國 立 交 通 大 學

電控工程研究所

碩 士 論 文

應用積分順滑模控制技術於二次多項式系統穩健輸出追蹤之研究

Study of Robust Output Tracking for a Class of 2nd-Order Polynomial Systems via ISMC Technique

研 究 生：徐君豪

指導教授：梁耀文 博士

中 華 民 國 一 百 年 七 月

應用積分順滑模控制技術於二次多項式系統穩健輸出追蹤之研究

Study of Robust Output Tracking for a Class of 2nd-Order Polynomial Systems via ISMC Technique

研 究 生：徐君豪　　Student：Chun-Hao Hsu

指導教授：梁耀文　博士　　Advisor：Dr. Yew-Wen Liang

國立交通大學電控工程研究所

碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Department of Electrical and Control Engineering
College of Electrical Engineering and Computer Science
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master
in
Electrical and Control Engineering
July 2011
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年七月

應用積分順滑模控制技術於二次多項式系統穩健輸出追蹤之研究

研究生：徐君豪　　　　　　　　　指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電控工程研究所

摘要

本論文探討單輸入單輸出之二次多項式系統之穩健輸出追蹤及內部狀態穩定化議題。為了利用積分順滑模控制理論於非線性非仿射系統，本論文定義了二次多項式系統的匹配式(matched type)與非匹配式(unmatched type)的不確定因素(uncertainties)，並提出使二次多項式系統達到輸出追蹤及內部狀態的控制律。所獲得的結果也應用於變壓器控制之電力系統的電壓調節研究。模擬結果驗證了所設計穩健控制律之有效性。

Study of Robust Output Tracking for a Class of 2nd-Order Polynomial Systems via ISMC Technique

Student：Chun-Hao Hsu   Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

Institute of Electrical and Control Engineering

National Chiao Tung University

ABSTRACT

This thesis investigates the issues of robust output tracking and internal state stabilization for a class of SISO uncertain second-order polynomial system. In order to design control law for second-order polynomial system using ISMC technique, this thesis define matched and unmatched uncertainties for second-order polynomial system, and presents a class of ISMC controller for robust output tracking and internal state stabilization task. The analytical results are also applied to a tap-changer control based power system for voltage regulation. Simulation results demonstrate the use and the benefits of the proposed scheme.

誌 謝

本篇論文能夠順利完成，實在要感謝很多人關心與協助。首先，要感謝我的指導教授梁耀文博士，感謝老師細心與耐心的指導以及對我的鼓勵，使我在這兩年的學習中受益良多，除此之外老師對於日常生活以及做人處事的道理也不吝提供幫助與提供正確且良好的觀念，對於往後的人生將有很大的助益。也要感謝系上曾給予協助的老師，同時，也要感謝口試委員廖德誠博士、宋朝宗博士和徐勝均博士給予指正與寶貴的建議，使本論文更加完備。

接下來要感謝徐勝均學長，魏源廷學長，林立岡學長以及鄭旭志學長在我遇到困難時能給予適時的幫助與鼓勵，再來要感謝實驗室的同學智強，榮人陪伴了我兩年研究所生活，在我心情低落的時候能夠協助我，並且在學業及生活上給我很大的支持與幫助，而學弟妹們，鴻儒，仰靚，鈞鈞也都會適時的給予我一些意見，感謝你們對於我的幫助，使我的論文研究能夠更加順利。感謝所有我認識的朋友，有你們的陪伴讓我的研究所生活過得多采多姿且充滿快樂的回憶。

最後要感謝我的家人，爸爸、媽媽與奶奶，不管發生什麼事總是支持我，給我最大的鼓勵，讓我可以無後顧之憂的在學業上勇往直前，進而完成研究所的學業，謹將此論文獻給所有我愛的人，謝謝你們!

目 錄

圖 目 錄

表 目 錄

第一章

緒論

1.1 研究背景

近年來，高次多項式系統已逐漸引起大家的注意，如文獻[1]為針對一個自由度的磁浮系統(Levitation system)，其系統形式為一個單輸入的二次多項式系統，在某些條件下利用二階順滑模式控制(sliding mode control)設計控制律，使系統達到穩定的效果。文獻[2]針對單輸入的多項式系統利用控制李亞普諾夫函數(Control Lyapunov Function，CLF) 探討使系統穩定的條件及設計對應穩定控制律，其結果成功應用到穩定[1]中的磁浮系統上。文獻[3]將文獻[2]的結果推廣到多輸入的二次多項式系統，利用 CLF 找出使系統穩定得條件及對應之穩定的控制律的建構，並能將使系統穩定的控制律作參數化(parameterize)，同時探討片段連續的穩定控制律之存在條件及設計。此外文獻[2]及[3]都不考慮系統不確定因素(model uncertainty)及外在干擾(external disturbance) 。

1.2 研究動機

針對單輸入單輸出具有不確定因素之二次多項式系統在非控系統不存在平衡點的情況下，論文[4]透過順滑模態控制理論設計控制律，使系統達到穩健輸出追蹤的目的，但不保證內部狀態會穩定且閉迴路系統軌跡在快接近順滑面但未達順滑面的迫近階段(reaching phase)時，可能對系統不確定因素及外在干擾之影響而造成閉迴路系統不穩定的現象[5]。

在文獻[6]中，將積分順滑模控制應用於非線性仿射系統，由於積分型順滑模控制的特殊順滑面選取方式，使閉迴路系統軌跡一開始就在順滑平面上，故避免順滑模態控制中的迫近階段會造成閉迴路系統不穩定的現象。此外積分順滑模控制還有許多優點：(1)當閉迴路系統軌跡一直在順滑平面上時，匹配的系統不確定性及外在干擾會被消除(2)由於順滑模態控制的最大控制力道通常發生於迫近階段，所以積分順滑模控制的最大力道通常小於順滑模態控制的最大力道(3)當系統只考慮匹配的系統不確定性及外在干擾時，且系統軌跡一直保持在順滑平面上時，此時的系統軌跡會與標稱系統(nominal system)在標稱控制(nominal control)下的系統軌跡相同，因次我們在針對標稱系統設計標稱控制律時有更高的自由度，且保證有干擾系統在控制後能夠有相同的動態響應。

積分順滑模控制有上述的諸多優點，但目前文獻如[5][6]，都是利用積分順滑模控制對非線性仿射系統進行設計控制律，而沒有針對非線性非仿射系統進行設計的例子，故本論文將利用積分順滑模控制於二次多項式系統，使系統達到穩健輸出追蹤與內部狀態穩定的目的。

在本論文中，我們也將針對二項式系統輸出追蹤及內部狀態穩定化所獲得的結果應用到以變壓器控制之電力系統中[7]之電壓調節上，此電力系統原始模型是由 Dobson 和 Chiang[8]所提出，系統模型中包含發電機、無限匯流排與非線性負載，並且系統會呈現有電壓崩潰的現象 [8]-[11]，其電壓崩潰發生於鞍點分歧處(saddle node bifurcation)附近[8],[12]。發生電壓崩潰現象的原因可歸納於電力

系統操作在穩定邊界，負載損耗增加所造成[10],[12]。為了使系統能達到電壓調節的目的，因此我們在原始系統加入控制點，在原始系統加入一個變壓器(tap changer)[7]。當負載損耗有所變化時，利用調整變壓器來達到電壓保持穩定值，避免電壓崩潰的發生。對於變壓器用於電力系統的效果，在文獻[13],[14]-[16]有被討論。

1.3 論文架構

本論文的第二章中，我們簡介論文[4]中利用 SMC 設計的控制律達到二次多項式之穩健輸出追蹤以及論文[17] 利用 CLF 設計的控制律達到二次多項式之穩健輸出追蹤，然後介紹 Dobson 和 Chiang[8]所提出的電力系統，在原始系統模型中加入一個變壓器[7]之後得到的系統模型。在第三章中，為了仿照 ISMC 設計流程[5][6]，對二次多項式系統設計控制律，首先定義出二次多項式系統參數不確定性的匹配式與非匹配式，然後我們考慮在三種情況下設計 ISMC 控制律，且證明當系統只有匹配的參數不確定因素時，所對應的控制律使得系統維持在順滑模式時，系統狀態會與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同。在第四章中，我們利用第三章的理論，以電力系統的變壓器為控制輸入點，調整變壓器的匝數比來達到電壓調節的功能，並且比較利用 LQR、SMC、CLF 與 ISMC 設計控制律的性能表現。最後，第五章提出本論文之結論及未來研究方向。

第二章

預備知識

2.1 利用 SMC 設計控制律達到二次多項式之穩健輸出追蹤

考慮一個非線性系統如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x})u + \mathbf{g_2}(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{d}(t) \tag{2. 1}$$

$$y = h(\mathbf{x}) \tag{2. 2}$$

其中$\mathbf{x} \in \Re^n$為系統狀態變數，$u \in \Re$為控制輸入，$y \in \Re$為控制輸出及$\mathbf{d} \in \Re^n$為模型的不確定因素或外部雜訊。假設$\mathbf{f}(\cdot)$、$\mathbf{g_1}(\cdot)$、$\mathbf{g_2}(\cdot)$及$\mathbf{h}(\cdot)$為平滑向量場。因為動態方程式(2. 18)中有u^2項，我們可以得知此動態方程式不是非線性仿射系統(nonlinear affine system)。在本章中，我們將利用可變結構控制設計出一個控制器u，使得系統輸出即使在有不確定因素與外部雜訊干擾的情況下，依然可以達到所要的輸出值$y_d(t)$，完成$y(t) \longrightarrow y_d(t)$當$t \rightarrow \infty$。

針對(2. 1)- (2. 2)，由論文[4]可以利用可變結構控制設計出一個控制律，使系統輸出即使在有不確定因素與外部雜訊干擾下，依然可以達到所要的輸出值，完成 $y(t) \longrightarrow y_d(t)$當$t \rightarrow \infty$。

我們選定順滑面為

$$s(t)=y(t)-y_d(t)=0 \tag{2.3}$$

若系統狀態到達順滑面並且維持在順滑面上，則輸出追蹤就可以達成，因此控制器必須有到達順滑平面與保持在順滑平面的控制能量。

我們選擇控制器為

$$u=u^{eq}+u^{re} \tag{2.4}$$

其中u^{re}要使得系統狀態在有限時間到達順滑面，u^{eq}要使系統狀態保持在順滑面中。從(2. 1)-(2. 3)我們可以得到

$$\begin{aligned}\dot{s}&=\nabla h\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x})+\nabla h\cdot\mathbf{g_1}(\mathbf{x})u+\nabla h\cdot\mathbf{g_2}(\mathbf{x})u^2+\nabla h\cdot\mathbf{d}-\dot{y}_d\\&=\alpha u^2+\beta u+\gamma+\nabla h\cdot\mathbf{d}\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中∇h為$h(\mathbf{x})$的梯度向量，$\alpha=\alpha(\mathbf{x})=\nabla h\cdot\mathbf{g_2}(\mathbf{x})$，$\beta=\beta(\mathbf{x})=\nabla h\cdot\mathbf{g_1}(\mathbf{x})$ ，$\gamma=\gamma(\mathbf{x})=\nabla h\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x})-\dot{y}_d$，並利用下面假設

假設 2. 1　在控制期間$\alpha=\nabla h\cdot\mathbf{g_2}(\mathbf{x})\neq 0$

假設 2. 2　存在一個非負函數$\kappa(\mathbf{x},t)$，且$|\nabla h\cdot\mathbf{d}|\leq\kappa(\mathbf{x},t)$

假設 2. 1 代表系統(2. 1)- (2. 2)的相對階數為 1，並且u^2永遠不會消失。除此之外，我們也藉由**假設 2. 2** 限制$\mathbf{d}$的上限。

為了保持系統狀態維持在順滑平面，u^{eq}是選擇無雜訊存在時滿足$\dot{s}(t)=0$

當$|\nabla h\cdot\mathbf{d}|=0$，由(2. 5)可得

$$u^{eq}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta^*}}{2\alpha} \tag{2.6}$$

其中

$$\Delta^* = \beta^2 - 4\alpha\gamma \tag{2.7}$$

滿足(2. 6)的u^{eq}有兩個，在此我們先選取

$$u^{eq} = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta^*}}{2\alpha} \tag{2.8}$$

u^{re}的選取是為了系統狀態在有限時間到達順滑面，系統必須滿足迫近條件

$$s(t)\dot{s}(t) \le -\eta|s(t)| \tag{2.9}$$

其中η為正數，我們利用下面假設

假設 2. 3 函數為$\frac{\Delta^*}{4\cdot|\alpha|} - \kappa(\mathbf{x},t)$正值。並且存在一個正數$\eta$，使得在控制期間

$$W(\mathbf{x},t) = \frac{\Delta^*}{4\cdot|\alpha|} - \kappa(\mathbf{x},t) - \eta \ge 0 \tag{2.10}$$

假設 2. 3 意味著(2. 5)拋物線極值的絕對值必須大於不確定因素或外在干擾的上限值$\kappa(\mathbf{x},t)$，也就是Δ^*不會因 $\mathbf{d}$ 的大小變動導致$\Delta^* \le 0$

在此，我們選取u^{re}為

$$u^{re} = \frac{\sqrt{\Delta^*}}{2\cdot|\alpha|}\,\mathrm{sgn}(s(t)) \tag{2.11}$$

由論文[4]，我們知道在滿足**假設 2. 3** 系統將滿足迫近條件，在有限時間到達順滑面。由上述的討論我們可以得到控制律為

$$u = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta^*}}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta^*}}{2\cdot|\alpha|}\,\mathrm{sgn}(s(t)) \tag{2.12}$$

若我們在(2. 6)式選擇u^{eq}為正號，由論文[4]我們可以得到控制律為

$$u = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta^*}}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta^*}}{2\cdot|\alpha|}\,\mathrm{sgn}(s(t)) \tag{2.13}$$

因此，我們有下列的結果

定理 2. 1 若系統(2. 1)-(2. 2)滿足**假設 2. 1**、**假設 2. 2** 及**假設 2. 3**，控制律選定為(2. 12)或(2. 13)，則系統將可達成輸出追蹤$y(t) \rightarrow y_d$之性能。

2.2 利用 CLF 設計控制律達到二次多項式之穩健輸出追蹤

考慮一個單輸入單輸出之二次多項式系統如下：

$$\dot{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x})u + \mathbf{g_2}(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p}(t) \quad (2.\ 14)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (2.\ 15)$$

其中$\mathbf{x} \in \Re^n$代表系統狀態變數，$u \in \Re$為控制輸入，$\mathbf{p}(t) \in \Re^n$為系統中一個會隨時間改變的參數，假設$\mathbf{p}(t)$可寫成

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p_0}(t) + \mathbf{d}(t) \quad (2.\ 16)$$

其中$\mathbf{p_0}(t)$代表我們事先可以預測或是量測的系統參數，$\mathbf{d}(t)$為系統參數預測或是量測的不確定因素，此不確定因素來自系統參數的估計誤。假設$\mathbf{f}(\cdot)$、$\mathbf{g_1}(\cdot)$、$\mathbf{g_2}(\cdot)$為平滑向量場。(3.1)可表示成

$$\dot{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x})u + \mathbf{g_2}(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p_0}(t) + \mathbf{d}(t) \quad (2.\ 17)$$

因為動態方程式(2. 14)中有u^2項，我們可以得知動態方程式不是非線性仿射系統(nonlinear affine system)。主要的控制目標是設計控制器使系統在有參數不確定因素的情況下，系統輸出可以達到所要的輸出值y_d，即$y \rightarrow y_d$，其中y_d為非零的常數，且內部動態要維持穩定。

為了利用 CLF(Control Lyapunov Function)設計穩定控制律，我們需要將追蹤問題變成穩定化問題，做法如下：設計系統(3.4)的穩定控制律為

$$u = u_0(t) + v \tag{2. 18}$$

其中u_0為預備回授(preliminary feedback)控制律，其目的是決定無干擾系統的平衡點，使此平衡點包含輸出追蹤及內部動態之資訊，且u_0的值會隨$\mathbf{p_0}(t)$的值而變化；v 的作用為使系統在有干擾下能夠克服干擾使系統狀態收斂到上述之平衡點。由於上述平衡點包含輸出追蹤及內部動態之資訊，因此若能達成穩定化即可同時達成輸出追蹤及內部動態穩定之性能。首先我們考慮無干擾系統利用預備回授控制律u_0求平衡點$\mathbf{x}_0$，也就是說$\mathbf{x}_0$的求法是系統(2. 17)不考慮干擾的情況下利用預備回授控制律使$\mathbf{x}_0$為 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x})u_0 + \mathbf{g_2}(\mathbf{x}){u_0}^2$的平衡點且此平衡點包含$y = y_d$。

為了達此目的，我們首先考慮無干擾系統之動態方程式如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x})u + \mathbf{g_2}(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p_0}(t) \tag{2. 19}$$

$$y = h(\mathbf{x}) \tag{2. 20}$$

我們要針對(2. 19)與(2. 20)式，解出預備控制律u_0及使無干擾系統的平衡點$\mathbf{x_0}$，使其平衡點$\mathbf{x_0}$包含 $y = y_d$的資訊，此時系統必須滿足下列(2. 21)與(2. 22)式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x_0})u_0 + \mathbf{g_2}(\mathbf{x_0}){u_0}^2 + \mathbf{p_0}(t) = \mathbf{0} \tag{2. 21}$$

$$h(\mathbf{x_0}) - y_d = 0 \tag{2. 22}$$

我們要解滿足(2. 21)與(2. 22)的解，(2. 21)式中 n 個系統狀態共有 n 個變數，且預備回授控制律u_0有 1 個變數，所以(2. 21)與(2. 22)式共有$n + 1$個方程式與$n + 1$個變數，假設滿足(2. 21)與(2. 22)的解存在，則我們可以解得滿足輸出追蹤對應的平衡點$\mathbf{x}_0$與控制律u_0。

為了將輸出追蹤問題轉換成穩定化問題，我們定義狀態誤差為：

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\mathrm{t}) \tag{2.23}$$

當$\mathbf{e} \to 0$時，代表$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0(\mathrm{t})$，而$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0(\mathrm{t})$則隱含達成$\mathrm{y} \to \mathrm{y_d}$，其中$\mathbf{x}_0(\mathrm{t}) = [\mathrm{x}_{10}\ \ \mathrm{x}_{20} \ldots \mathrm{x}_{n0}]^\mathrm{T}$為無干擾系統利用預備回授在$\mathrm{y} = \mathrm{y_d}$下解出之平衡點，可藉由解(3.8)與(3.9)式所得，$\mathbf{x}_0(\mathrm{t}) = [\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_n]^\mathrm{T}$為系統狀態。

我們將設計系統(3.4)的穩定控制律，控制律如下

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}_0(\mathrm{t}) + \mathrm{v} \tag{2.24}$$

其中u_0為針對無干擾系統使系統達到輸出追蹤對應解出的預備回授，可由(3.8)與(3.9)式得到，v為考慮有干擾系統之控制律。

由(2. 14)-(2. 15)與(2. 23)-(2. 24)，我們可以將原始系統整理為：

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e},\mathrm{t}) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e},\mathrm{t})\mathrm{v} + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e},\mathrm{t})\mathrm{v}^2 + \mathbf{d}(\mathrm{t}) \tag{2.25}$$

其中

$$\mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e},\mathrm{t}) = \mathbf{f}\,(\mathbf{e} + \mathbf{x}_\mathbf{0}(\mathrm{t})) + \mathbf{g}_\mathbf{1}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_\mathbf{0}(\mathrm{t}))\mathrm{u}_0 + \mathbf{g}_\mathbf{2}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_\mathbf{0}(\mathrm{t}))\mathrm{u}_0{}^2 + \mathrm{p}_0 - \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_\mathbf{0}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e},\mathrm{t}) = \mathbf{g}_\mathbf{1}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_\mathbf{0}(\mathrm{t})) + 2\mathbf{g}_\mathbf{2}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_\mathbf{0}(\mathrm{t}))\mathrm{u}_0(\mathrm{t})$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e},\mathrm{t}) = \mathbf{g}_\mathbf{2}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_\mathbf{0}(\mathrm{t}))$$

根據論文[17]針對(2. 25)式的系統，我們選取李亞普諾夫函數

$$\mathrm{V} = \frac{1}{2}\mathbf{e}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{e} \tag{2.26}$$

由(2. 25)式與(2. 26)式可得

$$\dot{\mathrm{V}} = \mathrm{av}^2 + \mathrm{bv} + \mathrm{c} + \mathbf{e}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{d}(\mathrm{t}) \tag{2.27}$$

其中$\mathrm{a} = \mathbf{e}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}$，$\mathrm{b} = \mathbf{e}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}$，$\mathrm{c} = \mathbf{e}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{f}_{\mathbf{new}}$，且a、b可能在某些區域等於零。

我們利用下面假設

假設 2. 4 假設存在正定矩陣 P，可使得$a=0$發生在$h(\mathbf{e}+x_0(t))-y_d=0$

假設 2. 5 存在非負函數$\rho(\mathbf{e},t)$，使得$|\mathbf{e}^T\mathbf{Pd}|\le\rho(\mathbf{e},t)$

因為$a=0$發生在$h(\mathbf{e}+x_0(t))-y_d=0$，我們以$|h(\mathbf{e}+x_0(t))-y_d|\le\varepsilon_1$作為控制律切換的分界點，其中$\varepsilon_1$為很小的值，即以$|h(\mathbf{e}+x_0(t))-y_d|\le\varepsilon_1$視為$a\approx 0$的情形。此之外，b可能在使$h(\mathbf{e}+x_0(t))-y_d=0$的某些子區域等於零，我們以$|b|\le\varepsilon_2$作為控制律切換分界點，其中$\varepsilon_2$為很小的值，以$|b|\le\varepsilon_2$視為$b\approx 0$的情形。當$a\neq 0$，在(2. 27)式，等號右邊v是的二次多項式形式，且一般來說 d 是無法預測的，考慮$\dot{V}$在最差情況下，由(2. 27)式及**假設 2. 5** 可得

$$\dot{V}=av^2+bv+c+\rho(\mathbf{e},t) \tag{2. 28}$$

定義Δ為(2. 28)式的判別式

$$\Delta=b^2-4a(c+\rho(\mathbf{e},t)) \tag{2. 29}$$

由於a、b可能在某些區域等於零，我們可分為四個情形討論分別為$a>0$、$a<0$、$a\approx 0$且$b\neq 0$、$a\approx 0$且$b\approx 0$的情況，設計適當的控制律及對應穩定的條件。

考慮$a<0$的情況:

我們利用以下假設並設計控制率

假設 2. 6 當$a>0$時，Δ在控制期間為正值

假設 2. 7 當$a>0$，在$|h(\mathbf{e}+x_0(t))-y_d|=\varepsilon_1$的鄰域存在不變集合(invariant set)且滿足$\Delta>0$，我們將這個不變集合以Ω_1表示。

我們選取控制律 v 如下

$$v=-\frac{b}{2a} \tag{2. 30}$$

考慮$a<0$的情況:

我們利用以下假設並設計控制率

假設 2.8 當$a<0$，在$\left|h\left(\mathbf{e}+x_0(t)\right)-y_d\right|=\varepsilon_1$的鄰域存在不變集合，我們將這個不變集合以$\Omega_2$表示

一般來說$\mathbf{d}$是無法預測的，當Δ為負值，我們選v使得$\dot{V}<0$，我們選取 v 如下

$$v=-\frac{b}{2a} \tag{2.31}$$

一般來說$\mathbf{d}$是無法預測的，當Δ為正值，我們選v使得$\dot{V}<0$，我們選取v如下

$$v=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\operatorname{sgn}(a) \tag{2.32}$$

考慮$a\approx 0$、$b\neq 0$的情況:

我們利用以下假設並設計控制律

假設 2.9 當$a\approx 0$，在$\left|h\left(\mathbf{e}+x_0(t)\right)-y_d\right|\leq\varepsilon_1$區域存在不變集合使狀態不會進入、$a>0$、$\Delta<0$造成狀態誤差發散的情形，我們將此不變集合以$\Omega_3$表示並且$\Omega_3\cap\Omega_1\subseteq\Omega_3$、$\Omega_3\cap\Omega_2\subseteq\Omega_3$

當$a\approx 0$，由(2.28)可以得到

$$\dot{V}\approx bv+c+\mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{d} \tag{2.33}$$

當$a\approx 0$、$b\neq 0$，由(2.23)式我們選取控制律v為

$$v=\frac{-c-\rho(\mathbf{e},t)-0.5|b|}{b} \tag{2.34}$$

　　考慮$a \approx 0$、$b \neq 0$的情況:

我們利用以下假設並設計控制率

假設 2. 10 當$a = 0$、$b = 0$，控制律選取(2. 35)，在此情況下系統狀態誤差會收斂到原點。

當$a \approx 0$、$b \approx 0$，我們選取的控制律v為

$$v = 0 \tag{2. 35}$$

假設 2. 10 代表當$a = 0$、$b = 0$時，無法透過 v 改變$\dot{V}$的正負號，此時若控制律選取為$v = 0$仍能使落在a、b等於零區域的狀態誤差會收斂到原點，則系統狀態誤差即可達到收斂到原點的目標。

