=0.01$ , $\alpha =0.995$ 分別對 $h_0=[-1, 0, 1]$ ; $h_0=[-10, 0, 10]$ ; $h_0=[-100, 0, 100]$ ; $h_0=[-1000, 0, 1000]$ -----	27
圖二十三.	$v=0.01$ , $h_0=[0, 0, 0]$ 由上而下分別為 $\alpha =0.999$ , $\alpha =0.995$ , $\alpha =0.99$ -----	28
圖二十四.	$v=0.01$ , $h_0=[1, 1, 1]$ 由上而下分別為 $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.995$ , $\alpha =0.999$ -----	29
圖二十五.	$v=0.01$ , $h_0=[10, 10, 10]$ 由上而下分別為 $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.995$ , $\alpha =0.999$ -----	30
圖二十六.	$v=0.01$ , $h_0=[100, 100, 100]$ 由上而下分別為 $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.995$ , $\alpha =0.999$ -----	31
圖二十七.	$v=0.01$ , $h_0=[1000, 1000, 1000]$ 由上而下分別為 $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.995$ , $\alpha =0.999$ --	32
圖二十八.	$v=0.01$ , $h_0=[1, 0, 0]$ 由上而下分別為 $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.999$ -----	33
圖二十九.	$v=0.01$ , $h_0=[10, 0, 0]$ 由上而下分別為 $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.995$ , $\alpha =0.999$ -----	34
圖三十.	$v=0.01$ , $h_0=[100, 0, 0]$ 由上而下分別為 $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.995$ , $\alpha =0.999$ -----	35
圖三十一.	$v=0.01$ , $h_0=[1000, 0, 0]$ 由上而下分別為 $\alpha =0.99$ , $\alpha =0.995$ , $\alpha =0.999$ -----	36



圖三十二.  $v=0.01$  ,  $h_0=[-1, 0, 1]$ 由上而下分別為  $\alpha =0.99$  ,  $\alpha =0.995$  ,  $\alpha =0.999$ -----37

圖三十三.  $v=0.01$  ,  $h_0=[-10, 0, 10]$ 由上而下分別為  $\alpha =0.99$  ,  $\alpha =0.995$  ,  $\alpha =0.999$ -----38

圖三十四.  $v=0.01$  ,  $h_0=[-100, 0, 100]$ 由上而下分別為  $\alpha =0.99$  ,  $\alpha =0.995$  ,  $\alpha =0.999$ -----39

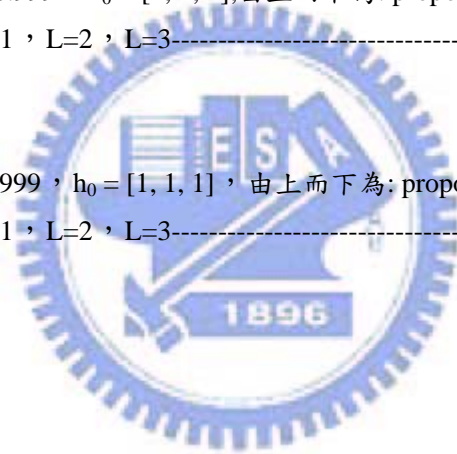
圖三十五.  $v=0.01$  ,  $h_0=[-1000, 0, 1000]$ 由上而下分別為  $\alpha =0.99$  ,  $\alpha =0.995$  ,  $\alpha =0.999$ -----40

圖三十六.  $v=0.01$  ,  $\alpha =0.995$  ,  $h_0=[1000, 1000, 1000]$ ;  $\alpha =0.995$  ,  $h_0=[1, 1, 1]$ 和known channel41

圖三十七.  $v=0.01$  ,  $\alpha =0.996$  ,  $h_0=[1, 1, 1]$ ;  $h_0=[10, 10, 10]$ ;  $h_0=[100, 100, 100]$ ;  
 $h_0=[1000, 1000, 1000]$ ;  $v=0.01$  known channel-----42

圖三十八.  $v = 0.001$  ,  $\alpha =0.999$  ,  $h_0 = [1, 1, 1]$ ;由上而下為: proposed prediction metric,  
iteration=1 , 2 , 3 , 10; L=1 , L=2 , L=3-----51

圖三十九.  $v = 0.01$  ,  $\alpha =0.999$  ,  $h_0 = [1, 1, 1]$  , 由上而下為: proposed prediction metric,  
iteration=1 , 2 , 3 , 10; L=1 , L=2 , L=3-----52



# 第一章 動機

在遞迴時間式於未知訊號間干擾之通道最大概度序列估計的論文[1]中，提出多保留路徑維特比解調法則[2]，在考慮實際硬體實現中，其複雜度是對於保留的路徑數成正比，如此一來必定增加系統的負載，因此我們提出預測量度的單一保留路徑，來取代論文的方法，首先，在以下小節中，將詳述我們參考的論文所引用的系統架構。

## 1.1 通道模組

在通訊系統中 傳送端訊號 在經過 FIR 通道及加上雜訊後 所接收的訊號可表示成

$$r_k = [a_k, a_{k-1}, \dots, a_{k-1+M}] \begin{bmatrix} h_{k,1} \\ h_{k,2} \\ \vdots \\ h_{k,M} \end{bmatrix} + n_k = \mathbf{a}_k^T \mathbf{h}_k + n_k \quad (1)$$

$\mathbf{a}_k = [a_k, a_{k-1}, \dots, a_{k-1+M}]^T$  是表示成複數向量， $M$  是我們 FIR 通道長度。我們現在是在 FIR 的頻率選擇快速衰減通道(frequency-selective fast fading channel)[4]中傳送 而通道脈衝反應(Channel Impulse Response)  $\mathbf{h}_k = [h_{k,1}, h_{k,2}, \dots, h_{k,M}]^T$ ，(1)式中  $n_k$  為白色高斯複數雜訊，其變異量為  $E[n_k n_k^*] = \sigma^2$ ，在我們要探討的通道  $\mathbf{h}_k$  為高斯馬可夫通道，現在通道的脈衝反應和前一個時間點有關，是為一階的高斯馬可夫(First order Gauss-Markov)[8]，其數學表示式為

$$\mathbf{h}_k = \alpha \mathbf{h}_{k-1} + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

$\alpha$  為複數第一階馬可夫係數，通常假設  $|\alpha| < 1$

$v_k$  是複數白高斯雜訊，其平均值為  $\mathbf{d}$ ，變異量矩陣  $\mathbf{C}$ 。因此  $f(\mathbf{h}_k | \mathbf{h}_{k-1})$  為平均是  $(\alpha \mathbf{h}_{k-1} + \mathbf{d})$  變異量矩陣為  $\mathbf{C}$  的高斯函數[4]。

則已知通道  $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n]$  及傳送訊號  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$  時，由  $r_k = \mathbf{a}_k^T \mathbf{h}_k + n_k$  式可知， $f(r | \mathbf{H}, \mathbf{A})$  為白高斯雜訊(white Gaussian noise)  $n_k$  的機率密度函數，可表示成

$$f(r | \mathbf{H}, \mathbf{A}) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^n} \prod_{k=1}^n e^{-|r_k - \mathbf{a}_k^T \mathbf{h}_k| / \sigma^2} \quad (3)$$

根據條件機率，通道  $f(\mathbf{H})$  為

$$f(\mathbf{H}) = f(\mathbf{h}_1) \prod_{k=2}^n f(\mathbf{h}_k | \mathbf{h}_{k-1}) \quad (4)$$

若未知通道時，必須估計通道，在經過積分過後可以得到未知通道最大概度函數：

$$f(r | \mathbf{A}) = \int_{\mathbf{H}} f(r | \mathbf{H}, \mathbf{A}) f(\mathbf{H}) d\mathbf{H} \quad (5)$$

將(3),(4)代入(5)，可得到概度函數(likelihood function)

$$f(r | \mathbf{A}) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^n} \int_{\mathbf{H}} \left( \prod_{k=1}^n e^{-|r_k - \mathbf{a}_k^T \mathbf{h}_k|^2 / \sigma^2} \right) f(\mathbf{h}_1) \prod_{k=2}^n f(\mathbf{h}_k | \mathbf{h}_{k-1}) d\mathbf{H} \quad (6)$$

並經過分別對  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$  積分，其中對  $\mathbf{h}_1$  積分後，可以得

$$\begin{cases} \mathbf{q}_1 = \frac{r_1 \mathbf{a}_1^*}{\sigma^2} + \alpha \mathbf{C}^{-1} \mathbf{h}_0 \\ \mathbf{G}_1 = \left[ \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T}{\sigma^2} + (1 + |\alpha|^2) \mathbf{C}^{-1} \right]^{-1} \end{cases} \quad (7)$$

對  $\mathbf{h}_k$  ( $k=2, \dots, n-1$ ) 積分後，可以得

$$\begin{cases} \mathbf{q}_k = \frac{r_k \mathbf{a}_k^*}{\sigma^2} + \alpha \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{q}_{k-1} \\ \mathbf{G}_k = \left[ \frac{\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T}{\sigma^2} + \mathbf{C}^{-1} + |\alpha|^2 (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_{k-1}) \mathbf{C}^{-1} \right]^{-1} \end{cases} \quad (8)$$

當我們對  $\mathbf{h}_n$  積分後，得到

$$\begin{cases} \mathbf{q}_n = \frac{r_k \mathbf{a}_k^*}{\sigma^2} + \alpha \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_{n-1} \mathbf{q}_{n-1} \\ \mathbf{G}_n = \left[ \frac{\mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1^T}{\sigma^2} + \mathbf{C}^{-1} - |\alpha|^2 \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_{n-1} \mathbf{C}^{-1} \right]^{-1} \end{cases} \quad (9)$$

積分過所有的通道係數後，我們得到概度函數(Likelihood function)

$$\begin{aligned} f(r | \mathbf{A}) &= \frac{1}{(\pi\sigma^2)^n} \int_{\mathbf{H}} \left( \prod_{k=1}^n e^{-|r_k - \mathbf{a}_k^T \mathbf{h}_k|^2 / \sigma^2} \right) f(\mathbf{h}_1) \prod_{k=2}^n f(\mathbf{h}_k | \mathbf{h}_{k-1}) d\mathbf{H} \\ &\equiv e^{\mathbf{q}_n^H \mathbf{G}_n \mathbf{q}_n} \left| \mathbf{G}_n \prod_{k=1}^{n-1} e^{(\mathbf{q}_k - \alpha^* \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d})^H \mathbf{G}_k (\mathbf{q}_k - \alpha \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d})} \right| \left| \mathbf{G}_k \right| \end{aligned} \quad (10)$$

其中， $\equiv$ 代表等效量度。

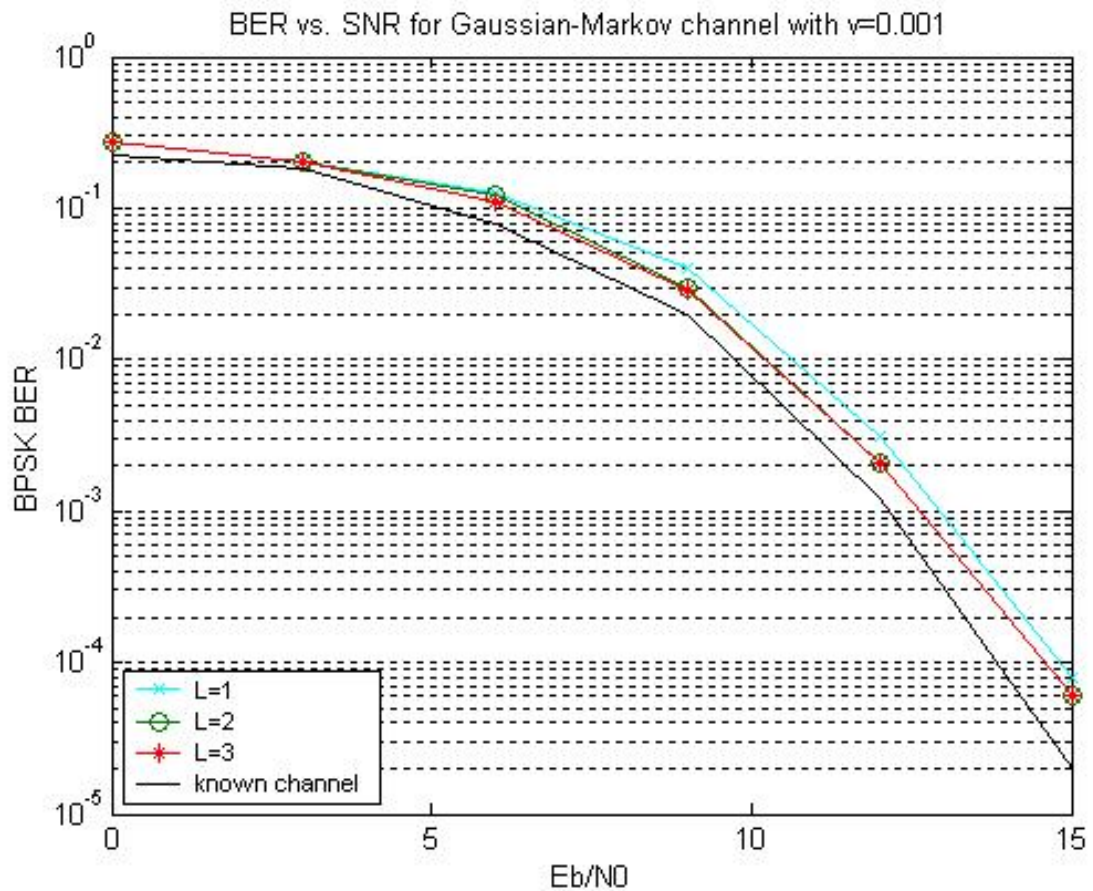
## 1.2 列維特比解調法

在參考論文[1]中，是以多保留路徑的方式，來降低通訊系統在未知符元間干擾(intersymbol interference)的錯誤率。此種方法為列維特比解調法(List Viterbi Algorithm)[2]，最主要的原理是，在為每一個時間點的函數的累積量度(accumulated metric)之解調藩籬(Trellis)累積值，每個狀態點是保留 $L$ 個最佳的路徑值。我們符元間干擾的通道記憶長度(Memory length)為 $M$ ，解調藩籬狀態點為 $2^{M-1}$ ，經過時間點 $n$ 時，所需要運算的次數為 $n * L * (2^{M-1})$ 。參考論文[1]中是對於未知的高斯馬可夫通道進行 $L = 1$ ， $L = 2$ 及 $L = 3$ 的多保留路徑，以和對於已知通道的情形做比較。當保留路徑 $L = 1$ 時，為我們在未知通道下的標準維特比解調(Standard Viterbi Algorithm)。下小節為參考論文[1]中的模擬結果。

### 1.3 列維特比解調法模擬曲線

下圖為使用列維特比解調法在高斯馬可夫干擾參數  $\nu=0.001$  的模擬曲線，論文假設

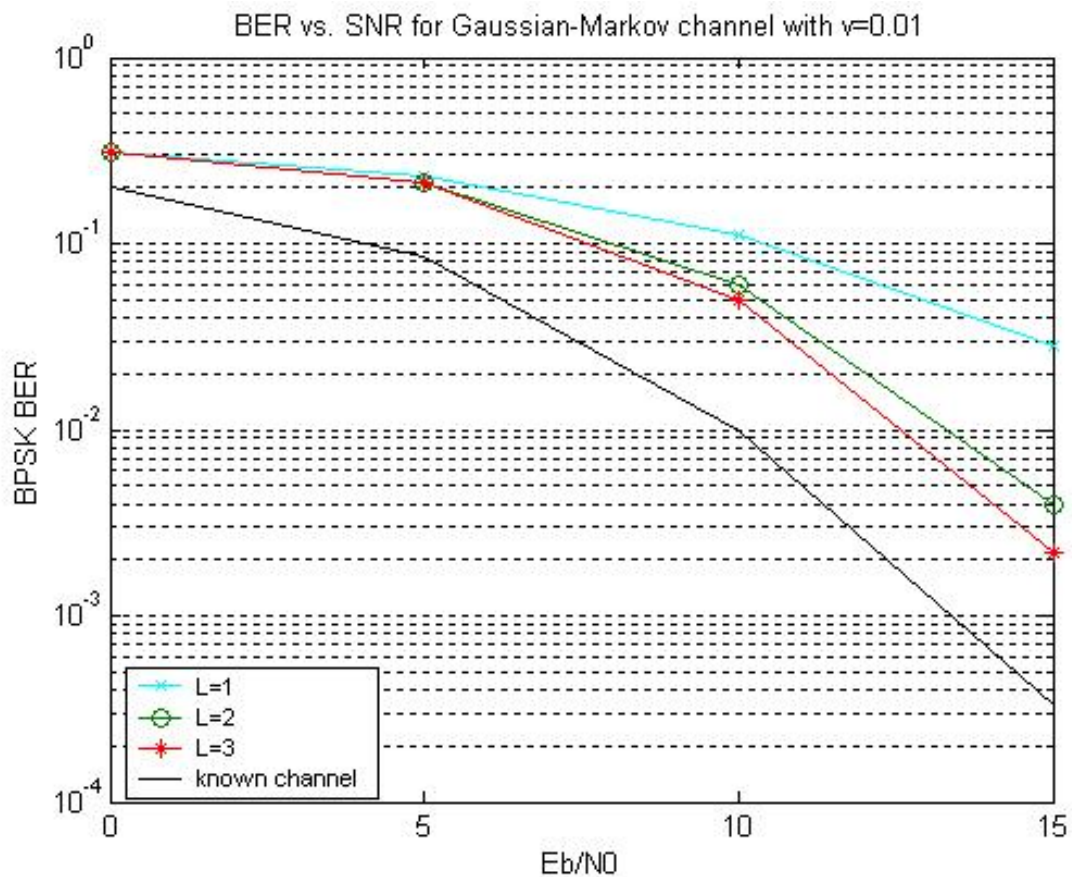
$$\text{變異量矩陣 } \mathbf{C} = \nu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



圖一. 最上面的兩條曲線由上往下分別為  $L=1$ ,  $L=2$  及  $L=3$  的情形 最下方的是在已知通道(known channel)的模擬曲線

已知通道是為參考的曲線，模擬顯示出當  $\nu$  很小的時候，高斯馬可夫通道很接近黑色模擬線的已知通道，而且當保留的路徑( $L$ )越大時，模擬結果越接近已知通道。

在高斯馬可夫通道參數中， $\nu=0.01$  的模擬曲線為



圖二. 從上到下分別為  $L=1, L=2, L=3$  的情形，最下方為已知通道(known channel)的模擬曲線

$\nu$  是高斯馬可夫通道的干擾參數， $\nu$  越大代表符元傳送受到通道干擾程度越大，通道變異量大的時候，錯誤率隨之增加。當  $\nu = 0.01$  的時候，錯誤率較  $\nu = 0.001$  來的大，參考論文[1]中是藉由增加保留路徑( $L$ )，來降低因為未知通道干擾  $\nu$  產生的系統錯誤率。

## 第二章 模擬系統參數確認

由於在參考論文[1]中 兩個系統參數: (1)高斯馬可夫衰減參數  $\alpha$  (2)通道起始值  $\mathbf{h}_0$  並未明確給予, 因此我們必須以模擬來確認系統參數, 並了解不同的  $\alpha$  及  $\mathbf{h}_0$  對系統效能的影響, 其中我們選擇先對已知的一階高斯馬可夫通道來做模擬, 通道變

異量矩陣  $\mathbf{C} = \nu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  的參數  $\nu$  值, 分別為  $\nu = 0.001$  及  $\nu = 0.01$  做以下各種模擬。

### 2.1 已知高斯馬可夫通道之模擬參數確認

在頻率選擇快速衰減的通道(fast-selective fast fading channel)的有限脈衝反應(FIR)模組中, 複數接收訊號  $r_k$  為

$$r_k = [a_k, a_{k-1}, \dots, a_{k-1+M}] \begin{bmatrix} h_{k,1} \\ h_{k,2} \\ \vdots \\ h_{k,M} \end{bmatrix} + n_k = \mathbf{a}_k^T \mathbf{h}_k + n_k$$

其中  $\mathbf{h}_k = \alpha \mathbf{h}_{k-1} + \mathbf{v}_k$  為“已知”時, 最大概最大概度函數:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \max_{\mathbf{A}} f(r | \mathbf{H}, \mathbf{A}) \\ &= \max_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n} \frac{1}{(\pi\sigma^2)^n} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{|r_k - \mathbf{a}_k^T \mathbf{h}_k|^2}{\sigma^2}} \\ &= \max_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n} \log\left(\frac{1}{(\pi\sigma^2)^n} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{|r_k - \mathbf{a}_k^T \mathbf{h}_k|^2}{\sigma^2}}\right) \\ &= \min_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n} \sum_{k=1}^n |r_k - \mathbf{a}_k^T \mathbf{h}_k|^2 \\ &= \min_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n} \sum_{k=1}^n \left| r_k - \sum_{i=1}^M a_{k-i+1} h_{k,i} \right|^2 \end{aligned}$$

維特比累積量度為  $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \lambda_n$ , 其中

$$\lambda_n = \left| r_k - \sum_{i=1}^M a_{k-i+1} h_{k,i} \right|^2$$

經過時間序列  $n$  後，總接收訊號(假設  $M = 3$ ):

$$\begin{bmatrix} r_n \\ r_{n-1} \\ \vdots \\ r_2 \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{n,1} & h_{n,2} & h_{n,3} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & h_{n-1,3} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & h_{n-2,1} & h_{n-2,2} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & h_{2,2} & h_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_n \\ n_{n-1} \\ \vdots \\ n_2 \\ n_1 \end{bmatrix}$$

我們考慮單信號雙向位移調變 (BPSK)，符元數目為 2。符元  $a_1$  在時間點  $n = 1$  估計為 +1 或 -1。通道長度  $M = 3$ ，則維特比藩籬狀態點(Trellis node)為 4，在通道起始時間點 1 之前時，信號為 -1，亦即， $\mathbf{a}_1 = [a_1, a_0, a_{-1}]^T = [a_1, -1, -1]^T$ 。高斯馬可夫通道  $\mathbf{h}_k = \alpha \mathbf{h}_{k-1} + \mathbf{v}_k$ ，其中  $\mathbf{v}_k$  是白高斯，平均為  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  之雜訊，變異量矩陣

(covariance matrix) 為  $\mathbf{C} = \nu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。分別選擇  $\nu = 0.001$ ,  $\nu = 0.01$  模擬。當  $\nu =$

0.001,  $f(\mathbf{h}_k | \mathbf{h}_{k-1})$  是平均為  $\alpha \mathbf{h}_{k-1}$  高斯雜訊，變異量矩陣(covariance matrix) 為

$\mathbf{C} = 0.001 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。我們對每個模擬點進行方塊長度(block length)  $n = 100$  執行

