

國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文

結合 T-S 模糊模型與積分型順滑模控制技術之可靠度控制研究

Study of Reliable Control via the Combination of T-S
Fuzzy Modeling and ISMC Approaches

研究生：陳智強

指導教授：梁耀文 博士

中華民國一百年七月

結合 T-S 模糊模型與積分型順滑模控制技術之可
靠度控制研究

**Study of Reliable Control via the Combination of T-S
Fuzzy Modeling and ISMC Approaches**

研 究 生：陳智強

Student : Chih-Chiang Chen

指 導 教 授：梁耀文 博士

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

國立交通大學電控工程研究所

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to institute of Electrical and Control Engineering
College of Electrical Engineering and Computer Science
National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements
For the Degree of Master

In

Electrical and Control Engineering

July 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 一 百 年 七 月

結合 T-S 模糊模型與積分型順滑模控制技術之可靠度控制研究

學生：陳智強

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電控工程研究所



本論文探討結合 T-S 模糊模型(T-S fuzzy model)與積分型順滑模控制(integral type sliding mode)技術於主動式可靠度控制上的應用。由於使用 T-S 模糊模型來近似原始的非線性系統，此結合技術不但可以減輕即時計算(online computation)的運算負擔，同時可使得閉迴路系統能夠擁有積分型順滑模控制所擁有之優點，包含無迫近階段(reaching phase)以及其強健性。此結合技術允許工程師可根據對於無干擾系統(nominal system)的性能要求，事先地設計受干擾系統(uncertain system)之性能。在此設計下，即使某些促動器發生故障的情形，控制任務仍然可被成功地完成且不需要即時的外在支援。所提出之控制技術也被應用到衛星姿態控制上，最後，模擬結果說明了結合技術之有效性。

Study of Reliable Control via the Combination of T-S Fuzzy Modeling and ISMC Approaches

Student : Chih-Chiang Chen

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

Institute of Electrical and Control Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

This paper studies the robust active reliable control issues via the combination of T-S fuzzy modeling and integral type sliding mode control (ISMC) techniques. The presented scheme retains the benefits of both the T-S fuzzy model and ISMC approaches. It not only alleviates the online computational burden, since it uses the T-S fuzzy model to approximate the original nonlinear system and most of the system parameters of the T-S fuzzy model can be offline computed, but also preserves the advantages of the ISMC schemes, including there is no reaching phase and robustness. One of those advantages is that the combined scheme is allowed to address the system performance in advance for uncertain system according to the engineer's requirements for nominal system. Under the design, the control mission can be achieved successfully without prompt external support, even when some of the actuators fail to operate. The presented scheme is also applied to the attitude control of a spacecraft. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed scheme.

誌 謝

由衷地感激幫助我完成本篇論文的每一個人。

首先要感謝我的指導教授梁耀文博士，在兩年的研究生活中，老師紮實的專業知識以及嚴謹的研究態度，使我受益良多，更重要的是，老師寬以待人的慈悲心更讓我在待人處事各方面，獲得許多的體悟，由衷地感謝老師。接著要感謝我的口試委員廖德誠博士、陳俊宏博士和徐勝均博士給予寶貴的建議與指導，使得本論文更加完整且嚴謹。

接著要感謝實驗室學長學弟們，徐勝均學長、林立岡學長、魏源廷學長以及鄭旭志學長，謝謝你們分享過來人寶貴的研究經驗，使得我在研究過程能夠更加順遂，並在我遇到任何難題時總是提供專業的意見以及實質的幫助。再來是實驗室的同窗，君豪以及榮人，兩年的研究生活我們總是能夠一起努力，互相鼓勵，謝謝你們。再來是學弟妹們，弘儒、仰靚以及鈞鈞，謝謝你們在我苦思時，適時的給予我建議以及協助，使我能夠順利的突破難題。要特別的感謝的幾位，指導教授梁耀文博士、徐勝均博士、旭志學長、同學君豪、榮人、以及我的好友健豪、文德、東暉、衍翰、敏蓉，謝謝你們在我最不如意的時候給予我力量，使我振作，繼續的向前邁進，沒有你們的鼓勵與幫忙，我的論文不可能順利完成。

最後要感謝我的家人，爸爸以及媽媽，謝謝你們始終全力支持我拿到各階段的學位，沒有你們，沒有現在的我，你們總是給我最大的鼓勵，讓我可以毫無後顧之憂，並在學業上努力地勇往直前，謝謝你們，你們辛苦了！在此，僅將這論文獻給你們。

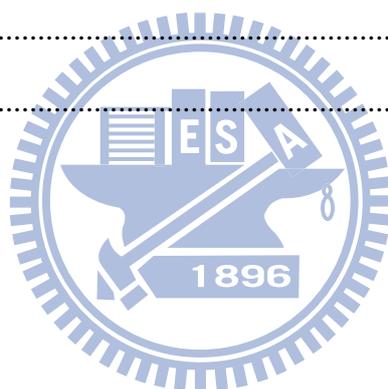
陳智強 于新竹交大

100 年 7 月

目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌 謝.....	iii
目 錄.....	iv
圖 目 錄.....	vi
表 目 錄.....	viii
第 1 章 簡介.....	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 論文架構.....	3
第 2 章 順滑模控制與積分型順滑模控制簡介.....	4
2.1 順滑模控制.....	4
2.2 積分型順滑模控制.....	10
2.3 T-S 模糊模型.....	15
第 3 章 衛星姿態穩健性控制之應用.....	21
3.1 問題描述.....	22
3.2 建立 T-S 模糊模型.....	24
3.3 控制律設計.....	26
3.3.1 順滑模控制律設計.....	26
3.3.2 積分型順滑模控制律設計.....	29
3.4 衛星姿態穩健控制之模擬.....	38
3.4.1 建立 T-S 模型.....	38
3.4.2 模擬結果.....	44
第 4 章 衛星姿態可靠度控制之應用.....	55
4.1 問題描述.....	56

4.2 建立 T-S 模糊模型	59
4.3 主動式可靠度控制律設計	60
4.3.1 順滑模可靠度控制律設計	61
4.3.2 積分型順滑模可靠度控制律設計	64
4.4 衛星姿態可靠度控制之模擬	74
4.4.1 錯誤偵測與診斷機制之觀察器設計	74
4.4.2 建立 T-S 模糊模型	77
4.4.3 模擬結果	79
第 5 章 結論與未來研究方向	96
5.1 結論	96
5.2 未來研究方向	97
參考文獻	98



圖目錄

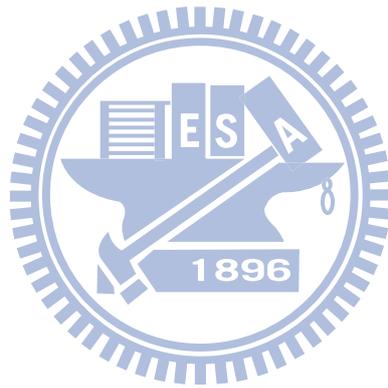
圖 2.1 $\ \mathbf{s}(\mathbf{x}(t))\ _2$ 沿著閉迴路系統的軌跡對時間的響應	9
圖 2.2 平行分配補償器設計概念.....	20
圖 3.1 狀態 x_1, x_2, x_3 所對應的歸屬函數	43
圖 3.2 衛星姿態穩健性控制其狀態變數 x_1 之時間響應比較圖	48
圖 3.3 衛星姿態穩健性控制其狀態變數 x_2 之時間響應比較圖	48
圖 3.4 衛星姿態穩健性控制其狀態變數 x_3 之時間響應比較圖	49
圖 3.5 衛星姿態穩健性控制其狀態變數 x_4 之時間響應比較圖	49
圖 3.6 衛星姿態穩健性控制其狀態變數 x_5 之時間響應比較圖	50
圖 3.7 衛星姿態穩健性控制其狀態變數 x_6 之時間響應比較圖	50
圖 3.8 衛星姿態穩健性控制其順滑變數 s_1 之時間響應比較圖	51
圖 3.9 衛星姿態穩健性控制其順滑變數 s_2 之時間響應比較圖	51
圖 3.10 衛星姿態穩健性控制其順滑變數 s_3 之時間響應比較圖	52
圖 3.11 衛星姿態穩健性控制其控制輸入 u_1 之時間響應比較圖	52
圖 3.12 衛星姿態穩健性控制其控制輸入 u_2 之時間響應比較圖	53
圖 3.13 衛星姿態穩健性控制其控制輸入 u_3 之時間響應比較圖	53
圖 3.14 衛星姿態穩健性控制其控制輸入 u_4 之時間響應比較圖	54
圖 4.1 錯誤偵測與診斷示意圖.....	77
圖 4.2 衛星姿態可靠度控制其狀態變數 x_1 之時間響應比較圖	85
圖 4.3 衛星姿態可靠度控制其狀態變數 x_2 之時間響應比較圖	86
圖 4.4 衛星姿態可靠度控制其狀態變數 x_3 之時間響應比較圖	86
圖 4.5 衛星姿態可靠度控制其狀態變數 x_4 之時間響應比較圖	87
圖 4.6 衛星姿態可靠度控制其狀態變數 x_5 之時間響應比較圖	87
圖 4.7 衛星姿態可靠度控制其狀態變數 x_6 之時間響應比較圖	88
圖 4.8 衛星姿態可靠度控制其順滑變數 s_1 之時間響應比較圖	88

圖 4.9 衛星姿態可靠度控制其順滑變數 s_2 之時間響應比較圖	89
圖 4.10 衛星姿態可靠度控制其順滑變數 s_3 之時間響應比較圖	89
圖 4.11 衛星姿態可靠度控制其控制輸入 u_1 之時間響應比較圖	90
圖 4.12 衛星姿態可靠度控制其控制輸入 u_2 之時間響應比較圖	90
圖 4.13 衛星姿態可靠度控制其控制輸入 u_3 之時間響應比較圖	91
圖 4.14 衛星姿態可靠度控制其控制輸入 u_4 之時間響應比較圖	91
圖 4.15 衛星姿態可靠度控制其殘留信號 r_1 之時間響應比較圖	92
圖 4.16 衛星姿態可靠度控制其殘留信號 r_2 之時間響應比較圖	92
圖 4.17 衛星姿態可靠度控制其殘留信號 r_3 之時間響應比較圖	93
圖 4.18 衛星姿態可靠度控制其警報信號 alarm1 之時間響應比較圖	93
圖 4.19 衛星姿態可靠度控制其警報信號 alarm2 之時間響應比較圖	94
圖 4.20 衛星姿態可靠度控制其警報信號 alarm3 之時間響應比較圖	94



表 目 錄

表 3.1 在區域 $D_{i,j,k}$ 內 $\ \Delta\mathbf{f}\ _{\infty}$ 估算值	43
表 3.2 衛星姿態穩健性控制其效能比較表.....	54
表 4.1 衛星姿態可靠度控制其效能比較表.....	95



第1章

簡介

1.1 研究背景與動機

近年來，可靠度控制(reliable control)或容錯控制(fault tolerance control)的研究已受到廣泛的關注，許多相關的研究也如雨後春筍般地被提出[1]-[10]，一般來說，維修及保養服務無法即時地提供，這也使得可靠度控制變的至關重要。可靠度控制主要的目的為設計一個適當的控制律使得閉迴路系統能夠忍受某些控制元件不正常的運作，並且擁有可接受的系統性能以及保持其穩定度。現今已經有許多設計可靠度控制的方法被提出，在這些方法包含了線性矩陣不等式法(linear matrix inequality based approach)[6]，代數 Riccatti 方程式法(algebraic Riccatti equation based approach)[8]，互質分解法(coprime factorization approach)[9]，Hamilton-Jacobi 法(Hamilton-Jacob based approach)[3][10]，順滑模控制法(sliding mode control based approach)[2][4][5]，而上述的這些方法中，只有 Hamilton-Jacobi 法與順滑模控制法是處理非線性系統的可靠度控制問題，但是 Hamilton-Jacobi 法的設計主要是一種最佳控制的技巧(optimal strategy)，其可靠度控制律的設計不可避免地會與 Hamilton-Jacobi 方程式(Hamilton-Jacobi equation, HJ equation)的解有關係，一般來說，Hamilton-Jacobi 方程式是難以求解的，雖然可透過冪級數[11]的方法並使用計算機計算，可能可以降低求解的困難度，但其所得的解仍然為近似解，且會因系統變得複雜而造成計算快負擔快速地增加；相對地，順滑模控制法設計可靠度控制律時並不需求解 Hamilton-Jacobi 方程式，且同時可

保順滑模控制的優點[1][4][5]。另外，在可靠度控制的議題上，主要可分為兩種設計方式，一種是被動式(passive)可靠度控制，另一種是主動式(active)可靠度控制。被動式可靠度控制必須先劃分出不會故障和可能會故障的促動器(actuator)，可是實際上在故障發生前我們是很難得知這方面的資訊的。而主動式可靠度控制可以依靠錯誤偵測與診斷機制(fault detection and diagnosis, FDD)來監視故障的發生，有鑑於此，在本論文中我們選用主動式可靠度控制為主，而之後所談論的可靠度控制律設計皆是基於主動式可靠度控制設計。

另外一方面，近年來模糊理論已經被認為其是用來設計控制系統時，一個很有用的工具，近年來，許多應用也如雨後春筍般的被提出[12]-[23]，在這些研究中，T-S 模糊模型法(T-S fuzzy modeling approach)引起了廣泛的關注，因為其擁有下列優點：(1)觀念簡單；(2)容易建構；(3)准許離線(offline)的計算大部分系統所使用到的參數；(4)可廣泛的近似原非線性系統(universal approximation)[1]，這些優點使得 T-S 模糊模型特別的有用，尤其是被近似的非線性系統模型特別複雜的時候更能顯其優點。而 T-S 模糊模型法的基本概念是利用多個線性化模型以權重的方式來近似原來的非線性系統模型，經由對個別的線性模型設計控制律後，再依權重組合來實現非線性模型所需要的控制律。雖然 T-S 模糊模型能夠有效的近似原始非線性系統，但在近似的過程中會產生額外的模型誤差(model uncertainties)，不過，我們使用 T-S 模糊模型來近似原始非線性系統時，對積分型於順滑模控制與順滑模控制設計來說仍然會保有其各自的優點，而且，積分順滑模控制比起順滑模控制來說，擁有著額外的優點，因此，基於上述 T-S 模糊模型所擁有的優點，本論文選用 T-S 模糊模型來近似原始非線性系統，並利用積分順滑模控制設計來進行控制器設計，藉此補償系統本身與 T-S 模糊模型近似所產生的模型誤差，以及外在干擾，並進一步地與選用 T-S 模糊模型來近似原始非線性系統且利用順滑模控制設計來進行控制器設計做比較，並討論與分析其兩種方式下之系統的強健性(robustness)問題。

1.2 論文架構

在本論文的第二章中，我們將會介紹順滑模控制理論和積分型順滑模控制理論，並且同時介紹 T-S 模糊模型之建立方式與其概念。在第三章中，我們將會探討以衛星姿態控制系統為例子，比較積分型順滑模控制與順滑模控制這兩種控制方式的穩健性，以及二次成本函數的花費多寡，來驗證積分型順滑模控制的優點。在第四章中，我們將積分型順滑模控制推廣到可靠度控制的問題，同時我以順滑模可靠度控制作為與積分型順滑模可靠度控制比較的對象，在該章我們同樣地以針對衛星姿態控制系統為主，比較兩個控制方式的穩健性與二次成本函數的花費，並且討論積分型順滑模可靠度控制是否保有原來的其特性與優點。最後，第五章我們提出結論與未來研究方向。



第2章

順滑模控制與積分型順滑模控制簡介

2.1 順滑模控制

順滑模控制(sliding mode control, SMC)的特點在於，其利用不連續的控制輸入，使得閉迴路系統軌跡最後會被限制在一個我們預先設計好的順滑面(sliding surface)上，而閉迴路系統的動態行為可由順滑面來規範。一般來說，順滑模控制其擁有響應速度快、容易實現，以及對於模型不確定性(model uncertainties)或外在干擾(external disturbances)具有強健性的優點[24]。順滑模控制的設計方式對於不同型式下非線性系統而言，會有不同的設計方式[25][26]，因此，在此我們選擇針對非線性系統於標準型(regular form)的順滑模控制設計做討論[26]。

考慮非線性系統[26]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_b(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + G(\mathbf{x})[\mathbf{u} + \mathbf{d}]\end{aligned}\quad (2.1)$$

其中 $\mathbf{f}_a(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}_b(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ 即為其平衡點(equilibrium point)， $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ 為系統狀態， $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ 為控制輸入， $\mathbf{f}_a(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}_b(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ 與 $G(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 皆為平滑函數， $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ 代表匹配型(matched type)的系統之不確定性(uncertainties)或外在干擾(external disturbances)。根據[26]可知，設計非線性系統的順滑模控制器可分為兩個步驟，步驟一為設計順滑面(sliding surface)，使得當閉迴路系統軌跡被限制在順滑面上時會滿足閉迴路系統為漸進穩定的要求；步驟二為設計順滑模控制律(sliding mode control law) $\mathbf{u} =$

$\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ ，使得閉迴路系統軌在有限時間內接觸到我們預先設計的順滑面並保持在順滑面上。

假設 2.1：

對任何的狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ ，系統(2.1)的矩陣 $G(\mathbf{x})$ 為列滿秩(full row rank)。

假設 2.2：

系統(2.1)滿足 $m \geq n$ ，亦即控制輸入 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ 的維度(dimension)大於等於系統狀態 $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^p$ 的維度。

假設 2.3：

$\|G(\mathbf{x})\mathbf{d}\|_2 \leq \kappa(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}, \forall t \in \mathbb{R}$ ，其中 $\|\cdot\|_2$ 代表 \mathbb{R}^{2n} 空間向量的 ℓ_2 範數 (ℓ_2 -norm)[27]， $\kappa: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為一連續的非負函數。

附註 2.1：

雖然假設 2.1 已經暗指了動態系統(2.1)滿足 $m \geq n$ 之條件，但我們仍建立假設 2.2，因當動態系統(2.1)滿足假設 2.2 並且同時擁有假設 2.1，才能使得順滑模控制的等效控制(equivalent control)存在[24]。

- 步驟一：設計順滑面(sliding surface) $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

考慮標準型式下的非線性系統(2.1)式，其前 n 階子系統(subsystem)為

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (2.2)$$

透過步階迴歸(backstepping)的設計方式可知，我們可視 \mathbf{x}_2 為(2.2)式的控制輸入並透過非線性控制的設計方式來設計 \mathbf{x}_2 ，只要能夠設計出使得(2.2)式漸進穩定的控制器(stabilizer) $\mathbf{x}_2 = \phi(\mathbf{x}_1)$ 後，其中函數 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 滿足 $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ，我們只需要再設計原非線性系統(2.1)式的控制輸入 \mathbf{u} 使得 $\mathbf{x}_2 - \phi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$ 成立，便可使得整

體閉迴路系統為漸進穩定。根據以上所述，我們可令順滑面為

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2 - \phi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

其中 $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$ ，函數 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 滿足 $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ，而設函數 $\phi(\mathbf{x}_1)$ 時僅需考慮(2.1)式的其前 n 階子系統並透過 $\mathbf{x}_2 = \phi(\mathbf{x}_1)$ 使其為漸進穩定。當閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上 $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 時，我們可得 $\mathbf{x}_2 = \phi(\mathbf{x}_1)$ ，則(2.1)式的前 n 階子系統(subsystem)

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1, \phi(\mathbf{x}_1)) \quad (2.4)$$

為漸進穩定(asymptotically stable)，亦即 $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{0}$ 當 $t \rightarrow \infty$ 。而又 $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2 - \phi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$ ， $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ，故由 $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{0}$ 當 $t \rightarrow \infty$ ，我們可得 $\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{0}$ 當 $t \rightarrow \infty$ ，亦即閉迴路系統為漸進穩定(asymptotically stable)。

• 步驟二：設計控制律

設計控制律之前，我們必須先設計好順滑面，在此我們假設已設計好順滑面為

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2 - \phi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

根據[26]可知，設計控制律，又可分為兩個子步驟，子步驟一為設計 \mathbf{u}_0 ，子步驟二為設計 \mathbf{u}_1 ，而最後的順滑模控制律(sliding mode control law) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ ，我們分別討論。

• 子步驟一：(設計 \mathbf{u}_0)

設計 \mathbf{u}_0 時必須使得 \mathbf{u}_0 存在一項功能，即當我們不考慮匹配型的系統之不確定性或外在干擾時，必須使得順滑面 $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 對於閉迴路系統為不變集合(invariant set)[26]，即 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ ，另外，我們將(2.5)式中的順滑變數(sliding variable) $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2 - \phi(\mathbf{x}_1)$ 對時間 t 取導函數(derivative)，並將(2.1)式代入後可得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的動態系統(sliding variable dynamic)為

$$\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}_1}\mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_b(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) + G(\mathbf{x})[\mathbf{u} + \mathbf{d}] \quad (2.6)$$

\mathbf{u}_0 亦使得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的動態系統(2.6)式在僅使用 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ 作為回授控制後，亦即 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ ，且不考慮雜訊項 \mathbf{d} 時，擁有原點 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ 為其平衡點(equilibrium point)。

而設計 \mathbf{u}_0 的方式為，先不理(2.6)式中未知其切確形式的雜訊項 \mathbf{d} ，並利用 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 中的 \mathbf{u}_0 將(2.6)式中已知其切確形式的項刪除，即設計 \mathbf{u}_0 為如下

$$\mathbf{u}_0 = -G^+(\mathbf{x}) \left[-\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}_1}\mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_b(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) \right] \quad (2.7)$$

其中 $G^+(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ 為 $G(\mathbf{x})$ 的廣義反矩陣(pseudo-inverse matrix)。我們已知(2.6)式中的 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ ，因此我們將(2.7)式代入(2.6)式後可得

$$\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})[\mathbf{u}_1 + \mathbf{d}] \quad (2.8)$$

觀察(2.8)式可發現，如果我們僅使用 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ 作為回授控制，亦即 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ ，且不考慮雜訊項 \mathbf{d} ，則(2.8)式擁有 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ 為其平衡點。

• 子步驟二：(設計 \mathbf{u}_1)

我們已經完成設計 \mathbf{u}_0 了，現在我們考慮(2.8)式並假設 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) \neq \mathbf{0}$ 而進行 \mathbf{u}_1 之設計，而 \mathbf{u}_1 的功能為使得順滑變數 \mathbf{s} 在有限時間內趨近於 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ ，亦即閉迴路系統軌跡有限時間接觸到順滑面。由假設 2.3 可知 $\|G(\mathbf{x})\mathbf{d}\|_2 \leq \kappa(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}, \forall t \in \mathbb{R}$ ，我們可設計 \mathbf{u}_1 為

$$\mathbf{u}_1 = -G^+(\mathbf{x})[\kappa(\mathbf{x}, t) + \eta]\text{sgn}(\mathbf{s}) \quad (2.9)$$

其中 $\text{sgn}(\mathbf{s}) = [\text{sgn}(s_1), \text{sgn}(s_2) \cdots, \text{sgn}(s_p)]^T$ ， $\eta > 0 \in \mathbb{R}$ 為待設計的常數，因此，我們將(2.9)式代入(2.8)式可得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的閉迴路動態系統變為

$$\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = -[\kappa(\mathbf{x}, t) + \eta]\text{sgn}(\mathbf{s}) + G(\mathbf{x})\mathbf{d} \quad (2.10)$$

為了證明 \mathbf{u}_1 設計成(2.9)之可行性，我們透過 Lyapunov 理論，令(2.10)式的可能的

Lyapunov 函數(Lyapunov function candidate)為 $V = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{s}$ ，則 V 對時間 t 的導函數

為

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \quad (2.11)$$

我們將(2.10)式代入(2.11)式後可得

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -[\kappa(\mathbf{x}) + \eta] \mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{s}^T G(\mathbf{x}) \mathbf{d} \quad (2.12)$$

利用假設 2.3 與關係式 $\mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s}) = s_1 \cdot \text{sgn}(s_1) + \cdots + s_n \cdot \text{sgn}(s_n) = |s_1| + \cdots + |s_n| = \|\mathbf{s}\|_1$ ，以及向量範數(norm)不等式 $\|\mathbf{s}\|_1 \geq \|\mathbf{s}\|_2$ ，可將(2.12)式整理成如下

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -[\kappa(\mathbf{x}) + \eta] \|\mathbf{s}\|_1 + \mathbf{s}^T G(\mathbf{x}) \mathbf{d} \\ &\leq -[\kappa(\mathbf{x}) + \eta] \|\mathbf{s}\|_2 + \mathbf{s}^T G(\mathbf{x}) \mathbf{d} \\ &\leq -[\kappa(\mathbf{x}) + \eta] \|\mathbf{s}\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \|G(\mathbf{x}) \mathbf{d}\|_2 \\ &\leq -[\kappa(\mathbf{x}) + \eta] \|\mathbf{s}\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \rho(\mathbf{x}) = -\eta \|\mathbf{s}\|_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中我們利用了柯西-史瓦茲不等式(Cauchy-Schwarz inequality)來使得 $\mathbf{s}^T G(\mathbf{x}) \mathbf{d} \leq \|\mathbf{s}\|_2 \|G(\mathbf{x}) \mathbf{d}\|_2$ 。推導至此，由(2.13)式以及 Lyapunov 理論可知，

$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ 為(2.10)式的一個 Lyapunov 函數，且(2.8)式所表示的動態系統在控制律(2.9)式的控制下，其閉迴路系統(2.10)式為漸進穩定(asymptotically stable)，亦即 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ ，當 $t \rightarrow \infty$ ，也就是說，針對(2.8)式來說每當平滑變數 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ， \mathbf{u}_1 會使得 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ 。

實際上， $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ 與 V 對時間 t 的導函數可表示成

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} = \frac{1}{2} \|\mathbf{s}\|_2^2 \quad (2.14)$$

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} V = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{s}\|_2^2) = \|\mathbf{s}\|_2 \frac{d}{dt} (\|\mathbf{s}\|_2) \quad (2.15)$$

由(2.13)式，(2.14)式與(2.15)式與可知

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = \|\mathbf{s}\|_2 \frac{d}{dt} (\|\mathbf{s}\|_2) \leq -\eta \|\mathbf{s}\|_2 \quad (2.16)$$

也就是說

$$\frac{d}{dt} (\|\mathbf{s}\|_2) \leq -\eta \quad (2.17)$$

亦即 $\|\mathbf{s}\|_2$ 沿著閉迴路系統軌跡對時間的變化率小於等於 $-\eta$ ，我們進一步將(2.17)式整理可得

$$\int_{\|\mathbf{s}(x(0))\|_2}^{\|\mathbf{s}(x(t))\|_2} d\|\mathbf{s}\|_2 = \|\mathbf{s}(x(t))\|_2 - \|\mathbf{s}(x(0))\|_2 \leq \int_0^t -\eta dt = -\eta t \quad (2.18)$$

故

$$0 \leq \|\mathbf{s}(x(t))\|_2 \leq \|\mathbf{s}(x(0))\|_2 - \eta t \quad (2.19)$$

也就是說 $0 \leq \|\mathbf{s}(x(t))\|_2 \leq 0$ 當 $t = \|\mathbf{s}(x(0))\|_2 / \eta$ (有限值)，亦即 $\|\mathbf{s}(x(t))\|_2$ 必在有限時間 $t = \|\mathbf{s}(x(0))\|_2 / \eta$ 之內收斂至零，也就是說在有限時間內 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ ，如圖 2.1 所示，同時，這也代表著閉迴路系統軌跡必在有限時間 $t = \|\mathbf{s}(x(0))\|_2 / \eta$ 內接觸到順滑面上並保持在順滑面上。

由以上子步驟一與子步驟二，以及相關證明可知，最後的順滑模控制律為

$$\mathbf{u} = -G^+(\mathbf{x}) \left[-\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_b(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + [\kappa(\mathbf{x}) + \eta] \text{sgn}(\mathbf{s}) \right] \quad (2.20)$$

附註 2.2：

我們需要假設 2.1 來幫助我們完成控制律的設計，另外，我們已知 $\mathbf{u}_1 = -G^+(\mathbf{x})[\kappa(\mathbf{x}) + \eta] \text{sgn}(\mathbf{s})$ ，且希望當 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ 時， \mathbf{u}_1 必須發生作用將閉迴路系統軌跡推向順滑面，因此，我們需要假設 2.1，即對任何的狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 矩陣 $G(\mathbf{x})$ 為列滿秩的條件，來使得對任何的狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 矩陣 $G^+(\mathbf{x})$ 為行滿秩(full column rank)，進一步使得當 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ 時 $G^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s}) \neq \mathbf{0}$ 。

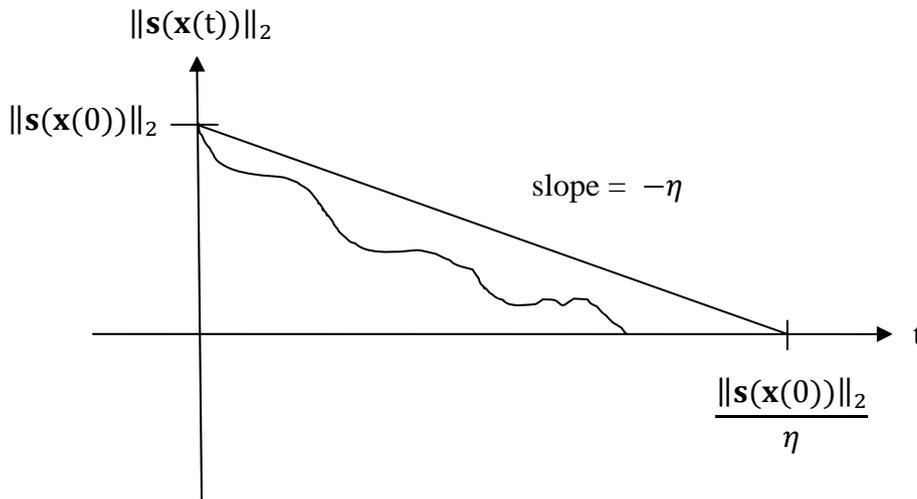


圖 2.1 $\|\mathbf{s}(x(t))\|_2$ 沿著閉迴路系統的軌跡對時間的響應

2.2 積分型順滑模控制

積分型順滑模控制(integral-type sliding mode control, ISMC)的概念與順滑模態控制類似，兩者之間最顯著的差別在於，積分型順滑模控制的順滑面型式，可被看成是閉迴路系統的軌跡與閉迴路未受干擾系統(nominal system)軌跡之間的差，投影到某個選定的矩陣的值域空間(range space)[28]。雖然順滑模態控制擁有其優點，但文獻上指出，在閉迴路系統軌跡向順滑面趨近但尚未接觸到順滑面的迫近階段(reaching phase)時，其對於模型不確定性或外在干擾可能存在敏感的現象[28]，因此，可能會造成閉迴路系統不穩定之現象，而因積分型順滑模控制特殊的順滑面選取方式，使得其可保證閉迴路系統軌跡一開始就落於順滑面上，減少了順滑模控制存在迫近階段的問題[29]。此外，積分型順滑模控制仍然保有順滑模控制所擁有的優點，並且額外擁有如下優點：(1)當閉迴路系統軌跡被保持在順滑面上時，其匹配型模型不確定性或干擾(matched type uncertainties or disturbances)會被完全的抑制；(2)順滑模控制其最大控制輸出最大值(maximum control magnitude)通常發生在迫近階段，因此積分型順滑模控制所需的控制輸出最大值通常小於順滑模控制所需；(3)當系統只存在匹配型模型不確定性或干擾時，則當閉迴路系統軌跡被保持在順滑面上時，其動態行為等同於未受干擾的閉迴路無干擾系統(nominal system)之響應，因此我們擁有額外的控制器設計自由度來對於無干擾系統進行設計，並且保證受干擾系統(uncertain system)能夠在控制後，擁有相同的動態響應[29]。最後一項優點說明了，我們可透過對於無干擾系統的設計，事先地對於受干擾系統的性能表現做約束，使得閉迴路受干擾系統擁有我們所預期的性能表現。

接下來我們討論積分型順滑模控制的設計，考慮非線性系統[29]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})[\mathbf{u} + \mathbf{d}] \quad (2.21)$$

其中 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ 為其平衡點(equilibrium point)， $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 為系統狀態， $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ 為控制輸入， $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ 與 $G(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 皆為平滑函數， $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ 代表匹配型(matched type)

的系統之不確定性(uncertainties)或外在干擾(external disturbances)。根據論文[29]可知，設計非線性系統的積分型順滑模控制器可分為兩個步驟，步驟一為設計順滑面(sliding surface)，當閉迴路系統軌跡被限制在順滑面上時其動態響應會等同於閉迴路無干擾系統(nominal system)之響應，並藉無干擾控制律(nominal controller) \mathbf{u}_0 可使得閉迴路系統達到漸進穩定；步驟二為設計積分型順滑模控制律(integral-type sliding mode control law) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ ，使得閉迴路系統軌會一直被保持在順滑面上。

假設 2.4：

$\|\mathbf{d}\|_2 \leq \rho_m(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}^n$ ，其中 $\rho_m: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為一連續的非負函數。

假設 2.5：

當 $m \leq n$ 時，存在 $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 使得對任何的狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 矩陣 $DG(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 為可逆(invertible)，當 $m > n$ 時，存在 $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得對任何的狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 矩陣 $DG(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 為列滿秩(full row rank)。

假設 2.6：

存在一個無干擾控制律(nominal controller) \mathbf{u}_0 使得(2.21)式的無干擾系統(nominal system) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u}$ 在 \mathbf{u}_0 的控制下，原點為漸進穩定(asymptotically stable)。

附註 2.3：

與 2.1 節所討論的順滑模控制不同，在此我們並不需要對動態系統(2.21)做 $m \geq n$ 之假設，因為，儘管當 $m \leq n$ 時，只要系統(2.21)滿足假設 2.5，即可使得積分型順滑模控制的等效控制(equivalent control)存在[29]，並且只要系統(2.21)滿足假設 2.6，即存在無干擾控制律 \mathbf{u}_0 使得 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u}_0$ 為漸進穩定，後續理論推導仍然成立且可行。

• 步驟一：設計順滑面(sliding surface) $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

考慮(2.21)式，順滑面被設計成[29]

$$\mathbf{s} = D \left\{ \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) + G(\mathbf{x}(\tau))\mathbf{u}_0] d\tau \right\} = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

其中 D 滿足假設 2.5。我們可發現 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ ，即閉迴路系統軌跡一開始就會落在順滑面上。

• 步驟二：設計控制律

設計控制律之前，我們必須先設計好順滑面，在此我們假設已設計好順滑面如(2.22)式，而設計控制律，又可分為兩個子步驟，子步驟一為設計 \mathbf{u}_0 ，子步驟二為設計 \mathbf{u}_1 ，而最後的積分型順滑模控制律(integral-type sliding mode control law) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ ，我們分別討論。

• 子步驟一：(設計 \mathbf{u}_0)

設計 \mathbf{u}_0 時可針對(2.21)式的無干擾系統 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u}$ 進行設計，且必須使得 \mathbf{u}_0 要滿足假設 2.6，因此，對於 \mathbf{u}_0 存在著額外的設計自由度[29]。另外，與順滑模控制一樣， \mathbf{u}_0 也擁有當我們不考慮匹配型的系統之不確定性或外在干擾時，使得順滑面 $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 對於閉迴路系統為不變集合(invariant set)的這項功能，即 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ ，但我們設計 \mathbf{u}_0 並不需要把這項 \mathbf{u}_0 既有的功能納入設計時所必須考慮的條件，而在順滑模控制時卻一定要納入設計 \mathbf{u}_0 時所考慮的條件。我們將(2.22)式中的順滑變數 $\mathbf{s} = D \left\{ \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) + G(\mathbf{x}(\tau))\mathbf{u}_0] d\tau \right\}$ 對時間 t 取導函數並將(2.21)式代入，再假設 \mathbf{u}_0 已經設計完成代入(2.21)式了，則我們可得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的動態系統為

$$\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}) + DG(\mathbf{x})\mathbf{u} + DG(\mathbf{x})\mathbf{d} - D\mathbf{f}(\mathbf{x}) - DG(\mathbf{x})\mathbf{u}_0$$

$$\begin{aligned}
&= DG(\mathbf{x})(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) + DG(\mathbf{x})\mathbf{d} - DG(\mathbf{x})\mathbf{u}_0 \\
&= DG(\mathbf{x})\mathbf{u}_1 + DG(\mathbf{x})\mathbf{d}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