定理 2. 2　　在系統(2. 25)滿足**假設 2. 4**、**假設 2. 5**，在$a > 0$滿足**假設 2. 6**、**假設 2. 7**，控制律選取為(2. 30) ，在$a < 0$滿足**假設 2. 8**，控制律選取為(2. 31)或(2. 32)，$a \approx 0$、$b \neq 0$滿足**假設 2. 9**，控制律選取為(2. 34)，在$a \approx 0$、$b \approx 0$滿足**假設 2. 10**，控制律選取為(2. 35)，則在$\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$的區域我們可以達到使狀態誤差收斂到原點之目的，因此系統將可以達到輸出追蹤與內部狀態穩定的目的。

2.3 電力系統模型

本節中，我們主要是研究 Dobson 和 Chiang [8] 的電力系統數學模型。利用 Dobson 和 Chiang 的模型，並且在原始模型中加入一個變壓器(tap changer)[7]，以變壓器的匝數比作為控制器輸入，達到電壓調節的目的。

在電力系統模型中，主要包含了無限匯流排、非線性負載、變壓器、負載平衡電容與發電機，其模型描述可以分為負載模型與電力系統模型兩大部分，其描述如下：

負載模型：非線性負載模型的表示是採用於 Walve[18]，並且在[8]將其化簡，其非線性模型是描述在感應馬達動態與 PQ 負載在並聯情況之下。而馬達與 PQ 負載所組成的非線性模型，表示如下：

$$P = P_0 + P_1 + K_{pw}\dot{\delta} + K_{pv}(V + T\dot{V}) \quad (2.36)$$

$$Q = Q_0 + Q_1 + K_{pw}\dot{\delta} + K_{pv}V + K_{pv2}V^2 \quad (2.37)$$

在此，P_0與Q_0分別代表馬達中所消耗的有效功率與無效功率，P_1與Q_1是表示為 PQ 負載的消耗功率。

電力系統模型：原始模型中加入變壓器的圖形表示於圖 2.1(a)。在模型中，發電機的動態方程式可利用搖擺方程式(swing equation)獲得，表示如下：

$$M\ddot{\delta}_m = -d_m\omega + P_m + E_mVY_m\sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + {E_m}^2Y_m\sin\theta_m \quad (2.38)$$

在此，M、d_m與P_m分別表示發電機的慣量、阻尼與機械功率。在模型中，包含一個負載平衡電容 C，來使電壓能提升到標么值為 1.0 的附近。為了方便使用，我們利用戴維寧等效將 C、Y_0、E_0化簡，其表示如下：

$$E_0' = E_0/(1 + C^2{Y_0}^{-2} - 2C{Y_0}^{-1}\cos\theta_0)^{1/2}$$

$$Y_0' = Y_0(1 + C^2{Y_0}^{-2} - 2C{Y_0}^{-1}\cos\theta_0)^{1/2}$$

$$\theta_0' = \theta_0 + \arctan\left\{\frac{C{Y_0}^{-1}\sin\theta_0}{1 - C{Y_0}^{-1}\cos\theta_0}\right\}$$

明顯地，利用戴維寧等效結果$E_0'Y_0'$與E_0Y_0是相同的，其等效圖形表示於圖 2.1(b)。

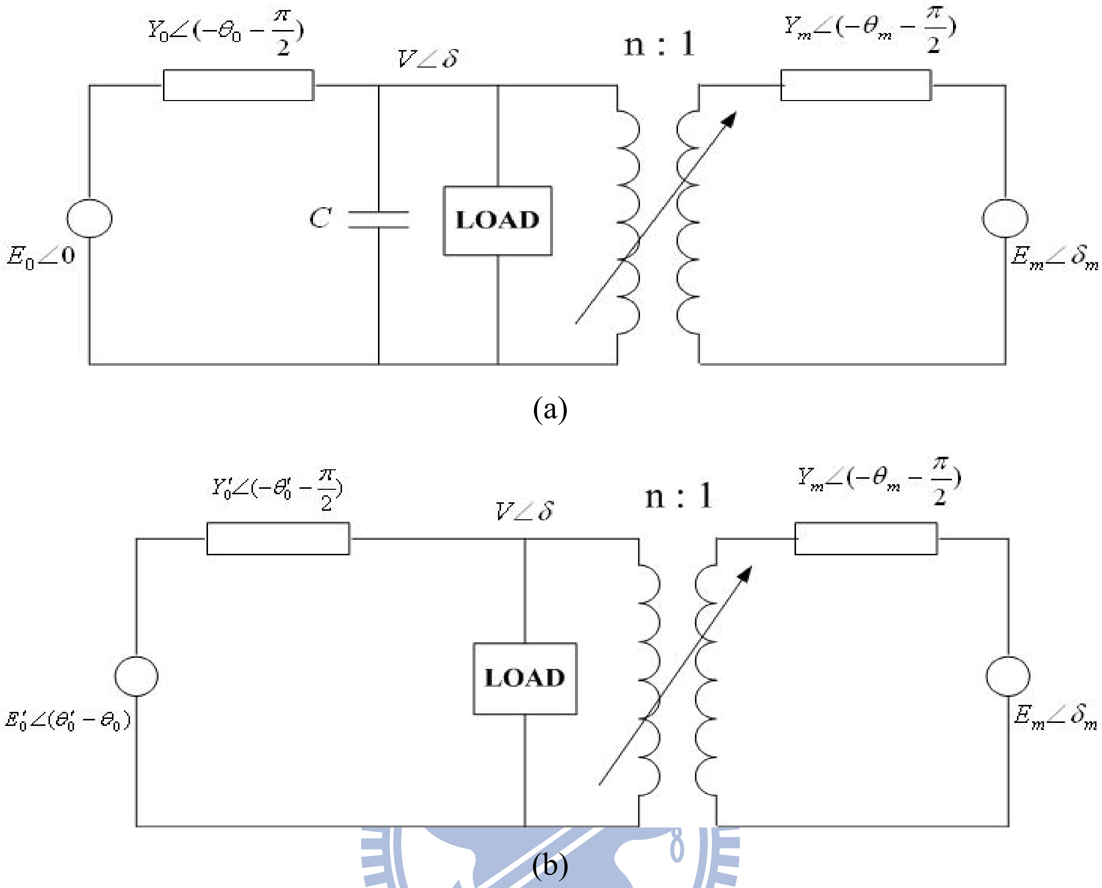


圖 2.1:電力系統模型(a)原始電力系統模型加上變壓器(b)戴維寧等效

計算其網路中所消耗功率，在網路中無效功率損耗與有效功率損耗可以表示如下：

$$P(\delta_m,\delta,V)=E_0'Y_0'V\sin(\delta+\theta_0)-\frac{1}{n}E_mY_mV\sin(\delta-\delta_m-\theta_m)$$

$$+\left(Y_0'\sin\theta_0'+\frac{1}{n^2}Y_m\sin\theta_m\right)V^2 \qquad (2.39)$$

$$Q(\delta_m,\delta,V)=E_0'Y_0'V\cos(\delta+\theta_0)+\frac{1}{n}E_mY_mV\cos(\delta-\delta_m-\theta_m)$$

$$-\left(Y_0'\cos\theta_0'+\frac{1}{n^2}Y_m\cos\theta_m\right)V^2 \qquad (2.40)$$

由(2. 36)-(2. 38)以及(2. 39)-(2. 40)，我們可以得到電力系統的動態方程式如下：

$$\dot{\delta}_m = \omega \tag{2.41}$$

$$M\dot{\omega} = -d_m\omega + P_m + \frac{1}{n}E_mY_mV\sin(\delta - \delta_m + \theta_m) + {E_m}^2Y_m\sin\theta_m \tag{2.42}$$

$$K_{qw}\dot{\delta} = -K_{qv2}V^2 - K_{qv}V + Q(\delta_m, \delta, V) - Q_0 - Q_1 \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} K_{qw}K_{pv}\dot{V} = {} & K_{pw}K_{qv2}V^2 + (K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv})V \\ & + K_{qw}(P(\delta_m, \delta, V) - P_0 - P_1) - K_{pw}(Q(\delta_m, \delta, V) - Q_0 - Q_1) \end{aligned} \tag{2.44}$$

我們的系統參數是採用於[8]，其參數值如下：

負載參數

$K_{pw} = 0.4$，$K_{pv} = 0.3$，$K_{qw} = -0.03$，$K_{qv} = -2.8$，$K_{qv2} = 2.1$，$T = 8.5$，$P_0 = 0.6$，$Q_0 = 1.3$，$P_1 = 0$

網路與發電機參數

$Y_0 = 20.0$，$\theta_0 = -5.0$，$E_0 = 1.0$，$C = 12.0$，$Y_0{}' = 8.0$，$\theta_0{}' = -12.0$，$E_0{}' = 2.5$，$Y_m = 5.0$，$\theta_m = -5.0$，$E_m = 1.0$，$P_m = 1.0$，$d_m = 0.05$，$M = 0.3$

全部的參數以標么值(per unit value)為單位，其角度以度數表示。

我們令$x_1 = \delta_m$，$x_2 = \omega$，$x_3 = \delta$，$x_4 = V$，$u = \frac{1}{n}$，由(2. 41)-(2. 44)，我們可將動態方程式表示為

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2.45}$$

$$\dot{x}_2 = 1.8807 - 0.1667x_2 + [16.6667x_4 \sin(0.0873 - x_1 + x_3)]u \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 = {} & 43.333 - 93.333x_4 + 334.1297{x_4}^2 - 666.6667x_4\cos(0.0873 - x_3) \\ & +33.3333Q_1 - [166.6667x_4\cos(0.0873 + x_1 - x_3)]u \\ & +166.0.325{x_4}^2 u^2 + d_3\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_4 = {} & -7.0327 + 14.5229x_4 - 53.0961{x_4}^2 \\ & +104.5752x_4\cos(0.0873 - x_3) + 7.8431x_4\sin(0.0873 - x_3) \\ & -5.2288Q_1 + [26.1438x_4\cos(0.0873 + x_1 - x_3) \\ & +1.9608x_4\sin(0.0873 - x_3)]u - 26.2152{x_4}^2u^2 + d_4\end{aligned} \tag{2.48}$$

其中$\mathbf{d} = (0,0,d_3,d_4)^T$代表系統可能具有的不確定因素或外在干擾。有兩種類型的$\mathbf{d}$在文獻[8], [19]中提到，其中一種起因於負載的變動，也就是Q_1隨著電力的需求所產生的變動；另一種則來自於動態感應馬達模型的參數。

第三章

二次多項式系統之穩健輸出追蹤

3.1 問題描述

考慮一個單輸入單輸出之二次多項式系統如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x})u + \mathbf{g_2}(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p}(t) \tag{3.1}$$

$$y = h(\mathbf{x}) \tag{3.2}$$

其中$\mathbf{x} \in \Re^n$代表系統狀態變數，u$\in \Re$為控制輸入，$\mathbf{p}(t) \in \Re^n$為系統中一個會隨時間改變的參數，假設$\mathbf{p}(t)$可寫成

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p_0}(t) + \mathbf{d}(t) \tag{3.3}$$

其中$\mathbf{p_0}(t)$代表我們事先可以預測或是量測的系統參數，$\mathbf{d}(t)$為系統參數預測或是量測的不確定因素，此不確定因素來自系統參數的估計誤。假設$\mathbf{f}(\cdot)$、$\mathbf{g_1}(\cdot)$、$\mathbf{g_2}(\cdot)$為平滑向量場。(3.1)可表示成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x})u + \mathbf{g_2}(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p_0}(t) + \mathbf{d}(t) \tag{3.4}$$

因為動態方程式(3.1)中有u^2項，我們可以得知動態方程式不是非線性仿射系統(nonlinear affine system)。主要的控制目標是設計控制器使系統在有參數不確定因素的情況下，系統輸出可以達到所要的輸出值y_d，即$y \to y_d$，其中y_d為非零的常

數，且內部動態要維持穩定。

為了利用 ISMC 設計穩定控制律，我們需要將追蹤問題變成穩定化問題，做法如下：設計系統(3.4)的穩定控制律為

$$u = u_0(t) + v \tag{3.5}$$

其中u_0為預備回授(preliminary feedback)控制律，其目的是決定無干擾系統的平衡點，使此平衡點包含輸出追蹤及內部動態之資訊，且u_0的值會隨$\mathbf{p_0}(t)$的值而變化；v 的作用為使系統在有干擾下能夠克服干擾使系統狀態收斂到上述之平衡點。由於上述平衡點包含輸出追蹤及內部動態之資訊，因此若能達成穩定化即可同時達成輸出追蹤及內部動態穩定之性能。首先我們考慮無干擾系統利用預備回授控制律u_0求平衡點$\mathbf{x}_0$，也就是說$\mathbf{x}_0$的求法是系統(3.4)不考慮干擾的情況下利用預備回授控制律使$\mathbf{x}_0$為 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x})u_0 + \mathbf{g_2}(\mathbf{x}){u_0}^2$的平衡點且此平衡點包含$y = y_d$。

為了達此目的，我們首先考慮無干擾系統之動態方程式如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x})u + \mathbf{g_2}(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p_0}(t) \tag{3.6}$$

$$y = h(\mathbf{x}) \tag{3.7}$$

我們要針對(3.6)與(3.7)式，解出預備控制律u_0及使無干擾系統的平衡點$\mathbf{x_0}$，使其平衡點$\mathbf{x_0}$包含 $y = y_d$的資訊，此時系統必須滿足下列(3.8)與(3.9)式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x_0})u_0 + \mathbf{g_2}(\mathbf{x_0}){u_0}^2 + \mathbf{p_0}(t) = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

$$h(\mathbf{x_0}) - y_d = 0 \tag{3.9}$$

我們要解滿足(3.8)與(3.9)的解，(3.8)式中n個系統狀態共有n個變數，且預備回授控制律u_0有 1 個變數，所以(3.8)與(3.9)式共有$n+1$個方程式與$n+1$個變數，假設滿足(3.8)與(3.9)的解存在，則我們可以解得滿足輸出追蹤對應的平衡點$\mathbf{x}_0$與控制律u_0。

為了將輸出追蹤問題轉換成穩定化問題，我們定義狀態誤差為：

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\mathrm{t}) \tag{3.10}$$

當$\mathbf{e} \to 0$時，代表$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0(\mathrm{t})$，而$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0(\mathrm{t})$則隱含達成$\mathrm{y} \to \mathrm{y_d}$，其中$\mathbf{x}_0(\mathrm{t}) = [\mathrm{x}_{10}\ \ \mathrm{x}_{20} \dots \mathrm{x}_{\mathrm{n}0}]^{\mathrm{T}}$為無干擾系統利用預備回授在$\mathrm{y} = \mathrm{y_d}$下解出之平衡點，可藉由解(3.8)與(3.9)式所得，$\mathbf{x}_0(\mathrm{t}) = [\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2 \dots \mathrm{x}_\mathrm{n}]^{\mathrm{T}}$為系統狀態。

我們將設計系統(3.4)的穩定控制律，控制律如下

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}_0(\mathrm{t}) + \mathrm{v} \tag{3.11}$$

其中u_0為針對無干擾系統使系統達到輸出追蹤對應解出的預備回授，可由(3.8)與(3.9)式得到，v為考慮有干擾系統之控制律。

由(3.1)-(3.2)與(3.11)-(3.10)，我們可以將原始系統整理為：

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e},\mathrm{t}) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e},\mathrm{t})\mathrm{v} + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e},\mathrm{t})\mathrm{v}^{\mathbf{2}} + \mathbf{d} \tag{3.12}$$

其中

$$\mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e},\mathrm{t}) = \mathbf{f}\,(\mathbf{e} + \mathbf{x}_{\mathbf{0}}(\mathrm{t})) + \mathbf{g}_{\mathbf{1}}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_{\mathbf{0}}(\mathrm{t}))\mathrm{u}_0 + \mathbf{g}_{\mathbf{2}}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_{\mathbf{0}}(\mathrm{t}))\mathrm{u}_0{}^2 + \mathrm{p}_0 - \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e},\mathrm{t}) = \mathbf{g}_{\mathbf{1}}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_{\mathbf{0}}(\mathrm{t})) + 2\mathbf{g}_{\mathbf{2}}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_{\mathbf{0}}(\mathrm{t}))\mathrm{u}_0(\mathrm{t})$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e},\mathrm{t}) = \mathbf{g}_{\mathbf{2}}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_{\mathbf{0}}(\mathrm{t}))$$

此時問題由對系統(3.1)之追蹤問題變成系統(3.12)之穩定化問題。此外，系統(3.12)若不考慮干擾，我們稱為標稱系統(nominal system)如下

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e},\mathrm{t}) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e},\mathrm{t})\mathrm{u}_1 + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e},\mathrm{t})\mathrm{u}_1{}^{\mathbf{2}} \tag{3.13}$$

其中u_1為標稱控制(nominal control)。

由於積分型順滑模控制(Integral-Type Sliding Mode Control)有許多優點，如反應速度快、穩健性(robustness)及容易實現，所以我們採用積分型順滑模控制來對系統(3.12)設計控制律。我們仿照 ISMC 的設計流程[5][6]進行設計二次多項式

系統的控制律，在系統(3.12)中控制律 v 主要分為兩個部分

$$\mathrm{v} = \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 \tag{3.14}$$

其中u_1為標稱控制，即針對系統(3.13)的穩定控制律。且標稱控制選擇根據工程師的需求，而採用最佳化控制(optimal control)設計u_1，為了展示起見在這裡我們u_1是使用 LQR 控制律。而u_2為一非連續的控制律；u_2負責抵消干擾使系統保持在順滑面上。

為了要仿照 ISMC 的設計流程[5][6]，對二次多項式系統設計控制律，我們首先必須定義二次多項式系統參數不確定性的匹配式(matched-type)與非匹配式(unmatched-type)，接下來利用積分順滑控制設計出控制器，使得系統在有匹配式的參數不確定因素下，狀態軌跡會與無干擾系統一樣，並討論非匹配式的參數不確定因素對系統的效應。

3.2 定義二次多項式系統之匹配與非匹配的系統參數不確定項

為了定義二次多項式系統之匹配與非匹配的系統參數不確定項，我們先回顧非線性仿射系統中匹配式與非匹配式的概念。

考慮單輸入單輸出之仿射系統如下：

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)\mathrm{u}_a + \mathbf{d}_a \tag{3.15}$$

其中$\mathbf{x}_1 \in \Re^n$代表系統狀態變數，$\mathrm{u}_a \in \Re$為控制輸入，$\mathbf{g}(\cdot)$為平滑向量場。$\mathbf{d}_a \in \Re^n$為系統參數的不確定因素，將$\mathbf{d}_a$表示如下

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{d}_{am} + \mathbf{d}_{au} \tag{3.16}$$

其中$\mathbf{d}_{am} \in \mathrm{col}(\mathbf{g})$，故$\mathbf{d}_{am}$為匹配的系統參數的不確定因素，$\mathbf{d}_{au} \in \mathrm{col}(\mathbf{g})^{\perp}$，將$\mathbf{d}_a$投

影到 g 的行空間取為$\mathbf{d}_{am}$，$\mathbf{d}_a$投影到$\mathbf{g}^{\perp}$的行空間取為$\mathbf{d}_{au}$，即

$$\mathbf{d}_{am}=\mathbf{g}\mathbf{g}^{+}\mathbf{d}_a，\mathbf{d}_{au}=\mathbf{g}^{\perp}\mathbf{g}^{\perp+}\mathbf{d}_a$$

以上為非線性仿射系統匹配與非匹配的系統參數不確定因素定義。

以幾何意義來說，在$\Re^n$空間中$\mathbf{d}_{am}$與$\mathbf{d}_{au}$如圖 3. 1 所示

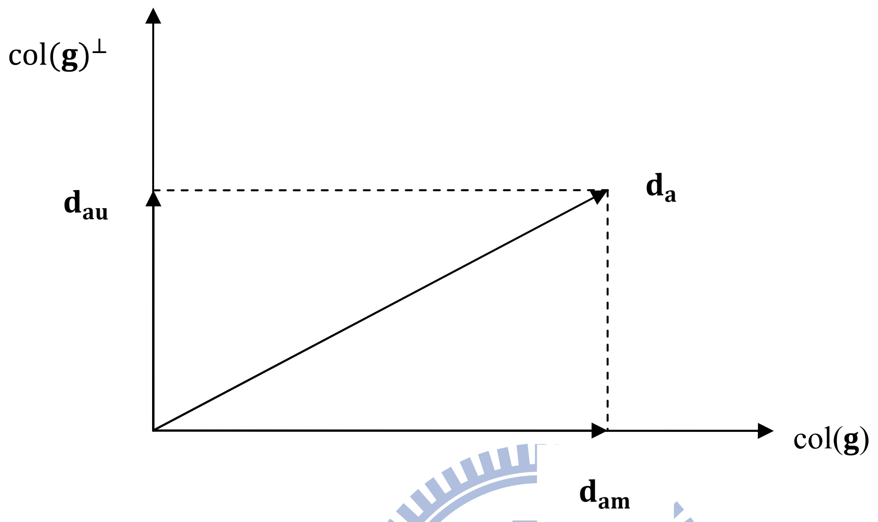


圖 3. 1: $\Re^n$空間中$\mathbf{d}_{am}$與$\mathbf{d}_{au}$示意圖

但是，目前文獻中並無定義非線性非仿射式系統中匹配的與非匹配的系統參數不確定因素，故我們仿照非線性仿射式系統中匹配式與非匹配式的概念，自行定義二次多項式系統參數的不確定因素中的匹配式與非匹配式。

考慮單輸入單輸出之二次多項式系統(3.12)，可將$\mathbf{d}$分為兩部分

$$\mathbf{d}=\mathbf{d}_{\mathrm{m}}+\mathbf{d}_{\mathrm{u}} \tag{3.17}$$

其中$\mathbf{d}_{\mathrm{m}}$將代表匹配的系統參數不確定因素，$\mathbf{d}_{\mathrm{u}}$代表非匹配的系統參數不確定因素，接下來我們討論$\mathbf{d}_{\mathrm{m}}$的選取形式。

3.2.1 方程式(3.17)中$\mathbf{d}_{\mathrm{m}}$的選取形式 1

在仿射系統(3.15)中 $\mathbf{d}_{am}\in \mathrm{col}(\mathbf{g})$，且$\mathbf{d}_{am}$在此取法下$\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_{\mathrm{m}}\|_2$有最小值，我們仿照仿射系統中匹配的系統參數不確定因素的選取方式，取$\mathbf{d}_{\mathrm{m}}\in S$ ，其中

$$S = \{\mathbf{g_{1new}}\alpha + \mathbf{g_{2new}}\alpha^2 | \alpha \in \Re\} \tag{3.18}$$

且$\mathbf{d_m}$的選取為使得$\| \mathbf{d} - \mathbf{d_m} \|_2$有最小值，即$\| \mathbf{d_u} \|_2 = \| \mathbf{d} - \mathbf{d_m} \|_2$有最小值

S 的幾何意義為$\Re^n$空間中的一條過原點的一維流形(manifold)，實際上 S 如圖 3.2 所示為一維的拋物線。

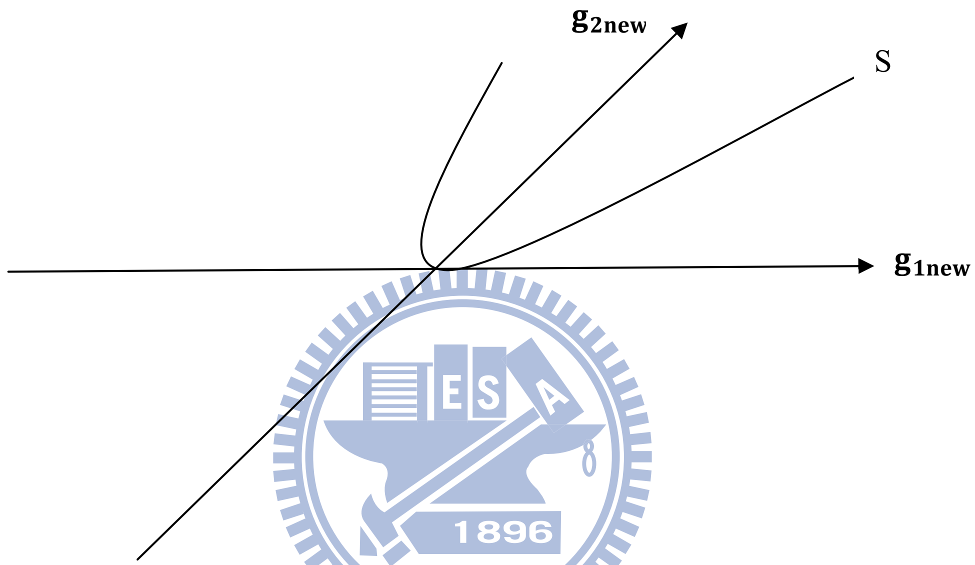


圖 3.2: S 在$\Re^n$空間中之示意圖

接下來我們必須決定如何選定α，使得$\| \mathbf{d} - \mathbf{d_m} \|_2$有最小值，其中$\mathbf{d_m} \in S$。

因為根據文獻[6]我們知道在順滑模態上，匹配的系統參數不確定因素會因非連續控制律的的控制下而被完全消除，所以只需考慮非匹配的系統參數不確定因素所造成的效應，且希望造成的效應希望能越小越好。如圖 3.3 所示，當給定$\mathbf{d}$，我們想要試著找到$\mathbf{d_m} \in S$，使得 $\| \mathbf{d} - \mathbf{d_m} \|_2$最小，意即找到α，使得 $\| \mathbf{d} - (\mathbf{g_{1new}}\alpha + \mathbf{g_{2new}}\alpha^2) \|_2$最小，我們定義$\alpha^*$如下