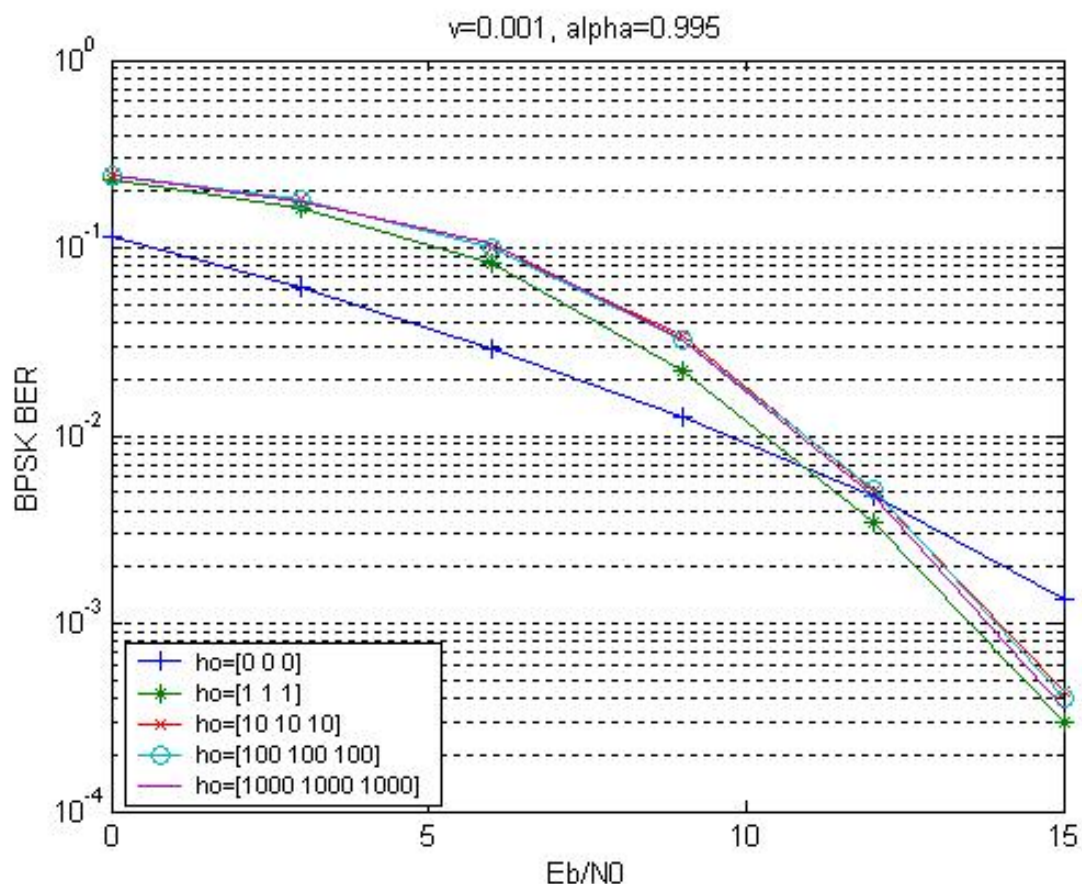
1000 次模擬。



## 2.2 模擬結果

### 2.2.1 當 $\nu = 0.001$ 改變通道起始值改變高斯馬可夫衰減參數對上固定通道起始值

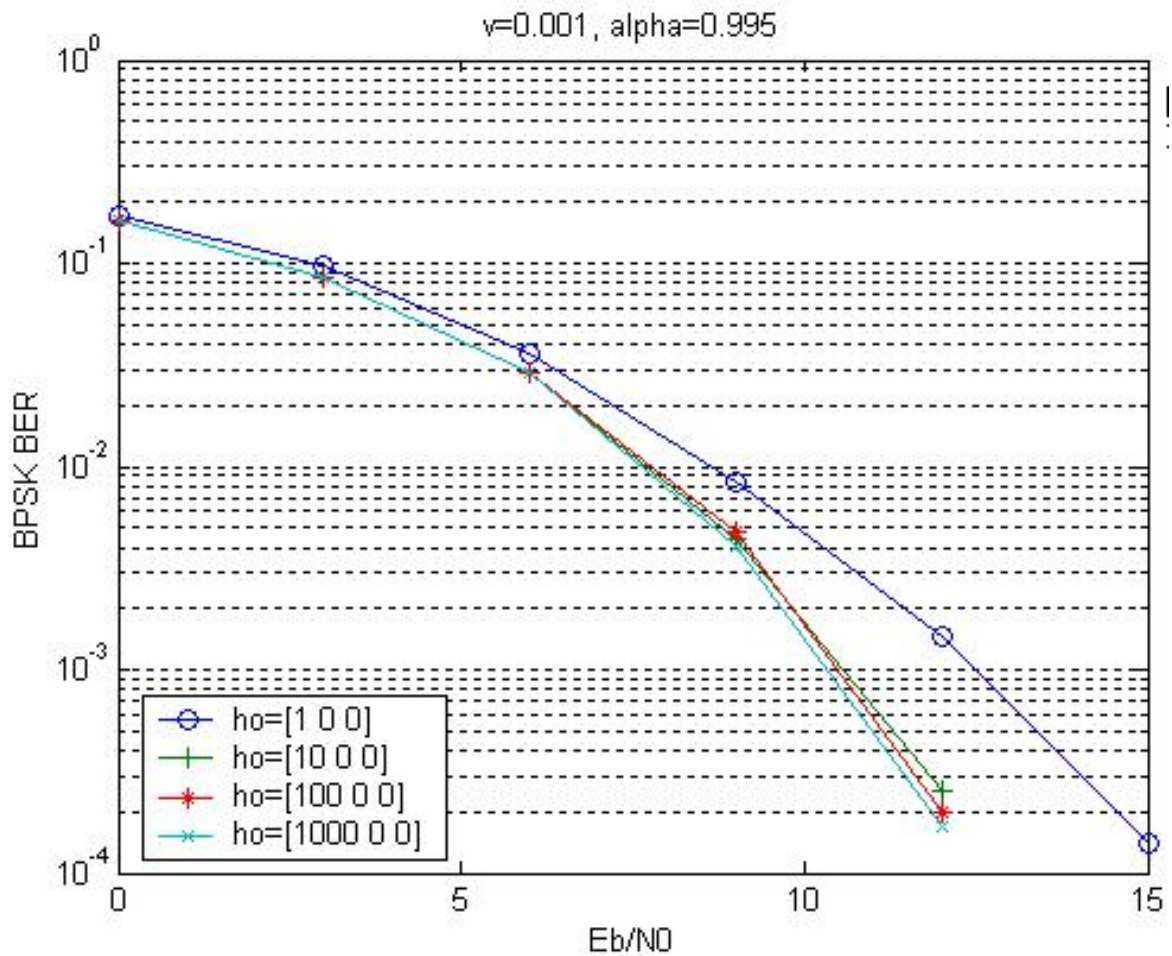
參考論文[1]中提及我們的 $\mathbf{h}_0$ 為固定的值，但是並未說明其確切值為何，因此我們以不同的 $\mathbf{h}_0$ 來驗證該值，並且在論文[3]中，使用相同的通道模擬模組，其高斯馬可夫衰減參數 $\alpha$ 選擇為0.995，因此我們先選此值來做參考參數，以進行確認。在論文[3]並沒有說明其 $\mathbf{h}_0$ 的值為何，故先選擇四個差異量較大的數值1000, 100, 1.0, 0.0觀察。我們先選擇對 $\alpha = 0.995$ ，改變 $\mathbf{h}_0$ 由各做模擬。因為我們的通道記憶長度(channel memory length)  $M = 3$ ，我們先選用 $\mathbf{h}_0 = [0 \ 0 \ 0]$ ;  $\mathbf{h}_0 = [1 \ 1 \ 1]$ ;  $\mathbf{h}_0 = [10 \ 10 \ 10]$ ;  $\mathbf{h}_0 = [100 \ 100 \ 100]$ ;  $\mathbf{h}_0 = [1000 \ 1000 \ 1000]$ 來確認。



圖三.  $\nu = 0.001$ ， $\alpha = 0.995$ ，由上而下分別為 $\mathbf{h}_0 = [0, 0, 0]$ ;  $\mathbf{h}_0 = [1, 1, 1]$ ;  $\mathbf{h}_0 = [10, 10, 10]$ ;

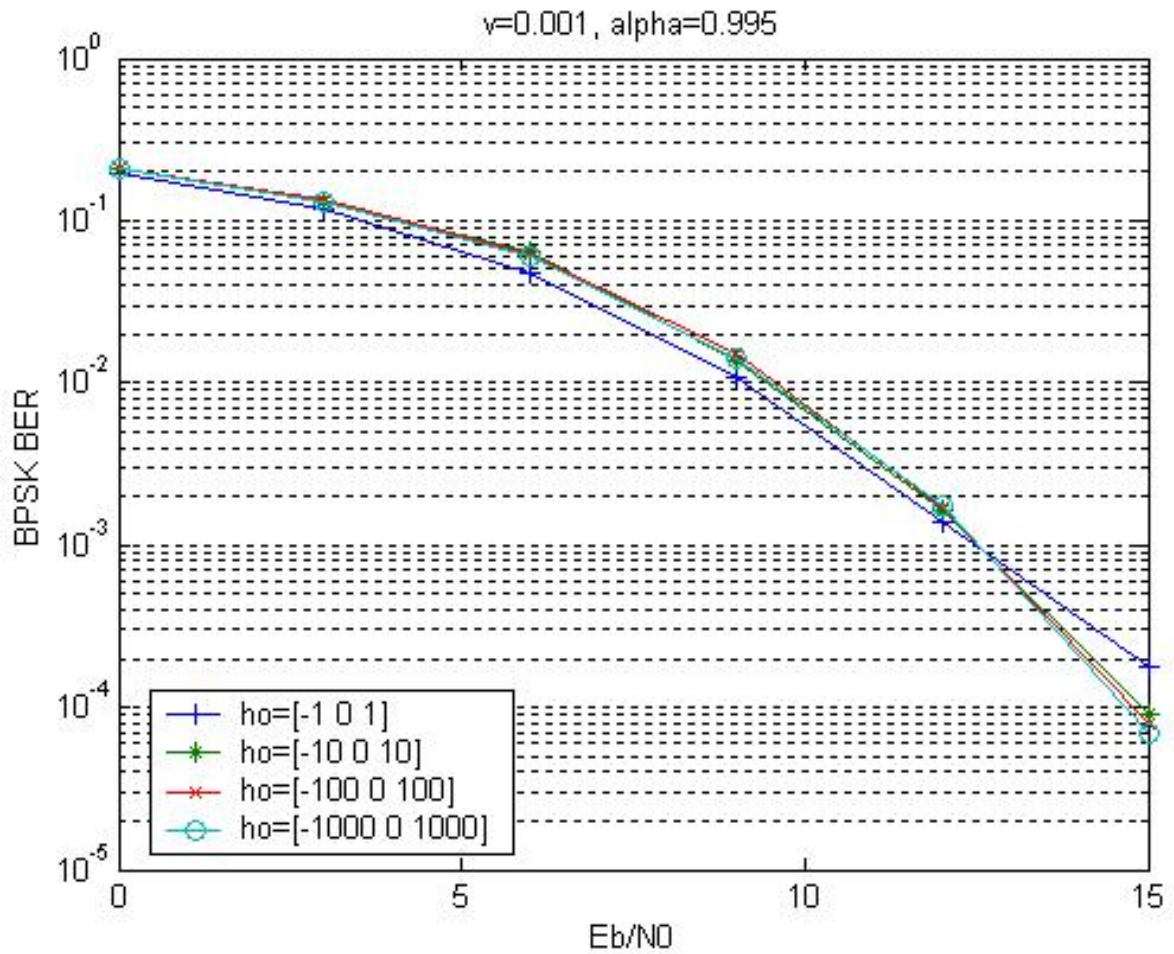
$\mathbf{h}_0=[100, 100, 100]$ ;  $\mathbf{h}_0=[1000, 1000, 1000]$

我們發現：圖中 $\mathbf{h}_0 = [1, 1, 1]$ 非常接近我們的參考論文[1]中的已知通道模擬曲線。不過，因為  $\mathbf{h}_0 = [1, 1, 1]$ ， $\mathbf{h}_0 = [10, 10, 10]$ ， $\mathbf{h}_0 = [100, 100, 100]$ ， $\mathbf{h}_0 = [1000, 1000, 1000]$ 彼此非常接近。必須更詳細將之區分。我們接下來對相同 $\alpha = 0.995$  做 $\mathbf{h}_0=[1, 0, 0]$ ; $\mathbf{h}_0=[10, 0, 0]$ ; $\mathbf{h}_0=[100, 0, 0]$ ; $\mathbf{h}_0=[1000, 0, 0]$ 之模擬。



圖四.  $v = 0.001, \alpha = 0.995$ , 由上而下分別為 $\mathbf{h}_0 = [1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{h}_0 = [10, 0, 0]$ ,  $\mathbf{h}_0 = [100, 0, 0]$ ,  
 $\mathbf{h}_0 = [1000, 0, 0]$

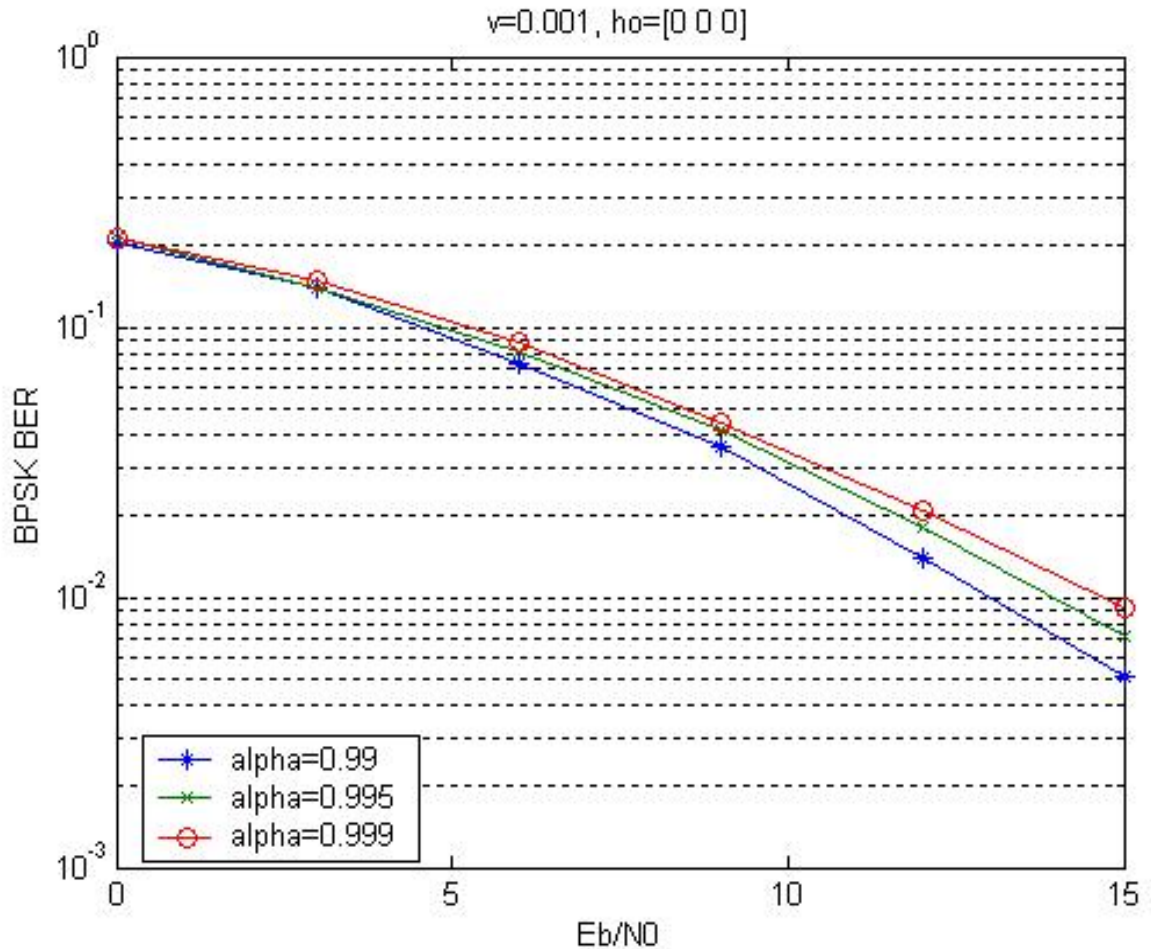
接下來，我們對三個值從原點分別取等距，進行 $\mathbf{h}_0 = [-1, 0, 1]$ ; $\mathbf{h}_0 = [-10, 0, 10]$ ; $\mathbf{h}_0 = [-100, 0, 100]$ ; $\mathbf{h}_0 = [-1000, 0, 1000]$ 的模擬。



圖五.  $\nu = 0.001, \alpha = 0.995$ , 分別對  $h_0 = [-1 \ 0 \ 1]$ ,  $h_0 = [-10 \ 0 \ 10]$ ,  $h_0 = [-100 \ 0 \ 100]$ ,  $h_0 = [-1000 \ 0 \ 1000]$  的模擬曲線

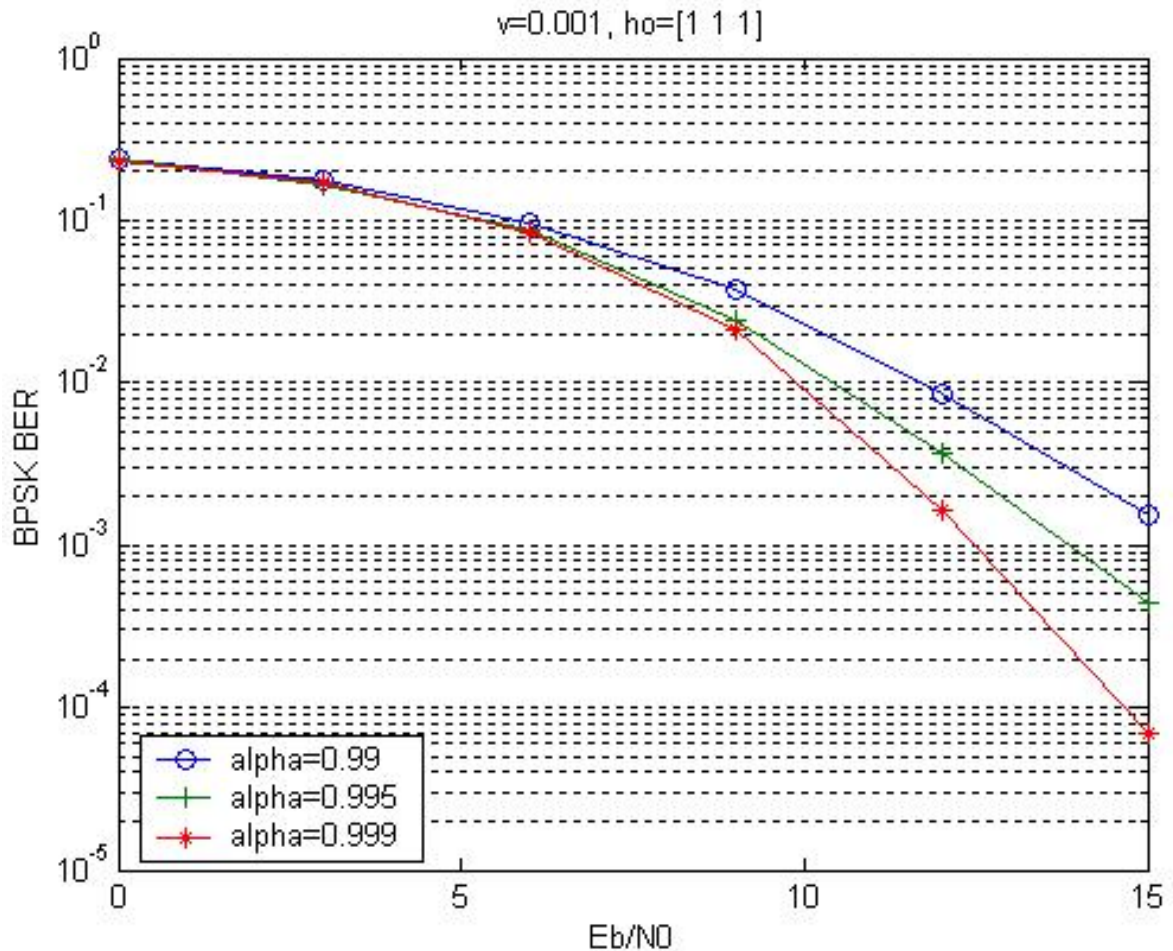
由分析中，改變  $h_0$  的結果，各曲線仍然相當接近。故我們改變衰減常數，分別對上述的起始通道值，對不同的衰減參數 0.99, 0.995, 及 0.999 做模擬。

2.2.2 當  $\nu=0.001$  改變高斯馬可夫衰減參數對上固定通道起始值



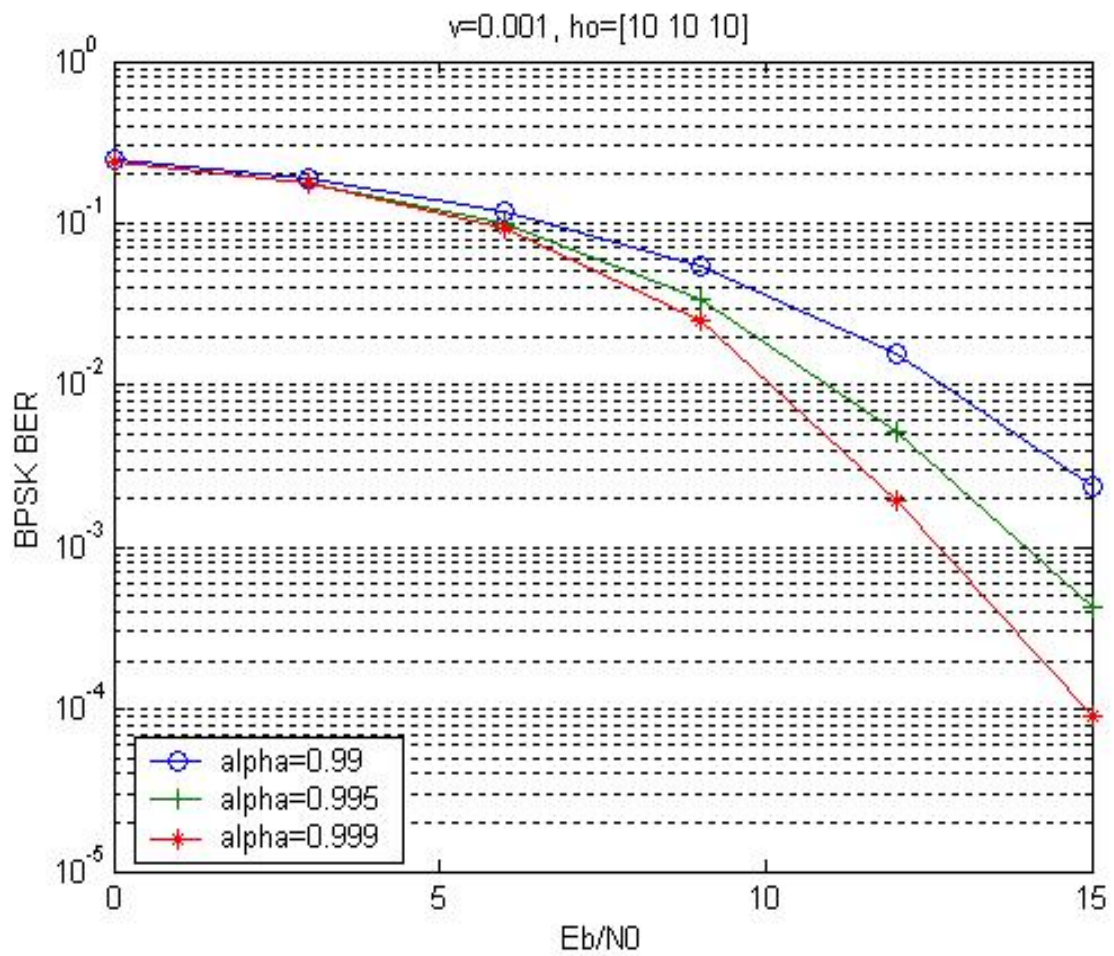
圖六.  $\nu = 0.001$ ,  $h_0 = [0, 0, 0]$ 由上而下分別為  $\alpha=0.999$ ,  $\alpha=0.995$ ,  $\alpha=0.99$

此時的  $\alpha=0.999$  系統的錯誤率較其他兩者高，歸因為此時為 zero mean channel，所以當衰減越少時，也越接近 zero mean。當 channel 是 zero 時，訊號無法傳送，所以錯誤率會提升。以下探討 nozero mean 之 channel。



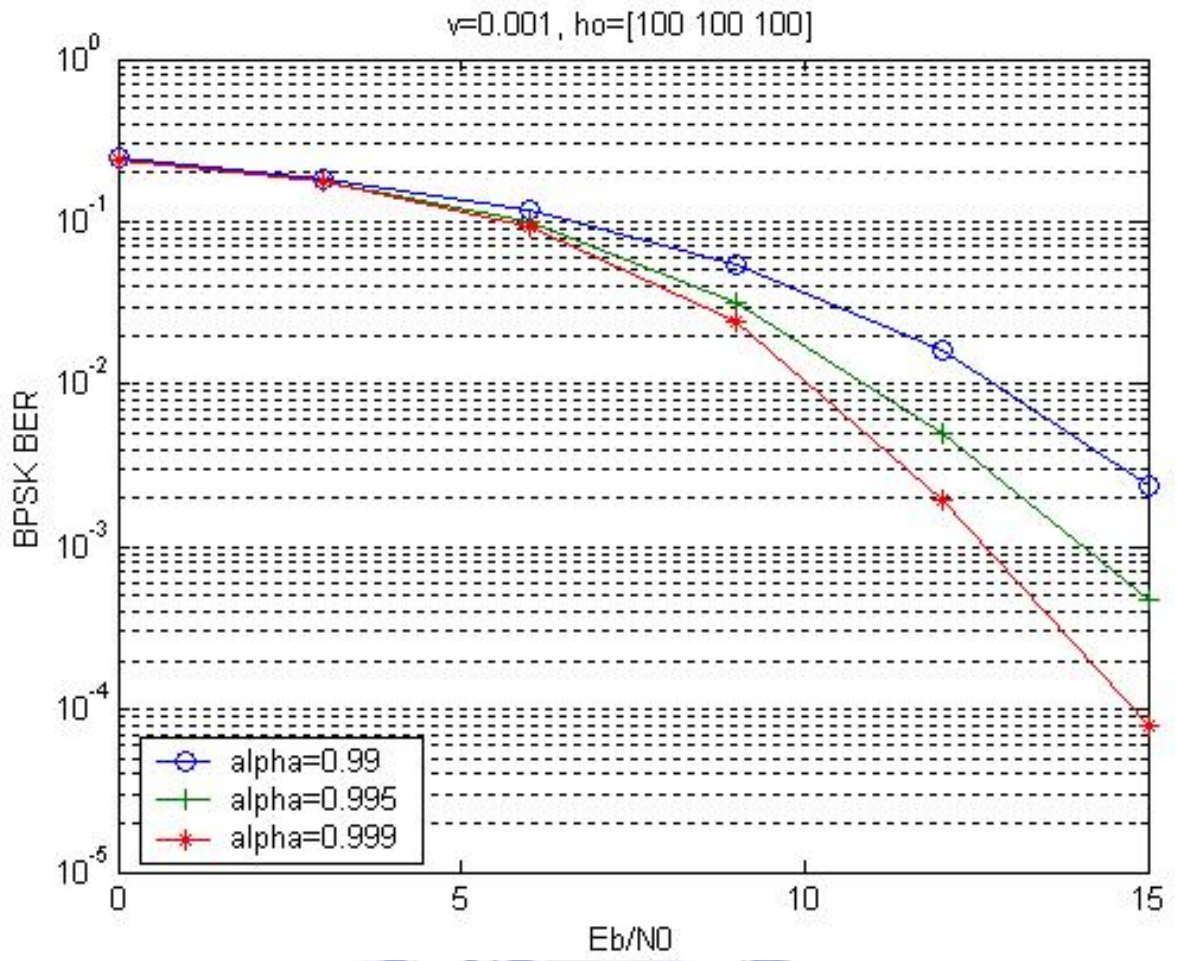
圖七.  $v=0.001$ ,  $h_0 = [1, 1, 1]$ 由上而下分別為  $\alpha=0.99$ ,  $\alpha=0.995$ ,  $\alpha=0.999$

$\alpha$  在高斯馬可夫通道是代表相較前一時間點衰減的比例，當  $\alpha$  越接近“1”的時候，通道衰減程度也越小，因此模擬曲線在越接近“1”的時候，錯誤率越小。當模擬曲線為nozero mean時，是呈現拋物線型，錯誤率明顯接近參考論文[1]的曲線。現在的通道  $h_0 = [1, 1, 1]$ 可以得知：通道一開始的時候，並不在零點，當通道的隨機程序為stationary時，平均值也將不會在零點，其所造成的影響是錯誤率可以提升，這也就是曲線呈現拋物線的原因。且  $\alpha$  越接近“1”的時候，錯誤率越低。接著對不同起始值分別  $\alpha=0.99$ ,  $\alpha=0.995$ ,  $\alpha=0.999$  進行比較。