觀察(2.23)式我們可發現，如果我們僅使用 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ 作為回授控制，亦即 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ ，且不可慮雜訊項 \mathbf{d} 時，則(2.23)式擁有 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ 為平衡點(equilibrium point)。

• 子步驟二：(設計 \mathbf{u}_1)

當我們針對(2.21)式的無干擾系統 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u}$ 完成了 \mathbf{u}_0 之設計後，接下來考慮(2.23)式，進行 \mathbf{u}_1 之設計。因為閉迴路系軌跡一開始就落在順滑面上，因此 \mathbf{u}_1 的功能為每當順滑變數 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ， \mathbf{u}_1 會使得 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ ，亦即閉迴路系統軌跡一但偏離順滑面後，會立即趨近順滑面。由假設 2.3 可知 $\|\mathbf{d}\|_2 \leq \rho_m(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$ ，我們可設計 \mathbf{u}_1 為

$$\mathbf{u}_1 = \begin{cases} -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2}, & \text{if } \mathbf{s} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \text{if } \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.24}$$

其中 $\rho(\mathbf{x}, t) > \rho_m(\mathbf{x}, t)$ 。為了證明 \mathbf{u}_1 設計成(2.24)式之可行性，我們令在某個時間瞬間(time instant) $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ，並將(2.24)式代入(2.23)式可得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的閉迴路動態系統變為

$$\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}, t)DG(\mathbf{x}) \frac{(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + DG(\mathbf{x})\mathbf{d} \tag{2.25}$$

透過 Lyapunov 理論，令(2.25)式的可能的 Lyapunov 函數(Lyapunov function candidate)為 $V = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T \mathbf{s}$ ，則 V 對時間 t 的導函數為

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \tag{2.26}$$

將(2.25)式代入(2.26)式可得

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{s}^T DG(\mathbf{x}) \frac{(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + \mathbf{s}^T DG(\mathbf{x})\mathbf{d} \tag{2.27}$$

利用假設 2.4 可將(2.27)式整理成如下

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\left\| (DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2^2}{\left\| (DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2} + [\mathbf{s}^T DG(\mathbf{x})] \mathbf{d} \\
&\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \left\| (DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \|\mathbf{d}\|_2 \\
&\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \left\| (DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \rho_m(\mathbf{x}, t) \\
&= \left\| (DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 [-\rho(\mathbf{x}, t) + \rho_m(\mathbf{x}, t)] < 0 \quad (2.28)
\end{aligned}$$

其中我們利用了柯西-史瓦茲不等式 (Cauchy-Schwarz inequality) 來使得 $[\mathbf{s}^T DG(\mathbf{x})] \mathbf{d} \leq \left\| (DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|\mathbf{d}\|_2$ 。推導至此，由(2.28)式與 Lyapunov 理論可知， $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ 為(2.25)式的一個 Lyapunov 函數，且(2.23)式所表示的動態系統在控制律(2.24)式的控制下，其閉迴路系統(2.25)式為漸進穩定 (asymptotically stable)，亦即 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ ，當 $t \rightarrow \infty$ ，也就是說，針對(2.23)式來說每當順滑變數 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ， \mathbf{u}_1 會使得 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ ，同時代表著閉迴路系統軌跡一旦偏離順滑面後，會立即趨近順滑面，但在此因為順滑面的設計型式所致，我們僅會得到 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ 之值，故對(2.23)式使用(2.24)式控制後的順滑變數 \mathbf{s} 所對應的閉迴路動態系統(2.25)式來說必成立 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 。

由以上子步驟一與子步驟二，以及相關證明可知，最後的積分型順滑模控制律為 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 。

附註 2.4：

接下來我們證明僅考慮系統存在匹配型模型不確定性或干擾，當閉迴路系統軌跡被保持在順滑面上時，其動態行為會等同於未受干擾的閉迴路無干擾系統 (nominal system) 之響應。設閉迴路系統軌跡被保持在順滑面，即 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 時，閉迴路系統 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u}$ 的軌跡為 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d(t)$ ，而

$$\dot{\mathbf{s}} = DG(\mathbf{x}_d)[\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{u}_0] = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

其中 $DB(\mathbf{x}_d)$ 為可逆或列滿秩，故必存在一解

$$\mathbf{u}_{eq} = -\mathbf{d} + \mathbf{u}_0 \quad (2.30)$$

滿足(2.29)式，而 \mathbf{u}_{eq} 稱為等效控制(equivalent control)，其為閉迴路系統軌跡被保持在順滑面時所對應的等效控制律。我們把(2.30)式代入原始動態系統(2.21)式後可得

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{f}(\mathbf{x}_d) + G(\mathbf{x}_d)\mathbf{u}_0 \quad (2.31)$$

觀察(2.31)式，可發現其動態系統即為原始動態系統(2.21)使用 \mathbf{u}_0 控制後的閉迴路無干擾系統，因此，當閉迴路系統軌跡被保持在順滑面上時，其動態行為確實等同於未受干擾的閉迴路無干擾系統(nominal system)之響應。

附註 2.5：

我們需要假設 2.5 來幫助我們完成控制律的設計，並使得積分型順滑模控制的等效控制 (equivalent control) 存在 [29]，另外，我們已知當 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ 時 $\mathbf{u}_1 = -\rho(\mathbf{x}, t) (DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} / \|(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2$ ，且希望當 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ 時， \mathbf{u}_1 必須發生作用將閉迴路系統軌跡推向順滑面，因此，我們需要假設 2.5 來使得 $(DG(\mathbf{x}))^T$ 為可逆或者行滿秩(full column rank)，進一步使得當 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ 時 $(DG(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ 。

2.3 T-S 模糊模型

模糊控制是經由專家意見，資料庫的建立以及模糊推論機制的所合，並借由 IF-THEN 規則來取代傳統的控制方式，此種控制技術是將 Zadeh 教授於 1965 年提出的模糊集合理論應用到控制領域的先進技術。由於模糊控制通常不需要精確的數學模型，且模糊系統的規則庫一旦建立之後，部分的系統，可經由查表(table lookup)的方式來進行控制。因此，這種控制技術通常可以有效地縮短計算時間。此外，模糊控制也具有極佳的適應性[30]，強健性[31]以及容錯性[1]，所以不少

傳統控制無法達到的優異效果，卻可以藉由模糊控制的經驗法則來達成。在 1987 年 7 月開始營運的日本仙台市地下鐵路系統便是應用模糊控制技術來進行管制，將列車的運行規畫成為自動化控制系統。此外，目前市面上已經有許多電子電機產品已應用了模糊控制的相關技術。雖然模糊控制的應用已經受到高度的重視，然而，長久以來，模糊控制最受人質疑的便是其穩定度的問題，近年來隨著解決非線性系統之理論與技術的快速成長與累積，提供給模糊控制很好的理論基礎。由 Takagi 與 Sugeno 所提出的 T-S 模糊控制模型是利用多個線性化模型以權重的方式來近似原來的非線性系統，並以 Lyapunov 函數(Lyapunov function)的處理方式來建立模糊控制系統穩定度分析之基礎。在原非線性系經由 T-S 模糊控制系統近似後，可再利用平行分散式補償器(parallel distributed compensation, PDC)的觀念來設計控制器與估測器，最後，穩定度分析的問題可轉換成線性矩陣不等式(linear matrix inequality, LMI)的形式進行分析。

T-S 模糊模型有時候也被稱為 T-S-K 模糊模型(Takagi-Sugeno-Kang fuzzy model)。由於一開始的模糊模型是由 Takagi 與 Sugeno 所提出，後來，Sugeno 與 Kang 則繼續在關於模糊模型判別的研究上發揚光大。在此論文中，我們統稱其為 T-S 模糊模型(Takagi-Sugeno fuzzy model)。T-S 模糊模型的主要原理是利用多個線性化模型以權重的方式來近似原來的非線性系統模型，經由對個別的線性模型設計控制律後，再依權重組合來實現非線性模型所需要的控制律。因此，T-S 模糊模型適合用來近似非線性模型[31]。近年來 T-S 模糊模型的應用已廣泛受到重視，如 Tanaka 與 Wang[31]已成功地將 T-S 模糊模型的控制方法應用於聯結車輛的倒車入庫控制法則設計；Chen 等人[32]藉由 T-S 模糊模型對於非線性動態系統做模糊追蹤控制設計；Su 等人[33]提出新的穩健 T-S 模糊模型化的方法；Lee [34]等人對於仿設的(affine) T-S 模糊控制系統提出了護何補償控制的方法；Wang[35]等人設計 T-S 模糊模型的模糊回授控制器來穩定不確定之模糊時間延遲系統，並應於連續攪動槽反應器模型(continuous stirred tank reactor, CSTR)。

T-S 模糊模型擁有以下優點：(1)觀念簡單；(2)容易建構；(3)准許離線(offline)

的計算大部分系統所使用到的參數；(4)可廣泛的近似原非線性系統(universal approximation)[1]，這些優點使得 T-S 模糊模型特別的有用，尤其是被近似的非線性系統模型特別複雜的時候更能顯其優點。

T-S 模糊模型的狀態空間表示法可分成連續時間系統(continuous-time fuzzy system, CFS)以及離散時間系統(discrete-time fuzzy system, DFS)，分別如下：

- 連續時間模糊系統(continuous-time fuzzy system, CFS)：

我們考慮第 i 條規則時，其規則被表示成

$$\begin{aligned} & \text{IF } e_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } e_p(t) \text{ is } M_{ip} \\ & \text{THEN } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_i \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, r \end{aligned}$$

其中 $e_1(t), e_2(t), \dots, e_p(t)$ 為前鑑步變數(premise variable)， $e_i(t)$ 可以是狀態空間的函數、外部干擾或者是時間， M_{ip} 為歸屬函數(membership function)數， $\mathbf{x}(t)$ 為系統狀態， $\mathbf{y}(t)$ 與 $\mathbf{u}(t)$ 分別系統的輸出與控制輸入， A_i 、 B_i 與 C_i 分別為該條規則相對應的線性模型， p 為前鑑步變數的數目， r 為規則數目，而整個 T-S 模糊模型則表示成

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{e}(t)) [A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)]}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{e}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{e}(t)) [A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)] \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{e}(t)) C_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{e}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{e}(t)) C_i \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

其中 $\mathbf{e}(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ \cdots \ e_p(t)]$ ， $w_i(\mathbf{e}(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(\mathbf{e}(t))$ 和 $h_i(\mathbf{e}(t)) = \frac{w_i(\mathbf{e}(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{e}(t))}$ 。

- 離散時間模糊系統(discrete-time fuzzy system, DFS)：

我們考慮第 i 條規則時，其規則被表示成

$$\text{IF } e_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } e_p(t) \text{ is } M_{ip}$$

$$\text{THEN } \begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_i \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, r$$

其中相關參數都與連續系統相同，而整個 T-S 模糊模型則表示成

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{e}(t)) [A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)]}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{e}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{e}(t)) [A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)] \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{e}(t)) C_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{e}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{e}(t)) C_i \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

平行分配補償(parallel distributed compensation, PDC)的設計概念如圖 2.2 所示。其每一條控制規則都是使用相對應於 T-S 模糊模型的規則來做分配式地設計，模糊控制器與模糊模型共用相同的模糊集。由於模糊模型的每一條規則被一個線性動態系統所描述，線性控制理論可以被用來設計模糊控制器的部分，所設計出來的整個模糊控制器一般而言為非線性的，其可以藉由個別的線性控制器經由模糊混合(fuzzy blending)而完成。模糊控制器的規則可以用平行分配補償來設計如下：

我們考慮第 i 條規則時，其規則被表示成

$$\begin{aligned} \text{IF } e_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } e_p(t) \text{ is } M_{ip} \\ \text{THEN } \mathbf{u}(t) = -K_i \mathbf{x}(t) \quad i = 1, 2, 3, \dots, r \end{aligned}$$

而最後整個模糊控制器則表示成

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{e}(t)) K_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{e}(t))} \\ &= -\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{e}(t)) K_i \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.36)$$

系統穩定度一直是控制系統最重要的性能指標之一，近年已有許多探討模糊控制系統穩定度的文獻被發表([31]及其參考文獻)，為了探討模糊控制系統的穩定度，我們將模糊控制器(2.36)分別帶入連續與離散時間模糊系統(2.32)式與(2.34)式，可得閉迴路模糊控制系統如下：

• 閉迴路連續時間模糊系統：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{e}(t)) h_j(\mathbf{e}(t)) [A_i - B_i K_j] \mathbf{x}(t) \quad (2.37)$$

• 閉迴路離散時間模糊系統：

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{e}(t)) h_j(\mathbf{e}(t)) [A_i - B_i K_j] \mathbf{x}(t) \quad (2.38)$$

定義 $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ ，根據[31]我們可知有關於連續時間與離散時間模糊控制系統的穩定度定理，在此將其列為引理如下列所示：

引理 2.1：(連續時間模糊系統)

若存在矩陣 $P > 0$ 使得

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \quad (2.39)$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0 \quad (2.40)$$

成立，其中 $i < j \leq r$ 使得 $h_i \times h_j \neq 0$ ，則閉迴路連續時間模糊系統(2.37)式的平衡點 $\mathbf{0}$ 為全域漸進穩定(globally asymptotically stable)。

引理 2.2：(離散時間模糊系統)

若存在矩陣 $P > 0$ 使得

$$G_{ii}^T P G_{ii} + P < 0 \quad (2.41)$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + P \leq 0 \quad (2.42)$$

成立，其中 $i < j \leq r$ ，使得 $h_i \times h_j \neq 0$ ，則閉迴路離散時間模糊系統(2.38)式的平衡點 $\mathbf{0}$ 為全域漸進穩定(globally asymptotically stable)。

推論 2.1：

假設 $B_1 = B_2 = \dots = B_r$ ，則若存在矩陣 $P > 0$ 使得(2.41)式成立，其中 $i \leq r$ ，則閉迴路連續時間模糊系統(2.37)式的平衡點 $\mathbf{0}$ 為全域漸進穩定(globally asymptotically stable)。

推論 2.2 :

假設 $B_1 = B_2 = \dots = B_r$ ，則若存在矩陣 $P > 0$ 使得(2.42)式成立，其中 $i \leq r$ ，則閉迴路連續時間模糊系統(2.38)式的平衡點 $\mathbf{0}$ 為全域漸進穩定 (globally asymptotically stable)。

利用上述定理與推論，我們可透過線性矩陣不等式(linear matrix inequality, LMI)的求解工具，如 MATLAB LMI 工具箱(MATLAB LMI tool box)來對矩陣 P 進行求解，以確保模糊控制系統的穩定性。

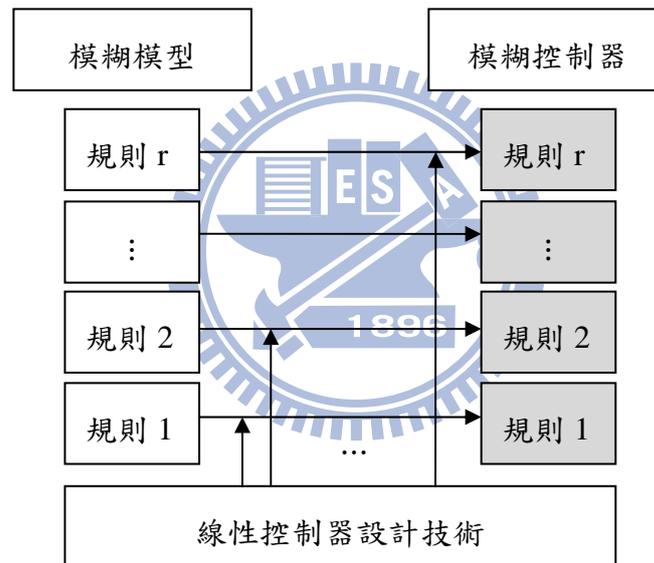


圖 2.2 平行分配補償器設計概念

第3章

衛星姿態穩健性控制之應用

順滑模控制由於能夠有效地消除系統擾動使得系統穩定，以及其容易實現，響應速度快等優點，因此經常被拿來作為穩健性控制的控制設計方法。雖然順滑模控能夠有效地達到穩健控制的目的[5]，並且擁有如 2.1 節所提及的優點，但文獻上指出，在閉迴路系統軌跡向順滑面趨近但尚未接觸到順滑面的迫近階段(reaching phase)時，其對於模型不確定性或外在干擾可能存在敏感的現象[28]，因此，可能會造成閉迴路系統不穩定之現象，而因積分型順滑模控制特殊的順滑面選取方式，使得其可保證閉迴路系統軌跡一開始就落於順滑面上，因此減少了順滑模控制存在迫近階段的問題[29]，另外，積分型順滑模控制仍然保有順滑模控制所擁有的優點，並且額外擁有許多如 2.2 節所提及的優點，其中，當系統僅含有匹配型干擾時，我們可直接地透過對於無干擾系統的設計，事先地對於受干擾系統的性能表現做設計，且使得閉迴路受干擾系統擁有我們所預期的性能表現，因此，我們可透過各種我們希望的控制律設計方式，如最佳控制(optimal control)等，來針對無干擾系統做設計，並使得閉迴路受干擾系統保有某種程度的最佳化性質(optimality)。

另外一方面，近年來模糊理論已經被認為其是用來設計控制系統時，一個很有用的工具，近年來，許多應用也如雨後春筍般的被提出[12]-[23]，在這些研究中，T-S 模糊模型法(T-S fuzzy modeling approach)引起了廣泛的關注，因為其擁有下列優點：(1)觀念簡單；(2)容易建構；(3)准許離線(offline)的計算大部分系統所使用到的參數；(4)可廣泛的近似原非線性系統(universal approximation)[31]，

這些優點使得 T-S 模糊模型特別的有用，尤其是被近似的非線性系統模型特別複雜的時候更能顯其優點。而 T-S 模糊模型法的基本概念是利用多個線性化模型以權重的方式來近似原來的非線性系統模型，經由對個別的線性模型設計控制律後，再依權重組合來實現非線性模型所需要的控制律。雖然 T-S 模糊模型能夠有效的近似原始非線性系統，但在近似的過程中會產生額外的模型誤差(model uncertainties)，不過，我們使用 T-S 模糊模型來近似原始非線性系統時，對積分型於順滑模控制與積分型順滑模控制設計來說仍然會保有其各自的優點，而且，積分順滑模控制比起順滑模控制來說，擁有著額外的優點，因此，基於上述 T-S 模糊模型所擁有的優點，本論文選用 T-S 模糊模型來近似原始非線性系統，並利用積分順滑模控制設計來進行控制器設計，藉此補償系統本身與 T-S 模糊模型近似所產生的模型誤差，以及外在干擾，並進一步地與選用 T-S 模糊模型來近似原始非線性系統且利用順滑模控制設計來進行控制器設計做比較，並討論與分析其兩種方式下之系統的強健性(robustness)問題。

在本章中，我們將在 3.1 節定義所探討的系統，以及控制目標，接著，在 3.2 節中，我們將敘述如何建立 T-S 模糊模型，而在 3.3 節我們討論如何利用第 2 章中所提到的順滑模控制與積分型順滑模控制兩種控制方式，來進行控制律設計，最後 3.4 節，我們以衛星姿態控制的模型為例子來進行模擬，並討論分析兩種控制律的模擬結果。

3.1 問題描述

我們考慮下列非線性二階控制系統(second-order nonlinear control system)如下

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})[\mathbf{u} + \mathbf{d}] \quad (3.1)$$

其中 $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ ， $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ ， $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ 為系統狀態， $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ 為控制輸入， $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ 以及 $G(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 皆為平滑函數， $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ 代表匹配型(matched type)的系統之不確定性(uncertainties)或外在干擾(external disturbances)， $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ，即 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ 為其平衡點(equilibrium point)。為了幫助討論，我們需要下列引理，同時我們考慮系統擁有下列假設。

引理 3.1 : [36]

令 $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ， $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 為兩個矩陣其中 $\text{rank}(Q_1) = n$ ，則

- (i) $\|Q_1\|_2 = \sigma_{\max}(Q_1)$
- (ii) $\|Q_1^+\|_2 = \|Q_1^T(Q_1 Q_1^T)^{-1}\|_2 = 1/\sigma_{\min}(Q_1)$
- (iii) $\sigma_{\min}(Q_1 + Q_2) \geq \sigma_{\min}(Q_1) - \sigma_{\max}(Q_2)$

其中 $\sigma_{\max}(\cdot)$ ， $\sigma_{\min}(\cdot)$ 與 $(\cdot)^+$ 分別代表矩陣的最大奇異值(maximum singular value)，最小奇異值(minimum singular value)與廣義反矩陣(pseudo-inverse matrix)。

假設 3.1 :

對任何的狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ ，系統(3.1)的矩陣 $G(\mathbf{x})$ 為列滿秩(full row rank)，且 $\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) = k_0 > 0$ 。

假設 3.2 :

系統(3.1)滿足 $m \geq n$ ，亦即控制輸入 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ 的維度(dimension)大於等於系統狀態 $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ 的維度。

附註 3.1 :

雖然假設 3.1 已經暗指了動態系統(3.1)滿足 $m \geq n$ 之條件，但我們仍建立假設 3.2，

因當動態系統(3.1)滿足假設 3.2 並且同時擁有假設 3.1，才能使得後續我們將會在 3.3.1 節討論利用 T-S 模糊模型近似動態系統(3.1)式後的順滑模控制設計的等效控制(equivalent control)存在[24]，並且，此條件也會是之後在 3.3.2 節討論利用 T-S 模糊模型近似動態系統(3.1)式後的積分型順滑模控制設計時，能夠使得我們成功設計控制器的關鍵條件。

在本章中我們主要的目的為，比較基於 T-S 模糊模型下之順滑模控制與基於 T-S 模糊模型下之積分型順滑模控制兩者，在系統存在系統不確定性以及外在干擾的狀況下，是否能夠使得閉迴路系統達到穩定，並且透過特定的性能指標，來分析比較其兩者之性能。



3.2 建立 T-S 模糊模型

在我們建立 T-S 模糊模型來近似原非線性系統(3.1)式之前，我們將原非線性系統(3.1)式的漂移項(drift term) $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 以及控制矩陣 $G(\mathbf{x})$ 化成下列型式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \bar{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (3.2)$$

$$G(\mathbf{x}) = \bar{B}(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

接著，選取 p 個操作點 $\mathbf{x}_i^0, i = 1, \dots, p$ ，其中操作點與其各數 p 可由我們自己決定，且操作點的數目即為建立 T-S 模糊模型時的規則數目。我們把各個操作點代入 $\bar{A}(\mathbf{x})$ 和 $\bar{B}(\mathbf{x})$ 後可得各個操作點所對應之線性系統的系統矩陣如下

$$\bar{A}(\mathbf{x})|_{(\mathbf{x}_i^0)} = A_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.4)$$

$$\bar{B}(\mathbf{x})|_{(\mathbf{x}_i^0)} = B_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.5)$$

最後，若我們使用 p 條規則建立 T-S 模糊模型並用其來近似原非線性系統時，則可把 T-S 模糊模型表示成

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x})[A_i\mathbf{x} + B_i\mathbf{u}]\end{aligned}\quad (3.6)$$

其中 $\alpha_i(\mathbf{x})$ 為權重(weighting)其滿足 $\sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x}) = 1$ 且 $\alpha_i(\mathbf{x}) \geq 0$ ，因此，最後我們利用 T-S 模糊模型近似原非線性系統(3.1)式後的動態系統模型可表示成

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= A(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{f} + [B(\mathbf{x}) + \Delta B](\mathbf{u} + \mathbf{d})\end{aligned}\quad (3.7)$$

其中 $A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x})A_i\mathbf{x}$ ， $B(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x})B_i$ ， $\Delta\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x})A_i\mathbf{x}$ ， $\Delta B = G(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x})B_i$ ，而 $\Delta\mathbf{f}$ 與 ΔB 為利用 T-S 模糊模型來近似原非線性系統(3.1)式時所產生的額外模型誤差。

另外，根據[31]可知 T-S 模糊模型可任意的近似原始的非線性系統，即在我們所考慮的近似誤差範圍下，對應的可找到一 T-S 模糊模型並用它來近似原始的非線性系統時，所產生的近似誤差會在我們所考慮的範圍內，因此我們可引入下列假設。



假設 3.3：

設存在常數 $k > 0$ ，其中 $k < \frac{k_0}{2}$ ，使得 $\|\Delta B\|_2 \leq k$ ，而 k_0 為假設 3.1 所定義之值。

由假設 3.1 可知對任何的狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ 成立 $\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) = k_0 > 0$ ，再由假設 3.3 以及引理 3.1，我們可得 $\sigma_{\min}(B(\mathbf{x})) = \sigma_{\min}(G(\mathbf{x}) - \Delta B) \geq \sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - \|\Delta B\|_2 = \sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - \|\Delta B\|_2 = k_0 - \|\Delta B\|_2 \geq \frac{k_0}{2} > 0$ ，因此， $\text{rank}(B(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}) = n$ ，亦即 $B(\mathbf{x})$ 為列滿秩。

3.3 控制律設計

3.3.1 順滑模控制律設計

考慮利用 T-S 模糊模型近似原非線性系統後的動態系統(3.7)式，透過 2.1 節所談論的順滑模控制設計方式可知，首先需要設計順滑面，使得閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上時，會因為順滑面的特性造成閉迴路系統為漸進穩定。參考[1][5]，在此我們設計順滑面為

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_2 + M\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

其中 $M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 為正定矩陣(positive definite matrix)，根據 2.1 節的討論我們可知， $\phi(\mathbf{x}_1) = -M\mathbf{x}_1$ 且 $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 。觀察(3.8)式可知，當閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ 時，我們可得 $\mathbf{x}_2 = \phi(\mathbf{x}_1) = M\mathbf{x}_1$ ，則(3.7)式的前 n 階子系統

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 = -M\mathbf{x}_1 \quad (3.9)$$

為漸進穩定，亦即 $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{0}$ 當 $t \rightarrow \infty$ 。而又 $\mathbf{s} = \mathbf{x}_2 + M\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ ，故由 $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{0}$ 當 $t \rightarrow \infty$ ，我們可得 $\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{0}$ 當 $t \rightarrow \infty$ ，亦即閉迴路系統為漸進穩定。

接著設計順滑模控制律(sliding mode control law) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ ，使得閉迴路系統軌在有限時間內接觸到我們預先設計的順滑面並保持在順滑面上。首先我們將(3.8)式中的順滑變數 $\mathbf{s} = \mathbf{x}_2 + M\mathbf{x}_1$ 對時間 t 取導函數並將(3.7)式代入後可得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的動態系統為

$$\dot{\mathbf{s}} = A(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{f} + [B(\mathbf{x}) + \Delta B](\mathbf{u} + \mathbf{d}) + M\mathbf{x}_2 \quad (3.10)$$

從 3.2 節的討論我們知道 $B(\mathbf{x})$ 為列滿秩，根據 2.1 節我們可設計順滑模控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 中的 \mathbf{u}_0 為

$$\mathbf{u}_0 = -B^+(\mathbf{x})[M\mathbf{x}_2 + A(\mathbf{x})] \quad (3.11)$$

我們已知(3.10)中的 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ ，因此我們將(3.11)代入(3.10)式可得

$$\dot{\mathbf{s}} = [B(\mathbf{x}) + \Delta B]\mathbf{u}_1 + \Delta_m \quad (3.12)$$

其中 $\Delta_m = \Delta \mathbf{f} + B(\mathbf{x})\mathbf{d} + \Delta B\mathbf{u}_0 + \Delta B\mathbf{d}$ 。為了完成控制律之設計，我們引進下列假設。

假設 3.4 :

$\|\Delta_m\|_2 \leq \rho_1(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}, \forall t \in \mathbb{R}, \rho_1: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為一連續的非負函數。

雖然假設 3.4 的不等式當中需要 \mathbf{u}_0 的資訊，但因 $\|\Delta \mathbf{f}\|_2$ 與 $\|\Delta B\|_2$ 的上界(upper bound)可離線估測(offline estimation)，並且我們也可以估計干擾的上界 $\|\mathbf{d}\|_2$ ，因此當計算完 \mathbf{u}_0 後我們便可獲得 $\rho_1(\mathbf{x}, t)$ 之值。

同樣地，根據 2.1 節之討論，假設 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) \neq \mathbf{0}$ ，我們可設計順滑模控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 中的 \mathbf{u}_1 為下列所示

$$\mathbf{u}_1 = -\mu(\mathbf{x}, t)B^+(\mathbf{x})\text{sgn}(\mathbf{s}) \quad (3.13)$$

其中 $\mu(\mathbf{x}, t) \geq \frac{k_0 - k}{k_0 - (1 + \sqrt{n})k} [\eta + \rho_1(\mathbf{x}, t)]$ ， $\text{sgn}(\mathbf{s}) = [\text{sgn}(s_1), \text{sgn}(s_2) \cdots, \text{sgn}(s_n)]^T$ ， $\eta > 0 \in \mathbb{R}$ 為待設計的常數，因此，我們將(3.13)式代入(3.12)式可得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的閉迴路動態系統變為

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mu(\mathbf{x}, t)\text{sgn}(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{x}, t)\Delta BB^+(\mathbf{x})\text{sgn}(\mathbf{s}) + \Delta_m \quad (3.14)$$

為了證明 \mathbf{u}_1 設計成(3.13)之可行性，我們透過 Lyapunov 理論，令(3.14)式的可能的 Lyapunov 函數(Lyapunov function candidate)為 $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ ，則 V 對時間 t 的導函數為

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \quad (3.15)$$

我們將(3.14)式代入(3.15)式可得

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -\mu(\mathbf{x}, t)\mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{x}, t)\mathbf{s}^T \Delta BB^+(\mathbf{x})\text{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{s}^T \Delta_m \quad (3.16)$$

利用假設 3.1 到假設 3.4 與關係式 $\mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s}) = s_1 \cdot \text{sgn}(s_1) + \cdots + s_n \cdot \text{sgn}(s_n) = |s_1| + \cdots + |s_n| = \|\mathbf{s}\|_1$ ，向量範數(norm)不等式 $\|\mathbf{s}\|_1 \geq \|\mathbf{s}\|_2$ ，以及對任意矩陣 A 成立 $\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_2 \|\mathbf{x}\|_2$ 之關係式，可將(3.16)整理成如下

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -\mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}^T \Delta B B^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{s}^T \Delta \mathbf{m} \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 - \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}^T \Delta B B^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s}) + \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|\Delta \mathbf{m}\|_2 \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \|-\mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}\|_2 \cdot \|\Delta B B^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s})\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|\Delta \mathbf{m}\|_2 \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \|\mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}\|_2 \cdot \|\Delta B B^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s})\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_1(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|\Delta B\|_2 \cdot \|B^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s})\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_1(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) k \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|B^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s})\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_1(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) k \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|B^+(\mathbf{x})\|_2 \cdot \|\text{sgn}(\mathbf{s})\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_1(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) k \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|B^+(\mathbf{x})\|_2 \sqrt{n} + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_1(\mathbf{x}, t) \quad (3.17)
\end{aligned}$$

另外，因為 $B(\mathbf{x})$ 為列滿秩，故由引理 3.1 可知

$$\begin{aligned}
\|B^+(\mathbf{x})\|_2 &= \|(G(\mathbf{x}) - \Delta B)^+\|_2 \\
&= \frac{1}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x}) - \Delta B)} \\
&\leq \frac{1}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - \|\Delta B\|_2} \\
&= \frac{1}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - \|\Delta B\|_2} \quad (3.18)
\end{aligned}$$

將(3.18)式代入(3.17)式可得

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) k \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|B^+(\mathbf{x})\|_2 \sqrt{n} + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_1(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) k \|\mathbf{s}\|_2 \left[\frac{1}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - \|\Delta B\|_2} \right] \sqrt{n} + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_1(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) k \|\mathbf{s}\|_2 \left[\frac{1}{k_0 - k} \right] \sqrt{n} + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_1(\mathbf{x}, t) \\
&= \left\{ -\mu(\mathbf{x}, t) \left[\frac{k_0 - (1 + \sqrt{n})k}{k_0 - k} \right] + \rho_1(\mathbf{x}, t) \right\} \|\mathbf{s}\|_2 \leq -\eta \|\mathbf{s}\|_2 \quad (3.19)
\end{aligned}$$

根據 2.1 節的討論可知，若 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) \neq \mathbf{0}$ 則 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t))$ 必在有限時間 $t = \|\mathbf{s}(\mathbf{x}(0))\|_2 / \eta$ 之內收斂到 $\mathbf{0}$ ，這也代表著閉迴路系統軌跡必在有限時間 $t = \|\mathbf{s}(\mathbf{x}(0))\|_2 / \eta$ 內接觸到順滑面上並保持在順滑面上。經由以上設計與分析，最後我們提出下列引理。

引理 3.2 : [1]

考慮非線性二階控制系統(3.1)式，且利用 T-S 模糊模型近似後得其近似之動態系統(3.7)式，當假設 3.1 到假設 3.4 同時成立時，則(3.1)式在下列(3.20)控制律的控制下，原點對於閉迴路系統為漸進穩定。

$$\mathbf{u} = -B^+(\mathbf{x})[M\mathbf{x}_2 + A(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}, t)\text{sgn}(\mathbf{s})] \quad (3.20)$$

其中 $\mu(\mathbf{x}, t) \geq \frac{k_0 - k}{k_0 - (1 + \sqrt{n})k} [\eta + \rho_1(\mathbf{x}, t)]$ 。

3.3.2 積分型順滑模控制律設計

考慮利用 T-S 模糊模型近似原非線性系統後的動態系統(3.7)式，透過第 2.2 節所談論的積分型順滑模控制設計方式可知，我們可設計順滑面為

$$\mathbf{s} = \bar{D} \left\{ \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^t [\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(\tau)) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}(\tau))\mathbf{u}_0] d\tau \right\} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

其中 \bar{D} 滿足假設 2.5， $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t) \mathbf{x}_2^T(t)]^T$ ， $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) = [0 : B(\mathbf{x})^T]^T$ ， $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}_2^T(t) A(\mathbf{x})^T]^T$ 。我們知道，當 $m \leq 2n$ 時 $\bar{D} \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$ ，當 $m > 2n$ 時 $\bar{D} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ，不失一般性可以令矩陣 $\bar{D} = [D_1 : D]$ ，其中當 $m \leq 2n$ 時 $D_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，而當 $m > 2n$ 時 $D_1 \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ ， $D \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ ，接著再將(3.21)式中的順滑變數 $\mathbf{s} = \bar{D} \left\{ \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^t [\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(\tau)) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}(\tau))\mathbf{u}_0] d\tau \right\}$ 對時間 t 取導函數並將(3.7)式帶入如下

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \bar{D} \{ \dot{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t)) - \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}_0 \} \\ &= \bar{D} \{ [\dot{\mathbf{x}}_1^T(t) \dot{\mathbf{x}}_2^T(t)]^T - [\mathbf{x}_2^T(t) A(\mathbf{x})^T]^T - \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}_0 \} \\ &= \bar{D} \{ [\mathbf{x}_2^T(t) \dot{\mathbf{x}}_2^T(t)]^T - [\mathbf{x}_2^T(t) A(\mathbf{x})^T]^T - [0 : B(\mathbf{x})^T]^T \mathbf{u}_0 \} \\ &= \bar{D} \{ [0 \dot{\mathbf{x}}_2^T(t) - A(\mathbf{x})^T]^T - [0 : B(\mathbf{x})^T]^T \mathbf{u}_0 \} \\ &= D \{ \dot{\mathbf{x}}_2(t) - A(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x})\mathbf{u}_0 \} \end{aligned} \quad (3.22)$$

我們可發現，順滑變數 \mathbf{s} 所對應的動態系統(3.22)式，即順滑變數 \mathbf{s} 沿著閉迴路系統軌跡對時間 t 的變化率與矩陣 D_1 並無關，因此在考慮(3.7)式時我們可以將順滑

面的設計簡化成如下

$$\mathbf{s} = D \left\{ \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_2(t_0) - \int_{t_0}^t [A(\mathbf{x}(\tau)) + B(\mathbf{x}(\tau))\mathbf{u}_0] d\tau \right\} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

