

國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文



應用最佳化輪胎與路面間摩擦力分配於車輛運動控制

Application of Optimum Tire Force Distribution to
Vehicle Motion Control

研究生：鄭勝元

指導教授：蕭得聖 博士

中華民國一百年九月

應用最佳化輪胎與路面間摩擦力分配於車輛運動控制
Application of Optimum Tire Force Distribution to Vehicle Motion Control

研究生：鄭勝元

指導教授：蕭得聖 博士

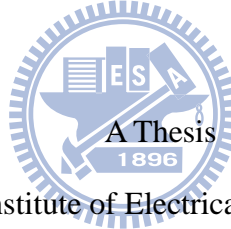
Student : Sheng-Yuan Cheng

Advisor : Dr. Te-Sheng Hsiao

國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文



Submitted to Institute of Electrical Control Engineering

College of Electrical Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

In

Electrical Control Engineering

September 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年九月

應用最佳化輪胎與路面間摩擦力分配於車輛運動控制

學生：鄭勝元

指導教授：蕭得聖 博士

國立交通大學電控工程研究所

摘要

近年來越來越多的國內外汽車大廠都紛紛投入電動車的發展，電動車將會成為未來交通載具新興的發展趨勢，其除了有環保節能的效益外，亦可提供不同的車輛驅動與操控架構，例如：四輪獨立驅動與四輪獨立轉向等等。而基於電動車所提供的驅動與操控架構，可應用更先進的運動控制技術提升車輛的安全性與操控性。

本研究針對四輪獨立驅動與四輪獨立轉向車輛，將運動控制架構分為上、下層控制器，上層控制器計算所需的縱向合力、側向合力與橫擺力矩的總和，使車輛的動態跟隨給定的參考軌跡；下層控制器則考慮輪胎的非線性特性以及與真實輪胎間模型不確定性的問題，藉由控制輪胎力矩與轉向角產生所需的輪胎摩擦力。上層與下層控制器之間透過最佳化摩擦力分配將上層控制器所需之力量適當地分配給每個輪胎，再由下層控制器使各個輪胎產生所需的縱向與側向摩擦力。本研究透過模擬驗證在轉向與車道變換的駕駛情況下控制器控制的結果，在此控制架構下，能夠改善四輪轉向在車輛側向加速度大時對車輛運動控制的不穩定問題，以及彌補直接橫擺力矩控制對車輛側向運動控制的不足。

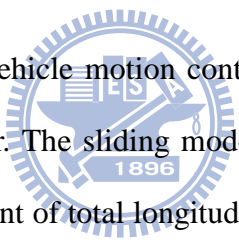
Application of Optimum Tire Force Distribution to Vehicle Motion Control

Student : Sheng-Yuan Cheng

Advisor : Dr. Te-Sheng Hsiao

Institute of Electrical Control Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

The logo of National Chiao Tung University is a circular emblem. It features a central shield with a book and a torch, surrounded by the university's name in Chinese and English. The year '1896' is inscribed at the bottom of the emblem.

In this paper, the proposed vehicle motion control structure is separated into the upper controller and the lower controller. The sliding mode control technique is used in the upper controller for calculating the amount of total longitudinal force, lateral force and yaw moment such that the vehicle can track a given reference trajectory. Then the optimum tire force distribution algorithm determines the longitudinal and lateral forces of each tire, subject to the constraints that the resulting forces and moment of all tires meet the requirements of the upper controller, and that the friction ellipse of each tire is satisfied. In the lower controller, a nonlinear Dugoff's tire model is considered when using sliding mode control technique to generate the assigned tire forces by controlling the wheel torque and the steering angle. Comparisons of the proposed control structure with the four-wheel steering control and direct yaw moment control are conducted by simulations. The results indicate that the proposed structure can improve the handling performance and stability of vehicle motion when the other control methods fail in the event of high lateral acceleration.

致謝

首先誠摯的感謝指導教授蕭得聖博士，老師悉心的教導以及對我研究能力的信任，讓我能夠順利的完成碩士論文的研究，不僅在理論上有更清楚的認識，且在研究的過程中該如何面對問題、解決問題，以及分析問題的經驗也獲益匪淺，可謂獲益良多。

本論文的完成另外亦得感謝我的口試委員徐保羅教授與陳宗麟教授。因為有各位老師在口試中給的建議及方向，使得本論文能夠更完整而嚴謹。

兩年裡的日子，感謝永洲、翊熏學長不厭其煩的指出我研究中的缺失，且總能在我迷惘時為我解惑，也感謝宜熹同學、偉仁同學與偉杰同學的共同砥礪。俊傑、伯俊、志偉、昌謀與彥良學弟的加油與鼓勵，也讓我備感溫馨。感謝其他實驗室的大學同學和在台北的高中同學，能在我研究苦悶時陪我一起娛樂，讓我得以放鬆心情。

最後我要感謝永遠支持我的家人，有他們的支持使我在求學的階段能夠一路堅持下去，所以在此我要將此論文獻給我的家人，我的父母。

目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
致謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	viii
符號表	ix
第一章、緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的	2
1.3 研究貢獻	3
1.4 論文架構	4
第二章、相關研究	5
2.1 四輪轉向控制相關研究	5
2.2 直接橫擺力矩控制相關研究	8
第三章、車輛系統模型	11
3.1 車輛動態模型	11
3.2 輪胎模型	15
第四章、控制器設計	17
4.1 上層控制器	18
4.1.1 車輛參考模型	18



4.1.2 車輛縱向速度、車身側滑角與橫擺角速度控制器	21
4.2 最佳化輪胎與路面間摩擦力分配	25
4.2.1 成本函數	25
4.2.2 最佳化問題求解	27
4.3 下層控制器	29
4.3.1 縱向力估測	30
4.3.2 縱向摩擦力回授穩健控制器	30
4.3.3 即時適應性路面摩擦力估測	36
4.3.3.1 自適應性法設計	36
4.3.3.2 自適應性法平衡點與保守估測	37
4.3.4 輪胎側滑角控制器	42
第五章、模擬與結果討論	46
5.1 J-turn	48
5.2 Single-lane change	54
5.3 相關控制器控制結果比較	60
第六章、結論與未來展望	68
6.1 結論	68
6.2 未來工作	69
參考文獻	70



圖目錄

圖 1.1 控制系統流程方塊圖	3
圖 2.1 腳踏車模型	5
圖 2.2 後輪轉角前饋控制[4]	6
圖 2.3 後輪轉角回饋控制[4]	7
圖 2.4 解耦合控制系統[5].....	7
圖 2.5 DYC 控制系統方塊圖，擷取自 [9].....	9
圖 3.1 輪胎自由體俯視圖	11
圖 3.2 車輛自由體俯視圖	12
圖 3.3 輪胎轉動自由體圖	13
圖 3.4 輪胎側滑角和前進速度示意圖	14
圖 3.5 結合縱向力與側向力摩擦力圖	16
圖 4.1 系統架構圖	18
圖 4.2 最大車身側滑角與質心速度關係圖[18]	20
圖 4.3 縱向滑動比與最大縱向摩擦力關係圖	35
圖 4.4 “Magic formula”縱向滑動比與最大縱向摩擦力關係圖(左)、輪胎縱向力對滑動比 偏微斜率($g_{\lambda}^* + g'_{\lambda}$)與 $\theta g'_{\lambda}$ 比較圖(右).....	35
圖 4.5 估測誤差函數 ($\lambda > 0$)	39
圖 4.6 估測誤差函數 ($\lambda < 0$)	40
圖 4.7 “Magic formula”側向力與 Dugoff’s 輪胎模型側向力之比值	44
圖 5.1 車輛行駛路徑示意圖 (左: J-turn, 右: Single-lane change).....	46
圖 5.2 模擬一之駕駛者轉向命令(左)與路面摩擦力係數(右).....	49
圖 5.3 模擬一之縱向力最佳化分配、估測與實際結果	49
圖 5.4 模擬一之側向力最佳化分配與實際結果	50
圖 5.5 模擬一之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果 ...	50

圖 5.6 模擬一之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果	51
圖 5.7 側向摩擦力與正向力關係圖($\mu = 0.85$)：Magic formula 輪胎模型(右)、Dugoff's 輪胎模型(左)	51
圖 5.8 模擬二之駕駛者轉向命令(左)與路面摩擦力係數(右).....	52
圖 5.9 模擬二之縱向力最佳化分配、估測與實際結果	52
圖 5.10 模擬二之側向力最佳化分配與實際結果	53
圖 5.11 模擬二之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果 .	53
圖 5.12 模擬二之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果	54
圖 5.13 模擬三之駕駛者轉向命令(左)與路面摩擦力係數(右).....	55
圖 5.14 模擬三之縱向力最佳化分配、估測與實際結果	55
圖 5.15 模擬三之側向力最佳化分配與實際結果	56
圖 5.16 模擬三之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果 .	56
圖 5.17 模擬三之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果	57
圖 5.18 模擬四之駕駛者轉向命令(左)與路面摩擦力係數(右).....	57
圖 5.19 模擬四之縱向力最佳化分配、估測與實際結果	58
圖 5.20 模擬四之側向力最佳化分配與實際結果	58
圖 5.21 模擬四之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果 .	59
圖 5.22 模擬四之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果	59
圖 5.23 模擬五之駕駛者轉向命令(左)與路面摩擦力係數(右).....	61
圖 5.24 模擬五之控制車輛橫擺角速度比較圖	61
圖 5.25 模擬五之控制車輛質心側滑角比較圖	62
圖 5.26 模擬五之控制車輛縱向速度比較圖	62
圖 5.27 模擬五之控制車輛於地表座標上所行駛路徑比較圖	63
圖 5.28 模擬五之控制車輛輪胎轉向角比較圖	64
圖 5.29 模擬六之駕駛者轉向命令(左)與路面摩擦力係數(右).....	64
圖 5.30 模擬六之控制車輛橫擺角速度比較圖	65

圖 5.31 模擬六之控制車輛質心側滑角比較圖	65
圖 5.32 模擬六之控制車輛縱向速度比較圖	66
圖 5.33 模擬六之控制車輛於地表座標上所行駛路徑比較圖	66
圖 5.34 模擬六之上層控制器縱向合力 X(左)與側向合力 Y(右)計算結果	67

表目錄

表 5.1 模擬中所使用的車輛參數	47
表 5.2 模擬中所使用的”Magic formula”輪胎模型參數	48
表 5.3 兩種 DYC 控制型式之權重因子值[12]	61



符號表

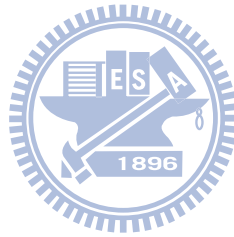
r	: 橫擺角速度
V_x	: 車輛質心縱向速度
V_y	: 車輛質心側向速度
β	: 車體質心側滑角
a_x	: 車輛縱向加速度
a_y	: 車輛側向加速度
g	: 重力加速度
M_z	: 車輛橫擺力矩
I_z	: 橫擺角轉動慣量
m	: 車體質量
m_s	: 車體集中質量
h_s	: 車體集中質量之質心與地面的高度
t_f	: 車輛前輪輪距
t_r	: 車輛後輪輪距
l_f	: 車體質心到前輪軸的距離
l_r	: 車體質心到後輪軸的距離
l	: 前輪軸到後輪軸的距離
δ	: 車輪轉向角
ω	: 輪胎轉動角速度
v	: 輪胎前進速度
I_w	: 輪胎轉動慣量
R_w	: 輪胎轉動半徑
r_i	: 輪胎等效半徑



λ : 輪胎縱向滑動比
 α : 輪胎側滑角
 σ : 理論滑動
 σ_x : 縱向理論滑動
 σ_y : 側向理論滑動
 T_m : 輪胎扭矩
 F_a : 平行胎面之縱向摩擦力
 F_{a0} : “Magic formula” 輪胎模型純縱向滑動之縱向摩擦力
 F_b : 垂直胎面之側向摩擦力
 F_{b0} : “Magic formula” 輪胎模型純側向側滑之側向摩擦力
 F_x : 平行車身的力
 F_y : 垂直車身的力
 F_z : 輪胎正向力
 F_{z0} : 車輛等速直線行駛時輪胎的正向力
 $B_{x,y}$: 輪胎參數
 $C_{x,y}$: 輪胎參數
 $D_{x,y}$: 輪胎參數
 $E_{x,y}$: 輪胎參數
 r_{ref} : 橫擺角速度參考值
 β_{ref} : 車體質心側滑角參考值
 V_{xref} : 車輛質心縱向速度參考值
 X : 上層控制器計算所需的縱向合力
 Y : 上層控制器計算所需側向合力
 M : 上層控制器計算所需橫擺力矩總和
 $S_{X,Y,M}$: 順滑平面
 μ : 路面摩擦力係數



- $\hat{\mu}$: 路面摩擦力係數估測值
- C_i : 第 i 個輪胎的權重參數
- \hat{F}_a : 縱向力估測結果
- F'_a : Dugoff's 輪胎模型之縱向摩擦力
- F_{ad} : 分配之縱向力參考值
- F'_b : Dugoff's 輪胎模型之側向摩擦力
- F_{bd} : 分配之側向力參考值
- α_d : 反輪胎模型計算之輪胎側滑角參考值
- C'_x : Dugoff's 輪胎模型之縱向剛度
- C'_y : Dugoff's 輪胎模型之轉向剛度
- $S_{a,b}$: 順滑平面



第一章、緒論

1.1 研究背景

近年來環保意識抬頭，能源危機和全球氣候暖化變遷的議題不斷地被各界討論，許多企業也都持續於發表與開發新的綠色環保產品和概念。

在汽車工業方面，越來越多的國內外汽車大廠都紛紛投入發展電動車或是油電混合動力車的行列，像是國內廠商中納智捷發表的智慧型電動車 Lexgen M7、美國電動車廠商特斯拉(Tesla)的純電動跑車 TESLA Roadster、德國賓士推出的 Mini E、三菱量產的 i-MiEV，以及日本汽車廠商 TOYOTA 的 Prius 油電混合動力車等等，都是希望能以電能取代傳統汽油能源達到節能的目的，並且減少行駛時廢氣的排放。加上先進國家近年來均積極促進電動車產業發展，推動多項補助政策，預期電動車在未來的市佔率將會有所提升。

在電動車研究與控制上，Yoichi Hori[1]在論文中提到電動車發展與研究的價值，是適合在電動車上應用”先進的運動控制(Advanced motion control)”技術；電動車使用馬達或者是輪內馬達(In-wheel motor)作為車輛的動力，可以總結出三項優點：(1)電動馬達可以快速且準確的產生出扭力。回授控制器可以在駕駛者對車輛動態作改變前，對車輛作控制。(2)馬達可以安裝在兩個或四個輪內。將馬達安裝到每一個輪胎，可以讓左右兩側的輪胎產生不同方向的扭力，實現控制策略。(3)馬達的扭力容易量測。馬達的扭力可以從量測馬達的電流得知，或者是用扭力感測器(Torque sensor)也可以量測。利用量測到扭力的資訊，設計簡單的輪胎與路面間縱向摩擦力估測器，就可以估測出加速或減速時摩擦力的大小。在 Yoichi Hori、Peng He[1][2][3]的論文中，所研究的車輛是他們改造 Nissan March 所設計的電動車：UOT (University of Tokyo) Electric March II，在車輛四個輪胎內都有安裝輪內馬達，能夠獨立控制每個輪內馬達的扭力。此外，國內研究單位也有不錯的電動車研究成果展現，像是工研院所研發的四輪電動車 e-buggy，也展現了未來綠能動力電動車發展的可能性。

當越來越多駕駛者選擇駕駛電動車當作日常代步工具時，車輛本身駕駛上的舒適性，以及目前所關注的環保節能的問題上很重要外，安全的駕駛系統一直以來也都是一個非常重要的議題。在車輛轉向的穩定性控制已經有很多學者做這方面的研究，且提出不同的控制策略；像是四輪轉向(Four-wheel steering：4WS)控制[4][5][6]、差動式煞車(Differential brake)轉向控制[7]、直接橫擺力矩控制(Direct yaw moment control：DYC)[8][9][11]，以及本研究所使用的最佳化輪胎摩擦力分配(Optimum tire force distribution)控制方法[21]等等，都有不錯的研究成果。

一般車輛在道路上行駛，路面的狀況會直接影響到車輛輪胎與路面間的受力，而輪胎與路面間的受力又會影響到車輛的動態，所以如果可以估測車輛輪胎與路面間摩擦力，控制器可以利用此資訊更有效的控制輪胎動態，讓車輛在不同的路面狀況下都能保持安全與穩定地行駛。例如：車輛某側輪胎行駛過一水灘，控制器就必須控制使車輛保持原行駛路徑，避免打滑；車輛在作轉向時，有效平均分配車輛輪胎與路面間摩擦力作控制，保持轉向的穩定安全；此外，控制器若能即時得知此時輪胎與路面間摩擦力大小，也可以控制輪胎扭力或轉角避免輪胎鎖死或打滑。因此，電動車若具有估測路面摩擦力的系統，判斷路面與輪胎間的摩擦力，回授設計控制器作控制，將有助於控制車輛的行駛動態。

本研究致力於如何將估測的摩擦力回授設計控制器，並且建立車輛運動控制系統，包含車輛縱向速度、車身質心側滑角，以及橫擺角速度的穩定控制，透過最佳化輪胎摩擦力的分配，更有效且安全的控制車輛的行駛。

1.2 研究目的

本研究目的在於設計車輛運動控制系統，最佳化分配出各個輪胎與路面間所需要產生的摩擦力，並由下層控制器控制輪胎動態產生所需的摩擦力，使得車輛達到我們所希望的動態運動。在此研究中控制器可分為三個部分：上層控制器、最佳化輪胎與路面間

摩擦力分配和下層縱向摩擦力回授穩健控制器、輪胎側滑角控制器。上層控制器計算出車輛維持行駛路徑所需的縱向、側向合力以及橫擺力矩的總和，然後經由最佳化分配出車輛四個輪胎與路面間所需要產生的縱向摩擦力與側向摩擦力；下層控制器，控制輪內馬達的扭力大小和車輪的轉向角度，使得輪胎和路面間產生上層控制器分配出來的摩擦力，如圖 1.1 流程說明。

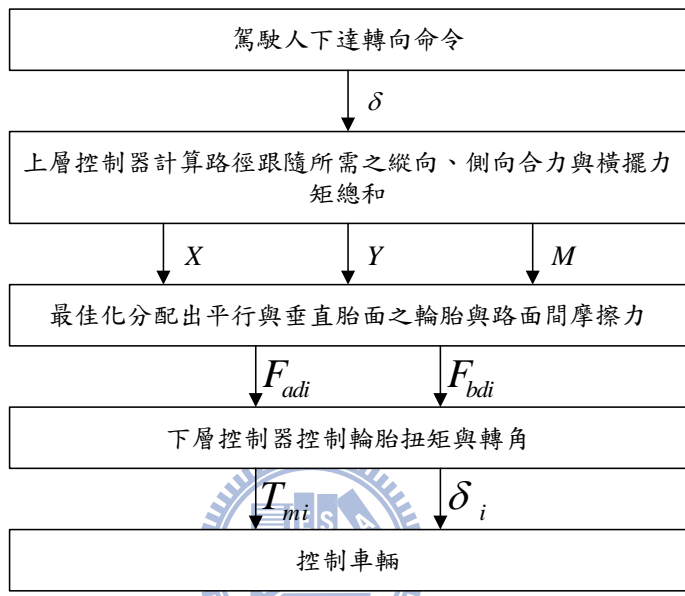


圖 1.1 控制系統流程方塊圖

1.3 研究貢獻

本研究設計出的車輛運動控制系統，包含上層控制器、最佳化輪胎與路面間摩擦力分配和下層縱向摩擦力回授穩健控制器、輪胎側滑角控制器。

一般傳統控制器對輪胎模型的假設為線性輪胎模型，沒有考慮輪胎的非線性特性，故在車輛側向加速度較大時，會因為輪胎非線性的特性，使得輪胎飽和，造成控制器不再能保證車輛側向與橫擺運動的穩定。而本研究設計的下層控制器有考慮輪胎非線性之特性，在控制器中假設一非線性輪胎模型，並考慮其動態以及與真實輪胎間模型不確定性(Model uncertainty)的問題，設計控制策略避免輪胎鎖死或打滑的情況發生，進而提升車輛運動控制的穩定性。

此外，若在緊急情況下，一般駕駛者通常無法輕易地自行操控車輛修正行駛路徑，使車輛依然可以行駛於安全的行駛路徑，故此時必須藉由控制器來控制車輛動態跟隨給定的參考軌跡，行駛於安全的路徑。然而在緊急狀況下，駕駛者會下達較大的轉向命令，車輛側向加速度也較大，故一般傳統控制器將無法保證車輛側向與橫擺運動的穩定，而本研究設計的控制器則依然可以控制車輛跟隨給定的參考路徑。

1.4 論文架構

論文各章節的編排如下

第一章 緒論：描述研究背景、動機與目的。

第二章 相關研究：介紹各種不同車輛轉向控制的控制方法，然後簡介本研究使用的控制方法。

第三章 車輛系統模型：本研究使用的車輛模型為一個考慮車輛縱向、側向速度和橫擺角速度運動的動態模型，四輪可獨立驅動和轉向。

第四章 控制器設計：包含上層控制器、最佳化輪胎與路面間摩擦力分配和下層縱向摩擦力回授穩健控制器、輪胎側滑角控制器設計。

第五章 模擬與結果討論：模擬各種駕駛狀況下控制器控制的結果，並且和其他控制器控制的結果作比較。

第六章 結論與未來展望：總結本研究並提出未來能更深入發展的方向。

第二章、 相關研究

在提升車輛轉向的操控性與穩定性，近年來已經有很多學者提出不同的控制策略，像是四輪轉向控制、差動式煞車轉向控制、直接橫擺力矩控制等等。其中又以四輪轉向控制最為常見用來控制車輛側向運動的控制策略，而差動式煞車轉向控制與直接橫擺力矩控制都是藉由輪胎與路面間之縱向力對車輛產生橫擺力矩控制車輛的動態，底下將會針對四輪轉向控制和直接橫擺力矩控制加以探討分析。

2.1 四輪轉向控制相關研究

從 1980 年代開始，四輪轉向控制就被視為能提升車輛駕駛性的控制策略，相關的研究和控制器設計方法都陸續被提出。四輪轉向控制設計一般是基於輪胎側向力與輪胎側滑角有一線性比例關係存在，此關係只存在於當車輛側向加速度較小時。對車輛動態模型的描述為兩個自由度的腳踏車模型(Bicycle model)，如圖 2.1。

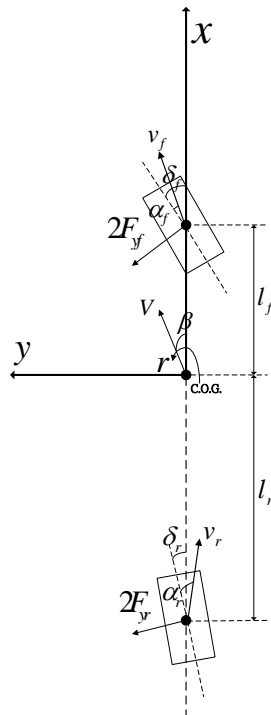


圖 2.1 腳踏車模型

；C.O.G.為質心位置； V 、 β 、 r 分別為質心速度、質心側滑角、橫擺角速度； v_f 、 v_r 為前、後輪前進速度； l_f 、 l_r 為車體質心到前、後輪軸的距離。

忽略車輛俯仰(Pitch)與側傾(Roll)的動態，並假設前、後輪轉角(δ_f 、 δ_r)皆為小角度，車輛以一定速度行駛， y 方向力平衡可由下式表示：

$$mV(\dot{\beta} + r) = 2F_{yf} + 2F_{yr} \quad (2.1)$$

；其中 m 為車體質量。而當前、後輪胎側滑角(α_f 、 α_r)很小時，前、後輪側向力(F_{yf} 、 F_{yr})可由(2.2)(2.3)式線性關係式表示。

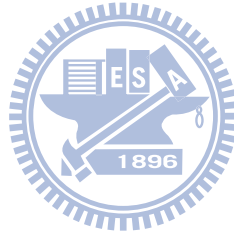
$$F_{yf} = C_f \alpha_f \quad (2.2)$$

$$F_{yr} = C_r \alpha_r \quad (2.3)$$

； C_f 、 C_r 為前、後輪轉向剛度(Cornering stiffness)， α_f 、 α_r 關係式如下：

$$\alpha_f = \delta_f - \frac{V_y + r l_f}{V_x} \quad (2.4)$$

$$\alpha_r = \delta_r - \frac{V_y - r l_f}{V_x} \quad (2.5)$$



Yoshimi Furukawa et al.[4]將4WS控制策略大略分成兩種：前饋(Feed-forward)補償(圖2.2)與回饋(Feedback)補償(圖2.3)。

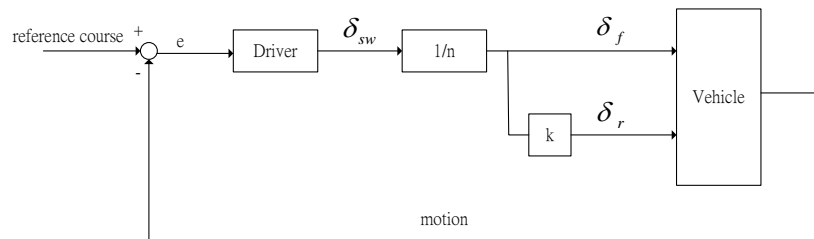


圖 2.2 後輪轉角前饋控制[4]