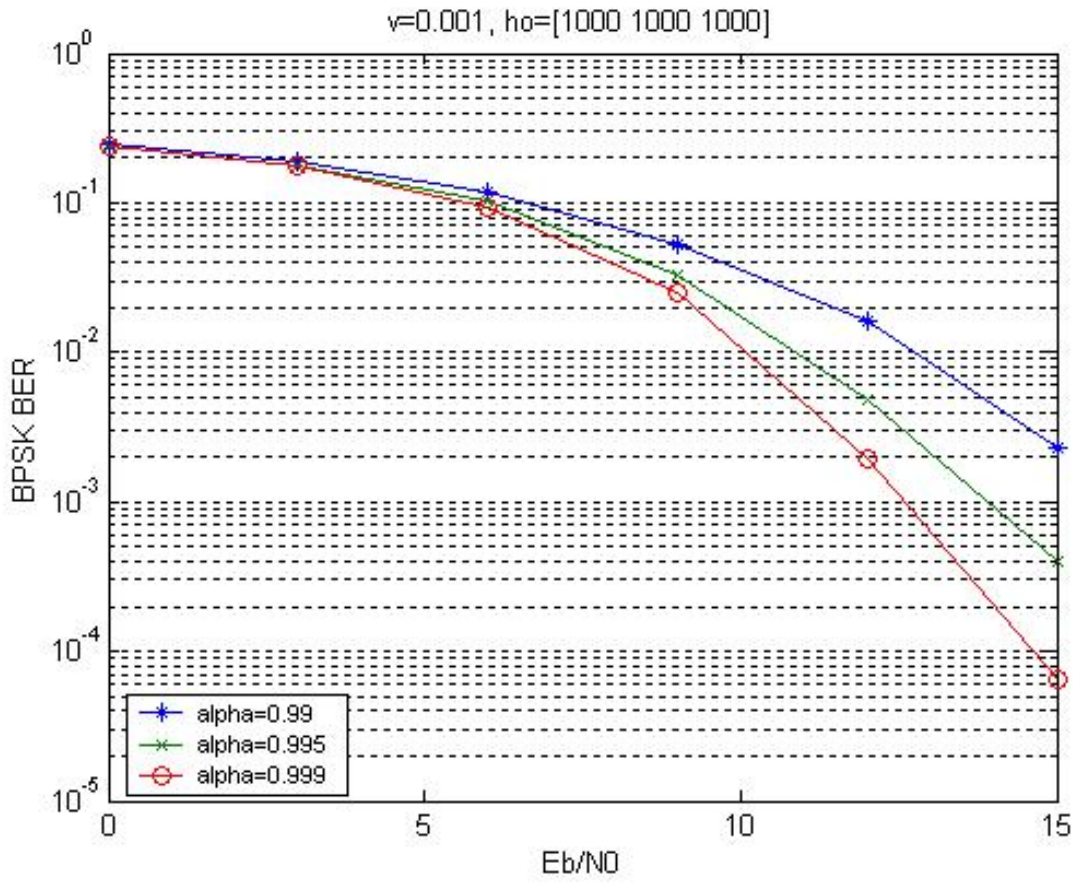
圖八.  $\nu = 0.001$ ,  $h_0 = [10, 10, 10]$  由上而下分別為  $\alpha = 0.99$ ,  $\alpha = 0.995$ ,  $\alpha = 0.999$





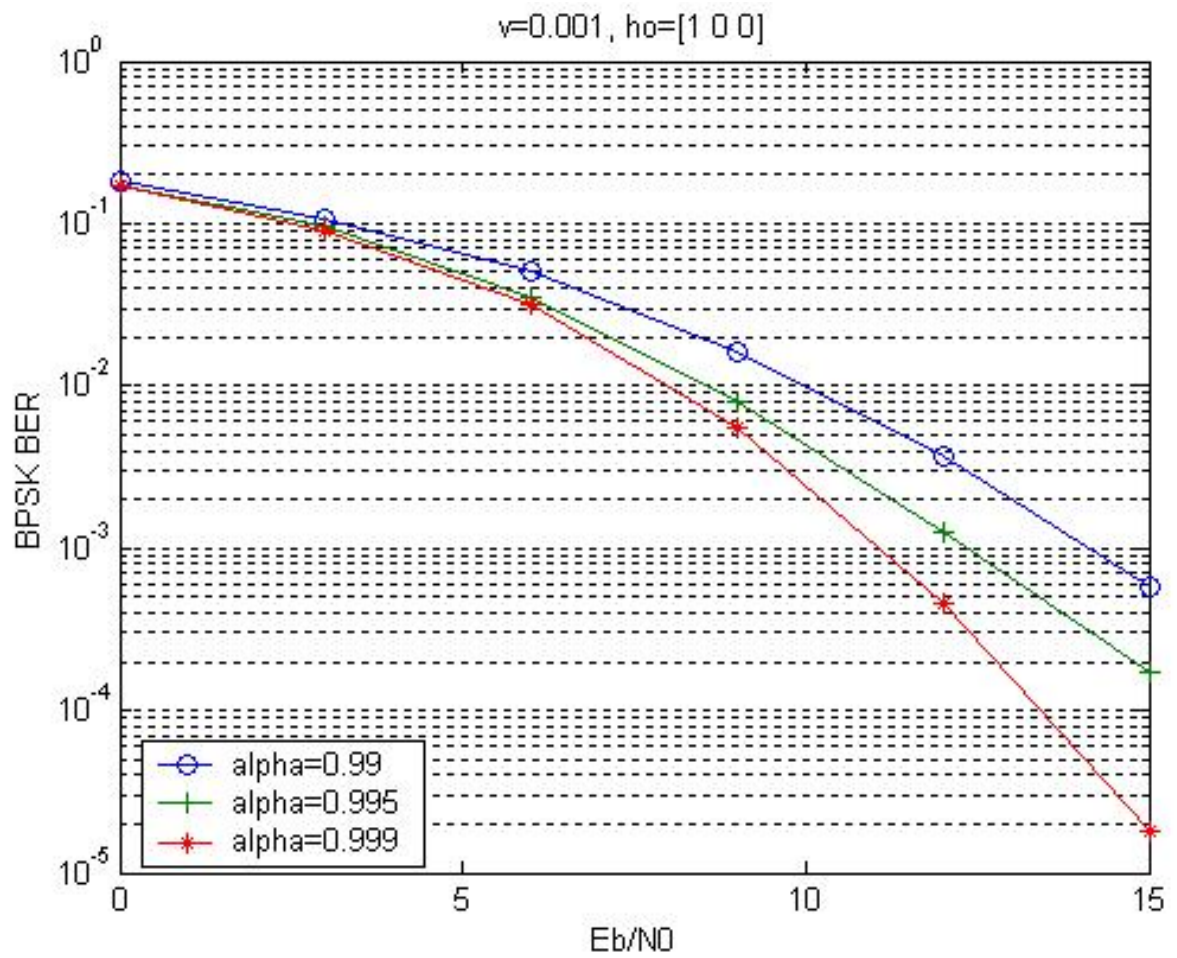
圖九.  $\nu = 0.001, h_0 = [100, 100, 100]$ 由上而下分別為  $\alpha = 0.99, \alpha = 0.995, \alpha = 0.999$



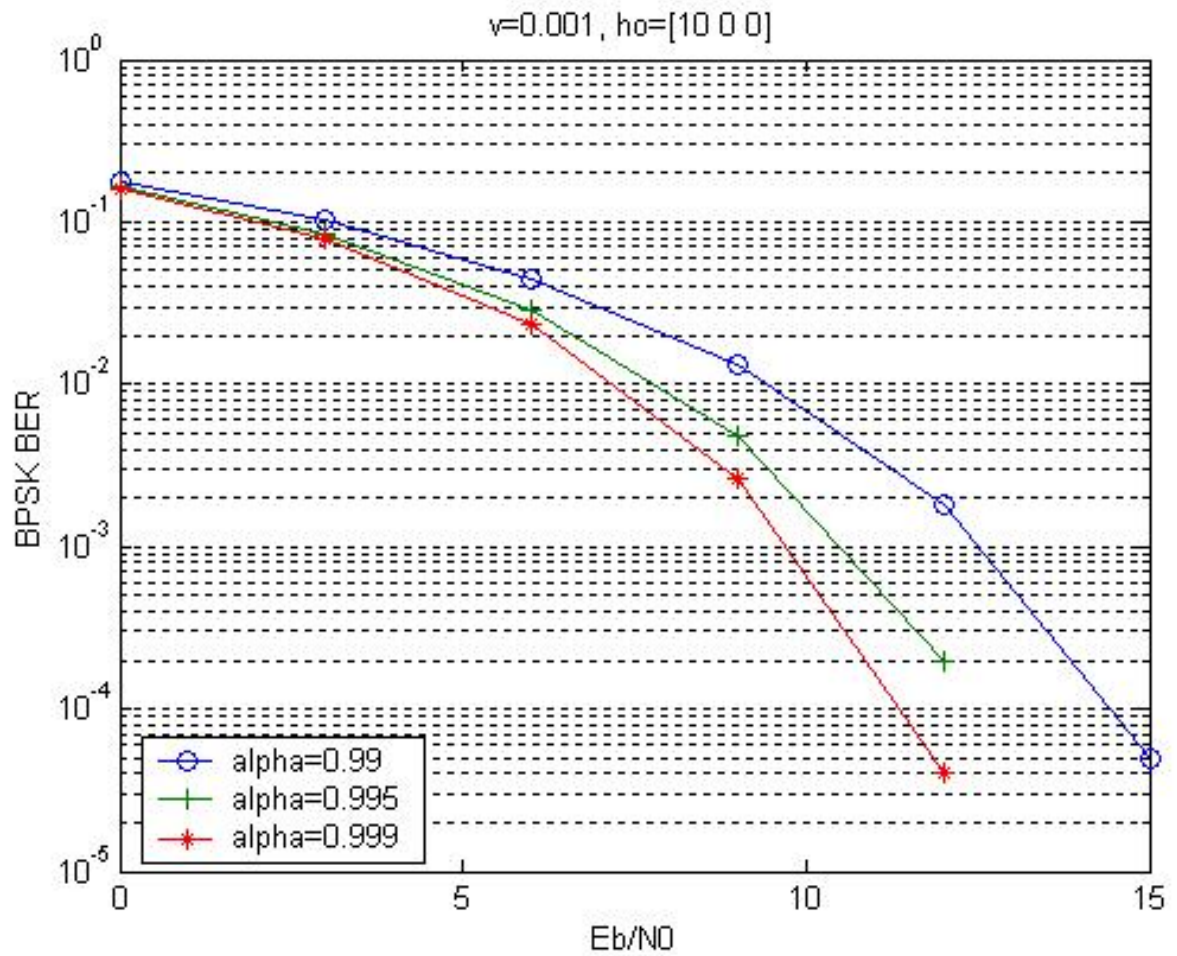


圖十.  $\nu = 0.001$   $h_0 = [1000, 1000, 1000]$ ; 由上而下為  $\alpha=0.99$ ,  $\alpha=0.995$ ,  $\alpha=0.999$

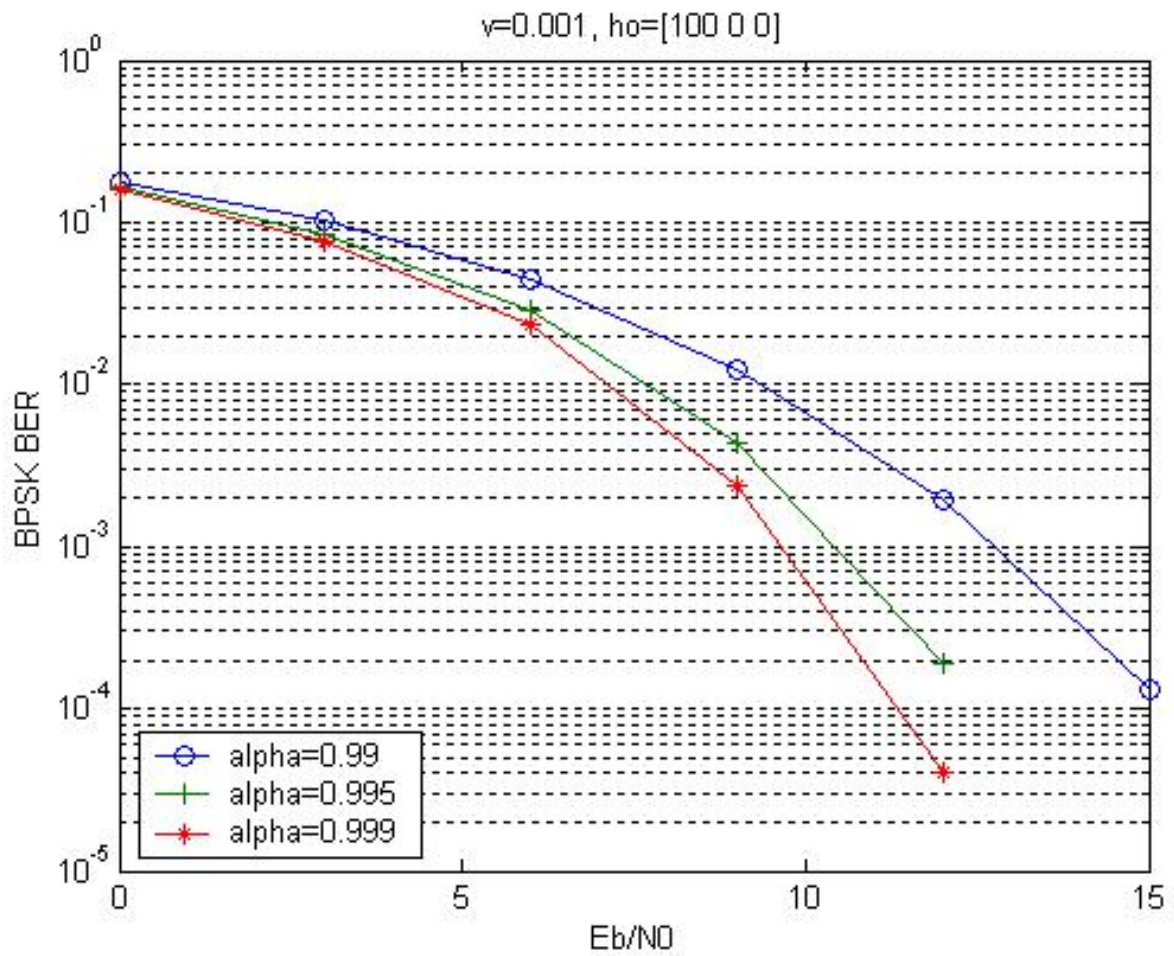




圖十一.  $\nu = 0.001, h_0 = [1, 0, 0]$ ; 由上而下為  $\alpha = 0.99, \alpha = 0.995, \alpha = 0.999$

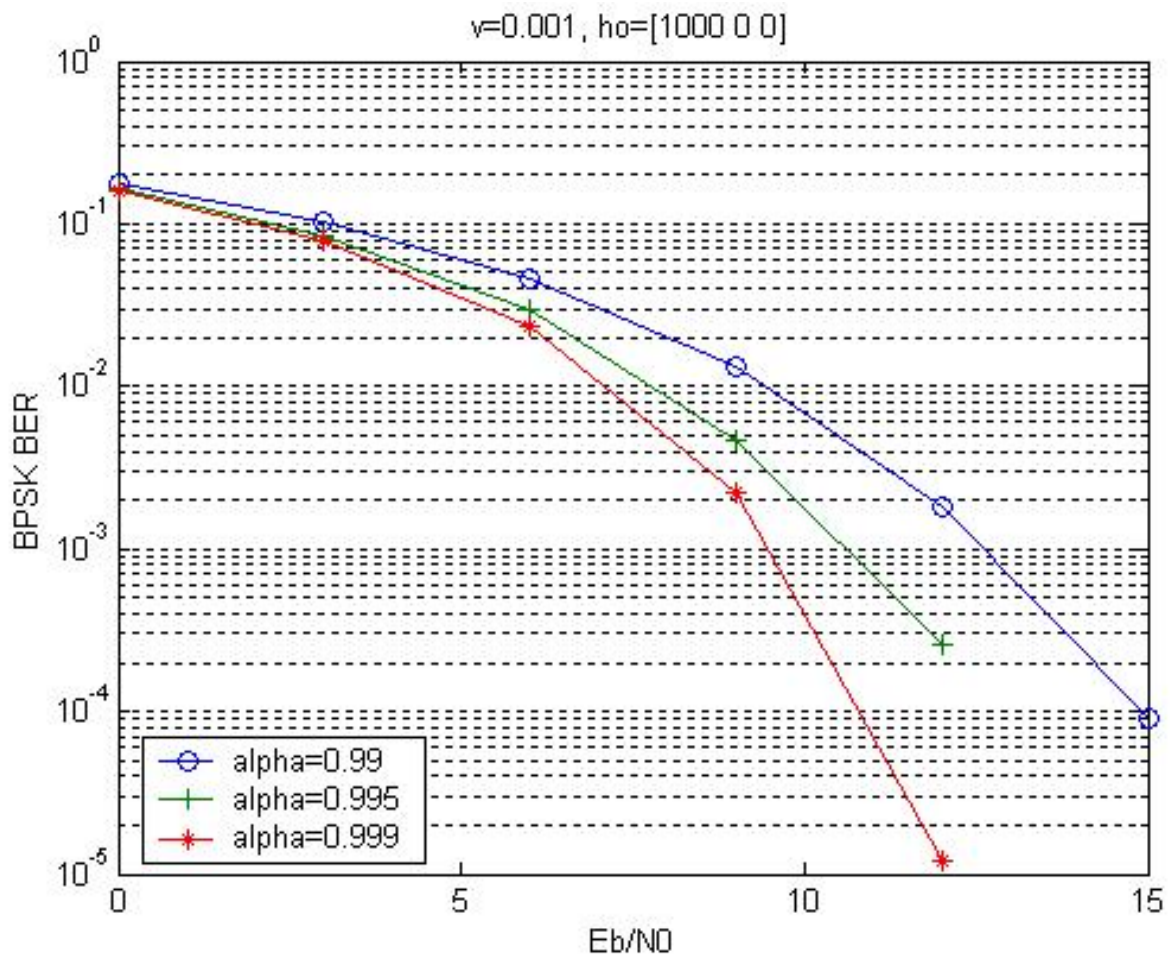


圖十二.  $\nu = 0.001, h_0 = [10, 0, 0]$ ; 由上而下為  $\alpha=0.99, \alpha=0.995, \alpha=0.999$   
 此模擬在  $E_b/N_0 = 15$  時，錯誤率為零，故模擬曲線在  $E_b/N_0 = 12$  時，呈現中止的情形。

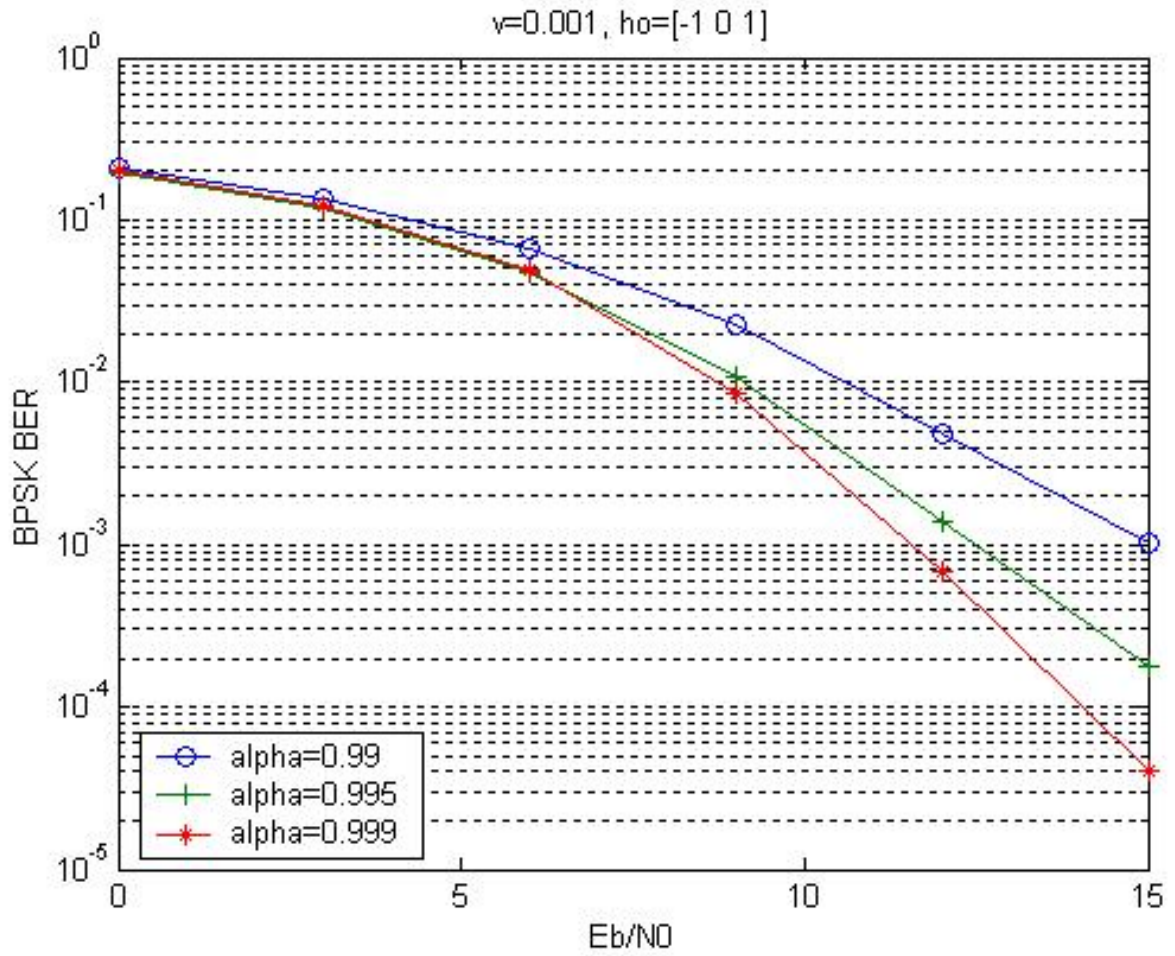


圖十三.  $\nu = 0.001, h_0 = [1000, 0, 0]$ ; 由上而下為  $\alpha = 0.99, \alpha = 0.995, \alpha = 0.999$

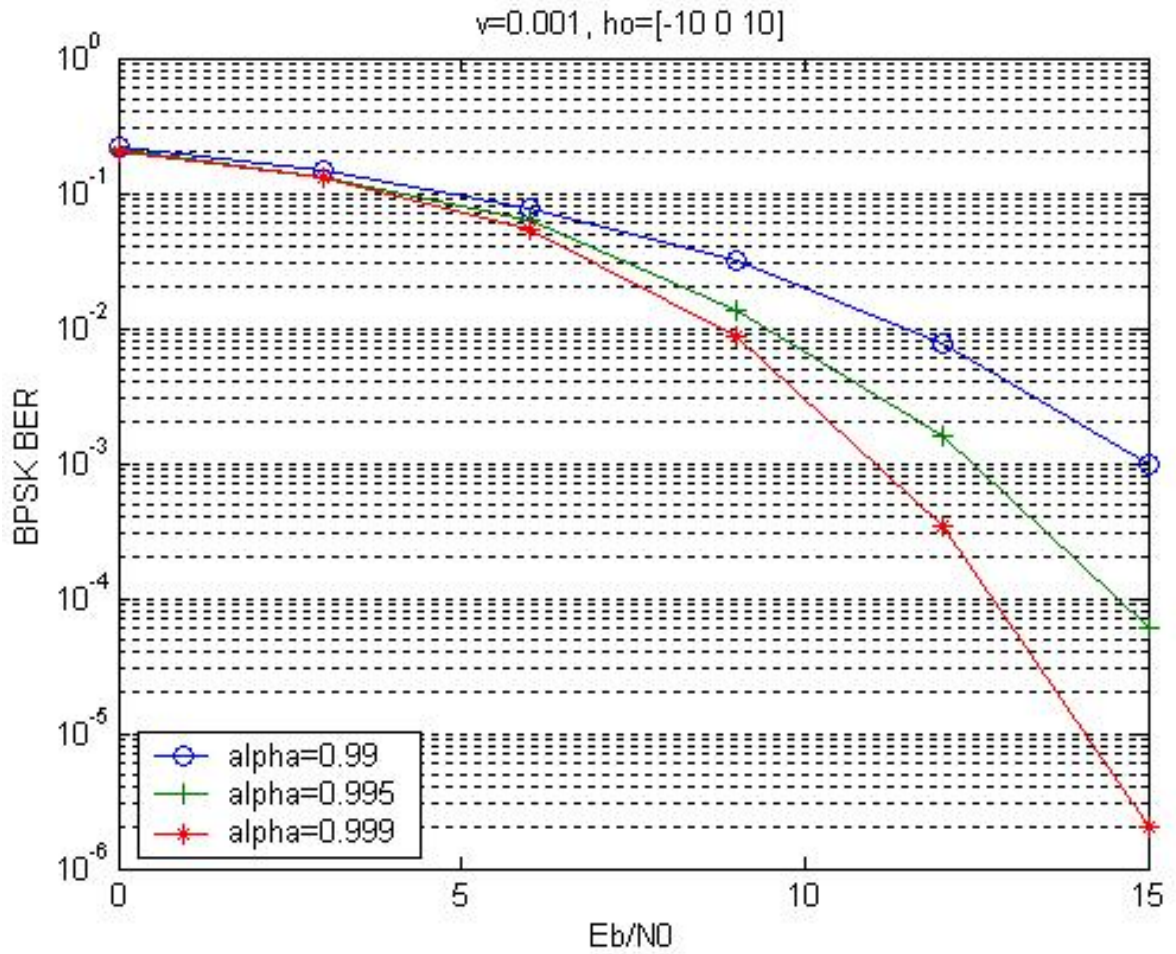




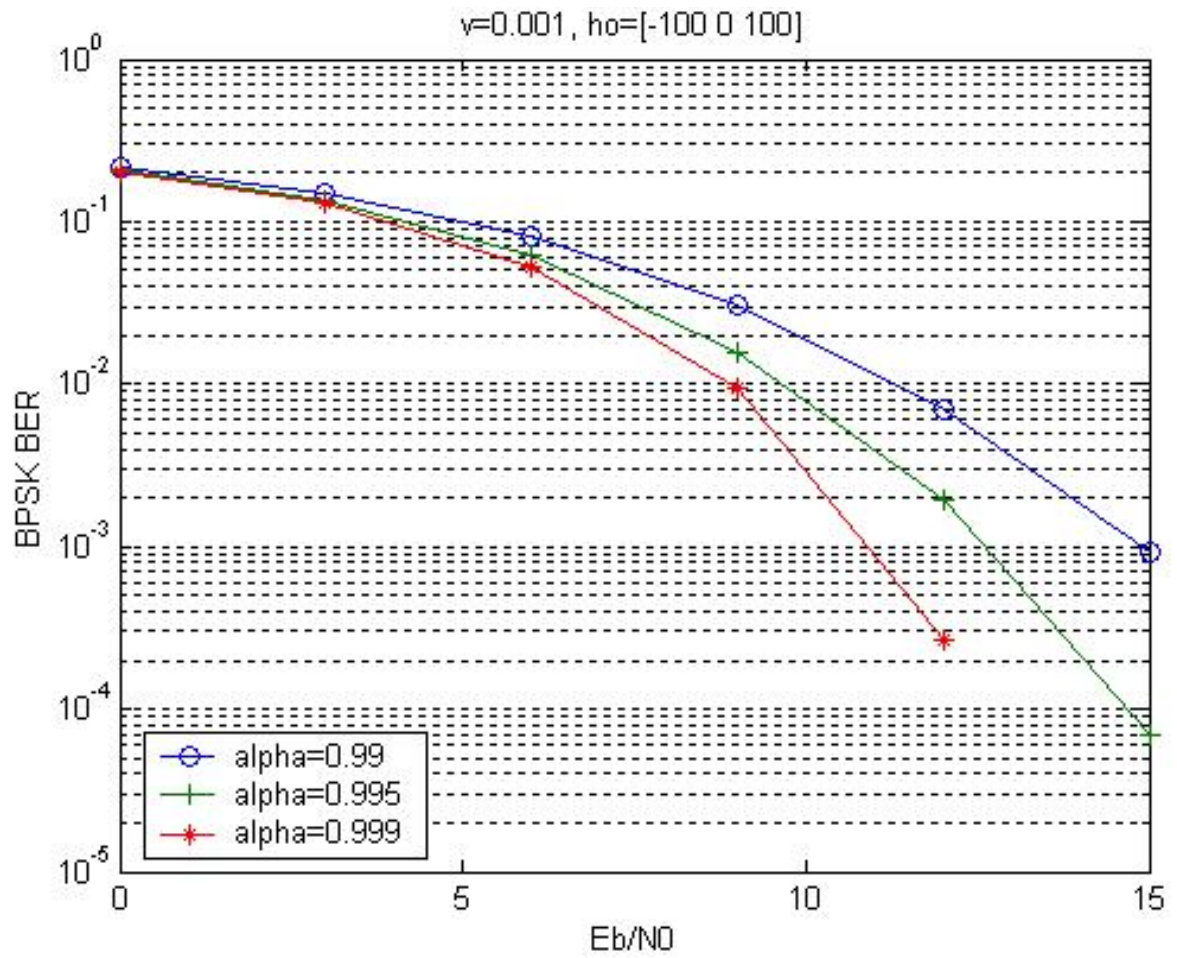
圖十四.  $\nu = 0.001, h_0 = [1000, 0, 0]$ ; 由上而下為  $\alpha=0.99, \alpha=0.995, \alpha=0.999$