其中 D 滿足假設 2.5，即當 $m \leq n$ 時， $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 使得對任何狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ 矩陣 $DB(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 為可逆，當 $m > n$ 時， $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得對任何狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ 矩陣 $DB(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 為列滿秩，但由假設 3.2 以及 3.2 節建立 T-S 模糊模型時的過程知道，我們現在僅考慮系統(3.7)式擁有 $m \geq n$ 之條件，此條件可用來幫助我們設計(3.7)式這樣子形式下的非線性系統積分型順滑模控制律。

接著設計積分型順滑模控制律(integral-type sliding mode control law) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ ，根據 2.2 節之討論可知，設計積分型滑模控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 中的 \mathbf{u}_0 時必須滿足假設 2.6，因此在此我們引入下列假設。

假設 3.5：

存在一個無干擾控制律 \mathbf{u}_0 使得(3.7)式的無干擾系統



$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.24)$$

在 \mathbf{u}_0 的控制下，原點對於閉迴路系統為漸進穩定。

因為 \mathbf{u}_0 的設計方式存在著自由度，我們定義二次成本函數(performance index)如下[37]

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt \quad (3.25)$$

其中 $Q = Q^T \geq 0$ ， $R = R^T > 0$ ，根據[37]可知，我們可在(3.25)式這個二次成本函數下使用線性二次調節法(linear quadratic regulation, LQR)來對(3.7)式的無干擾系統進行平行分配補償之設計，即設計每一條規則所對應的回授矩陣 K_i (feedback gain matrix)，再透過建立 T-S 模糊模型來近似原非線性系統時所使用的權重 $\alpha_i(\mathbf{x})$ 來得到 \mathbf{u}_0 ，即我們最後可得 \mathbf{u}_0 為

$$\mathbf{u}_0 = -\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}) K_i \mathbf{x}(t) \quad (3.26)$$

此種 \mathbf{u}_0 的設計方式為一種次最佳化(sub-optimal)的設計方式[37]，當 \mathbf{u}_0 透過此方法設計完成並帶入(3.24)式的 \mathbf{u} 之後，我們僅需要利用引理 2.1，並透過線性矩陣不等式的求解工具，如 MATLAB LMI 工具箱(MATLAB LMI tool box)來對矩陣 P 進行求解，即可確定(3.24)式在 \mathbf{u}_0 的控制下之穩定性。我們將(3.23)式對時間 t 取導函數並將(3.7)式以及已經設計完成的 \mathbf{u}_0 代入了，則我們可得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的動態系統為

$$\dot{\mathbf{s}} = D\{A(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{f} + [B(\mathbf{x}) + \Delta B](\mathbf{u} + \mathbf{d}) - A(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x})\mathbf{u}_0\} \quad (3.27)$$

由 3.2 節我們知道 $B(\mathbf{x})$ 為列滿秩，故 $B(\mathbf{x})B^+(\mathbf{x}) = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，因此我們可將(3.27)式進一步整理後得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= D\{\Delta\mathbf{f} + B(\mathbf{x})(\mathbf{u}_1 + \mathbf{d}) + \Delta B(\mathbf{u} + \mathbf{d})\} \\ &= D\{B(\mathbf{x})(\mathbf{u}_1 + \mathbf{d} + B^+(\mathbf{x})\Delta B(\mathbf{u} + \mathbf{d}) + B^+(\mathbf{x})\Delta\mathbf{f})\} \\ &= DB(\mathbf{x})\{\mathbf{u}_1 + \mathbf{d} + B^+(\mathbf{x})\Delta B(\mathbf{u} + \mathbf{d}) + B^+(\mathbf{x})\Delta\mathbf{f}\} \\ &= DB(\mathbf{x})\{\mathbf{u}_1 + B^+(\mathbf{x})\Delta B\mathbf{u}_1 + \mathbf{d}_m\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中 $\mathbf{d}_m = \mathbf{d} + B^+(\mathbf{x})\Delta B(\mathbf{u}_0 + \mathbf{d}) + B^+(\mathbf{x})\Delta\mathbf{f}$ 。為了繼續完成控制律之設計，我們引進下列假設。

假設 3.6 :

$$\|\mathbf{d}_m\|_2 \leq \rho_2(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}, \forall t \in \mathbb{R}, \rho_2: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 為一連續的非負函數。}$$

雖然假設 3.6 的不等式當中需要 \mathbf{u}_0 的資訊，但因 $\|\Delta\mathbf{f}\|_2$ 與 $\|\Delta B\|_2$ 的上界(upper bound)可離線估測(offline estimation)，並且我們也可以估計干擾的上界 $\|\mathbf{d}\|_2$ ，因此當計算完 \mathbf{u}_0 後我們便可獲得 $\rho_2(\mathbf{x}, t)$ 之值

同樣地，根據 2.2 我們可設計積分型順滑模控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 中的 \mathbf{u}_1 為下列所示

$$\mathbf{u}_1 = \begin{cases} -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2}, & \text{if } \mathbf{s} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{if } \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.29)$$

其中 $\rho(\mathbf{x}, t) > \frac{k_0 - k}{k_0 - 2k} \rho_2(\mathbf{x}, t)$ 。為了證明 \mathbf{u}_1 設計成(3.29)式之可行性，我們令在某個時間瞬間 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ，並將(3.29)式代入(3.28)式可得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的閉迴路動態系統變為

$$\dot{\mathbf{s}} = DB(\mathbf{x}) \left\{ -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + B^+(\mathbf{x})\Delta B \left[-\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} \right] + \mathbf{d}_m \right\} \quad (3.30)$$

透過 Lyapunov 理論，令(3.30)式的可能的 Lyapunov 函數(Lyapunov function candidate)為 $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ ，則 V 對時間 t 的導函數為

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \quad (3.31)$$

將(3.30)式代入(3.31)式可得

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T DB(\mathbf{x}) \left\{ -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + B^+(\mathbf{x})\Delta B \left[-\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} \right] + \mathbf{d}_m \right\} \quad (3.32)$$

利用假設 3.1 到假設 3.3 以及假設 3.6 可將(3.32)式整理成如下

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2^2}{\|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + [\mathbf{s}^T DB(\mathbf{x})] B^+(\mathbf{x})\Delta B \left[-\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} \right] \\ &\quad + [\mathbf{s}^T DB(\mathbf{x})] \mathbf{d}_m \\ &\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \\ &\quad + \|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \cdot \left\| -\rho(\mathbf{x}, t) B^+(\mathbf{x})\Delta B \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} \right\|_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|\mathbf{d}_m\|_2 \\
\leq & -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \\
& + \rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \left\| B^+(\mathbf{x}) \Delta B \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2} \right\|_2 \\
& + \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|\mathbf{d}_m\|_2 \\
\leq & -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \\
& + \rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|B^+(\mathbf{x})\|_2 \cdot \left\| \Delta B \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2} \right\|_2 \\
& + \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|\mathbf{d}_m\|_2 \\
\leq & -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \\
& + \rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|B^+(\mathbf{x})\|_2 \cdot \|\Delta B\|_2 \cdot \left\| \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2} \right\|_2 \\
& + \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|\mathbf{d}_m\|_2 \\
\leq & -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|B^+(\mathbf{x})\|_2 \cdot \|\Delta B\|_2 \\
& + \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|\mathbf{d}_m\|_2 \\
\leq & -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|B^+(\mathbf{x})\|_2 \cdot \|\Delta B\|_2 \\
& + \rho_2(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \tag{3.33}
\end{aligned}$$

另外，因為 $B(\mathbf{x})$ 為列滿秩，故由引理 3.1 可知

$$\begin{aligned}
\|B^+(\mathbf{x})\|_2 & = \|(G(\mathbf{x}) - \Delta B)^+\|_2 \\
& = \frac{1}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x}) - \Delta B)} \\
& \leq \frac{1}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - \|\Delta B\|_2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - \|\Delta B\|_2} \quad (3.34)$$

將(3.34)式代入(3.33)式可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \\ &\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - \|\Delta B\|_2} \right] \cdot \|\Delta B\|_2 \\ &\quad + \rho_2(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \\ &\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t)k}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - \|\Delta B\|_2} \right] \\ &\quad + \rho_2(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \\ &= -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t)k}{k_0 - \|\Delta B\|_2} \right] \\ &\quad + \rho_2(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \\ &\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t)k}{k_0 - k} \right] + \rho_2(\mathbf{x}, t) \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \\ &= \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \left\{ -\rho(\mathbf{x}, t) + \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t)k}{k_0 - k} \right] + \rho_2(\mathbf{x}, t) \right\} \\ &= \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \left\{ \rho(\mathbf{x}, t) \left[\frac{-k_0 + 2k}{k_0 - k} \right] + \rho_2(\mathbf{x}, t) \right\} < 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

其中我們利用了及柯西-史瓦茲不等式 (Cauchy-Schwarz inequality) 來使得 $[\mathbf{s}^T DB(\mathbf{x})] \mathbf{d}_m \leq \left\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|\mathbf{d}_m\|_2$ 。根據 2.2 節的討論可知，針對(3.28)式來說每當順滑變數 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ， \mathbf{u}_1 會使得 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ ，同時代表著閉迴路系統軌跡一但偏離順滑面後，會立即趨近順滑面，但在此因為順滑面的設計型式所致，我們僅會得到 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ 之值，故對(3.28)式使用(3.29)式控制後的順滑變數 \mathbf{s} 所對應的閉迴路動態系統(3.30)式來說必成立 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 。

接下來我們將證明僅考慮系統(3.7)僅存在匹配型模型不確定性或干擾時，且其受到積分順滑模控制律所控制後的閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上時，其動態行為會等同於未受干擾的閉迴路無干擾系統(nominal system)之響應，亦即當我們考慮(3.7)式僅存在匹配型模型不確定性或干擾 \mathbf{d} ，並使用積分型順滑模控

制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 進行控制時，其中 \mathbf{u}_0 為(3.26)式所示 \mathbf{u}_1 為(3.29)式所示，閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上時，則其閉迴路系統響應會等同於(3.7)式的無干擾系統只使用 \mathbf{u}_0 進行控制時的避迴路系統響應。假設閉迴路系統軌跡被保持在順滑面，即 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 時，閉迴路系統

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= A(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{f} + [B(\mathbf{x}) + \Delta B](\mathbf{u} + \mathbf{d})\end{aligned}$$

的軌跡為 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d(t)$ ，而

$$\dot{\mathbf{s}} = DB(\mathbf{x}_d)\{\mathbf{u} + \mathbf{d}_m + B^+(\mathbf{x}_d)\Delta B\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 - B^+(\mathbf{x}_d)\Delta B\mathbf{u}_0\} = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

進一步整理(3.36)式後可的

$$\dot{\mathbf{s}} = DB(\mathbf{x}_d)\{[I + B^+(\mathbf{x}_d)\Delta B]\mathbf{u} - [I + B^+(\mathbf{x}_d)\Delta B]\mathbf{u}_0 + \mathbf{d}_m\} = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

已知 $[I + B^+(\mathbf{x})\Delta B] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ，且由引理 3.1 可知

$$\sigma_{\min}([I + B^+(\mathbf{x})\Delta B]) \geq \sigma_{\min}(I) - \sigma_{\max}(B^+(\mathbf{x})\Delta B)$$

然而我們知道

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}(B^+(\mathbf{x})\Delta B) &= \|B^+(\mathbf{x})\Delta B\|_2 \\ &\leq \|B^+(\mathbf{x})\|_2 \cdot \|\Delta B\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - \|\Delta B\|_2} \cdot \|\Delta B\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - \|\Delta B\|_2} \cdot k \\ &\leq \frac{k}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - k} = \frac{k}{k_0 - k} < 1\end{aligned}$$

因此我們可得

$$\sigma_{\min}([I + B^+(\mathbf{x})\Delta B]) \geq \sigma_{\min}(I) - \sigma_{\max}(B^+(\mathbf{x})\Delta B) = 1 - \sigma_{\max}(B^+(\mathbf{x})\Delta B) > 0$$

也就是說對任意狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ 矩陣 $[I + B^+(\mathbf{x})\Delta B] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 為可逆，又因為 $DB(\mathbf{x}_d)$ 為可逆或列滿秩，故必存在一解

$$\mathbf{u}_{eq} = [I + B^+(\mathbf{x}_d)\Delta B]^{-1}\{-\mathbf{d}_m + [I + B^+(\mathbf{x}_d)\Delta B]\mathbf{u}_0\} \quad (3.38)$$

滿足(3.37)式，而 \mathbf{u}_{eq} 稱為等效控制。我們把(3.38)式代回原始動態系統(3.7)式後可得

$$\dot{\mathbf{x}}_{1d} = \mathbf{x}_{2d}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{2d} = A(\mathbf{x}_d) + \Delta \mathbf{f} + B(\mathbf{x}_d)[I + B^+(\mathbf{x}_d)\Delta B]\mathbf{u}_{eq} + [B(\mathbf{x}_d) + \Delta B]\mathbf{d} \quad (3.39)$$

再將(3.39)式進一步整理後可得

$$\dot{\mathbf{x}}_{1d} = \mathbf{x}_{2d}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{2d} = A(\mathbf{x}_d) + B(\mathbf{x}_d)\mathbf{u}_0 \quad (3.40)$$

其中 $\mathbf{x}_d = [\mathbf{x}_{1d}^T, \mathbf{x}_{2d}^T]^T$ ，觀察(3.40)式可發現其動態系統即為原始動態系統(3.7)式的無干擾系統使用 \mathbf{u}_0 控制後的閉迴路無干擾系統，即完成證明。

雖然我們針對 T-S 模糊模型(3.7)式進行積分行順滑模控制律設計，但是我們最終仍然是將控制律代入原始的非線性系統(3.1)式，因此，我們可進一步分析，對於考慮原始非線性系統(3.1)式僅擁有匹配型模型不確定性或干擾時，並使用積分型順滑模控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 進行控制時，其中 \mathbf{u}_0 為(3.26)式所示 \mathbf{u}_1 為(3.29)式所示，且閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上時，則其閉迴路系統響應會如何。現在我們考慮將積分型順滑模控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 代入(3.1)式且考慮原始非線性系統(3.1)式僅擁有匹配型模型不確定性或干擾 \mathbf{d} ，其中 \mathbf{u}_0 為(3.26)式所示 \mathbf{u}_1 為(3.29)式所示，同樣地，假設原始非線性系統(3.1)在使用順滑模控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 控制後的閉迴路系統軌跡被保持在順滑面，即 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 時，並令此時的閉迴路系統

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})[\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{d}] \quad (3.41)$$

的軌跡為 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s(t)$ ，而由(3.36)式到(3.38)式知道，此時的等效控制為

$$\mathbf{u}_{eq} = [I + B^+(\mathbf{x}_s)\Delta B]^{-1}\{-\mathbf{d}_m + [I + B^+(\mathbf{x}_s)\Delta B]\mathbf{u}_0\} \quad (3.42)$$

我們把(3.42)式代回原始非線性系統(3.1)式後可得

$$\dot{\mathbf{x}}_{1s} = \mathbf{x}_{2s}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{2s} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) + G(\mathbf{x}_s)[\mathbf{u}_{eq} + \mathbf{d}] \quad (3.43)$$

利用 3.2 節時建立 T-S 模糊模型時所得到的關係式 $\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})$ ，

$\Delta B = G(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x})$ ，我們可將(3.43)式整理成

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{1s} &= \mathbf{x}_{2s} \\ \dot{\mathbf{x}}_{2s} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) - \Delta \mathbf{f} + B(\mathbf{x}_s)\mathbf{u}_0\end{aligned}\quad (3.44)$$

再利用一次關係式 $\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})$ ，我們可再將(3.44)進一步整理成

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{1s} &= \mathbf{x}_{2s} \\ \dot{\mathbf{x}}_{2s} &= A(\mathbf{x}_s) + B(\mathbf{x}_s)\mathbf{u}_0\end{aligned}\quad (3.45)$$

其中 $\mathbf{x}_s = [\mathbf{x}_{1s}^T, \mathbf{x}_{2s}^T]^T$ ，觀察(3.45)式可發現其動態系統即為動態系統(3.7)式的無干擾系統使用 \mathbf{u}_0 控制後的閉迴路無干擾系統，也就是說，原始非線性系統(3.1)式僅擁有匹配型模型不確定性或干擾時，並使用積分型順滑模控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 進行控制，其中 \mathbf{u}_0 為(3.26)式所示 \mathbf{u}_1 為(3.29)式所示，且閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上時，則其閉迴路系統響應會等同於同於(3.7)式的無干擾系統只使用 \mathbf{u}_0 進行控制時的避迴路系統響應。因此，最後我們可知道，我們使用 T-S 模糊模型進行積分順滑模控制時，會先對 T-S 模糊模型的無干擾系統進行設計，即設計 \mathbf{u}_0 ，並使 T-S 模糊模型的無干擾系統達到我們希望的性能表現，而儘管最後我們是將考慮 T-S 模糊模所設計的積分順滑模控制律代入原始的非線性系統，此非線性系統受到考慮 T-S 模糊模所設計的積分順滑模控制律控制後，其閉迴路系統軌跡仍然會與 T-S 模糊模型的無干擾系統使用 \mathbf{u}_0 控制後的閉迴路無干擾系統軌跡相同。最後，根據上列分析後我們提出下列定理。

定理 3.1：

考慮非線性二階控制系統(3.1)式，且利用 T-S 模糊模型近似後得其近似之動態系統(3.7)式，當假設 3.1 到假設 3.3，以及假設 3.6 同時成立，且存在矩陣 P 滿足引理 2.1 使得假設 3.5 也成立時，則(3.1)式在下列控制律(3.46)式的控制下，原點對於閉迴路系統為漸進穩定。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \quad (3.46)$$

其中

$$\mathbf{u}_0 = -\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}) K_i \mathbf{x}(t) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{cases} -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2}, & \text{if } \mathbf{s} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{if } \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{cases}, \quad (3.48)$$

且 $\rho(\mathbf{x}, t) > \frac{k_0 - k}{k_0 - 2k} \rho_2(\mathbf{x}, t)$ 。

3.4 衛星姿態穩健控制之模擬

3.4.1 建立 T-S 模型

考慮衛星姿態模型如下[1]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})[\mathbf{u} + \mathbf{d}] \end{aligned} \quad (3.49)$$

其中 $\mathbf{x}_1 = [x_1, x_2, x_3] = [\phi, \theta, \psi]$ ， $\mathbf{x}_2 = [x_4, x_5, x_6] = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]$ ， $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T$ ， $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ ， ϕ, θ, ψ 分別為 x, y, z 三軸的尤拉角(Euler angle)，這裡的 u_1, u_2, u_3 和 u_4 為衛星在四個方向上的控制力矩，一般來說，其為反應輪(reaction wheel)或推進器(thruster)提供其力矩，而 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x})]^T$ ，其中

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= \omega_0 x_6 c x_3 c x_2 - \omega_0 x_5 s x_3 s x_2 + \frac{I_y - I_z}{I_x} [x_5 x_6 + \omega_0 x_5 c x_1 s x_3 s x_2 \\ &\quad + \omega_0 x_5 c x_3 s x_1 + \omega_0 x_6 c x_3 c x_1 + \frac{1}{2} \omega_0^2 s(2x_3) c^2 x_1 s x_2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 c^2 x_3 s(2x_1) \\ &\quad - \omega_0 x_6 s x_3 s x_2 s x_1 - \frac{1}{2} \omega_0^2 s^2 x_2 s^2 x_3 s(2x_1) - \frac{1}{2} \omega_0^2 s(2x_3) s x_2 s^2 x_1 \\ &\quad - \frac{3}{2} \omega_0^2 c^2 x_2 s(2x_1)] \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \omega_0 x_6 s x_3 c x_1 - \omega_0 x_4 c x_3 s x_1 + \omega_0 x_6 c x_3 s x_2 s x_1 + \omega_0 x_5 s x_3 c x_2 s x_1$$

$$\begin{aligned}
& +\omega_0 x_4 s x_3 s x_2 c x_1 + \frac{I_z - I_x}{I_y} [x_4 x_6 + \omega_0 x_4 c x_1 s x_3 s x_2 + \omega_0 x_4 c x_3 s x_1 \\
& - \omega_0 x_6 s x_3 c x_2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 s(2x_2) s^2 x_3 c x_1 - \frac{1}{2} \omega_0^2 c x_2 s x_1 s(2x_3) \\
& + \frac{3}{2} \omega_0^2 s(2x_2) c x_1] \tag{3.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(\mathbf{x}) & = \omega_0 x_4 s x_1 s x_3 s x_2 - \omega_0 x_6 c x_1 c x_3 s x_2 - \omega_0 x_5 c x_1 s x_3 c x_2 \\
& + \omega_0 x_6 s x_3 s x_1 - \omega_0 x_4 c x_3 c x_1 + \frac{I_x - I_y}{I_z} [x_4 x_5 + \omega_0 x_4 c x_3 c x_1 \\
& - \omega_0 x_4 s x_3 s x_2 s x_1 - \omega_0 x_5 s x_3 c x_2 x_2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 s(2x_3) c x_2 c x_1 \\
& + \frac{1}{2} \omega_0^2 s^2 x_3 s x_1 s(2x_2) - \frac{3}{2} \omega_0^2 s(2x_2) s x_1] \tag{3.52}
\end{aligned}$$

這裡的 I_x, I_y, I_z 分別代表相對於 x, y, z 三軸的慣量(inertia)， ω_0 為軌道率(orbital rate)， c 與 s 分別代表 \cos 與 \sin 這兩個函數。另外根據[1]，我們可知 $G(\mathbf{x})$ 為如下

$$G(\mathbf{x}) = G = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 \\ 0.69 & -0.69 & -0.69 & 0.69 \\ 0.28 & 0.28 & -0.28 & -0.28 \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

接下來，我們希望建立 T-S 模糊模型來近似(3.49)式，首先我們先將(3.49)式中的 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 拆解成 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})\mathbf{x}$ ，其中 $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ ，而 $F(\mathbf{x})$ 的 i - j 元素(i - j elements)可表示成如下[1]

$$\begin{aligned}
[F(\mathbf{x})]_{1,1} & = \frac{I_y - I_z}{I_x} \left[\omega_0^2 c^2 x_3 \frac{s(2x_1)}{2x_1} - \omega_0^2 s^2 x_2 s^2 x_3 \frac{s(2x_1)}{2x_1} \right. \\
& \quad \left. - 3\omega_0^2 c^2 x_2 \frac{s(2x_1)}{2x_1} \right] \tag{3.54}
\end{aligned}$$

$$[F(\mathbf{x})]_{1,2} = \frac{I_y - I_z}{I_x} \left[\frac{1}{4} \omega_0^2 s(2x_3) c^2 x_1 \frac{s(x_2)}{x_2} - \frac{1}{4} \omega_0^2 s(2x_3) s^2 x_1 \frac{s(x_2)}{x_2} \right] \tag{3.55}$$

$$[F(\mathbf{x})]_{1,3} = \frac{I_y - I_z}{I_x} \left[\frac{1}{2} \omega_0^2 s x_2 c^2 x_1 \frac{s(2x_3)}{2x_3} - \frac{1}{2} \omega_0^2 s x_2 s^2 x_1 \frac{s(2x_3)}{2x_3} \right] \tag{3.56}$$

$$[F(\mathbf{x})]_{1,4} = 0 \tag{3.57}$$

$$[F(\mathbf{x})]_{1,5} = -\omega_0 s x_3 s x_2 + \frac{I_y - I_z}{I_x} \left[\frac{1}{2} x_6 + \omega_0 c x_1 s x_3 s x_2 + \omega_0 c x_3 s x_1 \right] \tag{3.58}$$

$$[F(\mathbf{x})]_{1,6} = -\omega_0 c x_3 s x_2 + \frac{I_y - I_z}{I_x} \left[\frac{1}{2} x_5 + \omega_0 c x_3 c x_1 - \omega_0 s x_3 s x_2 s x_1 \right] \tag{3.59}$$

$$[F(\mathbf{x})]_{2,1} = \frac{I_z - I_x}{I_y} \left[-\frac{1}{4} \omega_0^2 c x_2 \frac{s x_1}{x_1} s(2x_3) \right] \quad (3.60)$$

$$[F(\mathbf{x})]_{2,2} = \frac{I_z - I_x}{I_y} \left[-\omega_0^2 c x_1 s^2 x_3 \frac{s(2x_2)}{2x_2} + 3\omega_0^2 c x_1 \frac{s(2x_2)}{2x_2} \right] \quad (3.61)$$

$$[F(\mathbf{x})]_{2,3} = \frac{I_z - I_x}{I_y} \left[-\frac{1}{2} \omega_0^2 c x_2 s x_1 \frac{s(2x_3)}{2x_3} \right] \quad (3.62)$$

$$[F(\mathbf{x})]_{2,4} = \omega_0 c x_3 s x_1 + \omega_0 s x_3 s x_2 c x_1 + \frac{I_z - I_x}{I_y} \left[\frac{1}{2} x_6 + \omega_0 c x_1 s x_3 s x_2 + \omega_0 c x_3 s x_1 \right] \quad (3.63)$$

$$[F(\mathbf{x})]_{2,5} = \omega_0 s x_3 c x_2 s x_1 \quad (3.64)$$

$$[F(\mathbf{x})]_{2,6} = \omega_0 s x_3 c x_1 + \omega_0 c x_3 s x_2 s x_1 + \frac{I_z - I_x}{I_y} \left[\frac{1}{2} x_4 - \omega_0 s x_3 c x_2 \right] \quad (3.65)$$

$$[F(\mathbf{x})]_{3,1} = \frac{I_x - I_y}{I_z} \left[-\frac{3}{4} \omega_0^2 s(2x_2) \frac{s x_1}{x_1} \right] \quad (3.66)$$

$$[F(\mathbf{x})]_{3,2} = \frac{I_x - I_y}{I_z} \left[\omega_0^2 s^2 x_3 s x_1 \frac{s(2x_2)}{2x_2} - \frac{3}{2} \omega_0^2 s x_1 \frac{s(2x_2)}{2x_2} \right] \quad (3.67)$$

$$[F(\mathbf{x})]_{3,3} = \frac{I_x - I_y}{I_z} \left[-\omega_0^2 c x_2 c x_1 \frac{s(2x_3)}{2x_3} \right] \quad (3.68)$$

$$[F(\mathbf{x})]_{3,4} = \omega_0 s x_1 s x_2 s x_3 - \omega_0 c x_3 c x_1 + \frac{I_x - I_y}{I_z} \left[\frac{1}{2} x_5 + \omega_0 c x_3 c x_1 - \omega_0 s x_1 s x_2 s x_3 \right] \quad (3.69)$$

$$[F(\mathbf{x})]_{3,5} = -\omega_0 s x_3 c x_1 c x_2 + \frac{I_x - I_y}{I_z} \left[\frac{1}{2} x_4 - \omega_0 s x_3 c x_2 \right] \quad (3.70)$$

$$[F(\mathbf{x})]_{3,6} = -\omega_0 c x_3 c x_1 s x_2 + \omega_0 s x_3 s x_1 \quad (3.71)$$

為了展示前面章節所提出的控制方式以及簡化討論，我們在此假設三個尤拉角 x_1, x_2, x_3 分別被限制在 $x_1 \in [-\pi, \pi]$, $x_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$, $x_3 \in [-\pi, \pi]$ ，根據各種不同的衛星系統來說，其三個尤拉角速率會有不同的上限值，為了展示本論文所提出的控制方式，我們假設 x_4, x_5, x_6 被限制在 $x_4, x_5, x_6 \in [-1, 1]$ ，在模擬中我們考慮前鑑部變數 (premise variable) 為 x_1, x_2, x_3 ，而操作點我們選取成 $\{\mathbf{x}_{i,j,k}^0 = [x_{1i}, x_{2j}, x_{3k}, 0, 0, 0]^T \mid i, j, k = 1, \dots, 5\}$ ，其中 $x_{11} = -\pi, x_{12} = -\pi/2, x_{13} = 0, x_{14} = \pi/2, x_{15} = \pi$ ，而 $x_{21} = -\pi/2, x_{22} = -\pi/4, x_{23} = 0, x_{24} = \pi/4, x_{25} = \pi/2$ ，最

後 $x_{31} = -\pi, x_{32} = -\pi/2, x_{33} = 0, x_{34} = \pi/2, x_{35} = \pi$ 。另外，我們選取三角歸屬函數(triangular membership function)作為每個前鑑步變數分割(partition)的歸屬函數，如圖 3.1 所示。根據上述，我們可共有 5^3 個操作點，即我們使用了 5^3 規則並對應 5^3 個線性模型來建立 T-S 模糊模型，而每一個線性模型可表示成

$$A_{i,j,k} = F(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{i,j,k}^0}, \quad i, j, k = 1, \dots, 5$$

在此我們僅將這 5^3 個線性模型中的三個列出，如下所示，剩餘的線性模型可由直接計算而得到。

$$A_{1,1,1} = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -824.96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -206.24 & 0 & 1031.2 \end{bmatrix}$$

$$A_{2,2,2} = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 729.17 & -583.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 729.17 & 0 \\ 0.41 & 0.27 & 0 & -145.83 & 583.33 & 1031.2 \end{bmatrix}$$

$$A_{2,2,4} = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -729.17 & 583.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -729.17 & 0 \\ 0.41 & 0.27 & 0 & 145.83 & -583.33 & -1031.2 \end{bmatrix}$$

在得到這些 5^3 個線性模型後，因為我們選取三角歸屬函數(triangular membership function)作為每個前鑑部變數分割(partition)的歸屬函數，故在每個時間瞬間(time instant)最多只有會有 8 條規則會被激發(trigger)，因此，透過前鑑部變數 x_1, x_2, x_3 的分割，我們可將整個狀態空間細分成 64 個子區域，每一個子區域定義成

$$D_{i,j,k} = \{\mathbf{x} | x_{1i} \leq x_1 \leq x_{1(i+1)}, x_{2j} \leq x_2 \leq x_{2(j+1)}, x_{3k} \leq x_3 \leq x_{3(k+1)}, -1 \leq x_l \leq 1; \\ i, j, k = 1, \dots, 5; l = 4, 5, 6\}$$

而在每個時間瞬間，我們僅需考慮區域 $D_{i,j,k}$ 所對應的 8 個操作點，即所對應的 8 條規則。最後，當 $\mathbf{x} \in D_{i,j,k}$ 而 i, j, k 分別為某特定值時，則對應的 T-S 模糊模型為

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= A(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f} + B(\mathbf{x})(\mathbf{u} + \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (3.72)$$

其中

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{p,q,r=0}^1 \alpha_p(\mathbf{x}) \alpha_q(\mathbf{x}) \alpha_r(\mathbf{x}) \cdot A_{(i+p),(j+q),(k+r)} \mathbf{x}$$

$$B(\mathbf{x}) = G$$

且

$$\alpha_p(\mathbf{x}) = \frac{|x_1 - x_{1(i+1-p)}|}{|x_{1(i+1)} - x_{1i}|}$$

$$\alpha_q(\mathbf{x}) = \frac{|x_2 - x_{2(j+1-q)}|}{|x_{2(j+1)} - x_{2j}|}$$

$$\alpha_r(\mathbf{x}) = \frac{|x_3 - x_{3(k+1-r)}|}{|x_{3(k+1)} - x_{3k}|}$$

明顯地， $\sum_{p,q,r=0}^1 \alpha_p(\mathbf{x}) \alpha_q(\mathbf{x}) \alpha_r(\mathbf{x}) = 1$ 。另外，我們需要 $\|\Delta \mathbf{f}\|_2$ 的資訊，在此我們利用 $\|\Delta \mathbf{f}\|_\infty$ 來表示對所有 $\mathbf{x} \in D_{i,j,k}$ 時 $\|\Delta \mathbf{f}\|_2 = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})\|_2$ 的上界(upper bound)，即 $\|\Delta \mathbf{f}\|_\infty = \sup_{\mathbf{x} \in D_{i,j,k}} \|\Delta \mathbf{f}\|_2$ ，而 $\|\Delta \mathbf{f}\|_\infty$ 可透過 MATLAB 進行離線計算(offline computation)而得[38]，我們將對所有 $\mathbf{x} \in D_{i,j,k}$ 時 $\|\Delta \mathbf{f}\|_\infty$ 之值列於表 3.1。如同前述，在每個時間瞬間最多只有會有 8 條規則會被激發，因此儘管我們增加前鑑部變數 x_1, x_2, x_3 的分割數目，也不會因此而增加即時計算(online computation)的運算負擔。



附註 3.2：

在順滑模控制時，因為在 T-S 模糊模型下 $B(\mathbf{x}) = G$ ，因此 $\Delta B = 0$ ，故 $\Delta \mathbf{m} = \Delta \mathbf{f} + B(\mathbf{x})\mathbf{d} = \Delta \mathbf{f} + G\mathbf{d}$ ，且(3.13)式中的 $\mu(\mathbf{x}, t)$ 其只需要滿足 $\mu(\mathbf{x}, t) \geq \frac{k_0 - k}{k_0 - (1 + \sqrt{n})k} [\eta + \rho_1(\mathbf{x}, t)] = \frac{k_0 - 0}{k_0 - (1 + \sqrt{n})0} [\eta + \rho_1(\mathbf{x}, t)] = \eta + \rho_1(\mathbf{x}, t)$ 即可。

附註 3.3：

在積分型順滑模控制時，因為在 T-S 模糊模型下 $B(\mathbf{x}) = G$ ，因此 $\Delta B = 0$ ，故 $\mathbf{d}_m = \mathbf{d} + B^+(\mathbf{x})\Delta \mathbf{f} = \mathbf{d} + G^+\Delta \mathbf{f}$ ，且(3.29)式中的 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 其只需要滿足 $\rho(\mathbf{x}, t) > \frac{k_0 - k}{k_0 - 2k} \rho_2(\mathbf{x}, t) = \frac{k_0 - 0}{k_0 - 0} \rho_2(\mathbf{x}, t) = \rho_2(\mathbf{x}, t)$ 即可。