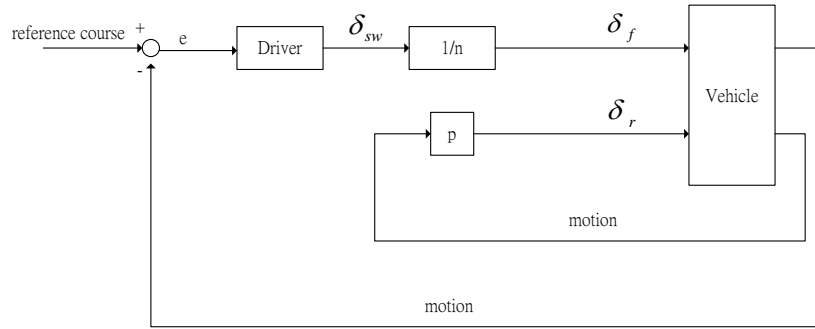


圖 2.3 後輪轉角回饋控制[4]

且提到 4WS 減小質心側滑角的控制器設計，前饋補償控制器如圖 2.2，設計比例控制器 k ：

$$k = \frac{-l_r - \frac{ml_f}{C_r(l_f + l_r)}V_x^2}{l_f + \frac{ml_r}{C_f(l_f + l_r)}V_x^2} \quad (2.6)$$

可以控制使得車輛穩態質心側滑角為零。

Jürgen Ackermann[5]提出一去除橫擺角速度(Yaw rate)對前輪側滑角影響的解耦合控制策略，如(2.7~9)式，圖 2.4。

$$\dot{\delta}_f = w_f - r \quad (2.7)$$

$$w_f = k_s (a_{fref} - a_f) + \frac{1}{V} a_f \quad (2.8)$$

$$\delta_r = \left(k_D - \frac{l}{V} \right) r + w_f \quad (2.9)$$

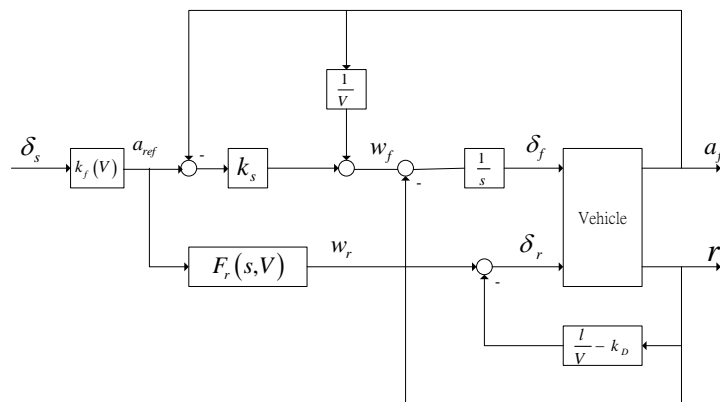


圖 2.4 解耦合控制系統[5]

此控制策略設計使駕駛者只需控制車輛前輪軸側向加速度(a_f)， a_f 對後輪轉向變為不可控(Uncontrollable)。

V.Nikzad. S. and M. Naraghi 在[6]中提到兩種 4WS 控制架構：單轉向控制(Single Steering Control)與雙轉向控制(Dual Steering Control)。單轉向控制前輪轉角由駕駛者控制，只有後輪轉角是由控制器控制，所以控制器只能控制選擇控制車輛橫擺角速度或側向速度其中之一的狀態，不過好處就是控制器的實現與設計較為容易；雙轉向控制則是控制器可以控制前、後輪轉角，可以控制車輛橫擺角速度與側向速度。

2.2 直接橫擺力矩控制相關研究

DYC 的研究開始於 1990 年代，Shibahata et al.[8]提出了一種控制方法：“ β -Method”，且探討質心側滑角對由前、後輪側向力產生的橫擺力矩改變之影響。指出當車輛維持一同心圓轉向時，橫擺力矩若由不平衡的輪胎側向力產生會造成車輛縱向加速或減速。

直接橫擺力矩控制是靠車輛左右兩側輪胎縱向力差來產生橫擺力矩達到控制之目的，大致被分為兩種控制型式：質心側滑角型式(Side-slip type)、橫擺角速度型式(Yaw rate type)。Masato Abe 在[9]提出設計順滑模態控制器來跟隨 2DOF 線性車輛模型的質心側滑角響應，從順滑條件以及車輛動態方程式(2.10)與(2.11)式，設計出橫擺力矩控制輸入。

$$mV(\dot{\beta} + r) = Y_f + Y_r \quad (2.10)$$

$$I_z \dot{r} = l_f Y_f - l_r Y_r + M_z \quad (2.11)$$

； Y_f 、 Y_r 為前、後輪側向力； M_z 為其控制輸入，設計會和前、後輪側向力及其對輪胎側滑角偏微之斜率有關，故有假設一非線性輪胎模型用來計算，控制架構圖如圖 2.5。

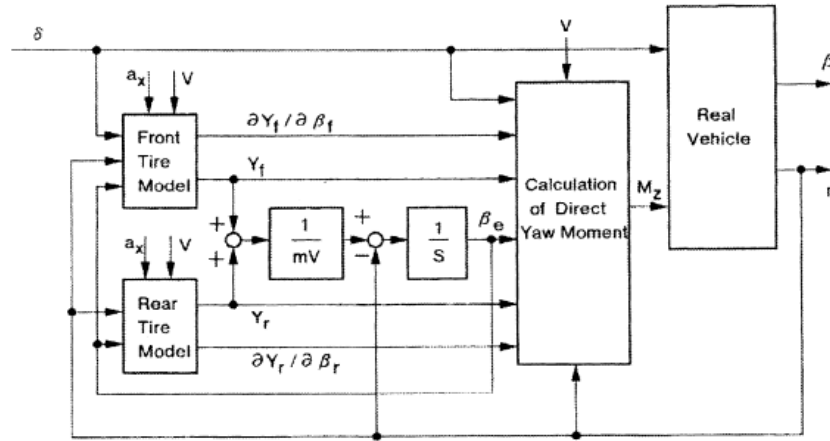


圖 2.5 DYC 控制系統方塊圖，擷取自[9]

P. Raksincharoens et al.[10]利用 DYC 控制策略控制車輛跟隨其設計所需的橫擺角速度，橫擺力矩控制輸入是由後輪左、右側縱向力的差產生，如(2.12)式。

$$M = \frac{d}{2}(-F_{xrl} + F_{xrr}) \quad (2.12)$$

所需的M是由所需橫擺角速度透過橫擺角速度對橫擺力矩的反轉移函數計算而得。

E. Esmazadeh et al.[11]提出分析線性二次最佳化問題(LQ problem)求解 DYC 控制輸入，跟隨所需的橫擺角速度。M. Mirzaei[12]為了維持車輛的動態，跟隨所需的橫擺角速度與質心側滑角，設計一線性二次最佳化問題，求解最小之橫擺力矩控制輸入以達到控制目的。其成本函數定為(2.13)式。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [w_b (\beta - \beta_d)^2 + w_r (r - r_d)^2 + w_u M_z^2] dt \quad (2.13)$$

；其中 w_b 、 w_r 和 w_u 為權重因子，代表其對應項之重要性； M_z 為控制輸入。增加 w_u 之權重可以讓 M_z 越小，但相對的會使橫擺角速度和質心側滑角的跟隨誤差(Tracking error)增大；此外，控制策略是設計來跟隨橫擺角速度和質心側滑角，故可以輕易地藉由改變 w_b 或 w_r 為零，實現不同控制型式的 DYC 控制，如：實現橫擺角速度型式則將 w_b 選定為零， $w_r = 0$ 則為質心側滑角型式。

上述研究中，四輪轉向控制可以直接地改變車輪轉角，影響輪胎側滑角及輪胎與路面間產生的側向力，控制車輛的側向運動，在控制器設計與車輛動態的描述上較為容易。

車輛動態可被描述為線性腳踏車模型，控制器也可設計簡單的 P、PI 控制器，即可提升車輛駕駛的穩定性。然而，就如先前所提到的：四輪轉向控制設計一般是基於輪胎側向力與輪胎側滑角有一線性比例關係存在，而這關係僅作用於車輛側向加速度小的情況下。在車輛側向加速度較大時，四輪轉向控制會因為輪胎非線性的特性，使輪胎側向力飽和，此時側向力與側滑角不再是線性關係，且輪胎正向力對側向力的影響也會增加，因此控制器改變車輪轉角不再能使輪胎與路面間產生正比於輪胎側滑角之側向力，造成控制器不再能保證車輛側向與橫擺運動的穩定。

直接橫擺力矩控制利用左、右側輪胎與路面間產生之縱向力的差，所造成的橫擺力矩控制車輛的動態，所需的橫擺力矩是藉由分配左、右側輪胎縱向力來產生。好處是在輪胎摩擦力圓限制內，輪胎縱向力的產生，較不受車輛側向動態的影響，所需的縱向力可直接由所需產生的橫擺力矩計算而得，故在車輛側向加速度較大的駕駛情況下，考慮輪胎非線性特性，DYC 控制策略會比 4WS 控制來得更能提升車輛的操控性與安全性。不過，由於 DYC 控制是去調整控制左右側輪胎縱向力之差，而沒有直接地控制輪胎側向力，所以對車輛側向運動的控制效能會有所降低。再者，因為輪胎縱向力和側向力存在著摩擦力圓限制的關係，DYC 控制很難去決定每個輪胎所需的縱向力和側向力，以達到控制車輛所需的側向合力與橫擺力矩，像是在[9]就提出需利用一適當的輪胎模型，先藉由輪胎側滑角計算對應的側向力與側向輪胎模型的斜率(Cornering power)，再去計算控制所需的橫擺力矩輸入，所以在縱向力分配決定上比較困難。

在本研究中將控制架構設計分成上、下層控制器，上層控制器計算所需的縱向合力、側向合力與橫擺力矩，使車輛的動態跟隨給定的參考軌跡；下層控制器則考慮輪胎的非線性特性，藉由控制輪胎力矩與轉向角產生所需的輪胎摩擦力，上層與下層控制器之間透過最佳化摩擦力分配將上層控制器所需之力量適當地分配給每個輪胎，再由下層控制器使各個輪胎產生所需的縱向與側向摩擦力。因此，在車輛側向加速度較大時，相較於 4WS 更能夠提升車輛駕駛的穩定性，而且又能改善 DYC 對車輛側向運動控制的不足。

第三章、車輛系統模型

本章節將介紹本研究中使用的車輛系統模型，此模型為一個七個自由度的車輛模型和一個結合縱向力與側向力摩擦力圓關係的“Magic formula”輪胎模型。七個自由度包含：車輛縱向、側向速度運動、橫擺角速度動態，以及四個輪胎的動態。

3.1 車輛動態模型

車輛行駛於道路上，輪胎與地面接觸產生摩擦力，影響車輛的運動，輪胎的自由體圖，如圖 3.1：

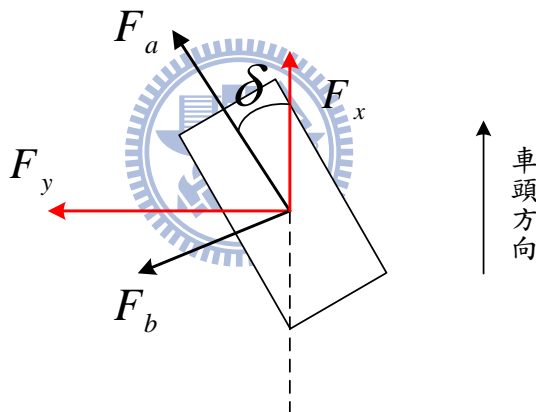


圖 3.1 輪胎自由體俯視圖

F_a 為平行胎面之縱向摩擦力， F_b 為垂直胎面之側向摩擦力； δ 為車輪轉向角。依照向量的概念，將 F_a 和 F_b 分解成平行車身的力 F_x 與垂直車身的力 F_y ，如下：

$$\begin{aligned} F_x &= F_a \cos \delta - F_b \sin \delta \\ F_y &= F_a \sin \delta + F_b \cos \delta \end{aligned} \tag{3.1}$$

假設車輛所受的外力和橫擺力矩都是由輪胎與路面間摩擦力所造成，不去考慮車輛行駛間空氣風阻力或者外界額外的擾動對車輛動態造成的影響。輪胎與路面間摩擦力影響車輛運動自由體圖，如圖 3.2 所示。利用牛頓第二運動定律和尤拉運動方程式推導得知車輛動態方程式，表示如(3.2~4)式：

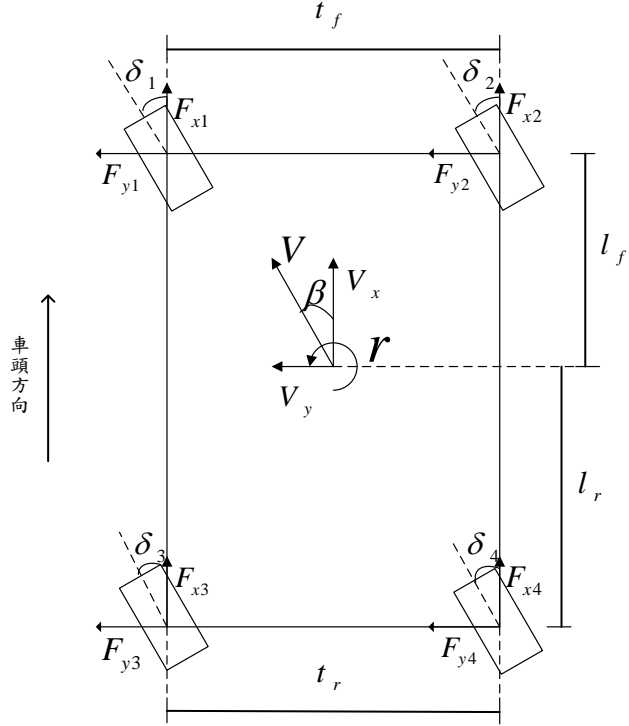


圖 3.2 車輛自由體俯視圖

$$ma_x = \sum_{i=1}^4 F_{xi} = \sum_{i=1}^4 F_{ai} \cos \delta_i - \sum_{i=1}^4 F_{bi} \sin \delta_i \quad (3.2)$$

$$ma_y = \sum_{i=1}^4 F_{yi} = \sum_{i=1}^4 F_{ai} \sin \delta_i + \sum_{i=1}^4 F_{bi} \cos \delta_i \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} I_z \dot{r} = \sum M_z = & \frac{t_f}{2} (F_{a2} \cos \delta_2 - F_{b2} \sin \delta_2 - F_{a1} \cos \delta_1 + F_{b1} \sin \delta_1) \\ & + \frac{t_r}{2} (F_{a4} \cos \delta_4 - F_{b4} \sin \delta_4 - F_{a3} \cos \delta_3 + F_{b3} \sin \delta_3) \\ & + l_f (F_{a1} \sin \delta_1 + F_{b1} \cos \delta_1 + F_{a2} \sin \delta_2 + F_{b2} \cos \delta_2) \\ & - l_r (F_{a3} \sin \delta_3 + F_{b3} \cos \delta_3 + F_{a4} \sin \delta_4 + F_{b4} \cos \delta_4) \end{aligned} \quad (3.4)$$

；其中車輛縱向加速度(\$a_x\$)和側向加速度(\$a_y\$)，如(3.5)和(3.6)式：

$$a_x = \dot{V}_x - rV_y \quad (3.5)$$

$$a_y = \dot{V}_y + rV_x \quad (3.6)$$

$\sum_{i=1}^4 F_{xi}$ 、 $\sum_{i=1}^4 F_{yi}$ 和 $\sum M_z$ 為作用於車輛動態的縱向合力、側向合力和橫擺力矩總和； m 和 I_z 為車體質量和橫擺角轉動慣量； V_x 、 V_y 和 r 分別表示車輛質心縱向速度、側向速度和橫擺角速度； β 為車體質心側滑角； t_f 為車輛前輪輪距， t_r 為後輪輪距； l_f 為車體質心到前輪軸的距離， l_r 為車體質心到後輪軸的距離。

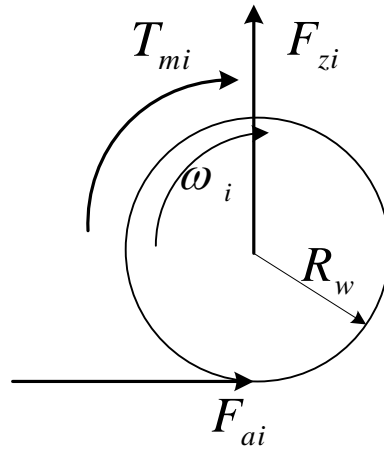


圖 3.3 輪胎轉動自由體圖

由圖 3.3 的輪胎轉動自由體圖，藉由力矩平衡推導出輪胎旋轉動態方程式(3.7)式。

$$I_w \dot{\omega}_i = -R_w F_{ai} + T_{mi} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.7)$$

；其中 I_w 為輪胎轉動慣量， $\dot{\omega}_i$ 為第 i 個輪胎的轉動角加速度， R_w 為輪胎轉動半徑， T_{mi} 為馬達與煞車對第 i 個輪胎施加的力矩之和。

輪胎與路面間摩擦力作用下造成輪胎縱向滑動與側滑，輪胎縱向滑動比(Slip ratio)定義如(3.8)式：

$$\lambda_i = \frac{R_w \omega_i - v_i \cos \alpha_i}{\max\{R_w \omega_i, v_i \cos \alpha_i\}} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.8)$$

； v_i 表示為第 i 個輪胎的前進速度，表示如下：

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\left(V_x - \frac{t_f}{2} r\right)^2 + \left(V_y + l_f r\right)^2} \\ v_2 &= \sqrt{\left(V_x + \frac{t_f}{2} r\right)^2 + \left(V_y + l_f r\right)^2} \\ v_3 &= \sqrt{\left(V_x - \frac{t_r}{2} r\right)^2 + \left(V_y - l_r r\right)^2} \\ v_4 &= \sqrt{\left(V_x + \frac{t_r}{2} r\right)^2 + \left(V_y - l_r r\right)^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

而輪胎側滑角(Slip angle: α_i)為輪胎轉動方向與速度方向之間的夾角，如(3.10)式，

圖 3.4。

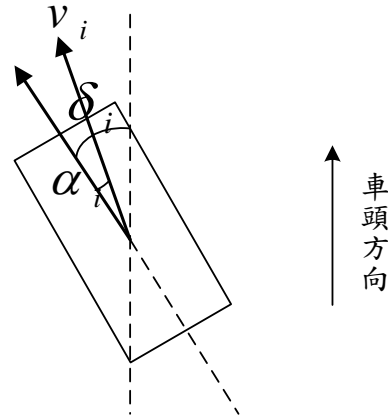
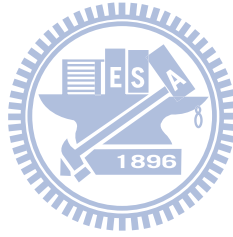


圖 3.4 輪胎側滑角和前進速度示意圖

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \delta_1 - \tan^{-1} \left(\frac{V_y + l_f r}{V_x - \frac{t_f}{2} r} \right) \\
 \alpha_2 &= \delta_2 - \tan^{-1} \left(\frac{V_y + l_f r}{V_x + \frac{t_f}{2} r} \right) \\
 \alpha_3 &= \delta_3 - \tan^{-1} \left(\frac{V_y - l_r r}{V_x - \frac{t_r}{2} r} \right) \\
 \alpha_4 &= \delta_4 - \tan^{-1} \left(\frac{V_y - l_r r}{V_x + \frac{t_r}{2} r} \right)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$



考慮車輛縱向加速度及側向加速度對車體重量轉移所造成的影響，輪胎的正向力可以由(3.11)式表示：

$$\begin{aligned}
 F_{z1} &= \frac{mgl_r}{2l} - \frac{m_s a_x h_s}{2l} - \frac{m_s a_y l_f h_s}{t_f l} \\
 F_{z2} &= \frac{mgl_r}{2l} - \frac{m_s a_x h_s}{2l} + \frac{m_s a_y l_f h_s}{t_f l} \\
 F_{z3} &= \frac{mgl_f}{2l} + \frac{m_s a_x h_s}{2l} - \frac{m_s a_y l_f h_s}{t_r l} \\
 F_{z4} &= \frac{mgl_f}{2l} + \frac{m_s a_x h_s}{2l} + \frac{m_s a_y l_f h_s}{t_r l}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

； l 為前輪軸到後輪軸的距離， m_s 為車體集中質量(Sprung-mass)， h_s 為車體集中質量之質心與地面的高度， g 為重力加速度。

3.2 輪胎模型

輪胎與路面間產生的摩擦力會直接影響到車輛動態的運動。本研究中所使用的輪胎模型為 Pacejka[13]所提出的“Magic formula”，(3.1)式中平行胎面的力(F_a)與垂直胎面的力(F_b)即是利用此非線性的模型來描述。在此非線性的輪胎模型純縱向滑動 F_{a0} (for pure accelerating or braking)會與縱向滑動比(Slip ratio)有一非線性關係，純側向側滑 F_{b0} (for pure cornering)則與側滑角(Slip angle)存在一非線性關係，且都會受到輪胎所受之正向力 F_z 的影響。此模型如(3.12)與(3.13)式表示：

$$F_{a0} = D_x \sin \left\{ C_x \tan^{-1} \left[B_x (1 - E_x) \lambda + (E_x / B_x) \tan^{-1} (B_x \lambda) \right] \right\} \quad (3.12)$$

$$F_{b0} = D_y \sin \left\{ C_y \tan^{-1} \left[B_y (1 - E_y) \alpha + (E_y / B_y) \tan^{-1} (B_y \alpha) \right] \right\} \quad (3.13)$$

；其中 λ 為輪胎滑動比、 α 為輪胎側滑角， $B_{x,y}$ 、 $C_{x,y}$ 、 $D_{x,y}$ 、 $E_{x,y}$ 為輪胎參數。

當考慮輪胎動態同時發生縱向滑動和側向側滑時，(3.1)式中平行胎面的力(F_a)與垂直胎面的力(F_b)將表示如下：

$$F_a = \left(\frac{\sigma_x}{\sigma} \right) F_{a0}(\sigma) \quad (3.14)$$

$$F_b = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma} \right) F_{b0}(\sigma) \quad (3.15)$$

； σ 為理論滑動(Theoretical slip)， σ_x 、 σ_y 和 λ 、 α 關係如(3.16)式：

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\lambda}{1 + |\lambda|} \\ \sigma_y &= \tan \alpha \frac{1}{1 + |\lambda|} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

在不同的側滑角下，結合縱向力與側向力的非線性輪胎模型， F_a 與 F_b 摩擦力圓關係，

如圖 3.5。

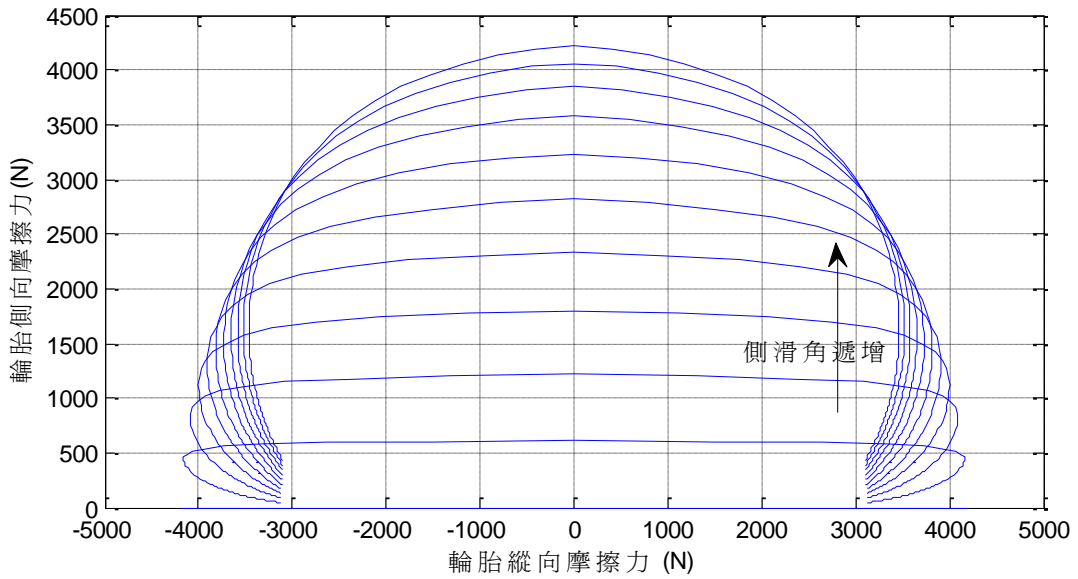


圖 3.5 結合縱向力與側向力摩擦力圓

綜合以上分析與推導，把車輛動態模型與輪胎模型結合寫成一非線性動態方程式，如(3.17)式，其中輸入為 δ_i 與 T_{mi} ， $i = 1, \dots, 4$ 。

$$\begin{aligned} \bar{X} &= [r, V_x, V_y, \omega_1, \dots, \omega_4]^T \\ \dot{\bar{X}} &= f(\bar{X}, \delta_{1,2,3,4}, T_{m1,2,3,4}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

第四章、 控制器設計

本章節將介紹本研究的控制器設計，包含上層控制器、最佳化輪胎與路面間摩擦力分配和下層縱向摩擦力回授穩健控制器、輪胎側滑角控制器。

上層控制器部分會介紹線性車輛參考模型，並根據車輛運動時物理限制對其響應(Model response)作物理極值的限制，設計順滑模態控制器(Sliding mode controller)作軌跡跟隨(Tracking error)的控制[14]，計算出車輛所需的縱向、側向合力與橫擺力矩的總和；最佳化輪胎與路面間摩擦力分配部分將介紹成本函數(Cost function)的設計概念，並利用卡羅需—庫恩—塔克條件(Karush-Kuhn-Tucker conditions)求解非線性規劃問題(Nonlinear programming)[15]，最小化成本函數，且分配出滿足摩擦力圓限制的輪胎與路面間摩擦力。