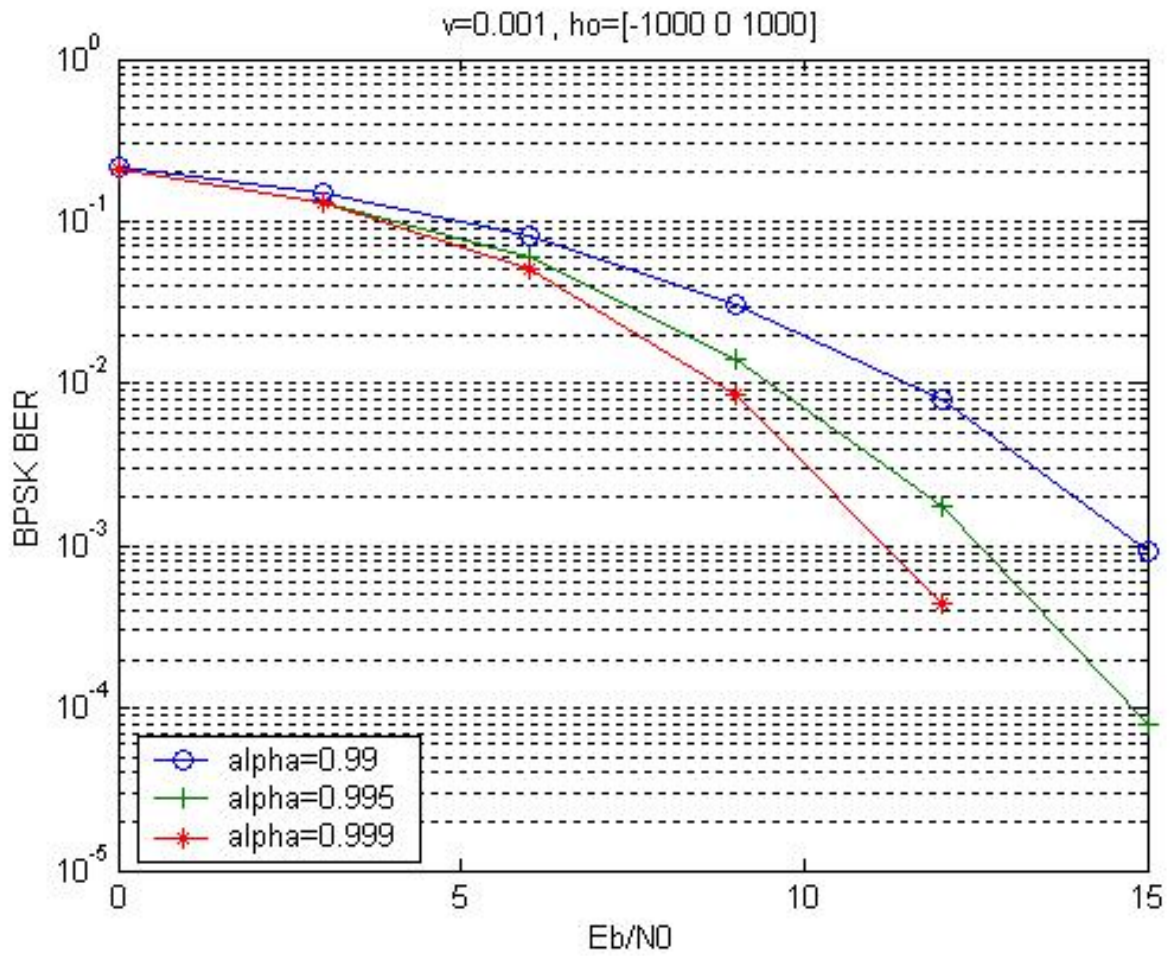
圖十五.  $\nu = 0.001, h_0 = [-1, 0, 1]$ ; 由上而下為  $\alpha = 0.99, \alpha = 0.995, \alpha = 0.999$



圖十六.  $\nu = 0.001, h_0 = [-10, 0, 10]$ ; 由上而下為  $\alpha = 0.99, \alpha = 0.995, \alpha = 0.999$



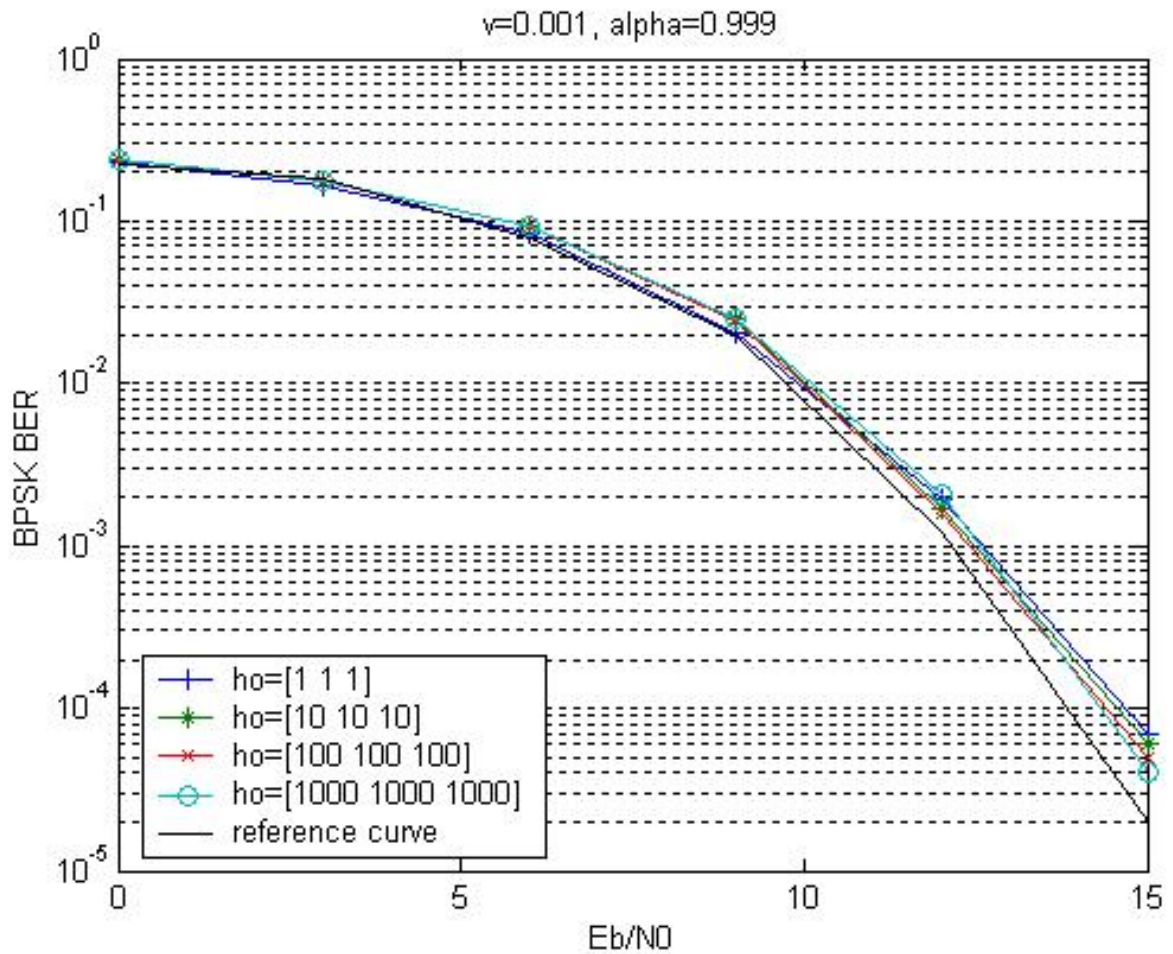
圖十七.  $\nu = 0.001$ ,  $h_0 = [-100 \ 0 \ 100]$ ; 由上而下為  $\alpha = 0.99$ ,  $\alpha = 0.995$ ,  $\alpha = 0.999$



圖十八.  $v = 0.001, h_0 = [-1000, 0, 1000]$ ; 由上而下為  $\alpha=0.99$ ,  $\alpha=0.995$ ,  $\alpha=0.999$

從上述的模擬，我們可以決定：在  $v = 0.001$  時， $\alpha = 0.999$  是參考論文[1]的高斯馬可夫通道參數，而  $\alpha = 0.999, h_0 = [10, 10, 10]; h_0 = [100, 100, 100]; h_0 = [1000, 1000, 1000]$ ; 皆為我們選定的值。合併我們選定的曲線和參考論文[1]的，以圖示表示。

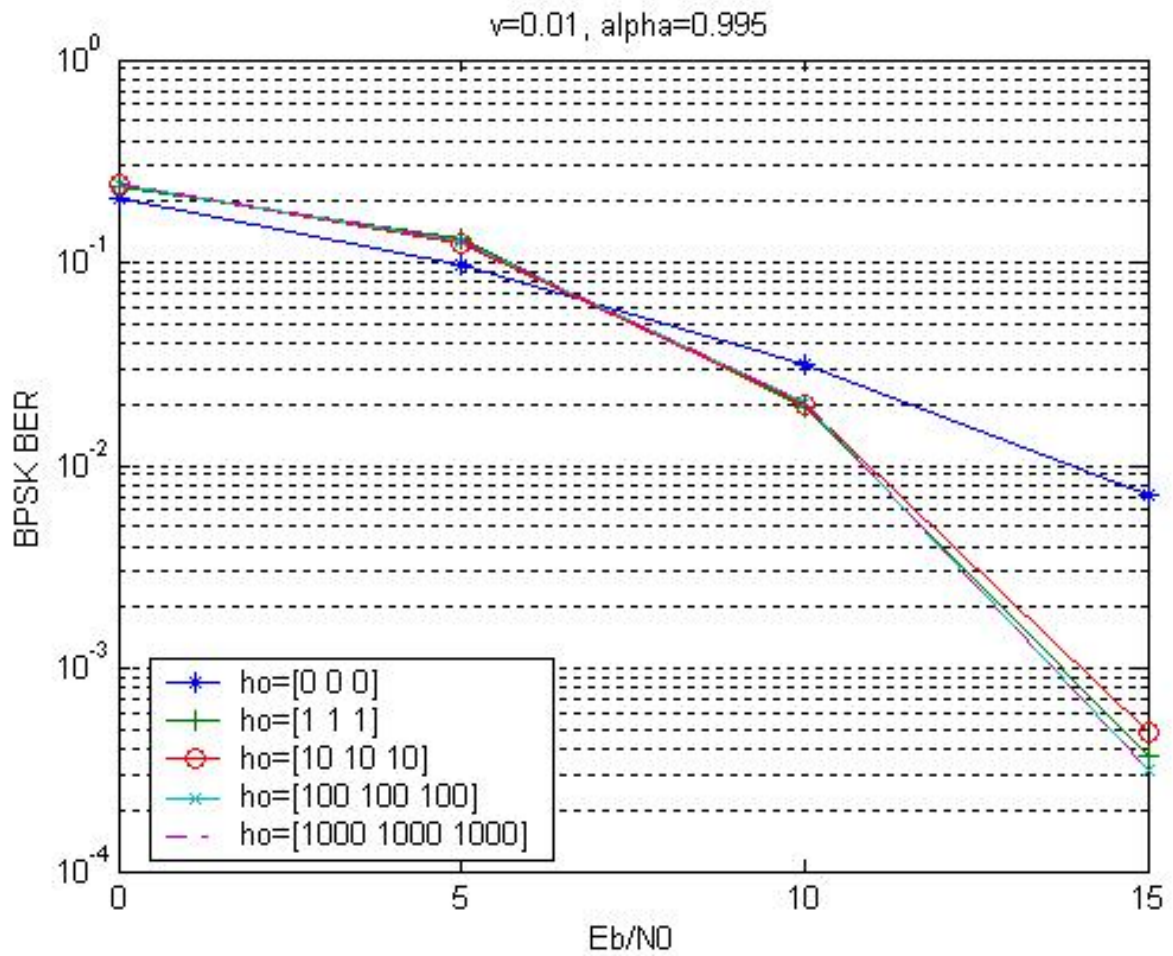




圖十九.  $\nu = 0.001$ ,  $\alpha = 0.999$ ,  $h_0=[1, 1, 1]$ ;  $h_0=[10, 10, 10]$ ;  $h_0=[100, 100, 100]$ ;  $h_0=[1000, 1000, 1000]$ 和reference curve(known channel)

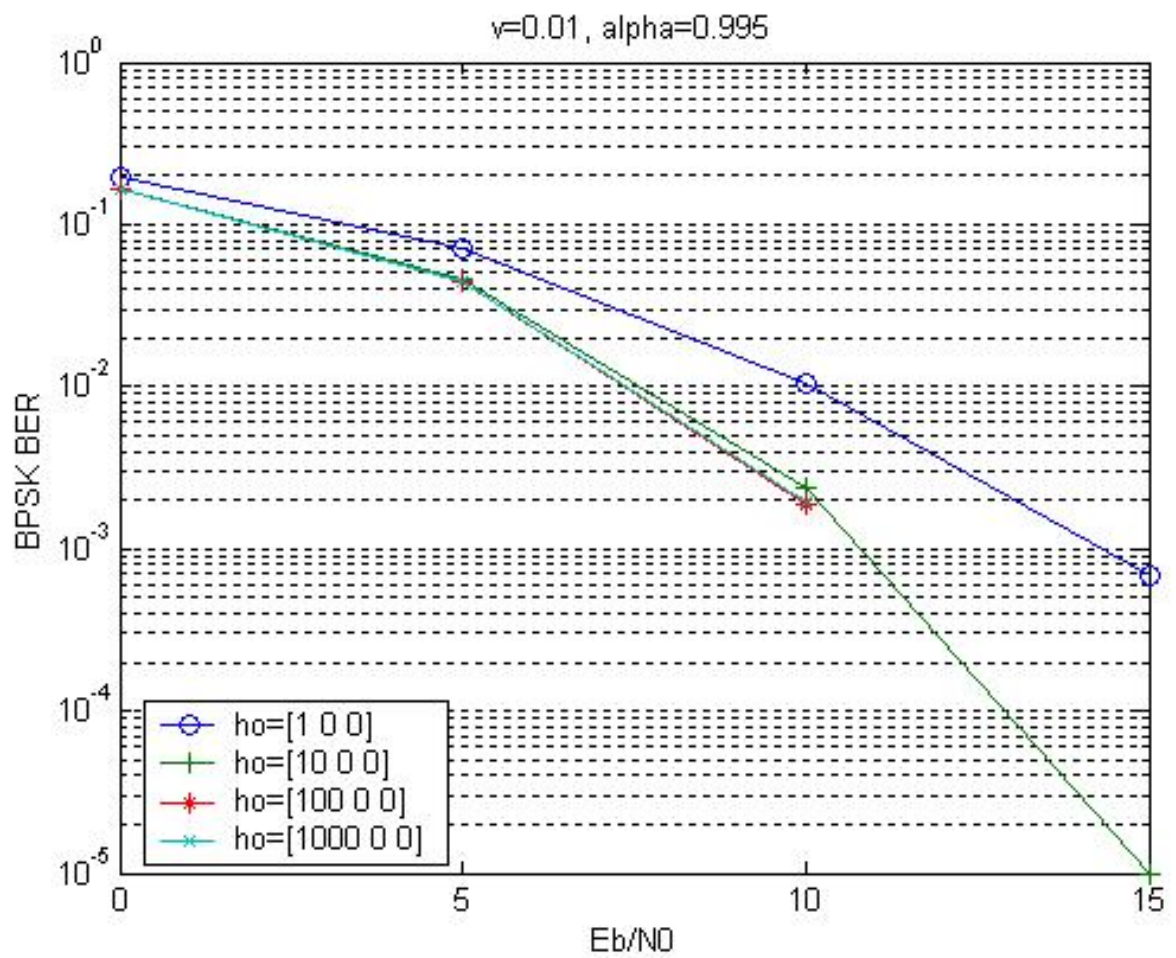
因此接著我們對  $\nu=0.01$  做同樣方式。來找出參考論文[1]的參數值。

2.2.3 當  $\nu=0.01$  改變通道起始值對上固定的高斯馬可夫衰減參數

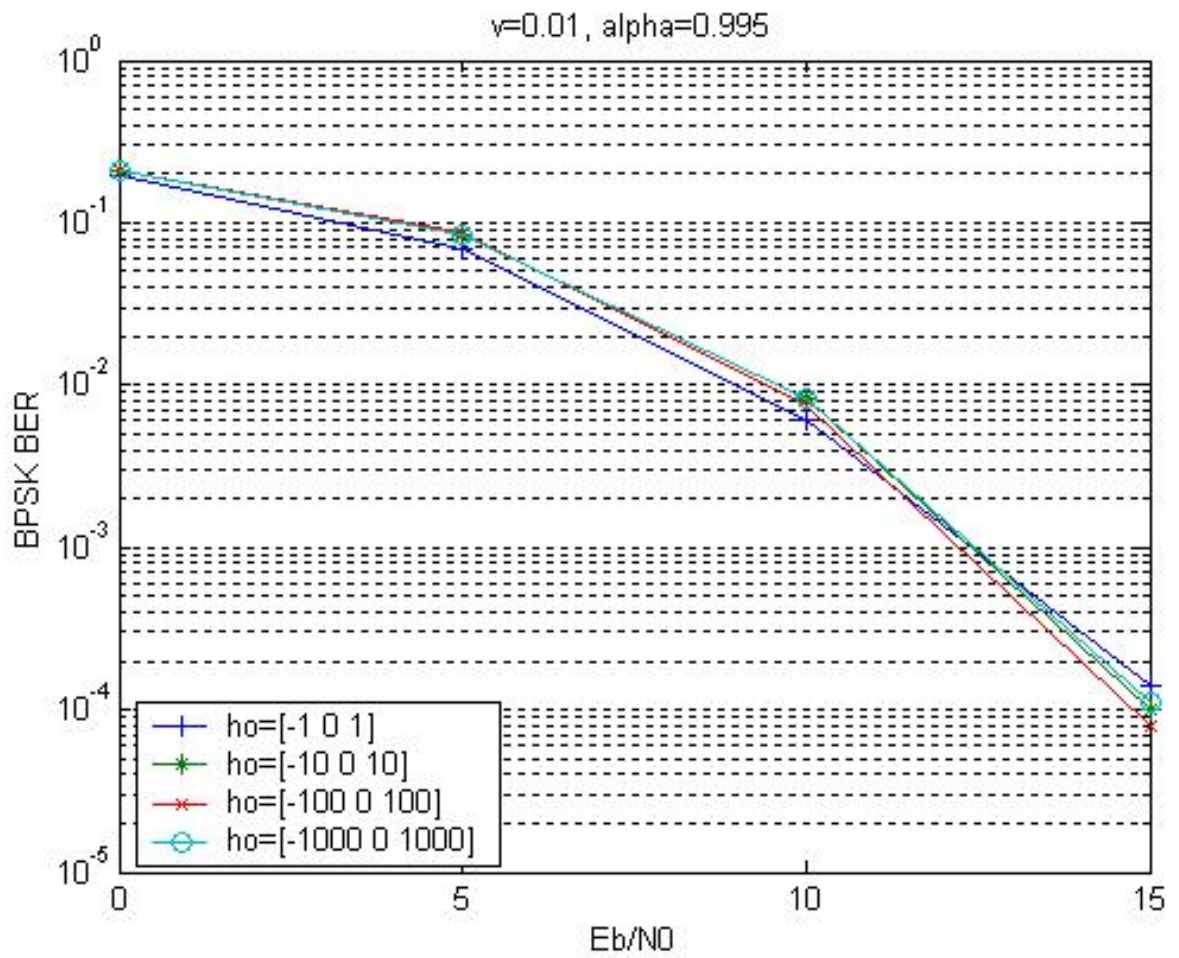


圖二十.  $\nu = 0.01, \alpha = 0.995$  分別對  $h_0=[0, 0, 0]$ ,  $h_0=[1, 1, 1]$ ,  $h_0=[10, 10, 10]$ ,  $h_0=[100, 100, 100]$ ,  $h_0=[1000, 1000, 1000]$

上圖的  $h_0=[1, 1, 1]$  綠色曲線和參考論文[1]的模擬線重合，不過，其他的模擬線也是相當程度的接近。所以我們試著改變其他  $h_0$  並再看是否也能有相同的重合線。

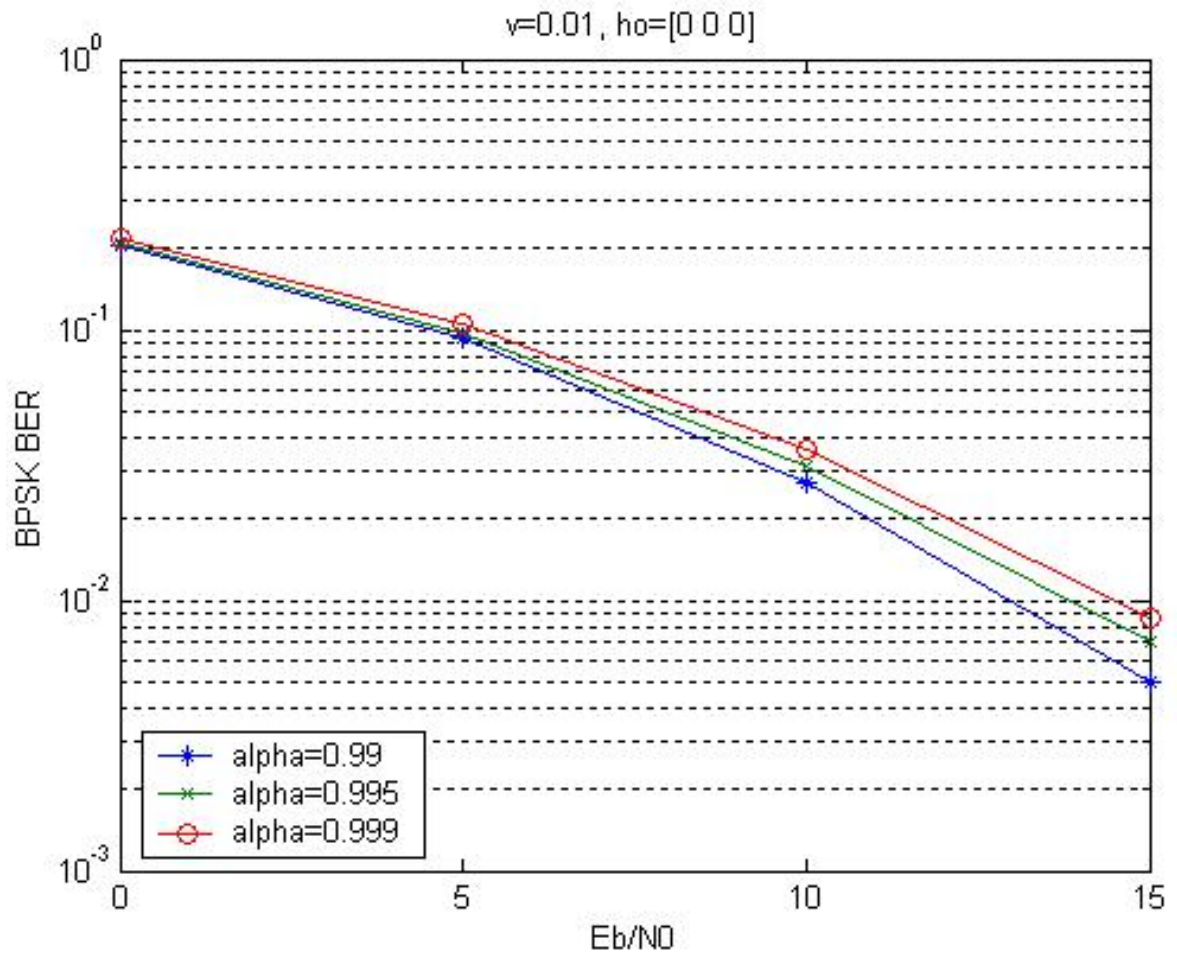


圖二十一.  $\nu = 0.01$ ,  $\alpha = 0.995$  分別對  $h_0=[1, 0, 0]$ ,  $h_0=[10, 0, 0]$ ,  $h_0=[100, 0, 0]$ ,  $h_0=[1000, 0, 0]$