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha} \| \mathbf{d} - (\mathbf{g_{1new}}\alpha + \mathbf{g_{2new}}\alpha^2) \|_2$$

我們可得$\mathbf{d_m}$如下

$$\mathbf{d_m} = \mathbf{g_{1new}}\alpha^* + \mathbf{g_{2new}}{\alpha^*}^2 \tag{3.19}$$

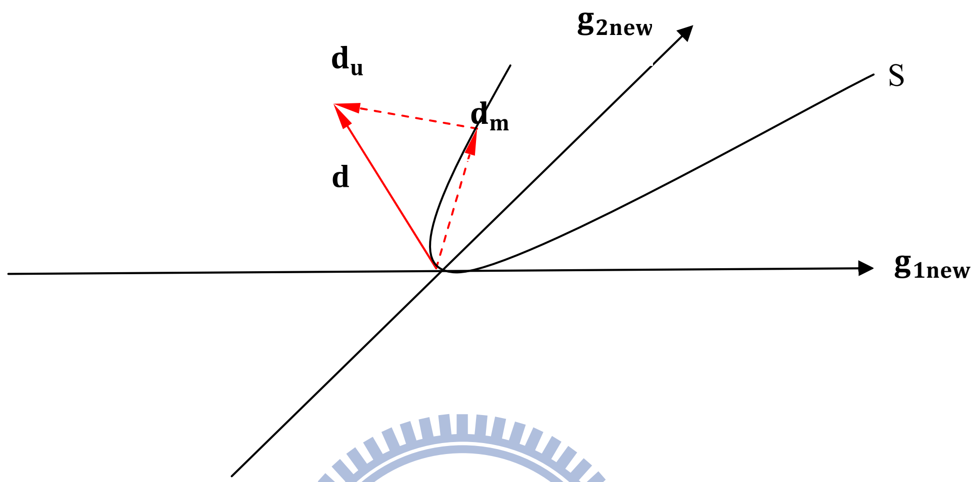


圖 3. 3: 給定$\mathbf{d}$時，$\mathbf{d_m}$與$\mathbf{d_u}$在R^n空間中與 S 之關係

在選定$(\mathbf{d} - (\mathbf{g_{1new}}\alpha^* + \mathbf{g_{2new}}{\alpha^*}^2)$之後，我們必須驗證$\alpha^*$的存在性。

引理 3. 1(存在性)：當給定$\mathbf{g_{1new}}$、$\mathbf{g_{2new}}$及$\mathbf{d}$時，$P_4(\alpha) = \min_\alpha \| \mathbf{d} - (\mathbf{g_{1new}}\alpha + \mathbf{g_{2new}}\alpha^2) \|_2{}^2$必存在，意即$\alpha^*$存在且$\mathbf{d_m} = \mathbf{g_{1new}}\alpha^* + \mathbf{g_{2new}}{\alpha^*}^2$存在。

證明：

當給定$\mathbf{g_{1new}}$、$\mathbf{g_{2new}}$及$\mathbf{d}$時，假設多項式$P_4(\alpha)$如下

$$\begin{aligned} P_4(\alpha) &= \| \mathbf{d} - (\mathbf{g_{1new}}\alpha + \mathbf{g_{2new}}\alpha^2) \|_2{}^2 \\ &= (\mathbf{d} - (\mathbf{g_{1new}}\alpha + \mathbf{g_{2new}}\alpha^2)^T(\mathbf{d} - (\mathbf{g_{1new}}\alpha + \mathbf{g_{2new}}\alpha^2) \\ &= a_1\alpha^4 + a_2\alpha^3 + a_3\alpha^2 + a_4\alpha + a_5 \end{aligned} \tag{3.20}$$

其中

$a_1 = \mathbf{g_{2new}}^{\mathbf{T}}\mathbf{g_{2new}}$

$a_2 = 2\mathbf{g_{1new}}^{\mathbf{T}}\mathbf{g_{2new}}$

$a_3 = \mathbf{g_{1new}}^{\mathbf{T}}\mathbf{g_{1new}} - \mathbf{2g_{2new}}^{\mathbf{T}}\mathbf{d}$

$a_4 = -2\mathbf{g_{1new}}^{\mathbf{T}}\mathbf{d}$

$a_5 = \mathbf{d}^{\mathbf{T}}\mathbf{d}$

(3.20)中$P_4(\alpha)$為連續函數且 $a_1 > 0$，且$P_4 = \begin{cases} \infty, \text{當 } \alpha \to \infty \\ \infty, \text{當 } \alpha \to -\infty \end{cases}$，根據極值定理(extreme value theorem)，$P_4(\alpha)$存在全域極小值，即α^*必存在。■

值得一提的是，在**引理 3.1** 中α^*存在，但一般來說α^*不保證唯一。

引理 3.2(求四次多項式之最小值)：考慮多項式$Q_4(x) = c_1x^4+c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5$，且$c_1 > 0$，我們可以由$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ 求出 $\operatorname{argmin}_x Q_4(x)$ ，以及 $\min_x Q_4(x)$

證明：取$P_3(\alpha) = \dot{P}_4(\alpha)$如下所示

$$P_3 = 4a_1\alpha^3+3a_2\alpha^2 + 2a_3\alpha + a_4 \tag{3.21}$$

取$P_2(\alpha) = \ddot{P}_4(\alpha)$如下所示

$$P_2 = 12a_1\alpha^2+6a_2\alpha + 2a_3 \tag{3.22}$$

$P_4(\alpha)$的極小值發生於$P_3(\alpha) = 0$的根處，所以我們要解出$P_3(\alpha) = 0$的根。三次多項式$P_3(\alpha) = 0$有三個根，但我們無法知道$P_4(\alpha)$的極小值發生於$P_3(\alpha) = 0$的哪一個根，我們希望當給定$P_4(\alpha)$時，可以判斷出$P_4(\alpha)$的極小值所對應$P_3(\alpha) = 0$ 的根，於是進行以下分析。取 A=12a_1, B=6a_2, C=2a_3，注意P_2的二次項係數$12a_1 > 0$，且其判別式如下

$$\Delta_{P_2} = B^2 - 4AC \tag{3.23}$$

接下來我們由Δ_{P_2}的正負號來分析P_4的極小值所發生的位置。

情況 1：$\Delta_{P_2} < 0$ (當$P_2(\alpha) = 0$有共軛複數根)：

假設$P_2(\alpha) = 0$ 有共軛複根 $x \pm yi$，$y \neq 0$，則$P_2(\alpha) = \big(\alpha - (x + yi)\big)\big(\alpha - (x - yi)\big) = (\alpha - x)^2 + y^2$，$P_2(\alpha) > 0\ \forall\alpha$，因此可得$P_2$為開口向上之拋物線且與 α 軸無交點。P_3可由P_2對α積分可得，其中P_3為絕對遞增且$\begin{cases} P_3 \to \infty & \text{，當 } \alpha \to \infty \\ P_3 \to -\infty & \text{，當 } \alpha \to -\infty \end{cases}$

則P_3與 α 軸交於一點，故P_3只有一個實數零點 r，另外兩個為複數零點$p \pm qi$。例如：考慮$P_2(\alpha) = 0$ 有共軛複根 $1 \pm \sqrt{2}i$，如圖 3. 4 所示，很明顯看出P_3只有一實數零點 r，且在此零點處P_4有極小值。由以上推論可得$P_4(r)$為P_4的全域極小值且 $\alpha^* = r$。

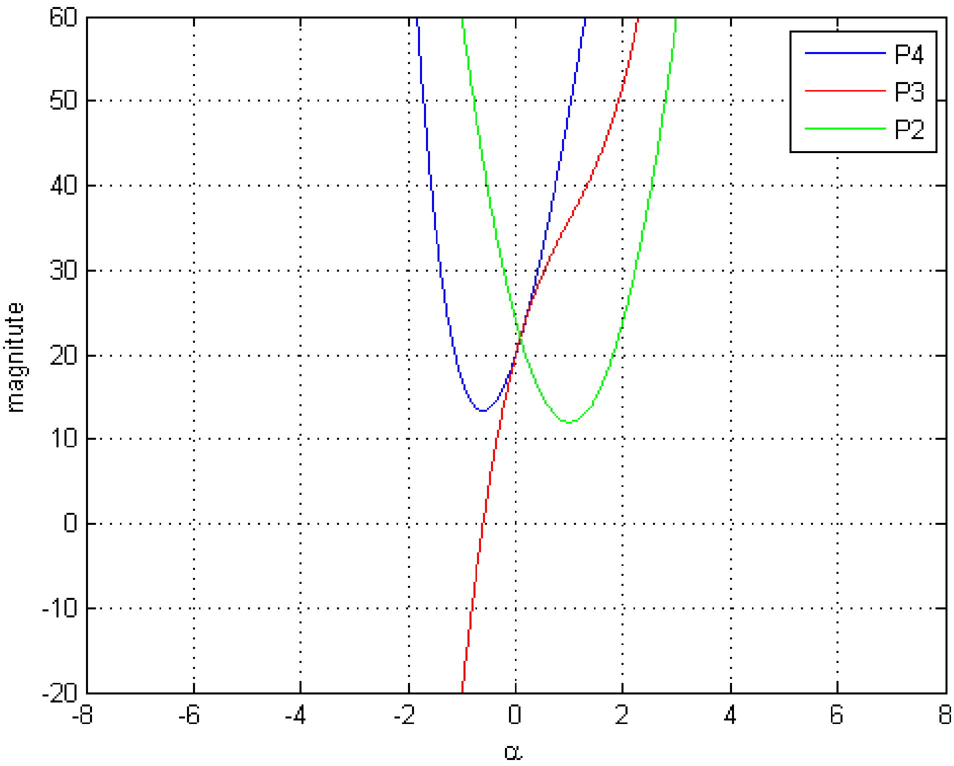


圖 3. 4: $\Delta_{P_2} < 0$之P_2, P_3與P_4圖形

情況 2：$\Delta_{P_2} = 0$（當$P_2(\alpha) = 0$有二重根）：

假設$P_2(\alpha) = 0$ 有二重根 z，則$P_2(\alpha) = (\alpha - z)^2$，可得$P_2$為開口向上之拋物線且與 α 軸有一個交點。$P_3$可由$P_2$對α積分可得，其中$P_3$為絕對遞增且

$\begin{cases} P_3 \to \infty & \text{，當 } \alpha \to \infty \\ P_3 \to -\infty & \text{，當 } \alpha \to -\infty \end{cases}$，則$P_3$與 α 軸交於一點，故$P_3$只有一個實數零點，另外兩個為複數零點。例如：考慮$P_2(\alpha) = 0$ 有二重根在 $\alpha = 1$，如圖 3.5 所示，很明顯看出P_3只有一實數零點 r，且在此零點處P_4有極小值。由以上推論可得$P_4(r)$為P_4的全域極小值；考慮$P_2(\alpha) = 0$ 有二重根$r_1 = r_2 = 1$，如圖 3.6 所示，P_3與α軸相切，根據勘根定理，$P_3 = 0$在$\alpha = r_1$有 3 重根，明顯的$P_4(r_1)$為P_4的全域極小值且 $\alpha^* = r_1$。

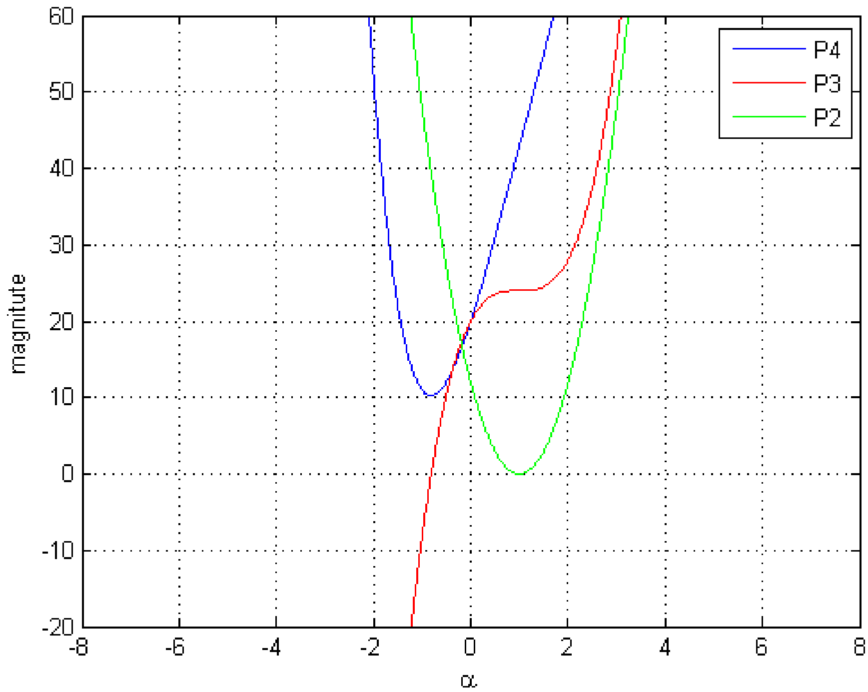


圖 3.5: $\Delta_{P_2} = 0$且$P_2(\alpha) = 0$ 有二重根之P_2, P_3與P_4圖形

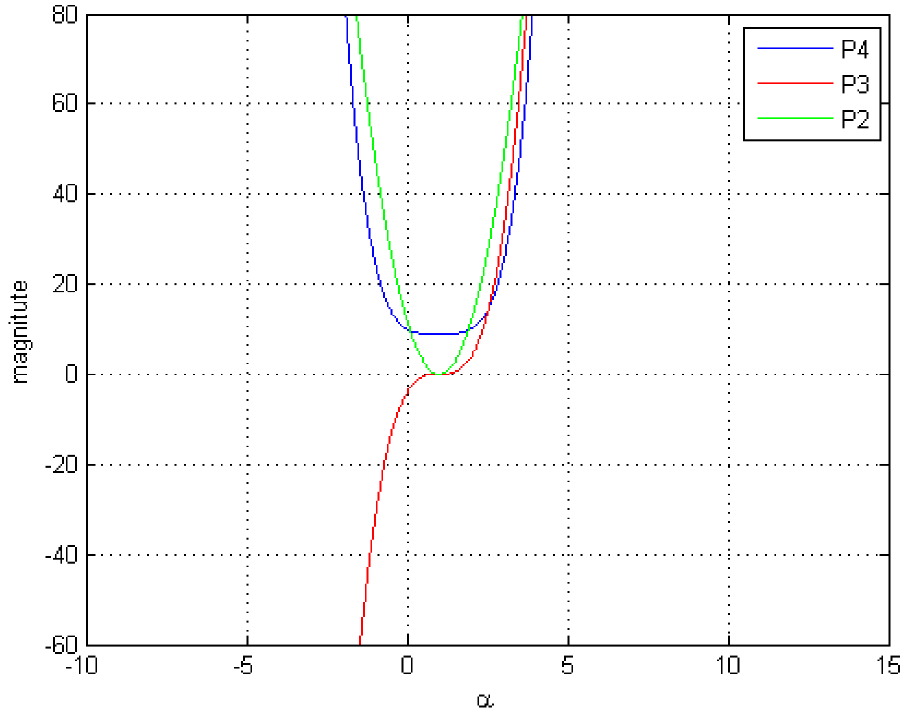


圖 3. 6: $\Delta_{P_2} = 0$，$P_2(\alpha) = 0$ 有二重根且$P_3(\alpha) = 0$ 有三重根之P_2, P_3與P_4圖形

情況 3：$\Delta_{P_2} > 0$ (當$P_2(\alpha) = 0$有相異實根)：我們將分為三種情況討論

情況 3.1：$P_3(k_1)P_3(k_2) = 0$，其中k_1、k_2為P_2的零點，且$k_2 > k_1$

若$P_3(k_1) = 0$，即P_3在k_1與α軸相切，根據勘根定理可知，$P_3(\alpha) = 0$在k_1有二重根，故 $P_3(\alpha) = (\alpha - k_1)^2(\alpha - k_2)$。且 $P_2(\alpha) = \dot{P}_3(\alpha) = 3\alpha^2 - 2(2k_1 + k_2)\alpha + {k_1}^2 + 2k_1k_2$，檢查$\Delta_{P_2}$是否大於零，$\Delta_{P_2}$=$4(k_1 - k_2)^2 > 0$。例如：取$k_1 = 1, k_2 = 6$，如圖 3. 7 所示，$P_3(\alpha)$在$\alpha = 1$處有兩個相同實數零點，$\alpha = 6$處有一個實數零點，且$P_4(\alpha)$的全域極小值發生於$\alpha = 6$。由以上推論可知，$P_4(k_2)$為$P_4$的全域極小值。

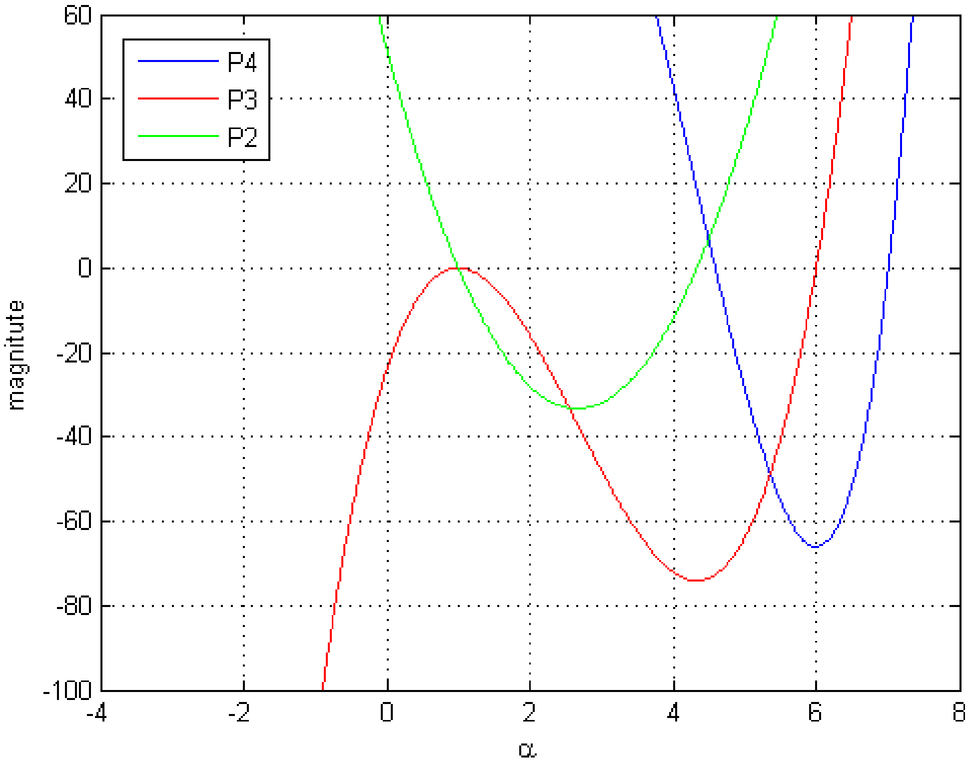


圖 3.7: $\Delta_{P_2} > 0, P_3(1)P_3(6) = 0$且$P_3(1) = 0$之$P_2, P_3$與$P_4$圖形

若$P_3(k_2) = 0$，即P_3在k_1與α軸相切，根據勘根定理可知，$P_3(\alpha) = 0$在k_2有二重根，故$P_3(\alpha) = (\alpha - k_1)(\alpha - k_2)^2$。且$P_2(\alpha) = \dot{P}_3(\alpha) = 3\alpha^2 - 2(2k_2 + k_1)\alpha + {k_2}^2 + 2k_1k_2$，檢查$\Delta_{P_2}$是否大於零，$\Delta_{P_2}$=$4(k_1 - k_2)^2 > 0$。例如：取$k_1 = 1, k_2 = 6$，如圖 3.8 所示，$P_3(\alpha)$在$\alpha = 6$處有兩個相同實數零點，$\alpha = 1$處有一個實數零點，且$P_4(\alpha)$的全域極小值發生於$\alpha = 1$。由以上推論可知，$P_4(k_1)$為$P_4$的全域極小值

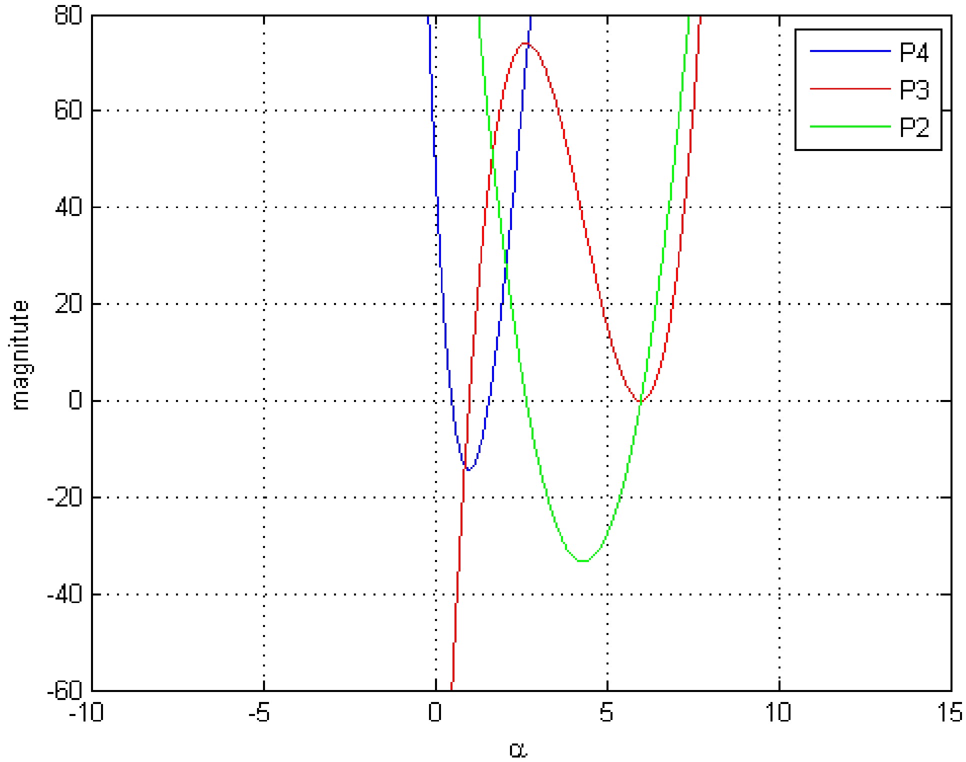


圖 3. 8: $\Delta_{P_2} > 0, P_3(1)P_3(6) = 0$且$P_3(6) = 0$之$P_2, P_3$與$P_4$圖形

結論：**情況 3.1** 中，若$P_3(\alpha^*) = 0$的根分別為$r_1, r_2 = r_3$，則$P_4(r_1)$為P_4的全域極小值且$\alpha^* = r_1$。

情況 3.2：$P_3(k_1)P_3(k_2) > 0$，其中k_1、k_2為P_2的零點，且$k_2 > k_1$

考慮$P_3(k_1) > 0$ 且$P_3(k_2) > 0$，如圖 3.9 所示，P_3與 α 軸交於一點，故P_3只有一個實數零點 r，且此零點處P_4有最小值，故$P_4(r)$為P_4的全域最小值。

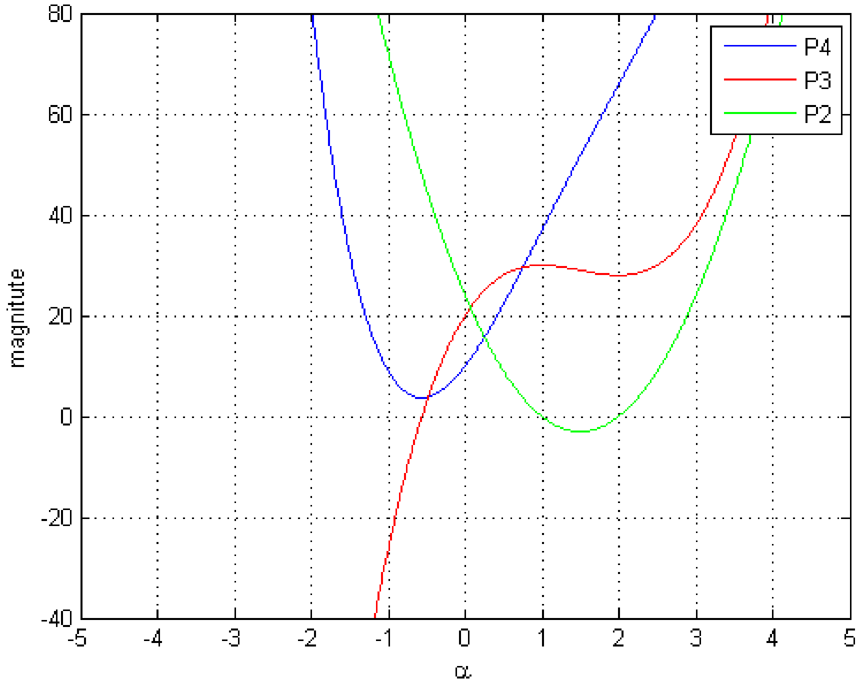


圖 3.9: $\Delta_{P_2} > 0, P_3(k_1)P_3(k_2) > 0$且$P_3(k_1) > 0, P_3(k_2) > 0$之$P_2, P_3$與$P_4$圖形