下層控制器部分，分別介紹輪胎縱向摩擦力回授控制與輪胎側向摩擦力控制。在縱向摩擦力控制部分，回授縱向力估測的結果，設計順滑模態控制器控制馬達的扭力，使輪胎與路面間產生上層所分配的縱向摩擦力，並設計即時適應性路面摩擦力係數估測器，當期望跟隨的縱向力超過路面摩擦力所能提供的極值時，維持控制器的穩定。在側向摩擦力控制部分，假設一個”Dugoff”反輪胎模型，並控制輪胎的轉向角度影響輪胎側滑角，此時輪胎與路面間所產生的側向摩擦力和分配的側向力會因為輪胎模型的不確定性(Model uncertainty)有誤差，這部分將由上層控制器的設計來補償。

在第二章相關研究中討論的其他控制器設計，大部分的控制器主要是著重於單一層控制器架構的設計，計算出控制車輛跟隨參考值所需的側向合力和橫擺力矩總和，然後直接控制車輪的轉角或者直接當作控制輸入控制車輛動態，但皆假設實際能夠產生所需的合力與力矩，並沒有考慮到輪胎的動態，造成四輪轉向控制實際上在較大的車輛側向加速度下會無法有效地作控制，控制的範圍受到限制；而直接橫擺力矩控制則是沒有利用輪胎側向力來作控制，所以對車輛側向運動控制上會不夠準確。因此，本研究將控制架構分為上、下層控制器：利用上層控制器跟隨車輛縱向速度、質心側滑角與橫擺角速

度參考值，透過最佳化分配將輪胎摩擦力圓的限制考慮進去，分配出四個輪胎所需之摩擦力，在下層控制器中考慮輪胎動態，控制跟隨所需的摩擦力。在此控制架構下，改善了四輪轉向在車輛側向加速度大時對車輛控制的不穩定問題，以及彌補了直接橫擺力矩控制對車輛側向運動控制的不足。整個控制系統架構圖，如圖 4.1。

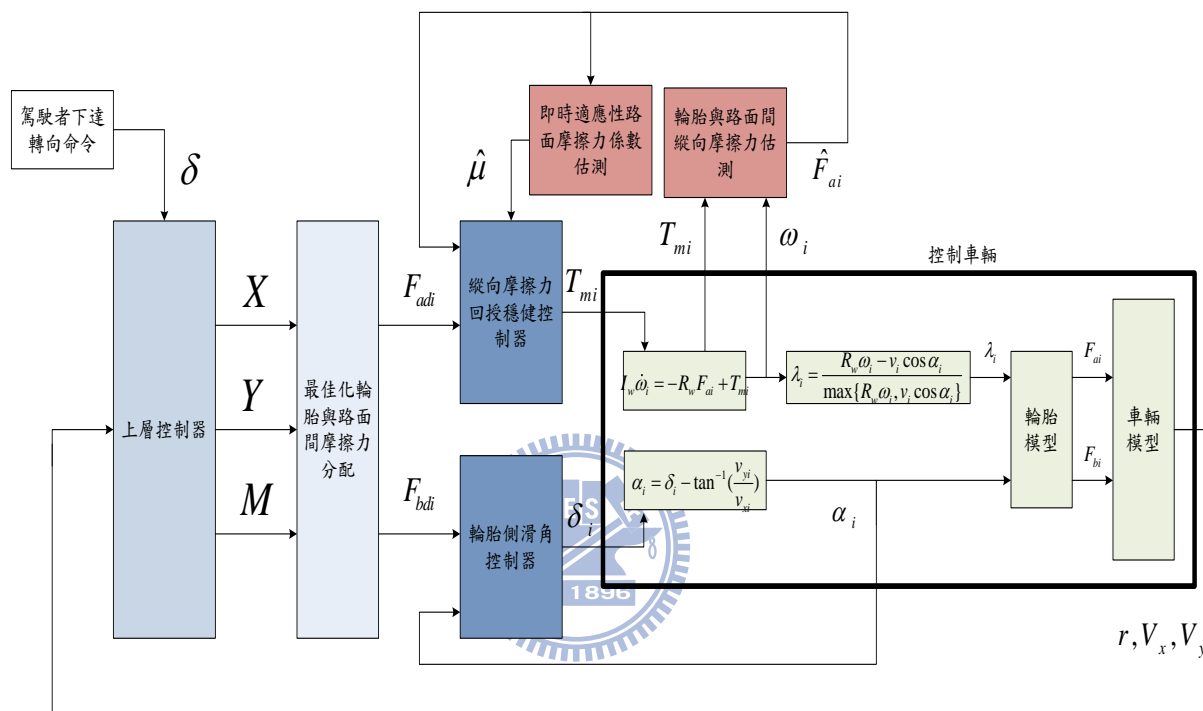


圖 4.1 系統架構圖

4.1 上層控制器

4.1.1 車輛參考模型

車輛參考模型是基於 Ellis[16]所提出的兩個自由度線性車輛響應，車速維持定速前進，前輪轉向。車身側滑角(Slide-slip angle)與橫擺角速度(Yaw rate)對轉向角度 δ 的響應如(4.1)和(4.2)式。

$$\frac{\beta}{\delta}(s) = G_{\delta\beta}(0) \frac{1 + T_\beta s}{1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (4.1)$$

$$\frac{r}{\delta}(s) = G_{\delta r}(0) \frac{1}{1 + t_e s} \quad (4.2)$$

；其中 $G_{\delta\beta}(0) = \frac{1 - \frac{m}{2l} \frac{l_f}{l_r} K_r V^2}{1 + AV^2} \frac{l_r}{l}$,

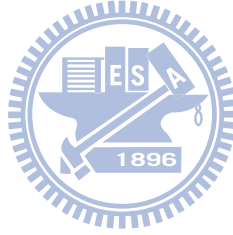
$$\omega_n = \frac{2l}{V} \sqrt{\frac{K_f K_r}{m I_z}} \sqrt{1 + AV^2},$$

$$\zeta = \frac{m(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r) + I_z(K_f + K_r)}{2l \sqrt{m I_z K_f K_r} (1 + AV^2)},$$

$$T_\beta = \frac{I_z V}{2l l_r K_r} \frac{1}{1 - \frac{m}{2l} \frac{l_f}{l_r} K_r V^2},$$

$$G_{\delta r}(0) = \frac{1}{1 + AV^2} \frac{V}{l},$$

$$A = -\frac{m}{2l^2} \frac{l_f K_f - l_r K_r}{K_f K_r}.$$



橫擺角速度響應近似為一階系統，是表示響應為中性轉向(Neutral steer)的特性， t_e 為響應時間[17]。

線性的參考車輛模型沒有考慮到輪胎特性之非線性的影響，所以當把非線性輪胎特性考慮進去時，參考車輛的車身側滑角與橫擺角速度的極值都會受到物理限制影響[18]。車體質心速度(V_{CoG})會影響車身側滑角極值限制，車身側滑角最大限制和車體質心速度關係式，如(4.3)式，圖 4.2。

$$\beta_{\max} = 10^\circ - 7^\circ \cdot \frac{V_{CoG}^2}{(40m/s)^2} \quad (4.3)$$

側向加速度(a_y)的極值限制則是會與路面摩擦力係數有關；理論上，車輛作轉向運動最大可以產生 9.81 倍路面摩擦力係數大小的側向加速度，例如：路面摩擦力係數為 1 時，側向加速度極值可以為 9.81 m/s^2 ，而當車身側滑角不為零時，最大側向加速度則調整為 8 m/s^2 ，故最大側向加速度與摩擦力係數關係可表示如(4.4)式。

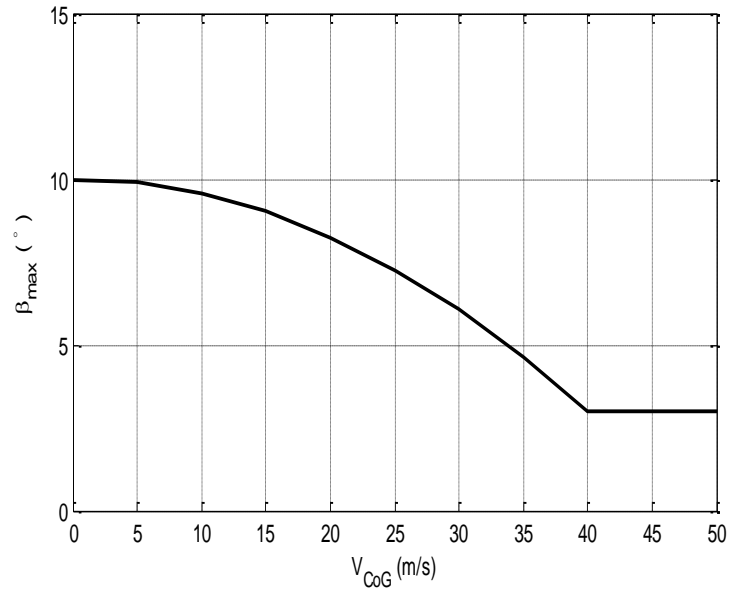


圖 4.2 最大車身側滑角與質心速度關係圖[18]

$$a_{y\max} = \mu_s \cdot 8m / s^2 \quad (4.4)$$

利用(3.6)式， a_y 與 r 的關係式可以得知橫擺角速度的最大值為(4.5)式。

$$r_{\max} = \frac{a_{y\max}}{V_x} - \dot{V}_y \quad (4.5)$$

因此，車輛參考模型加入考慮車身側滑角與橫擺角速度物理限制，將車身側滑角與橫擺角速度之參考值改成(4.6)與(4.7)式：

$$\beta_{ref} = \begin{cases} \beta & , |\beta| \leq \beta_{\max} \\ \pm \beta_{\max} & , otherwise \end{cases} \quad (4.6)$$

$$r_{ref} = \begin{cases} r & , |r| \leq r_{\max} \\ \pm r_{\max} & , otherwise \end{cases} \quad (4.7)$$

在小角度轉向和較小的側向加速度運動下，參考車輛模型為兩個自由度線性車輛響應；而在大角度轉向和較大的側向加速度下，參考車輛模型則將會受到物理限制於極值。

縱向速度參考值部分，本論文假設為常數，其值由駕駛者油門踏板的角速度來決定，故設定 $\dot{V}_{xref} = 0$ 。

4.1.2 車輛縱向速度、車身側滑角與橫擺角速度控制器

回顧(3.2)、(3.3)與(3.4)式，縱向、側向合力與橫擺力矩總和影響車輛縱向、側向與橫擺角速度的動態，在上層控制器使用了順滑模態控制理論，設計了三個順滑平面 (Sliding surface)，計算控制車輛跟隨參考車輛模型的響應所需的縱向、側向合力與橫擺角轉動力矩總和。將(3.2)、(3.3)與(3.4)式重新表示如下：

$$m(\dot{V}_x - rV_y) = X + \Delta X \quad (4.8)$$

$$m(\dot{V}_y + rV_x) = Y + \Delta Y \quad (4.9)$$

$$I_z \dot{r} = M + \Delta M \quad (4.10)$$

； X 、 Y 和 M 為上層控制器輸入，計算出所需的縱向、側向合力與橫擺力矩總和； ΔX 、 ΔY 和 ΔM 為未知的變動量，來自於下層控制器控制後結果與上層控制器計算結果之間的誤差。假設其變動範圍分別為： $|\Delta X| \leq \Delta X_{\max}$ 、 $|\Delta Y| \leq \Delta Y_{\max}$ 以及 $|\Delta M| \leq \Delta M_{\max}$ 。

縱向速度控制，設計一順滑平面為 S_X 如(4.11)式。

$$S_X = V_x - V_{xref} = 0 \quad (4.11)$$

需滿足迫近條件(Approaching condition)：

$$\dot{S}_X S_X < -\eta_1 |S_X| \quad , \text{ while } S_X \neq 0 \quad (4.12)$$

；其中 $\eta_1 > 0$ 。

從(4.8)式移項整理可以得知

$$\dot{V}_x = \frac{1}{m}(X + \Delta X) + rV_y \quad (4.13)$$

再將(4.13)代入(4.12)式：

$$\begin{aligned} & (\dot{V}_x - \dot{V}_{xref}) S_X \\ \Rightarrow & \left\{ \frac{1}{m}(X + \Delta X) + rV_y - \dot{V}_{xref} \right\} S_X < -\eta_1 |S_X| \end{aligned} \quad (4.14)$$

由前述式子，設計控制輸入 X 為

$$X = m(-rV_y + \dot{V}_{xref}) - k_1 \text{sign}(S_X) \quad (4.15)$$

；其中 $k_1 > \Delta X_{\max}$ 。

將(4.15)代入(4.14)式證明滿足迫近條件。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{m}(X + \Delta X) + rV_y - \dot{V}_{xref} \right\} S_X \\ \Rightarrow & \left(-rV_y + \dot{V}_{xref} - \frac{k_1}{m} \text{sign}(S_X) + \frac{\Delta X}{m} + rV_y - \dot{V}_{xref} \right) S_X \\ & = - \left(\frac{k_1}{m} - \frac{\Delta X}{m} \text{sign}(S_X) \right) |S_X| \\ & \leq - \left(\frac{k_1}{m} - \frac{\Delta X_{\max}}{m} \right) |S_X| \\ & < -\eta_1 |S_X| \end{aligned} \quad (4.16)$$

；其中 $\frac{(k_1 - \Delta X_{\max})}{m} > \eta_1 > 0$ 。

相同地，車身側滑角控制與橫擺角速度控制，分別設計順滑平面： S_Y 和 S_M ，如(4.17)和(4.18)式。



$$S_Y = \beta - \beta_{ref} = 0 \quad (4.17)$$

$$S_M = r - r_{ref} = 0 \quad (4.18)$$

皆需滿足迫近條件：

$$\dot{S}_Y S_Y < -\eta_2 |S_Y| \quad , \text{while } S_Y \neq 0 \quad (4.19)$$

$$\dot{S}_M S_M < -\eta_3 |S_M| \quad , \text{while } S_M \neq 0 \quad (4.20)$$

；其中 η_2 、 $\eta_3 > 0$ 。

縱向車速若近似於定速，則可將(4.9)式表示成

$$mV_x(\dot{\beta} + r) = Y + \Delta Y \quad (4.21)$$

移項整理得(4.22)式。

$$\dot{\beta} = \frac{(Y + \Delta Y)}{mV_x} - r \quad (4.22)$$

設計控制輸入Y為

$$Y = mV_x (r + \dot{\beta}_{ref}) - k_2 \text{sign}(S_Y) \quad (4.23)$$

；其中 $k_2 > \Delta Y_{\max}$ 。

將(4.22)及(4.23)代入(4.19)式證明滿足迫近條件。

$$\begin{aligned} & (\dot{\beta} - \dot{\beta}_{ref}) S_Y \\ \Rightarrow & \left\{ \frac{(Y + \Delta Y)}{mV_x} - r - \dot{\beta}_{ref} \right\} S_Y \\ = & \left(r + \dot{\beta}_{ref} - \frac{k_2}{mV_x} \text{sign}(S_Y) + \frac{\Delta Y}{mV_x} - r - \dot{\beta}_{ref} \right) S_Y \\ = & - \left(\frac{k_2}{mV_x} - \frac{\Delta Y}{mV_x} \text{sign}(S_Y) \right) |S_Y| \\ \leq & - \left(\frac{k_2}{mV_x} - \frac{\Delta Y_{\max}}{mV_x} \right) |S_Y| \\ < & -\eta_2 |S_Y| \end{aligned} \quad (4.24)$$

；其中 $\frac{(k_2 - \Delta Y_{\max})}{mV_x} > \eta_2 > 0$ 。

橫擺角加速度則可從(4.10)式得知，如(4.25)式。

$$\dot{r} = \frac{(M + \Delta M)}{I_z} \quad (4.25)$$

控制輸入M設計為

$$M = I_z \dot{r}_{ref} - k_3 \text{sign}(S_M) \quad (4.26)$$

；其中 $k_3 > \Delta M_{\max}$ 。

將(4.25)及(4.26)代入(4.20)式證明滿足迫近條件。

$$\begin{aligned}
& (\dot{r} - \dot{r}_{ref}) S_M \\
\Rightarrow & \left\{ \frac{(M + \Delta M)}{I_z} - \dot{r}_{ref} \right\} S_M \\
& = \left(\dot{r}_{ref} - \frac{k_3}{I_z} \text{sign}(S_M) + \frac{\Delta M}{I_z} - \dot{r}_{ref} \right) S_M \\
& = - \left(\frac{k_3}{I_z} - \frac{\Delta M}{I_z} \text{sign}(S_M) \right) |S_M| \\
& \leq - \left(\frac{k_3}{I_z} - \frac{\Delta M_{\max}}{I_z} \right) |S_M| \\
& < -\eta_3 |S_M|
\end{aligned} \tag{4.27}$$

；其中 $\frac{(k_3 - \Delta M_{\max})}{I_z} > \eta_3 > 0$ 。

最後利用 Lyapunov 原理[14]來保證前述上層控制器之穩定性，選取 Lyapunov 函數為

$$V = \frac{1}{2} S_X^2 + \frac{1}{2} S_Y^2 + \frac{1}{2} S_M^2 \tag{4.28}$$

V會大於等於零，且為一正定函數。接著，Lyapunov 函數對時間t做一次微分，可得

$$\begin{aligned}
\dot{V} & = S_X \dot{S}_X + S_Y \dot{S}_Y + S_M \dot{S}_M \\
& \leq -\eta_1 |S_X| + (-\eta_2 |S_Y|) + (-\eta_3 |S_M|) \leq 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

明顯地可得 $\dot{V} \leq 0$ ，且為一負定函數，故V為一個 Lyapunov 函數，系統為漸進穩定 (Asymptotically stable)。

在上層控制器之控制輸入X、Y和M，(4.15)、(4.23)和(4.26)式中皆使用了一個理想的切換函數 $\text{sign}(S_{X,Y,M})$ ，此函數會使系統產生切跳(chattering)現象，為了改善此現象，將用平滑層的概念來取代平滑面[19]，以 $\text{sat}(S_{X,Y,M}, \varepsilon_{X,Y,M})$ 來取代 $\text{sign}(S_{X,Y,M})$ ，如(4.30)式。

$$\text{sat}(S_{X,Y,M}, \varepsilon_{X,Y,M}) = \begin{cases} 1 & S_{X,Y,M} > \varepsilon_{X,Y,M} \\ S_{X,Y,M} / \varepsilon_{X,Y,M} & |S_{X,Y,M}| \leq \varepsilon_{X,Y,M} \\ -1 & S_{X,Y,M} < -\varepsilon_{X,Y,M} \end{cases} \tag{4.30}$$

因此，控制法被修正為

$$X = m(-rV_y + \dot{V}_{xref}) - k_1 sat(S_X, \varepsilon_X) \quad (4.31)$$

$$Y = mV_x(r + \dot{\beta}_{ref}) - k_2 sat(S_Y, \varepsilon_Y) \quad (4.32)$$

$$M = I_z \dot{r}_{ref} - k_3 sat(S_M, \varepsilon_M) \quad (4.33)$$

上述控制器在實現上會需要回授車輛縱向、側向速度、橫擺角速度以及質心側滑角。實際可以利用全球定位系統(GPS)來判斷質心的位置與移動速度，橫擺角速度可以用陀螺儀量測，而質心側滑角實際上無法用感測器量測得知，會需要借助估測的方法獲得，像是利用卡爾曼濾波器(Kalman filter)估測[20]。本研究中將這些感測器可以提供的資訊當作已知。



4.2 最佳化輪胎與路面間摩擦力分配

4.2.1 成本函數

最佳化輪胎與路面間摩擦力分配的成本函數(Cost function)之設計與選擇是可以有很多種形式，也很難明確地去說明如何選擇成本函數會是最有效率的輪胎摩擦力分配，故本小節中並沒有探討不同成本函數選擇之優劣，而是使用輪胎摩擦力圓的概念設計[21]。

輪胎與路面間縱向摩擦力與側向摩擦力之間有摩擦力圓關係存在，會受到路面摩擦力係數(μ)乘以輪胎正向力(F_z)影響其限制範圍，故會希望最佳化分配出的輪胎摩擦力能夠在摩擦力圓限制內，且能夠是最小的控制輸入。因此，設計成本函數如(4.34)式。

$$J = \sum_{i=1}^4 C_i \frac{F_{xi}^2 + F_{yi}^2}{(\mu F_{z0i})^2} \quad (4.34)$$

；其中 $F_{x1\sim4}$ 和 $F_{y1\sim4}$ 即為所要分配的八個變數，四個輪胎平行車身與垂直車身之摩擦力； μ 為路面摩擦力係數，在本研究設計中皆假設為一般柏油路面狀況($\mu = 0.85$)； $F_{z01\sim4}$ 為車輛等速直線行駛時四個輪胎的正向力，分別表示如下：

$$\begin{aligned} F_{z01,2} &= \frac{mgl_r}{2l} \\ F_{z03,4} &= \frac{mgl_f}{2l} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$C_{1\sim4}$ 為權重參數(Weighting coefficient)，適當的選定調整可以提高車輛控制的表現，參數選定如下：

$$C_i = \frac{F_{z0i}}{F_{zi}}, \quad i = 1 \sim 4 \quad (4.36)$$

F_{zi} 為輪胎正向力，回顧(3.11)式，車輛縱向加速度及側向加速度會造成車體重量轉移。故由(4.36)式 C_i 權重參數的選定，可以明顯地說明當某顆輪胎正向力因車體重量轉移變大時，摩擦力圓關係限制變大，其權重變小，即意味著最佳化分配時分配的縱向力與側向力可以分配得較大， C_i 權重參數是隨著車輛動態作變動調整。

成本函數中的八個變數($F_{x1\sim4}$ 和 $F_{y1\sim4}$)，在假設四個輪子都可以獨立驅動與轉向的情況下，必須滿足的等式與不等式限制(Equality and inequality constraints)有：

分配出的四個輪胎平行車身之摩擦力的總和必須和車輛縱向速度控制器計算出所需的縱向合力(X)相等。

$$F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + F_{x4} = X \quad (4.37)$$

四個輪胎垂直車身之摩擦力的總和必須和車身側滑角控制器計算出的側向合力(Y)相等。

$$F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4} = Y \quad (4.38)$$

由四個輪胎平行車身之摩擦力與垂直車身之摩擦力所產生的橫擺力矩和也必須等於車輛橫擺角速度控制器計算的橫擺力矩總和(M)。

$$\frac{t_f}{2}(F_{x2} - F_{x1}) + \frac{t_r}{2}(F_{x4} - F_{x3}) + l_f(F_{y1} + F_{y2}) - l_r(F_{y3} + F_{y4}) = M \quad (4.39)$$

此外，每個輪胎所受之摩擦力也必須要滿足摩擦力圓的限制，表示如下：

$$\begin{aligned}
 F_{x1}^2 + F_{y1}^2 &\leq (\mu F_{z1})^2 \\
 F_{x2}^2 + F_{y2}^2 &\leq (\mu F_{z2})^2 \\
 F_{x3}^2 + F_{y3}^2 &\leq (\mu F_{z3})^2 \\
 F_{x4}^2 + F_{y4}^2 &\leq (\mu F_{z4})^2
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

上述總共三條線性等式限制與四條非線性不等式限制，為了求解此非線性規劃問題，將借助於卡羅需—庫恩—塔克條件(KKT condition)。

4.2.2 最佳化問題求解

分析整理成本函數(4.34)式與其變數限制條件(4.37~40)式，目的是希望最小化成本函數，表示成底下一般最佳化的求解問題：

$$\text{minimize } J = f_0(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

s.t.