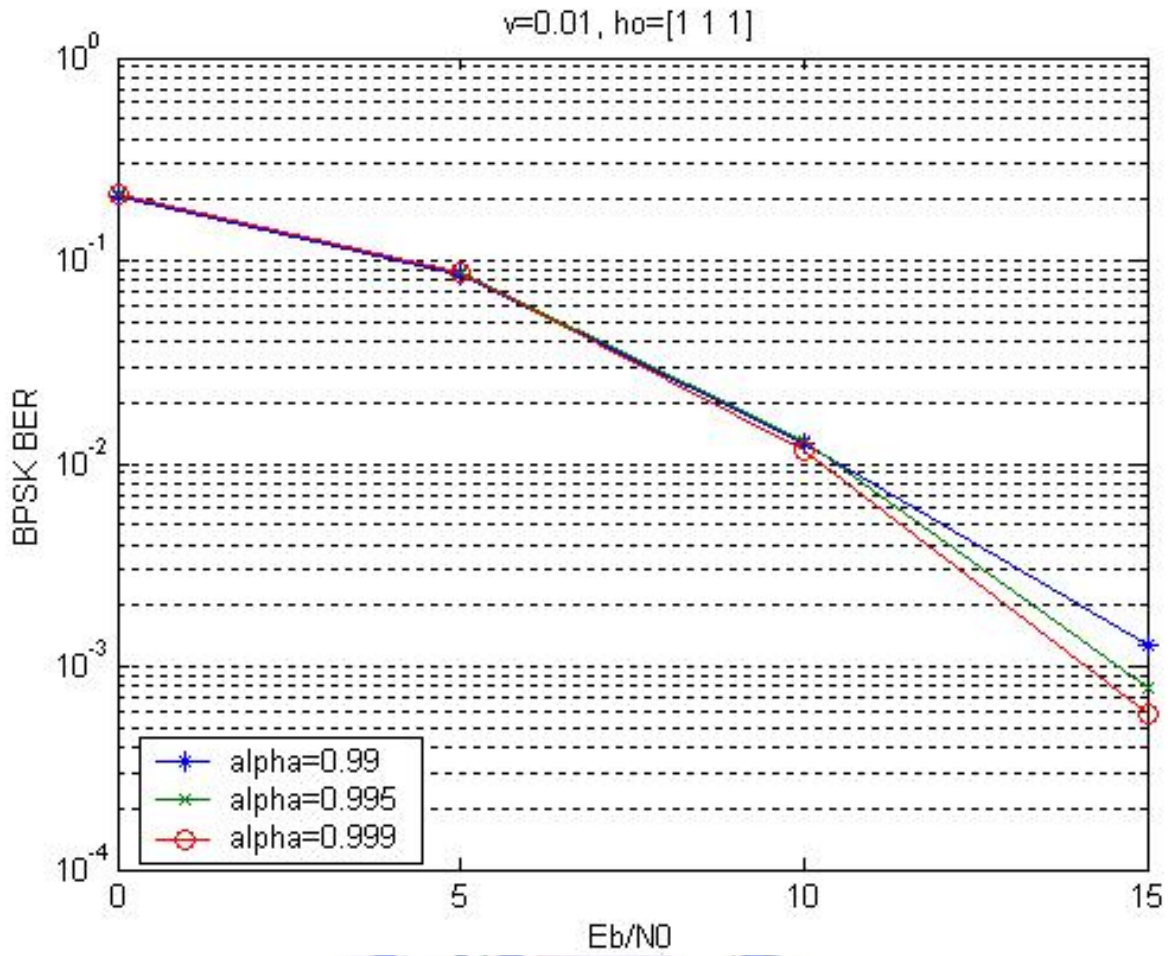


圖二十二.  $\nu=0.01, \alpha=0.995$ , 分別對  $h_0=[-1, 0, 1]$ ;  $h_0=[-10, 0, 10]$ ;  $h_0=[-100, 0, 100]$ ;  $h_0=[-1000, 0, 1000]$

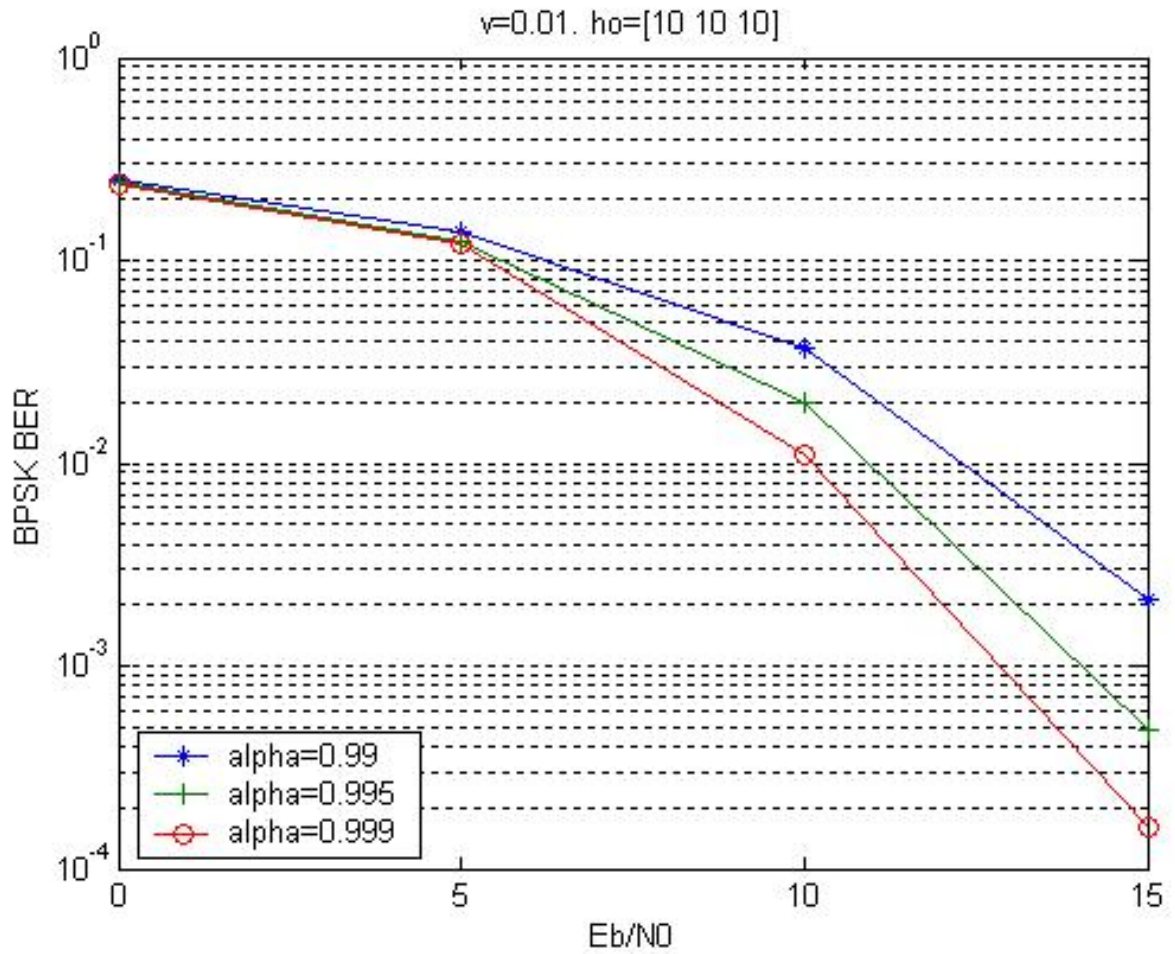
### 2.2.4 當 $\nu=0.01$ 改變高斯馬可夫衰減參數對上固定通道起始值



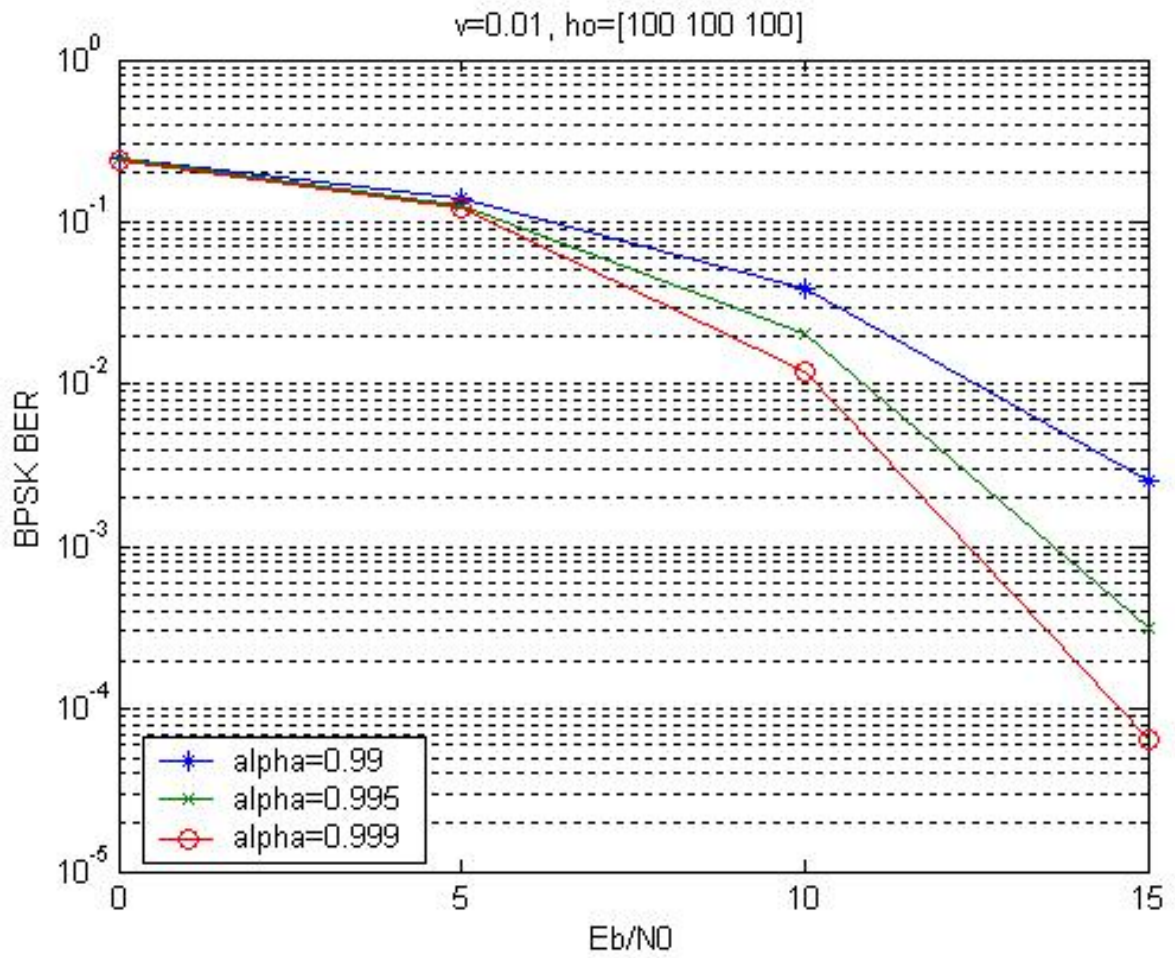
圖二十三.  $\nu = 0.01$ ,  $\mathbf{h}_0 = [0, 0, 0]$ 由上而下分別為  $\alpha = 0.999$ ,  $\alpha = 0.995$ ,  $\alpha = 0.99$



圖二十四.  $v = 0.01$  ,  $h_0 = [1, 1, 1]$ 由上而下分別為  $\alpha = 0.99$  ,  $\alpha = 0.995$  ,  $\alpha = 0.999$

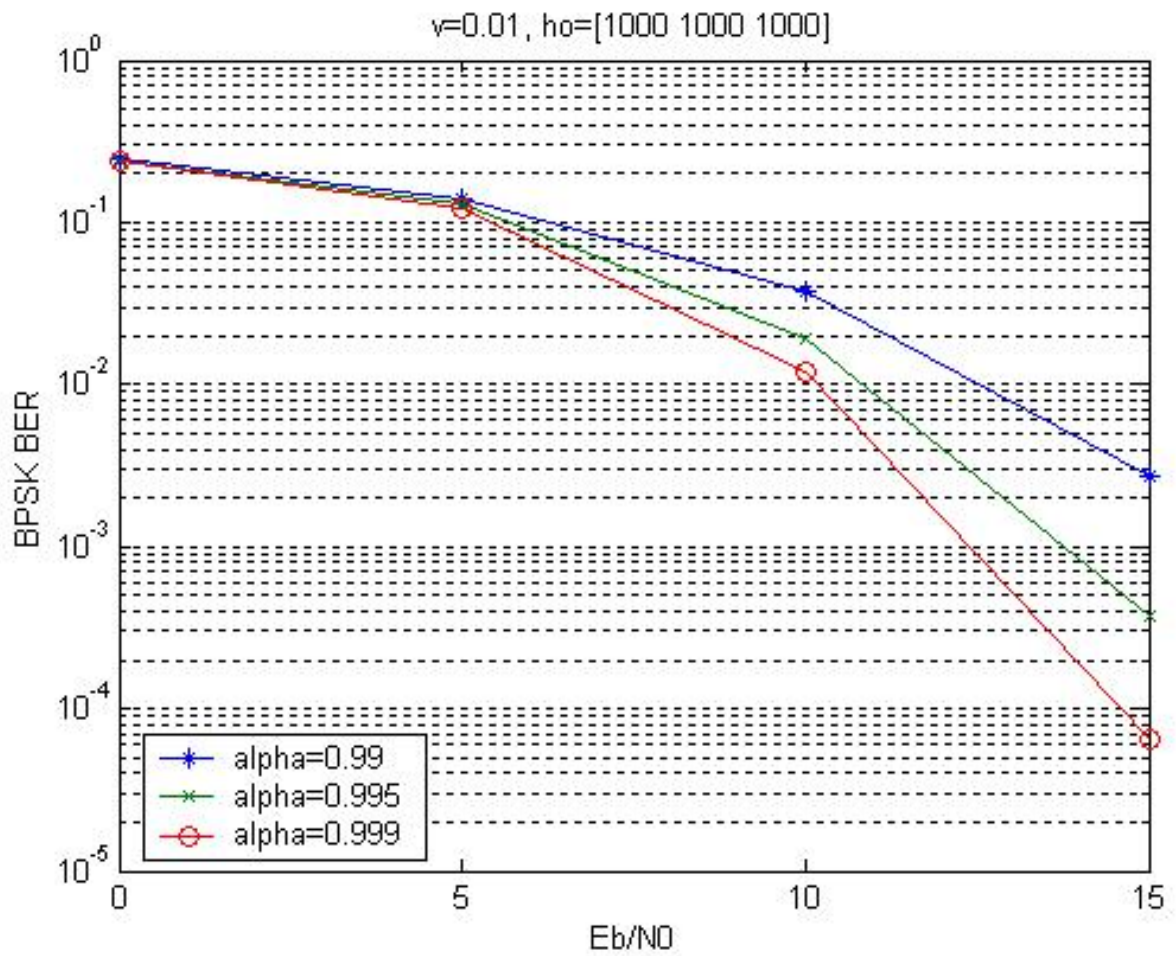


圖二十五.  $\nu=0.01$ ,  $h_0=[10, 10, 10]$ 由上而下分別為 $\alpha=0.99$ ,  $\alpha=0.995$ ,  $\alpha=0.999$

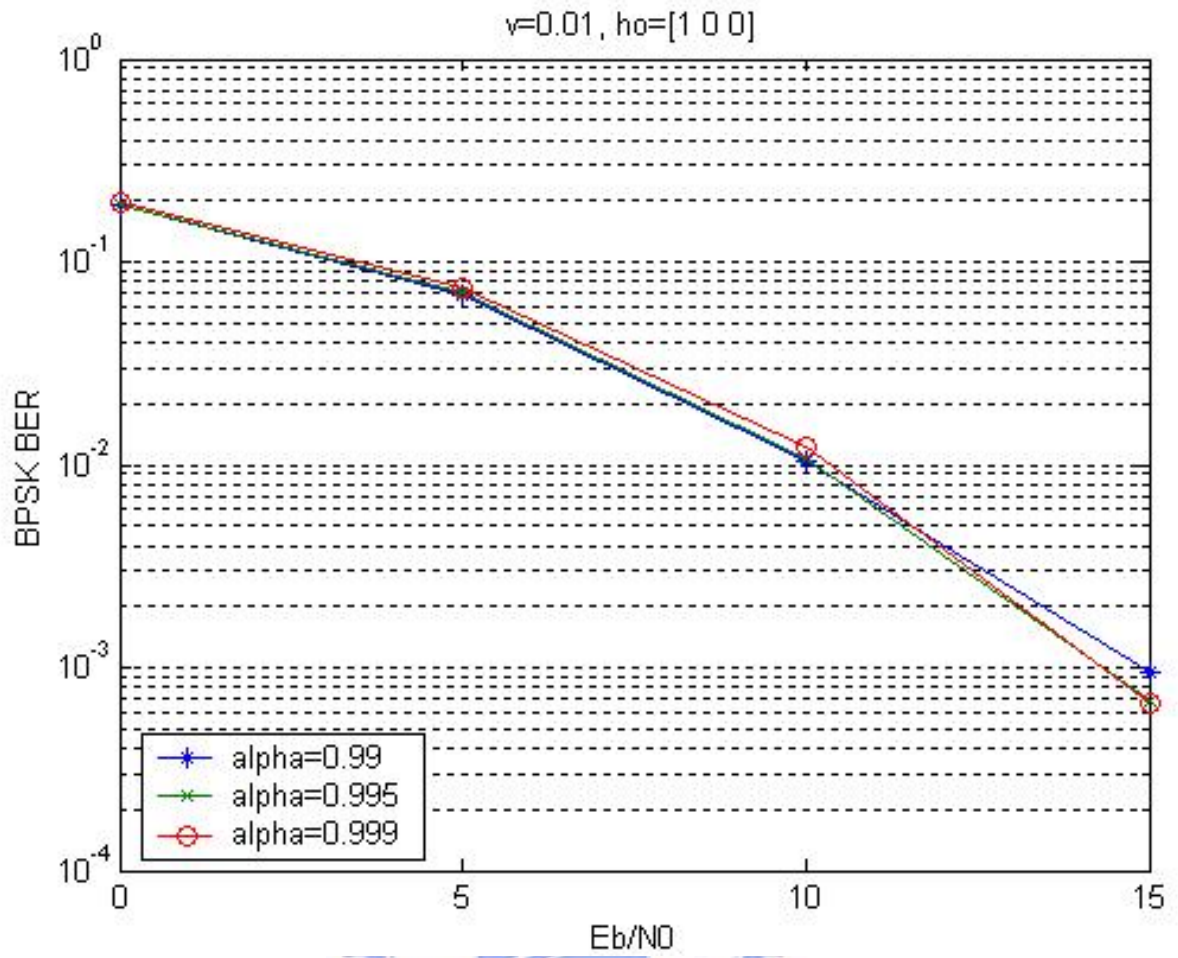


圖二十六.  $\nu=0.01, h_0=[10, 10, 10]$ 由上而下分別為 $\alpha=0.99, \alpha=0.995, \alpha=0.999$

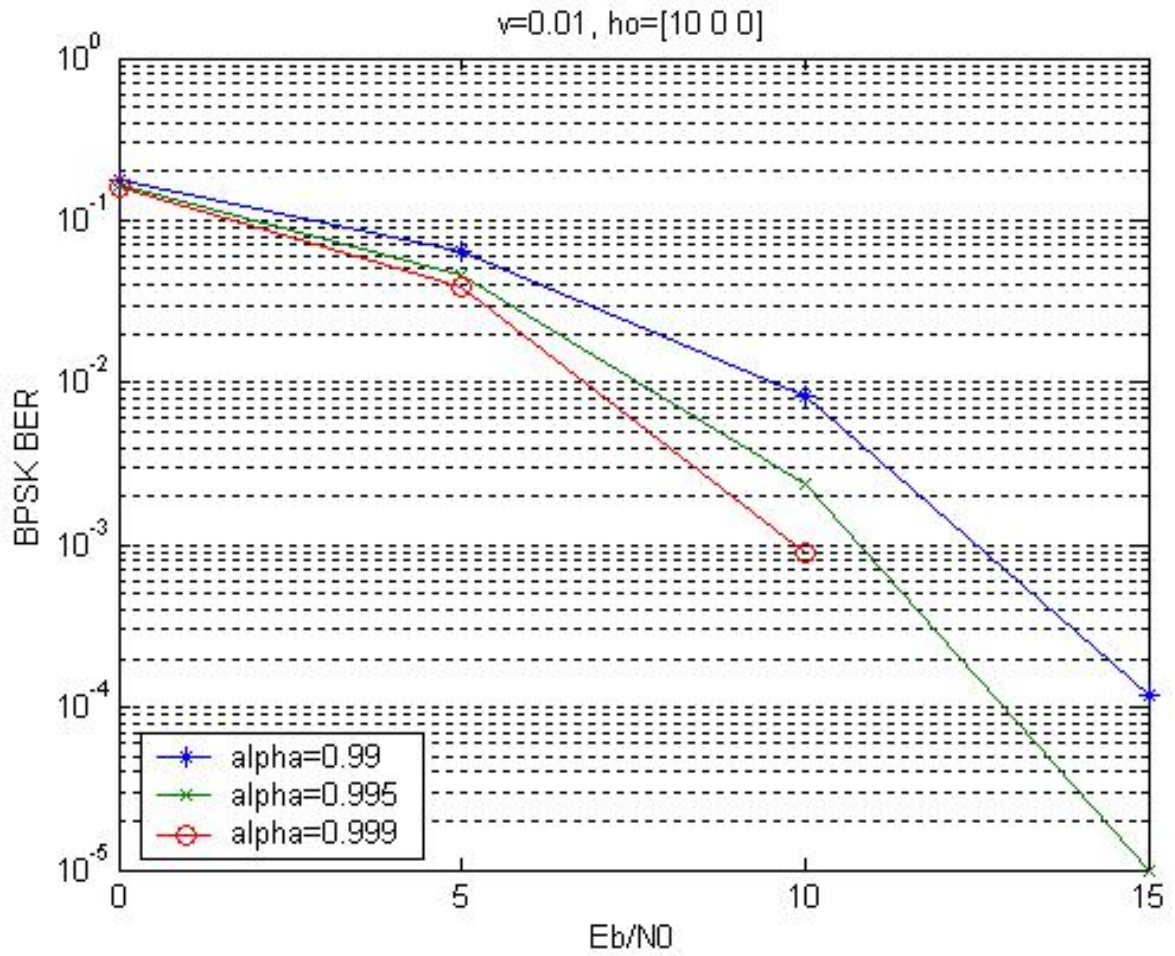




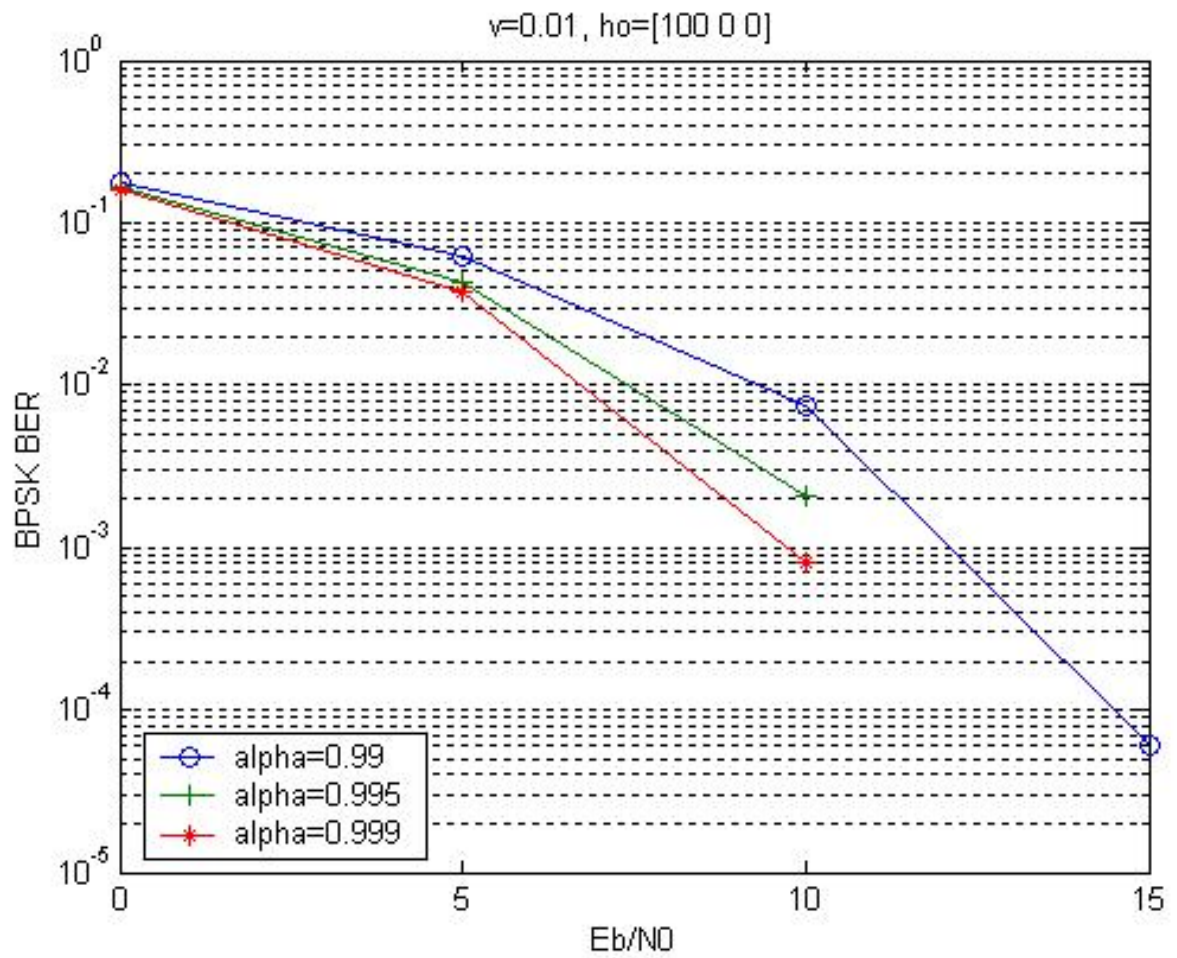
圖二十七.  $\nu=0.01$ ,  $h_0=[1000, 1000, 1000]$ 由上而下分別為  $\alpha=0.99$ ,  $\alpha=0.995$ ,  $\alpha=0.999$