考慮$P_3(k_1) < 0$ 且$P_3(k_2) < 0$，如圖 3.10 所示，P_3與 α 軸交於一點，故P_3只有一個實數零點 r，且此零點處P_4有最小值，故$P_4(r)$為P_4的全域最小值且$\alpha^* = r$。

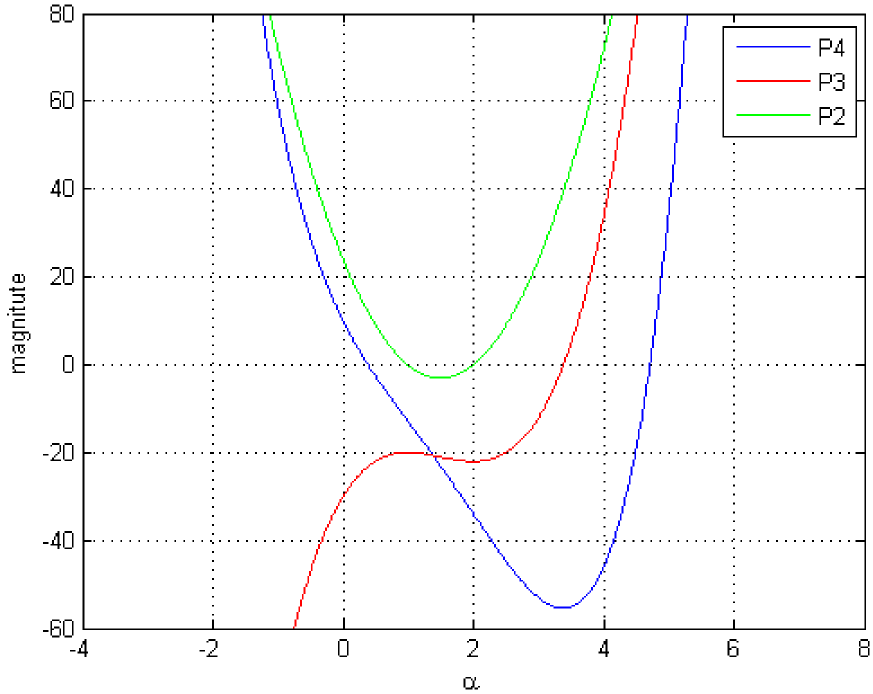


圖 3. 10: $\Delta_{P_2} > 0, P_3(k_1)P_3(k_2) > 0$且$P_3(k_1) < 0, P_3(k_2) < 0$之$P_2, P_3$與$P_4$圖形

情況 3.3：$P_3(k_1)P_3(k_2) < 0$

考慮P_3 =0 的根分別為r_1, r_2及r_3，其中$r_1 < r_2 < r_3$，且令$d_1 = r_2 - r_1$，$d_2 = r_3 - r_2$ 假設$P_3(\alpha) = (\alpha - (a - d_1))(\alpha - a)(\alpha - (a - d_2))$，當 $d_1 < d_2$，如圖 3. 11 所示，$P_4(\alpha)$的全域最小值為$P_4(r_3)$ 且$\alpha^* = r_3$；當 $d_1 > d_2$，如圖 3. 12 所示，$P_4(\alpha)$的全域最小值為$P_4(r_1)$ 且$\alpha^* = r_1$；當 $d_1 = d_2$，如圖 3. 13 所示，$P_4(\alpha)$的全域最小值為$P_4(r_1)$或$P_4(r_3)$，其中$P_4(r_1) = P_4(r_3)$ 且$\alpha^* = r_1 = r_3$。

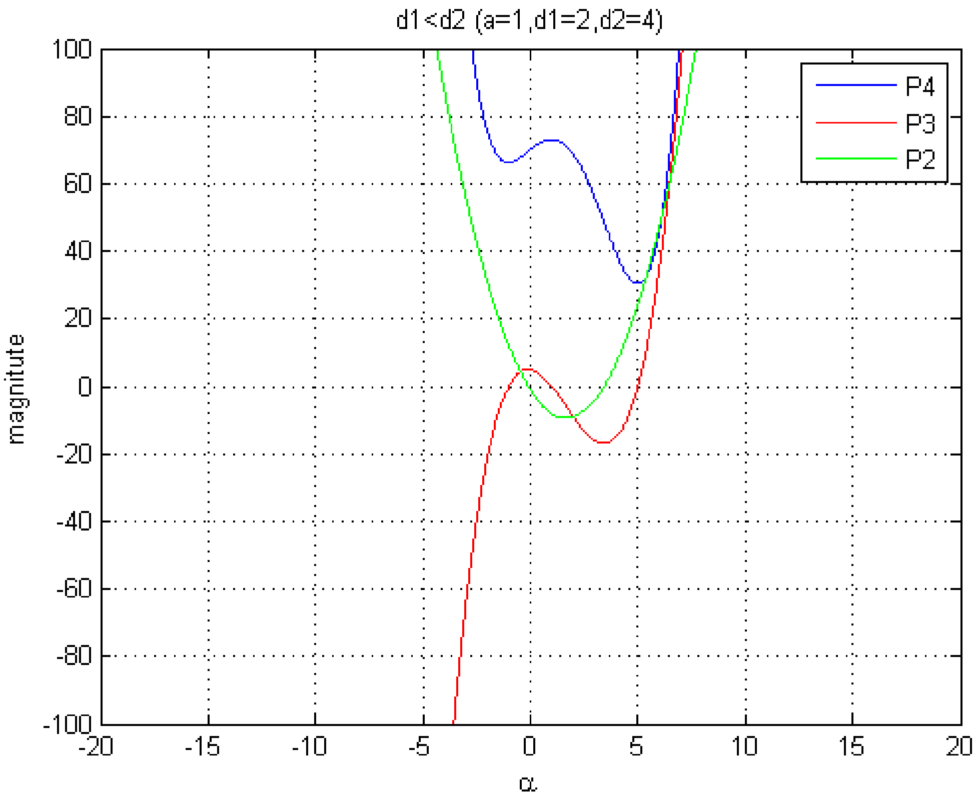


圖 3. 11: $\Delta_{P_2} > 0, P_3(k_1)P_3(k_2) < 0$ 且 $d_1 > d_2$ 之 P_2, P_3 與 P_4 圖形

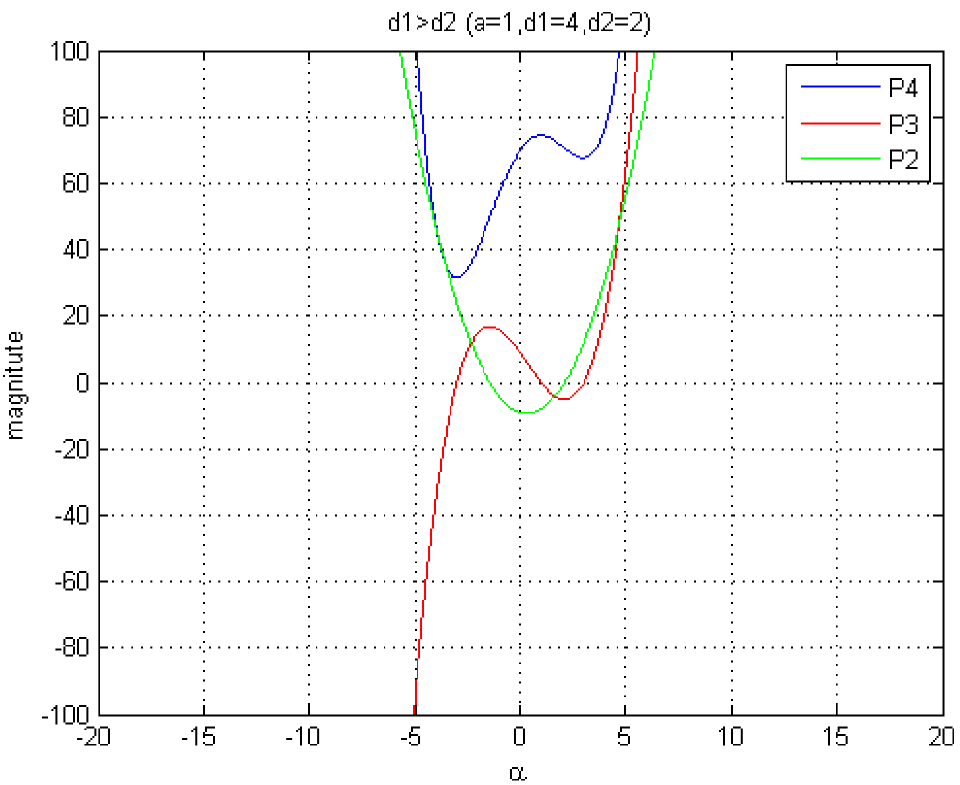


圖 3. 12: $\Delta_{P_2} > 0, P_3(k_1)P_3(k_2) < 0$ 且 $d_1 < d_2$ 之 P_2, P_3 與 P_4 圖形

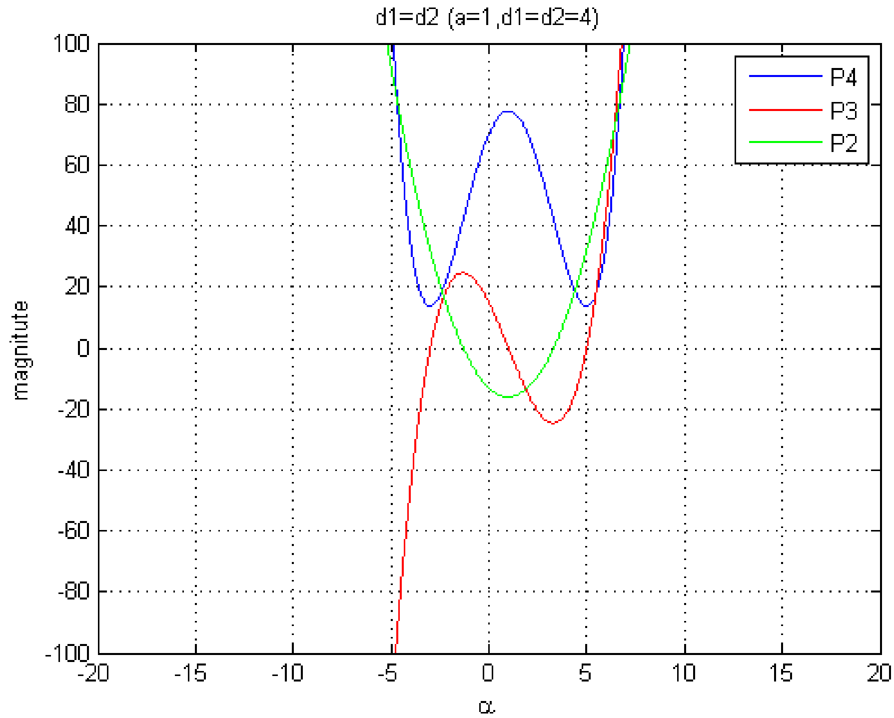


圖 3. 13: $\Delta_{P_2} > 0, P_3(k_1)P_3(k_2) < 0$ 且 $d_1 = d_2$ 之 P_2, P_3 與 P_4 圖形

由**情況 1**~**情況 3** 分析可得 $P_3(\alpha)$=0 之根所對應 $P_4(\alpha)$ 之極小值的整理如下

表 3. 1: $P_3(\alpha) = 0$ 之根所對應的 α^* 與 $\min P_4(\alpha)$

$P_3(\alpha) = 0$ 之根	α^*	$\min P_4(\alpha)$
一個實根和兩個共軛複根 $(r, p \pm qi)$	r	$P_4(r)$
三個實根，且至少有二重根 $(r_1, r_2 = r_3)$ or $(r_1 = r_2 = r_3)$	r_1	$P_4(r_1)$
三個相異實根 $(r_1 < r_2 < r_3)$ 且 $(r_2 - r_1) < (r_3 - r_2)$	r_3	$P_4(r_3)$
三個相異實根 $(r_1 < r_2 < r_3)$ 且 $(r_2 - r_1) > (r_3 - r_2)$	r_1	$P_4(r_1)$
三個相異實根 $(r_1 < r_2 < r_3)$ 且 $(r_2 - r_1) = (r_3 - r_2)$	$r_1 = r_3$	$P_4(r_1) = P_4(r_3)$

接下來我們要得到表 3.1 中$P_3(\alpha)=0$之根的分類依據，且求出$P_3(\alpha)=0$之所有根。當給定$\mathbf{g}_{1new}$、$\mathbf{g}_{2new}$及 $\mathbf{d}$，我們可以得到$P_4(\alpha)$如(3.20)所示且$P_3(\alpha)$如(3.21)所示，將$P_3(\alpha)=0$改寫如下

$$\alpha^3+b_1\alpha^2+b_2\alpha+b_3=0 \tag{3.24}$$

取

$$Q=\frac{3b_2-{b_1}^2}{9}\ ,\quad R=\frac{9b_1b_2-27b_3-2{b_2}^3}{54}$$

$$S=\sqrt[3]{R+\sqrt{Q^3+R^2}}\ ,T=\sqrt[3]{R-\sqrt{Q^3+R^2}}$$

則$P_3(\alpha)=0$的三個根如下所示

$$\begin{cases} x_1=S+T-\frac{1}{3}b_1 \\ x_2=\frac{-1}{2}(S+T)-\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) \\ x_3=\frac{-1}{2}(S+T)-\frac{1}{3}b_1-\frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) \end{cases} \tag{3.25}$$

根據[20]可知，當b_1，b_2，b_3為實數，若判別式為

$$D_3=Q^3+R^2 \tag{3.26}$$

則

(i)若$D_3>0$，則有一個實根，二個共軛複根

(ii)若$D_3=0$，則所有根皆為實根，且至少有二個實根

(iii) 若$D_3<0$，則所有根皆為實根且相異

綜合以上三點及表 3.1 之結果整理如下

表 3. 2：D_3所對應的α^*與$\min P_4(\alpha)$

D_3 ((3.26)式)	$P_3(\alpha) = 0$之根	α^*	$\min P_4(\alpha)$
$D_3 > 0$	(3.25)的三根為：一個實根 r 和兩個共軛複根 $p \pm qi$	r	$P_4(r)$
$D_3 = 0$	(3.25)的三根為r_1, r_2, r_3三個實根，且至少有二重根即$r_1, r_2 = r_3$或$r_1 = r_2 = r_3$	r_1	$P_4(r_1)$
$D_3 < 0$	(3.25)的三根為三個相異實根$(r_1 < r_2 < r_3)$且假設$(r_2 - r_1)<(r_3 - r_2)$	r_3	$P_4(r_3)$
	(3.25)的三根為三個相異實根$(r_1 < r_2 < r_3)$且假設$(r_2 - r_1)> (r_3 - r_2)$	r_1	$P_4(r_1)$
	(3.25)的三根為三個相異實根$(r_1 < r_2 < r_3)$且假設$(r_2 - r_1)= (r_3 - r_2)$	$r_1 = r_3$	$P_4(r_1)= P_4(r_3)$

■

給定$P_4(\alpha) = a_1\alpha^4 + a_2\alpha^3 + a_3\alpha^2 + a_4\alpha + a_5$且$a_1 > 0$，求$\alpha^*$之流程圖如圖 3. 14

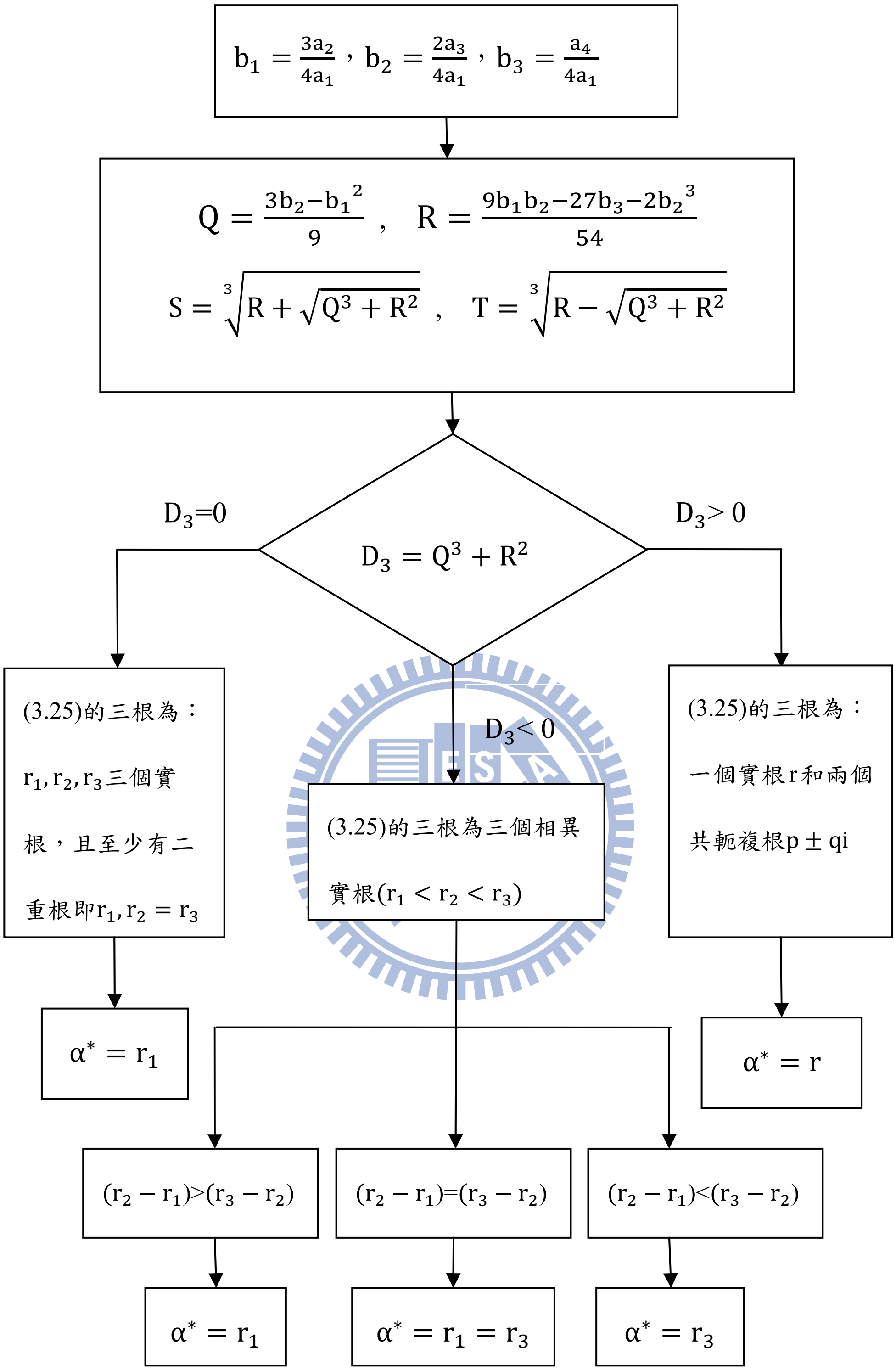


圖 3. 14：給定$P_4(\alpha) = a_1\alpha^4 + a_2\alpha^3 + a_3\alpha^2 + a_4\alpha + a_5$且$a_1 > 0$，求$\alpha^*$

所以當給定$\mathbf{g}_{1\mathbf{new}}$、$\mathbf{g}_{2\mathbf{new}}$及$\mathbf{d}$，我們得到(3.20)式，然後我們可由圖 3. 14 得到α^*。接下來我們必須檢查選取的α^*代入$\mathbf{d}_\mathbf{u} = \mathbf{d} - (\mathbf{g}_1\alpha^* + \mathbf{g}_1{\alpha^*}^2)$，是否會使得$\| \mathbf{d}_\mathrm{u} \|_2 > \| \mathbf{d} \|_2$，若以上不等式成立，則相當於原參數不確定因素所造成的效應被放大，不滿足我們的需求，所以必須要保證非匹配的系統參數不確定因素的範數不會比系統參數不確定因素的範數大。

引理 3. 3:考慮系統(3.12)，當給定$\mathbf{d}$，若我們可找到α^*，使得 $\alpha^* = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \| \mathbf{d} - (\mathbf{g}_{1\mathbf{new}}\alpha + \mathbf{g}_{2\mathbf{new}}\alpha^2) \|_2$，根據(3.19)式可得$\mathbf{d}_\mathrm{u} = \mathbf{d} - (\mathbf{g}_{1\mathbf{new}}\alpha^* + \mathbf{g}_{2\mathbf{new}}{\alpha^*}^2)$，則$\mathbf{d}$與$\mathbf{d}_\mathrm{u}$滿足以下不等式

$$\| \mathbf{d}_\mathrm{u} \|_2 \le \| \mathbf{d} \|_2$$

證明:

定義$\mathbf{d}_\mathrm{u}(\alpha) = \| \mathbf{d} - (\mathbf{g}_{1\mathbf{new}}\alpha + \mathbf{g}_{2\mathbf{new}}\alpha^2) \|_2$

則$\| \mathbf{d} \|_2 = \mathbf{d}_\mathrm{u}(0) \ge \mathbf{d}_\mathrm{u}(\alpha^*) = \| \mathbf{d}_\mathrm{u} \|_2$ ■

所以由以上證明可確定原參數不確定因素所造成的效應不會被放大，最後我們要檢查d_m是否滿足 ISMC 設計需求。

在第二章中的積分順滑模控制器之設計中，我們考慮仿射系統(3.15)且只有匹配的系統不確定性，此時系統為

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_\mathbf{a}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)\mathrm{u}_\mathrm{a} + \mathbf{d}_{\mathbf{am}} \tag{3.27}$$

當系統維持順滑模式時，所對應的控制律會使得系統(3.27)的狀態軌跡與標稱系統在標稱控制下的狀態軌跡相同。現在我們要驗證在二次多項式系統中只有匹配的系統不確定性下，且d_m為形式 1 時在 ISMC 的設計下是否能與應用在非仿射系統下有相同的效果。意即當系統(3.12)只有匹配的系統不確定性，且存在對應的控制律使得系統維持順滑模式時，系統狀態軌跡會與標稱系統在標稱控制下的

狀態軌跡相同。

考慮Q_{10}為定值，則標稱系統(3.13)如下

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})u_1 + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}){u_1}^{\mathbf{2}} \tag{3.28}$$

系統(3.12)只考慮匹配的系統參數不確定性時系統如下

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})v + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})v^{\mathbf{2}} + \mathbf{d}_{\mathbf{m}} \tag{3.29}$$

其中$\mathbf{d}_{\mathbf{m}}$不為零，順滑平面選取如下：

$$\sigma(\mathbf{e}, t) = \mathbf{D}\{\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t_0)$$

$$- \int_{t_0}^{t}[\mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}(\tau)) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e}(\tau))u_1 + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}(\tau)){u_1}^2]d\tau\} \tag{3.30}$$

其中$\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{\mathbf{1\times n}}$

我們對(3.30)微分，可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \mathbf{D}\,\dot{\mathbf{e}}(t) - \mathbf{D}\mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}) - \mathbf{D}\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})u_1 - \mathbf{D}\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}){u_1}^2 \\ &= \mathbf{D}[\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})(v - u_1) + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})(v^2 - {u_1}^2) + \mathbf{d}_{\mathbf{m}}]\end{aligned} \tag{3.31}$$

將(3.19)代入(3.31)可得

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}[\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})(v - u_1 + \alpha^*) + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(v^2 - {u_1}^2 + {\alpha^*}^2)] \tag{3.32}$$

假設存在 v 使得順滑函數保持為$\sigma = 0$，即$\sigma^T\dot{\sigma} < 0$成立，接著，我們欲求系統在順滑模式時對應的控制律v_{eq}。當系統處於順滑模式下時，$\sigma = \dot{\sigma} = 0$，我們可得

$${v_{eq}}^2 = -(\alpha^* - {u_1}^{\mathbf{2}}) - \frac{1}{D\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}}[D\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(v_{eq} + \alpha^* - u_1)] \tag{3.33}$$