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - (\mu F_{z1})^2 \leq 0$$

$$f_2(\mathbf{x}) = x_3^2 + x_4^2 - (\mu F_{z2})^2 \leq 0$$

$$f_3(\mathbf{x}) = x_5^2 + x_6^2 - (\mu F_{z3})^2 \leq 0$$

$$f_4(\mathbf{x}) = x_7^2 + x_8^2 - (\mu F_{z4})^2 \leq 0$$

$$h_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_3 + x_5 + x_7 - X = 0$$

$$h_2(\mathbf{x}) = x_2 + x_4 + x_6 + x_8 - Y = 0$$

$$h_3(\mathbf{x}) = \frac{t_f}{2}(x_3 - x_1) + \frac{t_r}{2}(x_7 - x_5) + l_f(x_2 + x_4) - l_r(x_6 + x_8) - M = 0$$

$$; \quad \mathbf{x} = \left(F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{x3}, F_{y3}, F_{x4}, F_{y4} \right)^T$$



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2C'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2C'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2C'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C'_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C'_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C'_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C'_4 \end{bmatrix}$$

$$C'_i = \frac{C_i}{(\mu F_{z_{qi}})^2} \quad i=1, \dots, 4$$

明顯地，目標函數(Object function)： $f_0(x)$ 為一凸函數(Convex function)，且受四條非線性不等式($f_i(x), i = 1, \dots, 4$)與三條線性等式($h_i(x), i = 1, \dots, 3$)限制。三條線性等式限制可以寫成 $Ax - b = 0$ 的型式，故可知此 $h_i(x)$ 為仿射函數(Affine function)： $\mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{t_f}{2} & l_f & \frac{t_f}{2} & l_f & -\frac{t_r}{2} & l_r & \frac{t_r}{2} & -l_r \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$b = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ M \end{bmatrix}$$

對於任何的最佳化問題，若目標函數與限制函數皆可微分，求得之最佳解必需滿足 KKT 條件。在目標函數為凸函數，且 $f_i(x)$ 也為凸函數， $h_i(x)$ 為仿射函數下，若任何一組解 \tilde{x} 、 $\tilde{\lambda}$ 、 \tilde{v} 滿足底下 KKT 條件，則 \tilde{x} 為此最佳化問題之最佳解。

$$\begin{aligned} f_i(\tilde{x}) &\leq 0 & , i=1, \dots, m \\ h_i(\tilde{x}) &= 0 & , i=1, \dots, p \\ \tilde{\lambda}_i &\geq 0 & , i=1, \dots, m \\ \tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{x}) &= 0 & , i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^p \tilde{v}_i \nabla h_i(\tilde{x}) = 0$$

；在本小節的最佳化問題中， $m = 4$ 、 $p = 3$ 。

本研究中是利用原對偶內點法(Primal-dual interior-point method)來求解 KKT 條件 [15]。解出的一組最佳解即為分配出的四個輪胎平行車身與垂直車身之摩擦力，且會滿

足摩擦力圓的限制，再由(3.1)式關係轉換成平行胎面之縱向力與垂直胎面之側向力，然後由下層控制器控制輪胎扭力和轉角產生此組最佳化分配結果。

此外，若有無法解出一組滿足 KKT 條件最佳解情況發生，將會是因為上層控制器計算之所需縱向、側向合力與橫擺力矩總和，在四條輪胎摩擦力圓的不等式限制下無法同時滿足，所以若以車輛行駛的安全性作為優先考量，會希望車輛能夠維持原有的橫擺角速度與側向運動，故此時會將原本的三條等式限制保留剩下側向合力和橫擺力矩總和兩條等式限制必需滿足，再作最佳化分配。

4.3 下層控制器

在 4.2 節最佳化輪胎與路面間摩擦力分配，分配出四個輪胎和路面間所應該產生的縱向力與側向力，設計下層控制器控制輪胎的扭力或轉角，改變輪胎動態，使輪胎與路面間產生此摩擦力分配之結果。

實際上控制車輛的輪胎模型是未知的，在第三章討論的”Magic formula”輪胎模型，在本研究中是用以模擬當作真實的輪胎模型，而在下層控制器內則是假設另一非線性輪胎模型：Dugoff’s 輪胎模型[22]，如(4.44)式，做為控制器內名義輪胎模型(Nominal tire model)，因為 Dugoff’s 輪胎模型包含較少的參數(C'_x 、 C'_y)，計算上亦比較容易，所以利用此模型之線性及非線性的特性，於估測路面摩擦力係數、縱向力回授控制以及反輪胎模型的輪胎側滑角計算。

$$\begin{aligned}
 F'_a &= C'_x \frac{\lambda}{1-|\lambda|} f(\kappa) \\
 F'_b &= C'_y \frac{\tan(\alpha)}{1-|\lambda|} f(\kappa) \\
 ; \quad f(\kappa) &= \begin{cases} 1 & , \kappa \geq 1 \\ \kappa(2-\kappa) & , \kappa < 1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\kappa = \frac{\mu F_z (1 - |\lambda|)}{2\sqrt{C_x'^2 \lambda^2 + C_y'^2 \tan^2 \alpha}}$$

； C_x' 與 C_y' 為輪胎縱向剛度(longitudinal stiffness)與轉向剛度(cornering stiffness)； κ 指定 Dugoff's 輪胎模型的作用區間， $\kappa \geq 1$ 時，輪胎作用於線性區域。

4.3.1 縱向力估測

回顧(3.7)式，輪胎旋轉動態方程式，假設式中馬達與煞車施加的力矩和(T_{mi})和輪胎轉動角速度(ω_i)都可以獲得，將此式移項整理後，並將輪胎轉動半徑(R_w)用未形變前的輪胎半徑(r_i)代入，可得(4.45)式。

$$F_{ai} = \frac{T_{mi} - I_w \dot{\omega}_i}{r_i} \quad (4.45)$$

；其中轉動角加速度($\dot{\omega}_i$)項，可以透過角速度項差分得知。 ω_i^+ 為此刻時間點的輪胎轉動角速度， ω_i^- 前一刻時間點的輪胎轉動角速度， Δt 為取樣時間，則輪胎轉動角加速度可以用(4.46)式近似：

$$\dot{\omega}_i = \frac{\omega_i^+ - \omega_i^-}{\Delta t} \quad (4.46)$$

再將(4.46)式代入(4.45)式即可得到縱向力估測方程式：

$$\hat{F}_{ai} = \frac{T_{mi} - I_w \left(\frac{\omega_i^+ - \omega_i^-}{\Delta t} \right)}{r_i} \quad (4.47)$$

本研究中將會利用(4.47)式縱向力估測的結果，回授至下層縱向力控制器，控制輪胎動態。

4.3.2 縱向摩擦力回授穩健控制器

控制器中假設實際的輪胎模型縱向摩擦力為：Dugoff's 輪胎模型(F_a')加上一未知項

(F_a^* : Uncertainty term)。控制器目的是希望輪胎與路面間產生上層控制器分配期望之摩擦力(F_{ad})，故設計順滑模態控制器做縱向力軌跡跟隨控制，計算控制輸入馬達扭矩(T_m)，控制輪胎的動態。

設計一順滑平面，如(4.48)式。

$$S_a = F_a - F_{ad} = 0 \quad (4.48)$$

；其中若 $|F_{ad}| > \hat{\mu}F_z$ ，則會將 $|F_{ad}|$ 限制於 $\hat{\mu}F_z$ ，目的是希望跟隨的參考值 $|F_{ad}|$ 不會超過最大縱向摩擦力 μF_z ，以避免平衡點不在順滑平面上； $\hat{\mu}$ 為估測的路面摩擦力係數。

需滿足迫近條件(Approaching condition)：

$$\dot{S}_a S_a < -\eta_4 |S_a| \quad , \text{ while } S_a \neq 0 \quad (4.49)$$

；其中 $\eta_4 > 0$ 。

回顧(4.44)式，Dugoff's 輪胎模型，將縱向力(F_a')對時間 t 做一次微分：

$$\dot{F}_a' = \begin{cases} C_x' \frac{1}{(1-|\lambda|)^2} \dot{\lambda} & , \kappa \geq 1 \\ C_x' \frac{1}{(1-|\lambda|)^2} \kappa(2-\kappa)\dot{\lambda} + 2C_x' \frac{\lambda}{1-|\lambda|} (1-\kappa)\dot{\kappa} & , \kappa < 1 \end{cases} \quad (4.50)$$

$\dot{\kappa}$ 計算如(4.51)式。

$$\dot{\kappa} = \frac{\dot{F}_z}{F_z} \kappa - \frac{1}{1-|\lambda|} \kappa \dot{\lambda} \text{sign}(\lambda) - \kappa \frac{C_x'^2 \lambda \dot{\lambda} + C_y'^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha \dot{\alpha}}{C_x'^2 \lambda^2 + C_y'^2 \tan^2 \alpha} \quad (4.51)$$

將(4.51)式代入(4.50)式，重新整理為

$$\dot{F}_a' = \begin{cases} C_x' \frac{1}{(1-|\lambda|)^2} \dot{\lambda} & , \kappa \geq 1 \\ \frac{C_x'}{1-|\lambda|} \kappa \left[\frac{2-\kappa}{1-|\lambda|} - \frac{2(1-\kappa)|\lambda|}{1-|\lambda|} - \frac{2C_x'^2(1-\kappa)\lambda^2}{C_x'^2 \lambda^2 + C_y'^2 \tan^2 \alpha} \right] \dot{\lambda} \\ + 2C_x' \frac{\lambda}{1-|\lambda|} \kappa(1-\kappa) \left(\frac{F_z}{F_z} - \frac{C_y'^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha \dot{\alpha}}{C_x'^2 \lambda^2 + C_y'^2 \tan^2 \alpha} \right) & , \kappa < 1 \end{cases} \quad (4.52)$$

再將(4.52)式整理表示為

$$\dot{F}'_a = g'_\lambda \dot{\lambda} + g'_0 \quad (4.53)$$

； g'_λ 為 F'_a 對 λ 偏微，且

$\kappa \geq 1$:

$$g'_\lambda = \frac{C'_x}{(1-|\lambda|)^2} > 0,$$

$$g'_0 = 0$$

$\kappa < 1$:

$$\begin{aligned} g'_\lambda &= \frac{C'_x}{1-|\lambda|} \kappa \left[\frac{2-\kappa}{1-|\lambda|} - \frac{2(1-\kappa)|\lambda|}{1-|\lambda|} - \frac{2C_x'^2(1-\kappa)\lambda^2}{C_x'^2\lambda^2 + C_y'^2 \tan^2 \alpha} \right] \\ &\geq \frac{C'_x}{1-|\lambda|} \kappa \left[\frac{2-\kappa}{1-|\lambda|} - 2(1-\kappa) \left(\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{C'_x}{1-|\lambda|} \kappa \left[\frac{\kappa}{1-|\lambda|} \right] \\ &= \frac{C'_x \kappa^2}{(1-|\lambda|)^2} > 0, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$g'_0 = 2C'_x \frac{\lambda}{1-|\lambda|} \kappa(1-\kappa) \left(\frac{\dot{F}'_z}{F'_z} - \frac{C_y'^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha \dot{\alpha}}{C_x'^2 \lambda^2 + C_y'^2 \tan^2 \alpha} \right)$$

故可以將先前假設實際的輪胎模型縱向摩擦力對時間 t 做一次微分表示為(4.55)式。

$$\dot{F}'_a = (g'_\lambda + g_\lambda^*) \dot{\lambda} + g'_0 \quad (4.55)$$

； g_λ^* 假設為未知項對 λ 偏微的結果。

當車輪在加速時 ($\lambda > 0$)，將(3.8)式對時間 t 做一次微分，且利用輪胎旋轉動態方程式

(3.7)得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= - \frac{r_i \omega_i \cdot (\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i) - v_i \cos \alpha_i \cdot (r_i \dot{\omega}_i)}{(r_i \omega_i)^2} \\ &= - \frac{(\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i)}{r_i \omega_i} + \left(1 - \frac{r_i \omega_i - v_i \cos \alpha_i}{r_i \omega_i} \right) \frac{\dot{\omega}_i}{\omega_i} \\ &= \frac{(1-\lambda_i)}{\omega_i} \left(\frac{T_{mi} - r_i F_{ai}}{I_w} \right) - \frac{(\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i)}{r_i \omega_i} \\ &= \frac{(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} T_{mi} - \frac{r_i(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} F_{ai} - \frac{\dot{v}_{ai}}{r_i \omega_i} \end{aligned} \quad (4.56)$$

；其中不考慮輪胎形變量，故由輪胎未形變時半徑 r_i 代入； v_{ai} 為輪胎前進速度之平行胎面分量。

同樣地，車輪在煞車減速時($\lambda < 0$)得

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_i &= \frac{v_i \cos \alpha_i \cdot (r_i \dot{\omega}_i) - r_i \omega_i \cdot (\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i)}{(v_i \cos \alpha_i)^2} \\
 &= \frac{r_i \dot{\omega}_i}{v_i \cos \alpha_i} - \left(1 + \frac{r_i \omega_i - v_i \cos \alpha_i}{v_i \cos \alpha_i} \right) \left(\frac{\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i}{v_i \cos \alpha_i} \right) \\
 &= \frac{r_i}{v_i \cos \alpha_i} \left(\frac{T_{mi} - r_i F_{ai}}{I_w} \right) - (1 + \lambda_i) \left(\frac{\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i}{v_i \cos \alpha_i} \right) \\
 &= \frac{r_i}{I_w v_{ai}} T_{mi} - \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} F_{ai} - \frac{(1 + \lambda_i) \dot{v}_{ai}}{v_{ai}}
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

將(4.55~57)式代入(4.49)式，必須滿足此迫近條件。

$$\begin{aligned}
 & (\dot{F}'_a - \dot{F}'_{ad}) S_a \\
 \Rightarrow & \left((g'_\lambda + g^*_\lambda) \dot{\lambda} + g'_0 - \dot{F}'_{ad} \right) S_a < -\eta_4 |S_a| \tag{4.58} \\
 \Rightarrow & \begin{cases} \left\{ (g'_\lambda + g^*_\lambda) \left[\frac{(1 - \lambda_i) T_{mi}}{I_w \omega_i} - \frac{r_i (1 - \lambda_i) F_{ai}}{I_w \omega_i} - \frac{\dot{v}_{ai}}{r_i \omega_i} \right] + g'_0 - \dot{F}'_{ad} \right\} S_a < -\eta_4 |S_a| & , \lambda > 0 \\ \left\{ (g'_\lambda + g^*_\lambda) \left[\frac{r_i}{I_w v_{ai}} T_{mi} - \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} F_{ai} - \frac{(1 + \lambda_i) \dot{v}_{ai}}{v_{ai}} \right] + g'_0 - \dot{F}'_{ad} \right\} S_a < -\eta_4 |S_a| & , \lambda < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

假設 $g^*_\lambda \geq (-1 + \theta)g'_\lambda, 0 < \theta \leq 0.5$ 及輪胎初始滑動比落於輪胎線性區域：

$\lambda(0) \in [-\lambda^*, \lambda^*], F_a(\lambda^*) = \hat{\mu}F_z$ ，則設計控制輸入 T_{mi} 為：

$\lambda > 0$:

$$T_{mi} = r_i F_{ad} + \frac{I_w \dot{v}_{ai}}{r_i (1 - \lambda_i)} + \frac{1}{g'_\lambda} \frac{I_w \omega_i}{(1 - \lambda_i)} (-g'_0 + \dot{F}'_{ad}) - \rho \frac{I_w \omega_i}{(1 - \lambda_i)} \text{sign}(S_a) \tag{4.59}$$

$\lambda < 0$:

$$T_{mi} = r_i F_{ad} + \frac{I_w (1 + \lambda_i) \dot{v}_{ai}}{r_i} + \frac{1}{g'_\lambda} \frac{I_w v_{ai}}{r_i} (-g'_0 + \dot{F}'_{ad}) - \rho \frac{I_w v_{ai}}{r_i} \text{sign}(S_a)$$

；其中 ρ 為(4.60)所示：

$$\rho = \frac{1}{g'_\lambda} \left(\frac{1 - \theta}{\theta} |(-g'_0 + \dot{F}'_{ad})| + k_4 \right) \tag{4.60}$$

； $k_4 > 0$ 。

將(4.59)與(4.60)式代入(4.58)式證明滿足迫近條件。

$\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
& \left\{ (g'_\lambda + g^*_\lambda) \left[\frac{(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} T_{mi} - \frac{r_i(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} F_{ai} - \frac{\dot{v}_{ai}}{r_i \omega_i} \right] + g'_0 - \dot{F}_{ad} \right\} S_a \\
\Rightarrow & \left\{ (g'_\lambda + g^*_\lambda) \left[\frac{r_i(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} (F_{ad} - F_{ai}) + \frac{1}{g_\lambda} (-g'_0 + \dot{F}_{ad}) - \rho \text{sign}(S_a) \right] + g'_0 - \dot{F}_{ad} \right\} S_a \\
= & - (g'_\lambda + g^*_\lambda) \frac{r_i(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} S_a^2 - \left\{ \rho (g'_\lambda + g^*_\lambda) \text{sign}(S_a) - \frac{g^*_\lambda}{g_\lambda} (-g'_0 + \dot{F}_{ad}) \right\} S_a \\
= & - (g'_\lambda + g^*_\lambda) \frac{r_i(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} S_a^2 \\
& - \left\{ \frac{(g'_\lambda + g^*_\lambda)}{g_\lambda} \left(\frac{1-\theta}{\theta} |(-g'_0 + \dot{F}_{ad})| + k_4 \right) - \frac{g^*_\lambda}{g_\lambda} (-g'_0 + \dot{F}_{ad}) \text{sign}(S_a) \right\} |S_a| \\
\leq & -\theta g'_\lambda \frac{r_i(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} S_a^2 - \theta k_4 |S_a| \\
< & -\eta_4 |S_a|
\end{aligned}$$

$\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
& \left\{ (g'_\lambda + g^*_\lambda) \left[\frac{r_i}{I_w v_{ai}} T_{mi} - \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} F_{ai} - \frac{(1+\lambda_i) \dot{v}_{ai}}{v_{ai}} \right] + g'_0 - \dot{F}_{ad} \right\} S_a \\
\Rightarrow & \left\{ (g'_\lambda + g^*_\lambda) \left[\frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} (F_{ad} - F_{ai}) + \frac{1}{g_\lambda} (-g'_0 + \dot{F}_{ad}) - \rho \text{sign}(S_a) \right] + g'_0 - \dot{F}_{ad} \right\} S_a \\
= & - (g'_\lambda + g^*_\lambda) \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} S_a^2 \tag{4.61} \\
& - \left\{ \frac{(g'_\lambda + g^*_\lambda)}{g_\lambda} \left(\frac{1-\theta}{\theta} |(-g'_0 + \dot{F}_{ad})| + k_4 \right) - \frac{g^*_\lambda}{g_\lambda} (-g'_0 + \dot{F}_{ad}) \text{sign}(S_a) \right\} |S_a| \\
\leq & -\theta g'_\lambda \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} S_a^2 - \theta k_4 |S_a| \\
< & -\eta_4 |S_a|
\end{aligned}$$

；其中 $\eta_4 > \theta k_4 > 0$

在一般真實輪胎模型縱向滑動比對摩擦力關係，輪胎線性區縱向力對縱向滑動比偏微斜率為正，輪胎非線性區縱向力對縱向滑動比偏微斜率為負，產生最大縱向力值時斜率為零，如圖 4.3。

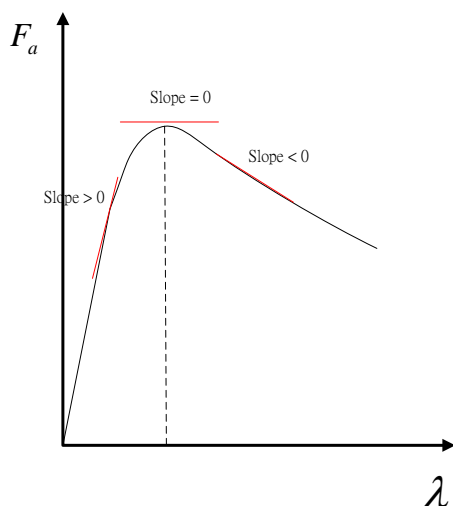


圖 4.3 縱向滑動比與最大縱向摩擦力關係圖

在控制器中我們對未知項 g_{λ}^* 做的假設： $g_{\lambda}^* \geq (-1 + \theta)g_{\lambda}'$, $0 < \theta \leq 0.5$ ，將縱向力控制器控制範圍限制於一般輪胎的線性區域，且輪胎縱向力對滑動比偏微斜率 $(g_{\lambda}^* + g_{\lambda}')$ 大於 $\theta g_{\lambda}'$ ，如圖 4.4，左圖為本研究中模擬的真實輪胎模型，紅色線部分即為控制器假設下控制的範圍，隨著 θ 的遞減可以將控制範圍往最大縱向摩擦力延伸，不過若 θ 選定太小將會影響順滑模態控制器切跳時增益過大；右圖為控制器內假設的 Dugoff's 輪胎模型縱向力對滑動比偏微斜率乘於不同 θ 值與“Magic formula”比較。

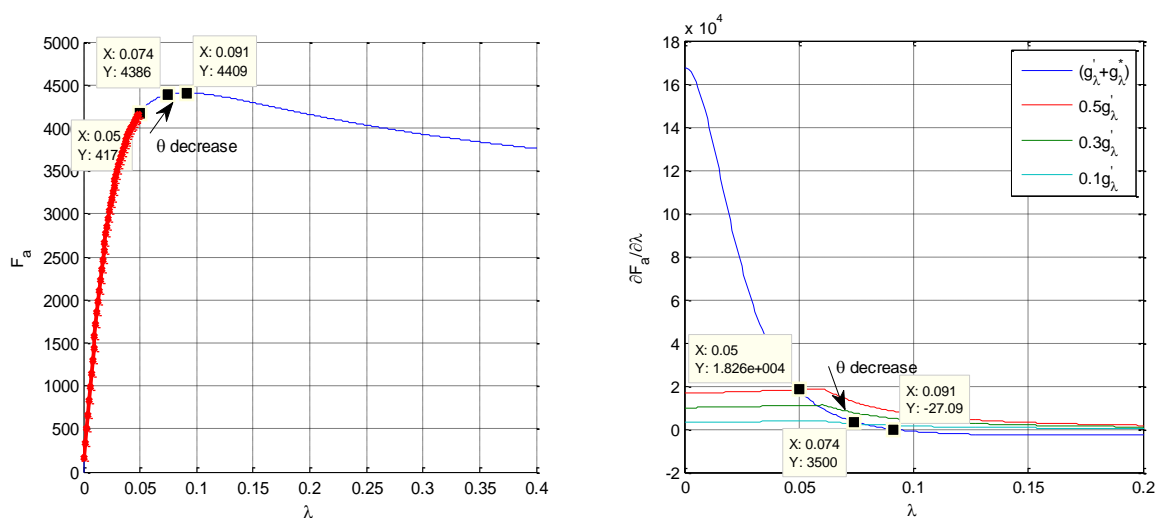


圖 4.4 “Magic formula”縱向滑動比與最大縱向摩擦力關係圖(左)、

輪胎縱向力對滑動比偏微斜率 $(g_{\lambda}^* + g_{\lambda}')$ 與 $\theta g_{\lambda}'$ 比較圖(右)

4.3.3 即時適應性路面摩擦力估測

在縱向摩擦力回授穩健控制器中，會需要將(4.48)式順滑平面的平衡點 F_{ad} 限制於最大縱向摩擦力值 $\pm\mu F_z$ 之間，故底下設計自適應法用來估測路面摩擦力係數 $\hat{\mu}$ 。

4.3.3.1 自適應性法設計

由於路面摩擦力係數 μ 是未知的，故在此藉由(4.44)式考慮縱向 Dugoff's 輪胎模型 $\kappa < 1$ 時之非線性特性，如(4.62)式，來估測未知參數： μ ，理由是因為 μ 對 Dugoff's 輪胎模型的影響在於 $\kappa < 1$ 時之非線性區域， $\kappa < 1$ 時的 Dugoff's 輪胎模型方程式內有要估測的參數 μ ，才能利用此模型來估測。

$$F'_a = C_x \frac{\lambda}{1-|\lambda|} \frac{\mu F_z (1-|\lambda|)}{2C_x |\lambda|} \left[2 - \frac{\mu F_z (1-|\lambda|)}{2C_x |\lambda|} \right] = \mu F_z \text{sign}(\lambda) \left[1 - \frac{\mu F_z (1-|\lambda|)}{4C_x |\lambda|} \right] \quad (4.62)$$

假設 $\hat{\mu}$ 為估測的路面摩擦力係數，而由 Dugoff's 輪胎模型得估測之縱向力 \hat{F}'_a ，如(4.63)式。

$$\hat{F}'_a = \hat{\mu} F_z \text{sign}(\lambda) \left[1 - \frac{\hat{\mu} F_z (1-|\lambda|)}{4C_x |\lambda|} \right] \quad (4.63)$$

定義縱向力估測誤差

$$\varepsilon = \hat{F}'_a - F'_a \quad (4.64)$$

； F'_a 為實際的縱向力，目標是希望能找到一最佳之 $\hat{\mu}$ 估測值，使得成本函數 $J = \frac{1}{2} \varepsilon^2$ 最小。

將成本函數 J 對 $\hat{\mu}$ 偏微分：

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mu}} = \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \hat{\mu}} = \varepsilon F_z \text{sign}(\lambda) \left[1 - \frac{1-|\lambda|}{2C_x |\lambda|} F_z \hat{\mu} \right] \quad (4.65)$$

利用梯度法(Gradient method)，設計自適應性法(Adaptive law)為如下所示：

$$\dot{\hat{\mu}} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \hat{\mu}} = -\gamma \varepsilon F_z \text{sign}(\lambda) \left[1 - \frac{1-|\lambda|}{2C_x|\lambda|} F_z \hat{\mu} \right] \quad (4.66)$$

； $\gamma > 0$ 。

4.3.3.2 自適應性法平衡點與保守估測

由於縱向摩擦力回授穩健控制器對未知項 g_λ^* 做的假設： $g_\lambda^* \geq (-1 + \theta)g_\lambda'$, $0 < \theta \leq 0.5$ ，控制器所能控制的範圍為小於最大縱向力 μF_z 的輪胎線性區域，所以會希望路面摩擦力係數估測值為保守估測： $\hat{\mu} \leq \mu$ ，以避免輪胎縱向力進入非線性區。本小節將討論自適應法的平衡點與保守估測。

討論(4.66)式平衡點發生於 $\dot{\hat{\mu}} = 0$ 時，即意味著 $\varepsilon = 0$ 或 $1 - \frac{1-|\lambda|}{2C_x|\lambda|} F_z \hat{\mu} = 0$ 。定義 μ^* 為(4.67)式，為(4.66)式平衡點之一。

$$\hat{\mu}^* = 2 \frac{C_x}{F_z} \frac{|\lambda|}{1-|\lambda|} \quad (4.67)$$

底下考慮 $\varepsilon = 0$ 時，產生的其他平衡點：

$$\varepsilon = \hat{F}_a' - F_a = \hat{\mu} F_z \text{sign}(\lambda) \left[1 - \frac{\hat{\mu}}{2\hat{\mu}^*} \right] - F_a = 0 \quad (4.68)$$

重新整理(4.68)式：

$$\frac{F_z \text{sign}(\lambda)}{2\hat{\mu}^*} \hat{\mu}^2 - F_z \text{sign}(\lambda) \hat{\mu} + F_a = 0 \quad (4.69)$$

解得根 $\hat{\mu}_+$ 與 $\hat{\mu}_-$ 為

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_{\pm}^* &= \frac{\hat{\mu}^* \text{sign}(\lambda)}{F_z} \left\{ F_z \text{sign}(\lambda) \pm \sqrt{F_z^2 - \frac{2F_z \text{sign}(\lambda)}{\hat{\mu}^*} F_a} \right\} \\
&= \hat{\mu}^* \left\{ 1 \pm \text{sign}(\lambda) \sqrt{1 - \frac{2\text{sign}(\lambda) F_a}{\hat{\mu}^* F_z}} \right\} \\
&= \hat{\mu}^* \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{(1-|\lambda|) F_a}{C_x \lambda}} \right\}
\end{aligned} \tag{4.70}$$