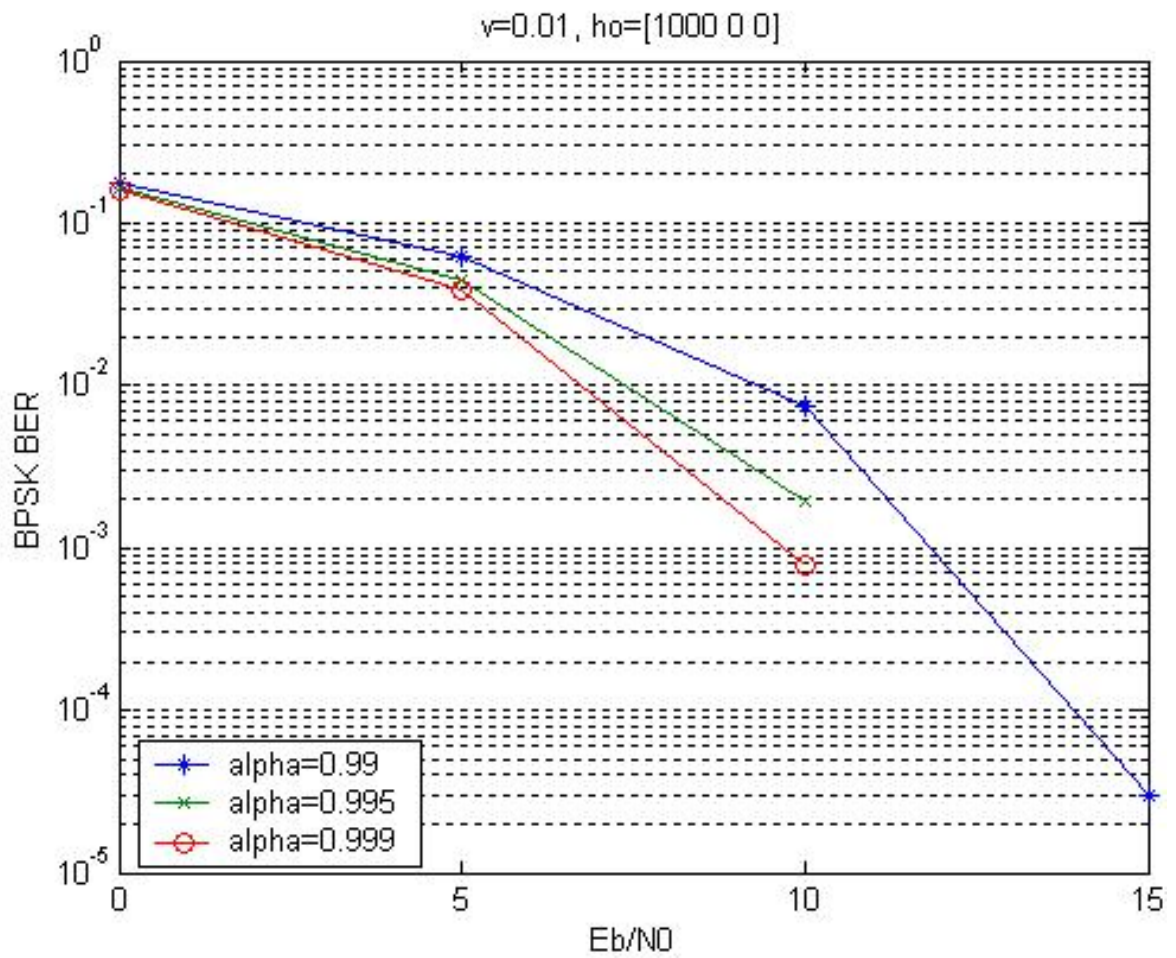
圖二十八.  $v=0.01$ ,  $h_0=[1, 0, 0]$ 由上而下分別為  $\alpha=0.99$ ,  $\alpha=0.995$ ,  $\alpha=0.999$



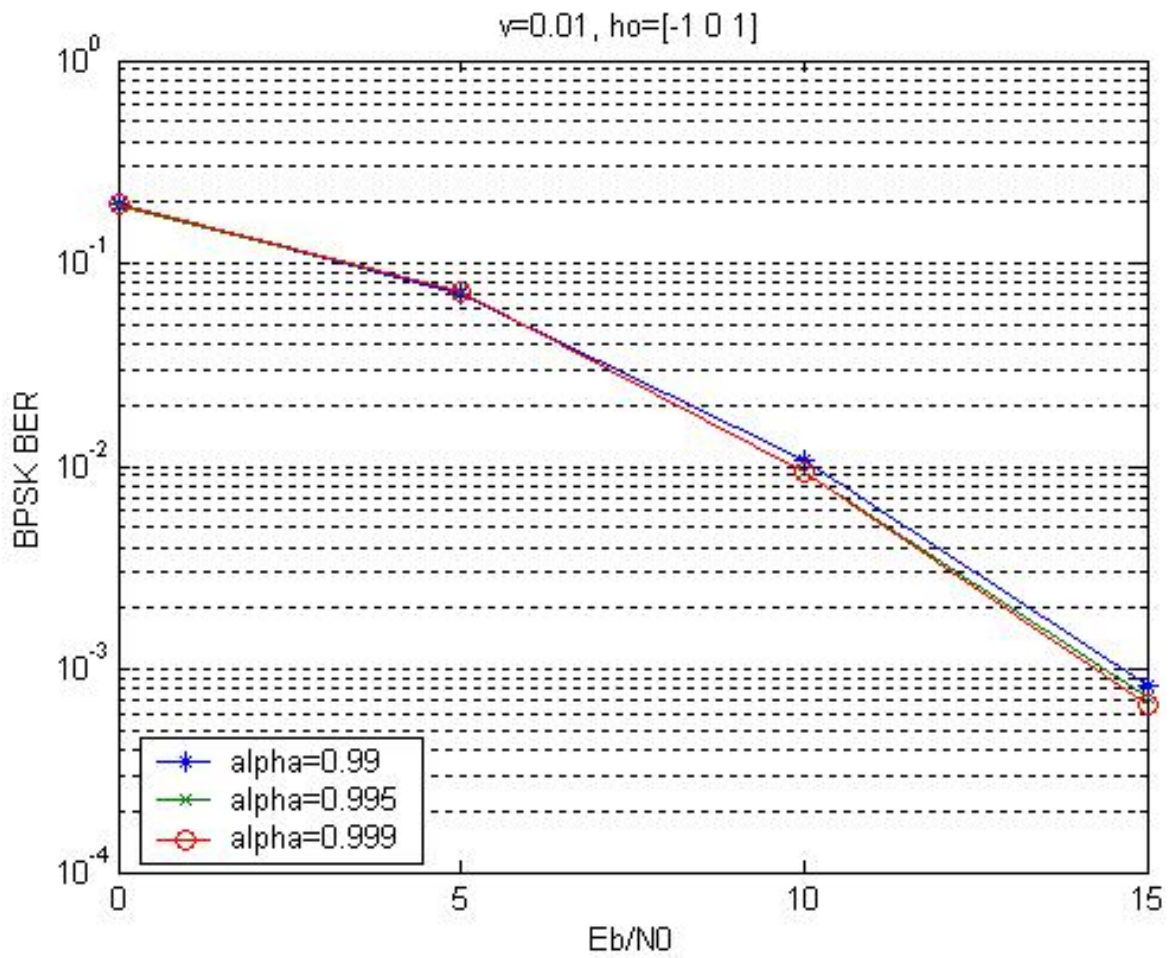
圖二十九.  $\nu=0.01$ ， $h_0=[10, 0, 0]$ 由上而下分別為 $\alpha=0.99$ ， $\alpha=0.995$ ， $\alpha=0.999$



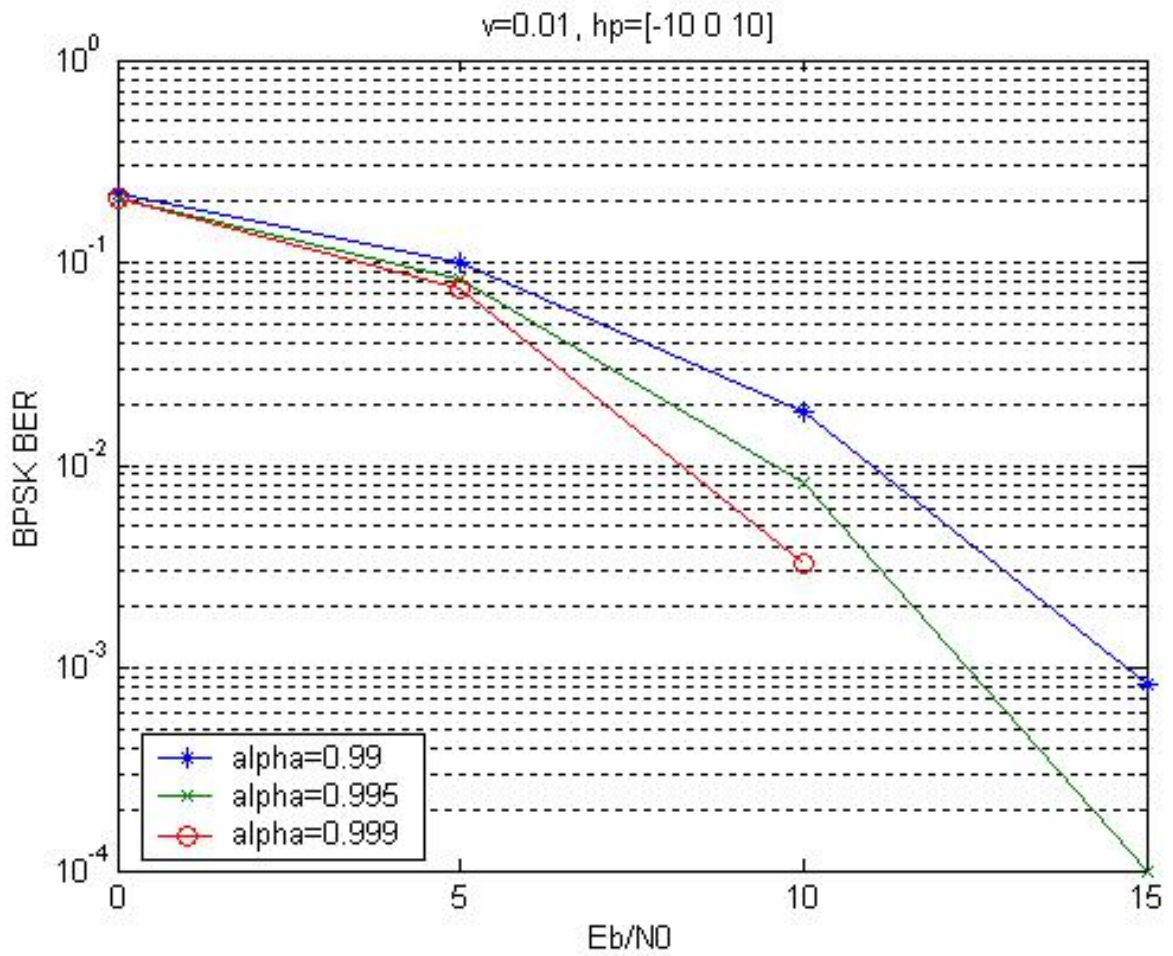
圖三十.  $\nu=0.01$ ,  $h_0=[10, 0, 0]$ 由上而下分別為 $\alpha=0.99$ ,  $\alpha=0.995$ ,  $\alpha=0.999$



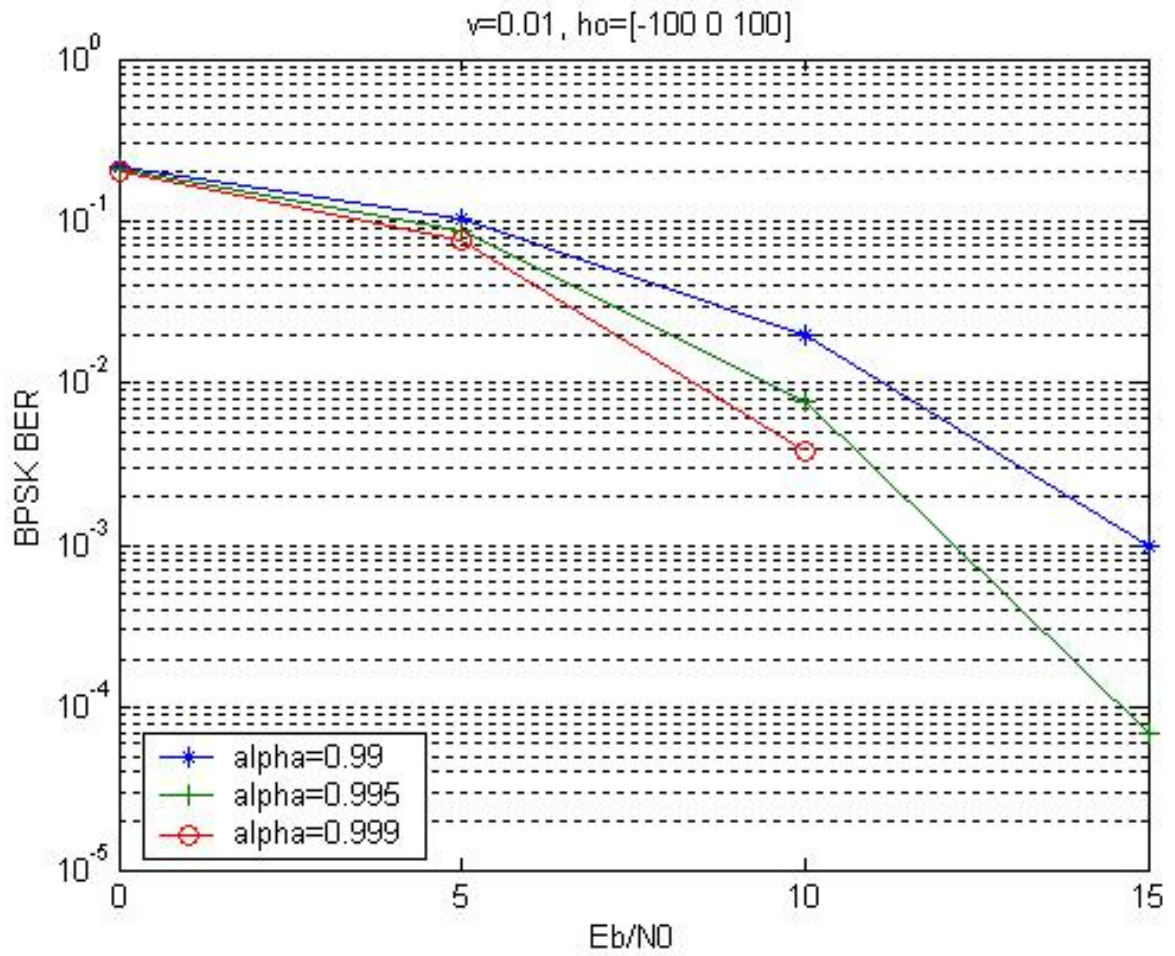
圖三十一.  $\nu=0.01$ ,  $h_0=[1000, 0, 0]$ 由上而下分別為 $\alpha=0.99$ ,  $\alpha=0.995$ ,  $\alpha=0.999$



圖三十二.  $\nu=0.01, h_0=[-1, 0, 1]$ 由上而下分別為  $\alpha=0.99, \alpha=0.995, \alpha=0.999$

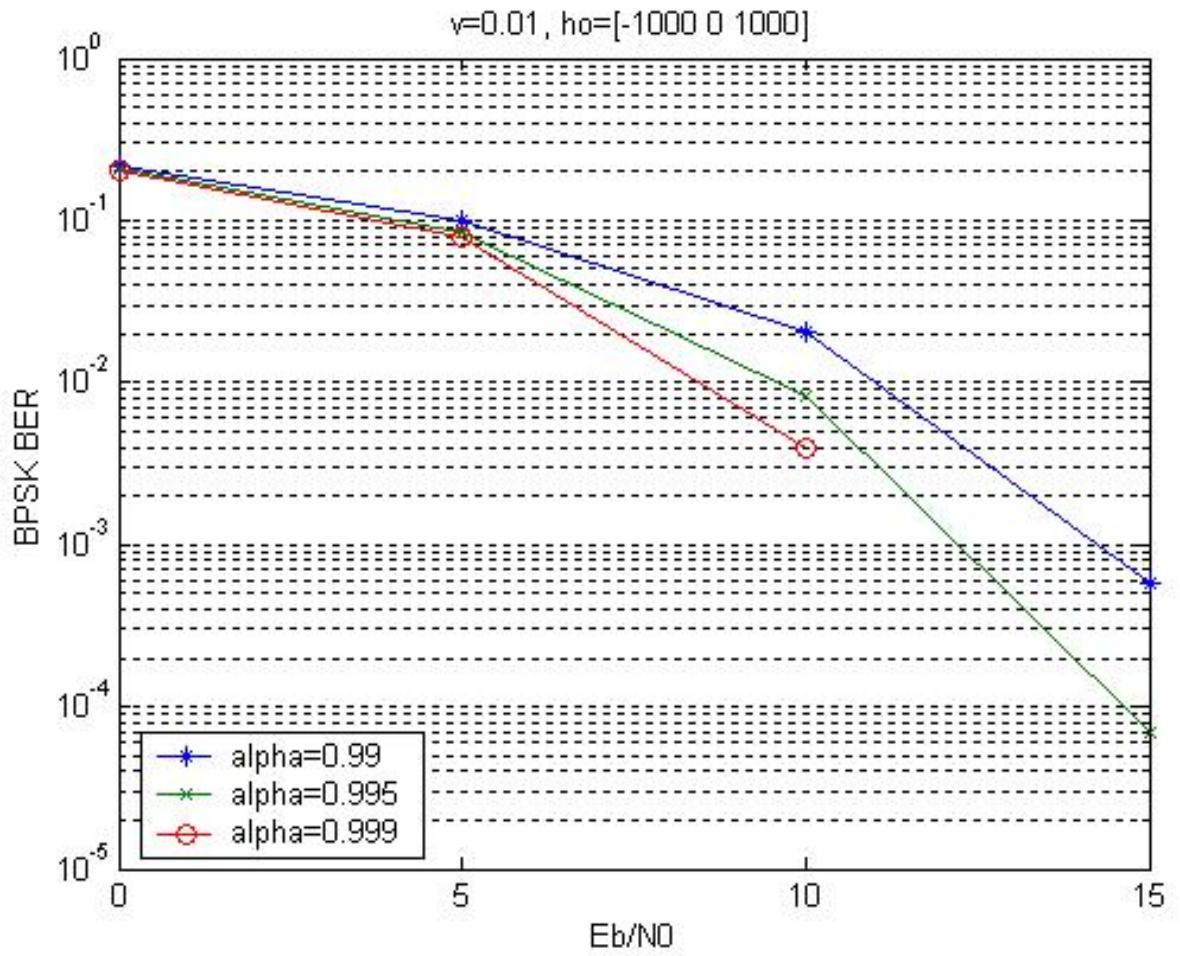


圖三十三.  $\nu=0.01$ ,  $h_0=[-10, 0, 10]$ 由上而下分別為  $\alpha=0.99$ ,  $\alpha=0.995$ ,  $\alpha=0.999$

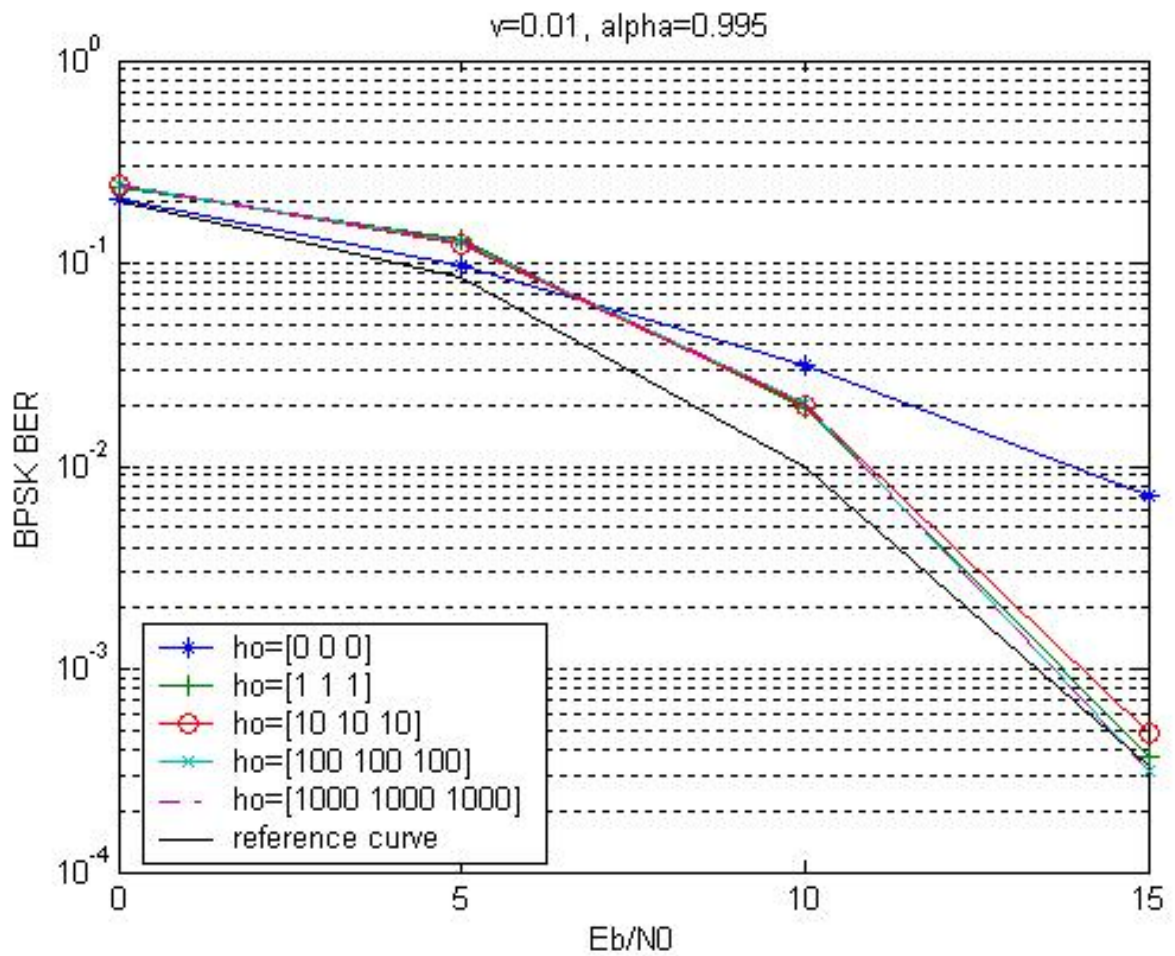


圖三十四.  $\nu=0.01, h_0=[-100, 0, 100]$ 由上而下分別為  $\alpha=0.99, \alpha=0.995, \alpha=0.999$