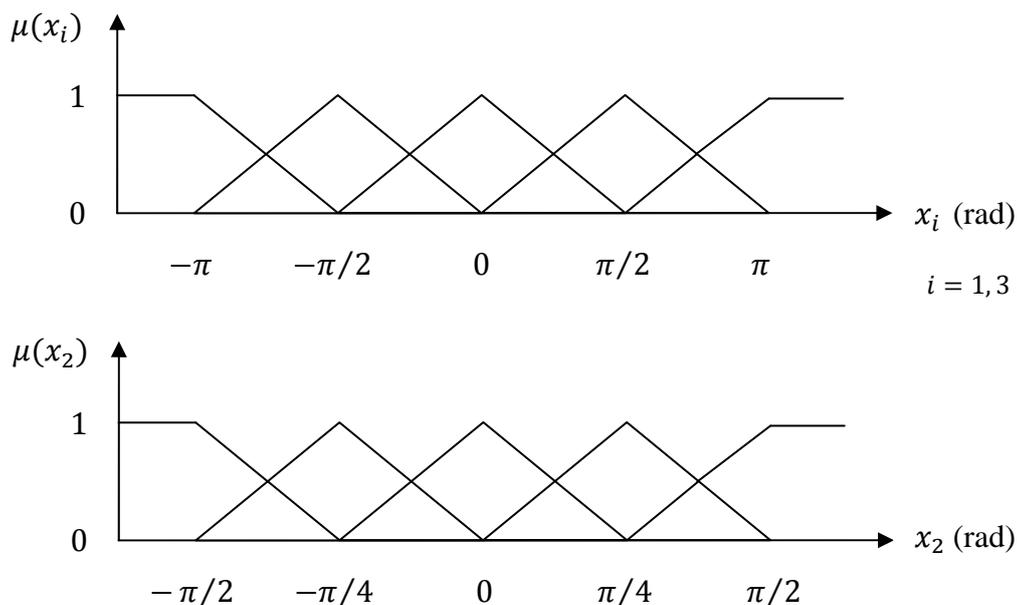


圖 3.1 狀態 x_1, x_2, x_3 所對應的歸屬函數

表 3.1 在區域 $D_{i,j,k}$ 內 $\|\Delta f\|_\infty$ 估算值

區域	$D_{1,1,1}$	$D_{1,1,2}$	$D_{1,1,3}$	$D_{1,1,4}$	$D_{1,2,1}$	$D_{1,2,2}$
$\ \Delta f\ _\infty$	1.1329	1.1322	1.1299	1.1304	1.1325	1.1318
區域	$D_{1,2,3}$	$D_{1,2,4}$	$D_{1,3,1}$	$D_{1,3,2}$	$D_{1,3,3}$	$D_{1,3,4}$
$\ \Delta f\ _\infty$	1.1303	1.1309	1.1320	1.1308	1.1319	1.1319
區域	$D_{1,4,1}$	$D_{1,4,2}$	$D_{1,4,3}$	$D_{1,4,4}$	$D_{2,1,1}$	$D_{2,1,2}$
$\ \Delta f\ _\infty$	1.1307	1.1305	1.1318	1.1323	1.1330	1.1329
區域	$D_{2,1,3}$	$D_{2,1,4}$	$D_{2,2,1}$	$D_{2,2,2}$	$D_{2,2,3}$	$D_{2,2,4}$
$\ \Delta f\ _\infty$	1.1298	1.1298	1.1326	1.1328	1.1301	1.1302
區域	$D_{2,3,1}$	$D_{2,3,2}$	$D_{2,3,3}$	$D_{2,3,4}$	$D_{2,4,1}$	$D_{2,4,2}$
$\ \Delta f\ _\infty$	1.1321	1.1310	1.1318	1.1322	1.1312	1.1304
區域	$D_{2,4,3}$	$D_{2,4,4}$	$D_{3,1,1}$	$D_{3,1,2}$	$D_{3,1,3}$	$D_{3,1,4}$
$\ \Delta f\ _\infty$	1.1319	1.1324	1.1321	1.1324	1.1308	1.1303
區域	$D_{3,2,1}$	$D_{3,2,2}$	$D_{3,2,3}$	$D_{3,2,4}$	$D_{3,3,1}$	$D_{3,3,2}$
$\ \Delta f\ _\infty$	1.1319	1.1321	1.1309	1.1307	1.1309	1.1310
區域	$D_{3,3,3}$	$D_{3,3,4}$	$D_{3,4,1}$	$D_{3,4,2}$	$D_{3,4,3}$	$D_{3,4,4}$
$\ \Delta f\ _\infty$	1.1319	1.1318	1.1303	1.1305	1.1323	1.1324
區域	$D_{4,1,1}$	$D_{4,1,2}$	$D_{4,1,3}$	$D_{4,1,4}$	$D_{4,2,1}$	$D_{4,2,2}$
$\ \Delta f\ _\infty$	1.1320	1.1317	1.1308	1.1309	1.1317	1.1314
區域	$D_{4,2,3}$	$D_{4,2,4}$	$D_{4,3,1}$	$D_{4,3,2}$	$D_{4,3,3}$	$D_{4,3,4}$
$\ \Delta f\ _\infty$	1.1311	1.1312	1.1307	1.1308	1.1320	1.1320
區域	$D_{4,4,1}$	$D_{4,4,2}$	$D_{4,4,3}$	$D_{4,4,4}$		
$\ \Delta f\ _\infty$	1.1303	1.1305	1.1323	1.1322		

3.4.2 模擬結果

在這一小節中，我們利用 MATLAB 軟體來進行模擬 3.4.1 節所提及的衛星系統；我們考慮系統存在擾動，並且利用 3.3 節所提及的兩種控制方式來對系統進行控制，並分析是否閉迴路系統能夠達到穩定，並進一步比較兩種控制方式之間所造成的二次成本函數花費以及收斂時間等等的性能。在下面的模擬中，我們選取的參數如下[1]：

• 衛星系統參數：

$$(1) \omega_0 = 1.0312 \times 10^{-3} \text{rad/s}$$

$$(2) I_x = I_z = 2000 \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2, I_y = 400 \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$$

$$(3) \mathbf{d} = [0.05\sin(t), 0.05\cos(t), 0.05\cos(3t)]^T$$

$$(4) \mathbf{x}(0) = [-0.7, -0.07, 1.5, 0.3, 1, -0.2]^T$$

• 二次成本函數參數：

$$(1) Q = I_6$$

$$(2) R = I_4$$

• 順滑模控制參數：

$$(1) \eta = 0.5$$

$$(2) M = 2I_3$$

$$(3) \rho_1(\mathbf{x}, t) = \|\Delta \mathbf{f}\|_\infty + \|G\|_2 \cdot \|\mathbf{d}\|_\infty, \text{ 其中 } \|\mathbf{d}\|_\infty = \sup_{\forall t} \|\mathbf{d}\|_2$$

$$(4) \mu(\mathbf{x}, t) = \eta + \rho_1(\mathbf{x}, t)$$

• 積分型順滑模控制參數：

$$(1) D = I_3$$

$$(2) \rho_2(\mathbf{x}, t) = \|\mathbf{d}\|_\infty + \|G^+\|_2 \cdot \|\Delta \mathbf{f}\|_\infty, \text{ 其中 } \|\mathbf{d}\|_\infty = \sup_{\forall t} \|\mathbf{d}\|_2$$

$$(3) \rho(\mathbf{x}, t) = 0.5 + \rho_2(\mathbf{x}, t)$$

其中在積分型順滑模控制中，其 \mathbf{u}_0 為考慮(3.25)式的二次成本函數下，使用 3.3.2 節所提到的線性二次調節法來對(3.72)式的無干擾系統進行平行分配補償之設計

[37]，即離線(offline)的設計每一條規則所對應的回授矩陣 $K_{i,j,k}$ ，並透過建立 T-S 模糊模型來近似原非線性系統時所使用的權重來得到 \mathbf{u}_0 ，即當 $\mathbf{x} \in D_{i,j,k}$ 而 i, j, k 分別為某特定值時，則對應的 \mathbf{u}_0 為

$$\mathbf{u}_0 = -\sum_{p,q,r=0}^1 \alpha_p(\mathbf{x}) \alpha_q(\mathbf{x}) \alpha_r(\mathbf{x}) \cdot K_{(i+p),(j+q),(k+r)} \mathbf{x} \quad (3.73)$$

而因為我們擁有 5^3 條規則，因此會對應的設計出 5^3 個 $K_{i,j,k}$ ，在此我們僅將這 5^3 個 $K_{i,j,k}$ 中的三個列出，如下所示，剩餘的可由直接計算而得到。

$$K_{1,1,1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.7892 & 0.7825 & 1.0696 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.7892 & -0.7825 & 1.0696 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.7895 & -0.7825 & -1.0703 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.7895 & 0.7825 & -1.0703 \end{bmatrix}$$

$$K_{2,2,2} = \begin{bmatrix} 0.5001 & 0.4997 & 0.5002 & 0.7894 & 0.7831 & 1.0701 \\ 0.4999 & -0.5003 & 0.4998 & 0.7891 & -0.7825 & 1.0693 \\ 0.4999 & -0.4999 & -0.5002 & 0.7894 & -0.7828 & -1.0706 \\ 0.5001 & 0.5001 & -0.4998 & 0.7896 & 0.7828 & -1.0698 \end{bmatrix}$$

$$K_{2,2,4} = \begin{bmatrix} 0.4999 & 0.5003 & 0.4998 & 0.7894 & 0.7820 & 1.0680 \\ 0.5001 & -0.4997 & 0.5002 & 0.7896 & -0.7825 & 1.0687 \\ 0.5001 & -0.5001 & -0.4998 & 0.7894 & -0.7822 & -1.0675 \\ 0.4999 & 0.4999 & -0.5002 & 0.7891 & 0.7823 & -1.0682 \end{bmatrix}$$

接著利用引理 2.1，並使用 MATLAB LMI 工具箱(MATLAB LMI tool box)來對矩陣 P 進行求解，我們可求得 P 如下

$$P = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 1.1242 & 0 & 0 & 0.3375 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2061 & 0 & 0 & 0.3277 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5562 & 0 & 0 & 0.8067 \\ 0.3375 & 0 & 0 & 0.3733 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3277 & 0 & 0 & 0.3611 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8076 & 0 & 0 & 1.5022 \end{bmatrix}$$

因此，由引理 2.1 可知道(3.73)式的 \mathbf{u}_0 滿足假設 3.5。另外，我們為了要減輕順滑模控制與積分型順滑模控制的切跳現象(chattering)，在順滑模控制方面我們使用了飽和函數(saturation function)來取代本來的符號函數，並設定其邊界寬度(boundary layer width) $\varepsilon = 0.02$ ；而在積分型順滑模控制方面我們將控制律(3.29)修改成下列行式

$$\mathbf{u}_1 = \begin{cases} -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \|_2}, & \text{if } \| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \|_2 \geq \varepsilon \\ -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\varepsilon}, & \text{if } \| (DB(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \|_2 < \varepsilon \end{cases} \quad (3.74)$$

且同樣地設定其邊界寬度(boundary layer width) $\varepsilon = 0.02$ 。

模擬結果顯示在圖 3.2 到圖 3.14，而效能之比較整理在表 3.2，在表 3.2 中我們所談的穩定是指所有閉迴路系統的狀態之絕對值是否收斂到 0.01 以內，另外我們定義 $\|\mathbf{u}\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 12]} \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_{\infty}$ ，而收斂時間(convergence time)定義為所有閉迴路系統的狀態之絕對值收斂到 0.01 時所相對應的時間。在模擬結果中，我們以符號 ISMC 來表式積分順滑模控制在系統存在擾動的情況下之結果；以符號 SMC 來表式順滑模控制在系統存在擾動的情況下之結果；以符號 LQRd 來表式 LQR 平行分配補償設計在系統存在擾動的情況下所得到的結果；最後以符號 LQRn 來表示 LQR 平行分配補償設計在 T-S 模糊模型之無干擾系統的情況下所得到的結果。

圖 3.2 到圖 3.7 分別代表狀態 x_1 到狀態 x_6 的時間響應圖，從圖 3.2 到圖 3.7 可發現，ISMC 以及 SMC 在有擾動的情況下都可以使得閉迴路系統達到穩定；而 LQRd 則無法抑制擾動因此無法使得閉迴路系統達到穩定，另外，我們可發現 ISMC 和 LQRn 的軌跡曲線幾乎重合，這也說明了當原始非線性系統使用基於 T-S 模糊模型近似下所設計的積分型順滑模控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 做控制後，其閉迴路系統的軌跡會與 T-S 模糊模型的無干擾系統使用 \mathbf{u}_0 做控制後的閉迴路無干擾系統的軌跡非常接近。圖 3.8 到圖 3.10 為 ISMC 與 SMC 的順滑變數時間響應比較圖，從中我們可發現 ISMC 的順滑變數一開始就為零，且之後也一直保持在零附近，如此驗證了積分型順滑模控制可消除存在迫近階段(reaching phase)的疑慮，而 SMC 的順滑變數則是經過了一段時間才會到達零，也就是說其存在著迫近階段的特性。我們可注意到當時間 $t = 0.65$ 的時候 SMC 的順滑變數 s_1 和 s_2 都差不多已到達零，以及在時間 $t = 1.65$ 的時候 SMC 的順滑變數 s_3 也差不多已到達零，而 SMC 的控制輸入也跟著在時間 $t = 0.65$ 秒與時間 $t = 1.65$ 秒的時候產生了幅度較大的變化，這影響了 SMC 的狀態 x_4 到 x_6 它們在相對應的時間產生不平滑的變化現象，這是因為當系統狀態到達順滑面時，SMC 的控制律會隨之作切換而產生的結果。最後圖 3.11 到圖 3.14 為控制輸入的時間響應比較圖，值得注意的是 ISMC

與 LQRn 雖然不完全相同，但 ISMC 的控制輸入時間響應看起來似乎是以 LQRn 的控制輸入時間響應做為基線之諧波振盪，這是因為 ISMC 與 LQRn 的狀態軌跡十分接近，而 ISMC 的控制輸入只比 LQRn 多了一部分用來抵消干擾的控制輸入，因而造成此現象。

表 3.2 為效能比較的整理表，主要說明閉迴路系統狀態的穩定與否和收斂狀況，以及二次成本函數的比較。因為 LQRd 最終並有沒達到穩定，所以我們不考慮其性能表現。在二次成本花費上 LQRn 是最少的，另外，在控制力道上 ISMC 的花費比起 SMC 來的少，而狀態所造成的花費則是 ISMC 大於 SMC，不過最後整體二次成本花費來說 ISMC 還是少於 SMC。考慮 $\|u\|_{\infty}$ 時，最大的是 SMC，其值為 $\|u\|_{\infty} = 2.895$ ，且 SMC 產生最大控制力道 $\|u\|_{\infty}$ 的相對應時間為 $t = 0$ 秒時，意即 SMC 產生最大控制力道的時間點在於系統一開始作用的時刻，而相較於 ISMC 在時間 $t = 0$ 秒時其作用的控制力道僅為 1.3968，遠小於 SMC 所產生的控制力道。考慮收斂時間時，因為 SMC 花費了最多控制的力道，這使得 SMC 的收斂時間是最小的，雖然 ISMC 收斂時間較長，但在我們所考慮的二次成本函數來說，ISMC 的成本花費比起 SMC 來的少。

綜合以上模擬結果，首先可以驗證 LQR 無法使閉迴路系統達到穩定，即其對於系統含有連續性的干擾時較無穩健性，而 ISMC 與 SMC 則可使得閉迴路系統達到穩定。接著，我們可發現 ISMC 的狀態變化會與 LQRn 幾乎重疊，這點我們可從圖 3.2 到圖 3.7 以及表 3.2 內狀態的積分結果觀察得知。從圖 3.8 到圖 3.10 我們可看到 ISMC 的順滑變數能夠從頭到尾一直保持在零的附近。另外，雖然 ISMC 比起 LQRn 需要多一部分控制輸入來抵消擾動所造成的影響，不過由於 ISMC 的閉迴路狀態軌跡幾乎與 LQRn 的閉迴路狀態軌跡相同，所以在一定程度上減少了二次成本花費，因此我們仍可以將此 ISMC 控制律作為一種次最佳化 (sub-optimal) 的設計方式。由最後的效能比較表，我們也驗證了 ISMC 的二次成本花費會比 SMC 的二次成本花費少。最後，透過衛星動態系統的模擬結果可知，其結果與 3.1 節到 3.3 節的理論分析一致。