定義函式 $C(\lambda) = \frac{F_a}{\lambda}$ ， $\hat{\mu}_{\pm}^*$ 將改表示為

$$\hat{\mu}_{\pm}^* = \hat{\mu}^* \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - K(\lambda)(1-|\lambda|)} \right\} \tag{4.71}$$

；其中 $K(\lambda) = \frac{C(\lambda)}{C_x}$ ，故可知(4.71)式若要有實根解，則 $K(\lambda) \leq \frac{1}{1-|\lambda|}$ 。

$C(\lambda)$ 圖形意義為縱向力 F_a 對縱向滑動比 λ 關係作圖曲線上任何一點與原點連接直線的斜率，故可由觀察不同的輪胎模型，假設當 $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ 時， $C(\lambda)$ 為一非遞增函數， λ^* 為縱向力產生最大值時之縱向滑動率，因此可以得知 $K(\lambda) \leq K(0)$ 。根據前述這些假設，倘若滑動率為零時，輪胎的縱向剛度 (Longitudinal stiffness) 小於估測假設之 Dugoff's 輪胎模型的縱向剛度： C_x ，如(4.72)式。

$$C(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F_a(\lambda)}{\lambda} = \left. \frac{\partial F_a}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \leq C_x \tag{4.72}$$

則可以得知 $K(\lambda) \leq K(0) \leq 1 \leq \frac{1}{1-|\lambda|}$ ，當 $\lambda \in [0, \lambda^*]$ ；所以 $\varepsilon = 0$ 時，會有兩個實數解，如(4.71)式。

因此，(4.72)式若成立，則此自適應性法會有三個平衡點： $\hat{\mu}^*$ 、 $\hat{\mu}_+^*$ 、 $\hat{\mu}_-^*$ ，且關係如下：

$$\hat{\mu}_-^* = \hat{\mu}^* \left\{ 1 - \sqrt{1 - K(\lambda)(1-|\lambda|)} \right\} \leq \hat{\mu}^* \leq \hat{\mu}^* \left\{ 1 + \sqrt{1 - K(\lambda)(1-|\lambda|)} \right\} = \hat{\mu}_+^* \tag{4.73}$$

以下將分別討論在不同情形下此三個平衡點的穩定性：

I. 當 $\lambda > 0$

$\varepsilon = -\frac{F_z}{2\hat{\mu}^*} \hat{\mu}^2 + F_z \hat{\mu} - F_a$ 為一開口向下之拋物線函數(圖 4.5)，自適應法為

$$\dot{\hat{\mu}} = -\gamma \varepsilon F_z \left(1 - \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}^*} \right) \quad (4.74)$$

(I.a) 若 $\hat{\mu} < \hat{\mu}_-$ ，則 $\varepsilon < 0$ 且 $1 - \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}^*} > 0$ ；因此， $\dot{\hat{\mu}} > 0$ ， $\hat{\mu}$ 遞增。

(I.b) 若 $\hat{\mu}_- < \hat{\mu} < \hat{\mu}^*$ ，則 $\varepsilon > 0$ 且 $1 - \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}^*} > 0$ ；因此， $\dot{\hat{\mu}} < 0$ ， $\hat{\mu}$ 遞減。

(I.c) 若 $\hat{\mu}^* < \hat{\mu} < \hat{\mu}_+$ ，則 $\varepsilon > 0$ 且 $1 - \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}^*} < 0$ ；因此， $\dot{\hat{\mu}} > 0$ ， $\hat{\mu}$ 遞增。

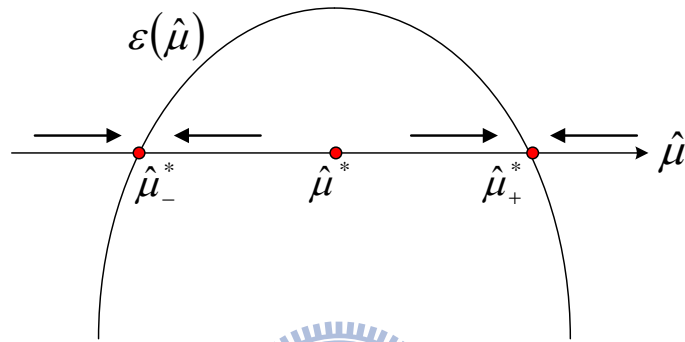


圖 4.5 估測誤差函數 ($\lambda > 0$)

(I.d) 若 $\hat{\mu}_+ < \hat{\mu}$ ，則 $\varepsilon < 0$ 且 $1 - \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}^*} < 0$ ；因此， $\dot{\hat{\mu}} < 0$ ， $\hat{\mu}$ 遞減。

II. 當 $\lambda < 0$

$\varepsilon = \frac{F_z}{2\hat{\mu}^*} \hat{\mu}^2 - F_z \hat{\mu} - F_a$ 為一開口向上之拋物線函數(圖 4.6)，自適應法變為

$$\dot{\hat{\mu}} = \gamma \varepsilon F_z \left(1 - \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}^*} \right) \quad (4.75)$$

(II.a) 若 $\hat{\mu} < \hat{\mu}_-$ ，則 $\varepsilon > 0$ 且 $1 - \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}^*} > 0$ ；因此， $\dot{\hat{\mu}} > 0$ ， $\hat{\mu}$ 遞增。

(II.b) 若 $\hat{\mu}_- < \hat{\mu} < \hat{\mu}^*$ ，則 $\varepsilon < 0$ 且 $1 - \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}^*} > 0$ ；因此， $\dot{\hat{\mu}} < 0$ ， $\hat{\mu}$ 遞減。

(II.c) 若 $\hat{\mu}^* < \hat{\mu} < \hat{\mu}_+$ ，則 $\varepsilon < 0$ 且 $1 - \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}^*} < 0$ ；因此， $\dot{\hat{\mu}} > 0$ ， $\hat{\mu}$ 遞增。

(II.d) 若 $\hat{\mu}_+ < \hat{\mu}$ ，則 $\varepsilon > 0$ 且 $1 - \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}^*} < 0$ ；因此， $\dot{\hat{\mu}} < 0$ ， $\hat{\mu}$ 遞減。

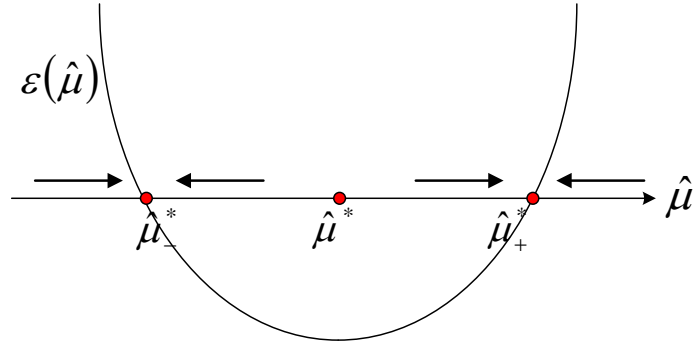


圖 4.6 估測誤差函數 ($\lambda < 0$)

經由上述不同情況之平衡點討論，可以得 $\hat{\mu}_+^*$ 和 $\hat{\mu}_-^*$ 此兩平衡點為穩定平衡點，而 $\hat{\mu}^*$ 則為不穩定之平衡點。故接下來將討論此兩個穩定之平衡點($\hat{\mu}_+^*$ 、 $\hat{\mu}_-^*$)與實際 μ 之間的關係。

若 $\hat{\mu}_+^* \leq \mu$ ，則

$$2C_x \frac{|\lambda|}{1-|\lambda|} \left\{ 1 + \sqrt{1 - K(\lambda)(1-|\lambda|)} \right\} \leq \mu F_z \Leftrightarrow \sqrt{1 - K(\lambda)(1-|\lambda|)} \leq \frac{1-|\lambda|}{2C_x |\lambda|} \mu F_z - 1 \quad (4.76)$$

由(4.76)式可知 $\frac{1-|\lambda|}{2C_x |\lambda|} \mu F_z - 1 \geq 0$ ，且已知 $K(\lambda) \leq 1$ 與 $F_a = C(\lambda)\lambda$ ，重新整理此不等式：

$$\frac{1-|\lambda|}{2C_x |\lambda|} \mu F_z - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left| \frac{F_a}{\mu F_z} \right| \leq \frac{1}{2} K(\lambda)(1-|\lambda|) \leq \frac{1}{2} \quad (4.77)$$

明顯地，(4.77)式為 $\hat{\mu}_+^* \leq \mu$ 之必要條件。若(4.77)式成立，則(4.76)式推導：

$$\begin{aligned} 1 - K(\lambda)(1-|\lambda|) &\leq \left(\frac{K(\lambda)(1-|\lambda|)}{2} \left| \frac{\mu F_z}{F_a} \right| - 1 \right)^2 \\ &= \frac{K(\lambda)^2 (1-|\lambda|)^2}{4} \left| \frac{\mu F_z}{F_a} \right|^2 - K(\lambda)(1-|\lambda|) \left| \frac{\mu F_z}{F_a} \right| + 1 \\ \Leftrightarrow 1 &\geq -\frac{K(\lambda)(1-|\lambda|)}{4} \left| \frac{\mu F_z}{F_a} \right|^2 + \left| \frac{\mu F_z}{F_a} \right| \\ \Leftrightarrow \left| \frac{F_a}{\mu F_z} \right|^2 - \left| \frac{F_a}{\mu F_z} \right| + \frac{K(\lambda)(1-|\lambda|)}{4} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

由(4.78)式最後一條不等式，左側為 $\left| \frac{F_a}{\mu F_z} \right|$ 的拋物線方程式，有兩個根：

$\frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)}\right]$ ，故此不等式成立若且唯若

$$\left|\frac{F_a}{\mu F_z}\right| \geq \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)}\right] \quad (4.79)$$

或

$$0 < \left|\frac{F_a}{\mu F_z}\right| \leq \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)}\right] \quad (4.80)$$

此外，又有下述不等式關係

$$1 - \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)} \leq K(\lambda)(1 - |\lambda|) \leq 1 \leq 1 + \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)} \quad (4.81)$$

由前述(4.77~81)式，可以總結：若(4.80)式成立，則 $\hat{\mu}_+^* \leq \mu$ 。

若 $\hat{\mu}_+^* \leq \mu$ ，則有以下不等式關係，(4.82)式：

$$2C_x \frac{|\lambda|}{1 - |\lambda|} \left\{1 - \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)}\right\} \leq \mu F_z \Leftrightarrow -\sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)} \leq \frac{1 - |\lambda|}{2C_x |\lambda|} \mu F_z - 1 \quad (4.82)$$

$\hat{\mu}_+^* \leq \mu$ 若且唯若

$$1 - \frac{1 - |\lambda|}{2C_x |\lambda|} \mu F_z = 1 - \frac{K(\lambda)(1 - |\lambda|)}{2} \left|\frac{\mu F_z}{F_a}\right| \leq \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)} \quad (4.83)$$

若(4.77)式成立，則(4.83)式也會成立，得 $\hat{\mu}_-^* \leq \mu$ 。但若(4.77)式不成立，(4.83)式成立若且唯若

$$\begin{aligned} & 1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|) \left|\frac{\mu F_z}{F_a}\right| + \frac{K(\lambda)^2(1 - |\lambda|)^2}{4} \left|\frac{\mu F_z}{F_a}\right|^2 \leq 1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|) \\ \Leftrightarrow & -\left|\frac{\mu F_z}{F_a}\right| + \frac{K(\lambda)(1 - |\lambda|)}{4} \left|\frac{\mu F_z}{F_a}\right|^2 \leq -1 \\ \Leftrightarrow & \left|\frac{F_a}{\mu F_z}\right|^2 - \left|\frac{F_a}{\mu F_z}\right| + \frac{K(\lambda)(1 - |\lambda|)}{4} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.84)$$

(4.84)式最後一不等式成立若且唯若

$$\frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)}\right] \leq \left|\frac{F_a}{\mu F_z}\right| \leq \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)}\right] \quad (4.85)$$

根據(4.77)和(4.85)式，總結：若 $\left| \frac{F_a}{\mu F_z} \right| \leq \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)} \right]$ ，則 $\hat{\mu}_-^* \leq \mu$ 。

倘若 $\left| \frac{F_a}{\mu F_z} \right| > \frac{1}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)} \right]$ ，則 $\frac{\hat{\mu}_+^*}{\mu}$ 和 $\frac{\hat{\mu}_-^*}{\mu}$ 的比例關係如下：

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu}_\pm^*}{\mu} &= \frac{2C_x \frac{|\lambda|}{1-|\lambda|} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)} \right\}}{\mu F_z} \\ &= \left| \frac{F_a}{\mu F_z} \right| \frac{2 \left[1 \pm \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)} \right]}{K(\lambda)(1 - |\lambda|)} \\ &\geq \frac{1 - (1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|))}{K(\lambda)(1 - |\lambda|)} = 1 \end{aligned} \quad (4.86)$$

又 $\left| \frac{F_a}{\mu F_z} \right| \leq 1$ ，因此

$$\frac{\hat{\mu}_\pm^*}{\mu} \leq \frac{2 \left[1 \pm \sqrt{1 - K(\lambda)(1 - |\lambda|)} \right]}{K(\lambda)(1 - |\lambda|)} \quad (4.87)$$

為了能得到保守估測的摩擦力係數 $\hat{\mu}$ ，故會將 $\hat{\mu}$ 除以(4.87)式不等式右側之倍率。



4.3.4 輪胎側滑角控制器

控制器內假設一個只考慮側向力之 Dugoff's 反輪胎模型[23]，如(4.88)式。上層分配之側向力經由此反輪胎模型計算出對應的輪胎側滑角值，並設計順滑模態控制器控制車輪轉角，使輪胎側滑角跟隨反輪胎模型計算之值。

$$\alpha_d = \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{F_{bd}}{C_y} \right) & , \kappa \geq 1 \\ \tan^{-1} \left[\frac{(\mu F_z)^2}{4C_y (\text{sign}(F_{bd}) \mu F_z - F_{bd})} \right] & , \kappa < 1 \end{cases} \quad (4.88)$$

； F_{bd} 為上層分配之側向力。

設計一順滑平面如下：

$$S_b = \alpha - \alpha_d = 0 \quad (4.89)$$

回顧(3.10)式，將側滑角值對時間t做一次微分得

$$\dot{\delta} - \frac{1}{1 + \left(\frac{v_{yi}}{v_{xi}}\right)^2} \left(\frac{v_{xi}\dot{v}_{yi} - v_{yi}\dot{v}_{xi}}{v_{xi}^2} \right) \quad (4.90)$$

； v_{xi} 和 v_{yi} 為輪胎平行與垂直車身之速度分量。

設計控制輸入 $u = \dot{\delta}$ ，如(4.91)式。

$$u = \frac{1}{1 + \left(\frac{v_{yi}}{v_{xi}}\right)^2} \left(\frac{v_{xi}\dot{v}_{yi} - v_{yi}\dot{v}_{xi}}{v_{xi}^2} \right) + \dot{\alpha}_d + k_5 \text{sign}(S_b) \quad (4.91)$$

； $k_5 < 0$ 。

底下利用 Lyapunov 原理來保證下層控制器之穩定性，選取 Lyapunov 函數為

$$V = \frac{1}{2} S_a^2 + \frac{1}{2} S_b^2 \quad (4.92)$$

V 大於等於零，為一正定函數。將 Lyapunov 函數對時間t做一次微分，可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S_a \dot{S}_a + S_b \dot{S}_b \\ &\leq -\eta_4 |S_a| + k_5 |S_b| \leq 0 \end{aligned} \quad (4.93)$$

明顯地 $\dot{V} \leq 0$ ，為一負定函數，故 V 為一個 Lyapunov 函數，系統為漸進穩定。

同樣地，下層控制器也如上層控制器使用了理想的切換函數 $\text{sign}(S_{a,b})$ ，故同樣也利用順滑層的概念來改善系統切跳的現象。

由於下層輪胎側滑角控制器回授控制的訊號為輪胎側滑角，控制目標是使輪胎側滑角跟隨由控制器內假設之反 Dugoff's 輪胎模型計算出來的側滑角參考值。因此，相較於下層縱向力回授控制器，回授輪胎縱向摩擦力估測值，並且控制跟隨所需縱向力之參考值，下層側滑角控制器則會因為控制器內假設的輪胎模型和真實輪胎模型之間的差異，在相同輪胎側滑角下，可能會造成輪胎與路面間產生的側向力與參考值之間有誤差，所以上層控制器穩健性設計上考慮可能因下層側向力控制的誤差造成的未知變動量，希望

藉以來補償下層側向力控制的誤差。

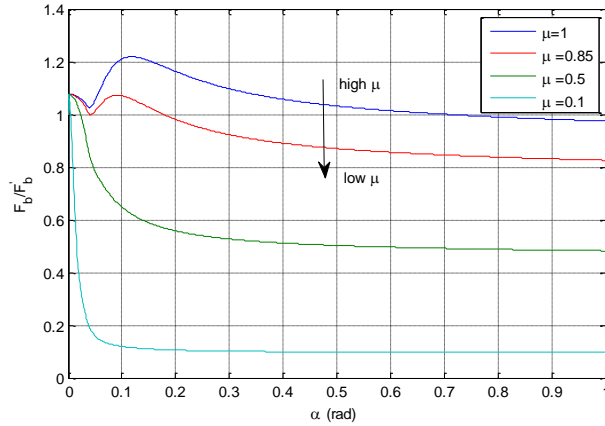


圖 4.7 “Magic formula”側向力與 Dugoff’s 輪胎模型側向力之比值

分析上層控制器考慮的未知變動量之上限值(ΔX_{\max} 、 ΔY_{\max} 及 ΔM_{\max})：假設實際輪胎模型側向摩擦力： $F_b = (1 + \Delta_b)F'_b$ ；其中 Δ_b 為未知的變動量。在同一輪胎側滑角，不同輪胎模型所產生的側向力應為同向，圖 4.7 為”Magic formula”側向力在不同摩擦係數下與側向控制器內假設的側向反 Dugoff’s 輪胎模型($\mu = 0.85$)側向力的比值，故合理假設 $|\Delta_b| < \Delta_{b\max} < 1$ 。

回顧(3.2)與(4.8)式，將前述假設實際輪胎模型側向摩擦力代入：

$$\begin{aligned}
 ma_x &= \sum_{i=1}^4 F_{ai} \cos \delta_i - \sum_{i=1}^4 F_{bi} \sin \delta_i \\
 &= \sum_{i=1}^4 F_{ai} \cos \delta_i - \sum_{i=1}^4 (1 + \Delta_{bi}) F'_{bi} \sin \delta_i \\
 &= \sum_{i=1}^4 F_{ai} \cos \delta_i - \sum_{i=1}^4 F'_{bi} \sin \delta_i - \sum_{i=1}^4 \Delta_{bi} F'_{bi} \sin \delta_i \\
 &= X + \Delta X
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

；其中 $\Delta X = -\sum_{i=1}^4 \Delta_{bi} F'_{bi} \sin \delta_i$ ，討論其最大值發生於若所有輪胎與路面間所能提供的摩擦力均作用於輪胎之側向力，且輪胎轉角為最大轉角45度，則 ΔX_{\max} 假設如下：

$$\Delta X_{\max} = \Delta_{b\max} \mu mg \sin 45^\circ \tag{4.95}$$

同樣地，回顧(3.3)與(4.9)式，將前述假設實際輪胎模型側向摩擦力代入：

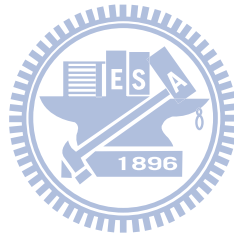
$$\begin{aligned}
 ma_y &= \sum_{i=1}^4 F_{ai} \sin \delta_i + \sum_{i=1}^4 F_{bi} \cos \delta_i \\
 &= \sum_{i=1}^4 F_{ai} \sin \delta_i + \sum_{i=1}^4 F'_{bi} \cos \delta_i + \sum_{i=1}^4 \Delta_{bi} F'_{bi} \cos \delta_i \\
 &= Y + \Delta Y
 \end{aligned}$$

；其中 $\Delta Y = \sum_{i=1}^4 \Delta_{bi} F'_{bi} \cos \delta_i$ ，討論其最大值發生於若所有輪胎與路面間所能提供的摩擦力均作用於輪胎之側向力，且輪胎轉角為0度，則 ΔY_{\max} 假設如下：

$$\Delta Y_{\max} = \Delta_{b\max} \mu mg \quad (4.96)$$

由於 ΔM_{\max} 則比較難用上述方式分析，所以在控制器內是合理假設 ΔM 造成的橫擺角加速度不會超過 $90^\circ/s^2$ ，將 ΔM_{\max} 假設如下：

$$\Delta M_{\max} = 1.57 I_z \quad (4.97)$$



第五章、模擬與結果討論

在此將利用第三章介紹的車輛系統模型模擬本研究中控制器控制的車輛，會模擬比較常見的駕駛情況，如轉向(J-turn)與車道變換(Single-lane change)。模擬結果最後會與 Ackermann[5]所提出的四輪轉向控制策略和 Mirzaei[12]提出的直接橫擺力矩控制之結果做比較。

轉向即是車輛直線行駛，在一段時間內將方向盤轉到固定的角度，讓車輛繞著一同心圓行進；車道變換為車輛在道路行駛時，將車輛從原本的车道切換到隔壁車道。行駛路徑示意圖如下：

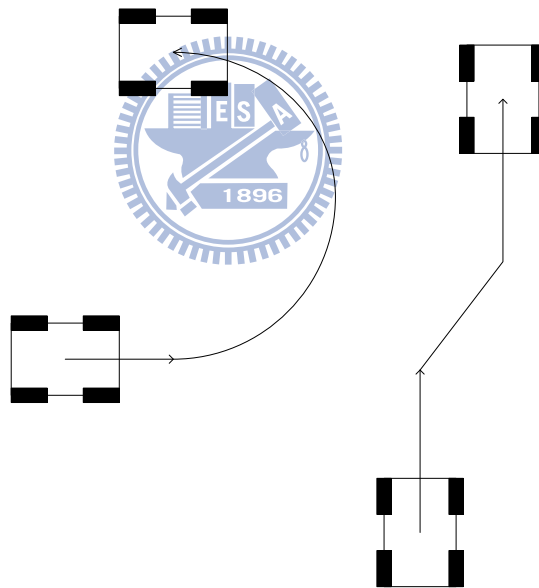


圖 5.1 車輛行駛路徑示意圖 (左: J-turn, 右: Single-lane change)

模擬時所使用的車輛參數與”Magic formula”輪胎模型參數[13]，如表 5.1 與表 5.2。模擬的控制車輛限制其輪胎轉向角 δ 的範圍為 ± 45 度之間。模擬中控制器內假設的路面摩擦力係數 $\mu = 0.85$ ；控制車輛縱向速度的順滑層(Sliding layer) ε_x 選定為0.1、質心側滑角的順滑層 ε_y 選定為0.005、橫擺角速度的順滑層 ε_M 選定為0.005；下層控制器控制跟隨所需縱向力的順滑層選定為1、輪胎側滑角控制器的順滑層選定為0.005。

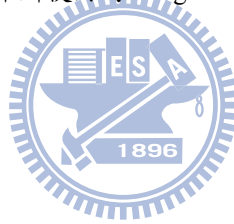
模擬中 F_{a1} 表示車輛左前輪平行胎面之縱向摩擦力、 F_{a2} 為右前輪縱向力、 F_{a3} 為左後輪縱向力、 F_{a4} 為右後輪縱向力； F_{b1} 表示車輛左前輪垂直胎面之側向摩擦力、 F_{b2} 為右前輪側向力、 F_{b3} 為左後輪側向力、 F_{b4} 為右後輪側向力。

參數	符號	數值	單位
車體質量	m	1740	kg
車體集中質量	m_s	1600	kg
車體集中質量之質心高度	h_s	0.6	m
車體質心到前輪軸的距離	l_f	1.05	m
車體質心到後輪軸的距離	l_r	1.4	m
車輛前輪輪距	t_f	1.45	m
車輛後輪輪距	t_r	1.65	m
橫擺轉動慣量	I_z	3214	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
輪胎等效半徑	r_i	0.306	m
輪胎轉動慣量	I_w	2.03	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$

表 5.1 模擬中所使用的車輛參數

參數	符號	數值
縱向輪胎係數	B_x	$\frac{-4.96 \times 10^{-5} F_z^2 + 0.026 F_z}{C_x D_x e^{6.9 \times 10^{-5} F_z}}$
縱向輪胎係數	C_x	1.65
縱向輪胎係數	D_x	$-2.13 \times 10^{-5} F_z^2 + 1.144 F_z$
縱向輪胎係數	E_x	$-6 \times 10^{-9} F_z^2 + 5.6 \times 10^{-5} F_z + 0.486$
側向輪胎係數	B_y	$\frac{1078 \sin(1.82 \tan^{-1}(2.08 \times 10^{-4} F_z))}{C_y D_y}$
側向輪胎係數	C_y	1.3
側向輪胎係數	D_y	$-2.2 \times 10^{-5} F_z^2 + 1.001 F_z$
側向輪胎係數	E_y	$-3.54 \times 10^{-4} F_z + 0.707$

表 5.2 模擬中所使用的”Magic formula”輪胎模型參數



5.1 J-turn

在轉向模擬的部分主要是以在不同轉向角的駕駛情況下，呈現控制器控制的結果。模擬一與模擬二分別對兩種不同的轉向角度駕駛做控制，模擬一為 2 度轉向，車輛側向加速度較小(2.5 m/sec^2)，控制器能控制車輛維持等速轉向，且橫擺角速度與質心側滑角皆有跟隨參考值。圖 5.3 表示縱向力最佳化分配結果與縱向力估測結果，可以觀察到最佳化分配出的左、右側縱向力為異號，故有提供產生車輛橫擺運動所需的橫擺力矩；但當固定橫擺角速度轉向時，分配之側向力仍會造成與運動方向同向的橫擺力矩，所以縱向力會分配產生出反向的橫擺力矩以維持車輛之固定轉向。圖 5.4 表示側向力最佳化分配的結果，右側輪胎分配到比較多的側向力，是因為轉向時車體重量轉移，使右側輪胎正向力較大，所以輪胎與路面間可以分配較多側向力以維持車輛側向動態運動。