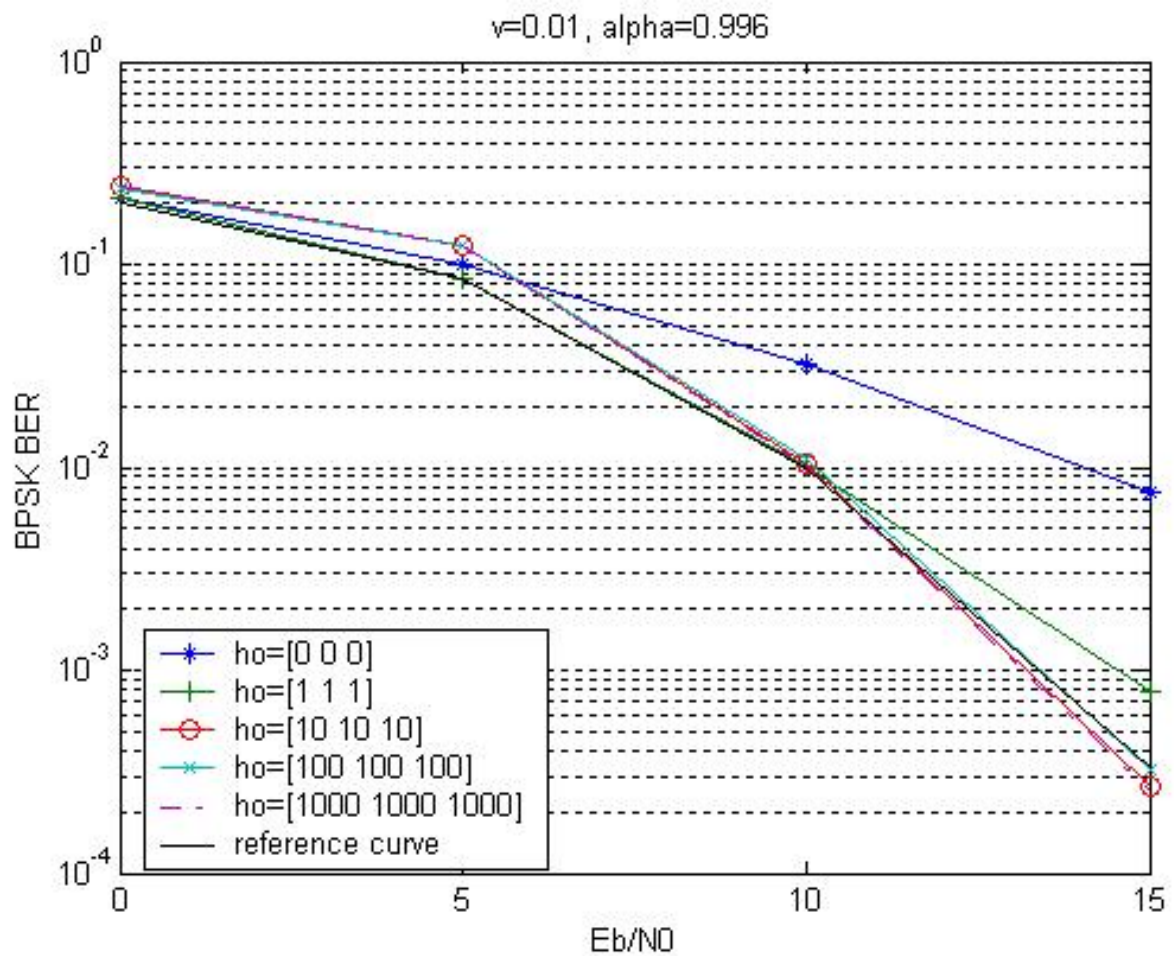


圖三十五.  $\nu=0.01, h_0=[-1000, 0, 1000]$ 由上而下分別為  $\alpha=0.99, \alpha=0.995, \alpha=0.999$



圖三十六.  $\nu=0.01$ ,  $\alpha=0.995$ ,  $h_0=[0, 0, 0]$ ;  $h_0=[1, 1, 1]$ ;  $h_0=[10, 10, 10]$ ;  $h_0=[100, 100, 100]$ ;  $h_0=[1000, 1000, 1000]$  reference curve(known channel)

上圖的紫色模擬曲線為參考論文[1]中  $\nu=0.01$  的已知通通模擬曲線，而  $\alpha=0.995$  的各曲線皆在其上方，故我們將衰減常數改變，改成  $\alpha=0.996$  再觀察其結果。



圖三十七.  $\nu=0.01, \alpha=0.996$   $h_0=[1, 1, 1]$ ;  $h_0=[10, 10, 10]$ ;  $h_0=[100,100, 100]$ ;  $h_0=[1000, 1000, 1000]$ ;  $\nu=0.01$  reference curve(known channel)

當  $\alpha=0.996$  時，和已知通道完全重合，故我們可以知道， $\alpha=0.996$  是參考論文[1]的衰減常數，而  $h_0=[10, 10, 10]$ ;  $h_0=[100,100, 100]$ ;  $h_0=[1000, 1000, 1000]$ ; 皆是我們可以選用的數值。

### 第三章 預測量度分析

我們要進行的是離線(off-line)解調變(demodulation)的預測分析，也就是說向量  $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]^T$  為已知。由參考論文[1]中的結果：

$$\mathbf{G}_k = \left[ \frac{\mathbf{a}_k^* \mathbf{a}_k^T}{\sigma^2} + \mathbf{C}^{-1} + |\alpha|^2 (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{C}^{-1}) \right]^{-1}$$

$$\mathbf{q}_k = \alpha \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{q}_{k-1} + \frac{\mathbf{a}_k^* r_k}{\sigma^2}$$

首先，在實際觀察所計算出的  $\mathbf{G}_k$  矩陣，在時間點  $k$ ，所有籐籬狀態點 (Trellis node) 的  $\mathbf{G}_k$  差異不大。換句話說，就是在解調籐籬 (Trellis) 同一時間之籐籬點 (Node)，不管進入路徑之  $\mathbf{G}_{k-1}$  為何，其計算出來的  $\mathbf{G}_k$  皆相當接近，因此在做路徑篩選時，可假設不同進入路徑之  $\mathbf{G}_k$  完全相同，使得路徑量度比較結果完全由  $\mathbf{q}_k$  決定。所以，以上的公式就可簡化為：

$$\mathbf{G}_k = \text{constant, depending on } k$$

$$\mathbf{q}_k = \alpha \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{q}_{k-1} + \frac{\mathbf{a}_k^* r_k}{\sigma^2}, \mathbf{q}_0 = \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{h}_0$$

令  $\mathbf{A}_k = \alpha \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_k$  且  $B = \frac{1}{\sigma^2}$

可得：

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{q}_{k-1} + B \mathbf{a}_k^* r_k$$

則在下一個時間點為  $\mathbf{q}_{k+1}$ ，下二個時間點為  $\mathbf{q}_{k+2}$

$$\mathbf{q}_{j+1} = \mathbf{A}_j \mathbf{q}_j + B \mathbf{a}_{j+1}^* r_{j+1}$$

$$\mathbf{q}_{j+2} = \mathbf{A}_{j+1} \mathbf{q}_{j+1} + B \mathbf{a}_{j+2}^* r_{j+2}$$

$$= \mathbf{A}_{j+1} \mathbf{A}_j \mathbf{q}_j + B (\mathbf{A}_{j+1} \mathbf{a}_{j+1}^* r_{j+1} + \mathbf{a}_{j+2}^* r_{j+2})$$

$$\mathbf{q}_{j+3} = \mathbf{A}_{j+2} \mathbf{q}_{j+2} + B \mathbf{a}_{j+3}^* r_{j+3}$$

$$= \mathbf{A}_{j+2} \mathbf{A}_{j+1} \mathbf{A}_j \mathbf{q}_j + B (\mathbf{A}_{j+2} \mathbf{A}_{j+1} \mathbf{a}_{j+1}^* r_{j+1} + \mathbf{A}_{j+2} \mathbf{a}_{j+2}^* r_{j+2} + \mathbf{a}_{j+3}^* r_{j+3})$$

：

：

當進行到第  $i$  時間點時

$$\mathbf{q}_{j+i} = \left( \prod_{l=1}^i \mathbf{A}_{j+l-1} \right) \mathbf{q}_j + B \sum_{u=1}^{i-1} \left( \prod_{l=1}^{i-u} \mathbf{A}_{j+l-1} \right) \mathbf{a}_{j+u}^* r_{j+u} + B \mathbf{a}_{j+i}^* r_{j+i}$$

$$= \mathbf{A}_j^{j+i-1} \mathbf{q}_j + B \sum_{u=1}^{i-1} \mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1} \mathbf{a}_{j+u}^* r_{j+u} + B \mathbf{a}_{j+i}^* r_{j+i}$$

$i \geq 1$

其中，為了方便起見，我們用  $\mathbf{A}_k^{k+u}$  代表  $\mathbf{A}_{k+u} \cdots \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{A}_k$ ，並且依計算傳統令  $\sum_{u=1}^0 \mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1} \mathbf{a}_{j+u}^* r_{j+u} = \mathbf{0}$ 。我們在進行單一路徑的維特比解調法時，需要計算每一個時間點到下一個時間的分支量度 (branch metric) 並選擇值較大的路徑進行累加。在高斯馬可夫通道中，第  $(j+i)$  的分支量度為  $\mu_{j+i} = \mathbf{q}_{j+i}^H \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{q}_{j+i}$ ，則：

$$\begin{aligned}
\mu_{j+i} &= \mathbf{q}_{j+i}^H \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{q}_{j+i} \\
&= (\mathbf{q}_j^H (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H + B \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u}^* \mathbf{a}_{j+u}^T (\mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1})^H + Br_{j+i}^* \mathbf{a}_{j+i}^T) \mathbf{G}_{j+i} (\mathbf{A}_j^{j+i-1} \mathbf{q}_j + B \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u} \mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1} \mathbf{a}_{j+u}^* + Br_{j+i} \mathbf{a}_{j+i}^*) \\
&= \mathbf{q}_j^H (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \mathbf{q}_j + B^2 \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u}^* \mathbf{a}_{j+u}^T (\mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1})^H \right) \mathbf{G}_{j+i} \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u} \mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1} \mathbf{a}_{j+u}^* \right) \\
&\quad + B^2 r_{j+i} \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u}^* \mathbf{a}_{j+u}^T (\mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1})^H \right) \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{a}_{j+i}^* + B^2 r_{j+i}^* \mathbf{a}_{j+i}^T \mathbf{G}_{j+i} \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u} \mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1} \mathbf{a}_{j+u}^* \right) \\
&\quad + B^2 |r_{j+i}|^2 \mathbf{a}_{j+i}^T \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{a}_{j+i}^* + B \mathbf{q}_j^H (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u} \mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1} \mathbf{a}_{j+u}^* \right) \\
&\quad + Br_{j+i} \mathbf{q}_j^H (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{a}_{j+i}^* + B \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u}^* \mathbf{a}_{j+u}^T (\mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1})^H \right) \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \mathbf{q}_j \\
&\quad + Br_{j+i}^* \mathbf{a}_{j+i}^T \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \mathbf{q}_j
\end{aligned}$$

我們要預測的是從時間點  $(j+1)$  累加至時間點  $N$  的累加量度值  $\sum_{k=j+1}^N \mu_k$ ，將變數變換後，

可得：  $\sum_{k=j+1}^N \mu_k = \sum_{i=1}^{N-j} \mu_{j+i}$ 。當調變符元 (Symbol) 是 BPSK，在時間點  $j$  的每個狀態點，皆會有兩條路徑進入，我們會記錄兩個進入此時間點每個狀態點所累積的量度值，即 path1 以及 path2，以及相對應的  $\mathbf{q}_{j-1}$  和  $\bar{\mathbf{q}}_{j-1}$ 。現在考慮由時間點  $j$  開始到最後的時間點  $N$  中間的某一條特定的路徑，稱呼此段路徑的累加量度值為 path3。這兩條路徑與特別路徑的累加量度分別是：

$$\begin{aligned}
\text{path1} + \text{path3} &= \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k + \mu_j + \sum_{k=j+1}^N \mu_k \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k + \mathbf{q}_j^H \mathbf{G}_j \mathbf{q}_j + \sum_{i=1}^{N-j} \mu_{j+i} \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k + \mathbf{q}_j^H \mathbf{G}_j \mathbf{q}_j + \sum_{i=1}^{N-j} \mathbf{q}_{j+i}^H \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{q}_{j+i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{path2} + \text{path3} &= \sum_{k=1}^{j-1} \bar{\mu}_k + \bar{\mu}_j + \sum_{k=j+1}^N \bar{\mu}_k \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} \bar{\mu}_k + \bar{\mathbf{q}}_j^H \mathbf{G}_j \bar{\mathbf{q}}_j + \sum_{i=1}^{N-j} \bar{\mu}_{j+i} \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} \bar{\mu}_k + \bar{\mathbf{q}}_j^H \mathbf{G}_j \bar{\mathbf{q}}_j + \sum_{i=1}^{N-j} \bar{\mathbf{q}}_{j+i}^H \mathbf{G}_{j+i} \bar{\mathbf{q}}_{j+i}
\end{aligned}$$

由於現在是討論與 path3 相關的某特定路徑，所以假設  $\mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}, \dots, \mathbf{a}_N$  是已知， $\mathbf{r}$  向量亦為已知，又每個時間各個狀態點的  $\mathbf{G}_k$  相同。因此在 path metric 的預測量度的比較時(即比較 path1+path3 與 path2+path3)， $\mu_{j+i}$  計算中原本包括的九項，僅需考慮包含有  $\mathbf{q}_j$  的項次，而  $\sum_{k=j+1}^N \mu_k$  可寫為

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=j+1}^N \mu_k \\
&= \sum_{i=1}^{N-j} \left[ \mathbf{q}_j^H (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \mathbf{q}_j + B \mathbf{q}_j^H (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u} \mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1} \mathbf{a}_{j+u}^* \right) \right. \\
& \quad + B r_{j+i} \mathbf{q}_j^H (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{a}_{j+i}^* + B \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u}^* \mathbf{a}_{j+u}^T (\mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1})^H \right) \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \mathbf{q}_j + B r_{j+i}^* \mathbf{a}_{j+i}^T \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \mathbf{q}_j \\
& \quad + B^2 r_{j+i} \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u}^* \mathbf{a}_{j+u}^T (\mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1})^H \right) \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{a}_{j+i}^* + B^2 r_{j+i}^* \mathbf{a}_{j+i}^T \mathbf{G}_{j+i} \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u} \mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1} \mathbf{a}_{j+u}^* \right) \\
& \quad \left. + B^2 |r_{j+i}|^2 \mathbf{a}_{j+i}^T \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{a}_{j+i}^* + B^2 \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u}^* \mathbf{a}_{j+u}^T (\mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1})^H \right) \mathbf{G}_{j+i} \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u} \mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1} \mathbf{a}_{j+u}^* \right) \right] \\
&\equiv \sum_{i=1}^{N-j} \left[ \mathbf{q}_j^H (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \mathbf{q}_j + B \mathbf{q}_j^H (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u} \mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1} \mathbf{a}_{j+u}^* \right) \right. \\
& \quad \left. + B r_{j+i} \mathbf{q}_j^H (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{a}_{j+i}^* + B \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u}^* \mathbf{a}_{j+u}^T (\mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1})^H \right) \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \mathbf{q}_j + B r_{j+i}^* \mathbf{a}_{j+i}^T \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \mathbf{q}_j \right] \\
&= \mathbf{q}_j^H \left[ \sum_{i=1}^{N-j} (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \right] \mathbf{q}_j + B \mathbf{q}_j^H \left[ \sum_{i=1}^{N-j} \left[ (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u} \mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1} \mathbf{a}_{j+u}^* \right) + r_{j+i} (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{a}_{j+i}^* \right] \right] \\
& \quad + B \left[ \sum_{i=1}^{N-j} \left[ \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u}^* \mathbf{a}_{j+u}^T (\mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1})^H \right) \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} + r_{j+i}^* \mathbf{a}_{j+i}^T \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \right] \right] \mathbf{q}_j
\end{aligned}$$

其中為方便起見，我們用“ $\equiv$ ”代表等效量度。

令兩個新矩陣  $\mathbf{E}_j$  和  $\mathbf{D}_j$  為：

$$\begin{cases} \mathbf{E}_j = \sum_{i=1}^{N-j} (\mathbf{A}_j^{j+i-1})^H \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \\ \mathbf{D}_j = \sum_{i=1}^{N-j} \left[ \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{j+u}^* \mathbf{a}_{j+u}^T (\mathbf{A}_{j+u}^{j+i-1})^H \right) \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} + r_{j+i}^* \mathbf{a}_{j+i}^T \mathbf{G}_{j+i} \mathbf{A}_j^{j+i-1} \right] \end{cases}$$

則  $\sum_{k=j+1}^N \mu_k \equiv \mathbf{q}_j^H \mathbf{E}_j \mathbf{q}_j + B \mathbf{q}_j^H \mathbf{D}_j^H + B \mathbf{D}_j \mathbf{q}_j$ ，如果  $\mathbf{G}_{j+i}^H = \mathbf{G}_{j+i}$ 。

$\mathbf{E}_j$  矩陣的遞迴 (recursive) 關係式

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{j-1} &= \sum_{i=1}^{N-(j-1)} (\mathbf{A}_{j-1}^{(j-1)+i-1})^H \mathbf{G}_{(j-1)+i} \mathbf{A}_{j-1}^{(j-1)+i-1} \\
&= \mathbf{A}_{j-1}^H \mathbf{G}_{j-1} \mathbf{A}_{j-1} + \sum_{i=1}^{N-(j-1)} (\mathbf{A}_{j-1}^{(j-1)+i-1})^H \mathbf{G}_{(j-1)+i} \mathbf{A}_{j-1}^{(j-1)+i-1} \\
&= \mathbf{A}_{j-1}^H \mathbf{G}_{j-1} \mathbf{A}_{j-1} + \sum_{i'=0}^{N-j} (\mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1})^H \mathbf{G}_{j+i'} \mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1}, \text{ where } i' = i-1 \\
&= \mathbf{A}_{j-1}^H \mathbf{G}_{j-1} \mathbf{A}_{j-1} + \mathbf{A}_{j-1}^H \left( \sum_{i'=0}^{N-j} (\mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1})^H \mathbf{G}_{j+i'} \mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1} \right) \mathbf{A}_{j-1} \\
&= \mathbf{A}_{j-1}^H \mathbf{G}_{j-1} \mathbf{A}_{j-1} + \mathbf{A}_{j-1}^H \mathbf{E}_j \mathbf{A}_{j-1} \\
\Rightarrow \mathbf{E}_j &= (\mathbf{A}_{j-1}^H)^{-1} (\mathbf{E}_{j-1} - \mathbf{A}_{j-1}^H \mathbf{G}_{j-1} \mathbf{A}_{j-1}) (\mathbf{A}_{j-1})^{-1} = (\mathbf{A}_{j-1}^H)^{-1} \mathbf{E}_{j-1} (\mathbf{A}_{j-1})^{-1} - \mathbf{G}_{j-1}
\end{aligned}$$

同樣方式來求  $\mathbf{D}_j$  矩陣的遞迴(recursive)公式:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{j-1} &= \sum_{i=1}^{N-(j-1)} \left[ \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{(j-1)+u}^* \mathbf{a}_{(j-1)+u}^T (\mathbf{A}_{(j-1)+u}^{(j-1)+i-1})^H \right) \mathbf{G}_{(j-1)+i} \mathbf{A}_{j-1}^{(j-1)+i-1} + r_{(j-1)+i}^* \mathbf{a}_{(j-1)+i}^T \mathbf{G}_{(j-1)+i} \mathbf{A}_{j-1}^{(j-1)+i-1} \right] \\
&= \sum_{i'=0}^{N-j} \left[ \left( \sum_{u'=0}^{i'-1} r_{j+u'}^* \mathbf{a}_{j+u'}^T (\mathbf{A}_{j+u'}^{j+i'-1})^H \right) \mathbf{G}_{j+i'} \mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1} + r_{j+i'}^* \mathbf{a}_{j+i'}^T \mathbf{G}_{j+i'} \mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1} \right], \text{ where } i' = i-1 \text{ and } u' = u-1 \\
&= r_j^* \mathbf{a}_j^T \mathbf{G}_j \mathbf{A}_{j-1} + \sum_{i'=1}^{N-j} \left[ \left( \sum_{u'=0}^{i'-1} r_{j+u'}^* \mathbf{a}_{j+u'}^T (\mathbf{A}_{j+u'}^{j+i'-1})^H \right) \mathbf{G}_{j+i'} \mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1} + r_{j+i'}^* \mathbf{a}_{j+i'}^T \mathbf{G}_{j+i'} \mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1} \right] \mathbf{A}_{j-1} \\
&= r_j^* \mathbf{a}_j^T \mathbf{G}_j \mathbf{A}_{j-1} + \sum_{i'=1}^{N-j} \left[ \left( \sum_{u'=1}^{i'-1} r_{j+u'}^* \mathbf{a}_{j+u'}^T (\mathbf{A}_{j+u'}^{j+i'-1})^H \right) \mathbf{G}_{j+i'} \mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1} + r_j^* \mathbf{a}_j^T (\mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1})^H \mathbf{G}_{j+i'} \mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1} + r_{j+i'}^* \mathbf{a}_{j+i'}^T \mathbf{G}_{j+i'} \mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1} \right] \mathbf{A}_{j-1} \\
&= r_j^* \mathbf{a}_j^T \mathbf{G}_j \mathbf{A}_{j-1} + \mathbf{D}_j \mathbf{A}_{j-1} + \sum_{i'=1}^{N-j} [r_j^* \mathbf{a}_j^T (\mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1})^H \mathbf{G}_{j+i'} \mathbf{A}_{j-1}^{j+i'-1}] \mathbf{A}_{j-1}, \\
&= r_j^* \mathbf{a}_j^T \mathbf{G}_j \mathbf{A}_{j-1} + \mathbf{D}_j \mathbf{A}_{j-1} + r_j^* \mathbf{a}_j^T \mathbf{E}_j \mathbf{A}_{j-1} \\
\Rightarrow \mathbf{D}_j &= (\mathbf{D}_{j-1} - r_j^* \mathbf{a}_j^T \mathbf{E}_j \mathbf{A}_{j-1} - r_j^* \mathbf{a}_j^T \mathbf{G}_j \mathbf{A}_{j-1}) (\mathbf{A}_{j-1})^{-1}
\end{aligned}$$

因為計算  $\mathbf{D}_1$  矩陣時，需要使用到時間 1 至時間  $N$  之間的  $\mathbf{a}_k$  向量，因此必需決定一組初始預測值。由於  $\mathbf{h}_0 = [h_{0,1} \quad h_{0,2} \quad h_{0,3}]^T$  與通道初始狀態 (initial state) 為已知(我們設定  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_{-1} = -1$ )，並且  $E[\mathbf{h}_k] = E[h_{k,1} \quad h_{k,2} \quad h_{k,3}]^T = [\alpha^k h_{0,1} \quad \alpha^k h_{0,2} \quad \alpha^k h_{0,3}]^T$ ，則由通道模型可得：

$$\begin{aligned}
r_k &= a_k h_{k,1} + a_{k-1} h_{k,2} + a_{k-2} h_{k,3} + n_k \\
\Rightarrow E[r_k] &= a_k \alpha^k h_{0,1} + a_{k-1} \alpha^k h_{0,2} + a_{k-2} \alpha^k h_{0,3}
\end{aligned}$$

如果其中的  $a_{k-1}$  和  $a_{k-2}$  為已知時，對  $a_k$  的最好估計為：

$$\begin{aligned}\hat{a}_k &= \arg \min_{a_k \in \{\pm 1\}} \|r_k - E[r_k]\|^2 \\ &= \arg \min_{a_k \in \{\pm 1\}} \|r_k - (a_k \alpha^k h_{0,1} + a_{k-1} \alpha^k h_{0,2} + a_{k-2} \alpha^k h_{0,3})\|^2\end{aligned}$$

也就是比較複數  $r_k$  和  $a_k$  分別為 +1、-1 時  $r_k$  期望值之間的歐氏距離 (Euclidean distance)：

$$\|r_k - (\alpha^k h_{0,1} + a_{k-1} \alpha^k h_{0,2} + a_{k-2} \alpha^k h_{0,3})\|^2 \underset{a_k = 1}{<} \underset{a_k = -1}{>} \|r_k - (-\alpha^k h_{0,1} + a_{k-1} \alpha^k h_{0,2} + a_{k-2} \alpha^k h_{0,3})\|^2$$

換句話說，當接收向量  $r_k$  至  $\alpha^k h_{0,1} + a_{k-1} \alpha^k h_{0,2} + a_{k-2} \alpha^k h_{0,3}$  的歐氏距離小於至  $-\alpha^k h_{0,1} + a_{k-1} \alpha^k h_{0,2} + a_{k-2} \alpha^k h_{0,3}$  的距離時，直接對  $a_k$  做硬性判斷 (hard decision) 為“+1”；若接收向量  $r_k$  至  $-\alpha^k h_{0,1} + a_{k-1} \alpha^k h_{0,2} + a_{k-2} \alpha^k h_{0,3}$  的距離小於至  $\alpha^k h_{0,1} + a_{k-1} \alpha^k h_{0,2} + a_{k-2} \alpha^k h_{0,3}$  的距離時，則判斷傳送的訊號  $a_k$  為“-1”。

前面已經提到，在時間點  $k=1$  時，已知  $a_0 = -1$ 、 $a_{-1} = -1$ ，若  $r_k$  到  $\alpha h_{0,1} - \alpha h_{0,2} - \alpha h_{0,3}$  距離小於  $-\alpha h_{0,1} - \alpha h_{0,2} - \alpha h_{0,3}$  的話，代表  $a_1$  為“+1”的可能性較大，反之亦然，如此就能硬性判斷出  $a_1$  為“+1”或者為“-1”。同樣地，在時間點  $k=2$ ， $a_0 = -1$  並且  $a_1$  在前一時刻已經估計出來，比較  $r_2$  到  $\alpha^2 h_{0,1} + a_1 \alpha^2 h_{0,2} - \alpha^2 h_{0,3}$  及  $-\alpha^2 h_{0,1} + a_1 \alpha^2 h_{0,2} - \alpha^2 h_{0,3}$  的歐氏距離，同樣能硬性判斷出  $a_2$  為“+1”或者為“-1”。基於上述的流程，在時間點  $k$  時， $a_{k-1}$  及  $a_{k-2}$  將為已知，而  $a_k$  之硬性判斷確實可以經由歐氏距離得知。

當  $h_{0,1} = h_{0,2} = h_{0,3} = h$  時，則  $E[h_{k,1}] = E[h_{k,2}] = E[h_{k,3}] = \alpha^k h$ ，前面的公式可以進一步化簡

$$\hat{a}_k = \arg \min_{a_k \in \{\pm 1\}} \|r_k - \alpha^k (a_k + a_{k-1} + a_{k-2})h\|^2$$

換句話說：

$$\|r_k - \alpha^k (1 + a_{k-1} + a_{k-2})h\|^2 \underset{a_k = 1}{<} \underset{a_k = -1}{>} \|r_k - \alpha^k (-1 + a_{k-1} + a_{k-2})h\|^2$$