將(3.33)與(3.19)代入系統(3.29)可得

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})\left(v_{eq} + \alpha^*\right) \\ &\quad + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})\left\{-(\alpha^* - {u_1}^{\mathbf{2}}) + \frac{[D\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(v_{eq}+\alpha^*-u_1)]}{D\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}} - {u_1}^{\mathbf{2}} + {\alpha^*}^2\right\} \\ &= \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}){u_1}^{\mathbf{2}} + \frac{[\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}D\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(v_{eq}+\alpha^*) - \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}D\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(v_{eq}+\alpha^*-u_1)]}{D\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}}\end{aligned} \tag{3.34}$$

我們希望控制律v_{eq}會使得(3.29)的系統軌跡與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同，意即(3.34)與(3.28)相同，條件為$\mathbf{g_{1new}Dg_{2new}} = \mathbf{g_{2new}Dg_{1new}}$，意即

$$\mathbf{g_{1new}} = k\mathbf{g_{2new}} \tag{3.35}$$

其中$k \in \Re$，當(3.35)條件成立時，存在使得控制律v_{eq}使得系統(3.29)系統軌跡與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同，但(3.35)的條件過於嚴格，當$\mathbf{g_{1new}}$與$\mathbf{g_{2new}}$線性獨立時，d_m在形式1之下在系統(3.12)只有匹配的系統不確定性，且存在對應的控制律使得系統維持順滑模式時，系統狀態軌跡不會與標稱系統在標稱控制下的狀態軌跡相同。我們以下將考慮不滿足(3.35)的情況，討論是否可透過$\mathbf{D}$的選取能使得d_m在形式1之下在系統(3.12)只有匹配的系統不確定性，且存在對應的控制律使得系統維持順滑模式時，系統狀態軌跡會與標稱系統在標稱控制下的狀態軌跡相同。

以下考慮在$\mathbf{g_{1new}}$與$\mathbf{g_{2new}}$為線性獨立之下，兩種$\mathbf{D}$的選取方式

情況1：$\mathbf{Dg_{2new}(e)} = \mathbf{0}$且$\mathbf{Dg_{1new}(e)} \neq \mathbf{0}$

此時順滑平面(3.30)的微分為

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}(e)}(v - u_1 + \alpha^*) \tag{3.36}$$

假設存在v使得順滑函數保持為$\sigma = 0$，即$\sigma^T\dot{\sigma} < 0$成立，接著，我們欲求系統在順滑模式時對應的控制律v_{eq}。當系統處於順滑模式下時，$\sigma = \dot{\sigma} = 0$，我們可得

$$v_{eq} = u_1 - \alpha^* \tag{3.37}$$

(3.40)與(3.19)代入系統(3.29)可得

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{f_{new}(e)} + \mathbf{g_{1new}(e)}(u_1 - \alpha^* + \alpha^*) + \mathbf{g_{2new}(e)}\left[(u_1 - \alpha^*)^2 + \alpha^{*2}\right] \\ &= \mathbf{f_{new}(e)} + \mathbf{g_{1new}(e)}u_1 + \mathbf{g_{2new}(e)}\left[{u_1}^2 - 2u_1\alpha^* + 2\alpha^{*2}\right]\end{aligned} \tag{3.38}$$

我們希望控制律v_{eq}會使得(3.29)的系統軌跡與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同，意即(3.41)與(3.28)相同。發生條件為$-2u_1\alpha^* + 2\alpha^{*2} = 0$，即$\alpha^* = 0$或$\alpha^* = u_1$。因為我們考慮$d_m \neq 0$，所以$\alpha^* = 0$不合；而$u_1$的值會隨系統狀態而變動，$\alpha^* = u_1$發生之可能性極低，所以$d_m$為形式1且$\mathbf{D}$的選取為情況1時，二次多項式系統

中只有匹配的系統不確定性下，所對應的控制律使得系統維持順滑模式時，系統軌跡不會與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同。

情況 2：$\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$且$\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e}) \neq \mathbf{0}$

考慮系統(3.29)，其中$\mathbf{d_m}$不為零，順滑平面選取如(3.30)，此時順滑平面的微分為

$$\dot{\sigma} = \mathbf{Dg_{2new}}(\mathrm{v}^2 - \mathrm{u_1}^2 + \alpha^{*2}) \tag{3.39}$$

假設存在 v 使得順滑函數保持為$\sigma = 0$，即$\sigma^T\dot{\sigma} < 0$成立，接著，我們欲求系統在順滑模式時對應的控制律$\mathrm{v_{eq}}$。當系統處於順滑模式下時，$\sigma = \dot{\sigma} = 0$，我們可得

$$\mathrm{v_{eq}} = \pm\sqrt{\mathrm{u_1}^2 - \alpha^{*2}} \tag{3.40}$$

其中$|\mathrm{u_1}| > |\alpha^*|$，(3.40)與(3.19)代入系統(3.29)可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})\left(\pm\sqrt{\mathrm{u_1}^2 - \alpha^{*2}} + \alpha^*\right) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})\left[\mathrm{u_1}^2 - \alpha^{*2} + \alpha^{*2}\right] \\ &= \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})\mathrm{u_1} + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})\mathrm{u_1}^2 \end{aligned} \tag{3.41}$$

我們希望控制律$\mathrm{v_{eq}}$會使得(3.29)的系統軌跡與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同，意即(3.41)與(3.28)相同。發生條件為$\mathrm{u_1} = \left(\pm\sqrt{\mathrm{u_1}^2 - \alpha^{*2}} + \alpha^*\right)$，移項整理可得 $-2\mathrm{u_1}\alpha^* + 2\alpha^{*2} = 0$，即$\alpha^* = 0$或$\alpha^* = \mathrm{u_1}$。因為我們考慮$\mathrm{d_m} \neq 0$，所以$\alpha^* = 0$不合；而$\mathrm{u_1}$的值會隨系統狀態而變動，$\alpha^* = \mathrm{u_1}$發生之可能性極低，所以$\mathrm{d_m}$為形式 1 且 **D** 的選取為情況 2 時，二次多項式系統中只有匹配的系統不確定性下，所對應的控制律使得系統維持順滑模式時，系統軌跡不會與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同。

所以當$\mathbf{g}_{1new}$與$\mathbf{g}_{2new}$線性獨立時，$\mathbf{D}$ 的選取考慮情況 1 與情況 2 時，我們必須將d_{m}改變為其他形式。在形式 1 中，S 的選取如(3.18)式，其中$\mathbf{g}_{2new}$向量的係數為$\mathbf{g}_{1new}$向量的係數的平方倍，我們接下來嘗試選取$\mathbf{g}_{2new}$向量的係數與$\mathbf{g}_{1new}$向量的係數都為未知數，考慮二次多項式系統中只有匹配的系統不確定性下，當系統維持順滑模式時，求出對應的控制律代入系統，可求出使得系統軌跡與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同時所滿足的$\mathbf{g}_{2new}$向量的係數與$\mathbf{g}_{1new}$向量的係數。以下考慮d_{m}的另一種形式。

3.2.2 $\mathbf{d_m}$的選取形式 2

在仿射系統(3.15)中 $\mathbf{d_{am}} \in \mathrm{col}(\mathbf{g})$，且$\mathbf{d_{am}}$在此取法下$\| \mathbf{d} - \mathbf{d_m} \|_2$有最小值，我們仿照仿射系統中匹配的系統參數不確定因素的選取方式，取$\mathbf{d_m} \in S_1$

S_1的選取如下

$$S_1 = \{\mathbf{g_{1new}}\alpha_1 + \mathbf{g_{2new}}\alpha_2 | \alpha_1, \alpha_2 \in \Re\} \tag{3.42}$$

α_1, α_2未知，故只知道S_1的幾何意義為$\Re^n$空間中的一條過原點的一維流形。

選取$\mathbf{d_m}$如下

$$\mathbf{d_m} = \mathbf{g_{1new}}\alpha_1{}^* + \mathbf{g_{2new}}\alpha_2{}^* \tag{3.43}$$

我們現在要求出$\mathbf{d_m}$在形式 2 下，$\alpha_1{}^*$與$\alpha_2{}^*$之關係，使得二次多項式系統中只有匹配的系統不確定性下，當系統維持順滑模式時，所對應的控制律會使得系統軌跡與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同。

系統(3.12)不考慮系統參數不確定性時系統如(3.28)，系統(3.12)只考慮匹配的系統參數不確定性時系統如(3.29)，其中$\mathrm{d_m}$不為零。順滑平面選取如(3.30) 其中$\mathbf{D} \in \Re^{1\times n}$。

將(3.42)代入(3.31)可得

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(\mathrm{v} - \mathrm{u}_1 + \alpha_1{}^*) + \mathbf{g_{2new}}(\mathrm{v}^2 - \mathrm{u}_1{}^2 + \alpha_2{}^*)] \tag{3.44}$$

以下考慮$\mathbf{g_{1new}}$與$\mathbf{g_{2new}}$為線性獨立時，兩種$\mathbf{D}$的選取方式

情況 1：$\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$且$\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e}) \neq \mathbf{0}$

此時順滑平面的微分為

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(\mathrm{v} - \mathrm{u}_1 + \alpha_1{}^*) \tag{3.45}$$

假設存在 v 使得順滑函數保持為$\sigma = 0$，即$\sigma^T\dot{\sigma} < 0$成立

接著，我們欲求系統在順滑模式時對應的控制律$\mathrm{v_{eq}}$

當系統處於順滑模式下時，$\sigma = \dot{\sigma} = 0$，我們可得到

$$\mathrm{v_{eq}} = \mathrm{u_1} - \alpha_1{}^* \tag{3.46}$$

(3.46)與代入系統(3.29)可得

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(\mathrm{u_1} - \alpha_1{}^* + \alpha_1{}^*) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})[(\mathrm{u_1} - \alpha_1{}^*)^{\mathbf{2}} + \alpha_2{}^*] \\ &= \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})\mathrm{u_1} + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})\left[\mathrm{u_1}^2 - 2\mathrm{u_1}\alpha_1{}^* + \alpha_1{}^{*2} + \alpha_2{}^*\right]\end{aligned} \tag{3.47}$$

我們希望$\mathrm{v_{eq}}$會使得標稱系統在標稱控制下的軌跡相同，意即(3.47)與(3.28)相同。發生條件為

$$\alpha_2{}^* = 2\mathrm{u_1}\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2} \tag{3.48}$$

且$\alpha_1{}^*$不為零，我們得到$\alpha_1{}^*$與$\alpha_2{}^*$關係如上式。將(3.48)代入(3.43)可得

$$\mathbf{d_m} = \mathbf{g_{1new}}\alpha_1{}^* + \mathbf{g_{2new}}(2\mathrm{u_1}\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2}) \tag{3.49}$$

上式為$\mathbf{d_m}$在形式 2 下的表示式。由(3.48)的關係式可得(3.42)中$\mathrm{S_1}$如下

$$\mathrm{S_1} = \{\mathbf{g_{1new}}\alpha_1 + \mathbf{g_{2new}}(2\mathrm{u_1}\alpha_1 - \alpha_1{}^2) | \alpha_1 \in \Re, \mathrm{u_1} \in \Re\} \tag{3.50}$$

且$\mathbf{d_m}$的選取為使得$\| \mathbf{d} - \mathbf{d_m} \|_2$有最小值，即$\| \mathbf{d_u} \|_2$有最小值。$\mathrm{S_1}$的幾何意義為$\Re^n$空間中的一條過原點的一維流形，其中$\mathrm{S_1}$會因$\mathrm{u_1}$值而不同，以下考慮$\mathrm{u_1}$值對$\mathrm{S_1}$所產生的變化，選取

$$\mathrm{S_{1-1}} = \{\mathbf{g_{1new}}\alpha_1 + \mathbf{g_{2new}}(2\mathrm{K_1}\alpha_1 - \alpha_1{}^2) | \alpha_1 \in \Re\}$$

$$\mathrm{S_{1-2}} = \{\mathbf{g_{1new}}\alpha_1 + \mathbf{g_{2new}}(2\mathrm{K_2}\alpha_1 - \alpha_1{}^2) | \alpha_1 \in \Re\}$$

其中$\mathrm{K_2} > \mathrm{K_1}$，$\mathrm{S_{1-1}}$與$\mathrm{S_{1-2}}$的幾何意義如圖 3. 15 所示，皆為$\Re^n$空間中的一條過原點的一維流形 。

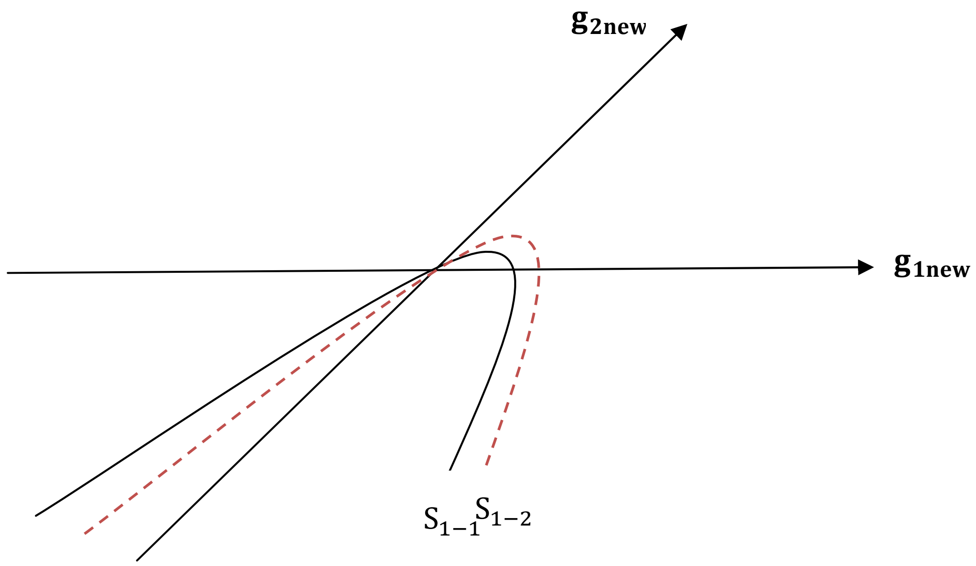


圖 3. 15: S_{1-1}與S_{1-2}在R^n空間中的幾何意義

接下來我們必須決定如何選定α_1，使得$\| \mathbf{d}-\mathbf{d_m} \|_2$有最小值，其中$\mathbf{d_m} \in S_1$。。

因為根據文獻[6]我們知道在順滑模態上，匹配的系統參數不確定因素會因非連續控制律的的控制下而被完全消除，所以只需考慮非匹配的系統參數不確定因素所造成的效應，且希望造成的效應希望能越小越好。如圖 3. 16 所示，當給定 $\mathbf{d}$，我們想要試著找到$\mathbf{d_m} \in S_1$，使得 $\| \mathbf{d}-\mathbf{d_m} \|_2$最小，意即找到$\alpha_1$，使得 $\| \mathbf{d}-\mathbf{g_{1new}}\alpha_1+\mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1-{\alpha_1}^2) \|_2$最小，我們定義${\alpha_1}^*$如下

$$ {\alpha_1}^* = \arg\min_{\alpha_1} \| \mathbf{d}-\mathbf{g_{1new}}\alpha_1-\mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1-{\alpha_1}^2) \|_2 $$

我們可得$\mathbf{d_m}$如下

$$ \mathbf{d_m} = \mathbf{g_{1new}}{\alpha_1}^* + \mathbf{g_{2new}}(2u_1{\alpha_1}^* - {\alpha_1}^{*2}) \tag{3.51} $$

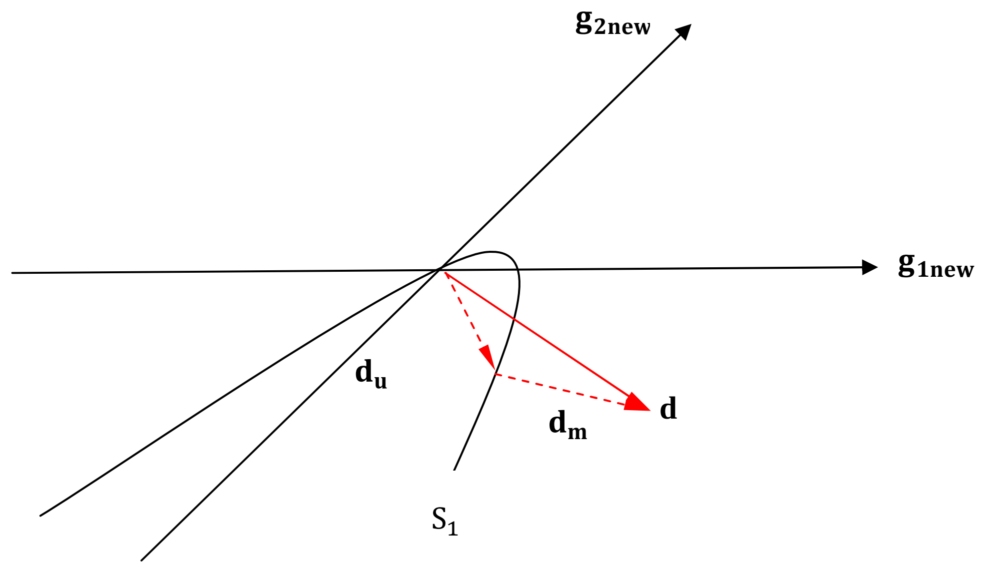


圖 3.16：給定$\mathbf{d}$時，$\mathbf{d_m}$與$\mathbf{d_u}$在R^n空間中與S_1之關係

在選定$\mathbf{d_m}$後，我們必須驗證$\alpha_1{}^*$的存在性。

引理 3.4 (存在性)：當給定$\mathbf{g_{1new}}$、$\mathbf{g_{2new}}$及$\mathbf{d}$時，$\overline{P_4}(\alpha_1) = \min_{\alpha_1} \| \mathbf{d} - \mathbf{g_{1new}}\alpha_1 - \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1 - \alpha_1{}^2) \|_2{}^2$必存在，即$\alpha_1{}^*$存在且$\mathbf{d_m} = \mathbf{g_{1new}}\alpha_1{}^* + \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2})$存在。

證明：

當給定$\mathbf{g_{1new}}$、$\mathbf{g_{2new}}$及$\mathbf{d}$時，假設多項式$\overline{P_4}$如下

$$\begin{aligned}\overline{P_4}(\alpha_1) &= \| \mathbf{d} - \mathbf{g_{1new}}\alpha_1 + \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1 - \alpha_1{}^2) \|_2{}^2 \\ &= (\| \mathbf{d} - \mathbf{g_{1new}}\alpha_1 + \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1 - \alpha_1{}^2))^T(\| \mathbf{d} - \\ &\quad \mathbf{g_{1new}}\alpha_1 + \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1 - \alpha_1{}^2)) \\ &= \overline{a_1}\alpha^4 + \overline{a_2}\alpha^3 + \overline{a_3}\alpha^2 + \overline{a_4}\alpha + \overline{a_5}\end{aligned} \tag{3.52}$$

其中

$\overline{a_1} = \mathbf{g_{2new}}^{\mathbf{T}}\mathbf{g_{2new}}$

$\overline{a_2} = -2(\mathbf{g_{1new}}^{\mathbf{T}} + 2u_1\mathbf{g_{2new}}^{\mathbf{T}})\mathbf{g_{2new}}$

$\overline{a_3} = (\mathbf{g_{1new}}^{\mathbf{T}} + 2u_1\mathbf{g_{2new}}^{\mathbf{T}})(\mathbf{g_{1new}} + 2u_1\mathbf{g_{2new}}) + 2\mathbf{d}^{\mathbf{T}}\mathbf{g_{2new}}$

$\overline{a_4} = -2\mathbf{d}^{\mathbf{T}}(\mathbf{g_{1new}} + 2u_1\mathbf{g_{2new}})$

$\overline{a_5} = \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}$

(3.52)中$\overline{P_4}(\alpha_1)$為連續函數且$\overline{a_1} > 0$，且$P_4(\alpha_1) = \begin{cases} \infty\text{, 當}\alpha_1 \to \infty \\ \infty\text{, 當}\alpha_1 \to -\infty \end{cases}$，根據極值定理

(extreme value theorem)，P_4存在全域極小值，即$\alpha_1{}^*$必存在。■

注意：在**引理 3.4** 中$\alpha_1{}^*$存在，但一般來說$\alpha_1{}^*$不保證唯一。

(3.52)式中$\overline{P_4}(\alpha_1) = \overline{a_1}\alpha^4 + \overline{a_2}\alpha^3 + \overline{a_3}\alpha^2 + \overline{a_4}\alpha + \overline{a_5}$為連續函數且 $a_1 > 0$，由圖 3.14，可得$\alpha_1{}^*$，$\alpha_1{}^*$代入(3.52)可得$\min_{\alpha_1} \overline{P_4}(\alpha_1)$=$\overline{P_4}(\alpha_1{}^*)$。

接下來我們必須檢查選取的α^*代入$\mathbf{d_u} = \mathbf{d} - \mathbf{g_{1new}}\alpha_1{}^* - \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2})$，是否會使得$\| \mathbf{d}_u \|_2 > \| \mathbf{d} \|_2$，若以上不等式成立，則相當於原參數不確定因素所造成的效應被放大，不滿足我們的需求，所以必須要保證非匹配的系統參數不確定因素的範數不會比系統參數不確定因素的範數大。

引理 3.5:考慮系統(3.12)，當給定 d，若我們可找到$\alpha_1{}^*$，使得

$\alpha_1{}^* = \underset{\alpha_1}{\operatorname{argmin}} \| \mathbf{d} - \mathbf{g_{1new}}\alpha_1 - \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1 - \alpha_1{}^2) \|_2$，根據(3.9)式可得

$\mathbf{d}_u = \mathbf{d} - \mathbf{g_{1new}}\alpha_1{}^* - \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2})$，則 d 與$\mathbf{d}_u$滿足以下不等式

$$\| \mathbf{d}_u \|_2 \leq \| \mathbf{d} \|_2$$

證明:

定義$\mathbf{d}_u(\alpha_1)$=$\| \mathbf{d} - \mathbf{g_{1new}}\alpha_1 - \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1 - \alpha_1{}^2) \|_2$

則$\| \mathbf{d} \|_2$=$\mathbf{d}_u(0) \geq \mathbf{d}_u(\alpha_1{}^*) = \| \mathbf{d}_u \|_2$ ■

所以由以上證明可確定原參數不確定因素所造成的效應不會被放大

情況 2: $\mathbf{Dg_{1new}(e) = 0}$**且**$\mathbf{Dg_{2new}(e) \neq 0}$

在情況二下，$\mathbf{d_m}$形式如(3.51)時，二次多項式系統中只有匹配的系統不確定性下，當系統維持順滑模式時，所對應的控制律會使得系統軌跡與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同，詳細證明於 3.3.2.1 節。

我們將以上討論中$\mathbf{d_m}$的選取整理如下表

表 3. 3: $\mathbf{d_m}$的選取

	D的選取	$\mathbf{d_m}$
$\mathbf{g_{1new}}$與$\mathbf{g_{2new}}$線性相依	$\mathbf{Dg_{1new}(e) \neq 0}$	$\mathbf{g_{1new}}\alpha^* + \mathbf{g_{2new}}\alpha^{*2}$
$\mathbf{g_{1new}}$與$\mathbf{g_{2new}}$線性獨立	**情況 1：** $\begin{cases}\mathbf{Dg_{2new}(e) = 0} \\ \mathbf{Dg_{1new}(e) \neq 0}\end{cases}$	$\mathbf{g_{1new}}\alpha_1{}^* + \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2})$
	情況 2： $\begin{cases}\mathbf{Dg_{1new}(e) = 0} \\ \mathbf{Dg_{2new}(e) \neq 0}\end{cases}$	$\mathbf{g_{1new}}\alpha_1{}^* + \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2})$

3.3 控制律設計

在 3.1 節中我們將系統(3.1)之追蹤問題變成系統(3.12)之穩定化問題，為了利用 ISMC 設計系統(3.12)的穩定控制率，在 3.2 節中我們自行定義二次多項式中的匹配式與非匹配式的參數不確定因素。接下來我們將利用 ISMC 設計方式對系統(3.12)設計控制律，使系統在有參數不確定因素$\mathbf{d}$下達到穩定化，如此可同時達到輸出追蹤與內部狀態穩定的目的。仿照 ISMC 設計流程[5][6]，我們將針對標稱系統(3.13)設計標稱控制律，再針對有干擾系統(3.12)設計控制律。

3.3.1 設計針對無干擾系統之 LQR 控制律

假設 3.1：考慮非線性的無干擾系統如下

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})\mathrm{v} + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})\mathrm{v}^2 \tag{3.53}$$

存在一控制律$\mathrm{v} = \mathrm{u}_1$使系統(3.53)能區域漸進穩定

將系統(3.53)之 v 以u_1代入並以如下形式表示：

$$\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{f}(\mathbf{e}\,,\mathrm{u}_1) \tag{3.54}$$