模擬二為 5 度的轉向，相對的車輛側向加速度也來得比較大(6.4 m/sec^2)。圖 5. 11

及圖 5.12 可以看出控制車輛成功跟隨參考值與參考行駛路徑。圖 5.9 及圖 5.10 最佳化輪胎與路面間摩擦力分配的結果，可以發現各個輪胎分配的側向力比 2 度轉向來得大以維持較大車輛側向加速度運動，而因為分配的側向力較大，側向力平行車身的分量會造成車輛減速，故輪胎縱向力分配會分配出正值以維持縱向車速的等速行駛。

模擬一：車輛以初速 $V_x = 15.3\text{m/s}$ 直線前進，2 秒時駕駛者下達進行車輪轉向角為 2 度的 J-turn 命令，且 V_x 維持等速，路面狀況模擬在一般柏油路($\mu = 0.85$)。

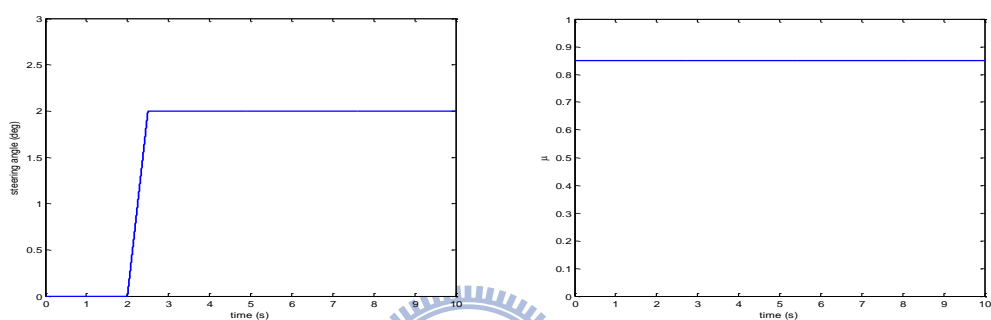


圖 5.2 模擬一之駕駛者轉向命令(左)與路面摩擦力係數(右)

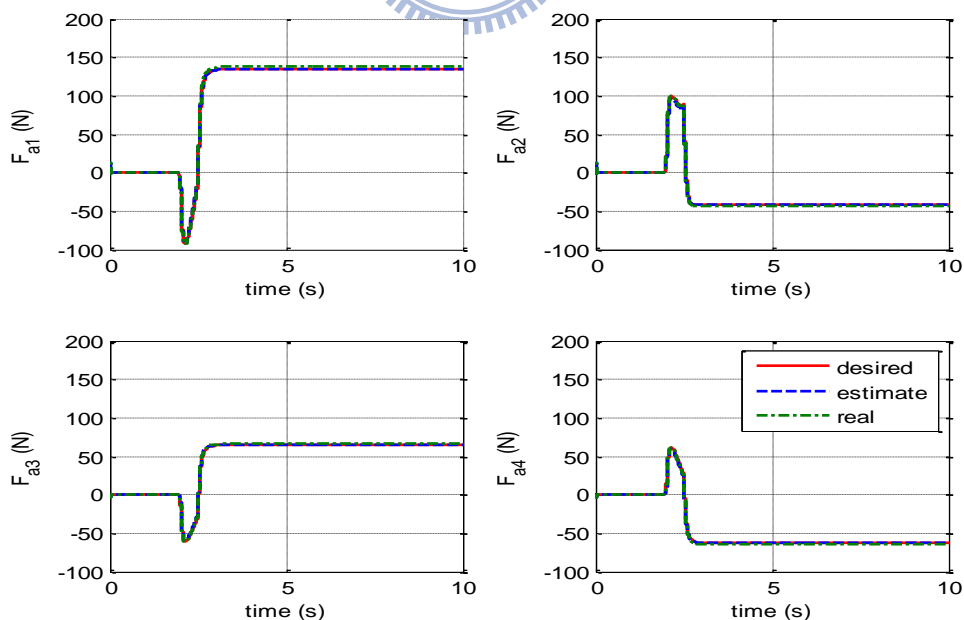


圖 5.3 模擬一之縱向力最佳化分配、估測與實際結果

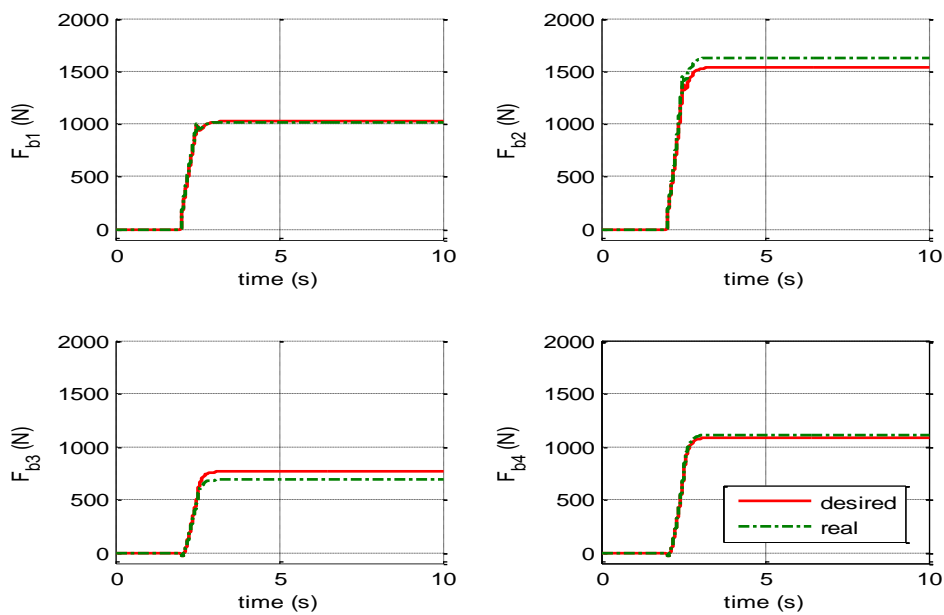


圖 5.4 模擬一之側向力最佳化分配與實際結果

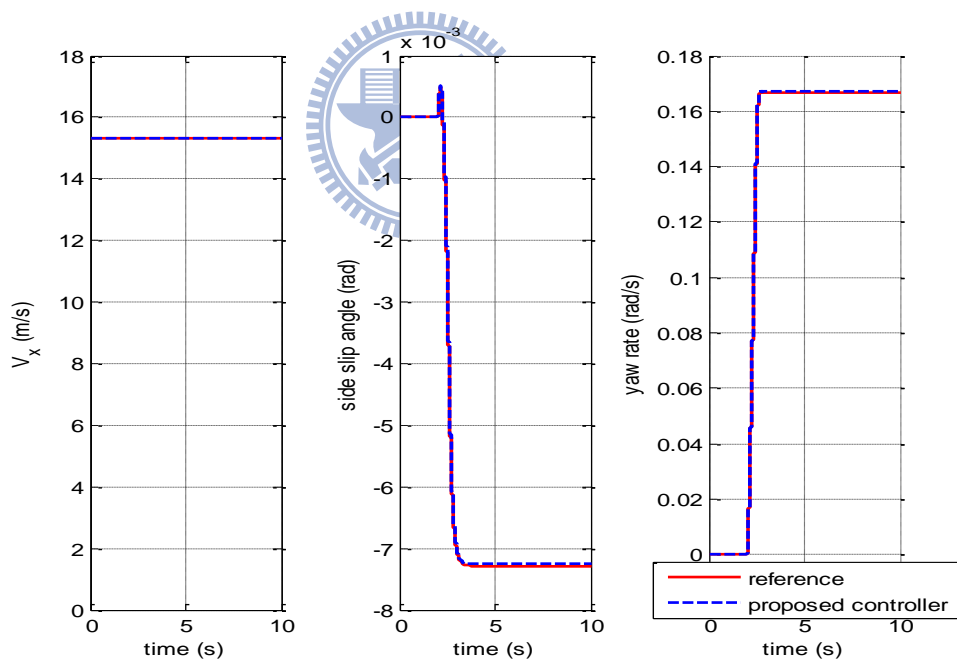


圖 5.5 模擬一之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果

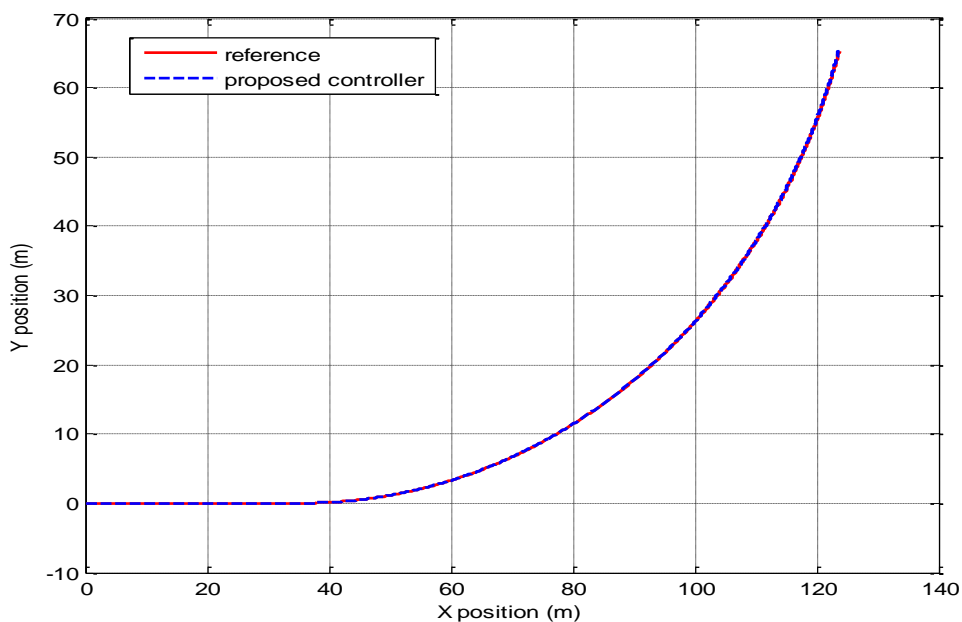


圖 5.6 模擬一之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果

由於輪胎側向力與側滑角之間的非線性關係會受到輪胎的正向力的影響，如圖 5.7，故影響下層輪胎側滑角控制器所假設的 Dugoff's 輪胎模型和實際輪胎模型之間的差異，造成在相同輪胎側滑角下輪胎實際產生的側向力與所需側向力會有誤差，如圖 5.4 所示。

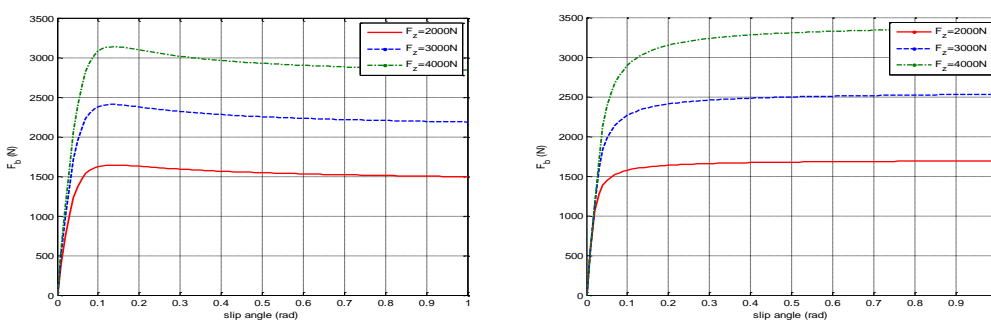


圖 5.7 側向摩擦力與正向力關係圖($\mu = 0.85$)：Magic formula 輪胎模型(右)、Dugoff's 輪胎模型(左)

模擬二：車輛以初速 $V_x = 15.3\text{m/s}$ 直線前進，2 秒時駕駛者下達進行車輪轉向角為 5 度的 J-turn 命令，且 V_x 維持等速，路面狀況模擬在一般柏油路($\mu = 0.85$)。

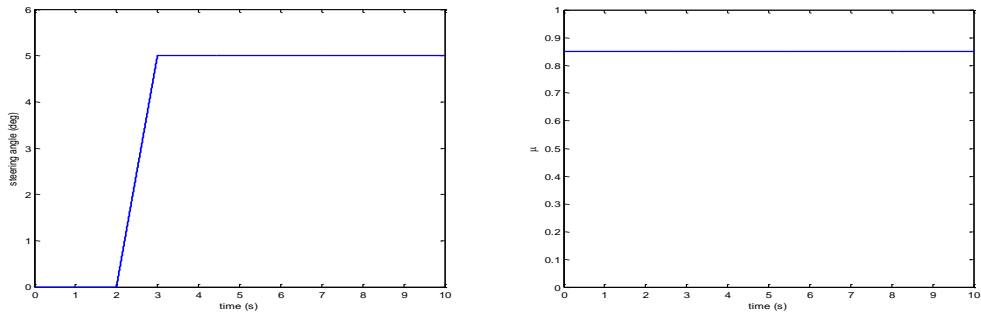


圖 5.8 模擬二之駕駛者轉向命令(左)與路面摩擦係數(右)

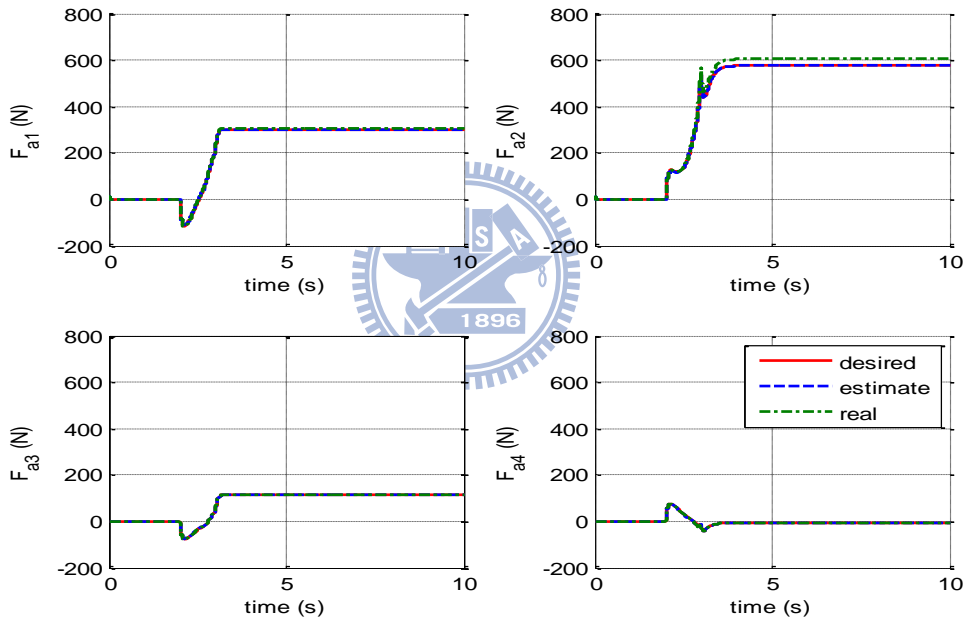


圖 5.9 模擬二之縱向力最佳化分配、估測與實際結果

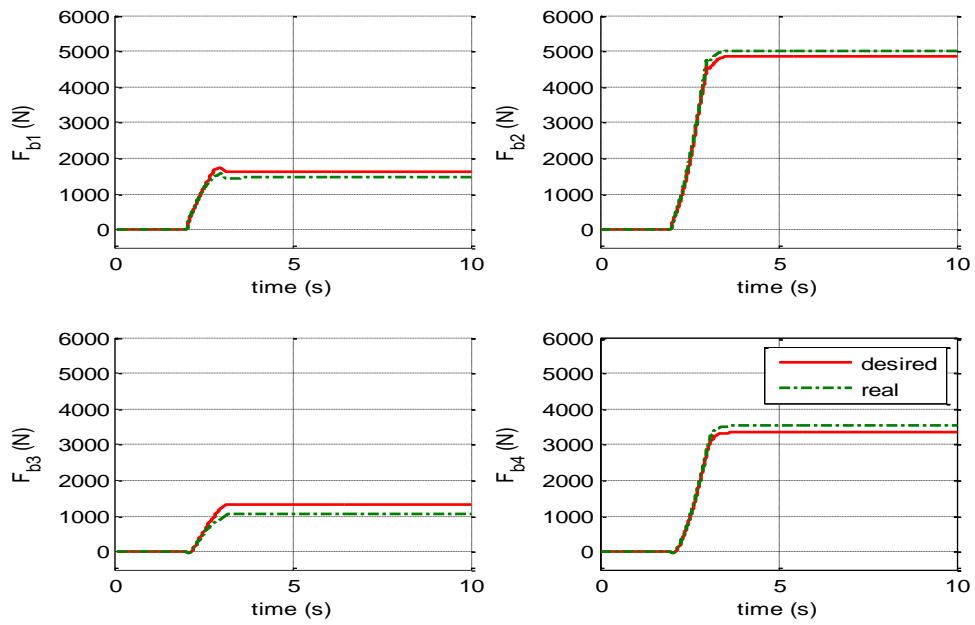


圖 5.10 模擬二之側向力最佳化分配與實際結果

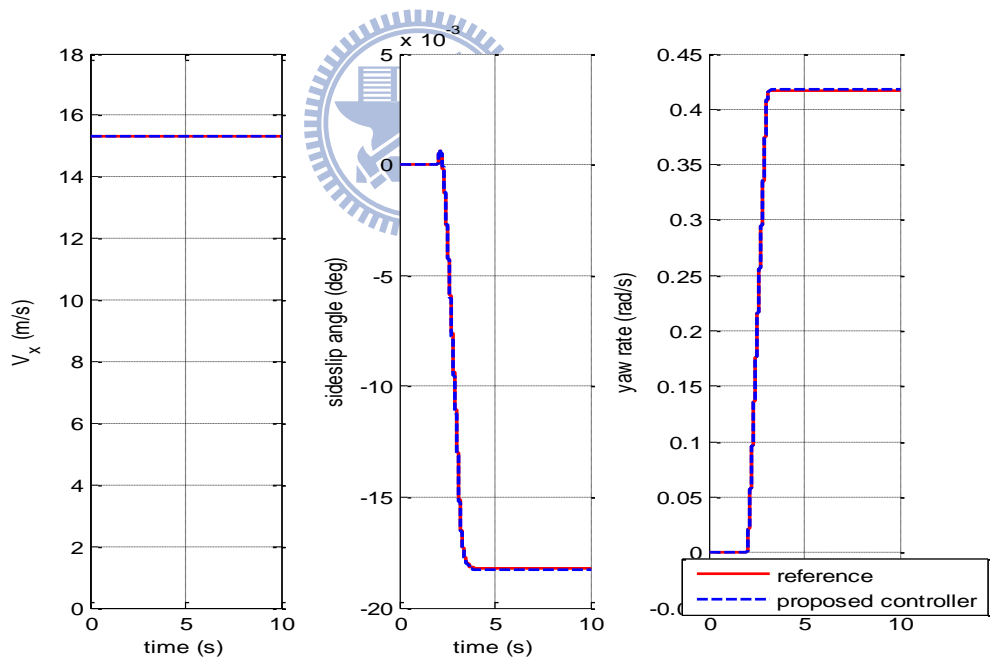


圖 5.11 模擬二之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果

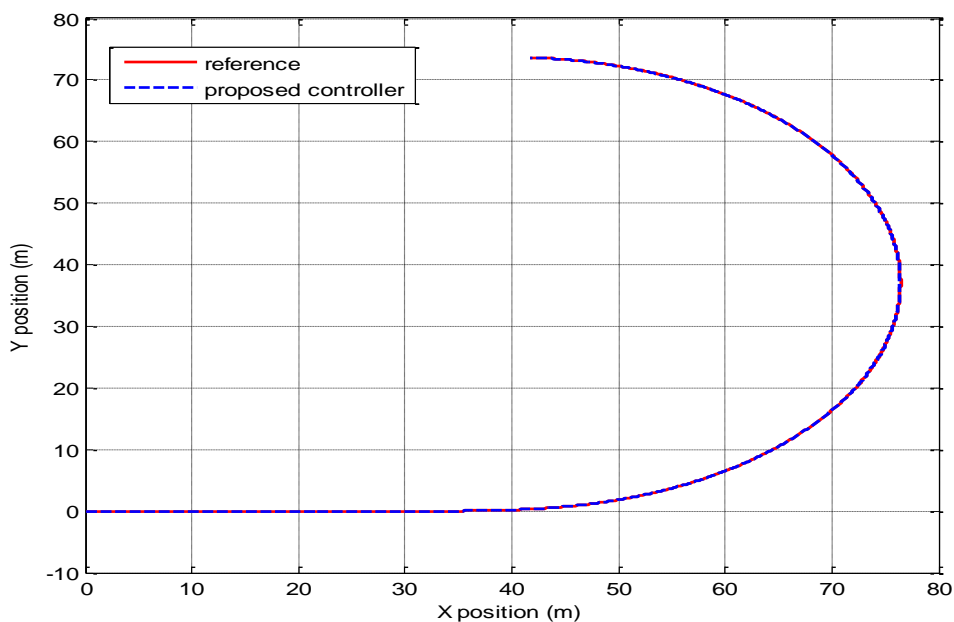


圖 5.12 模擬二之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果

5.2 Single-lane change



在變換車道模擬部分模擬變換一個車道的駕駛情況，模擬三與模擬四駕駛的情況差別在於，模擬四路面狀況模擬車輛切換車道到積水的柏油路上行駛，也就是路面摩擦力係數較低的路面行駛。由圖 5.14 及圖 5.19 可以發現由於下層縱向力控制器有回授估測之縱向力值做縱向力跟隨控制，所以縱向力最佳化分配結果沒有明顯的差異，而側向力則是會因為控制器內假設的輪胎模型與實際輪胎之間的不確定性所造成的誤差，由上層控制器控制補償，故由圖 5.15 及圖 5.20 側向力最佳化分配的結果可以發現車輛在切換車道行駛至路面摩擦力係數較低時(約在 5~6 秒)，分配上側向力有比較明顯的差異。不過，不管是切換至積水的柏油路或是一般柏油路，控制結果都能跟隨參考的路徑行駛。

模擬三：車輛以初速 $V_x = 15.3\text{m/s}$ 直線前進，4 秒時駕駛者進行車道變換，且 V_x 維持等速，路面狀況模擬在一般柏油路($\mu = 0.85$)。

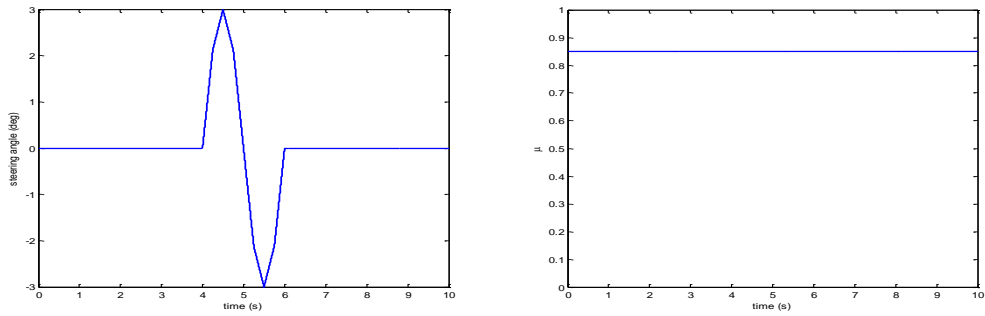


圖 5.13 模擬三之駕駛者轉向命令(左)與路面摩擦力係數(右)