總得來說，我們先估計出一組  $\mathbf{a}_k$  向量，之後，再使用維特比解調法配合具有遞迴關係的預測量度來解出更精準的  $\mathbf{a}_k$  向量。換句話說，在時間點  $j$  的某一個狀態點，將



會有兩條路徑進入，在比較量度  $\sum_{k=1}^{j-1} \mu_k + \mathbf{q}_j^H \mathbf{G}_j \mathbf{q}_j + \mathbf{q}_j^H \mathbf{E}_j \mathbf{q}_j + B \mathbf{q}_j^H \mathbf{D}_j + B \mathbf{D}_j^H \mathbf{q}_j$  和

$\sum_{k=1}^{j-1} \bar{\mu}_k + \bar{\mathbf{q}}_j^H \bar{\mathbf{G}}_j \bar{\mathbf{q}}_j + \bar{\mathbf{q}}_j^H \bar{\mathbf{E}}_j \bar{\mathbf{q}}_j + B \bar{\mathbf{q}}_j^H \bar{\mathbf{D}}_j + B \bar{\mathbf{D}}_j^H \bar{\mathbf{q}}_j$  之後，留下量度較大的路徑。

**我們總結演算法的步驟如下：**

1. 初始值的設定：選定  $\mathbf{h}_0$  (即選定  $h$ ) 與  $\alpha$  與  $\mathbf{C}$ 。設定初始值  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{0}$  與求出  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{h}_0$ 。設定  $a_0 = a_{-1} = -1$ 。
2. 解出  $a_1, a_2, \dots, a_N$  的硬性決定：接收  $r_1, r_2, \dots, r_N$ 。對  $1 \leq k \leq N$ ，依

$$\|r_k - \alpha^k (1 + a_{k-1} + a_{k-2}) h\|^2 \underset{a_k = -1}{\overset{a_k = 1}{<}} \|r_k - \alpha^k (-1 + a_{k-1} + a_{k-2}) h\|^2 \text{ 決定 } a_1, a_2, \dots, a_N.$$

3. 預測遞迴量度的計算使用參數  $\mathbf{D}_1$ ：

$$\mathbf{D}_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \left( \sum_{u=1}^{i-1} r_{1+u}^* \mathbf{a}_{1+u}^T (\mathbf{A}_{1+u}^i)^H \right) \mathbf{G}_{1+i} \mathbf{A}_1 + r_{1+i}^* \mathbf{a}_{1+i}^T \mathbf{G}_{1+i} \mathbf{A}_1 \right]$$

(在計算時使用  $\mathbf{G}_j = \left[ \frac{\mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_j^T}{\sigma^2} + \mathbf{C}^{-1} + |\alpha|^2 (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_{j-1} \mathbf{C}^{-1}) \right]^{-1}$  遞迴公式與

$\mathbf{A}_j = \alpha \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_j$ ，並用初始值  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{0}$ )

4. 維特比解調：在第  $j$  階的籬籬點，我們已知  $\sum_{k=1}^{j-1} \mu_k$  與  $\sum_{k=1}^{j-1} \bar{\mu}_k$ 、 $\mathbf{q}_{j-1}$  與  $\bar{\mathbf{q}}_{j-1}$ 、 $\mathbf{G}_{j-1}$  與  $\bar{\mathbf{G}}_{j-1}$ 、 $\mathbf{E}_{j-1}$  與  $\bar{\mathbf{E}}_{j-1}$ 、 $\mathbf{D}_{j-1}$  與  $\bar{\mathbf{D}}_{j-1}$ 。利用遞迴公式

$$\mathbf{G}_j = \left[ \frac{\mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_j^T}{\sigma^2} + \mathbf{C}^{-1} + |\alpha|^2 (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_{j-1} \mathbf{C}^{-1}) \right]^{-1}$$

$$\mathbf{q}_j = \alpha \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_{j-1} \mathbf{q}_{j-1} + \frac{\mathbf{a}_j^* r_j}{\sigma^2}$$

與

$$\bar{\mathbf{G}}_j = \left[ \frac{\mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_j^T}{\sigma^2} + \mathbf{C}^{-1} + |\alpha|^2 (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{G}}_{j-1} \mathbf{C}^{-1}) \right]^{-1}$$

$$\bar{\mathbf{q}}_j = \alpha \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{G}}_{j-1} \bar{\mathbf{q}}_{j-1} + \frac{\mathbf{a}_j^* r_j}{\sigma^2}$$

算非預測量度  $\mu_j = \mathbf{q}_j^H \mathbf{G}_j \mathbf{q}_j$  與  $\bar{\mu}_j = \bar{\mathbf{q}}_j^H \bar{\mathbf{G}}_j \bar{\mathbf{q}}_j$ 。求出  $\mathbf{A}_j = \alpha \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_j$  與  $\bar{\mathbf{A}}_j = \alpha \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{G}}_j$ 。利用遞迴公式求出

$$\mathbf{E}_j = (\mathbf{A}_{j-1}^H)^{-1} \mathbf{E}_{j-1} (\mathbf{A}_{j-1})^{-1} - \mathbf{G}_{j-1}$$

$$\mathbf{D}_j = (\mathbf{D}_{j-1} - r_j^* \mathbf{a}_j^T \mathbf{E}_j \mathbf{A}_{j-1} - r_j^* \mathbf{a}_j^T \mathbf{G}_j \mathbf{A}_{j-1}) (\mathbf{A}_{j-1})^{-1}$$

與

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}_j &= (\bar{\mathbf{A}}_{j-1}^H)^{-1} \bar{\mathbf{E}}_{j-1} (\bar{\mathbf{A}}_{j-1})^{-1} - \bar{\mathbf{G}}_{j-1} \\ \bar{\mathbf{D}}_j &= (\bar{\mathbf{D}}_{j-1} - r_j^* \mathbf{a}_j^T \bar{\mathbf{E}}_j \bar{\mathbf{A}}_{j-1} - r_j^* \mathbf{a}_j^T \bar{\mathbf{G}}_j \bar{\mathbf{A}}_{j-1}) (\bar{\mathbf{A}}_{j-1})^{-1}\end{aligned}$$

並導出預測量度量度  $\mathbf{q}_j^H \mathbf{E}_j \mathbf{q}_j + B \mathbf{q}_j^H \mathbf{D}_j + B \mathbf{D}_j^H \mathbf{q}_j$  和  $\bar{\mathbf{q}}_j^H \bar{\mathbf{E}}_j \bar{\mathbf{q}}_j + B \bar{\mathbf{q}}_j^H \bar{\mathbf{D}}_j + B \bar{\mathbf{D}}_j^H \bar{\mathbf{q}}_j$ 。最後，比

較累加量度  $\sum_{k=1}^{j-1} \mu_k + \mathbf{q}_j^H \mathbf{G}_j \mathbf{q}_j + \mathbf{q}_j^H \mathbf{E}_j \mathbf{q}_j + B \mathbf{q}_j^H \mathbf{D}_j + B \mathbf{D}_j^H \mathbf{q}_j$  和

$\sum_{k=1}^{j-1} \bar{\mu}_k + \bar{\mathbf{q}}_j^H \bar{\mathbf{G}}_j \bar{\mathbf{q}}_j + \bar{\mathbf{q}}_j^H \bar{\mathbf{E}}_j \bar{\mathbf{q}}_j + B \bar{\mathbf{q}}_j^H \bar{\mathbf{D}}_j + B \bar{\mathbf{D}}_j^H \bar{\mathbf{q}}_j$  之後，留下量度較大的路徑，更新  $a_j$ 。並

依據那個路徑記錄量度較大，記錄  $\sum_{k=1}^j \mu_k$ 、 $\mathbf{q}_j$ 、 $\mathbf{G}_j$ 、 $\mathbf{E}_j$ 、 $\mathbf{D}_j$  或  $\sum_{k=1}^j \bar{\mu}_k$ 、 $\bar{\mathbf{q}}_j$ 、 $\bar{\mathbf{G}}_j$ 、

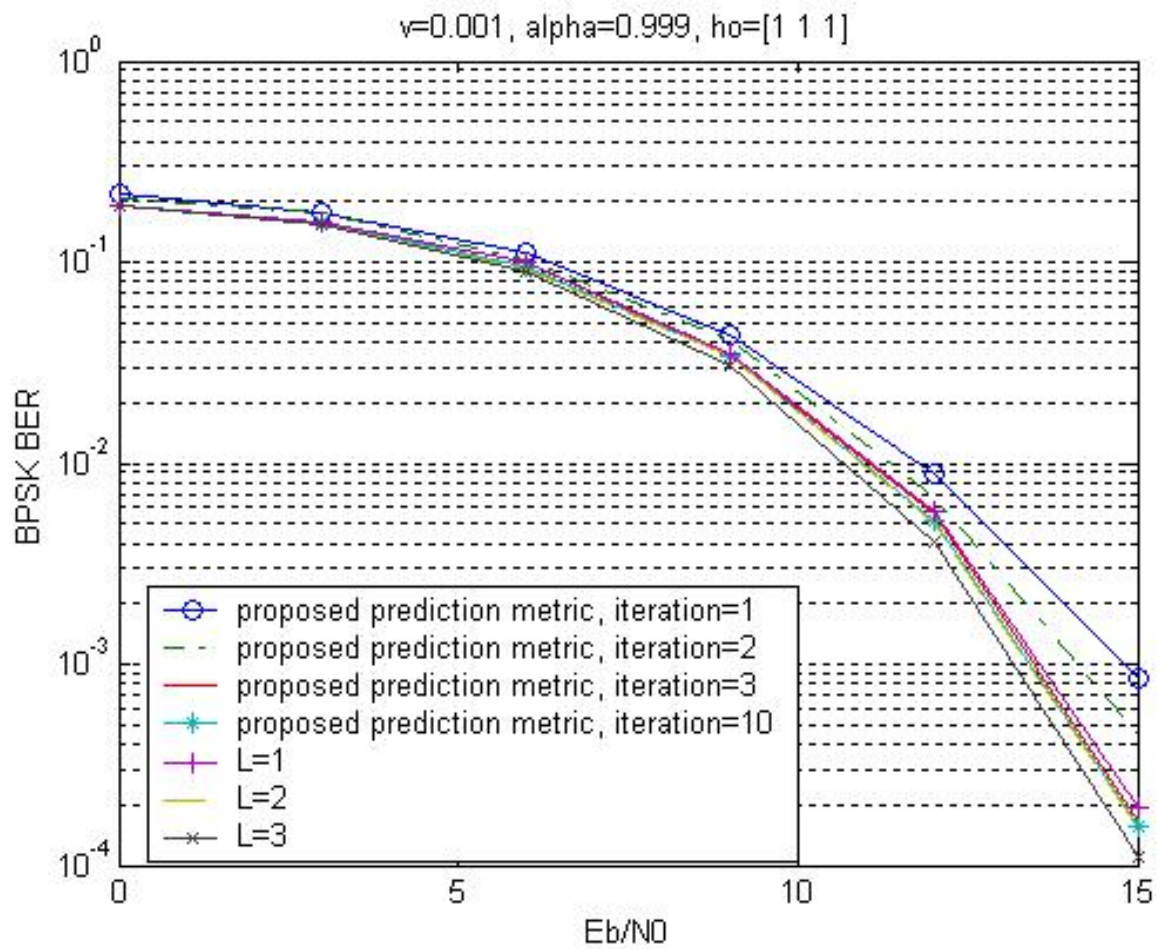
$\bar{\mathbf{E}}_j$ 、 $\bar{\mathbf{D}}_j$  於此藩籬點對應記憶體。

5. 重複步驟 3 與步驟 4 直到所求得的  $a_1, a_2, \dots, a_N$  收斂或到達重複次數上限。

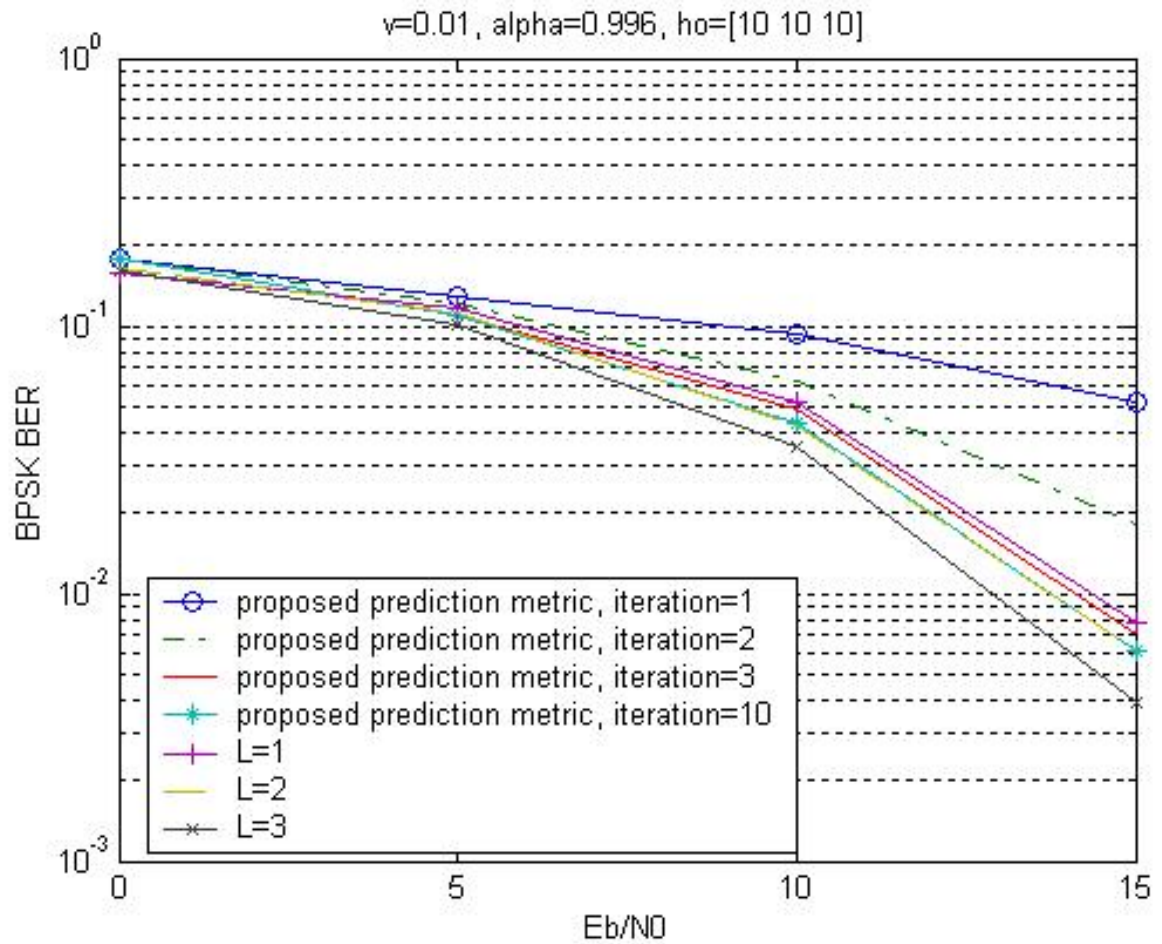


## 第四章 模擬結果及討論

上一章將預測分析的演算法推導，並且加上確認模擬的參數後，進而對我們提出單一路徑進行分析模擬，以增加通道解調的正確性。演算法第一步是先設定開始的參數，並且根據論文[3]中，設定 $a_0 = a_{-1} = -1$ 。第二步為硬性決定調變(Hard Decision Demodulation)的起始值(initiator)，此法是先給定在已知 $r_1, r_2, \dots, r_n$ ，來依序在先用不維特比解調下決定 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。第三步為 $\mathbf{D}_j$ 在起始計算遞迴疊代時，給定時間點 1 的 $\mathbf{D}_1$ 起始值，接著在第四步我們用第二步已決定的 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ；當作起始遞迴地將 $\sum_{k=1}^j \mu_k, \mathbf{q}_j, \mathbf{G}_j, \mathbf{E}_j, \mathbf{D}_j$ ，並將得到較好(better)的 $a_1, a_2, \dots, a_n$  代入維特比預測量度 $\mathbf{q}_j^H \mathbf{E}_j \mathbf{q}_j + B \mathbf{q}_j^H \mathbf{D}_j + B \mathbf{D}_j^H \mathbf{q}_j$  並找出較大的量度。仔細觀察，我們在一開始時，觀察出 $\mathbf{G}_k$ 在每個時的值相當接近，因此在預測的量度大小推導中，為了方便計算而做出這個假設，是為推導起始的小技巧，卻也是重要的一個步驟。接著在硬性決定是一個可以增加我們遞迴運算估測的正確性，這運算所需要的複雜度遠低於論文[1]中多保留的方式，亦是我們所提出之演算法關鍵。綜合言之，在應用的方面，我們提出此具有創新及實用性的演算法，以在保持系統表現(performance)下，降低解調運算次數，讓所需硬體大大減低。以下是我們的模擬結果：



圖三十八.  $\nu = 0.001$  ,  $\alpha = 0.999$  ,  $h_0 = [1, 1, 1]$ ; 由上而下為: proposed prediction metric, iteration=1 , 2 , 3 , 10;  $L=1$  ,  $L=2$  ,  $L=3$



圖三十九.  $\nu = 0.01, \alpha=0.996, h_0 = [10, 10, 10]$ ;由上而下為: proposed prediction metric, iteration=1, 2, 3, 10, L=1, L=2, L=3

## 第五章 結 論

在這邊，我們將預測量度的模擬，和列維特比解調法則模擬做比較，可以知道：當預測量度的 iteration 的 iteration=3 的時候，模擬結果相當接近 List Viterbi, L=1 的結果。當 iteration=10 的時候幾乎可以達到，LVA, L=2，也就是說我們提出的預測量度對於提升錯誤率，有明顯的效果。不論是在  $v=0.001$  或者  $v=0.01$  時，都可以使用我們的預測量度方式，在系統錯誤率表現(performance)幾乎相同下，所需要的運算卻可以大大降低，以節省所需要的硬體。



## 附錄一 平均 SNR 以及固定狀態下的分析

因為高斯馬可夫通道中，現在狀態是根據上一個狀態來決定，所以，當時間點進行至很長時，會進到固定狀態，在此我們是進行長序列傳送，所以必須進行此一分析。

在已知前一狀態的通道機率密度函數為

$$f(\mathbf{h}_i | \mathbf{h}_{i-1}) \sim CN(\alpha \mathbf{h}_{i-1}, C)$$

其變異量矩陣為  $C = \nu \mathbf{I}$

$\mathbf{h}_0$  為常數向量(constant vector)， $\mathbf{h}_i$  為複數高斯隨機向量。則  $\mathbf{h}_i$  的平均為

$$\boldsymbol{\mu}_i = E[\mathbf{h}_i] = E[E[\mathbf{h}_i | \mathbf{h}_{i-1}]] = E[\alpha \mathbf{h}_{i-1}] = \alpha \boldsymbol{\mu}_{i-1}$$

變異量矩陣為

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_i &= E[(\mathbf{h}_i - \boldsymbol{\mu}_i)(\mathbf{h}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^{*T}] \\ &= E[\mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^{*T}] - \boldsymbol{\mu}_i E[\mathbf{h}_i^{*T}] - E[\mathbf{h}_i] \boldsymbol{\mu}_i^{*T} + \boldsymbol{\mu}_i \boldsymbol{\mu}_i^{*T} \\ &= E[(\alpha \mathbf{h}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1})(\alpha \mathbf{h}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1})^{*T}] - |\alpha|^2 \boldsymbol{\mu}_{i-1} \boldsymbol{\mu}_{i-1}^{*T} \\ &= |\alpha|^2 E[\mathbf{h}_{i-1} \mathbf{h}_{i-1}^{*T}] + C - |\alpha|^2 \boldsymbol{\mu}_{i-1} \boldsymbol{\mu}_{i-1}^{*T} \\ &= |\alpha|^2 E[(\mathbf{h}_{i-1} - \boldsymbol{\mu}_{i-1})(\mathbf{h}_{i-1} - \boldsymbol{\mu}_{i-1})^{*T}] + C \\ &= |\alpha|^2 \boldsymbol{\Sigma}_{i-1} + \nu \mathbf{I} \end{aligned}$$

進一步，平均及變異量矩陣可表示為

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_i &= \alpha^i \boldsymbol{\mu}_0 \\ \boldsymbol{\Sigma}_i &= (1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 + \dots + |\alpha|^{2(i-1)}) \nu \mathbf{I} \\ &= \frac{1 - |\alpha|^{2i}}{1 - |\alpha|^2} \nu \mathbf{I} \end{aligned}$$

當時間  $i \rightarrow \infty$ ，高斯馬可夫進入穩定狀態，因為  $|\alpha| < 1$ ，所以通道機率函數可表示成

$$f(\mathbf{h}_\infty) \sim CN(\boldsymbol{\mu}_\infty, \boldsymbol{\Sigma}_\infty) = CN(\mathbf{0}, \frac{1}{1 - |\alpha|^2} \nu \mathbf{I})$$

平均 SNR 的計算：

假設起始的平均及變異量分別為  $\mu_i = [\mu_{i,1} \quad \mu_{i,2} \quad \mu_{i,3}]^T = \alpha^i [h_{0,1} \quad h_{0,2} \quad h_{0,3}]^T$ ,

$\Sigma_i = \sigma_i^2 \mathbf{I}$  則平均訊號雜訊比為

$$\begin{aligned}
& \overline{SNR} \\
&= E \left[ \frac{\sum_{i=3}^n (|h_{i,1}|^2 + |h_{i,2}|^2 + |h_{i,3}|^2) + |h_{2,1}|^2 + |h_{2,2}|^2 + |h_{1,1}|^2}{n\sigma^2} \right] \\
&= \frac{\sum_{i=3}^n (\sigma_{i,1}^2 + |\mu_{i,1}|^2) + \sum_{i=3}^n (\sigma_{i,2}^2 + |\mu_{i,2}|^2) + \sum_{i=3}^n (\sigma_{i,3}^2 + |\mu_{i,3}|^2)}{n\sigma^2} \\
&+ \frac{(\sigma_{2,1}^2 + |\mu_{2,1}|^2) + (\sigma_{2,2}^2 + |\mu_{2,2}|^2) + (\sigma_{1,1}^2 + |\mu_{1,1}|^2)}{n\sigma^2} \\
&= \frac{\sum_{i=3}^n \left( \frac{1-|\alpha|^{2i}}{1-|\alpha|^2} v + |\alpha|^{2i} |h_{0,1}|^2 \right) + \sum_{i=3}^n \left( \frac{1-|\alpha|^{2i}}{1-|\alpha|^2} v + |\alpha|^{2i} |h_{0,2}|^2 \right) + \sum_{i=3}^n \left( \frac{1-|\alpha|^{2i}}{1-|\alpha|^2} v + |\alpha|^{2i} |h_{0,3}|^2 \right)}{n\sigma^2} \\
&+ \frac{\left( \frac{1-|\alpha|^4}{1-|\alpha|^2} v + |\alpha|^4 |h_{0,1}|^2 \right) + \left( \frac{1-|\alpha|^4}{1-|\alpha|^2} v + |\alpha|^4 |h_{0,2}|^2 \right) + (v + |\alpha|^2 |h_{0,1}|^2)}{n\sigma^2} \\
&= \frac{3 \left( \frac{(n-2)(1-|\alpha|^2) - |\alpha|^6 + |\alpha|^{2(n+1)}}{(1-|\alpha|^2)^2} \right) v + \frac{|\alpha|^6 - |\alpha|^{2(n+1)}}{1-|\alpha|^2} |h_{0,1}|^2 + \frac{|\alpha|^6 - |\alpha|^{2(n+1)}}{1-|\alpha|^2} |h_{0,2}|^2 + \frac{|\alpha|^6 - |\alpha|^{2(n+1)}}{1-|\alpha|^2} |h_{0,3}|^2}{n\sigma^2} \\
&+ \frac{(3+2|\alpha|^2)v + |\alpha|^4 |h_{0,2}|^2 + (|\alpha|^2 + |\alpha|^4) |h_{0,1}|^2}{n\sigma^2} \\
&= \frac{3(n-1) + (2-3n)|\alpha|^2 - |\alpha|^4 - |\alpha|^6 + 3|\alpha|^{2(n+1)}}{n\sigma^2(1-|\alpha|^2)^2} v + \frac{|\alpha|^2 - |\alpha|^{2(n+1)}}{n\sigma^2(1-|\alpha|^2)} |h_{0,1}|^2 \\
&+ \frac{|\alpha|^4 - |\alpha|^{2(n+1)}}{n\sigma^2(1-|\alpha|^2)} |h_{0,2}|^2 + \frac{|\alpha|^6 - |\alpha|^{2(n+1)}}{n\sigma^2(1-|\alpha|^2)} |h_{0,3}|^2
\end{aligned}$$



## 參考文獻

- [1] H. Chen, R. Perry and K. Buckley, "Time-recursive maximum likelihood based sequence estimation for unknown ISI channels," in Proc. 34<sup>th</sup> *Asilomar Conf. Circuits, Systems, Computers*, Nov. 2000, pp.TA8a14:1-5.
- [2] N.Seshadri, Carl-Erik W. Sundberg, "List Viterbi decoding algorithms with applications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, pp. 313-323, no. 2/3/4, Feb/Mar/Apr 1994.
- [3] H. Chen, R. Perry and K. Buckley, "On MLSE algorithms for unknown fast time-varying channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, No. 5, pp. 730-734, May 2003.
- [4] John G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 4th edition, 2000.
- [5] T. Fujino, H. Kubo, and K. Murakami, "An adaptive maximum-likelihood sequence estimator for fast time-varying intersymbol interference channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, pp. 1872-1880, Feb. 1994.
- [6] H. Kubo, K. Murakami, and T. Fujino, "Adaptive maximum-likelihood sequence estimation by means of combining equalization and decoding in fading environments," *IEEE J. Select. Areas Comm.*, vol. 13, pp. 102-109, Jan. 1995.
- [7] Theodore S. Rappaport, *Wireless Communications: Principle & Practice*, Prectice Hall: New Jersey, 1996.

- [8] H. Chen, R. Perry and K. Buckley, "MAP sequence estimation for fading ISI channels," *2001 Conference on Information Sciences and Systems*, The Johns Hopkins University, March 21-23, 2001