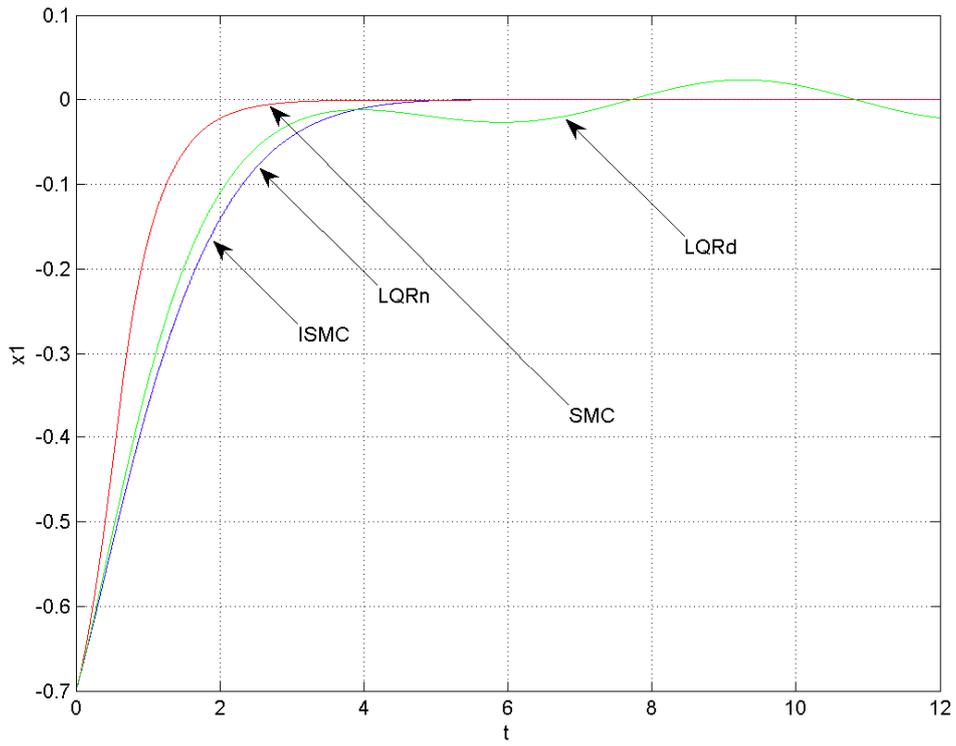


圖 3.2 衛星姿態穩健性控制其狀態變數 x_1 之時間響應比較圖

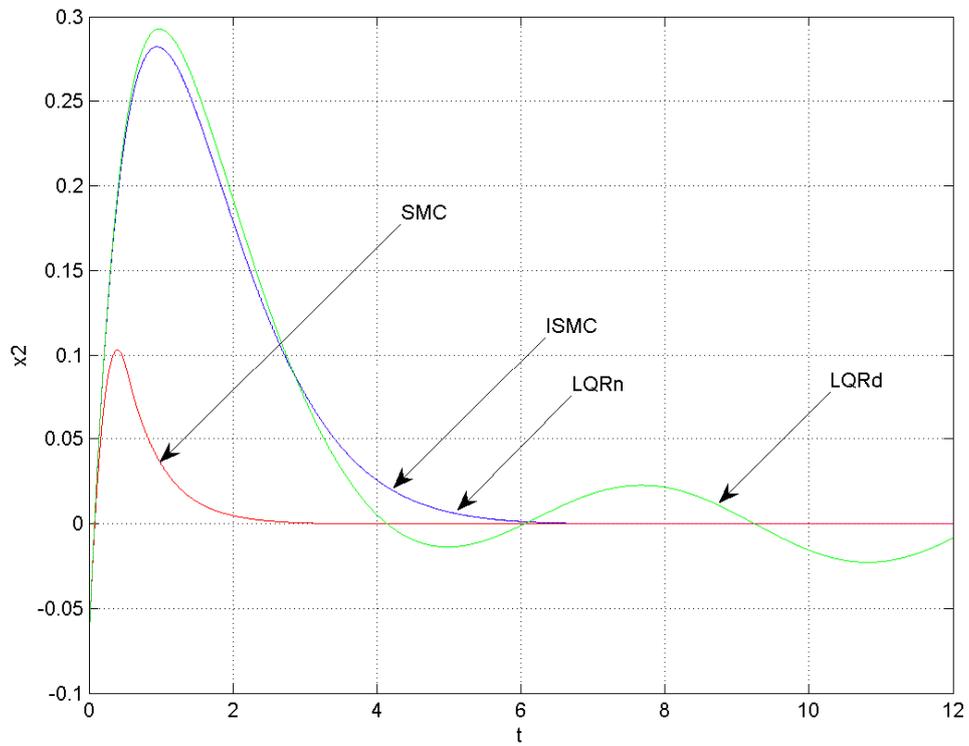


圖 3.3 衛星姿態穩健性控制其狀態變數 x_2 之時間響應比較圖

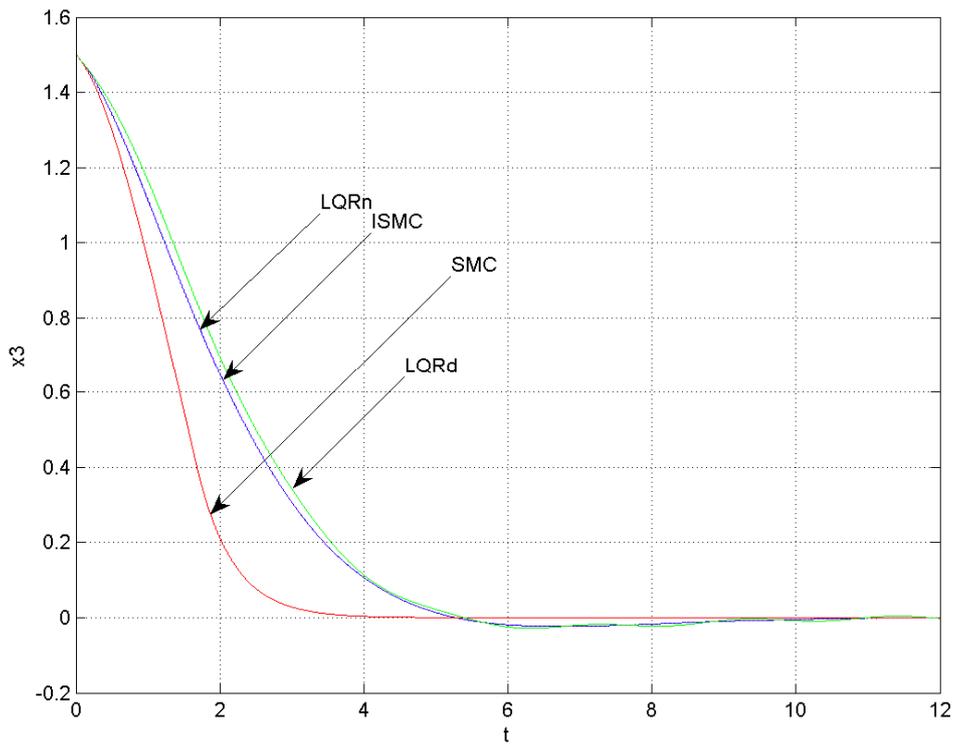


圖 3.4 衛星姿態穩健性控制其狀態變數 x_3 之時間響應比較圖

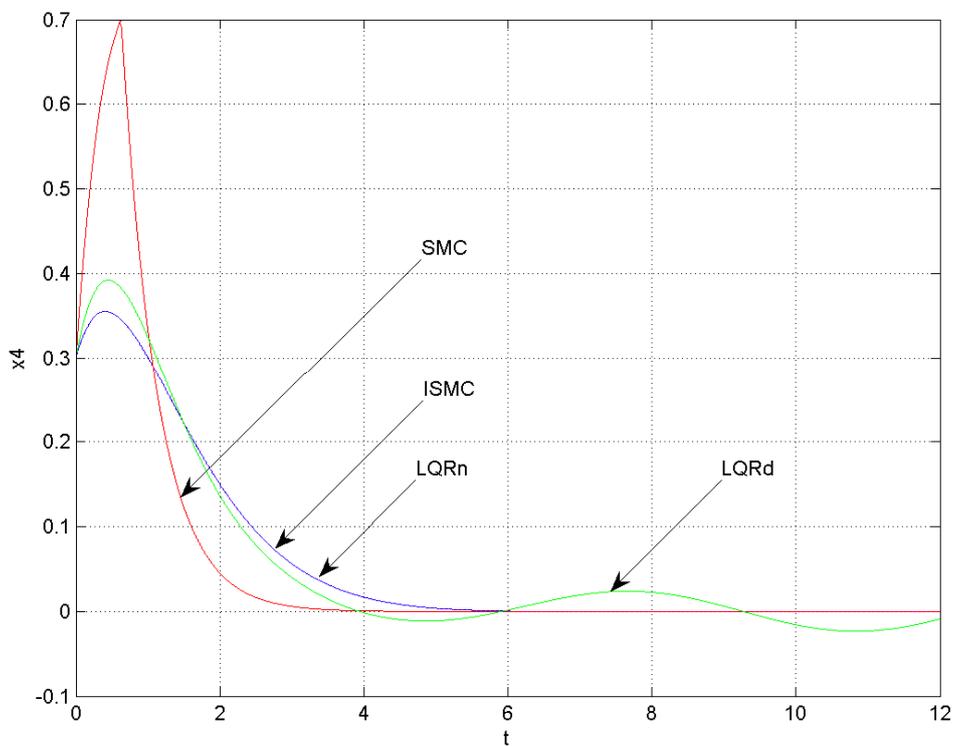


圖 3.5 衛星姿態穩健性控制其狀態變數 x_4 之時間響應比較圖

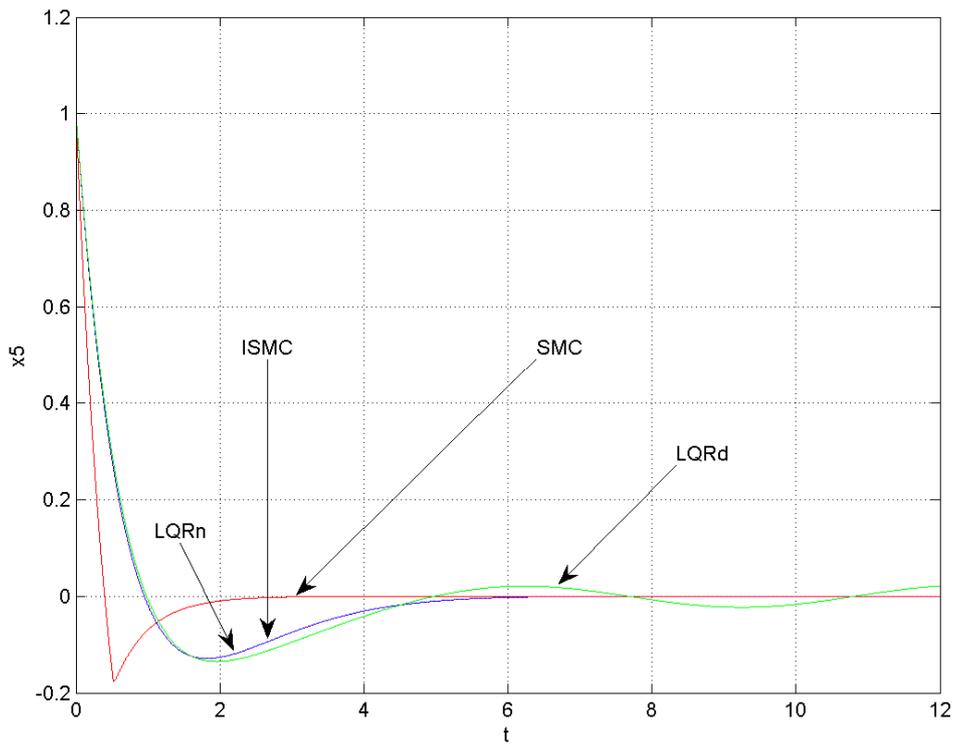


圖 3.6 衛星姿態穩健性控制其狀態變數 x_5 之時間響應比較圖

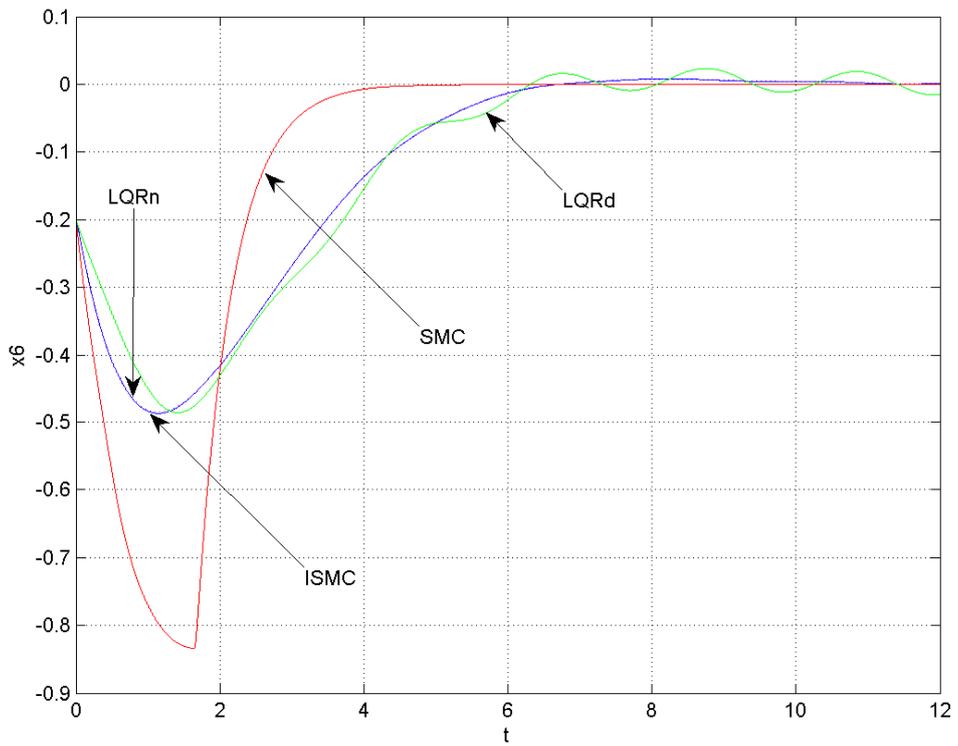


圖 3.7 衛星姿態穩健性控制其狀態變數 x_6 之時間響應比較圖

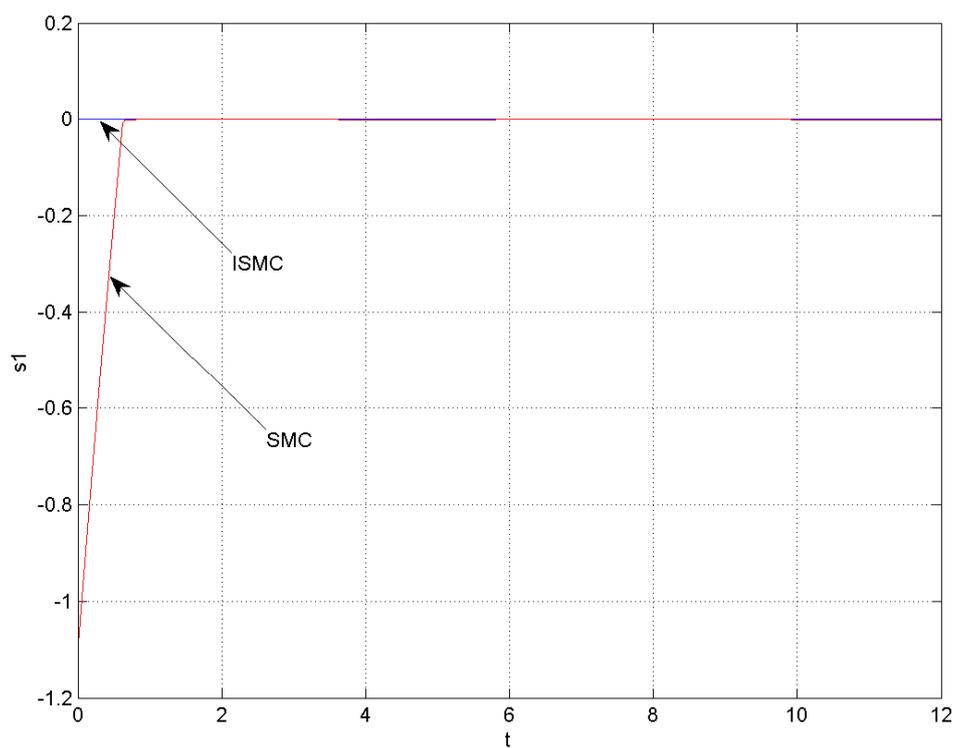


圖 3.8 衛星姿態穩健性控制其順滑變數 s_1 之時間響應比較圖

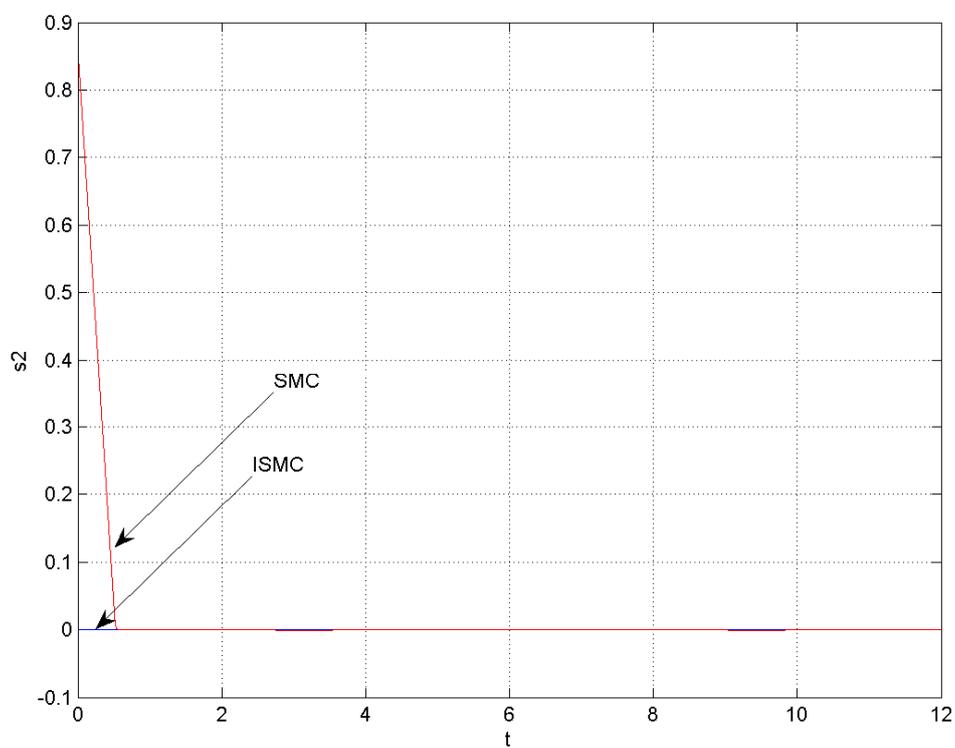


圖 3.9 衛星姿態穩健性控制其順滑變數 s_2 之時間響應比較圖

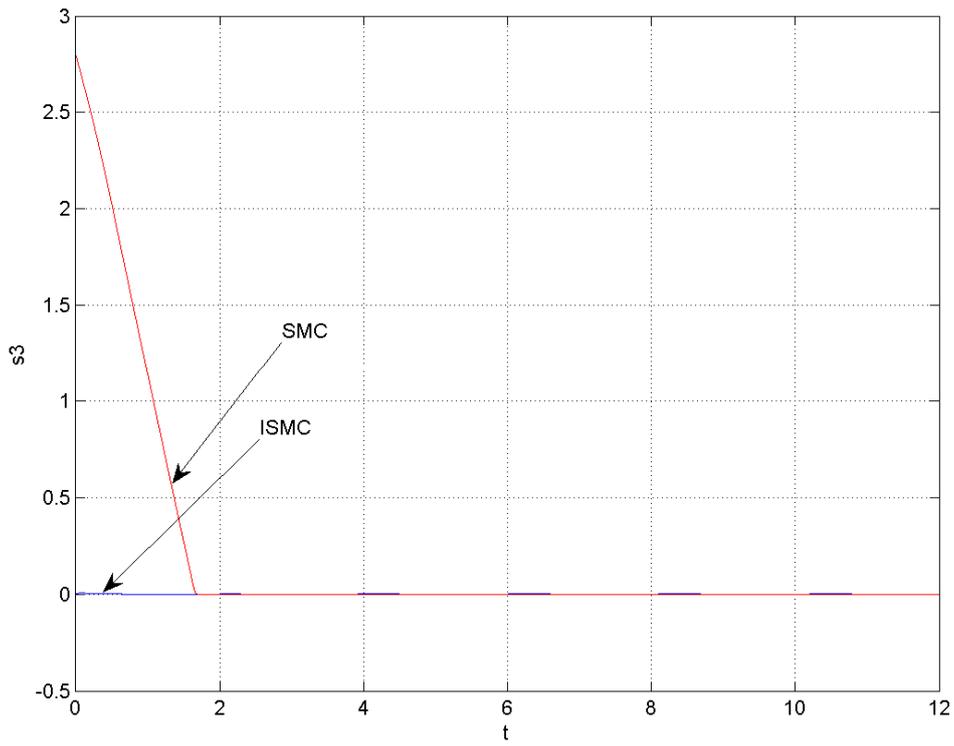


圖 3.10 衛星姿態穩健性控制其順滑變數 s_3 之時間響應比較圖

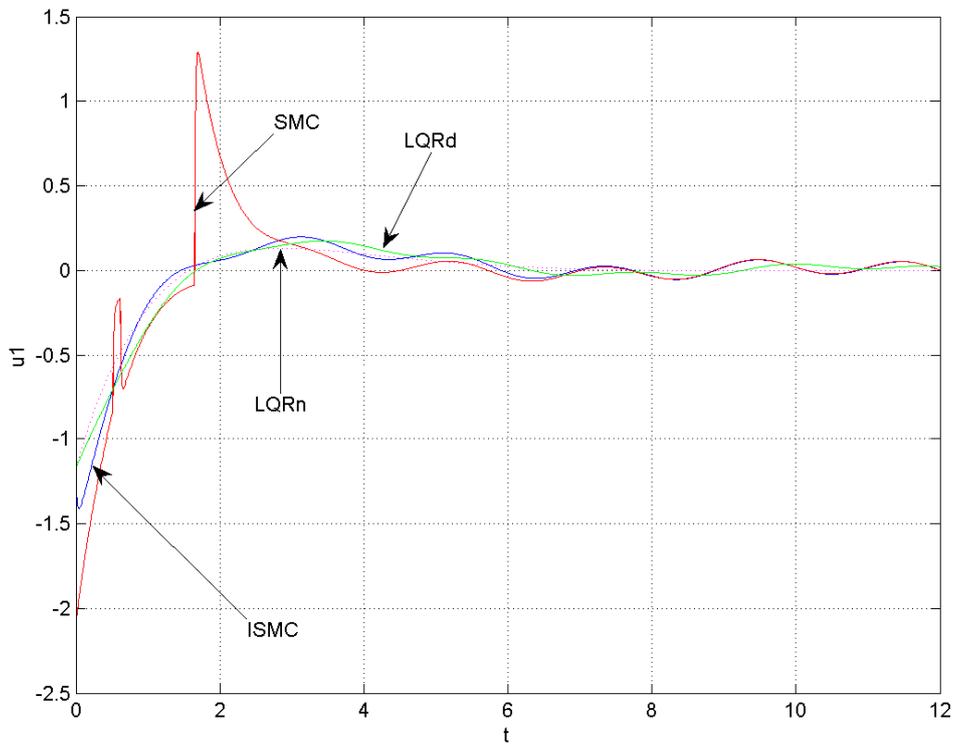


圖 3.11 衛星姿態穩健性控制其控制輸入 u_1 之時間響應比較圖

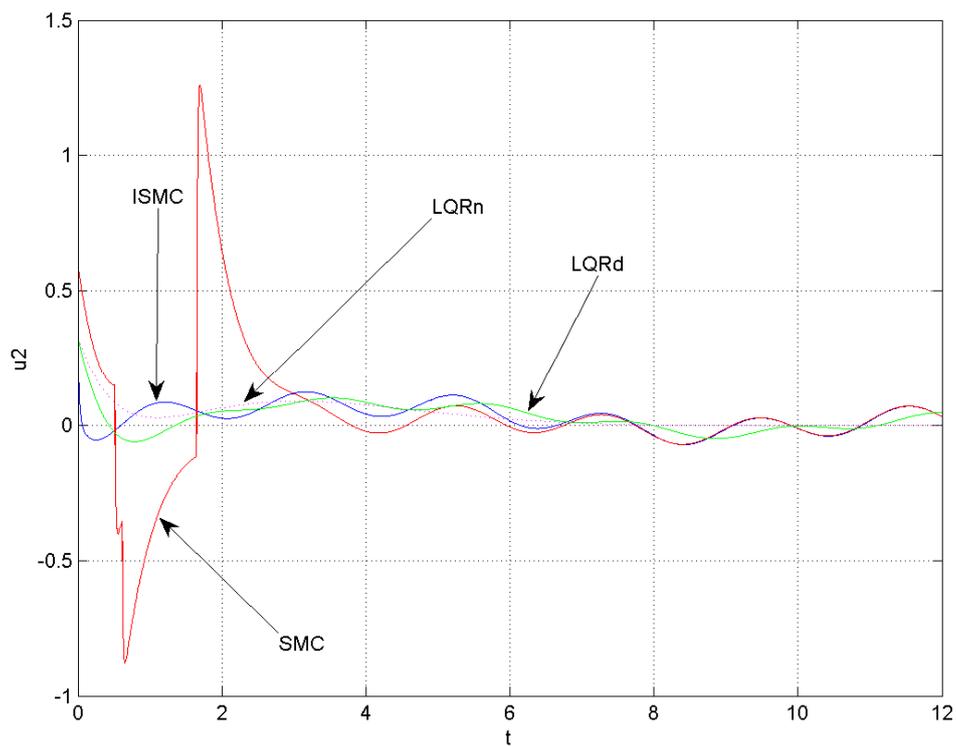


圖 3.12 衛星姿態穩健性控制其控制輸入 u_2 之時間響應比較圖

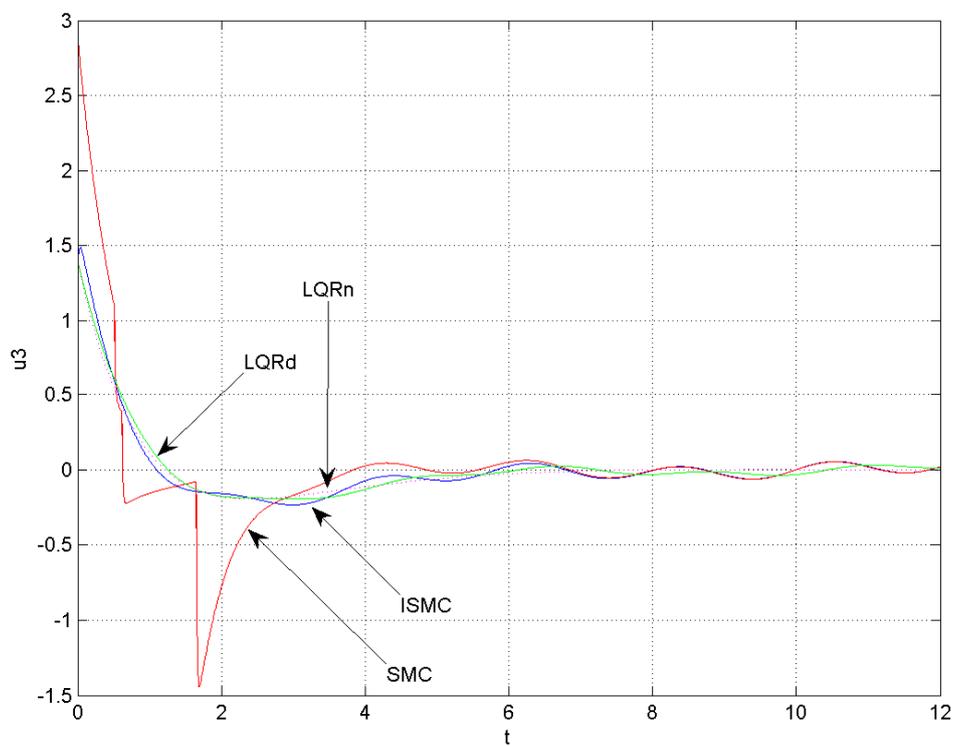


圖 3.13 衛星姿態穩健性控制其控制輸入 u_3 之時間響應比較圖

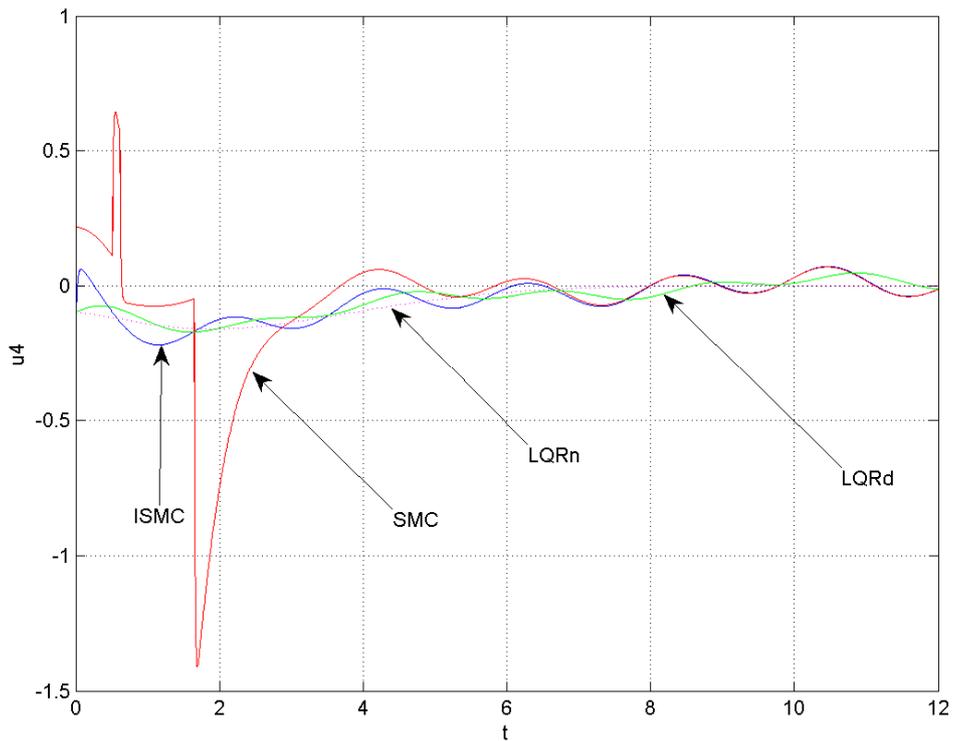


圖 3.14 衛星姿態穩健性控制其控制輸入 u_4 之時間響應比較圖

表 3.2 衛星姿態穩健性控制其效能比較表

控制方式	性能指標(performance index)					收斂時間 (convergence time)
	穩定度	$\int \mathbf{u}^T \mathbf{u}$	$\int \mathbf{x}^T \mathbf{x}$	$\int \mathbf{u}^T \mathbf{u} + \int \mathbf{x}^T \mathbf{x}$	$\ \mathbf{u}\ _\infty$	
ISM C	穩定	1.6960	4.2780	5.9740	1.4860	8.921
SM C	穩定	5.5961	3.6366	9.2327	2.8950	3.853
LQRn	穩定	1.2272	4.2751	5.5023	1.3968	8.973
LQRd	不穩定	X	X	X	X	X

第4章

衛星姿態可靠度控制之應用

近年來，可靠度控制(reliable control)或容錯控制(fault tolerance control)的研究已受到廣泛的關注，許多相關的研究也如雨後春筍般地被提出[1],[2]-[10]，一般來說，維修及保養服務無法即時地提供，這也使得可靠度控制變的至關重要。可靠度控制主要的目的為設計一個適當的控制律使得閉迴路系統能夠忍受某些控制元件不正常的運作，並且擁有可接受的系統性能以及保持其穩定度。現今已經有許多設計可靠度控制的方法被提出，在這些方法包含了線性矩陣不等式法(linear matrix inequality based approach)[6]，代數 Riccati 方程式法(algebraic Riccati equation based approach)[8]，互質分解法(coprime factorization approach)[9]，Hamilton-Jacobi 法(Hamilton-Jacob based approach)[3][10]，順滑模控制法(sliding mode control based approach)[2][4][5]，而上述的這些方法中，只有 Hamilton-Jacobi 法與順滑模控制法是處理非線性系統的可靠度控制問題，但是 Hamilton-Jacobi 法的設計主要是一種最佳控制的技巧(optimal strategy)，其可靠度控制律的設計不可避免地會與 Hamilton-Jacobi 方程式(Hamilton-Jacobi equation, HJ equation)的解有關係，一般來說，Hamilton-Jacobi 方程式是難以求解的，雖然可透過冪級數[11]的方法並使用計算機計算，可能可以降低求解的困難度，但其所得的解仍然為近似解，且會因系統變得複雜而造成計算快負擔快速地增加；相對地，順滑模控制法設計可靠度控制律時並不需求解 Hamilton-Jacobi 方程式，且同時可保有 2.1 節所述之順滑模控制的優點[1][4][5]。另外，在可靠度控制的議題上，主要可分為兩種設計方式，一種是被動式(passive)可靠度控制，另一種是主動式

(active)可靠度控制。被動式可靠度控制必須先劃分出不會故障和可能會故障的促動器(actuator)，可是實際上在故障發生前我們是很難得知這方面的資訊的。而主動式可靠度控制可以依靠錯誤偵測與診斷機制(fault detection and diagnosis, FDD)來監視故障的發生，有鑑於此，在本論文中我們選用主動式可靠度控制為主，而之後所談論的可靠度控制律設計皆是基於主動式可靠度控制設計。

在第二章我們可知道積分型順滑控制比起順滑模控制擁有較多的優點，以及 T-S 模糊模型用於近似非線性系統時之好處，在第三章中，我們已對於基於 T-S 模糊模型並使積分型順滑控制來作為控制律設計的方式進行討論，並考慮其對於系統干擾的穩健性分析，接下來，誠如前面所述之可靠度控制的重要性，在本章中我們進一步將基於 T-S 模糊模型並使積分型順滑控制來作為控制律設計的方式延伸到可靠度控制律設計上面，並且進一步探討其穩健性。同樣地，我們也會與基於 T-S 模糊模型並使順滑控制來作為可靠度控制律設計的方式[1]做比較。

在本章中，我們將在 4.1 節定義所探討的系統，以及控制目標，接著，在 4.2 節中，我們將敘述如何建立 T-S 模糊模型，而在 4.3 節我們討論如何利用第 2 章中所提到的順滑模控制與積分型順滑模控制兩種控制方式，來進行控制律設計，最後 4.4 節，我們以衛星姿態控制的模型為例子來進行模擬，並討論分析兩種控制律的模擬結果。

4.1 問題描述

我們考慮下列非線性二階控制系統(second-order nonlinear control system)如下

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u} + \bar{\mathbf{d}}\end{aligned}\quad (4.1)$$

其中 $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ ， $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ ， $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ 為系統狀態， $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ 為控制輸入，

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ 以及 $G(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 皆為平滑函數， $\bar{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^n$ 代表匹配型(matched type)的系統之不確定性(uncertainties)或外在干擾(external disturbances)， $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ，即 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ 為其平衡點(equilibrium point)。在可靠度控制的問題下，一般來說，在所有促動器皆正常運時，即促動器發生故障之前，控制工程師可選擇任何的 control 技術來完成控制目標，因此，在促動器發生故障之前，我們選用 3.3.1 節與 3.3.2 節所討論的順滑模控制以及積分型順滑模控制做為控制方式，當促動器被偵測與診斷出其發生故障後，則控制律會被重組成可靠度控制律，使得閉迴路系統仍然會達到我們想要的控制目標。在討論主動式可靠度控制律設計時，我們會先假設系統由錯誤偵測與診斷機制(fault detection and diagnosis, FDD)的資訊中得知故障的促動器是哪些部分，為了區分正常和故障的促動器，我們以 H 代表正常運作的部分，而 F 代表故障的部分，因此系統(4.1)式可被改寫成

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G_H(\mathbf{x})\mathbf{u}_H + G_F(\mathbf{x})\mathbf{u}_F + \bar{\mathbf{d}}\end{aligned}\quad (4.2)$$

其中 $\mathbf{u}_H \in \mathbb{R}^k$ 為正常運作的控制輸入， $\mathbf{u}_F \in \mathbb{R}^{m-k}$ 為故障的控制輸入， $G_H(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ， $G_F(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times (m-k)}$ ， $G(\mathbf{x}) = [G_H(\mathbf{x}) : G_F(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ， $m \geq k$ 。為了幫助討論，我們需要下列引理，同時我們考慮系統擁有下列假設。

引理 4.1 : [36]

令 $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ， $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 為兩個矩陣其中 $\text{rank}(Q_1) = n$ ，則

- (iv) $\|Q_1\|_2 = \sigma_{\max}(Q_1)$
- (v) $\|Q_1^+\|_2 = \|Q_1^T(Q_1 Q_1^T)^{-1}\|_2 = 1/\sigma_{\min}(Q_1)$
- (vi) $\sigma_{\min}(Q_1 + Q_2) \geq \sigma_{\min}(Q_1) - \sigma_{\max}(Q_2)$

其中 $\sigma_{\max}(\cdot)$ ， $\sigma_{\min}(\cdot)$ 與 $(\cdot)^+$ 分別代表矩陣的最大奇異值(maximum singular value)，最小奇異值(minimum singular value)與廣義反矩陣(pseudo-inverse matrix)。

假設 4.1 :

對任何狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ ，系統(4.2)的矩陣 $G_H(\mathbf{x})$ 為列滿秩(full row rank)，且 $\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x})) = \gamma_0 > 0$ 。

假設 4.2 :

系統(4.2)滿足 $m \geq k \geq n$ ，亦即正常運作的控制輸入 $\mathbf{u}_H \in \mathbb{R}^k$ 的維度(dimension)大於等於系統狀態 $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ 的維度。

附註 4.1 :

雖然假設 4.1 已經暗指了動態系統(4.2)滿足 $m \geq k \geq n$ 之條件，但我們仍必須建立假設 4.2，因當動態系統(4.2)式滿足假設 4.2，即條件 $k \geq n$ ，且同時擁有假設 4.1，才能使得後續我們將會 4.3.1 節討論利用 T-S 模糊模型近似動態系統(4.2)式後的順滑模控制設計時，其等效控制(equivalent control)存在[24]，並且，此條件也會是之後在 4.3.2 節討論利用 T-S 模糊模型近似動態系統(4.2)式後的積分型順滑模控制設計時，被能夠使得我們成功設計控制器的關鍵條件。

根據假設 4.1，以及假設藉由錯誤偵測與診斷機制我們估測到故障部分的促動器的輸出為 $\hat{\mathbf{u}}_F$ ，而估測誤差為 $\Delta\mathbf{u}_F$ ，則我們可以進一步將(4.2)式整理成

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G_H(\mathbf{x})(\mathbf{u}_H + \mathbf{d}) + G_F(\mathbf{x})(\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F)\end{aligned}\quad (4.3)$$

其中 $\mathbf{d} = G_H(\mathbf{x})\bar{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^m$ 。

在本章中我們主要的目的為，考慮系統存在著系統不確定性以及外在干擾的狀況下，設計一個控制律使得當系統的某些促動器發生故障時依然能夠利用剩下正常運作的促動器來完成穩定的任務，也就是可靠度控制設計。而在此我們也會比較基於 T-S 模糊模型下之順滑模控制與基於 T-S 模糊模型下之積分型順滑模控制兩者的可靠度控制，並且透過特定的性能指標，來分析比較其兩者之性能。

4.2 建立 T-S 模糊模型

在我們建立 T-S 模糊模型來近似非線性系統(4.3)式之前，我們將非線性系統(4.3)式的漂移項(drift term) $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 以及控制矩陣 $G(\mathbf{x})$ 化成下列型式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \bar{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (4.4)$$

$$G_H(\mathbf{x}) = \bar{B}_H(\mathbf{x}) \quad (4.5)$$

$$G_F(\mathbf{x}) = \bar{B}_F(\mathbf{x}) \quad (4.6)$$

接著，選取 p 個操作點 $\mathbf{x}_i^0, i = 1, \dots, p$ ，其中操作點與其各數 p 可由我們自己決定，且操作點的數目即為建立 T-S 模糊模型時的規則數目。我們把各個操作點代入 $\bar{A}(\mathbf{x})$ 和 $\bar{B}_H(\mathbf{x})$ 以及 \bar{B}_F 後可得各個操作點所對應之線性系統的系統矩陣如下

$$\bar{A}(\mathbf{x})|_{(\mathbf{x}_i^0)} = A_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (4.7)$$

$$\bar{B}_H(\mathbf{x})|_{(\mathbf{x}_i^0)} = B_{Hi}, \quad i = 1, \dots, p \quad (4.8)$$

$$\bar{B}_F(\mathbf{x})|_{(\mathbf{x}_i^0)} = B_{Fi}, \quad i = 1, \dots, p \quad (4.9)$$

最後，若我們使用 p 條規則建立 T-S 模糊模型並用其來近似原非線性系統時，則可把 T-S 模糊模型表示成

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x}) [A_i \mathbf{x} + B_{Hi} \mathbf{u}_H + B_{Fi} (\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta \mathbf{u}_F)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中 $\alpha_i(\mathbf{x})$ 為權重(weighting)其滿足 $\sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x}) = 1$ 且 $\alpha_i(\mathbf{x}) \geq 0$ ，因此，最後我們利用 T-S 模糊模型近似非線性系統(4.3)式後的動態系統模型可表示成

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= A(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f} + [B_H(\mathbf{x}) + \Delta B_H](\mathbf{u}_H + \mathbf{d}) \\ &\quad + [B_F(\mathbf{x}) + \Delta B_F](\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta \mathbf{u}_F) \end{aligned} \quad (4.11)$$

其中 $A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x}) A_i \mathbf{x}$ ， $B_H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x}) B_{Hi}$ ， $B_F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x}) B_{Fi}$ ， $\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x}) A_i \mathbf{x}$ ， $\Delta B_H = G_H(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x}) B_{Hi}$ ， $\Delta B_F = G_F(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^p \alpha_i(\mathbf{x}) B_{Fi}$ ，而 $\Delta \mathbf{f}$ 與 ΔB_H 以及 ΔB_F 為利用 T-S 模糊模型來近似非線性系統(4.3)

式時所產生的額外模型誤差。

另外，根據[31]可知 T-S 模糊模型可任意的近似原始的非線性系統，即在我們所考慮的近似誤差範圍下，對應的可找到一 T-S 模糊模型並用它來近似原始的非線性系統時，所產生的近似誤差會在我們所考慮的範圍內，因此我們可引入下列假設。

假設 4.3：

設存在常數 $\gamma > 0$ ，其中 $\gamma < \frac{\gamma_0}{2}$ ，使得 $\|\Delta B\|_2 \leq \gamma$ ，其中 $\Delta B = [\Delta B_H : \Delta B_F]$ ，而 γ_0 為假設 4.1 所定義之值。

由假設 4.1 可知對任何的狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ 成立 $\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x})) = \gamma_0 > 0$ ，再由假設 4.3 以及引理 4.1，我們可得 $\sigma_{\min}(B_H(\mathbf{x})) = \sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x}) - \Delta B_H) \geq \sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x})) - \|\Delta B_H\|_2 = \sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x})) - \|\Delta B_H\|_2$ ，又因為 $\Delta B = [\Delta B_H : \Delta B_F]$ ，即 ΔB_H 為 ΔB 的部分矩陣，故 $\|\Delta B\|_2 \geq \|\Delta B_H\|_2$ ，即 $\|\Delta B_H\|_2 \leq \gamma$ ，我們可得到 $\sigma_{\min}(B_H(\mathbf{x})) \geq \sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x})) - \|\Delta B_H\|_2 \geq \gamma_0 - \gamma \geq \frac{\gamma_0}{2} > 0$ ，因此 $\text{rank}(B_H(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times k}) = n$ ，即 $B_H(\mathbf{x})$ 為列滿秩。

4.3 主動式可靠度控制律設計

主動式可靠度控制需要仰賴一個重要的機構，即為錯誤偵測與診斷機制 (fault detection and diagnosis, FDD)，我考慮系統(4.11)式，並且假設藉由錯誤偵測與診斷機制我們估測到故障部分的促動器的輸出為 $\hat{\mathbf{u}}_F$ ，而估測誤差為 $\Delta \mathbf{u}_F$ ，那麼實際的動態系統可以表式成

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_2 = & A(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{f} + [B_H(\mathbf{x}) + \Delta B_H](\mathbf{u}_H + \mathbf{d}) \\ & + [B_F(\mathbf{x}) + \Delta B_F](\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F)\end{aligned}\quad (4.12)$$

其中 $\hat{\mathbf{u}}_F \in \mathbb{R}^{m-k}$ ， $\Delta\mathbf{u}_F \in \mathbb{R}^{m-k}$ 。

4.3.1 順滑模可靠度控制律設計

考慮動態系統(4.12)式，透過 2.1 節所談論的順滑模控制設計方式可知，首先需要設計順滑面，使得閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上時，會因為順滑面的特性造成閉迴路系統為漸進穩定。參考[1][5]，在此我們設計順滑面為

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_2 + M\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

其中 $M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 為正定矩陣(positive definite matrix)，根據 2.1 節的討論我們可知， $\phi(\mathbf{x}_1) = -M\mathbf{x}_1$ 且 $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 。觀察(4.13)式可知，當閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ 時，我們可得 $\mathbf{x}_2 = \phi(\mathbf{x}_1) = M\mathbf{x}_1$ ，則(4.12)式的前 n 階子系統

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 = -M\mathbf{x}_1 \quad (4.14)$$

為漸進穩定，亦即 $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{0}$ 當 $t \rightarrow \infty$ 。而又 $\mathbf{s} = \mathbf{x}_2 + M\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ ，故由 $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{0}$ 當 $t \rightarrow \infty$ ，我們可得 $\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{0}$ 當 $t \rightarrow \infty$ ，亦即閉迴路系統為漸進穩定。

接著設計順滑模可靠度控制律(sliding mode control law) $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ ，使得閉迴路系統軌在有限時間內接觸到我們預先設計的順滑面並保持在順滑面上。首先我們將(4.13)式中的順滑變數 $\mathbf{s} = \mathbf{x}_2 + M\mathbf{x}_1$ 對時間 t 取導函數並將(4.12)式代入後可得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的動態系統為

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}} = & A(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{f} + [B_H(\mathbf{x}) + \Delta B_H](\mathbf{u}_H + \mathbf{d}) \\ & + [B_F(\mathbf{x}) + \Delta B_F](\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F) + M\mathbf{x}_2\end{aligned}\quad (4.15)$$

從 4.2 節的討論我們知道 $B_H(\mathbf{x})$ 為列滿秩，根據 2.1 節我們可設計順滑模控制律 $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ 中的 \mathbf{u}_{H0} 為

$$\mathbf{u}_{H0} = -B_H^+(\mathbf{x})[M\mathbf{x}_2 + A(\mathbf{x}) + B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F] \quad (4.16)$$

我們已知(4.15)中的 $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ ，因此我們將(4.15)代入(3.10)式可得

$$\dot{\mathbf{s}} = [B_H(\mathbf{x}) + \Delta B_H] \mathbf{u}_{H1} + \Delta_M \quad (4.17)$$

其中 $\Delta_M = \Delta \mathbf{f} + [B_H(\mathbf{x}) + \Delta B_H] \mathbf{d} + \Delta B_H \mathbf{u}_{H0} + B_F(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{u}_F + \Delta B_F(\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta \mathbf{u}_F)$ 。為了完成控制律之設計，我們引進下列假設。

假設 4.4：

$\|\Delta_M\|_2 \leq \rho_3(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}, \forall t \in \mathbb{R}$ ， $\rho_3: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為一連續的非負函數。

雖然假設 4.4 的不等式當中需要 \mathbf{u}_{H0} 的資訊，但因 $\|\Delta \mathbf{f}\|_2$ ， $\|\Delta B_H\|_2$ ， $\|\Delta B_F\|_2$ 以及 $\|\Delta \mathbf{u}_F\|_2$ 的上界(upper bound)可離線估測(offline estimation)，並且我們也可以估計干擾的上界 $\|\mathbf{d}\|_2$ ，因此當計算完 \mathbf{u}_{H0} 後我們便可獲得 $\rho_3(\mathbf{x}, t)$ 之值。

同樣地，根據 2.1 節之討論，假設 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) \neq \mathbf{0}$ ，我們可設計順滑模控制律 $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ 中的 \mathbf{u}_{H1} 為下列所示

$$\mathbf{u}_{H1} = -\mu(\mathbf{x}, t) B_H^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s}) \quad (4.18)$$

其中 $\mu(\mathbf{x}, t) \geq \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0 - (1 + \sqrt{n})\gamma} [\eta + \rho_3(\mathbf{x}, t)]$ ， $\text{sgn}(\mathbf{s}) = [\text{sgn}(s_1), \text{sgn}(s_2) \cdots, \text{sgn}(s_n)]^T$ ，

$\eta > 0 \in \mathbb{R}$ 為待設計的常數，因此，我們將(4.18)式代入(4.17)式可得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的閉迴路動態系統變為

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mu(\mathbf{x}, t) \text{sgn}(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{x}, t) \Delta B_H B_H^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s}) + \Delta_M \quad (4.19)$$

為了證明 \mathbf{u}_{H1} 設計成(4.18)之可行性，我們透過 Lyapunov 理論，令(4.19)式的可能的 Lyapunov 函數(Lyapunov function candidate)為 $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ ，則 V 對時間 t 的導函數為

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \quad (4.20)$$

我們將(4.19)式代入(4.20)式可得

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -\mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}^T \Delta B_H B_H^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{s}^T \Delta_M \quad (4.21)$$

利用假設 4.1 到假設 4.4 與關係式 $\mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s}) = s_1 \cdot \text{sgn}(s_1) + \cdots s_n \cdot \text{sgn}(s_n) = |s_1| + \cdots |s_n| = \|\mathbf{s}\|_1$ ，向量範數(norm)不等式 $\|\mathbf{s}\|_1 \geq \|\mathbf{s}\|_2$ ，以及對任意矩陣 A 成

立 $\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_2 \|\mathbf{x}\|_2$ 之關係式，可將(4.21)整理成如下

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -\mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}^T \Delta B_H B_H^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{s}^T \Delta_M \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 - \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}^T \Delta B_H B_H^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s}) + \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|\Delta_M\|_2 \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \|-\mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}\|_2 \cdot \|\Delta B_H B_H^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s})\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|\Delta_M\|_2 \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \|\mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}\|_2 \cdot \|\Delta B_H B_H^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s})\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_3(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|\Delta B_H\|_2 \cdot \|B_H^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s})\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_3(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) \gamma \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|B_H^+(\mathbf{x}) \text{sgn}(\mathbf{s})\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_3(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) \gamma \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|B_H^+(\mathbf{x})\|_2 \cdot \|\text{sgn}(\mathbf{s})\|_2 + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_3(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) \gamma \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|B_H^+(\mathbf{x})\|_2 \sqrt{n} + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_3(\mathbf{x}, t) \quad (4.22)
\end{aligned}$$

另外，因 $B_H(\mathbf{x})$ 為列滿秩，故由引理 4.1 可知

$$\begin{aligned}
\|B_H^+(\mathbf{x})\|_2 &= \|(G_H(\mathbf{x}) - \Delta B_H)^+\|_2 \\
&= \frac{1}{\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x}) - \Delta B_H)} \\
&\leq \frac{1}{\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x})) - \|\Delta B_H\|_2} \\
&= \frac{1}{\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x})) - \|\Delta B_H\|_2} \quad (4.23)
\end{aligned}$$

將(4.23)式代入(4.22)式可得

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) \gamma \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \|B_H^+(\mathbf{x})\|_2 \sqrt{n} + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_3(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) \gamma \|\mathbf{s}\|_2 \left[\frac{1}{\sigma_{\min}(G(\mathbf{x})) - \|\Delta B_H\|_2} \right] \sqrt{n} + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_3(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -\mu(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{s}\|_2 + \mu(\mathbf{x}, t) \gamma \|\mathbf{s}\|_2 \left[\frac{1}{\gamma_0 - \gamma} \right] \sqrt{n} + \|\mathbf{s}\|_2 \rho_3(\mathbf{x}, t) \\
&= \left\{ -\mu(\mathbf{x}, t) \left[\frac{\gamma_0 - (1 + \sqrt{n})\gamma}{\gamma_0 - \gamma} \right] + \rho_3(\mathbf{x}, t) \right\} \|\mathbf{s}\|_2 \leq -\eta \|\mathbf{s}\|_2 \quad (4.24)
\end{aligned}$$

根據 2.1 節的討論可知，若 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) \neq \mathbf{0}$ 則 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t))$ 必在有限時間 $t = \|\mathbf{s}(\mathbf{x}(0))\|_2 / \eta$ 之內收斂到 $\mathbf{0}$ ，這也代表著閉迴路系統軌跡必在有限時間 $t = \|\mathbf{s}(\mathbf{x}(0))\|_2 / \eta$ 內接觸到順滑面上並保持在順滑面上。經由以上設計與分析，最後我們提出下列引理。

引理 4.2 : [1]

假設系統(4.1)的某些促動器發生故障之情形，且假設藉由錯誤偵測與診斷機制我們估測到故障部分的促動器的輸出為 $\hat{\mathbf{u}}_F$ ，而估測誤差為 $\Delta\mathbf{u}_F$ ，並且利用 T-S 模糊模型近似後得其近似之動態系統(4.12)式，當假設 4.1 到假設 4.4 同時成立時，則含控制輸入發生故障的(4.1)式在下列(4.25)控制律的控制下，原點對於閉迴路系統為漸進穩定。

$$\mathbf{u}_H = -B_H^+(\mathbf{x})[M\mathbf{x}_2 + A(\mathbf{x}) + B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F + \mu(\mathbf{x}, t)\text{sgn}(\mathbf{s})] \quad (4.25)$$

其中 $\mu(\mathbf{x}, t) \geq \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0 - (1 + \sqrt{n})\gamma} [\eta + \rho_3(\mathbf{x}, t)]$ 。

4.3.2 積分型順滑模可靠度控制律設計

考慮動態系統(4.12)式，透過第 2.2 節所談論的積分型順滑模控制設計方式可知，我們可設計順滑面為

$$\mathbf{s} = \bar{D} \left\{ \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^t [\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(\tau)) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}(\tau))\mathbf{u}_{H0}] d\tau \right\} = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

其中 \bar{D} 滿足假設 2.5， $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t) \mathbf{x}_2^T(t)]^T$ ， $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) = [0 : B_H(\mathbf{x})^T]^T$ ， $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}_2^T(t) A(\mathbf{x})^T]^T$ 。我們知道，當 $k \leq 2n$ 時 $\bar{D} \in \mathbb{R}^{k \times 2n}$ ，當 $k > 2n$ 時 $\bar{D} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ，不失一般性可以令矩陣 $\bar{D} = [D_1 : D]$ ，其中當 $k \leq 2n$ 時 $D_1 \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ， $D \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ，而當 $k > 2n$ 時 $D_1 \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ ， $D \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ ，接著再將(4.26)式中的順滑變數 $\mathbf{s} = \bar{D} \left\{ \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^t [\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(\tau)) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}(\tau))\mathbf{u}_{H0}] d\tau \right\}$ 對時間 t 取導函數並將(4.12)式帶入如下

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \bar{D} \{ \dot{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t)) - \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}_{H0} \} \\ &= \bar{D} \{ [\dot{\mathbf{x}}_1^T(t) \dot{\mathbf{x}}_2^T(t)]^T - [\mathbf{x}_2^T(t) A(\mathbf{x})^T]^T - \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}_{H0} \} \\ &= \bar{D} \{ [\mathbf{x}_2^T(t) \dot{\mathbf{x}}_2^T(t)]^T - [\mathbf{x}_2^T(t) A(\mathbf{x})^T]^T - [0 : B_H(\mathbf{x})^T]^T \mathbf{u}_{H0} \} \\ &= \bar{D} \{ [0 \dot{\mathbf{x}}_2^T(t) - A(\mathbf{x})^T]^T - [0 : B_H(\mathbf{x})^T]^T \mathbf{u}_{H0} \} \\ &= D \{ \dot{\mathbf{x}}_2(t) - A(\mathbf{x}) - B_H(\mathbf{x})\mathbf{u}_{H0} \} \end{aligned} \quad (4.27)$$

我們可發現，順滑變數 \mathbf{s} 所對應的動態系統(4.27)式，即順滑變數 \mathbf{s} 沿著閉迴路系統軌跡對時間 t 的變化率與矩陣 D_1 並無關，因此在考慮(4.12)式時我們可以將順滑面的設計簡化成如下

$$\mathbf{s} = D \left\{ \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_2(t_0) - \int_{t_0}^t [A(\mathbf{x}(\tau)) + B_H(\mathbf{x}(\tau))\mathbf{u}_{H0}] d\tau \right\} = \mathbf{0} \quad (4.28)$$

其中 D 滿足假設 2.5，即當 $k \leq n$ 時， $D \in \mathbb{R}^{k \times n}$ 使得對任何狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ 矩陣 $DB_H(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ 為可逆，當 $k > n$ 時， $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得對任何狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ 矩陣 $DB_H(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 為列滿秩，但由假設 4.2 以及 4.2 節建立 T-S 模糊模型時的過程知道，我們現在僅考慮系統(4.12)式擁有 $k \geq n$ 之條件，此條件可用來幫助我們設計(4.12)式這樣子形式下的非線性系統積分型順滑可靠度模控制律。

接著設計積分型順滑模可靠度控制律(integral-type sliding mode control law) $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ ，根據 2.2 節之討論可知，設計積分型滑模可靠度控制律 $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ 中的 \mathbf{u}_{H0} 時必須滿足假設 2.6，因此在此我們引入下列假設。

假設 4.5：

存在一個無干擾控制律 \mathbf{u}_{H0} 使得(4.12)式的無干擾系統

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= A(\mathbf{x}) + B_H(\mathbf{x})\mathbf{u}_H \end{aligned} \quad (4.29)$$