仿照論文[4]中 LQR 控制律設計方式，將系統線性化得到系統矩陣$\mathbf{A}$與控制矩陣$\mathbf{B}$如下

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{0}, \mathrm{u}_0),\quad \mathbf{B} = \frac{\partial\, \mathbf{f}}{\partial \mathrm{u}_1}(\mathbf{0}, \mathrm{u}_0) \tag{3.55}$$

我們可得到線性化系統

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathrm{u}_1 \tag{3.56}$$

考慮優先降低系統反應，亦即需要較大控制力設計下，選取矩陣$\mathbf{Q}$(反應加權矩陣，response weighting matrix)與$\mathbf{R}$(控制力加權矩陣，control force weighting matrix)值如下，

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{4\mathrm{x}4} \tag{3.57}$$

$$\mathrm{R} = 0.9 \tag{3.58}$$

此時使得成本指標(cost function) $\mathrm{J} = \int_0^\infty [\mathbf{e}^\mathrm{T}(\mathrm{t})\mathbf{Q}\mathbf{e}(\mathrm{t}) + \mathrm{u}_1^\mathrm{T}(\mathrm{t})\mathrm{R}\mathrm{u}_1(\mathrm{t})]\,\mathrm{dt}$達到最小值的回授增益矩陣(feedback gain matrix)為

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}\mathrm{R}^{-1}\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{P} \tag{3.59}$$

其中$\mathbf{P}$為滿足 Riccati 矩陣方程式$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{P} - \mathbf{PB}\mathrm{R}^{-1}\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$的矩陣

我們可以得到

$$\mathrm{u}_1 = -\mathbf{K}\mathbf{e} \tag{3.60}$$

u_1可使線性化系統(3.56)漸進穩定，則u_1可使系統(3.53)區域漸進穩定。

3.3.2 設計針對有干擾系統之 ISMC 控制律

在選定無干擾系統的控制律後，為了補償系統參數的不確定因素，我們採用 ISMC 設計方式。首先考慮系統只有匹配的系統參數不確定因素，並參考表 3. 3 中分類方式分別討論 $\mathbf{g_{1new}}$與$\mathbf{g_{2new}}$線性相依與$\mathbf{g_{1new}}$與$\mathbf{g_{2new}}$線性獨立的情況，設計控制律。

3.3.2.1 考慮匹配的系統參數不確定因素

在這節中系統(3.12)只考慮匹配的系統參數不確定因素且Q_{10}為定值，即

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})\mathrm{v} + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})\mathrm{v}^{\mathbf{2}} + \mathbf{d_m} \tag{3.61}$$

以下我們分為三種情況討論。

情況 A：$\mathbf{g_{1new}}$與$\mathbf{g_{2new}}$線性相依, $\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e}) \neq \mathbf{0}$

假設 3. 2：$\bar{\mathrm{A}} = |\,\mathbf{Dg_{2new}}|$，$\bar{\mathrm{B}} = [\,\mathbf{Dg_{1new}} + 2\mathrm{u_1}\,\mathbf{Dg_{2new}}]$，$\bar{\mathrm{C}} = [|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\alpha^* + \mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e}){\alpha^*}^2|]$且$\Delta = \bar{\mathrm{B}}^2 - 4\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{C}} > 0$

參考表 3. 3，可得

$$\mathbf{d_m} = \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})\alpha^* + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e}){\alpha^*}^2 \tag{3.62}$$

將(3.62)代入(3.61)可得

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(\mathrm{v} + \alpha^*) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})(\mathrm{v}^{\mathbf{2}} + {\alpha^*}^2) \tag{3.63}$$

根據 ISMC 設計步驟[5][6]，系統(3.63)的順滑平面選取如下：

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{e},\mathrm{t}) = \mathbf{D}\{&\mathbf{e}(\mathrm{t}) - \mathbf{e}(\mathrm{t_0}) \\ &- \int_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}}[\mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}(\tau)) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e}(\tau))\mathrm{u_1} + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e}(\tau)){\mathrm{u_1}}^2]\mathrm{d}\tau\}\end{aligned} \tag{3.64}$$

其中$\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{\mathbf{1\times n}}$，$\mathrm{u_1}$可由(3.60)得到，我們對(3.64)微分，可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \mathbf{D}\,\dot{\mathbf{e}}(\mathrm{t}) - \mathbf{Df_{new}}(\mathbf{e}) - \mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\mathrm{u_1} - \mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e}){\mathrm{u_1}}^2 \\ &= \mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(\mathrm{v} - \mathrm{u_1}) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})(\mathrm{v}^2 - {\mathrm{u_1}}^2) + \mathbf{d_m}]\end{aligned}$$

$$= \mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(v - u_1 + \alpha^*) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})(v^2 - {u_1}^2 + {\alpha^*}^2)] \tag{3.65}$$

設計控制律

$$v = \begin{cases} u_1 + \rho\dfrac{\sigma}{|\sigma|}, & 若\ \sigma \neq \mathbf{0} \\ u_1, & 若\ \sigma = \mathbf{0} \end{cases}$$

當$\sigma \neq 0$，則在假設 3.2下

$$\begin{aligned}
\sigma\dot{\sigma} =\ & \sigma\mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(u_1 + \rho\frac{\sigma}{|\sigma|} - u_1 + \alpha^*) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})((u_1 + \rho\frac{\sigma}{|\sigma|})^2 - {u_1}^2 + {\alpha^*}^2)] \\
&= \rho^2\sigma\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e}) + \rho[\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})|\sigma| + 2\mathbf{Dg_{2new}}u_1|\sigma|] + \sigma[\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\alpha^* \\
&\quad +\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e}){\alpha^*}^2] \\
&\leq \rho^2\sigma|\,\mathbf{Dg_{2new}}| + \rho[\mathbf{Dg_{1new}}|\sigma| + 2u_1\mathbf{Dg_{2new}}\,|\sigma|] + |\sigma|[|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\alpha^* \\
&\quad +\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e}){\alpha^*}^2|] \\
&= |\sigma|[\rho^2\bar{A} + \rho\bar{B} + \bar{C}]
\end{aligned}$$

其中$\bar{A} > 0$且由假設 3.2 可知$\rho^2\bar{A} + \rho\bar{B} + \bar{C}$之判別式$\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C} > 0$，如圖 3.17所示$\rho^2\bar{A} + \rho\bar{B} + \bar{C}$為上凹之二次多項式，必存在$\rho$使得$\dot{\sigma}\sigma < 0$

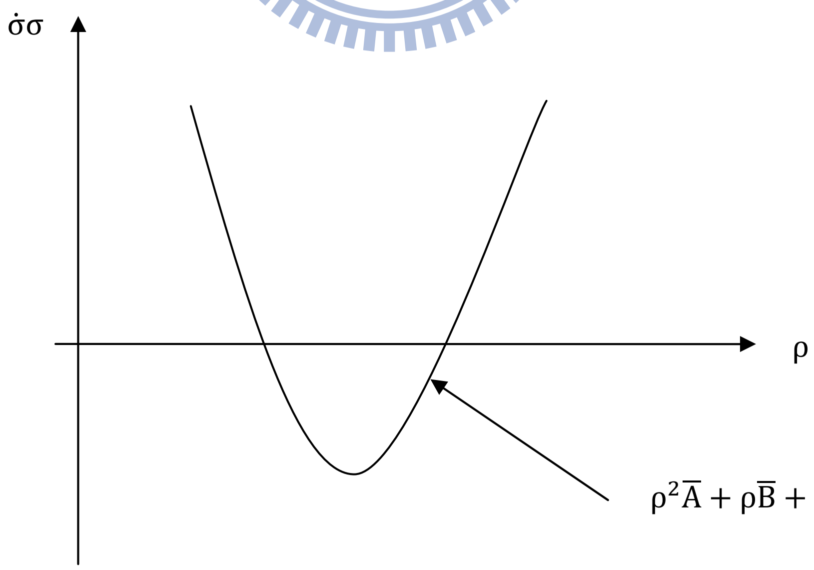


圖 3. 17:滿足 $\bar{A} > 0$且$\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C} > 0$之$\rho^2\bar{A} + \rho\bar{B} + \bar{C}$圖形

我們欲求系統在順滑模式時對應的控制律v_{eq}。當系統處於順滑模式下時，$\sigma = \dot{\sigma} = 0$，我們可得

$$v_{eq}{}^2 = -(\alpha^* - u_1{}^2) - \frac{1}{D\mathbf{g_{2new}}}[D\mathbf{g_{1new}}(v_{eq} + \alpha^* - u_1)] \tag{3.66}$$

將(3.66)代入系統(3.63)可得

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})\left(v_{eq} + \alpha^*\right) \\ &\quad + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})\left\{-(\alpha^* - u_1{}^2) - \frac{\left[D\mathbf{g_{1new}}\left(v_{eq} + \alpha^* - u_1\right)\right]}{D\mathbf{g_{2new}}} + \alpha^{*2}\right\} \\ &= \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})u_1{}^2 + \frac{\left[\mathbf{g_{1new}}D\mathbf{g_{2new}}\left(v_{eq}+\alpha^*\right) - \mathbf{g_{2new}}D\mathbf{g_{1new}}\left(v_{eq}+\alpha^* - u_1\right)\right]}{D\mathbf{g_{2new}}} \\ &= \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})u_1 + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})u_1{}^2\end{aligned} \tag{3.67}$$

所以當只有匹配的系統參數不確定性下，所對應的控制律使得系統維持順滑模式時，系統軌跡會與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同。

情況 B：$D\mathbf{g_{2new}} = 0$且 $D\mathbf{g_{1new}} \neq 0$

參考表 3.3，可得

$$\mathbf{d_m} = \mathbf{g_{1new}}\alpha_1{}^* + \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2}) \tag{3.68}$$

將(3.68)代入(3.61)可得

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(v + \alpha^*) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})(v^2 + 2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2}) \tag{3.69}$$

根據 ISMC 設計步驟[5][6]，系統(3.69)的順滑平面選取如下：

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{e}, t) &= \mathbf{D}\{\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t_0) \\ &\quad - \int_{t_0}^{t}[\mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}(\tau)) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e}(\tau))u_1 + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e}(\tau))u_1{}^2]d\tau\}\end{aligned} \tag{3.70}$$

其中$\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{1\times n}$，$u_1$可由(3.60)得到，我們對(3.70)微分，可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \mathbf{D}\,\dot{\mathbf{e}}(t) - \mathbf{Df_{new}}(\mathbf{e}) - \mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})u_1 - \mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})u_1{}^2 \\ &= \mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(v - u_1) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})(v^2 - u_1{}^2) + \mathbf{d_m}] \\ &= \mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(v - u_1 + \alpha_1{}^*)]\end{aligned} \tag{3.71}$$

設計控制律

$$v=\begin{cases} u_1-\rho\dfrac{\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma}{|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma|}, & 若\ \sigma\neq\mathbf{0} \\ u_1\,, & 若\ \sigma=\mathbf{0} \end{cases}$$

當$\sigma\neq 0$，取$\rho>|\alpha_1{}^*|$

$$\sigma\dot{\sigma}=\sigma\mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(u_1-\rho\frac{\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma}{|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma|}-u_1+\alpha_1{}^*)]$$

$$\leq|\sigma\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})|(-\rho+|\alpha_1{}^*|)<0$$

我們欲求系統在順滑模式時對應的控制律v_{eq}。當系統處於順滑模式下時，$\sigma=\dot{\sigma}=0$，我們可得

$$v_{eq}=u_1-\alpha_1{}^* \tag{3.72}$$

將(3.72)代入系統(3.69)可得

$$\begin{aligned}\dot{e}&=\mathbf{f_{new}}(\mathbf{e})+\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(u_1-\alpha_1{}^*+\alpha_1{}^*)\\&\quad+\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})[(u_1-\alpha_1{}^*)^2+2u_1\alpha_1{}^*-\alpha_1{}^{*2}]\\&=\mathbf{f_{new}}(\mathbf{e})+\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})u_1+\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})u_1{}^2\end{aligned} \tag{3.73}$$

所以當只有匹配的系統參數不確定性下，所對應的控制律使得系統維持順滑模式時，系統軌跡會與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同。

情況 C： $\mathbf{Dg_{1new}}=\mathbf{0}$且$\mathbf{Dg_{2new}}\neq\mathbf{0}$

假設 3.3：$\left|2u_1\alpha_1{}^*-\alpha_1{}^{*2}\right|<\rho_\beta$

假設 3.4：$u_1{}^2>\rho_\beta$

參考表 3.3，可得

$$\mathbf{d_m}=\mathbf{g_{1new}}\alpha_1{}^*+\mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1{}^*-\alpha_1{}^{*2}) \tag{3.74}$$

將(3.74)代入(3.61)可得

$$\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{f_{new}}(\mathbf{e})+\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(v+\alpha_1{}^*)+\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})(v^2+2u_1\alpha_1{}^*-\alpha_1{}^{*2}) \tag{3.75}$$

根據 ISMC 設計步驟[5][6]，系統(3.69)的順滑平面選取如下：

$$\sigma(\mathbf{e},t)=\mathbf{D}\{\mathbf{e}(t)-\mathbf{e}(t_0)$$
$$-\int_{t_0}^{t}[\mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}(\tau))+\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e}(\tau))u_1+\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}(\tau)){u_1}^2]d\tau\} \tag{3.76}$$

其中$\mathbf{D}\in\mathfrak{R}^{\mathbf{1\times n}}$，$u_1$可由(3.60)得到，我們對(3.76)微分，可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}&=\mathbf{D}\,\dot{\mathbf{e}}(t)-\mathbf{D}\mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e})-\mathbf{D}\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})u_1-\mathbf{D}\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}){u_1}^2\\&=\mathbf{D}[\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})(v-u_1)+\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})(v^2-{u_1}^2)+\mathbf{d}_{\mathbf{m}}]\\&=\mathbf{D}[\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})(v-{u_1}^2+2u_1{\alpha_1}^*-{\alpha_1}^{*2})]\end{aligned} \tag{3.77}$$

設計控制律

$$v=\begin{cases}u_1+\rho\dfrac{\mathbf{D}\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})\sigma}{|\mathbf{D}\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})\sigma|}, & \text{若 } \sigma\neq\mathbf{0}\\ u_1, & \text{若 } \sigma=\mathbf{0}\end{cases}$$

當$\sigma\neq 0$，在假設 3.3 與假設 3.4 下

$$\sigma\dot{\sigma}=\sigma\mathbf{D}[\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})({u_1}^2+2u_1\frac{\mathbf{D}\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})\sigma}{|\mathbf{D}\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})\sigma|}\rho+\rho^2-{u_1}^2+2{u_1}^2{\alpha_1}^*-{\alpha_1}^{*2})]$$
$$\leq|\sigma\mathbf{D}\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})|\left(\rho^2+2|u_1|\rho+\rho_\beta\right)<0$$

由假設 3.4 可知$\rho^2+2|u_1|\rho+\rho_\beta$為判別式大於零且上凹之二次多項式，故必存在$\rho$使得$\dot{\sigma}\sigma<0$

我們欲求系統在順滑模式時對應的控制律v_{eq}。當系統處於順滑模式下時，$\sigma=\dot{\sigma}=0$，我們可得

$${v_{eq}}^2=(u_1-{\alpha_1}^*)^2 \tag{3.78}$$

取$v_{eq}=u_1-{\alpha_1}^*$代入系統(3.75)可得

$$\begin{aligned}\dot{e}&=\mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e})+\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})(u_1-{\alpha_1}^*+{\alpha_1}^*)\\&\quad+\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})[(u_1-{\alpha_1}^*)^2+2u_1{\alpha_1}^*-{\alpha_1}^{*2}]\\&=\mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e})+\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})u_1+\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}){u_1}^{\mathbf{2}}\end{aligned} \tag{3.79}$$

所以當只有匹配的系統參數不確定性下，所對應的控制律使得系統維持順滑模式時，系統軌跡會與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同。

3.3.2.2 考慮非匹配的系統參數不確定因素

在 3.3.2.節中，當我們只考慮匹配的系統參數不確定因素時，在情況 A、情況 B 與情況 C 下，可設計對應的控制律使得系統維持順滑模式時，系統軌跡會與標稱系統在標稱控制下的軌跡相同。在本節我們考慮非匹配的系統參數不確定因素，並分析非匹配的系統參數不確定因素對系統所產生之效應，然後透過選取順滑平面中的 **D** 值盡可能降低非匹配的系統參數不確定因素對系統所產生之效應。

在這節中考慮系統(3.12)且Q_{10}為定值，即

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})\mathrm{v} + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})\mathrm{v}^{\mathbf{2}} + \mathbf{d}_{\mathbf{m}} + \mathbf{d}_{\mathbf{u}} \tag{3.80}$$

以下我們分為三種情況討論。

假設 3. 5：$\overline{\mathrm{A}_1}$=$|\mathbf{Dg}_{\mathbf{2new}}|$，$\overline{\mathrm{B}_1}$=$[\mathbf{Dg}_{\mathbf{1new}} + 2\mathrm{u}_1\,\mathbf{Dg}_{\mathbf{2new}}]$，$\overline{\mathrm{C}_1}$=$|\mathbf{Dg}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})\alpha^* + \mathbf{Dg}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}){\alpha^*}^2 + \mathbf{Dd}_{\mathbf{u}}|$且$\Delta_1 = \overline{\mathrm{B}_1}^2 - 4\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1} > 0$

情況 A：$\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}$與$\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}$線性相依, $\mathbf{Dg}_{\mathbf{1new}} \neq 0$

參考表 3. 3，可得

$$\mathbf{d}_{\mathbf{m}} = \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})\alpha^* + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}){\alpha^*}^2 \tag{3.81}$$

將(3.81)代入(3.80)可得

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})(\mathrm{v} + \alpha^*) + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})(\mathrm{v}^{\mathbf{2}} + {\alpha^*}^2) + \mathbf{d}_{\mathbf{u}} \tag{3.82}$$

根據 ISMC 設計步驟[5][6]，系統(3.80)的順滑平面選取如下：

$$\sigma(\mathbf{e},\mathrm{t}) = \mathbf{D}\{\mathbf{e}(\mathrm{t}) - \mathbf{e}(\mathrm{t}_0)$$

$$- \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} [\mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}(\tau)) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e}(\tau))\mathrm{u}_1 + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}(\tau)){\mathrm{u}_1}^2]d\tau\} \tag{3.83}$$

其中$\mathbf{D} \in \Re^{\mathbf{1\times n}}$，$\mathrm{u}_1$可由(3.60)得到，我們對(3.64)微分，可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \mathbf{D}\,\dot{\mathbf{e}}(\mathrm{t}) - \mathbf{Df}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}) - \mathbf{Dg}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})\mathrm{u}_1 - \mathbf{Dg}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}){\mathrm{u}_1}^2 \\ &= \mathbf{D}[\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})(\mathrm{v} - \mathrm{u}_1) + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})(\mathrm{v}^2 - {\mathrm{u}_1}^2) + \mathbf{d}_{\mathbf{m}} + \mathbf{d}_{\mathbf{u}}] \\ &= \mathbf{D}[\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})(\mathrm{v} - \mathrm{u}_1 + \alpha^*) + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})\left(\mathrm{v}^2 - {\mathrm{u}_1}^2 + {\alpha^*}^2\right) + \mathbf{d}_{\mathbf{u}}]\end{aligned} \tag{3.84}$$

設計控制律

$$
v = \begin{cases} u_1 + \rho \dfrac{\sigma}{|\sigma|}, & 若\ \sigma \neq \mathbf{0} \\ u_1, & 若\ \sigma = \mathbf{0} \end{cases}
$$

當$\sigma \neq 0$，則在假設 3.5下

$$
\begin{aligned}
\sigma\dot{\sigma} &= \sigma\, \mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(u_1 + \rho\frac{\sigma}{|\sigma|} - u_1 + \alpha^*) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})((u_1 + \rho\frac{\sigma}{|\sigma|})^2 - {u_1}^2 + \alpha^{*2}) \\
&\quad + \mathbf{d_u}] \\
&= \rho^2\sigma\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e}) + \rho[\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})|\sigma| + 2\mathbf{Dg_{2new}}u_1|\sigma|] + \sigma[\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\alpha^* \\
&\quad + \mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})\alpha^{*2} + \mathbf{Dd_u}] \\
&\leq \rho^2\, |\mathbf{Dg_{2new}}| + \rho[\mathbf{Dg_{1new}}|\sigma| + 2\mathbf{Dg_{2new}}u_1|\sigma|] + |\sigma|[|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\alpha^* \\
&\quad + \mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})\alpha^{*2} + \mathbf{Dd_u}|] \\
&= |\sigma|[\rho^2\overline{A_1} + \rho\overline{B_1} + \overline{C_1}]
\end{aligned}
$$

由假設 3. 5 可知$\rho^2\overline{A_1} + \rho\overline{B_1} + \overline{C_1}$為判別式大於零且上凹之二次多項式，必存在$\rho$使得$\dot{\sigma}\sigma < 0$

我們欲求系統在順滑模式時對應的控制律v_{eq}。當系統處於順滑模式下時，$\sigma = \dot{\sigma} = 0$，我們可得

$$
{v_{eq}}^2 = -(\alpha^* - {u_1}^2) - \frac{1}{\mathbf{Dg_{2new}}}[\mathbf{Dg_{1new}}(v_{eq} + \alpha^* - u_1) + \mathbf{Dd_u}] \tag{3.85}
$$

將(3.85)代入系統(3.82)可得

$$
\begin{aligned}
\dot{e} &= \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(v_{eq} + \alpha^*) \\
&\quad + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})\left\{-(\alpha^* - {u_1}^2) - \frac{[\mathbf{Dg_{1new}}(v_{eq}+\alpha^*-u_1)+\mathbf{Dd_u}]}{\mathbf{Dg_{2new}}} + \alpha^{*2}\right\} + \mathbf{d_u} \\
&= \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e}){u_1}^2 \\
&\quad + \frac{[\mathbf{g_{1new}Dg_{2new}}(v_{eq}+\alpha^*) - \mathbf{g_{2new}Dg_{1new}}(v_{eq}+\alpha^*-u_1) - \mathbf{g_{2new}Dd_u}]}{\mathbf{Dg_{2new}}} + \mathbf{d_u} \\
&= \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e}){u_1}^2 + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})u_1 + \frac{[-\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})\mathbf{Dd_u}]}{\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})} + \mathbf{d_u}
\end{aligned}
$$

$$\Gamma(\mathbf{d_u}) = \frac{[-\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})\mathbf{D}\mathbf{d_u}]}{\mathbf{D}\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})} + \mathbf{d_u}$$
$$= [\mathrm{I} - \frac{\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})\mathbf{D}}{\mathbf{D}\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})}]\,\mathbf{d_u} \quad (3.86)$$

其中$\Gamma(\mathbf{d_u})$為系統(3.80)非匹配參數不確定因素的效應，且$\Gamma(\mathbf{d_u})$會隨狀態改變，我們只能試著調整 **D** 使得$\Gamma(\mathbf{d_u})$的效應最小。

當我們考慮$\mathbf{g_{1new}}$，$\mathbf{g_{2new}}$為常數時，我們選取 $\mathbf{D}=\mathbf{g_{2new}}^{+}$，則

$$\Gamma(\mathbf{d_u}) = \left[\mathrm{I} - \frac{\mathbf{g_{2new}}\mathbf{g_{2new}}^{+}}{\mathbf{g_{2new}}^{+}\mathbf{g_{2new}}}\right]\mathbf{d_u} = [\mathrm{I} - \mathbf{g_{2new}}\mathbf{g_{2new}}^{+}]\,\mathbf{d_u}$$

由[06]中證明可得$\| \mathrm{I} - \mathbf{g_{2new}}\mathbf{g_{2new}}^{+} \| = 1$，故

$$\Gamma(\mathbf{d_u}) = \mathbf{d_u}$$

由上式可知若當我們考慮$\mathbf{g_{1new}}$，$\mathbf{g_{2new}}$為常數時，我們選取 $\mathbf{D}=\mathbf{g_{2new}}^{+}$時，非匹配的參數不確定因素不會被放大。

情況 B： $\mathbf{Dg_{2new}} = \mathbf{0}$且 $\mathbf{Dg_{1new}} \neq \mathbf{0}$

參考表 3.3，可得

$$\mathbf{d_m} = \mathbf{g_{1new}}\alpha_1{}^* + \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2}) \tag{3.87}$$

將(3.87)代入(3.80)可得

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(v + \alpha_1{}^*) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})(v^2 + 2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2}) + \mathbf{d_u} \tag{3.88}$$

根據 ISMC 設計步驟[5][6]，系統(3.88)的順滑平面選取如下：

$$\sigma(\mathbf{e},t) = \mathbf{D}\{\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t_0) - \int_{t_0}^{t}[\mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}(\tau)) + \mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e}(\tau))u_1 + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e}(\tau))u_1{}^2]d\tau\} \tag{3.89}$$

其中$\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{1\times n}$，$u_1$可由(3.60)得到，我們對(3.89)微分，可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \mathbf{D}\,\dot{\mathbf{e}}(t) - \mathbf{Df_{new}}(\mathbf{e}) - \mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})u_1 - \mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})u_1{}^2\\ &= \mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(v - u_1) + \mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})(v^2 - u_1{}^2) + \mathbf{d_m} + \mathbf{d_u}]\\ &= \mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(v - u_1 + \alpha_1{}^*) + \mathbf{d_u}]\end{aligned} \tag{3.90}$$