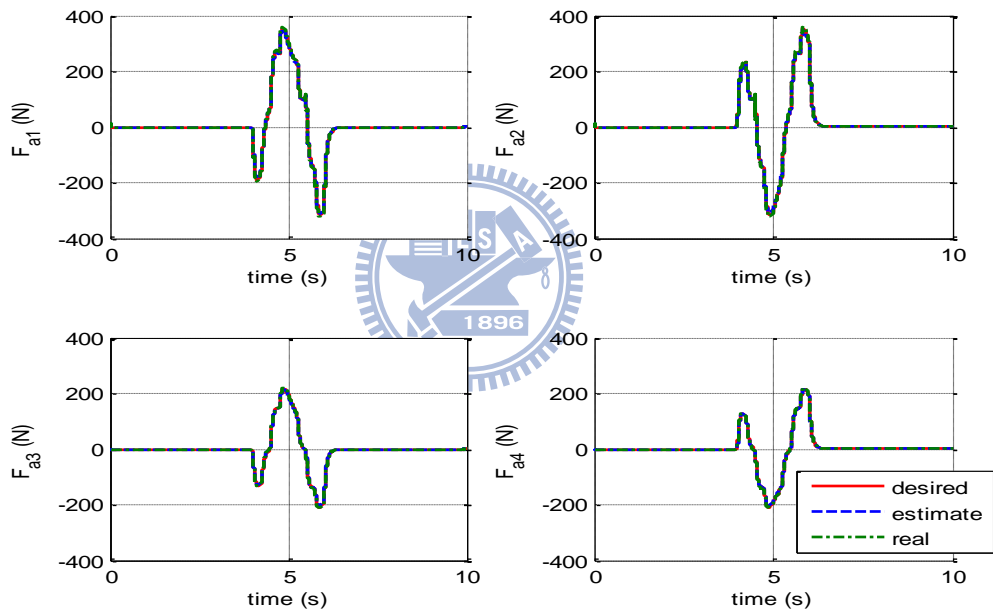


圖 5.14 模擬三之縱向力最佳化分配、估測與實際結果

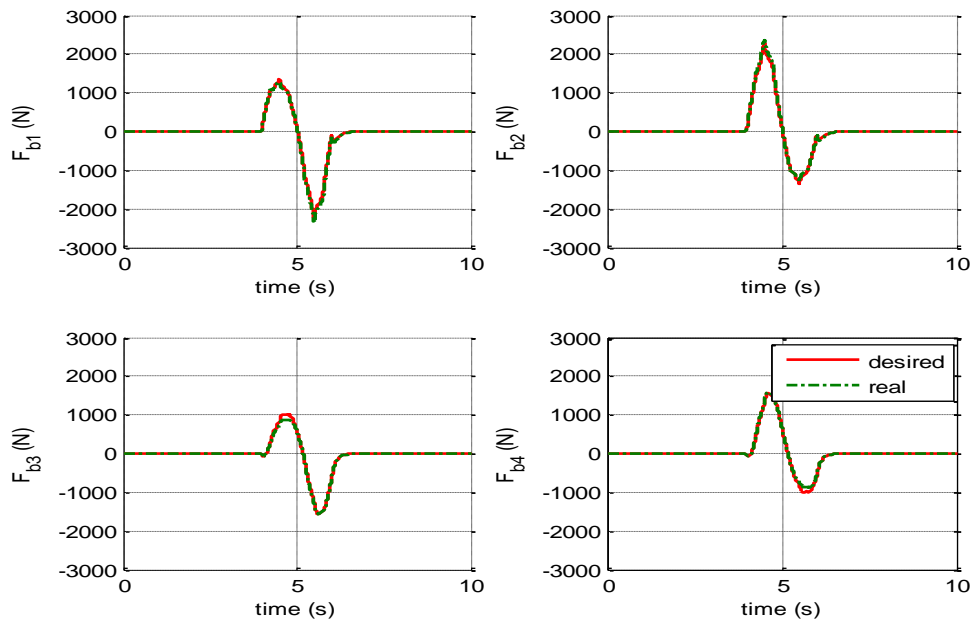


圖 5.15 模擬三之側向力最佳化分配與實際結果

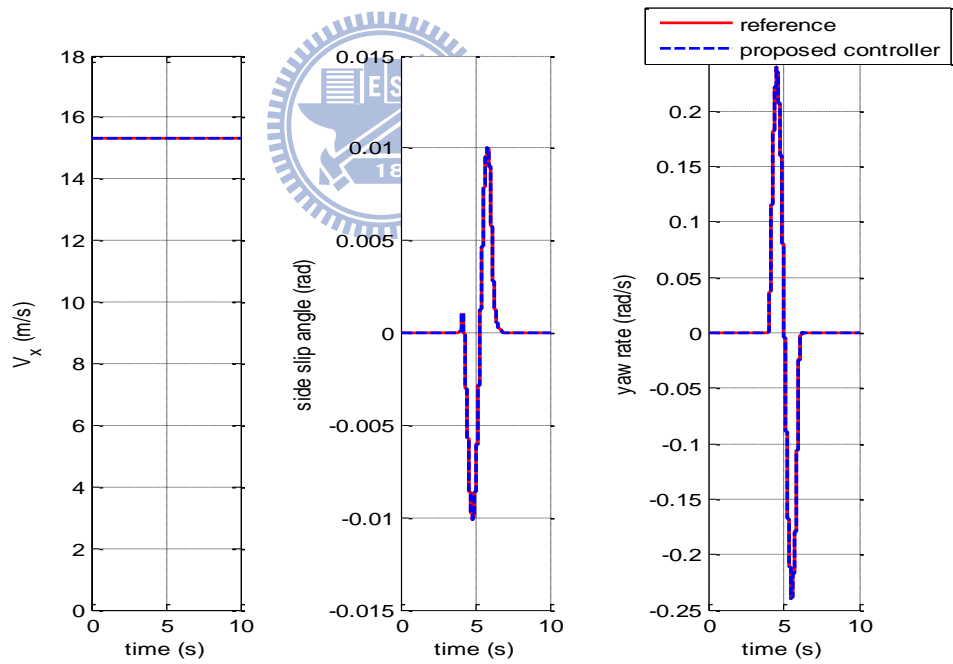


圖 5.16 模擬三之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果

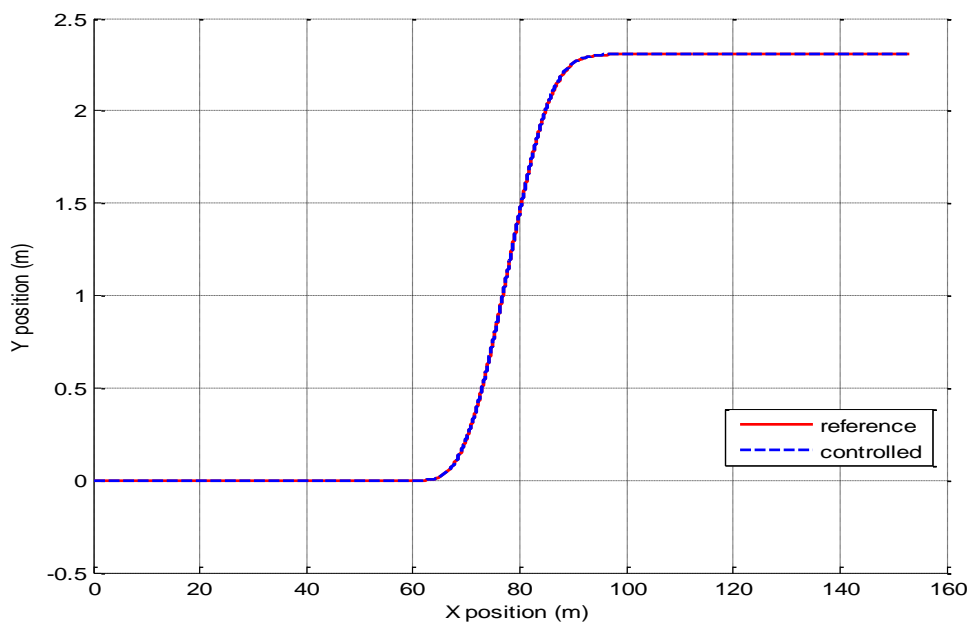


圖 5.17 模擬三之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果

模擬四：車輛以初速 $V_x = 15.3\text{m/s}$ 直線前進，4 秒時駕駛者進行車道變換，且 V_x 維持等速，路面狀況模擬為從行駛在一般柏油路($\mu = 0.85$)，變換車道後行駛在積水的柏油路($\mu = 0.45$)。

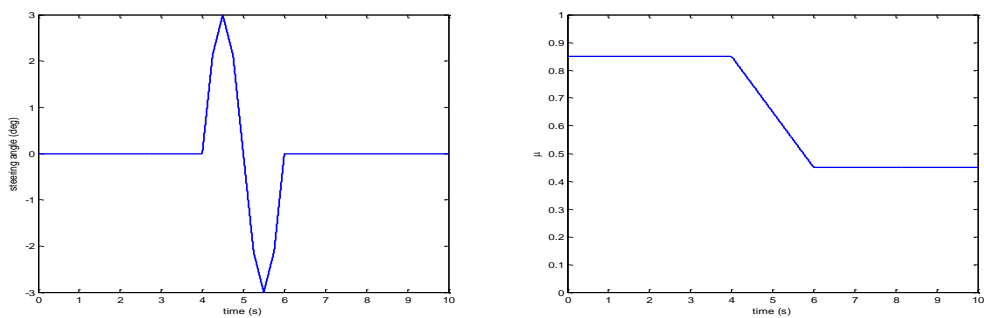


圖 5.18 模擬四之駕駛者轉向命令(左)與路面摩擦力係數(右)

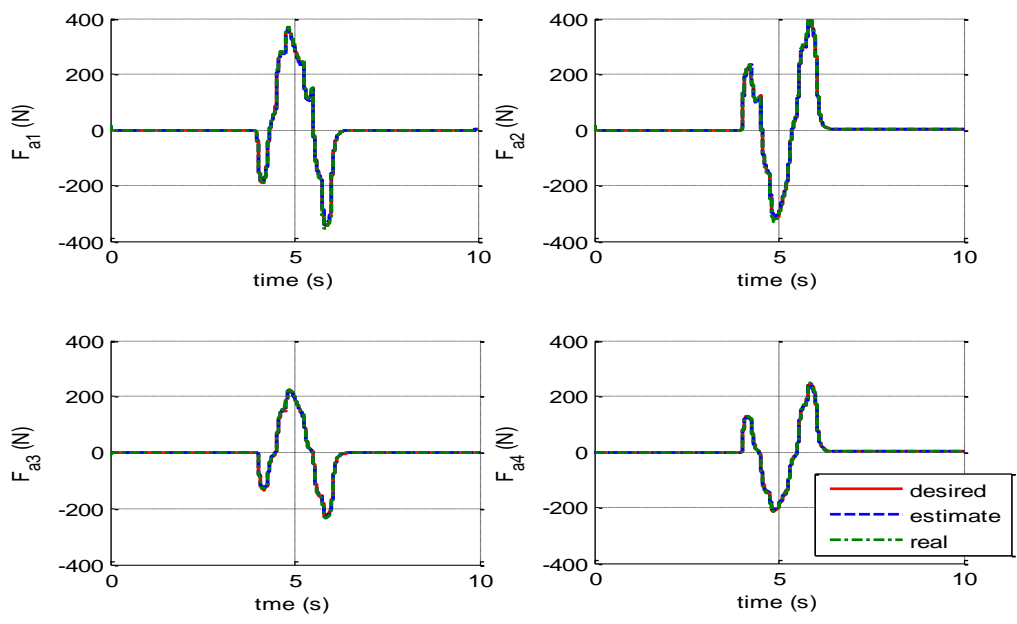


圖 5.19 模擬四之縱向力最佳化分配、估測與實際結果

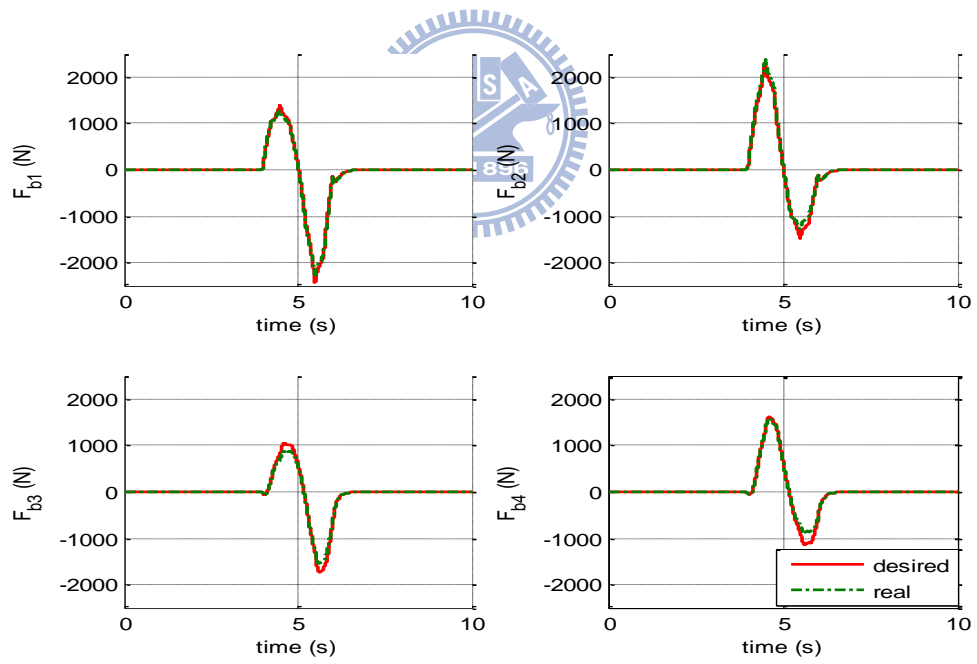


圖 5.20 模擬四之側向力最佳化分配與實際結果

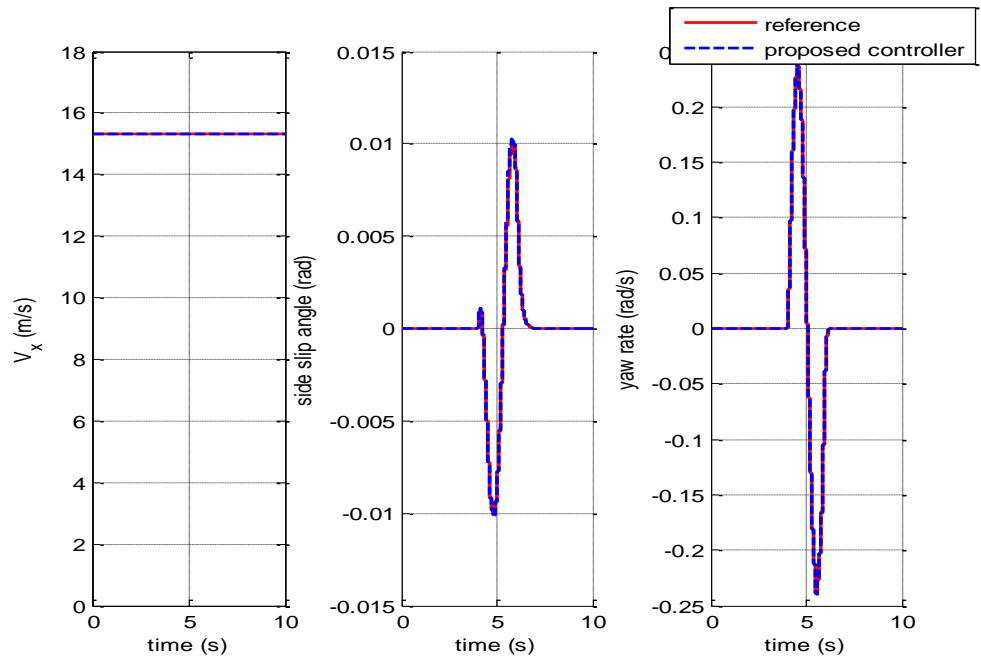


圖 5.21 模擬四之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果

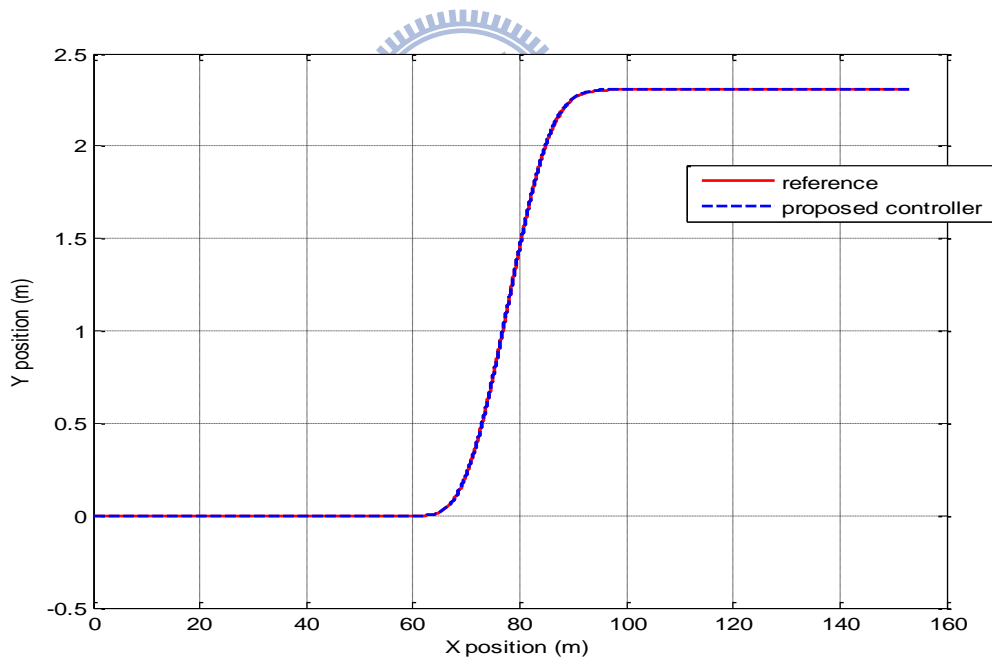


圖 5.22 模擬四之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果

5.3 相關控制器控制結果比較

相關控制器控制結果比較部分，將與 Ackermann[5]所提出的四輪轉向控制器以及 Mirzaei[12]所提出來的直接橫擺力矩控制策略作比較。模擬五與模擬六皆為轉向角 10 度的轉向。車輪轉向角 10 度的轉向命令，線性參考模型橫擺角速度的響應已經超過橫擺角速度最大之物理限制：(4.5)式，故將會橫擺角速度參考值會限制在其最大值，在模擬中將最大值限制於 $\pm 0.4183 \text{ rad/s}$ 。模擬五為 10 度轉向，圖 5. 24 表示控制車輛橫擺角速度比較，可以明顯地發現四輪轉向控制橫擺角速度已經不再受到控制器控制，而質心側滑角型式 DYC 控制也可看出控制結果不甚理想，橫擺角速度型式 DYC 控制則有些許的誤差，但隨著維持轉向行駛，誤差也因為車輛側向動態沒控制好的緣故而增加。圖 5. 25 為控制車輛質心側滑角比較，四輪轉向已無法維持側向運動的穩定，質心側滑角型式 DYC 控制一開始跟隨誤差很小，不過最後也受到橫擺角速度控制誤差影響變大，橫擺角速度型式 DYC 控制質心側滑角一開始即與參考值反向產生側滑。圖 5. 27 車輛行駛路徑即可看出控制車輛與參考路徑跟隨的誤差，本研究使用的控制器在橫擺角速度最大限制下，仍能夠跟隨參考路徑。模擬六路面狀況則是模擬轉向時左側輪胎行駛經過摩擦力係數較低的路面，圖 5. 30 可以看出本研究所使用的控制器依然可以跟隨橫擺角速度參考值，而橫擺角速度型式 DYC 在 5 秒時受到路面狀況變化的影響誤差增加。圖 5. 31 可以發現本研究之控制器在 5 秒路面狀況改變時質心側滑角沒有跟隨參考值，是由於輪胎與路面間產生的摩擦力仍無法維持車輛側向運動所需的側向合力，但當車輛縱向速度減速，實際維持車輛側向運動所需的側向合力也會下降，控制車輛最後仍可跟隨質心側滑角參考值；而其他控制策略質心側滑角將持續增加。圖 5. 32 可以發現本研究之控制器在 5 秒時以安全性為考量，放棄對縱向速度的控制，縱向速度減速。

模擬中 4WS 控制法如(2.7~9)式，參數 $k_s = \frac{30m_l r}{C_{pl}}$ (參數值參考表 5. 1)、 $K_D = 1.05$ ，限制車輪轉角最大為 $\pm 45^\circ$ 。

DYC 控制法如(2.13)式，兩種控制型式的權重因子選定如表 5.3 所示。

Weighting factors	w_r	w_b	w_u
Side-slip control type	0	10^3	10^{-7}
Yaw rate control type	1	0	10^{-9}

表 5.3 兩種 DYC 控制型式之權重因子值[12]

模擬五：

車輛以初速 $V_x = 15.3\text{m/s}$ 直線前進，2 秒時駕駛者下達進行車輪轉向角為 10 度的 J-turn 命令，且 V_x 維持等速，路面狀況模擬在一般柏油路($\mu = 0.85$)。

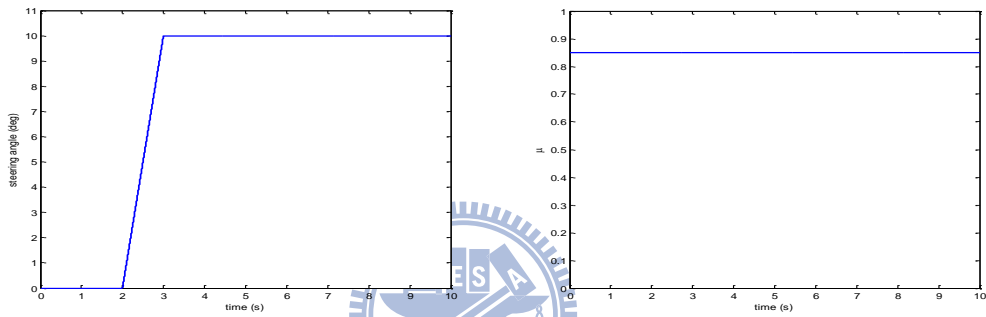


圖 5.23 模擬五之駕駛者轉向命令(左)與路面摩擦力係數(右)

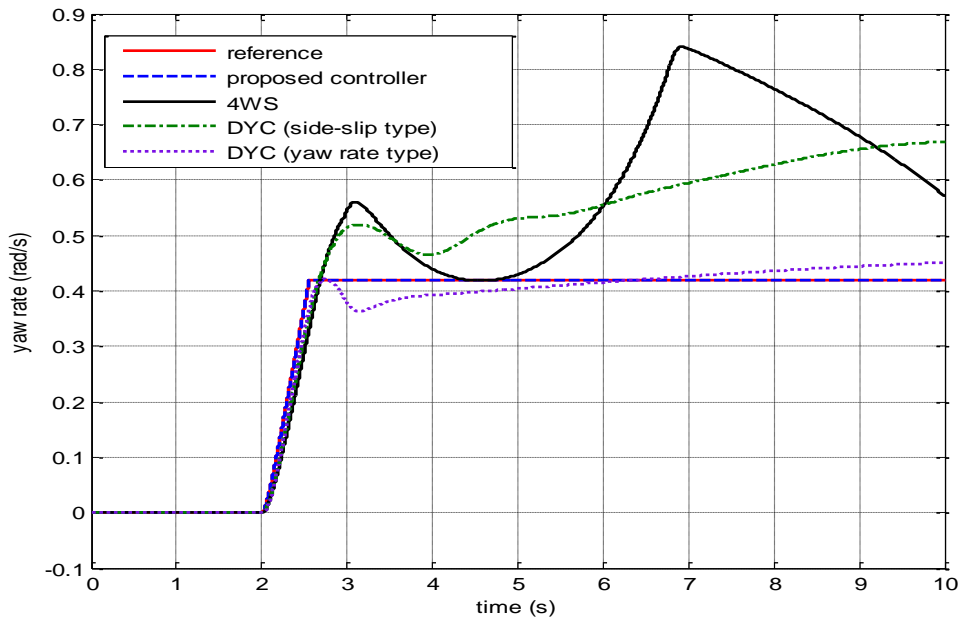


圖 5.24 模擬五之控制車輛橫擺角速度比較圖

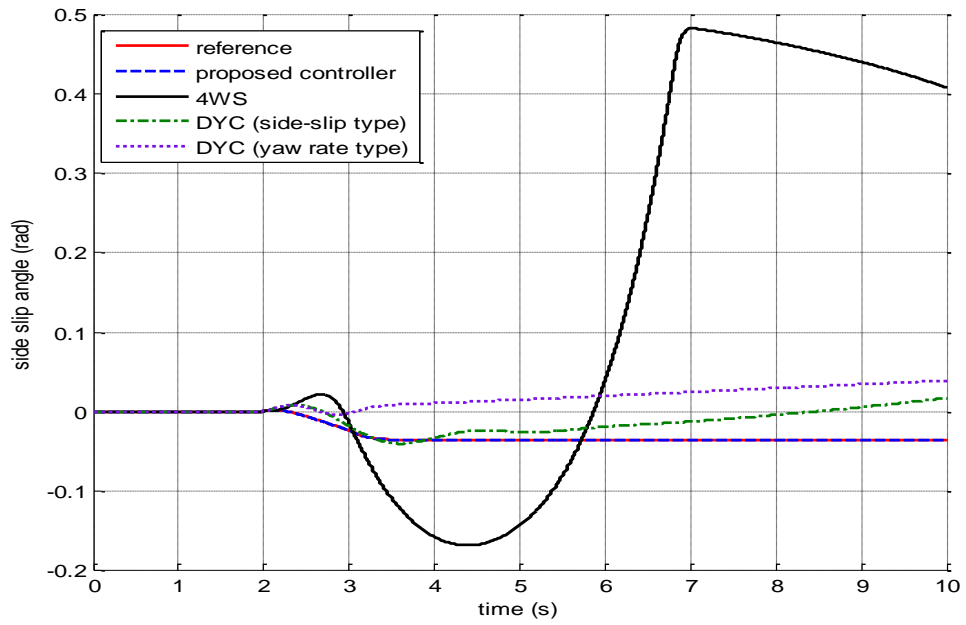


圖 5.25 模擬五之控制車輛質心側滑角比較圖

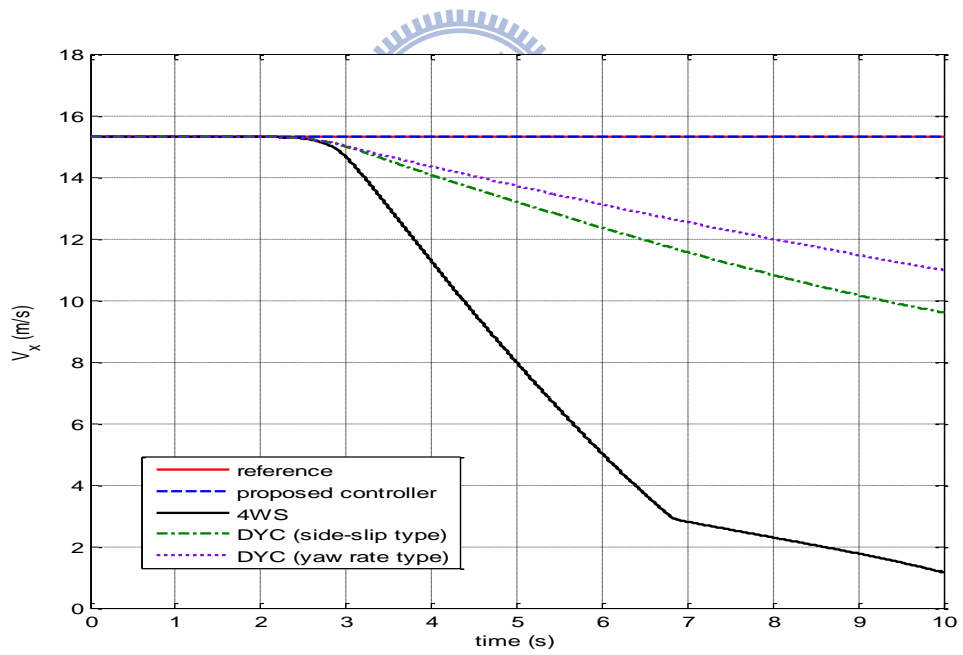


圖 5.26 模擬五之控制車輛縱向速度比較圖

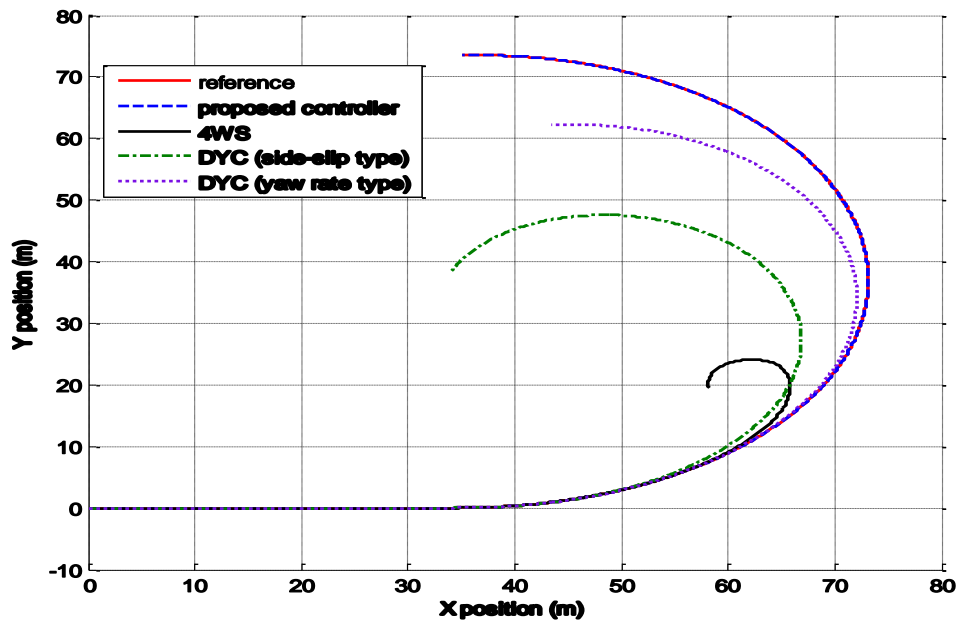


圖 5.27 模擬五之控制車輛於地表座標上所行駛路徑比較圖

模擬五為緊急的駕駛情況下達的轉向命令，在此情況下一般駕駛者較不易自行修正車輛行駛的路徑，所以藉由車輛運動控制器來控制車輛行駛於安全的行駛路徑。由圖 5.28 可以發現四輪轉向控制器控制的結果車輛前輪之轉向角度已經到達模擬車輛之車輪轉角最大限制： 45° ，故四輪轉向控制器此時即無法保證對車輛的操控性與穩定性，而本研究所提出的控制器仍可以控制車輪轉向角達到控制目的；直接橫擺力矩控制器則是沒有控制車輪轉向角。此外，圖 5.26 可以發現在緊急的情況下，輪胎側向力於平行車身之分力會造成車輛縱向速度不預期地減速，四輪轉向控制車輛縱向速度即有明顯地減速，而本研究之控制器可維持縱向速度等速行駛，故依然使車輛動態跟隨給定的參考軌跡。