在 \mathbf{u}_{H0} 的控制下，原點對於閉迴路系統為漸進穩定。

因為 \mathbf{u}_{H0} 的設計方式存在著自由度，我們定義二次成本函數(performance index)如下[37]

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}_H^T R \mathbf{u}_H) dt \quad (4.30)$$

其中 $Q = Q^T \geq 0$ ， $R = R^T > 0$ ，根據[37]可知，我們可在(4.30)式這個二次成本函數下使用線性二次調節法(linear quadratic regulation, LQR)來對(4.12)式的無干擾系統進行平行分配補償之設計，即設計每一條規則所對應的回授矩陣

K_i (feedback gain matrix)，再透過建立 T-S 模糊模型來近似原非線性系統時所使用的權重 $\alpha_i(\mathbf{x})$ 來得到 \mathbf{u}_{H0} ，即我們最後可得 \mathbf{u}_{H0} 為

$$\mathbf{u}_{H0} = -\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}) K_i \mathbf{x}(t) \quad (4.31)$$

此種 \mathbf{u}_{H0} 的設計方式為一種次最佳化(sub-optimal)的設計方式[37]，當 \mathbf{u}_{H0} 透過此方法設計完成並帶入(4.29)式的 \mathbf{u} 之後，我們僅需要利用引理 2.1，並透過線性矩陣不等式的求解工具，如 MATLAB LMI 工具箱(MATLAB LMI tool box)來對矩陣 P 進行求解，即可確定(4.29)式在 \mathbf{u}_{H0} 的控制下之穩定性。我們將(4.28)式對時間 t 取導函數並將(4.12)式以及已經設計完成的 \mathbf{u}_{H0} 代入了，則我們可得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的動態系統為

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} = & D\{A(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{f} + [B_H(\mathbf{x}) + \Delta B_H](\mathbf{u}_H + \mathbf{d}) \\ & + [B_F(\mathbf{x}) + \Delta B_F](\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F) - A(\mathbf{x}) - B_H(\mathbf{x})\mathbf{u}_{H0}\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

由 4.2 節我們知道 $B_H(\mathbf{x})$ 為列滿秩，故 $B_H(\mathbf{x})B_H^+(\mathbf{x}) = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，因此我們可將(4.32)式進一步整理後得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} = & D\{\Delta\mathbf{f} + B_H(\mathbf{x})\mathbf{u}_H + B_H(\mathbf{x})\mathbf{d} + \Delta B_H(\mathbf{u}_H + \mathbf{d}) \\ & + [B_F(\mathbf{x}) + \Delta B_F](\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F) - B_H(\mathbf{x})\mathbf{u}_{H0}\} \\ = & DB_H(\mathbf{x})\{\mathbf{u}_{H1} + \mathbf{d} + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H(\mathbf{u}_H + \mathbf{d}) + B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F \\ & + B_H^+(\mathbf{x})\Delta\mathbf{f} + B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\Delta\mathbf{u}_F + B_H^+\Delta B_F(\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F)\} \\ = & DB_H(\mathbf{x})\{\mathbf{u}_{H1} + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H\mathbf{u}_{H1} + B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F + B_H^+(\mathbf{x})\Delta\mathbf{f} \\ & + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H(\mathbf{u}_{H0} + \mathbf{d}) + \mathbf{d} + B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\Delta\mathbf{u}_F \\ & + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_F(\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F)\} \\ = & DB_H(\mathbf{x})\{\mathbf{u}_{H1} + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H\mathbf{u}_{H1} + B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F \\ & + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F + \mathbf{d}_M\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

其中這裡所定義的 $\mathbf{d}_M = \mathbf{d} + B_H^+(\mathbf{x})\Delta\mathbf{f} + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H(\mathbf{u}_{H0} + \mathbf{d}) + B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\Delta\mathbf{u}_F + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_F(\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F) - B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F$ 。為了繼續完成控制律之設計，我們引進下列假設。

假設 4.6 :

$\|\mathbf{d}_M\|_2 \leq \rho_4(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}, \forall t \in \mathbb{R}$, $\rho_4: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為一連續的非負函數。

雖然假設 4.6 的不等式當中需要 \mathbf{u}_{H0} 的資訊，但因 $\|\Delta \mathbf{f}\|_2$, $\|\Delta B_H\|_2$, $\|\Delta B_F\|_2$ 以及 $\|\Delta \mathbf{u}_F\|_2$ 的上界(upper bound)可離線估測(offline estimation)，並且我們也可以估計干擾的上界 $\|\mathbf{d}\|_2$ ，因此當計算完 \mathbf{u}_{H0} 後我們便可獲得 $\rho_3(\mathbf{x}, t)$ 之值。

同樣地，根據 2.2 我們可設計積分型順滑模可靠度控制律 $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ 中的 \mathbf{u}_{H1} 為下列所示

$$\mathbf{u}_{H1} = \begin{cases} -B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F - \rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2}, & \text{if } \mathbf{s} \neq \mathbf{0} \\ -B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F, & \text{if } \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.34)$$

其中 $\rho(\mathbf{x}, t) > \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0 - 2\gamma} \rho_4(\mathbf{x}, t)$ ，在此我們可特別注意到，因為透過錯誤偵測與診斷機制，我們估測到故障部分的促動器的輸出為 $\hat{\mathbf{u}}_F$ ，因此我們確實可獲得 $B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F$ 之資訊來設計 \mathbf{u}_{H1} 。為了證明 \mathbf{u}_{H1} 設計成(4.34)式之可行性，我們令在某個時間瞬間 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ，並將(4.34)式代入

(4.33)式可得順滑變數 \mathbf{s} 所對應的閉迴路動態系統變為

$$\dot{\mathbf{s}} = DB_H(\mathbf{x}) \left\{ -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H \left[-\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + \mathbf{d}_M \right] \right\} \quad (4.35)$$

透過 Lyapunov 理論，令(4.35)式的可能的 Lyapunov 函數(Lyapunov function candidate)為 $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ ，則 V 對時間 t 的導函數為

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \quad (4.36)$$

將(4.35)式代入(4.36)式可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T DB_H(\mathbf{x}) & \left\{ -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} \right. \\ & \left. + B_H^+(\mathbf{x}) \Delta B_H \left[-\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} \right] + \mathbf{d}_M \right\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

利用假設 4.1 到假設 4.3 以及假設 4.6 可將(4.37)式整理成如下

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2^2}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} + [\mathbf{s}^T DB_H(\mathbf{x})] B_H^+(\mathbf{x}) \Delta B_H \left[-\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} \right] \\ &\quad + [\mathbf{s}^T DB_H(\mathbf{x})] \mathbf{d}_M \\ &\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \\ &\quad + \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \cdot \left\| -\rho(\mathbf{x}, t) B_H^+(\mathbf{x}) \Delta B_H \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} \right\|_2 \\ &\quad + \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \cdot \|\mathbf{d}_M\|_2 \\ &\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \\ &\quad + \rho(\mathbf{x}, t) \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \cdot \left\| B_H^+(\mathbf{x}) \Delta B_H \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} \right\|_2 \\ &\quad + \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \cdot \|\mathbf{d}_M\|_2 \\ &\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \\ &\quad + \rho(\mathbf{x}, t) \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \cdot \|B_H^+(\mathbf{x})\|_2 \cdot \left\| \Delta B_H \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} \right\|_2 \\ &\quad + \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \cdot \|\mathbf{d}_M\|_2 \\ &\leq -\rho(\mathbf{x}, t) \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \\ &\quad + \rho(\mathbf{x}, t) \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \cdot \|B_H^+(\mathbf{x})\|_2 \cdot \|\Delta B_H\|_2 \cdot \left\| \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} \right\|_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|\mathbf{d}_M\|_2 \\
\leq & -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|B_H^+(\mathbf{x})\|_2 \cdot \|\Delta B_H\|_2 \\
& + \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|\mathbf{d}_M\|_2 \\
\leq & -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|B_H^+(\mathbf{x})\|_2 \cdot \|\Delta B_H\|_2 \\
& + \rho_4(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \tag{4.38}
\end{aligned}$$

另外，因 $B_H(\mathbf{x})$ 為列滿秩，故由引理 4.1 可知

$$\begin{aligned}
\|B_H^+(\mathbf{x})\|_2 & = \|(G_H(\mathbf{x}) - \Delta B_H)^+\|_2 \\
& = \frac{1}{\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x}) - \Delta B_H)} \\
& \leq \frac{1}{\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x})) - \|\Delta B_H\|_2} \\
& = \frac{1}{\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x})) - \|\Delta B_H\|_2} \tag{4.39}
\end{aligned}$$

將(4.39)式代入(4.38)式可得

$$\begin{aligned}
\dot{V} & = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \\
& \leq -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \\
& \quad + \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x})) - \|\Delta B_H\|_2} \right] \cdot \|\Delta B_H\|_2 \\
& \quad + \rho_4(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \\
& \leq -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t)\gamma}{\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x})) - \|\Delta B_H\|_2} \right] \\
& \quad + \rho_4(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \\
& = -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t)\gamma}{\gamma_0 - \|\Delta B_H\|_2} \right] \\
& \quad + \rho_4(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \\
& \leq -\rho(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 + \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t)\gamma}{\gamma_0 - \gamma} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\rho_4(\mathbf{x}, t) \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \\
& = \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \left\{ -\rho(\mathbf{x}, t) + \left[\frac{\rho(\mathbf{x}, t)\gamma}{\gamma_0 - \gamma} \right] + \rho_4(\mathbf{x}, t) \right\} \\
& = \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \left\{ \rho(\mathbf{x}, t) \left[\frac{-\gamma_0 + 2\gamma}{\gamma_0 - \gamma} \right] + \rho_4(\mathbf{x}, t) \right\} < 0 \tag{4.40}
\end{aligned}$$

其中我們利用了及柯西-史瓦茲不等式(Cauchy-Schwarz inequality)來使得 $[\mathbf{s}^T DB_H(\mathbf{x})] \mathbf{d}_M \leq \left\| (DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s} \right\|_2 \cdot \|\mathbf{d}_M\|_2$ 。根據 2.2 節的討論可知，針對

(4.33)式來說每當順滑變數 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ， \mathbf{u}_{H1} 會使得 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ ，同時代表著閉迴路系統軌跡一但偏離順滑面後，會立即趨近順滑面，但在此因為順滑面的設計型式所致，我們僅會得到 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ 之值，故對

(4.33)式使用(4.34)式控制後的順滑變數 \mathbf{s} 所對應的閉迴路動態系統(4.35)式來說必成立 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 。

接下來我們將證明僅考慮系統(4.12)僅存在匹配型模型不確定性或干擾時，且其受到積分順滑模控制律所控制後的閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上時，其動態行為會等同於未受干擾的閉迴路無干擾系統(nominal system)之響應，亦即當我們考慮(4.12)式僅存在匹配型模型不確定性或干擾 \mathbf{d} ，並使用積分型順滑模可靠度控制律 $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ 進行控制時，其中 \mathbf{u}_{H0} 為(4.31)式所示而 \mathbf{u}_{H1} 為(4.34)式所示，閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上時，則其閉迴路系統響應會等同於(4.12)式的無干擾系統只使用 \mathbf{u}_{H0} 進行控制時的避迴路系統響應。假設閉迴路系統軌跡被保持在順滑面，即 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 時，閉迴路系統

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\
\dot{\mathbf{x}}_2 &= A(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f} + [B_H(\mathbf{x}) + \Delta B_H](\mathbf{u}_H + \mathbf{d}) \\
& \quad + [B_F(\mathbf{x}) + \Delta B_F](\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta \mathbf{u}_F)
\end{aligned}$$

的軌跡為 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d(t)$ ，而

$$\dot{\mathbf{s}} = DB_H(\mathbf{x}_d) \{ \mathbf{u}_{H1} + B_H^+(\mathbf{x}_d) \Delta B_H \mathbf{u}_{H1} + B_H^+(\mathbf{x}_d) B_F(\mathbf{x}_d) \hat{\mathbf{u}}_F + \mathbf{d}_M \} = \mathbf{0} \tag{4.41}$$

進一步整理(4.41)式後可的

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{s}} &= DB_H(\mathbf{x}_d)\{\mathbf{u}_H + B_H^+(\mathbf{x}_d)\Delta B_H\mathbf{u}_H + B_H^+(\mathbf{x}_d)B_F(\mathbf{x}_d)\hat{\mathbf{u}}_F + \mathbf{d}_M \\
&\quad - \mathbf{u}_{H0} - B_H^+(\mathbf{x}_d)\Delta B_H\mathbf{u}_{H0} + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F\} \\
&= DB_H(\mathbf{x}_d)\{(I + B_H^+(\mathbf{x}_d)\Delta B_H)\mathbf{u}_H - (I + B_H^+(\mathbf{x}_d)\Delta B_H)\mathbf{u}_{H0} \\
&\quad + B_H^+(\mathbf{x}_d)B_F(\mathbf{x}_d)\hat{\mathbf{u}}_F + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F + \mathbf{d}_M\} = \mathbf{0} \quad (4.42)
\end{aligned}$$

已知 $[I + B^+(\mathbf{x})\Delta B] \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ，且由引理 4.1 可知

$$\sigma_{\min}([I + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H]) \geq \sigma_{\min}(I) - \sigma_{\max}(B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H)$$

然而我們知道

$$\begin{aligned}
\sigma_{\max}(B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H) &= \|B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H\|_2 \\
&\leq \|B_H^+(\mathbf{x})\|_2 \cdot \|\Delta B_H\|_2 \\
&\leq \frac{1}{\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x}) - \|\Delta B_H\|_2)} \cdot \|\Delta B_H\|_2 \\
&\leq \frac{1}{\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x}) - \|\Delta B_H\|_2)} \cdot \gamma \\
&\leq \frac{\gamma}{\sigma_{\min}(G_H(\mathbf{x}) - \gamma)} = \frac{\gamma}{\gamma_0 - \gamma} < 1
\end{aligned}$$

因此我們可得

$$\sigma_{\min}([I + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H]) \geq \sigma_{\min}(I) - \sigma_{\max}(B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H) = 1 - \sigma_{\max}(B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H) > 0$$

也就是說對任意狀態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ 矩陣 $[I + B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H] \in \mathbb{R}^{k \times k}$ 為可逆，又因為 $DB_H(\mathbf{x}_d)$ 為可逆或列滿秩，故必存在一解

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{Heq} &= [I + B_H^+(\mathbf{x}_d)\Delta B_H]^{-1}\{-B_H^+(\mathbf{x}_d)B_F(\mathbf{x}_d)\hat{\mathbf{u}}_F - \mathbf{d}_M \\
&\quad + [I + B_H^+(\mathbf{x}_d)\Delta B_H]\mathbf{u}_{H0} - B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F\} \quad (4.43)
\end{aligned}$$

滿足

(4.42)式，而 \mathbf{u}_{Heq} 稱為等效控制。我們把(4.43)式代回原始動態系統(4.12)式後可得

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\
\dot{\mathbf{x}}_2 &= A(\mathbf{x}_d) + \Delta \mathbf{f} + B_H(\mathbf{x}_d)[I + B_H^+(\mathbf{x}_d)\Delta B_H](\mathbf{u}_{Heq} + \mathbf{d})
\end{aligned}$$

$$+[B_F(\mathbf{x}_d) + \Delta B_F](\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta \mathbf{u}_F) \quad (4.44)$$

再將(4.44)式進一步整理後可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{1d} &= \mathbf{x}_{2d} \\ \dot{\mathbf{x}}_{2d} &= A(\mathbf{x}_d) + B_H(\mathbf{x}_d)\mathbf{u}_{H0} \end{aligned} \quad (4.45)$$

其中 $\mathbf{x}_d = [\mathbf{x}_{1d}^T, \mathbf{x}_{2d}^T]^T$ ，觀察(4.45)式可發現其動態系統即為原始動態系統(4.12)式的無干擾系統使用 \mathbf{u}_{H0} 控制後的閉迴路無干擾系統，即完成證明。

雖然我們針對 T-S 模糊模型(4.12)式進行積分行順滑模可靠度控制律設計，但是我們最終仍然是將可靠度控制律代入原始的非線性系統(4.3)式，因此，我們可進一步分析，對於考慮原始非線性系統(4.3)式僅擁有匹配型模型不確定性或干擾時，且假設藉由錯誤偵測與診斷機制我們估測到故障部分的促動器的輸出為 $\hat{\mathbf{u}}_F$ ，而估測誤差為 $\Delta \mathbf{u}_F$ ，也就是說動態系統(4.3)可以表式成

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G_H(\mathbf{x})(\mathbf{u}_H + \mathbf{d}) + G_F(\mathbf{x})(\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta \mathbf{u}_F) \end{aligned} \quad (4.46)$$

並使用積分型順滑模可靠度控制律 $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ 進行控制，其中 \mathbf{u}_{H0} 為(4.31)式所示 \mathbf{u}_{H1} 為(4.34)式所示，且其閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上時，則其閉迴路系統響應會如何。現在我們考慮將積分型順滑模可靠度控制律 $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ 代入(4.46)式且考慮原始非線性系統(4.46)式僅擁有匹配型模型不確定性或干擾 \mathbf{d} ，其中 \mathbf{u}_{H0} 為(4.31)式所示 \mathbf{u}_{H1} 為(4.34)式所示，同樣地，假設原始非線性系統(4.46)在使用順滑模可靠度控制律 $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ 控制後的閉迴路系統軌跡被保持在順滑面，即 $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \forall t \geq t_0$ 時，並令此時的閉迴路系統

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G_H(\mathbf{x})(\mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1} + \mathbf{d}) + G_F(\mathbf{x})(\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta \mathbf{u}_F) \end{aligned} \quad (4.47)$$

的軌跡為 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s(t)$ ，而由(4.41)式到(4.43)式知道，此時的等效控制為

$$\mathbf{u}_{Heq} = [I + B_H^+(\mathbf{x}_s)\Delta B_H]^{-1}\{-B_H^+(\mathbf{x}_s)B_F(\mathbf{x}_s)\hat{\mathbf{u}}_F - \mathbf{d}_M$$

$$+[I + B_H^+(\mathbf{x}_s)\Delta B_H]\mathbf{u}_{H0} - B_H^+(\mathbf{x})\Delta B_H B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F\} \quad (4.48)$$

我們把(4.48)式代回(4.46)式後可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{1s} &= \mathbf{x}_{2s} \\ \dot{\mathbf{x}}_{2s} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) + G_H(\mathbf{x}_s)(\mathbf{u}_{Heq} + \mathbf{d}) + G_F(\mathbf{x}_s)(\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F) \end{aligned} \quad (4.49)$$

利用 4.2 節時建立 T-S 模糊模型時所得到的關係式 $\Delta\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})$ ， $\Delta B_H = G_H(\mathbf{x}) - B_H(\mathbf{x})$ ， $\Delta B_F = G_F(\mathbf{x}) - B_F(\mathbf{x})$ ，我們可將(4.49)式整理成

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{1s} &= \mathbf{x}_{2s} \\ \dot{\mathbf{x}}_{2s} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) - \Delta\mathbf{f} + B_H(\mathbf{x}_s)\mathbf{u}_{H0} \end{aligned} \quad (4.50)$$

再利用一次關係式 $\Delta\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})$ ，我們可再將(4.50)進一步整理成

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{1s} &= \mathbf{x}_{2s} \\ \dot{\mathbf{x}}_{2s} &= A(\mathbf{x}_s) + B_H(\mathbf{x}_s)\mathbf{u}_{H0} \end{aligned} \quad (4.51)$$

其中 $\mathbf{x}_s = [\mathbf{x}_{1s}^T, \mathbf{x}_{2s}^T]^T$ ，觀察(4.51)式可發現其動態系統即為動態系統(4.12)式的無干擾系統使用 \mathbf{u}_{H0} 控制後的閉迴路無干擾系統，也就是說，非線性系統(4.46)式僅擁有匹配型模型不確定性或干擾時，並使用積分型順滑模可靠度控制律 $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ 進行控制，其中 \mathbf{u}_{H0} 為(4.31)式所示 \mathbf{u}_{H1} 為(4.34)式所示，且閉迴路系統軌跡一直被保持在順滑面上時，則其閉迴路系統響應會等同於同於(4.12)式的無干擾系統只使用 \mathbf{u}_{H0} 進行控制時的避迴路系統響應。因此，最後我們可知道，我們使用 T-S 模糊模型進行積分順滑模控制時，會先對 T-S 模糊模型的無干擾系統進行設計，即設計 \mathbf{u}_{H0} ，並使 T-S 模糊模型的無干擾系統達到我們希望的性能表現，而儘管最後我們是將考慮 T-S 模糊模所設計的積分型順滑模可靠度控制律代入錯誤偵測與診斷機制我們估測到故障部分的促動器的輸出為 $\hat{\mathbf{u}}_F$ 的非線性系統，此非線性系統受到考慮 T-S 模糊模所設計的積分型順滑模可靠度控制律控制後，其閉迴路系統軌跡仍然會與 T-S 模糊模型的無干擾系統使用 \mathbf{u}_{H0} 控制後的閉迴路無干擾系統軌跡相同。最後，根據上列分析後我們提出下列定理。

定理 4.1：

假設系統(4.1)的某些促動器發生故障之情形，且假設藉由錯誤偵測與診斷機制我們估測到故障部分的促動器的輸出為 $\hat{\mathbf{u}}_F$ ，而估測誤差為 $\Delta\mathbf{u}_F$ ，並且利用 T-S 模糊模型近似後得其近似之動態系統(4.12)式，當假設 4.1 到假設 4.3，以及假設 4.6 同時成立，且存在矩陣 P 滿足引理 2.1 使得假設 4.5 也成立時，則含控制輸入發生故障得(4.1)式在下列控制律(4.52)式的控制下，原點對於閉迴路系統為漸進穩定。

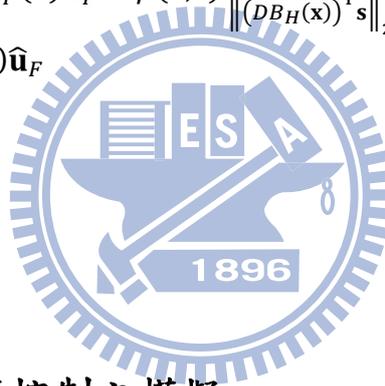
$$\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1} \quad (4.52)$$

其中

$$\mathbf{u}_{H0} = -\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}) K_i \mathbf{x}(t) \quad (4.53)$$

$$\mathbf{u}_{H1} = \begin{cases} -B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F - \rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2}, & \text{if } \mathbf{s} \neq \mathbf{0} \\ -B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F, & \text{if } \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.54)$$

$$\text{且 } \rho(\mathbf{x}, t) > \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0 - 2\gamma} \rho_4(\mathbf{x}, t)。$$



4.4 衛星姿態可靠度控制之模擬

在這一節當中，我們採用的衛星動態模型與 3.4.1 節所考慮的衛星動態模型相同，並且考慮相同的前鑑步變數(premise variable)以及其分割(partition)來對此衛星動態系統進行建立 T-S 模型的動作，但是在建立 T-S 模糊模型之前，我們需要藉由錯誤偵測與診斷機制來得知故障的促動器是哪些部分，並區分正常與故障的促動器，因此，接下來的小節裡，我們先針對衛星動態系統(3.49)設計錯誤偵測與診斷機制的觀察器(observer)，接著再考慮已藉由錯誤偵測與診斷機制來得知故障的促動器是哪些部分的衛星動態系統，建立其 T-S 模糊模型，最後我們展示模擬結果。

4.4.1 錯誤偵測與診斷機制之觀察器設計

在這一節中我們介紹針對 3.4.1 節所提及的衛星動態系統，其錯誤偵測與診斷機制之觀察器的設計，主要的方式是將控制輸入解耦(decouple)，使得每一個促動器的故障能被分辨且診斷出來[5]。考慮衛星動態系統(3.49)式，因三個尤拉角速率可表示成角速度向量的型式，我們可以藉由加速計(accelerometer)和陀螺儀(gyroscope)來得知這些資訊。在這裡我們假設所有狀態都可量測，而錯誤偵測與診斷機制和系統之間的關係可表示成圖 4.1，詳細說明如下。首先我們對原始衛星動態系統做座標轉換，即令 $\mathbf{z}_1 = [z_1, z_2, z_3]^T = \mathbf{x}_1$ ， $\mathbf{z}_2 = [z_4, z_5, z_6]^T = P\mathbf{x}_2$ ，而矩陣 S 定義成 $S = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \mathbf{g}_3]^{-1}$ ，其中 \mathbf{g}_i 代表衛星動態系統中的控制矩陣 $G(\mathbf{x}) = G$ 的第 i 個行向量(column vector)，藉由此座標轉換我們可將每一個控制輸入 u_i 對於系統狀態的影響解耦(decouple)，進一步使得每一個促動器 u_i 發生故障時能夠被成功的偵測出來。衛星動態系統(3.49)經由上述轉換後的系統可表示成如下

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 &= \mathbf{f}^{new}(\mathbf{z}) + G^{new}(\mathbf{z})(\mathbf{u} + \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

其中 $\mathbf{f}^{new}(\mathbf{z}) = S\mathbf{f}(\mathbf{z}_1, S^{-1}\mathbf{z}_2)$ ， $G^{new}(\mathbf{z}) = G^{new} = SG(\mathbf{x}) = SG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \end{bmatrix}$ ，

並且 l_1 和 l_2 以及 l_3 都不為零，因為控制矩陣 $G(\mathbf{x}) = G$ 的秩(rank)為3。從(4.55)式中我們可以看出 z_4 只會受到 u_1 和 u_4 的影響，同樣地， z_5 只會受到 u_2 和 u_4 的影響， z_6 只會受到 u_3 和 u_4 的影響，而只要有兩個促動器同時發生故障可能就會造成閉迴路系統無法達到我們所想要的控制目標。因此，在此我們僅考慮只有一個促動器發生故障的情形。

透過轉換後系統(4.55)式，我可以設計觀察器為如下

$$\dot{\xi}_i = f_i^{new}(\mathbf{z}) + u_i + l_i u_4 + k_i \cdot (z_{i+3} - \xi_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.56)$$

其中 $k_i > 0$ 。另外定義殘留信號(residual signal)為

$$r_i = (z_{i+3} - \xi_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.57)$$

接下來說明單一個促動器故障時，如何偵測並診斷出是哪一個促動器故障。假設只有第二個促動器 u_2 發生故障，我們定義此時 u_2 的實際值與設計值之間的差距為

$$\Delta u_2 = u_2^* - u_2 \quad (4.58)$$

其中 u_2^* 是第二個促動器 u_2 發生故障後的實際值，另外，因為第一個跟第三個以及第四個促動器都正常運作故 $\Delta u_i = 0, i = 1, 3, 4$ 。我們將(4.58)式代入(4.55)式後可得

$$\dot{z}_5 = f_2^{new}(\mathbf{z}) + u_2 + l_2 u_4 + \Delta u_2 + (G^{new} \mathbf{d})_2 \quad (4.59)$$

$$\dot{z}_{i+3} = f_i^{new}(\mathbf{z}) + u_i + l_i u_4 + (G^{new} \mathbf{d})_i, \quad i = 1, 3 \quad (4.60)$$

其中 $(G^{new} \mathbf{d})_i$ 代表 $G^{new} \mathbf{d}$ 的第 i 個元素。接著我們將殘留信號(4.57)對時間取導函數並將(4.56)式，(4.59)式與(4.60)式代入後可得

$$\dot{r}_2 = -k_2 r_2 + \Delta u_2 + (G^{new} \mathbf{d})_2 \quad (4.61)$$

$$\dot{r}_i = -k_i r_i + (G^{new} \mathbf{d})_i, \quad i = 1, 3 \quad (4.62)$$

假設干擾足夠小並且可忽略，那麼動態系統(4.61)式與(4.62)式經過暫態(transient)並到達穩態(steady state)後，我們可得

$$r_2 \rightarrow \frac{\Delta u_2}{k_2} \quad (4.63)$$

$$r_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 3 \quad (4.64)$$

因此我們可以知道第二個促動器是否正常運作會影響 r_2 ，且我們可由(4.58)式與(4.63)式得到第二個促動器 u_2 發生故障後，透過錯誤偵測與診斷機制所估計出來的實際值為 $\hat{u}_2 = u_2 + k_2 r_2$ 。同樣地，我們可知道第一個促動器是否正常運作會影響 r_1 ，第三個促動器是否正常運作會影響 r_3 ，而第四個促動器是否正常運作會同時影響 r_1 到 r_3 。最後，當殘留信號大於一定的臨界值(threshold)時，就錯誤偵測與診斷機制會發出警報，藉由這個方式，我們可以簡單地偵測和診斷出促動器故障的部分以及情況。

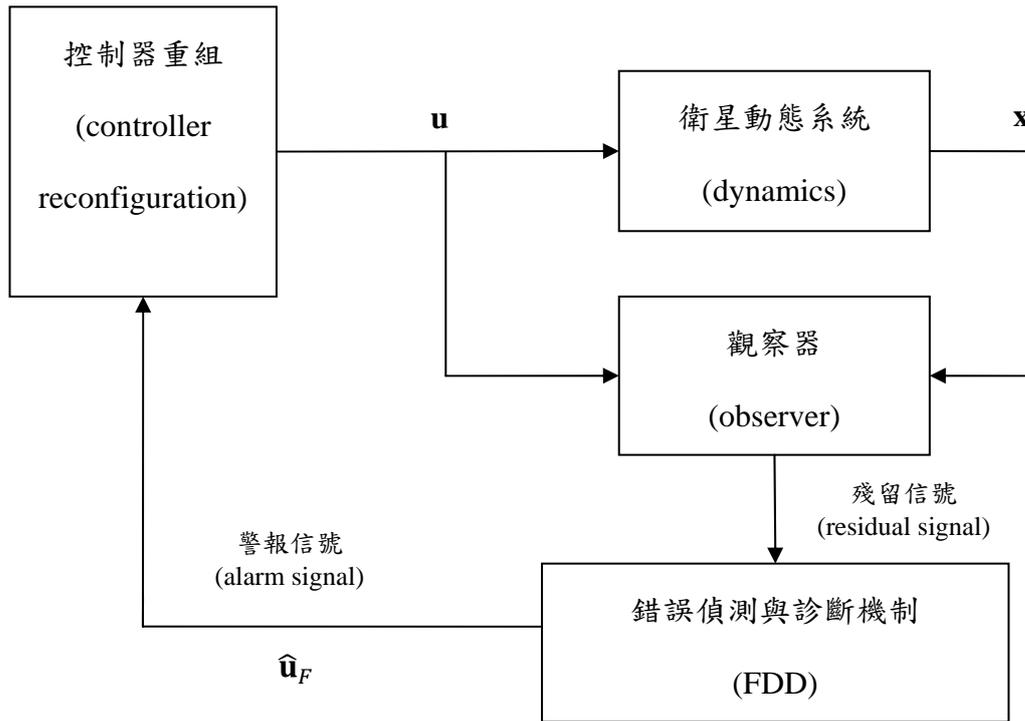


圖 4.1 錯誤偵測與診斷示意圖

4.4.2 建立 T-S 模糊模型

原始衛星系統經由錯誤偵測與診斷機制的判別後，可得知故障的促動器是哪些部分，並且我們估測到故障部分的促動器的輸出為 $\hat{\mathbf{u}}_F$ ，而估測誤差為 $\Delta\mathbf{u}_F$ ，因此，我們現在考慮的衛星系統可表示成

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G_H(\mathbf{x})(\mathbf{u}_H + \mathbf{d}) + G_F(\mathbf{x})(\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F) \end{aligned} \quad (4.65)$$

其中 $\mathbf{x}_1 = [x_1, x_2, x_3] = [\phi, \theta, \psi]$ ， $\mathbf{x}_2 = [x_4, x_5, x_6] = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]$ ， $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T$ ， ϕ, θ, ψ 分別為 x, y, z 三軸的尤拉角(Euler angle)，而 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 以及 $G(\mathbf{x}) = [G_H(\mathbf{x}) : G_F(\mathbf{x})]$ 如同 3.4.1 節的(3.50)式到(3.53)式所示，另外 $G_H(\mathbf{x})$ 與 $G_F(\mathbf{x})$ 分別為何則視錯誤偵測與診斷機制的判別結果而相對應可得。

我們希望建立 T-S 模糊模型來近似(4.56)式，在此建立 T-S 模糊模型所選擇的前鑑步變數以及其分割，都與 3.4.1 所選擇的方式相同，故在此我們少略其討論。最後，當 $\mathbf{x} \in D_{i,j,k}$ 而 i, j, k 分別為某特定值時，則對應的 T-S 模糊模型為

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= A(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{f} + B_H(\mathbf{x})(\mathbf{u}_H + \mathbf{d}) + B_F(\mathbf{x})(\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F)\end{aligned}\quad (4.66)$$

其中

$$\begin{aligned}A(\mathbf{x}) &= \sum_{p,q,r=0}^1 \alpha_p(\mathbf{x}) \alpha_q(\mathbf{x}) \alpha_r(\mathbf{x}) \cdot A_{(i+p),(j+q),(k+r)} \mathbf{x} \\ B_H(\mathbf{x}) &= G_H \\ B_F(\mathbf{x}) &= G_F\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\alpha_p(\mathbf{x}) &= \frac{|x_1 - x_{1(i+1-p)}|}{|x_{1(i+1)} - x_{1i}|} \\ \alpha_q(\mathbf{x}) &= \frac{|x_2 - x_{2(j+1-q)}|}{|x_{2(j+1)} - x_{2j}|} \\ \alpha_r(\mathbf{x}) &= \frac{|x_3 - x_{3(k+1-r)}|}{|x_{3(k+1)} - x_{3k}|}\end{aligned}$$

明顯地， $\sum_{p,q,r=0}^1 \alpha_p(\mathbf{x}) \alpha_q(\mathbf{x}) \alpha_r(\mathbf{x}) = 1$ 。另外，我們需要 $\|\Delta\mathbf{f}\|_2$ 的資訊，在此我們利用 $\|\Delta\mathbf{f}\|_\infty$ 來表示對所有 $\mathbf{x} \in D_{i,j,k}$ 時 $\|\Delta\mathbf{f}\|_2 = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})\|_2$ 的上界(upper bound)，即 $\|\Delta\mathbf{f}\|_\infty = \sup_{\forall \mathbf{x} \in D_{i,j,k}} \|\Delta\mathbf{f}\|_2$ ，而 $\|\Delta\mathbf{f}\|_\infty$ 可透過 MATLAB 進行離線計算(offline computation)而得[38]，而對所有 $\mathbf{x} \in D_{i,j,k}$ 時 $\|\Delta\mathbf{f}\|_\infty$ 之值可參考表 3.1。如同前述，在每個時間瞬間最多只有會有 8 條規則會被激發，因此儘管我們增加前鑑部變數 x_1, x_2, x_3 的分割數目，也不會因此而增加即時計算(online computation)的運算負擔。

附註 4.2：

在順滑模控制時，因為在 T-S 模糊模型下 $B_H(\mathbf{x}) = G_H$ ， $B_F(\mathbf{x}) = G_F$ ，因此 $\Delta B_H = \Delta B_F = 0$ ，故 $\Delta_M = \Delta\mathbf{f} + B_H(\mathbf{x})\mathbf{d} + B_F(\mathbf{x})\Delta\mathbf{u}_F = \Delta\mathbf{f} + G_H\mathbf{d} + G_F\Delta\mathbf{u}_F$ ，且(4.18)

式中的 $\mu(\mathbf{x}, t)$ 其只需要滿足 $\mu(\mathbf{x}, t) \geq \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0 - (1 + \sqrt{n})\gamma} [\eta + \rho_3(\mathbf{x}, t)] = \frac{\gamma_0 - 0}{\gamma_0 - (1 + \sqrt{n})0} [\eta + \rho_3(\mathbf{x}, t)] = \eta + \rho_3(\mathbf{x}, t)$ 即可。

附註 4.3：

在積分型順滑模控制時，因為在 T-S 模糊模型下 $B_H(\mathbf{x}) = G_H$ ， $B_F(\mathbf{x}) = G_F$ ，因此 $\Delta B_H = \Delta B_F = 0$ ，故 $\mathbf{d}_M = \mathbf{d} + G_H^+ \Delta \mathbf{f} + G_H^+ G_F \Delta \mathbf{u}_F$ ，且(4.34)式中的 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 其只需要滿足 $\rho(\mathbf{x}, t) > \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0 - 2\gamma} \rho_4(\mathbf{x}, t) = \frac{\gamma_0 - 0}{\gamma_0 - 0} \rho_4(\mathbf{x}, t) = \rho_4(\mathbf{x}, t)$ 即可。