設計控制律

$$v = \begin{cases} u_1 - \rho\dfrac{\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma}{|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma|}, & \text{若 } \sigma \neq \mathbf{0} \\ u_1\,, & \text{若 } \sigma = \mathbf{0} \end{cases}$$

當$\sigma \neq 0$，取$\rho > |\alpha_1{}^*| + \frac{|\mathbf{Dd_u}|}{|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})|}$

$$\begin{aligned}\sigma\dot{\sigma} &= \sigma\mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})\left(u_1 - \rho\frac{\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma}{|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma|} - u_1 + \alpha_1{}^*\right) + \mathbf{d_u}]\\ &= -|\sigma\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})|\rho + \sigma\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\alpha_1{}^* + \sigma\mathbf{Dd_u}\\ &\leq -|\sigma\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})|\rho + |\sigma\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})||\alpha_1{}^*| + |\sigma\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})|\frac{|\mathbf{Dd_u}|}{|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})|}\\ &\leq |\sigma\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})|\left(-\rho + |\alpha_1{}^*| + \frac{|\mathbf{Dd_u}|}{|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})|}\right) < 0\end{aligned}$$

我們欲求系統在順滑模式時對應的控制律v_{eq}。當系統處於順滑模式下時，$\sigma = \dot{\sigma} = 0$，我們可得

$$v_{eq} = u_1 - \alpha_1{}^* - \frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{1new}(e)}} \tag{3.91}$$

將(3.91)代入系統(3.88)可得

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= \mathbf{f_{new}(e)} + \mathbf{g_{1new}(e)}\left(u_1 - \alpha_1{}^* - \frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{1new}(e)}} + \alpha_1{}^*\right) \\
&\quad + \mathbf{g_{2new}(e)}\left[(u_1 - \alpha_1{}^*)^2 - 2(u_1 - \alpha_1{}^*)\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{1new}(e)}} + \left(\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{1new}(e)}}\right)^2 + 2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2}\right] \\
&\quad + \mathbf{d_u} \\
&= \mathbf{f_{new}(e)} + \mathbf{g_{1new}(e)}u_1 + \mathbf{g_{2new}(e)}u_1{}^2 + \mathbf{g_{1new}(e)}\left(-\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{1new}(e)}}\right) \\
&\quad + \mathbf{g_{2new}(e)}\left[-2(u_1 - \alpha_1{}^*)\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{1new}(e)}} + \left(\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{1new}(e)}}\right)^2\right] + \mathbf{d_u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\mathbf{d_u}) &= \mathbf{g_{1new}(e)}\left(-\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{1new}(e)}}\right) \\
&\quad + \mathbf{g_{2new}(e)}\left[-2(u_1 - \alpha_1{}^*)\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{1new}(e)}} + \left(\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{1new}(e)}}\right)^2\right] + \mathbf{d_u}
\end{aligned} \tag{3.92}$$

其中$\Gamma(\mathbf{d_u})$為系統(3.88)非匹配參數不確定因素的效應，且$\Gamma(\mathbf{d_u})$會隨狀態改變，我們只能在$\mathbf{Dg_{2new}} = \mathbf{0}$且$\mathbf{Dg_{1new}} \neq \mathbf{0}$的條件下調整$\mathbf{D}$值使得$\Gamma(\mathbf{d_u})$的效應最小。

情況 C： $\mathbf{Dg_{1new}} = \mathbf{0}$且 $\mathbf{Dg_{2new}} \neq \mathbf{0}$

假設 3.6：$\left|2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2}\right| < \rho_\beta$，$\left|\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{1new}}}\right| < \rho_y$，$|u_1|^2 > \rho_\beta + \rho_y$

參考表 3.3，可得

$$\mathbf{d_m} = \mathbf{g_{1new}}\alpha_1{}^* + \mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2}) \tag{3.93}$$

將(3.87)代入(3.80)可得

$$\dot{e} = \mathbf{f_{new}(e)} + \mathbf{g_{1new}(e)}(v + \alpha_1{}^*) + \mathbf{g_{2new}(e)}(v^2 + 2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2}) + \mathbf{d_u} \tag{3.94}$$

根據 ISMC 設計步驟[5][6]，系統(3.94)的順滑平面選取如下：

$$\sigma(\mathbf{e},t)=\mathbf{D}\{\mathbf{e}(t)-\mathbf{e}(t_0)$$
$$-\int_{t_0}^{t}[\mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}(\tau))+\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e}(\tau))u_1+\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e}(\tau)){u_1}^2]d\tau\} \tag{3.95}$$

其中$\mathbf{D}\in\mathfrak{R}^{\mathbf{1\times n}}$，$u_1$可由(3.60)得到，我們對(3.95)微分，可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}&=\mathbf{D}\,\dot{\mathbf{e}}(t)-\mathbf{Df_{new}}(\mathbf{e})-\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})u_1-\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e}){u_1}^2\\&=\mathbf{D}[\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e})(v-u_1)+\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})(v^2-{u_1}^2)+\mathbf{d_m}+\mathbf{d_u}]\\&=\mathbf{D}[\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})\left(v^2+2u_1{\alpha_1}^*-{\alpha_1}^{*2}-{u_1}^2\right)+\mathbf{d_u}]\end{aligned} \tag{3.96}$$

設計控制律

$$v=\begin{cases}u_1+\rho\dfrac{\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})\sigma}{|\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})\sigma|}, & \text{若 } \sigma\neq\mathbf{0}\\ u_1\,, & \text{若 } \sigma=\mathbf{0}\end{cases}$$

當$\sigma\neq 0$，在假設 3.6 下

$$\begin{aligned}\sigma\dot{\sigma}=\;&\sigma\mathbf{D}[\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e})\left({u_1}^2+2u_1\rho\frac{\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})\sigma}{|\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})\sigma|}+\rho^2+2u_1{\alpha_1}^*-{\alpha_1}^{*2}-{u_1}^2\right)+\mathbf{d_u}]\\&\leq|\sigma\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})|\rho^2+2|u_1||\sigma\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})|\rho\\&\quad+|\sigma\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})|\left(2u_1{\alpha_1}^*-{\alpha_1}^{*2}\right)+|\sigma\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})|\left|\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})}\right|\\&\leq|\sigma\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})|\left(\rho^2+2|u_1|\rho+\rho_\beta+\rho_y\right)<0\end{aligned}$$

由假設 3.6 可知$(2|u_1|)^2-4(\rho_\beta+\rho_y)=4(|u_1|^2-(\rho_\beta+\rho_y))>0$，$\rho^2+2|u_1|\rho+\rho_\beta+\rho_y$為判別式大於零且上凹之二次多項式，必存在$\rho$使得$\dot{\sigma}\sigma<0$

我們欲求系統在順滑模式時對應的控制律v_{eq}。當系統處於順滑模式下時，$\sigma=\dot{\sigma}=0$，我們可得

$${v_{eq}}^2=(u_1-{\alpha_1}^*)^2-\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})} \tag{3.97}$$

取$v_{eq}=\pm\sqrt{(u_1-{\alpha_1}^*)^2-\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{2new}}(\mathbf{e})}}$，代入系統(3.94)可得

$$\dot{e} = \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})\left(\pm\sqrt{(u_1-\alpha_1{}^*)^2 - \frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{2new}(e)}}} + \alpha_1{}^*\right)$$

$$+\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})[(u_1-\alpha_1{}^*)^2 - \frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{2new}(e)}} + 2u_1\alpha_1{}^* - \alpha_1{}^{*2}]$$

$$+\mathbf{d_u}$$

$$= \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})u_1 + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})u_1{}^{\mathbf{2}}$$

$$+\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})\left(\pm\sqrt{(u_1-\alpha_1{}^*)^2 - \frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{2new}(e)}}} + \alpha_1{}^* - u_1\right)$$

$$+\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})(-\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{2new}(e)}}) + \mathbf{d_u}$$

$$\Gamma(\mathbf{d_u}) = \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})\left(\pm\sqrt{(u_1-\alpha_1{}^*)^2 - \frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{2new}(e)}}} + \alpha_1{}^* - u_1\right)$$

$$+\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e})(-\frac{\mathbf{Dd_u}}{\mathbf{Dg_{2new}(e)}}) + \mathbf{d_u} \tag{3.98}$$

其中$\Gamma(\mathbf{d_u})$為系統(3.94)非匹配參數不確定因素的效應，且$\Gamma(\mathbf{d_u})$會隨狀態改變，我們只能在$\mathbf{Dg_{1new}} = \mathbf{0}$且$\mathbf{Dg_{2new}} \neq \mathbf{0}$的條件下調整$\mathbf{D}$值使得$\Gamma(\mathbf{d_u})$的效應最小。

第四章

應用於變壓器控制電力系統的電壓調節研究

在本章中我們將應用 3.2 節中設計的控制律於 Dobson 和 Chiang[8]的電力系統模型，在原始模型中加入一個變壓器[7]，如 2.3 節所介紹的電力系統模型，以變壓器為控制輸入點，藉由調整變壓器的匝數比，使系統負載電壓能穩定在我們希望的電壓值，來達到電壓調節的功能及內部狀態穩定的目的。在 4.1 節中，我們整理 Dobson 和 Chiang 的電力系統模型加入變壓器之系統動態方程式。在 4.2 節中，我們將 3.3 節針對單輸入單輸出的二次多項式系統設計的控制律應用於電力系統中，並對模擬結果進行討論與分析。在 4.3 節中，我們將比較 ISMC、SMC 及 CLF 控制律應用於電力系統時的性能表現。

4.1 系統動態方程式

在 2.3 節中，將 Dobson 和 Chiang [8]的電力系統模型加入一個變壓器[7]，經過參數的選取與整理得到(2. 14)-(2. 17)式，在本論文中，我們假設$\mathbf{d}$只來自於Q_1的變動，我們可將(2. 14)-(2. 17)表示成如下的形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x})u + \mathbf{g_2}(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p}(t) \tag{4. 1}$$

其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) \\ f_4(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \mathbf{g_1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{1,1}(\mathbf{x}) \\ g_{1,2}(\mathbf{x}) \\ g_{1,3}(\mathbf{x}) \\ g_{1,4}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \mathbf{g_2}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{2,1}(\mathbf{x}) \\ g_{2,2}(\mathbf{x}) \\ g_{2,3}(\mathbf{x}) \\ g_{2,4}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 33.3333Q_1 \\ -5.2288Q_1 \end{pmatrix}$$

$$f_1(\mathbf{x}) = x_2$$

$$f_2(\mathbf{x}) = 1.8807 - 0.1667x_2$$

$$f_3(\mathbf{x}) = 43.3333 - 93.3333x_4 + 334.1297{x_4}^2$$
$$-666.6667x_4\cos(0.0873 - x_3)$$

$$f_4(\mathbf{x}) = -7.0327 + 14.5229x_4 - 53.0961{x_4}^2$$
$$+104.5752x_4\cos(0.0873 - x_3) + 7.8431x_4\sin(0.0873 - x_3)$$

$$g_{1,1}(\mathbf{x}) = 0$$

$$g_{1,2}(\mathbf{x}) = 16.6667x_4\sin(0.0873 - x_1 + x_3)$$

$$g_{1,3}(\mathbf{x}) = -166.6667x_4\cos(0.0873 + x_1 - x_3)$$

$$g_{1,4}(\mathbf{x}) = 26.1438x_4\cos(0.0873 + x_1 - x_3)$$
$$+1.9608x_4\sin(0.0873 + x_1 - x_3)$$

$$g_{2,1}(\mathbf{x}) = 0$$

$$g_{2,2}(\mathbf{x}) = 0$$

$$g_{2,3}(\mathbf{x}) = 166.0325{x_4}^2$$

$$g_{2,4}(\mathbf{x}) = -26.2152{x_4}^2$$

$p_1 = 0$

$p_2 = 0$

$p_3 = 33.3333Q_1$

$p_4 = -5.2288Q_1$

其中Q_1為系統中的一個參數，代表負載的無效功率消耗，我們可以將Q_1以$Q_1 = Q_{10} + \Delta Q_1$表示，其中$Q_{10}$代表實際的負載無效功率消耗，$Q_{10}$代表量測的負載無效功率消耗，$\Delta Q_1$代表負載無效功率的誤差量。

則我們可以將$\mathbf{d}$表示成如下的形式:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{d}$$

其中

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 33.333Q_{10} \\ -5.2288Q_{10} \end{pmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 33.333\Delta Q_1 \\ -5.2288\Delta Q_1 \end{pmatrix}$$

則電力系統可以表示成如下的形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x})u + \mathbf{g_2}(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p_0} + \mathbf{d} \tag{4. 2}$$

在此，我們選擇系統電壓為系統輸出

$$y = x_4 \tag{4. 3}$$

我們定義電壓調節值$y_d \equiv 1$

4.2 控制律設計

4.2.1 系統平衡點分析

考慮無干擾系統如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g_1}(\mathbf{x})\mathrm{u} + \mathbf{g_2}(\mathbf{x})\mathrm{u}^2 + \mathbf{p_0} \tag{4. 4}$$

由於控制目標是讓負載電壓固定穩定在 1，我們針對無干擾系統設計預備控制律 u_0使負載電壓固定在 1，並找出對應之平衡點$\mathbf{x_0}$，則必須滿足下列

$$0 = \mathrm{x}_{20} \tag{4. 5}$$

$$0 = 1.8807 - 0.1667\mathrm{x}_{20} + 16.6667\sin(0.0873 - \mathrm{x}_{10} + \mathrm{x}_{30})\mathrm{u}_0 \tag{4. 6}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & 284.1297 - 666.6667\cos(0.0873 - \mathrm{x}_{30}) + 33.3333\mathrm{Q}_{10} \\ & -166.6667\cos(0.0873 - \mathrm{x}_{10} + \mathrm{x}_{30})\,\mathrm{u}_0 + 166.0325{\mathrm{u}_0}^2 \end{aligned} \tag{4. 7}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & -45.6059 + 104.5752\cos(0.0873 - \mathrm{x}_{30}) \\ & +7.8431\sin(0.0873 - \mathrm{x}_{30}) - 5.2288\mathrm{Q}_{10} \\ & +[26.1438\cos(0.0873 + \mathrm{x}_{10} - \mathrm{x}_{30}) \\ & +1.9608\sin(0.0873 + \mathrm{x}_{10} - \mathrm{x}_{30})]\,\mathrm{u}_0 - 26.2152{\mathrm{u}_0}^2 \end{aligned} \tag{4. 8}$$

由(4. 5)-(4. 8)中，要解得符合的平衡點$\mathbf{x_0}$與u_0並非容易，且x_0與u_0的值會隨Q_{10}值變化而變化，由(4. 5) 可以得知$\mathrm{x}_{20} = 0$，在論文[17]利用”AUTO”來求得(4. 5)-(4. 8)的平衡點與u_0。經由”AUTO”計算後，我們可以得到兩組平衡點與u_0為正的解，分別為$\{\mathrm{x}_{01} = [\mathrm{x}_{011}, 0, \mathrm{x}_{013}]^{\mathrm{T}}$、$\mathrm{u}_{01}\}$及$\{\mathrm{x}_{02} = [\mathrm{x}_{021}, 0, \mathrm{x}_{023}]^{\mathrm{T}}$、$\mathrm{u}_{02}\}$，我們將兩組平衡點與$\mathrm{u}_0$分別以實線與虛線來表示如圖 4. 1 所示，同時也可以得到兩組衡點與u_0為負的解，我們將兩組平衡點與u_0分別以實線與虛線來表示如圖 4. 2 所示，但u_0為負，由於控制輸入點為變壓器匝數比倒數，u_0為負得到負的匝數比與實際系統不符，故選用u_0為正的解。由圖 4. 1 我們可以觀察在$\mathrm{Q}_{10} \geq 12.45$就無平衡點與$\mathrm{u}_0$存在。

接下來我們將利用系統線性化來判斷所得的平衡點是否為穩定的平衡點。

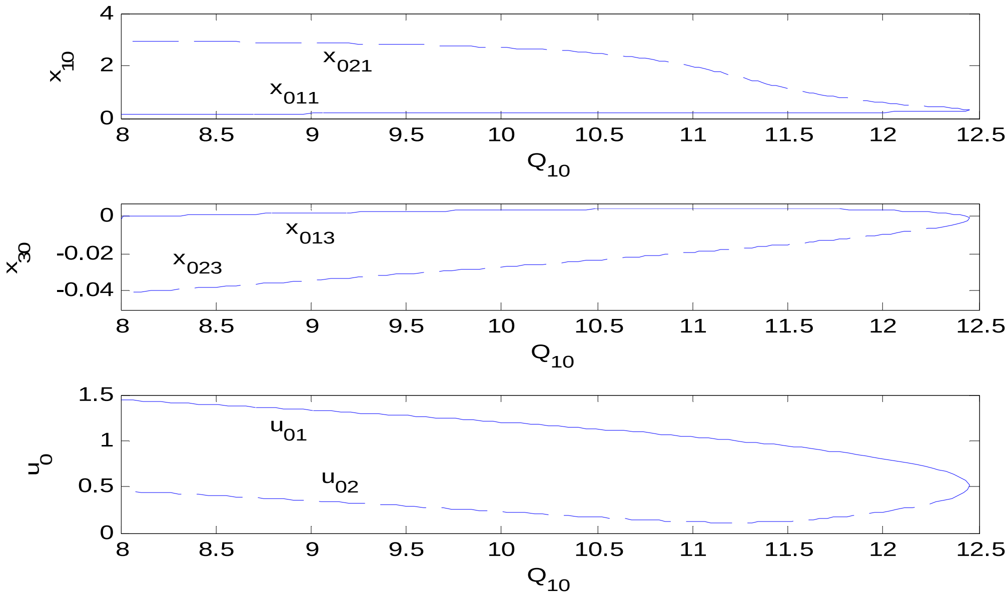


圖 4. 1: u_0為正值，平衡點$\mathbf{x_0}$與u_0對Q_{10}的變化

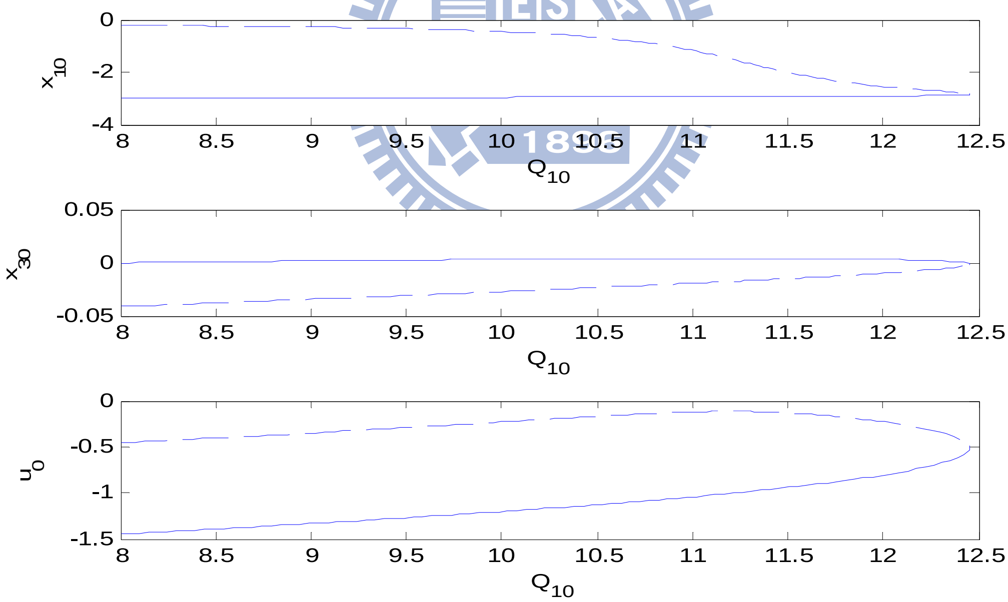


圖 4. 2: u_0為負值，平衡點$\mathbf{x_0}$與u_0對Q_{10}的變化

4.2.2 穩定點分析

論文[17]利用 5.2.1 節所得的平衡點與u_0進行線性化分析，來判斷系統在$x_4=1$是否有穩定平衡點存在，我們令$\mathbf{e}=[e_1,e_2,e_3]$，在此

$$e_1=x_1-x_{10}$$

$$e_2=x_2-x_{20}$$

$$e_3=x_3-x_{30}$$

其中(x_{10},x_{20},x_{30})分別代表(x_1,x_2,x_3)的平衡點，將系統(4. 5)-(4. 8)對平衡點進行線性化，可得

$$\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{A_0}\mathbf{e} \tag{4. 9}$$

其中

$$\mathbf{A_0}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & 0 & a_{33}\end{bmatrix}$$

$a_{21}=-16.6667\cos(0.0873-x_{10}+x_{30})u_0$

$a_{22}=-0.1667$

$a_{23}=16.6667\cos(0.0873-x_{10}+x_{30})u_0$

$a_{31}=-166.6667\sin(0.0873+x_{10}-x_{30})u_0$

$a_{33}=-666.6667\sin(0.0873-x_{30})-166.6667\sin(0.0873+x_{10}-x_{30})u_0$

將由 4.2.1 節所得的平衡點x_{01}、x_{02}與控制律u_{01}、u_{02}分別代入(4. 9)，其中平衡點為x_{01}且控制律為u_{01}時，所得到$\mathbf{A_0}$特徵值的實部對Q_{10}變化如圖 4. 3(a)所示，由圖 4. 3(a)我們可以知道$\mathbf{A_0}$特徵值的實部皆在左半平面，故預備控制律為u_{01}所得的平衡點x_{01}為一個穩定的平衡點：當平衡點為x_{02}且控制律為u_{02}時，所得到$\mathbf{A_0}$特徵值的實部對Q_{10}變化如圖 4. 3(b)所示，由圖 4. 3(b)我們可以知道當$Q_{10}\le 11.2$時，$\mathbf{A_0}$特徵值的實部皆在右半平面，故當$Q_{10}\le 11.2$且預備控制律為u_{02}時所得的平衡點x_{02}為一個不穩定的平衡點。

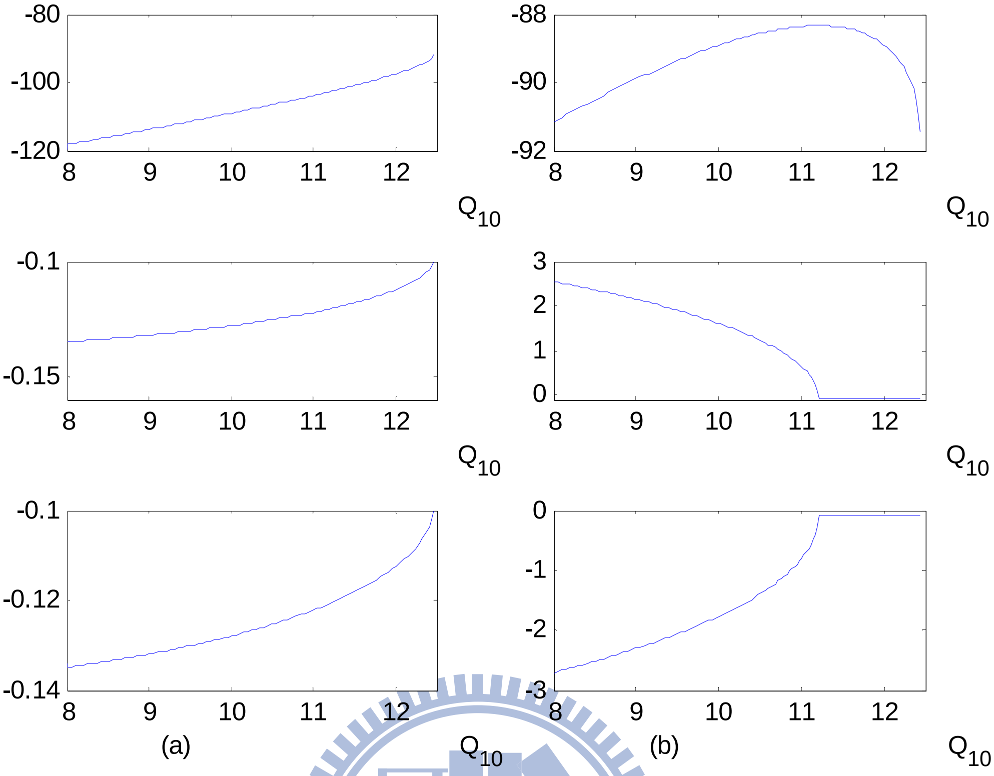


圖 4. 3: (a)左邊三圖代表平衡點為x_{01}控制律為u_{01}，Q_{10}對三個特徵值的影響

(b)右邊三圖代表平衡點為x_{02}控制律為u_{02}，Q_{10}對三個特徵值的影響

4.2.3 控制律設計

在 4.2.1 節與在 4.2.2 節中，我們針對無干擾系統(4. 4)設計出預備控制律$u_0(t)$，使負載電壓固定在 1，並找出對應的穩定平衡點$\mathbf{x}_0(t)$。接下來我們利用 ISMC 設計穩定控制律，我們需要將追蹤問題變成穩定化問題，做法如下：設計系統(4. 2)的穩定控制律為

$$u = u_0(t) + v \tag{4. 10}$$

其中 v 為系統狀態在有干擾下能克服干擾使系統狀態收斂到平衡點$\mathbf{x}_0$。我們定義狀態誤差為：

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t) \tag{4. 11}$$

當$\mathbf{e} \to 0$時，代表$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0(t)$，而$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0(t)$則隱含達成$x_4 \to 1$，其中$\mathbf{x}_0(t) =$