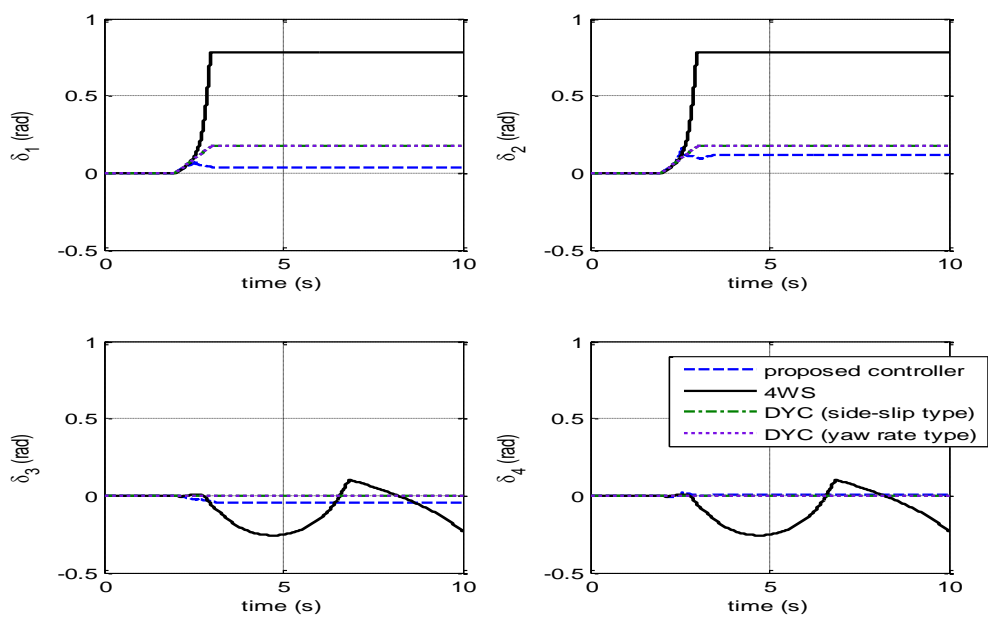


圖 5.28 模擬五之控制車輛輪胎轉向角比較圖

模擬六：

車輛以初速 $V_x = 15.3\text{m/s}$ 直線前進，2秒時駕駛者下達進行轉向角為10度的J-turn命令，且 V_x 維持等速，路面狀況模擬5秒時左側輪胎行駛在積水的柏油路($\mu = 0.45$)，右側輪胎依然行駛在一般柏油路($\mu = 0.85$)。

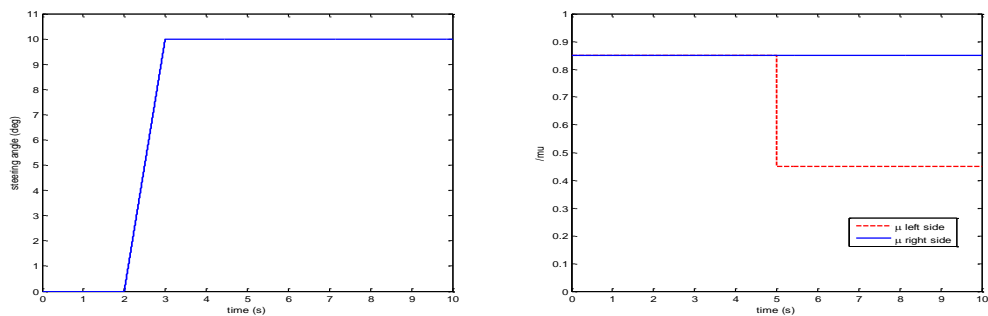


圖 5.29 模擬六之駕駛者轉向命令(左)與路面摩擦力係數(右)

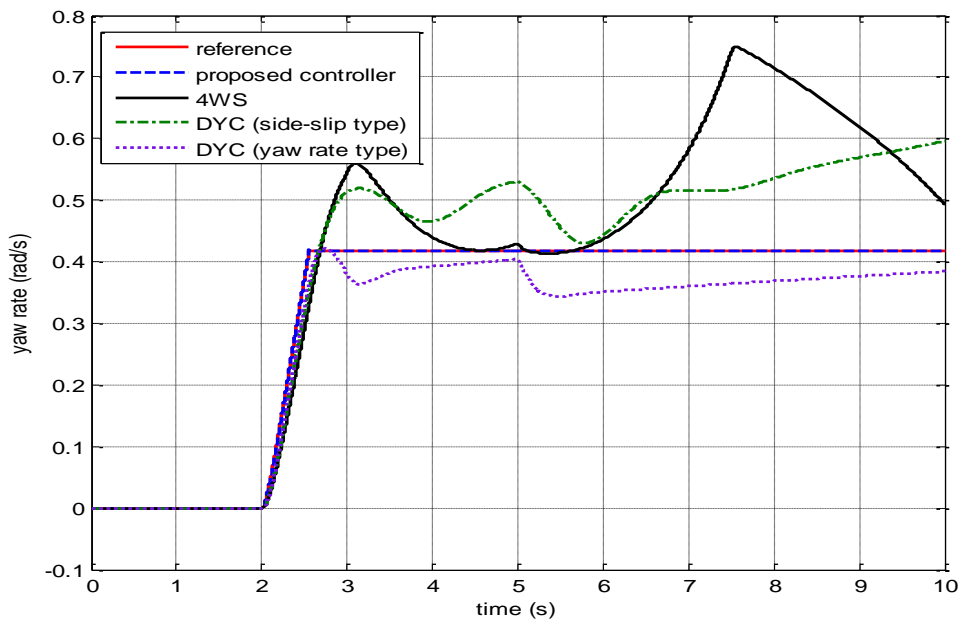


圖 5.30 模擬六之控制車輛橫擺角速度比較圖

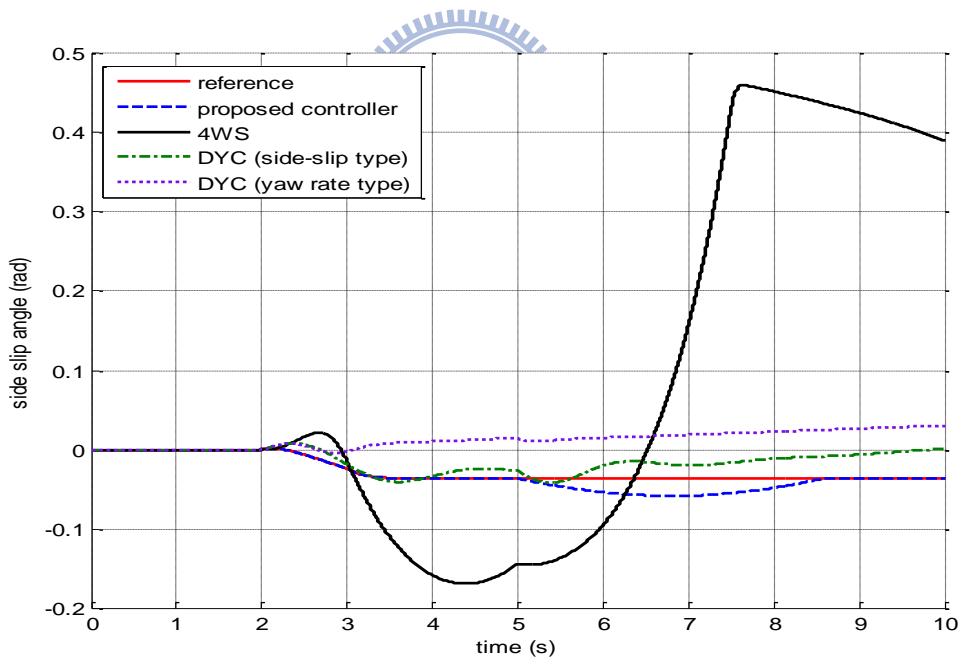


圖 5.31 模擬六之控制車輛質心側滑角比較圖

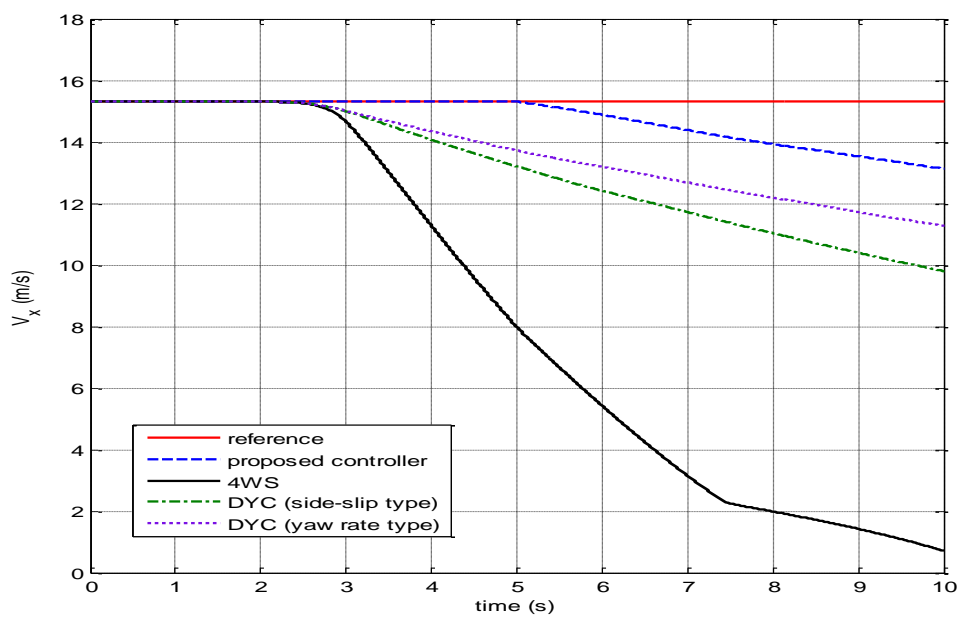


圖 5.32 模擬六之控制車輛縱向速度比較圖

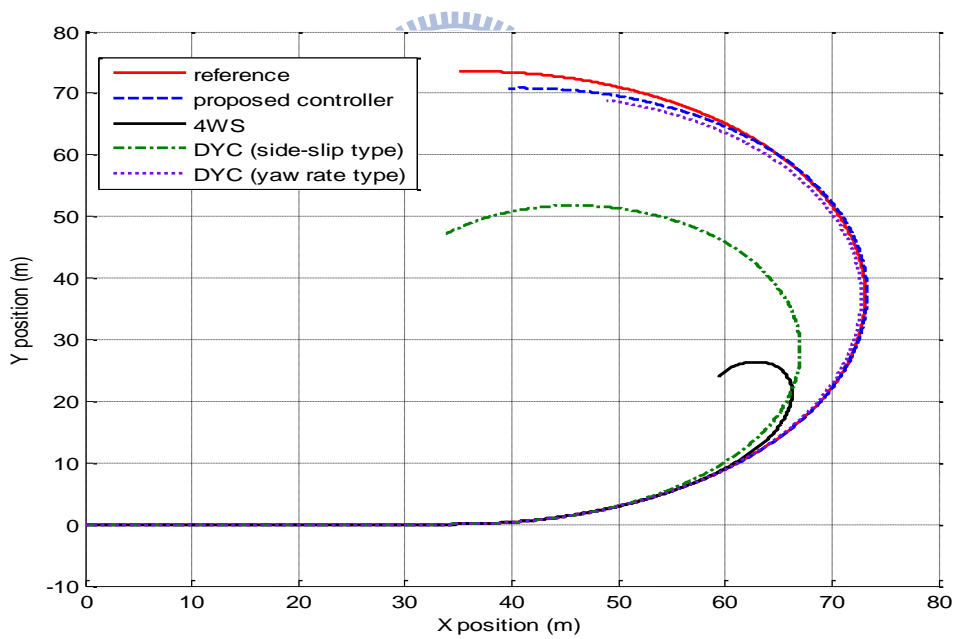


圖 5.33 模擬六之控制車輛於地表座標上所行駛路徑比較圖

模擬六是模擬在較嚴苛的條件下車輛控制的結果，當行駛經過積水路面時，最佳化輪胎與路面間摩擦力分配無法分配出四個輪胎符合摩擦力圓限制的摩擦力，可以由圖 5.34 觀察在 5 秒時，上層控制器計算出所需的側向合力已經超過了物理限制下所能產生的側向合力($ma_{y\max} : a_{y\max}$ ，(4.4)式)，圖 5.34 虛線為其上界，最佳化分配此時會如第四章最佳化問題求解所提到的，放棄縱向合力等式的限制，並將所需分配的側向合力限制於最大值，再作最佳化分配，相當於是上層控制器沒控制跟隨縱向速度參考值，但盡可能跟隨質心側滑角與橫擺角速度的參考值，以維持車輛側向運動的穩定性。

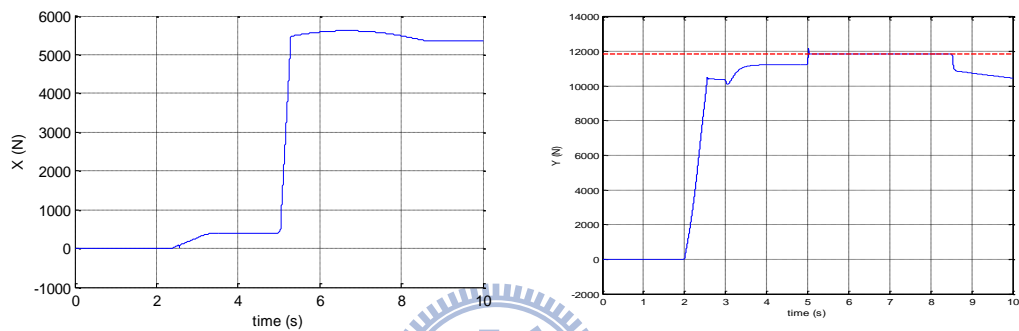


圖 5.34 模擬六之上層控制器縱向合力 X(左)與側向合力 Y(右)計算結果

第六章、結論與未來展望

6.1 結論

本研究設計上、下層控制器控制架構，控制車輛縱向、側向與橫擺運動。上層控制器計算使車輛動態跟隨給定的參考軌跡所需的縱向合力、側向合力與橫擺力矩總和，透過最佳化輪胎與路面間摩擦力分配，並且將輪胎摩擦力圓限制考慮進去，適當地將上層控制器所需之力量分配給每個輪胎，之後再由下層輪胎縱向摩擦力回授控制與輪胎側滑角控制器，考慮輪胎的非線性特性，藉由控制輪胎力矩與轉向角產生所需的輪胎摩擦力。

在第五章模擬了常見的駕駛情況，包括轉向與車道變換，以及在左右車道路面狀況不同的情況下作車道變換，模擬結果可以看出控制器在不同大小的轉向命令與側向加速度下，對車輛的縱向、側向與橫擺運動都有不錯的控制，上層控制器計算所需之力量也藉由最佳化輪胎與路面間摩擦力分配適當地分配至每個輪胎；下層縱向力控制器控制輪胎扭矩使輪胎與路面間產生所需之縱向力，而雖然輪胎側滑角控制在同一輪胎側滑角下輪胎實際產生的側向力和所需之側向力之間有誤差存在，不過也藉由上層控制器穩健性設計，使車輛的動態仍可跟隨給定的參考軌跡。模擬中也有和四輪轉向控制以及直接橫擺力矩控制的兩種型式做比較，由比較結果可以看出在車輛側向加速度大時，本研究設計的控制器在縱向、側向與橫擺運動皆有比較好的控制結果，且控制器亦有考慮到倘若最佳化輪胎與路面間摩擦力分配無法分配出同時滿足上層所需的縱向、側向與橫擺力矩總和時的情況，雖然質心側滑角在路面狀況改變後的幾秒內沒有跟隨參考值，不過隨著實際維持車輛側向運動所需的側向合力下降，最後仍可使車輛動態跟隨所給的參考值。

6.2 未來工作

未來工作分成以下幾點陳述：

一、在最佳化輪胎與路面間摩擦力分配部分，是將上層計算所需的力量適當地分配至每個輪胎，故控制的車輛要為四輪可以獨立驅動和轉向，但是若考慮現在市面上最為普遍的車輛為後輪驅動和前輪轉向，此時若經由最佳化分配出後輪所需的側向力也無法控制後輪轉向角產生所需之力，所以我們所設計最佳化輪胎與路面間摩擦力分配的成本函數將不再適用，為了克服這點成本函數要如何選擇，或者加入一些限制，這都是未來可以再繼續分析與研究的地方。

二、摩擦力係數估測部分目前只有用於輪胎縱向力控制器內平衡點的範圍限制，因為估測方法是基於縱向滑動，在縱向滑動率較小的情況下摩擦力係數並無法準確的估測，所以並沒有將估測的結果用於最佳化輪胎與路面間摩擦力分配，未來可以在摩擦力係數的估測上再作更準確的估測，最佳化輪胎與路面間摩擦力分配若可以利用摩擦力係數估測結果的資訊，將可以做更有效率的分配。

三、在本研究中忽略了車身的側傾(Roll)與俯仰(Pitch)運動的影響，對於質心位置較高的休旅車，高速下或者大角度的轉向容易造成側翻，上層控制器可以考慮加入車身的側傾與俯仰對橫擺運動動態影響，或在順滑平面設計上加入側傾或俯仰運動的平衡點，設計控制上層輸入跟隨給定的參考值。

四、未來實驗驗證部分，初期會以建構單一個輪胎動態實驗平台(Quarter car model)與模擬軟體模擬的車輛動態整合成一個 Hardware-in-the-loop 的實驗環境，驗證下層控制器控制的結果；之後進展到實車驗證，上層控制器會需要回授車輛的縱向、側向速度和橫擺角速度，以及需要估測車輛質心側滑角，就如第四章所提到的：車輛縱向與側向速度可以利用全球定位系統(GPS)來判斷質心的位置與移動速度；用陀螺儀來量測橫擺角速度；質心側滑角可借助一些估測方法估測，所以這些都是控制器在實車驗證上會需要考慮如何獲得的資訊。

参考文献

- [1] Y. Hori, "Future Vehicle Driven by Electricity and Control—Research on Four-Wheel-Motored 'UOT Electric March II'," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 51, no. 5, pp. 954-962, Oct. 2004.
- [2] P. He, and Y. Hori, "Experimental Evaluation of Dynamic Force Distribution Method for EV Motion Control," in *IEEE Power Conversion Conf. PCC'04*, Nagoya, Japan, Apr. 2007, pp. 682-687.
- [3] P. He, and Y. Hori, "Improvement of EV Maneuverability and Safety Force Distribution with Disturbance Observer," *WEVA Journal*, vol. 1, pp. 258-263, May 2007.
- [4] Y. Furukawa, N. Yuhara, S. Sano, H. Takeda and Y. Matsushita, "A Review of Four-Wheel Steering Studies from the Viewpoint of Vehicle Dynamics and Control," *Vehicle System Dynamics*, 18, pp. 151-186, 1989.
- [5] J. Ackermann, "Robust Decoupling, Ideal Steering Dynamics and Yaw Stabilization of 4WS Cars," *Automatica*, vol. 30, no. 11, pp.1761-1768, 1994.
- [6] V.Nikzad. S. and M. Naraghi, "Model Reference Tracking Control of A 4WS Vehicle Using Single and Dual Steering Strategies," *SAE 2002 Transactions, Journal of Passenger Cars : Mechanical Systems*, no. 2002-01-1590, pp.1841-1851.
- [7] T. Pilutti, G. Ulsoy and D. Hrovat, "Vehicle steering intervention through differential braking," *Journal of Dynamics Systems Measurement and Control Transactions of the ASME*, vol. 120, Issue:3, pp. 314-321, Sep. 1998.
- [8] Y. Shibahata, K. Shimada and T. Tomari, "Improvement of Vehicle Maneuverability by Direct Yaw Moment Control," *Vehicle System Dynamics*, vol. 22, pp. 456-481, 1993.
- [9] M. abe, "Vehicle dynamics and control for improving handling and active safety: from four-wheel steering to direct yaw moment control," *Proc. Insn. Mech. Engrs.*, vol. 213, Part K,

pp. 87-101, June 1999.

[10] P. Raksincharoensak, M. Nagai and M. Shino, "Lane keeping control strategy with direct yaw moment control input by considering dynamics of electric vehicle," *Vehicle System Dynamics*, vol. 44, pp. 192-201, 2006.

[11] E. Esmailzadeh, A. Goodarzi, G.R. Vossoughi, "Optimal yaw moment control law for improved vehicle handling," *Mechatronics*, vol. 13, pp. 659-675, 2003.

[12] M. Mirzaei, "A new strategy for minimum usage of external yaw moment in vehicle dynamic control system," *Transportation Research Part C*, vol. 18, pp. 213-224, 2010.

[13] E. Bakker, L. Nyborg and H.B. Pacejka, "Tyre Modeling for Use in Vehicle Dynamics Studies," SAE 870421., 1987.

[14] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.

[15] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, New York: Cambridge University Press, 2004.



[16] J. R. Ellis, *Vehicle dynamics*, London, United Kingdom: London Business Book Limited, 1969.

[17] O. Mokhiamar and M. Abe, "Effects of model response on model following type of combined lateral force and yaw moment control performance for active vehicle handling safety," *JSAE*, vol. 23, pp. 473-480, Oct. 2002.

[18] U. Kiencke and L. Nielsen, *Automotive Control Systems*, 2nd ed. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005, ch. 10.

[19] J. J. E. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators," *Int. J. Control*, vol. 38, pp. 465-492, 1983

[20] C. Geng, L. Mostefai and Y. Hori, "A Hybrid-like Observer of Body Slip Angle for Electric Vehicle Stability Control: Fuzzy Logic and Kalman Filter Approach," IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference(VPPC), Harbin, China, Sep. 2008, pp. 1-6.

- [21] O. Mokhiamar and M. Abe, "How the four wheels should share force in an optimum cooperative chassis control," *Control Engineering Practice*, vol. 14, pp. 295-304, Mar. 2006.
- [22] R. Rajamani, *Vehicle Dynamics and Control*, New York: Springer-Verlag, 2006.
- [23] J. Ahmadi, A. Khaki-Sedigh and M. Kabganian, "Adaptive Vehicle Lateral-Plane Motion Control Using Optimal Tire Friction Forces With Saturation Limits Considerations," *IEEE Transaction on Vehicle Technology*, vol. 58, no. 8, pp. 4098-4107, OCT. 2009.