4.4.3 模擬結果

我們利用 MATLAB 軟體來進行模擬 4.4.1 節所提及的衛星系統；我們考慮系統存在擾動，而在時間 $t = 1$ 秒的時候促動器 u_2 完全損壞，也就是 u_2 的實際值 $u_2^* = 0$ ，只要干擾足夠小並時，錯誤偵測與診斷機制所估測到故障部分的促動器的輸出，很可能地，也會很接近於零，即 $\hat{\mathbf{u}}_F \cong \mathbf{0}$ 。在促動器 u_2 發生故障之前，我們選用 3.3 節所討論的順滑模控制以及積分型順滑模控制做為控制方式，當促動器 u_2 被偵測與診斷出其發生故障後，則控制律會被重組成 4.3.1 節與 4.3.2 節所套論的順滑模可靠度控制律以及積分型順滑模可靠度控制律，意即我們利用 4.3 節所提及的兩種可靠度控制方式來對系統進行控制，並分析當促動器 u_2 完全損壞時，是否閉迴路系統能夠達到穩定，此外，我們會進一步比較兩種控制方式之間所造成的二次成本函數花費以及收斂時間等等的性能。在下面的模擬中，我們選取的參數如下[1]：

• 衛星系統參數：

$$(1) \omega_0 = 1.0312 \times 10^{-3} \text{rad/s}$$

$$(2) I_x = I_z = 2000 \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2, I_y = 400 \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$$

$$(3) \mathbf{d} = [0.05 \sin(t), 0.05 \cos(t), 0.05 \cos(3t)]^T$$

$$(4) \mathbf{x}(0) = [-0.7, -0.07, 1.5, 0.3, 1, -0.2]^T$$

• 二次成本函數參數：

$$(1) Q = I_6$$

$$(2) R = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• 順滑模控制參數：

$$(1) \eta = 0.5$$

$$(2) M = 2I_3$$

$$(3) \rho_3(\mathbf{x}, t) = \|\Delta \mathbf{f}\|_\infty + \|G_H\|_2 \cdot \|\mathbf{d}\|_\infty, \text{ 其中 } \|\mathbf{d}\|_\infty = \sup_{\forall t} \|\mathbf{d}\|_2$$

$$(4) \mu(\mathbf{x}, t) = \eta + \rho_3(\mathbf{x}, t)$$

• 積分型順滑模控制參數：

$$(1) D = I_3$$

$$(2) \rho_4(\mathbf{x}, t) = \|\mathbf{d}\|_\infty + \|G_H^+\|_2 \cdot \|\Delta \mathbf{f}\|_\infty, \text{ 其中 } \|\mathbf{d}\|_\infty = \sup_{\forall t} \|\mathbf{d}\|_2$$

$$(3) \rho(\mathbf{x}, t) = 0.5 + \rho_4(\mathbf{x}, t)$$

• 錯誤偵測與診斷機制參數：

$$(1) k_i = 10, \quad i = 1, 2, 3$$

$$(2) \text{ 當 } |r_i| \geq 0.02, \quad i = 1, 2, 3 \text{ 時，發出警報信號}$$

其中在積分型順滑模控制中，其 \mathbf{u}_{H0} 為考慮(4.30)式的二次成本函數下，使用 4.3.2 節所提到的線性二次調解法來對(4.66)式的無干擾系統進行平行分配補償之設計，而在時間 $t = 1$ 秒的時候促動器 u_2 完全損壞之前，即系統之促動器完全正常運作的情況下，我們也需要對(4.66)式的無干擾且無促動器損壞系統進行平行分配補償之設計[37]，即針對促動器 u_2 完全損壞前後兩個情況下之(4.66)式的無干擾系統，離線(offline)的設計每一條規則所對應的回授矩陣 $K_{i,j,k}$ ，並透過建立 T-S 模糊模型來近似原非線性系統時所使用的權重來得到 \mathbf{u}_{H0} ，當然，在促動器 u_2 完全損壞前時，即系統(4.66)的促動器都處於正常運作的狀態下，則系統(4.66)等同於 3.4.1 節所提及的(3.72)式。當 $\mathbf{x} \in D_{i,j,k}$ 而 i, j, k 分別為某特定值時，則對應的 \mathbf{u}_{H0} 為

$$\mathbf{u}_{H0} = - \sum_{p,q,r=0}^1 \alpha_p(\mathbf{x}) \alpha_q(\mathbf{x}) \alpha_r(\mathbf{x}) \cdot K_{(i+p),(j+q),(k+r)} \mathbf{x} \quad (4.67)$$

而因為我們擁有 5^3 條規則，因此在促動器 u_2 完全損壞前後之(4.66)式的無干擾系統的兩個情況下設計平行分配補償 \mathbf{u}_{H0} ，會對應的設計出兩組共 2×5^3 個 $K_{i,j,k}$ ，

在此我們僅將這兩組不同的 5^3 個 $K_{i,j,k}$ 中，各列出三個，如下所示，剩餘的可由直接計算而得到。

• u_2 完全損壞前之(4.66)式的無干擾系統之平行分配補償設計回授矩陣 $K_{i,j,k}$ ：

$$K_{1,1,1} = \begin{bmatrix} 0.9159 & 0.9122 & 0.5736 & 1.3165 & 1.3024 & 0.9659 \\ 0.8458 & -0.9785 & 1.0772 & 1.0873 & -1.3622 & 1.9636 \\ 0.9756 & -0.8515 & -1.0754 & 1.3691 & -1.088 & -1.962 \\ 0.4053 & 0.403 & -0.4163 & 0.6111 & 0.6032 & -0.7913 \end{bmatrix}$$

$$K_{2,2,2} = \begin{bmatrix} 0.9161 & 0.9119 & 0.5738 & 1.3167 & 1.303 & 0.9663 \\ 0.8456 & -0.9789 & 1.077 & 1.0872 & -1.3622 & 1.9633 \\ 0.9755 & -0.8515 & -1.0756 & 1.3688 & -1.0884 & -1.9622 \\ 0.4054 & 0.403 & -0.4162 & 0.6112 & 0.6034 & -0.7911 \end{bmatrix}$$

$$K_{2,2,4} = \begin{bmatrix} 0.9158 & 0.9125 & 0.5733 & 1.3165 & 1.3019 & 0.9649 \\ 0.8459 & -0.978 & 1.0776 & 1.088 & -1.362 & 1.962 \\ 0.9757 & -0.8518 & -1.0751 & 1.3687 & -1.0879 & -1.9583 \\ 0.4053 & 0.4029 & -0.4165 & 0.6108 & 0.603 & -0.7901 \end{bmatrix}$$

• u_2 完全損壞後之(4.66)式的無干擾系統之平行分配補償設計回授矩陣 $K_{i,j,k}$ ：

$$K_{1,1,1} = \begin{bmatrix} 1.027 & 0.743 & 0.9451 & 1.5868 & 0.858 & 2.0391 \\ 1.273 & -1.2445 & -0.405 & 1.872 & -1.8202 & -0.4691 \\ 0.3032 & 0.5609 & -0.7704 & 0.3527 & 1.0323 & -1.8388 \end{bmatrix}$$

$$K_{2,2,2} = \begin{bmatrix} 1.0271 & 0.7424 & 0.9454 & 1.5872 & 0.8585 & 2.0399 \\ 1.2727 & -1.2446 & -0.4054 & 1.8716 & -1.8203 & -0.4698 \\ 0.3034 & 0.5611 & -0.7702 & 0.3528 & 1.0322 & -1.8384 \end{bmatrix}$$

$$K_{2,2,4} = \begin{bmatrix} 1.0266 & 0.7438 & 0.9449 & 1.5867 & 0.858 & 2.0361 \\ 1.2732 & -1.2448 & -0.4034 & 1.8724 & -1.8208 & -0.465 \\ 0.3035 & 0.5602 & -0.7707 & 0.3526 & 1.0315 & -1.8358 \end{bmatrix}$$

接著利用引理 2.1，並使用 MATLAB LMI 工具箱(MATLAB LMI tool box)來分別對兩個情況下進行矩陣 P 之求解，我們可求得兩個情況下各自的 P 如下

• u_2 完全損壞前之(4.66)式的無干擾系統之滿足引理 2.1 之矩陣 P ：

$$P = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 1.5267 & 0.0445 & -0.0344 & 0.3045 & 0.0505 & -0.043 \\ 0.0445 & 1.5186 & -0.0337 & 0.0505 & 0.2945 & -0.0421 \\ -0.0344 & -0.0337 & 1.8581 & -0.043 & -0.0421 & 0.7139 \\ 0.3045 & 0.0505 & -0.043 & 0.3239 & 0.0583 & -0.0557 \\ 0.0505 & 0.2954 & -0.0421 & 0.0583 & 0.3135 & -0.0543 \\ -0.043 & -0.0421 & 0.7139 & -0.0557 & -0.0543 & 1.2942 \end{bmatrix}$$

• u_2 完全損壞後之(4.66)式的無干擾系統之滿足引理 2.1 之矩陣 P ：

$$P = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 1.5792 & -0.0249 & 0.0847 & 0.3662 & -0.0352 & 0.1186 \\ -0.0249 & 1.6137 & -0.2088 & -0.0352 & 0.419 & -0.2912 \\ 0.0847 & -0.2088 & 2.2234 & 0.1186 & -0.2912 & 1.2696 \\ 0.3662 & -0.0352 & 0.1186 & 0.3991 & -0.0527 & 0.1762 \\ -0.0352 & 0.419 & -0.2912 & -0.0527 & 0.484 & -0.4308 \\ 0.1186 & -0.2912 & 1.2696 & 0.1762 & -0.4308 & 1.7425 \end{bmatrix}$$

因此，由引理 2.1 可知道(4.67)式的 \mathbf{u}_{H0} 在促動器 u_2 完全損壞前後兩個情況下皆滿足假設 4.5。另外，我們為了要減輕順滑模控制與積分型順滑模控制的切跳現象(chattering)，在順滑模控制方面我們使用了飽和函數(saturation function)來取代本來的符號函數，並設定其邊界寬度(boundary layer width) $\varepsilon = 0.02$ ；而在積分型順滑模控制方面我們將控制律(4.34)修改成下列形式

$$\mathbf{u}_{H1} = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} -B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F - \\ -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2} \end{array} \right\}, & \text{if } \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 \geq \varepsilon \\ \left\{ \begin{array}{l} -B_H^+(\mathbf{x})B_F(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}_F - \\ -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}}{\varepsilon} \end{array} \right\}, & \text{if } \|(DB_H(\mathbf{x}))^T \mathbf{s}\|_2 < \varepsilon \end{cases} \quad (4.68)$$

且同樣地設定其邊界寬度(boundary layer width) $\varepsilon = 0.02$ 。

模擬結果顯示在圖 4.2 到圖 4.20，而效能之比較整理在表 4.1，在表 4.1 中我們所談的穩定是指所有閉迴路系統的狀態之絕對值是否收斂到 0.01 以內，另外我們定義 $\|\mathbf{u}\|_\infty = \sup_{t \in [0, 12]} \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_\infty$ ，而收斂時間(convergence time)定義為所有閉迴路系統的狀態之絕對值收斂到 0.01 時所相對應的時間。在模擬結果中，我們以符號 ISMCr 來表式積分順滑模控制在系統存在擾動的情況下之結果；以符號 SMCr 來表式順滑模控制在系統存在擾動的情況下之結果；以符號 LQRdr 來表式 LQR 平行分配補償設計在系統存在擾動的情況下所得到的結果；最後以符號 LQRn 來表示 LQR 平行分配補償設計在 T-S 模糊模型之無干擾系統的情況下所得到的結果，其中 ISMCr, SMCr 以及 LQRdr 都是透過錯誤偵測與診斷機制來判別控制律的切換，而 LQRn 則是被限定在時間 $t = 1$ 秒的時候其控制律直接換

成可靠度控制律。

圖 4.2 到圖 4.7 分別代表狀態 x_1 到狀態 x_6 的時間響應圖，從圖 4.2 到圖 4.7 可發現，ISMCr 以及 SMCr 在有擾動的情況下都可以使得閉迴路系統達到穩定；而 LQRdr 則無法抑制擾動因此無法使得閉迴路系統達到穩定，另外，我們可發現 ISMCr 和 LQRdr 的軌跡曲線幾乎重合，這也說明了當原始非線性系統使用基於 T-S 模糊模型近似下所設計的積分型順滑模可靠度控制律 $\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_{H0} + \mathbf{u}_{H1}$ 做控制後，於促動器 u_2 完全損壞之前後，其閉迴路系統的軌跡會與 T-S 模糊模型的無干擾系統使用 \mathbf{u}_{H0} 做控制後的閉迴路無干擾系統的軌跡非常接近。圖 4.8 到圖 4.10 為 ISMCr 與 SMCr 的順滑變數時間響應比較圖，從中我們可發現 ISMCr 的順滑變數一開始就為零，且之後也一直保持在零附近，如此驗證了積分型順滑模可靠度控制可消除存在迫近階段(reaching phase)的疑慮，而 SMCr 的順滑變數則是經過一段時間才會到達零，也就是說其存在著迫近階段的特性。我們可注意到當時間 $t = 0.65$ 的時候 SMC 的順滑變數 s_1 和 s_2 都差不多已到達零，以及在時間 $t = 1.65$ 的時候 SMC 的順滑變數 s_3 也差不多已到達零，而 SMCr 的控制輸入也跟著在時間 $t = 0.65$ 秒與時間 $t = 1.65$ 秒的時候產生了幅度較大的變化，這影響了 SMCr 的狀態 x_4 到 x_6 它們在相對應的時間產生不平滑的變化現象，這是因為當系統狀態到達順滑面時，SMC 的控制律會隨之作切換而產生的結果。圖 4.11 到圖 4.14 為控制輸入的時間響應比較圖。圖 4.15 到圖 4.17 為錯誤偵測與診斷機制中殘留信號的時間響應比較圖，而圖 4.18 到圖 4.20 為警報信號的時間響應比較圖。當殘留信號超過所設定的臨界值 0.02 時，所對應的警報信號會變為 1 以示為發出警報。在圖 4.12 中，由於設定第二個促動器會在時間 $t = 1$ 秒的時候完全損壞，故輸出其值在時間 $t = 1$ 秒的時候會突然變化成零，而 LQRn 是要作為 ISMCr 於促動器 u_2 完全損壞之前後的無干擾系統情況的參照，因此是不考慮控制器 LQRn 的促動器 u_2 會完全損壞，但 LQRn 會在時間 $t = 1$ 秒後，直接切換成其對應的可靠度控制律。當促動器發生故障後，錯誤偵測與診斷機制需要花一些時間才會偵測出促動器故障，從圖 4.18 到圖 4.20 可以知道在 ISMCr，SMCr 以及 LQRdr 三

種方式下，其各自的錯誤偵測與診斷機制約在 $t = 1.038$ 秒， $t = 1.058$ 秒以及 $t = 1.24$ 秒時確實偵測出促動器 u_2 發生了故障，並使得三種控制方式的控制律被重組成各自的可靠度控制律，從圖 4.11，圖 4.13 以及圖 4.14 可看到，除了 LQRn 以外，約在同樣的時間 $t = 1.038$ 秒， $t = 1.058$ 秒以及 $t = 1.24$ 秒，ISMCr，SMCr 以及 LQRdr 三種方式的控制律都有突然跳動的現象就是上述的原因所造成的。

表 4.1 為效能比較的整理表，主要說明閉迴路系統狀態的穩定與否和收斂狀況，以及二次成本函數的比較表。因為 LQRdr 最終並沒有達到穩定，所以我們不考慮其性能表現。在二次成本花費上 LQRn 是最少的，另外，在控制力道上 ISMCr 的花費比起 SMCr 來的少，而狀態所造成的花費則是 ISMCr 大於 SMCr，不過最後整體二次成本花費來說 ISMCr 還是少於 SMCr。考慮 $\|u\|_\infty$ 時，最大的是 SMCr，其值為 $\|u\|_\infty = 2.895$ ，且 SMCr 產生最大控制力道 $\|u\|_\infty$ 的相對應時間為 $t = 0$ 秒時，意即 SMCr 產生最大控制力道的時間點在於系統一開始作用的時刻，而相較於 ISMCr 在時間 $t = 0$ 秒時其作用的最大控制力道僅為 2.5217，小於 SMCr 所產生的控制力道。考慮收斂時間時，因為 SMCr 花費了最多控制的力道，這使得 SMC 的收斂時間是最小的，雖然 ISMCr 收斂時間較長，但在我們所考慮的二次成本函數來說，ISMCr 的成本花費比起 SMCr 來的少。

綜合以上模擬結果，首先可以驗證 LQRdr 無法使閉迴路系統達到穩定，即其對於系統含有連續性的干擾且其促動器產生故障的情形下，LQRdr 較無穩健性，而 ISMCr 與 SMCr 則可使得閉迴路系統達到穩定。接著，我們可發現 ISMCr 的狀態變化會與 LQRn 幾乎重疊，這點我們可從圖 4.1 到圖 4.7 以及表 4.1 內狀態的積分結果觀察得知。從圖 4.8 到圖 4.10 我們可看到 ISMCr 的順滑變數能夠從頭到尾一直保持在零的附近。另外，雖然 ISMCr 比起 LQRn 需要多一部分控制輸入來抵消擾動所造成的影響，不過由於 ISMC 的閉迴路狀態軌跡幾乎與 LQRn 的閉迴路狀態軌跡相同，所以在一定程度上減少了二次成本花費，因此我們仍可以將此 ISMCr 控制律作為一種次最佳化(sub-optimal)的設計方式。由最後的效能比較表，我們也驗證了 ISMCr 的二次成本花費會比 SMCr 的二次成本花費少。

最後，經衛星動態系統的模擬結果可知其結果與4.1節到4.3節的理論分析一致。

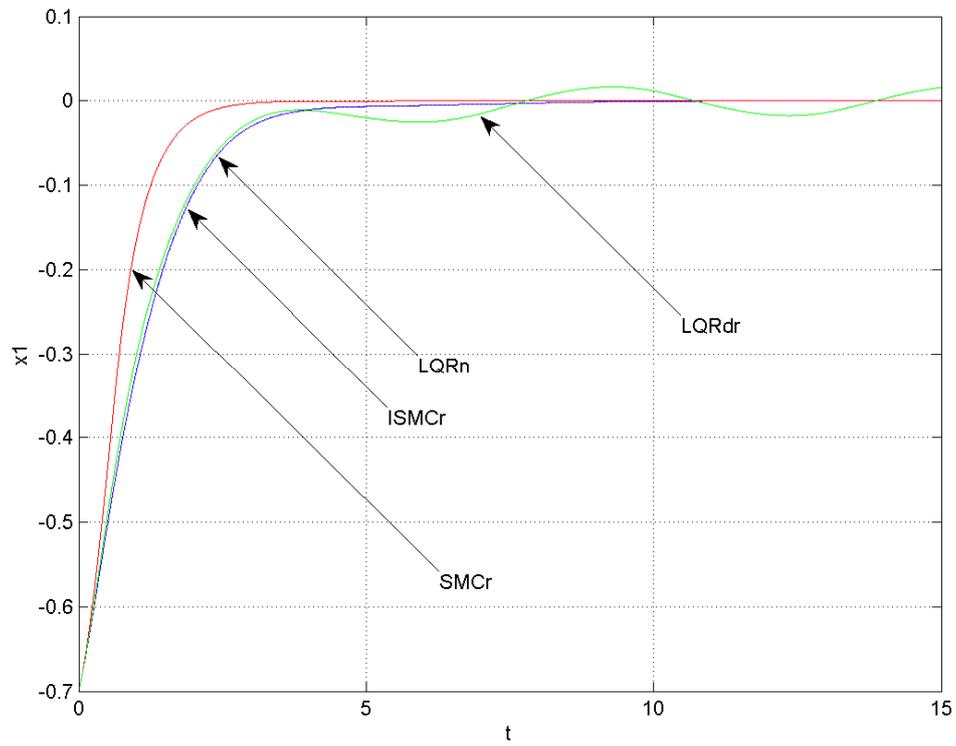


圖 4.2 衛星姿態可靠度控制其狀態變數 x_1 之時間響應比較圖

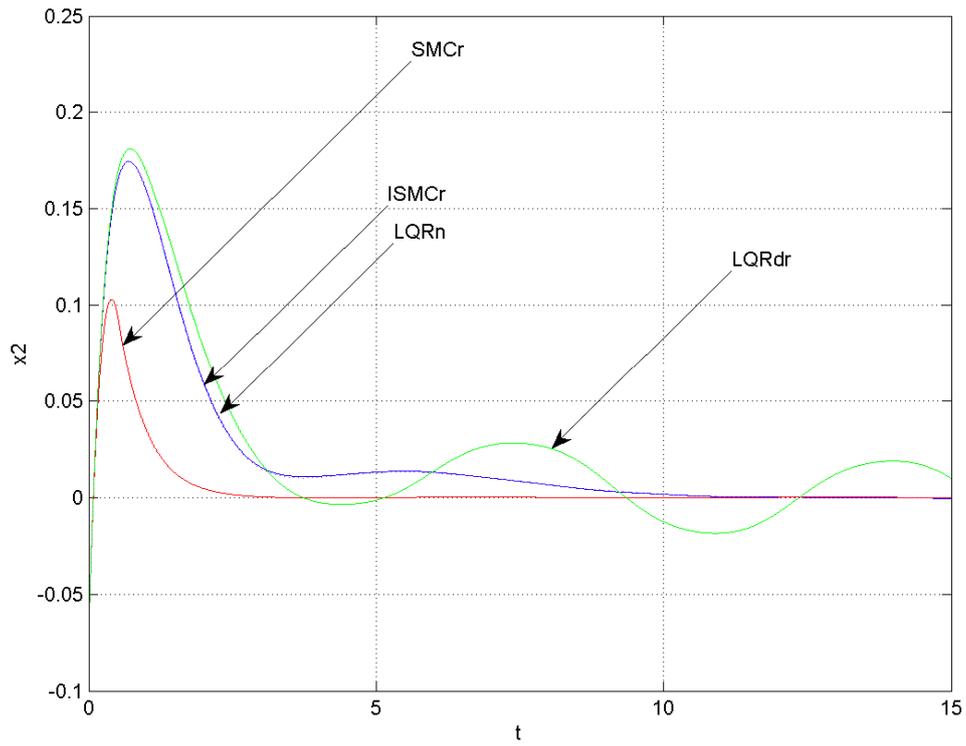


圖 4.3 衛星姿態可靠度控制其狀態變數 x_2 之時間響應比較圖

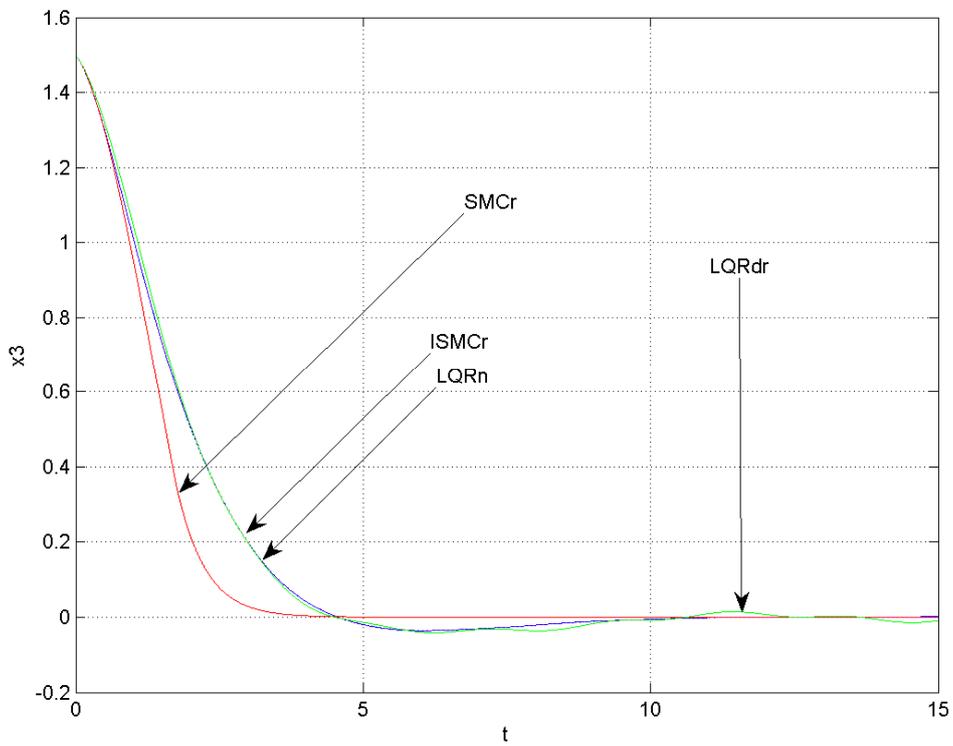


圖 4.4 衛星姿態可靠度控制其狀態變數 x_3 之時間響應比較圖

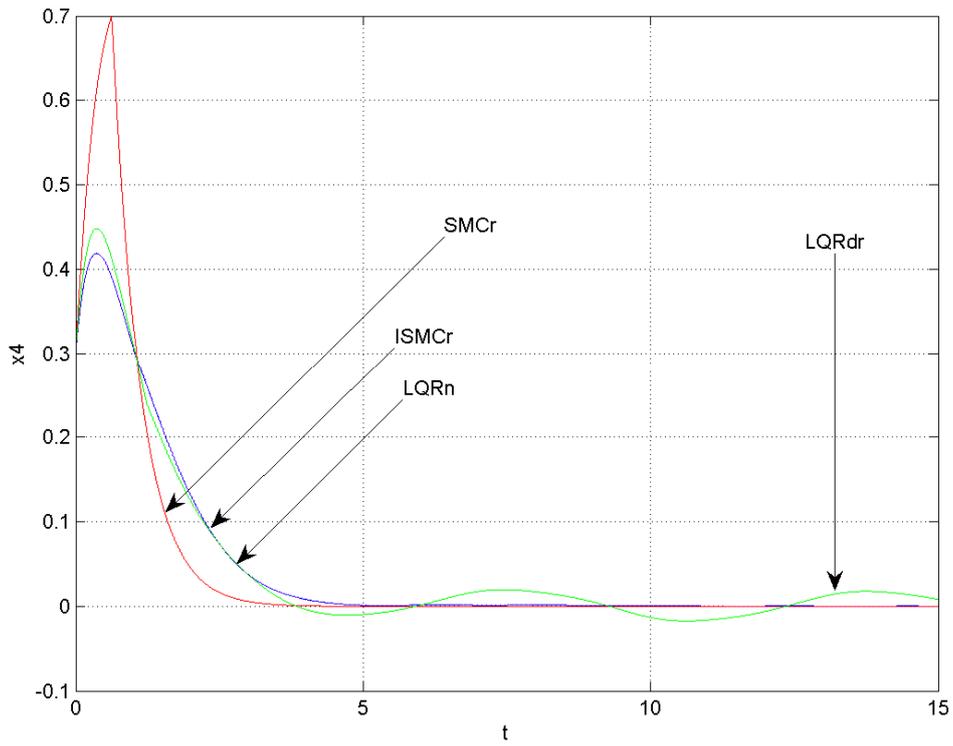


圖 4.5 衛星姿態可靠度控制其狀態變數 x_4 之時間響應比較圖

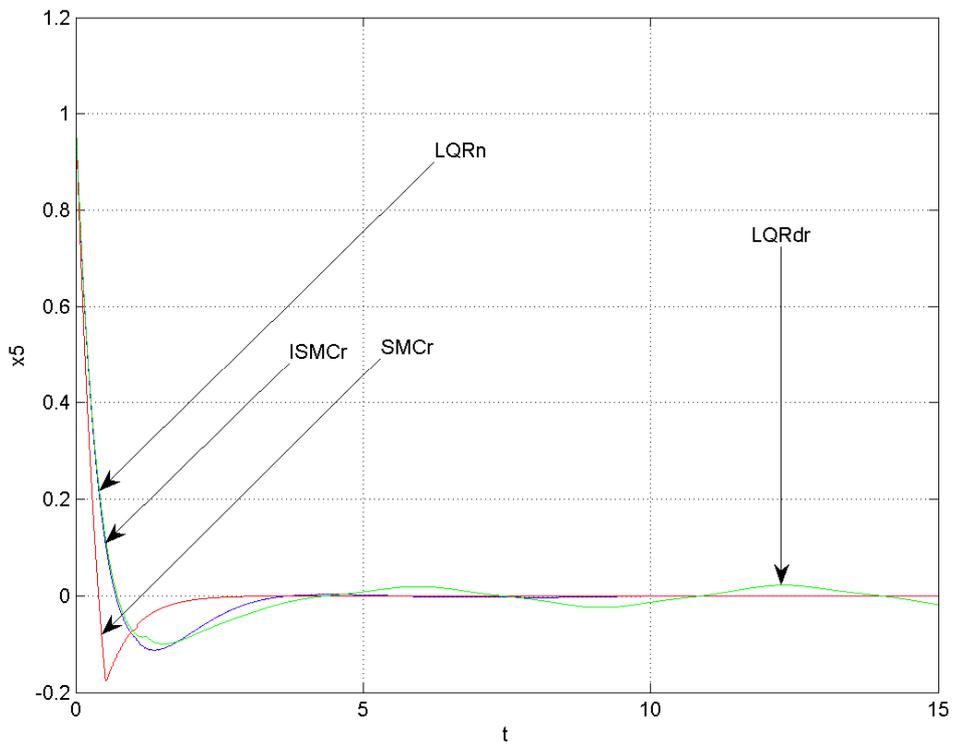


圖 4.6 衛星姿態可靠度控制其狀態變數 x_5 之時間響應比較圖

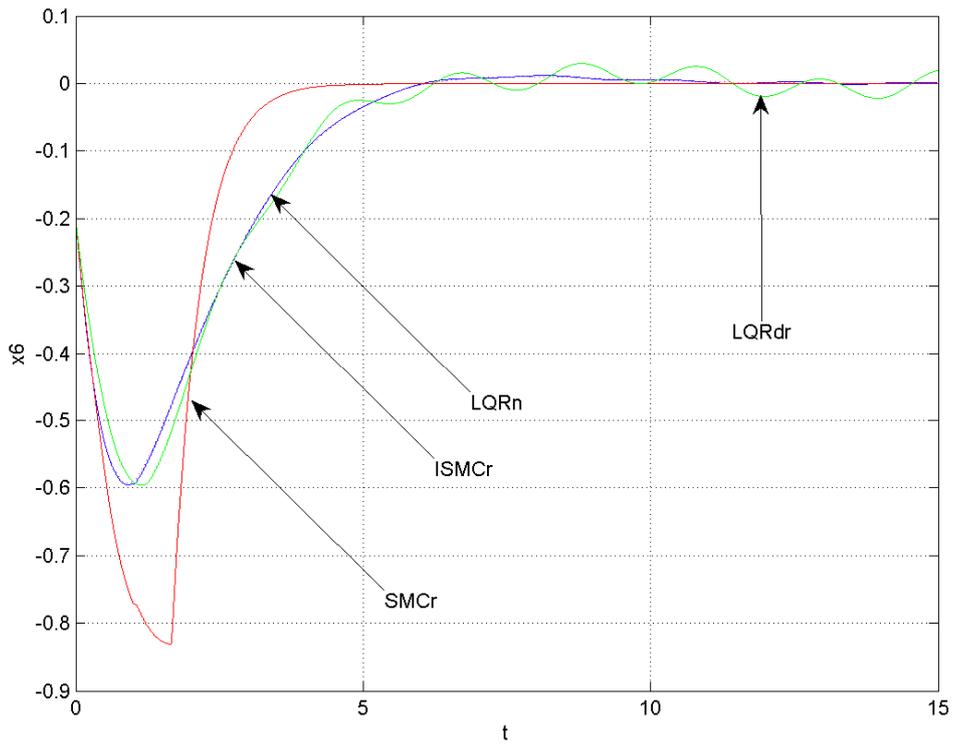


圖 4.7 衛星姿態可靠度控制其狀態變數 x_6 之時間響應比較圖

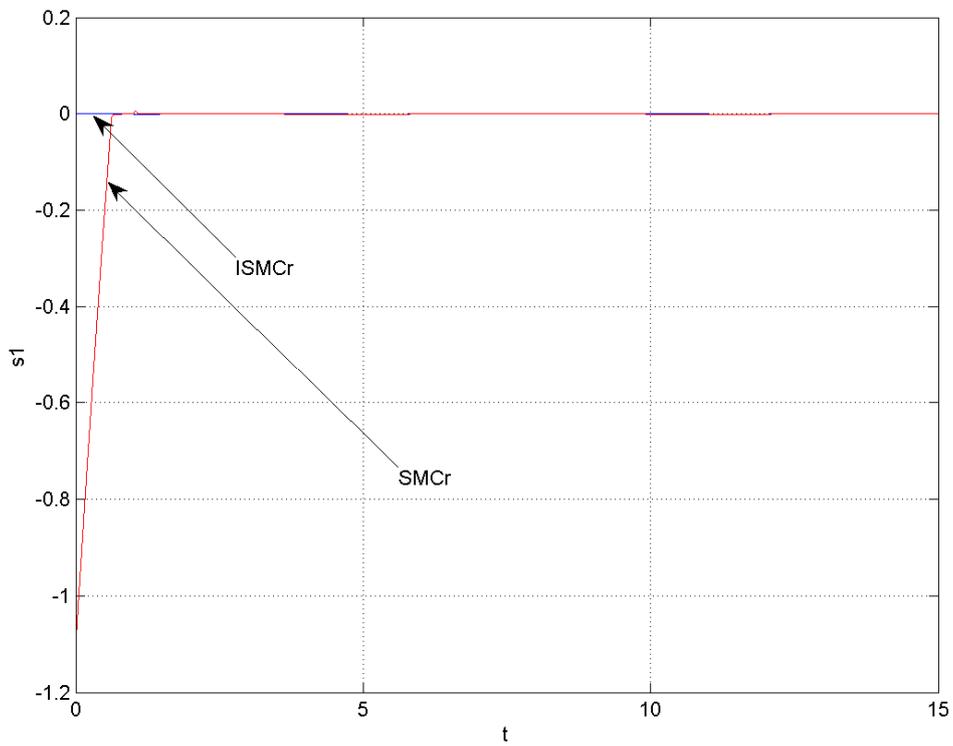


圖 4.8 衛星姿態可靠度控制其順滑變數 s_1 之時間響應比較圖

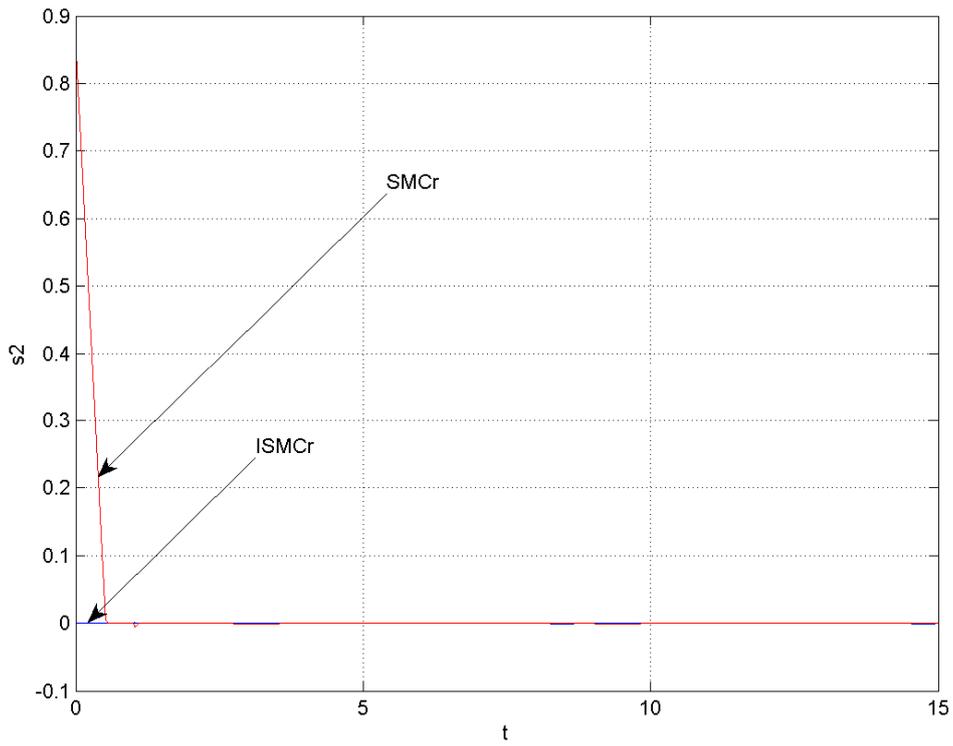


圖 4.9 衛星姿態可靠度控制其順滑變數 s_2 之時間響應比較圖

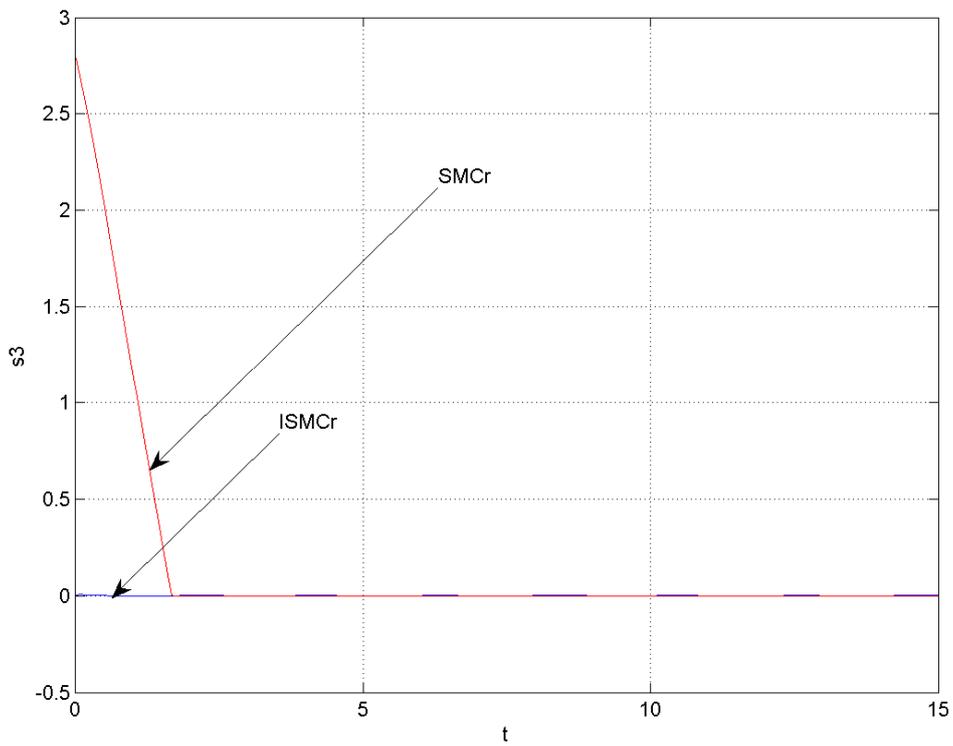


圖 4.10 衛星姿態可靠度控制其順滑變數 s_3 之時間響應比較圖

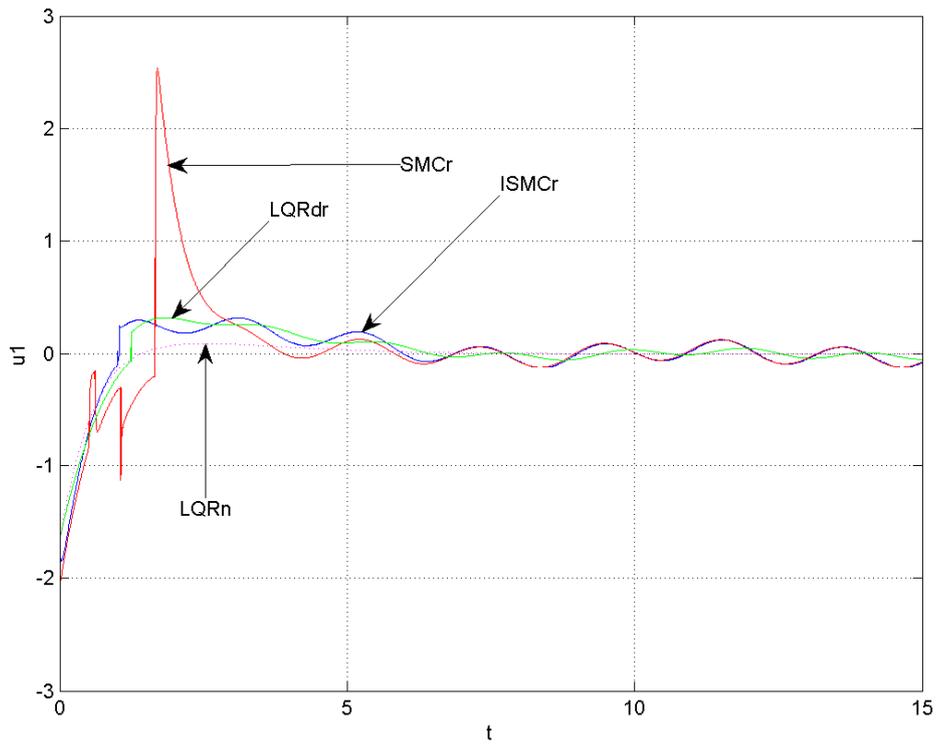


圖 4.11 衛星姿態可靠度控制其控制輸入 u_1 之時間響應比較圖

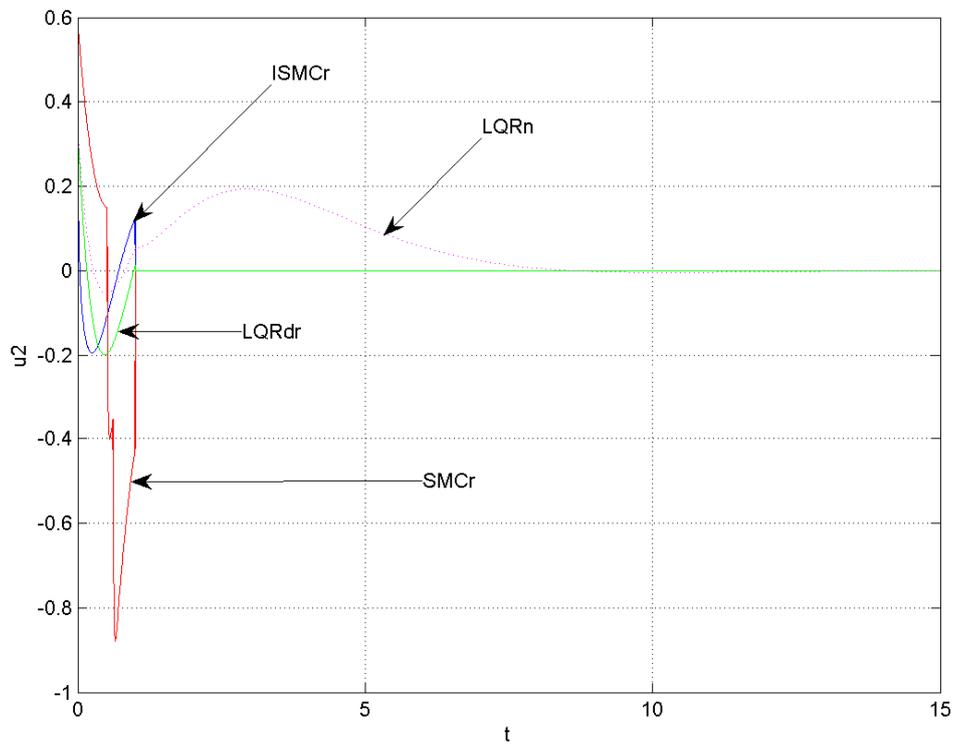


圖 4.12 衛星姿態可靠度控制其控制輸入 u_2 之時間響應比較圖

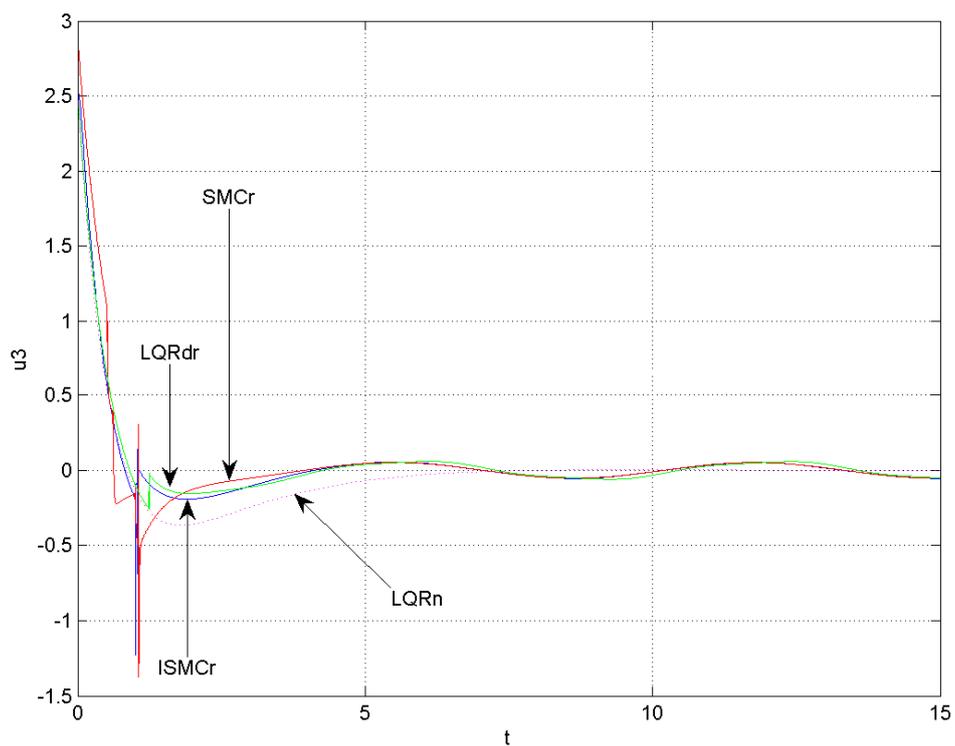


圖 4.13 衛星姿態可靠度控制其控制輸入 u_3 之時間響應比較圖

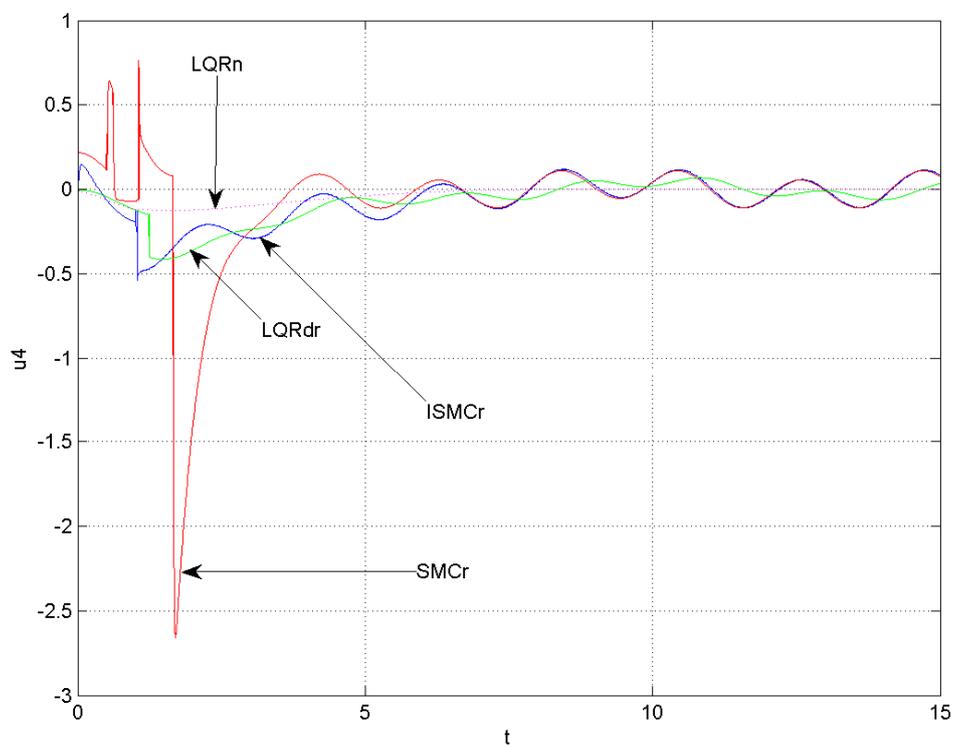


圖 4.14 衛星姿態可靠度控制其控制輸入 u_4 之時間響應比較圖

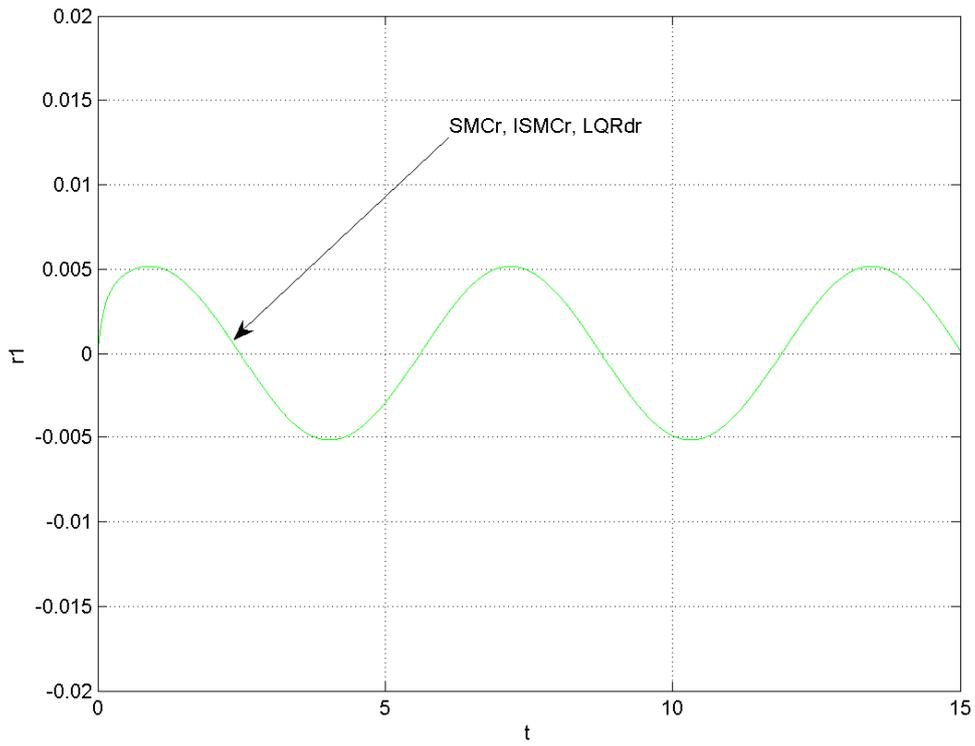


圖 4.15 衛星姿態可靠度控制其殘留信號 r_1 之時間響應比較圖

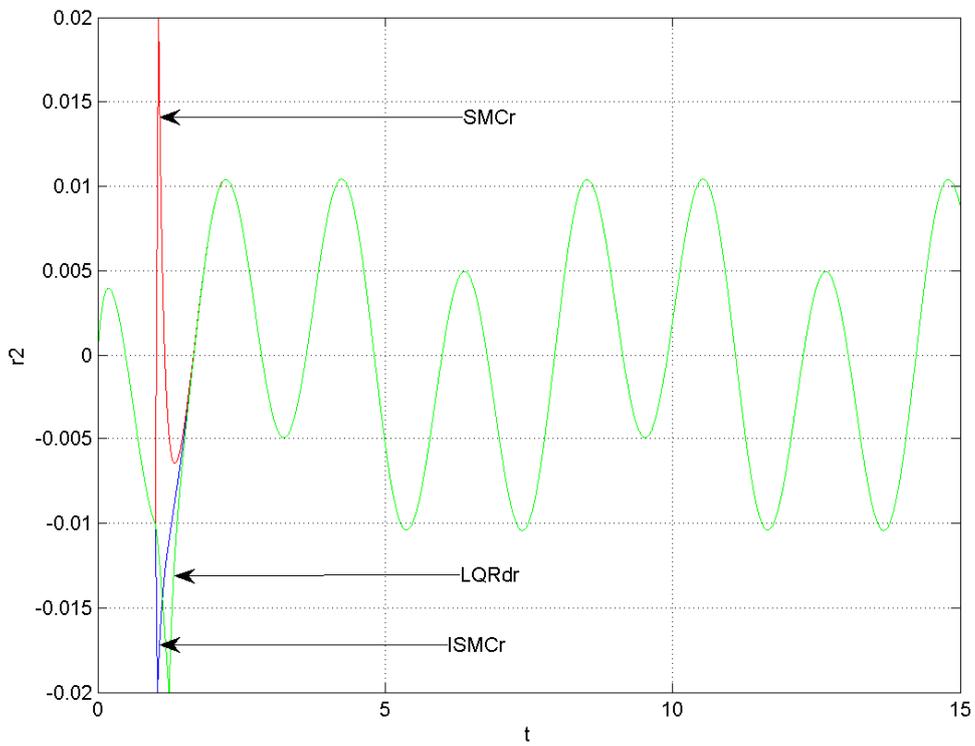


圖 4.16 衛星姿態可靠度控制其殘留信號 r_2 之時間響應比較圖

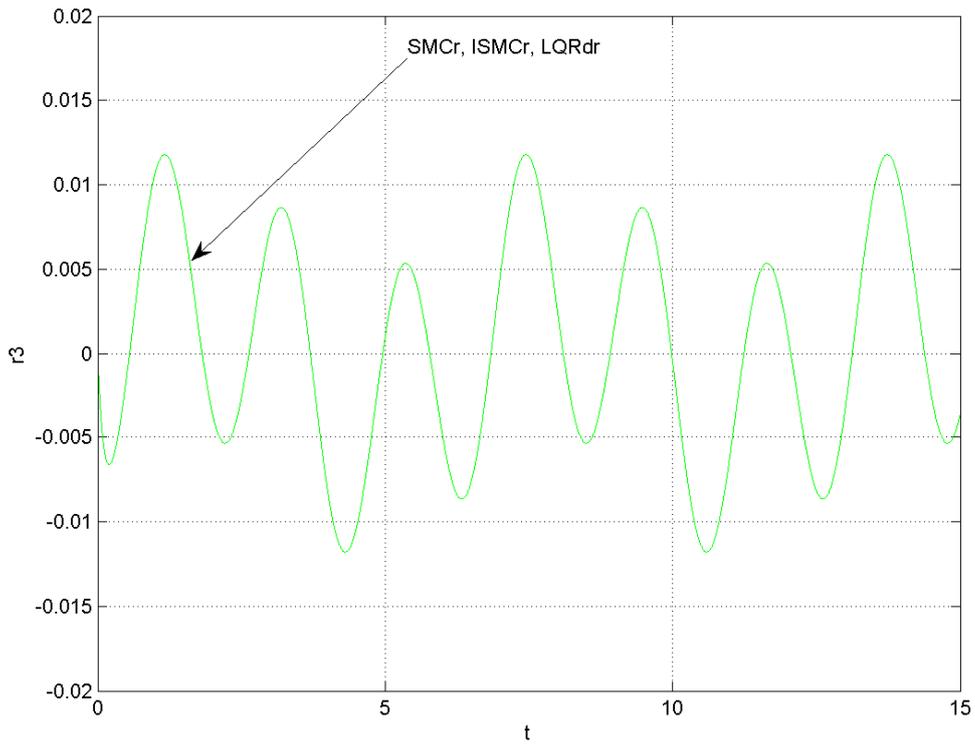


圖 4.17 衛星姿態可靠度控制其殘留信號 r_3 之時間響應比較圖

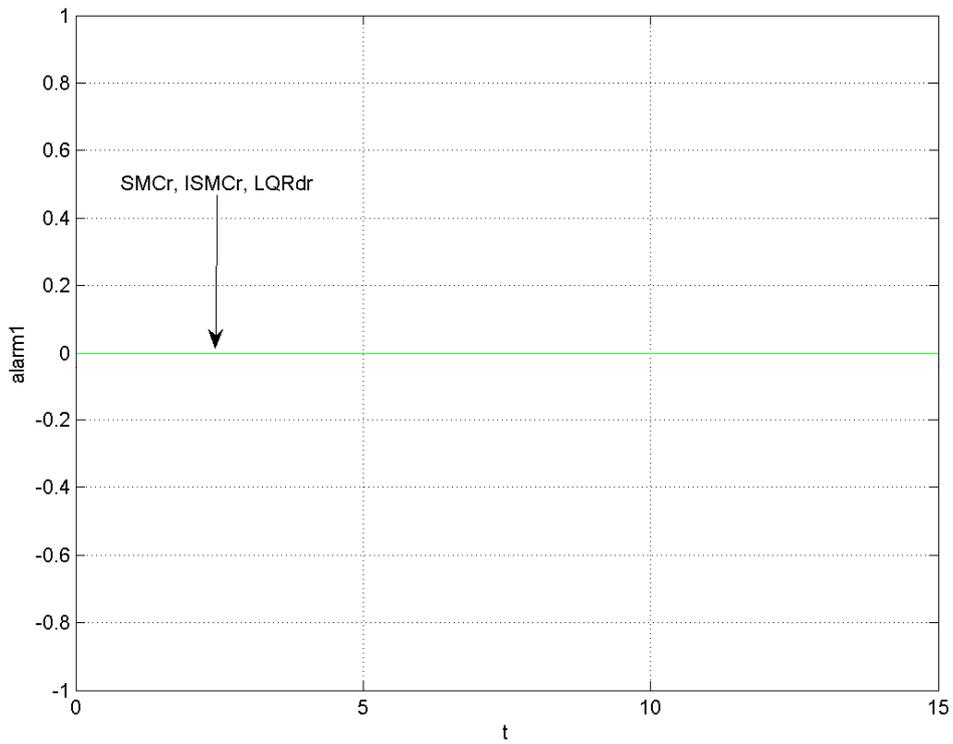


圖 4.18 衛星姿態可靠度控制其警報信號 $alarm1$ 之時間響應比較圖

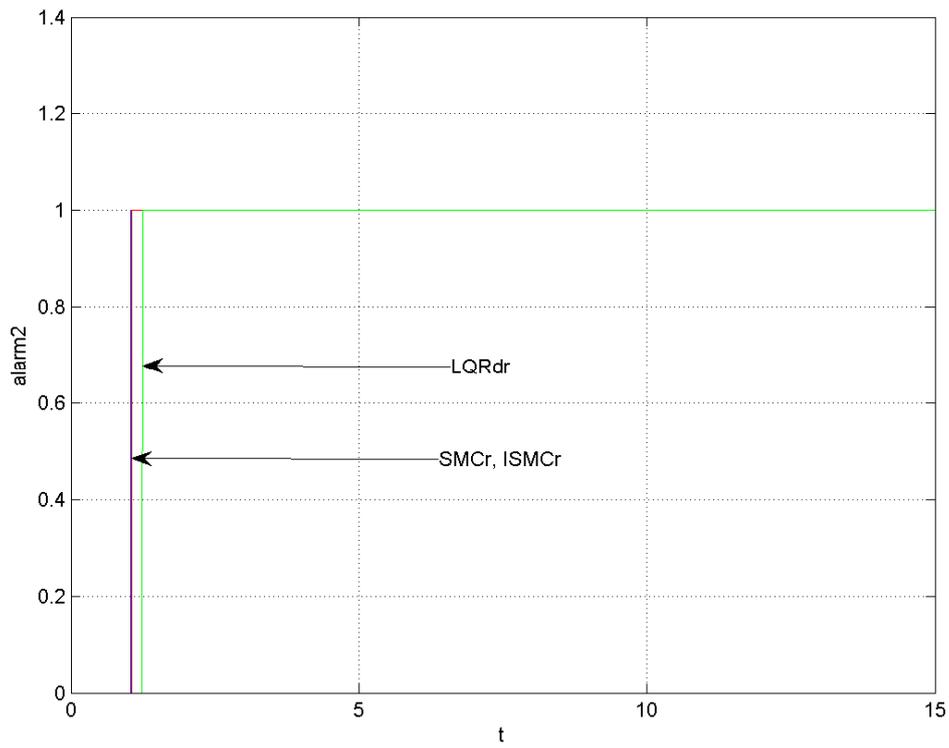


圖 4.19 衛星姿態可靠度控制其警報信號 alarm2 之時間響應比較圖

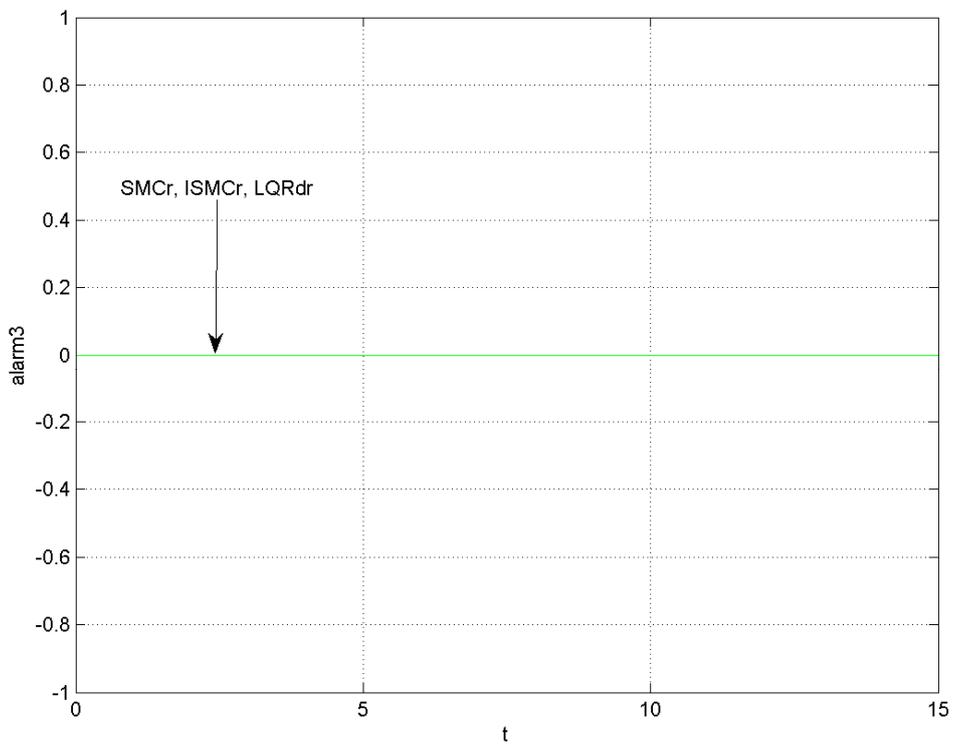
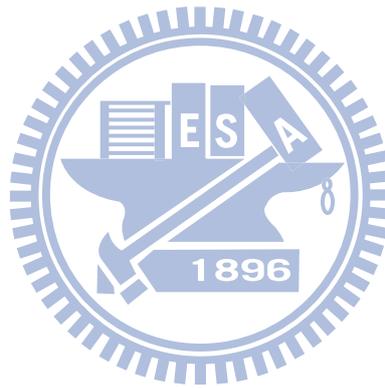


圖 4.20 衛星姿態可靠度控制其警報信號 alarm3 之時間響應比較圖

表 4.1 衛星姿態可靠度控制其效能比較表

控制方式	性能指標(performance index)					
	穩定度	$\int \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}$	$\int \mathbf{x}^T \mathbf{x}$	$\int \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \int \mathbf{x}^T \mathbf{x}$	$\ \mathbf{u}\ _\infty$	收斂時間 (convergence time)
ISMCr	穩定	1.2688	3.7402	5.009	2.5221	9.144
SMCr	穩定	4.0147	3.6363	7.651	2.8950	3.857
LQRn	穩定	0.7773	3.7394	4.5167	2.5217	9.225
LQRdr	不穩定	X	X	X	X	X



第5章

結論與未來研究方向

5.1 結論

在本論文中，我們結合 T-S 模糊模型與積分型順滑模控制，將其應用到可靠度控制設計的問題上，我們所提出的可靠度控制設計方式能夠使得當系統的某些促動器產生故障時，穩定化之控制任務仍然可被達成且不需要提供即時的系統維修動作。此外，我們所提出的可靠度控制設計方式仍保有 T-S 模糊模型以及積分型順滑模控制兩者的優點，因為使用 T-S 模糊模型時其大部分系統所使用到的參數都可以離線(offline)的計算，因此可以降低即時計算(online computation)的運算負擔，不僅如此還能保有積分型順滑模控制的優點，如對於匹配型干擾的擾動具有穩健性，消除存在迫近階段的疑慮，並且可透過對於無干擾系統的設計與性能要求，使得受干擾系統保有期望的性能表現；透過線性二次調節法之平行分配補償的方式可將其視為一種次最佳化的控制方式。再者，我們增加建立 T-S 模糊模型時的前鑑步變數(premise variable)的分割(partition)也不會使得即時計算的運算負擔增加。最後於 4.4 節中，透過應用到衛星姿態控制上之模擬結果說明了我們所提出的可靠度控制設計方式之優點。

5.2 未來研究方向

1. 在系統擾動的影響方面，我們可進一步考慮系統含有不匹配型的系統不確定性或干擾(mismatched type uncertainties or disturbances)，並探討其影響。
2. 在可靠度控制方面，往後的研究可以討論被動式可靠度控制設計，對於可能發生故障的部分應該如何設計以提升系統性能。
3. 在錯誤偵測與診斷機制設計方面，可進一步探討如何設計一個穩健的警報機制，使得錯誤偵測與診斷機制不會因為受到較大的系統擾動影響而產生可能的誤報現象。



參考文獻

- [1] Y.-W. Liang, S.-D. Xu, and L.-W. Ting "T-S Model-Based SMC Reliable Design for a Class of Nonlinear Control Systems," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, pp. 3286-3295, 2009.
- [2] M. L. Corradini and G. Orlando, "Actuator Failure Identification and Compensation Through Sliding Modes," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 15, pp. 184-190, 2007.
- [3] Y.-W. Liang, D.-C. Liaw, and T.-C. Lee, "Reliable control of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 706-710, 2000.
- [4] Y.-W. Liang and S.-D. Xu, "Reliable Control of Nonlinear Systems via Variable Structure Scheme," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, pp. 1721-1726, 2006.
- [5] Y.-W. Liang, S.-D. Xu, and C.-L. Tsai, "Study of VSC Reliable Designs With Application to Spacecraft Attitude Stabilization," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 15, pp. 332-338, 2007.
- [6] F. Liao, J. L. Wang, and G.-H. Yang, "Reliable robust flight tracking control: an LMI approach," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, pp. 76-89, 2002.
- [7] R. F. Stengel, "Intelligent failure-tolerant control," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 11, pp. 14-23, 1991.
- [8] R. J. Veillette, J. V. Medanic, and W. R. Perkins, "Design of reliable control systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp. 290-304, 1992.
- [9] M. Vidyasagar and N. Viswanadham, "Reliable stabilization using a multi-controller configuration," *Automatica*, vol. 21, pp. 599-602, 1985.
- [10] G.-H. Yang, J. L. Wang, and Y. C. Soh, "Reliable guaranteed cost control for uncertain nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 2188-2192, 2000.

- [11] J. Huang and C.-F. Lin, "Numerical approach to computing nonlinear control laws," *J. Guid. Control Dyn.*, vol. 18, no. 5, pp. 989-994, 1995.
- [12] R. H. Abiyev and O. Kaynak, "Fuzzy Wavelet Neural Networks for Identification and Control of Dynamic Plants-A Novel Structure and a Comparative Study," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, pp. 3133-3140, 2008.
- [13] W. Chang, J. B. Park, Y. H. Joo, and G. Chen, "Design of robust fuzzy-model-based controller with sliding mode control for SISO nonlinear systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 125, pp. 1-22, 2002
- [14] B.-S. Chen, Y.-T. Chang, and Y.-C. Wang, "Robust H_∞ -Stabilization Design in Gene Networks Under Stochastic Molecular Noises: Fuzzy-Interpolation Approach," *IEEE Transactions on Systems, Man, Cybern, Part B, Cybernetics*, vol. 38, pp. 25-42, 2008.
- [15] K.-H. Cheng, C.-F. Hsu, C.-M. Lin, T.-T. Lee, and C. Li, "Fuzzy-Neural Sliding-Mode Control for DC-DC Converters Using Asymmetric Gaussian Membership Functions," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 54, pp. 1528-1536, 2007.
- [16] L. dos Santos Coelho and B. M. Herrera, "Fuzzy Identification Based on a Chaotic Particle Swarm Optimization Approach Applied to a Nonlinear Yo-yo Motion System," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 54, pp. 3234-3245, 2007.
- [17] C.-L. Huang, "A novel Takagi-Sugeno-based robust adaptive fuzzy sliding-mode controller," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 12, pp. 676-687, 2004.
- [18] Z. Li, W. A. Halang, and G. Chen, Eds., *Integration of Fuzzy Logic and Chaos Theory*. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [19] Y.-W. Liang, S.-D. Xu, L. D.-C. Liaw, and C.-C. Chen, "A Study of T-S Model-Based SMC Scheme With Application to Robot Control," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, pp. 3964-3971, 2008.
- [20] C. Lin, Q.-G. Wang, and T. H. Lee, "Stabilization of uncertain fuzzy time-delay systems via variable structure control approach," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 13, pp. 787-798, 2005.

- [21] S. Mohagheghi, G. K. Venayagamoorthy, and R. G. Harley, "Fully Evolvable Optimal Neuro fuzzy Controller Using Adaptive Critic Designs," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 16, pp. 1450-1461, 2008.
- [22] P. Quinones-Reyes, H. Benitez-Perez, F. Cardenas-Flores, and F. Garcia-Nocetti, "An approximation for reconfigurable Fuzzy Takagi-Sugeno networked control," *IEEE Potentials*, vol. 27, pp. 38-44, 2008.
- [23] W. Wang, "An Intelligent System for Machinery Condition Monitoring," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 16, pp. 110-122, 2008.
- [24] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial," *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, pp. 212-232, 1988.
- [25] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: a survey," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, pp. 2-22, 1993
- [26] H. K. Khalil, *Nonlinear System*, 2nd. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [27] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. 2009.
- [28] F. Castanos and L. Fridman, "Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 51, pp. 853-858, 2006.
- [29] W.-J. Cao and J.-X. Xu, "Nonlinear integral-type sliding surface for both matched and unmatched uncertain systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 49, pp. 1355-1360, 2004.
- [30] L.-X. Wang, *Adaptive Fuzzy System and Control: Design and Stability Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1994.
- [31] K. Tanaka and H.-O. Wang, *Fuzzy Control System Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. Hoboken, NJ: Wiley, 2001.
- [32] C.-S. Tseng, B.-S. Chen, and H.-J. Uang, "Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, pp. 381-392, 2001.
- [33] C.-C. Chen, S.-F. Su, and S.-S. Chen, "Robust TSK fuzzy modeling for

function approximation with outliers," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, pp. 810-821, 2001.

- [34] C.-C. Hsiao, S.-F. Su, T.-T. Lee, and C.-C. Chen, "Hybrid compensation control for affine TSK fuzzy control systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, Cybern, Part B: Cybernetics*, vol. 34, pp. 1865-1873, 2004.
- [35] R.-J. Wang, W.-W. Lin, and W.-J. Wang, "Stabilizability of linear quadratic state feedback for uncertain fuzzy time-delay systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, Cybern, Part B: Cybernetics*, vol. 34, pp. 1288-1292, 2004.
- [36] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix computations*, 3rd. Baltimore, MD: The John Hopkins Univ. Press, 1996.
- [37] A. M. Farahmand and M. J. Yazdanpanah, "Locally Optimal Takagi-Sugeno Fuzzy Controllers," *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference, Seville, Spain, December 12-15, 2005*, pp. 4095-4099.
- [38] *Optimization Toolbox User's Guide, for Use With MATLAB*, Mathworks Ins., Natick, MA, 2001. [Online]. Available: <http://www.mathworks.com>