$[x_{10}\ \ 0\ \ x_{30}\ \ 1]$，$\mathbf{x}_0(t)$的值會隨$Q_{10}$變化，$\mathbf{x}$ 為系統狀態。將(4. 10)與(4. 11)代入(4. 2)整理可得下式，

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e},t) + \mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e},t)v + \mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e},t)v^2 + \mathbf{d} \tag{4. 12}$$

其中

$$\mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e},t) = \mathbf{f}\,(\mathbf{e}+\mathbf{x_0}(t)) + \mathbf{g_1}(\mathbf{e}+\mathbf{x_0}(t))u_0 + \mathbf{g_2}(\mathbf{e}+\mathbf{x_0}(t)){u_0}^2 + p_0 - \frac{d\mathbf{x_0}(t)}{dt}$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e},t)=\mathbf{g_1}(\mathbf{e}+\mathbf{x_0}(t)) + 2\mathbf{g_2}(\mathbf{e}+\mathbf{x_0}(t))u_0(t)$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e},t) = \mathbf{g_2}(\mathbf{e}+\mathbf{x_0}(t))$$

$$f_{new}(\mathbf{e},t) = \begin{pmatrix} f_{new,1}(\mathbf{e},t) \\ f_{new,2}(\mathbf{e},t) \\ f_{new,3}(\mathbf{e},t) \\ f_{new,4}(\mathbf{e},t) \end{pmatrix} \qquad g_{1new}(\mathbf{e},t) = \begin{pmatrix} g_{1new,1}(\mathbf{e},t) \\ g_{1new,2}(\mathbf{e},t) \\ g_{1new,3}(\mathbf{e},t) \\ g_{1new,4}(\mathbf{e},t) \end{pmatrix}$$

$$g_{2new}(\mathbf{e},t) = \begin{pmatrix} g_{2new,1}(\mathbf{e},t) \\ g_{2new,2}(\mathbf{e},t) \\ g_{2new,3}(\mathbf{e},t) \\ g_{2new,4}(\mathbf{e},t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

$$f_{new,1}(\mathbf{e},t) = e_2 - \frac{d\mathbf{x_{10}}(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} f_{new,2}(\mathbf{e},t) &= 1.8807 - 0.1667e_2 \\ &\quad +16.6667(e_4+1)\sin(0.0873 - e_1 - x_{10}(t) + e_3 + x_{30}(t))u_0(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{new,3}(\mathbf{e},t) &= 284.1297 + 574.9261e_4 + 334.1297{e_4}^2 \\ &\quad -666.6667(e_4+1)\cos(0.0873 - e_3 - x_{30}(t)) \\ &\quad -166.6667(e_4+1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))u_0(t) \\ &\quad +166.0325(e_4+1)^2{u_0}^2 + 33.3333Q_{10} - \frac{d\mathbf{x_{30}}(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{new,4}(\mathbf{e},t) &= -45.6059 - 91.6693e_4 - 53.0961{e_4}^2 \\ &\quad +104.5752(e_4+1)\cos(0.0873 - e_3 - x_{30}(t)) \\ &\quad +7.8431(e_4+1)\sin(0.0873 - e_3 - x_{30}(t)) \\ &\quad +26.1438(e_4+1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))\,u_0(t) \\ &\quad +1.9608(e_4+1)\sin(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))\,u_0(t) \end{aligned}$$

$$-26.2152(e_4+1)^2 {u_0}^2 - 5.2288Q_{10}$$

$$g_{1new,1}(\mathbf{e},t)=0$$

$$g_{1new,2}(\mathbf{e},t)=16.6667(e_4+1)\sin(0.0873-e_1-x_{10}(t)+e_3+x_{30}(t))$$

$$g_{1new,3}(\mathbf{e},t)=-166.6667(e_4+1)\cos(0.0873+e_1+x_{10}(t)-e_3-x_{30}(t))$$

$$+332.065(e_4+1)^2u_0(t)$$

$$g_{1new,4}(\mathbf{e},t)=26.1483(e_4+1)\cos(0.0873+e_1+x_{10}(t)-e_3-x_{30}(t))$$

$$+1.9608(e_4+1)\sin(0.0873+e_1+x_{10}(t)-e_3-x_{30}(t))$$

$$-52.4304(e_4+1)^2u_0(t)$$

$$g_{2new,1}(\mathbf{e},t)=0$$

$$g_{2new,2}(\mathbf{e},t)=0$$

$$g_{2new,3}(\mathbf{e},t)=166.0325(e_4+1)^2$$

$$g_{2new,4}(\mathbf{e},t)=-26.2152(e_4+1)^2$$

$$d_1=0$$

$$d_2=0$$

$$d_3=33.3333\Delta Q_1$$

$$d_4=-5.2288\Delta Q_1$$

此時輸出追蹤問題變成穩定化問題。此外，系統(4. 12)若不考慮干擾，我們稱之為標稱系統(nominal system)如下

$$\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{f}_{\mathbf{new}}(\mathbf{e},t)+\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e},t)u_1+\mathbf{g}_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e},t){u_1}^{\mathbf{2}} \tag{4. 13}$$

其中u_1為標稱控制(nominal control)，我們依照 3. 3. 1 節中利用LQR設計控制律u_1使系統(4. 13)區域漸進穩定。

在 3. 3. 2 節中我們分別考慮情況 A、情況 B 與情況 C 下，利用 ISMC 設計控制律v，使系統在有干擾下能夠克服干擾使狀態誤差收斂到零。因為系統(4. 12)不存在矩陣**D**滿足情況 A 與情況 C，但存在矩陣 D 滿足情況 B，故我們考慮系統屬於情況 B 下設計控制律。

以下我們考慮Q_{10}固定且在情況 B 下， $\mathbf{Dg_{2new}}=0$且$\mathbf{Dg_{1new}}\neq 0$ ，因為$\mathbf{g_{2new}}$向量的方向不會隨狀態或時間而變動，我們先選取$\mathbf{D}$滿足$\mathbf{Dg_{2new}}=0$。

$\mathbf{g_{2new}}$的單位向量$\frac{\mathbf{g_{2new}}}{\|\mathbf{g_{2new}}\|}=\begin{pmatrix}0\\0\\0.9878\\-0.156\end{pmatrix}$，故選取

$$\mathbf{D}=(0\quad k\quad 0.1579\quad 1) \tag{4. 14}$$

其中$k\in\Re$。我們可得

$$\begin{aligned}\mathbf{Dg_{1new}}=&\,k16.6667(e_4+1)\sin(0.0873-e_1-x_{10}+e_3+x_{30})\\&-166.6667(e_4+1)\cos(0.0873+e_1+x_{10}-e_3-x_{30})\\&+332.065(e_4+1)^2u_0\\&-0.1579\,[26.1483(e_4+1)\cos(0.0873+e_1+x_{10}-e_3-x_{30})\\&+1.9608(e_4+1)\sin(0.0873+e_1+x_{10}-e_3-x_{30})\\&-52.4304(e_4+1)^2u_0]\end{aligned} \tag{4. 15}$$

我們可以知道滿足(4. 15)式將只受到e_1、e_3、e_4及u_0影響，其中u_0會隨Q_{10}而變動。滿足情況 B 的區域為$\Omega(\mathbf{e})=\{\mathbf{e}|\mathbf{Dg_{1new}}\neq 0\}$，如圖 4. 4 中的白色區域。因為在$e_1,e_3$方向上，圖形是週期性的，因此我們擷取$e_1=-\pi\sim\pi, e_3=-\pi\sim\pi$的區域來表示。由圖 4. 4 可看出 k 值不會影響$\Omega(\mathbf{e})$的區域大小；

接下來根據表 3. 3 可得匹配的系統參數不確定因素為

$$\mathbf{d_m}=\mathbf{g_{1new}}\alpha_1^{*}+\mathbf{g_{2new}}(2u_1\alpha_1^{*}-\alpha_1^{*2}) \tag{4. 16}$$

其中α_1^{*}的求法如下：考慮$P_4(\alpha_1)=(\mathbf{d}-(\mathbf{g_{1new}}\alpha_1+\mathbf{g_{2new}}\alpha_1^2)^T(\mathbf{d}-\mathbf{g_{1new}}\alpha_1+(\mathbf{g_{2new}}\alpha_1^2)=a_1\alpha_1^4+a_2\alpha_1^3+a_3\alpha_1^2+a_4\alpha_1+a_5$根據流程圖 3.14 即可求出$\alpha_1^{*}$ 。

在選定$\mathbf{d_m}$形式之後，我們利用 3.3.2 節中在情況 B 下設計針對有干擾系統之 ISMC 控制律。順滑平面選取如下：

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{e},t)=&\,\mathbf{D}\{\mathbf{e}(t)-\mathbf{e}(t_0)\\&-\int_{t_0}^{t}[\mathbf{f_{new}}(\mathbf{e}(\tau))+\mathbf{g_{1new}}(\mathbf{e}(\tau))u_1+\mathbf{g_{2new}}(\mathbf{e}(\tau))u_1^{2}]d\tau\}\end{aligned} \tag{4. 17}$$

其中$\mathbf{D} \in \Re^{1\times 4}$

設計控制律如下

$$v = \begin{cases} u_1 - \rho \dfrac{\mathbf{D}\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})\sigma}{|\mathbf{D}\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})\sigma|}, & \text{若 } \sigma \neq 0 \\ u_1\,, & \text{若 } \sigma = 0 \end{cases} \tag{4. 18}$$

其中系統(4. 12)只考慮匹配的不確定因素則$\rho > |\alpha_1{}^*|$；若系統(4. 12)考慮非匹配的不確定因素則$\rho > |\alpha_1{}^*| + \frac{|\mathbf{D}\mathbf{d}_{\mathbf{u}}|}{|\mathbf{D}\mathbf{g}_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e})|}$

4.2.4 模擬結果

在電力系統電壓調節中，為了減輕積分順滑模控制的切跳現象(chattering)，我們將控制律(4. 18)修改為如下形式：

$$v=\begin{cases} u_1-\rho\dfrac{\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma}{|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma|}, 若|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma|\geq\varepsilon \\ u_1-\rho\dfrac{\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma}{\varepsilon}, 若|\mathbf{Dg_{1new}}(\mathbf{e})\sigma|<\varepsilon \end{cases} \tag{4. 19}$$

且取邊界寬度度(boundary layer width) $\varepsilon=0.01$。下面的討論我們首先對系統沒有參數不確定因素與外在干擾，即$\mathbf{d}=\mathbf{0}$的情況來討論，再來針對$\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$且系統只有匹配的參數不確定因素與外在干擾，即$\mathbf{d_u}=\mathbf{0}$的情況來進行探討，最後考慮$\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$且系統有非匹配的參數不確定因素與外在干擾，即$\mathbf{d_u}\neq\mathbf{0}$的情況來分析不同 **D** 的選取對非匹配效應的影響。

4.2.4.1 系統沒有參數不確定因素與外在干擾($\mathbf{d}=\mathbf{0}$)

我們首先考慮$\Delta Q_1=0$的情況，選取$\mathbf{D}=[0,0.1,1,-0.1579]$且為了展示起見，我們假設$Q_{10}=9$，由於$Q_{10}$為定值，使無干擾系統電壓固定在 1，所得的平衡點與u_0皆為固定值。我們選定初始狀態$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0}=[0.4,0.5,0.3,1.2]$進行模擬，此模擬主要是觀察初始電壓誤差為正值時，是否能達成電壓調節並使其他狀態收斂至平衡點$\mathbf{x}_0$，模擬結果如圖 4. 5 所示。圖 4. 5(a)是控制過程中的Q_1值，圖 4. 5(b)-圖 4. 5(e)分別是四個狀態的變化情形，圖 4. 5(f)-圖 4. 5(i)分別是四個狀態誤差的變化情形，圖 4. 5(j)為順滑變數σ，圖 4. 5(k)為控制過程中的 u 值。圖 4. 5(e)我們可以看出電壓由 1.2 收斂至 1，由圖 4. 5 (f)-圖 4. 5(i)可以看出狀態誤差會收斂到 0，達到內部狀態穩定的目的。接下來，我們選定初始狀態$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0}=[0.4,0.2,0.1,0.8]$進行模擬，此模擬主要是觀察初始電壓誤差為負值時，是否能達成電壓調節並使其他狀態收斂至平衡點$\mathbf{x}_0$，模擬結果如圖 4. 6 所示。圖 4. 6(e)我們可以看出電壓由 0.8 收斂至 1，由圖 4. 6 (f)- 圖 4. 6 (i)可以看出狀態誤差會收斂到 0，達到內部狀態穩定

的目的。

4.2.4.2 系統只有匹配的參數不確定因素與外在干擾($\mathbf{d_u = 0}$)

我們考慮$\Delta Q \neq 0$且$d_u = 0$的情況，選取$\mathbf{D} = [0\ ,0.1,1,-0.1579\ ]$且為了展示起見，我們假設$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2$，由於$Q_{10}$為定值，使無干擾系統電壓固定在 1，所得的平衡點與u_0皆為固定值，且$\mathbf{d} = (0,0,33.3333,-5.2288)^T \Delta Q_1$，故$\| d \| = 6.75$。選定初始狀態$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0} = [0.5,0.3,0.3,1.3]$進行模擬，模擬結果如圖 4.7 所示。圖 4.7 (a)是控制過程中的Q_1值，圖 4.7 (b)為$\mathbf{d}$、$\mathbf{d_m}$、$\mathbf{d_u}$的範數，圖 4.7 (c)-圖 4.7 (f)分別是四個狀態的變化情形，圖 4.7 (g)- 圖 4.7 (j)分別是四個狀態誤差的變化情形，圖 4.7 (k)為順滑變數σ，圖 4.7 (l)為控制過程中的 u 值。圖 4.7 (b)我們可以觀察到$\| \mathbf{d} \|$與$\| \mathbf{d_m} \|$的值非常接近，且$\| d_u \|$趨近於零，而圖 4.7 (f)我們可看出電壓由 1.3 收斂至 1，由圖 4.7 (g)- 圖 4.7 (j)可以看出狀態誤差會收斂到 0，達到內部狀態穩定的目的。接下來我們考慮ΔQ_1會隨時間變動之隨機訊號，展示起見我們假設$Q_{10} = 9$，ΔQ_1是介於-0.2~0.2之間的隨機訊號，初始狀態$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0} = [0.5,0.3,0.3,1.3]$進行模擬，模擬結果如圖 4.9 所示。圖 4.8 中$\| d_u \|$趨近於零，故可知$\mathbf{d_m}$與$\mathbf{d}$非常相近，而由圖 4.9 (e)我們可以看出電壓由 1.3 收斂至 1，且圖 4.9 (f)- 圖 4.9 (i)可以看出狀態誤差會收斂到 0，達到內部狀態穩定的目的。最後我們考慮ΔQ_1會隨時間變動之正弦訊號，展示起見我們假設$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2\sin(5t)$，初始狀態$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0} = [0.5,0.3,0.3,1.3]$進行模擬，模擬結果如圖 4.11 所示。圖 4.10 中$\| d_u \|$非常小，故可知$\mathbf{d_m}$與$\mathbf{d}$非常相近，由圖 4.11 (e)我們可以看出電壓由 1.3 收斂至 1，且圖 4.11 (f)- 圖 4.11 (i)可以看出狀態誤差會收斂到 0，達到內部狀態穩定的目的。

4.2.4.3 系統有非匹配的參數不確定因素與外在干擾($\mathbf{d_u} \neq \mathbf{0}$)

我們考慮$\Delta Q \neq 0$且$d_u \neq 0$的情況，選取$\mathbf{D} = [0\ ,0.1,1,-0.1579\ ]$且選定$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2$，由於$Q_{10}$為定值，使無干擾系統電壓固定在 1，所得的平衡點與u_0皆為固定值。選定初始狀態$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0} = [0.3,0.5,0.2,0.8]$進行模擬，模擬結果如圖 4. 12。圖 4. 12(a)是控制過程中的Q_1值，圖 4. 12 (b)- 圖 4. 12 (e)分別是四個狀態的變化情形，圖 4. 12 (f)- 圖 4. 12 (i)分別是四個狀態誤差的變化情形，圖 4. 12 (j)為順滑變數σ，圖 4. 12 (k)為控制過程中的 u 值。由圖 4. 12 (f)- 圖 4. 12 (i)可以看出非匹配的參數不確定因素造成狀態誤差$\mathbf{e} \rightarrow [0.005,-0,0.0026,-0.035]$ ，雖然$\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$，但$e_1, e_2, e_3, e_4$的絕對值都能收斂至某個範圍內。在圖 4. 13 中我們選取$\mathbf{D} = [0\ ,0.38,1,-0.1579\ ]$時，狀態誤差$\mathbf{e} \rightarrow [0.0004,0,-0.0012,-0.00001]$，由此可見我們可能可以透過 **D** 的選取降低非匹配效應(unmatched effect)，然而如何有效的選取 **D** 使非匹配效應能最小，將是未來研究方向。

4.3 控制律比較

4.3.1 SMC 控制律設計

電壓調節值$y_d \to 1$，根據論文[4]我們可由(2. 3)、(4. 2)可得到順滑平面為

$$s(t) = x_4 - 1$$

並且可以得到

$$\begin{aligned}\dot{s}(t) &= \dot{x}_4 \\ &= f_4(\mathbf{x}) + g_{1,4}(\mathbf{x})u + g_{2,4}(\mathbf{x})u^2 + p_{40} + d_4 \\ &= \alpha u^2 + \beta u + \gamma + d_4 \end{aligned} \tag{4. 20}$$

其中$\alpha = g_{2,4}(\mathbf{x})$，$\beta = g_{1,4}(\mathbf{x})$，$\gamma = f_4(\mathbf{x}) + p_{40}$。一般來說 d 是無法預測的，定義$\Delta^*$為二次多項式(4. 30)的判別式

$$\Delta^* = \beta^2 - 4\alpha\gamma \tag{4. 21}$$

由(4. 2)式可以知道$\alpha = -26.2152{x_4}^2$，由α的形式可知道在控制期間α會小於 0，除非發生電壓崩潰的情況，滿足**假設 2. 1**。$|\nabla h \cdot d_4| = |d_4| \le 5.2288|\Delta Q_1| = \kappa(\mathbf{x}, t)$ 滿足**假設 2. 2**，我們知道若存在某個正數η，使控制期間$\frac{\Delta^*}{4\cdot|\alpha|} - \kappa(\mathbf{x}, t) - \eta > 0$，則可以滿足**假設 2. 3**。因此，根據*定理 2. 1*，有兩種控制律可以達到控制目的，在此我們選取控制律為

$$u = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta^*}}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta^*}}{2|\alpha|}\operatorname{sgn}(s(t)) \tag{4. 22}$$

在電力系統電壓調節中，為了減輕順滑模控制的切跳現象(chattering)，我們將控制律(4. 22)修改為如下形式：

$$u = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta^*}}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta^*}}{2\cdot|\alpha|}\operatorname{sgn}\left(\frac{s(t)}{\varepsilon}\right) \tag{4. 23}$$

且取邊界寬度度(boundary layer width) $\varepsilon = 0.01$。

4.3.2 CLF 控制律設計

根據論文[17]，由於(4. 12)式，我們可以知道$\dot{e}_1 = e_2 - \frac{dx_{10}(t)}{dt}$，由圖 4. 1 若$Q_{10}$變動不大則$\frac{dx_{10}(t)}{dt}$很小，則$\dot{e}_1 \approx e_2$，若能使$e_1 + e_2$收斂到零，則可以使$e_1$、$e_2$收斂到零。

我們定義$\mathbf{z}(\mathbf{e}) = [e_1 + e_2 \;\; e_3 \;\; e_4]$

並且可以得到

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{e}) = \mathbf{f}'_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}, t) + \mathbf{g}'_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e}, t)v + \mathbf{g}'_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}, t)v^2 + \mathbf{d}' \tag{4. 24}$$

其中

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}, t) = \begin{pmatrix} f'_{new,1}(\mathbf{e},t) \\ f'_{new,3}(\mathbf{e},t) \\ f'_{new,4}(\mathbf{e},t) \end{pmatrix},\ \mathbf{g}'_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e}, t) = \begin{pmatrix} g'_{1new,1}(\mathbf{e},t) \\ g'_{1new,3}(\mathbf{e},t) \\ g'_{1new,4}(\mathbf{e},t) \end{pmatrix},\ \mathbf{g}'_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}, t) = \begin{pmatrix} g'_{2new,1}(\mathbf{e},t) \\ g'_{2new,3}(\mathbf{e},t) \\ g'_{2new,4}(\mathbf{e},t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}' = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

其中，$f'_{new,1}(\mathbf{e}, t) = f_{new,1}(\mathbf{e}, t) + f_{new,2}(\mathbf{e}, t)$，$g'_{1new,1}(\mathbf{e}, t) = g_{1new,1}(\mathbf{e}, t) + g_{1new,2}(\mathbf{e}, t)$，$g'_{2new,1}(\mathbf{e}, t) = g_{2new,1}(\mathbf{e}, t) + g_{2new,2}(\mathbf{e}, t)$

首先，我們選取控制李亞普諾夫函數:

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{P}\mathbf{z} \tag{4. 25}$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10^{-8} & & \\ & 10^{-4} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

並且可以得到

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} \\ &= \mathbf{z}^T\mathbf{P}[\mathbf{f}'_{\mathbf{new}}(\mathbf{e}, t) + \mathbf{g}'_{\mathbf{1new}}(\mathbf{e}, t)v + \mathbf{g}'_{\mathbf{2new}}(\mathbf{e}, t)v^2 + \mathbf{d}'] \\ &= av^2 + bv + c + \mathbf{z}^T\mathbf{P}\mathbf{d}' \end{aligned} \tag{4. 26}$$

其中$a=\mathbf{z}^T\mathbf{P}\mathbf{g}'_{2new}(\mathbf{e},t)$，$b=\mathbf{z}^T\mathbf{P}\mathbf{g}'_{1new}(\mathbf{e},t)$，$c=\mathbf{z}^T\mathbf{P}\mathbf{f}'_{new}(\mathbf{e},t)$。一般來說是$\mathbf{d}'$無法預測的。

$a=(0.01660325e_3-26.2152e_4)(e_4+1)^2$且$e_3$代表負載電壓的相角誤差，$e_3$的值介在$0\sim2\pi$，可知$a=0$發生在$e_4=0$，滿足**假設 2.4**。

由於$\mathbf{z}^T\mathbf{P}\mathbf{d}'=33.333\cdot10^{-4}e_3\Delta Q_1-5.2288e_4\Delta Q_1$，定義$\rho(\mathbf{e},t)$如(4. 27)則可滿足**假設 2.5**

$$\rho(\mathbf{e},t)=(33.3333\cdot10^{-4}|e_3|-5.2288|e_4|)|\Delta Q_1| \tag{4. 27}$$

考慮$\dot{V}$最差情況下，由(4. 15)可得

$$\dot{V}=av^2+bv+c+\rho(\mathbf{e},t) \tag{4. 28}$$

定義Δ為(4. 20)式的判別式

$$\Delta=b^2-4a(c+\rho(\mathbf{e},t)) \tag{4. 29}$$

根據論文[17]當$a>0$，我們選取控制律v為

$$v=-\frac{b}{2a} \tag{4. 30}$$

當$a<0$ 且 $\Delta<0$，我們選取控制律v為

$$v=-\frac{b}{2a} \tag{4. 31}$$

當$a<0$ 且 $\Delta>0$，我們選取控制律v為

$$v=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\mathrm{sgn}(a) \tag{4. 32}$$

當$a\approx0$ 且 $b\neq0$，我們選取控制律v為

$$v=\frac{-c-\rho(\mathbf{e},t)-0.5|b|}{b} \tag{4. 33}$$

當$a\approx0$ 且 $b\approx0$，我們選取控制律v為 0

4.3.3 LQR 與 ISMC 控制律比較

在本節我們首先討論系統(4.2)在考慮只有匹配外在干擾時，利用 3.3 節中設計的 ISMC 控制律之下，誤差狀態軌跡是否會與標稱系統在標稱控制下的誤差狀態軌跡相同。接下來，我們分別在無外在干擾與有外在干擾的情況下，比較 LQR 與 ISMC 設計的控制律的性能表現。

我們選擇$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2\mathrm{sn}(5t)$，初始狀態$\hat{x}_0 = [0.2\ 0.5\ 0.3\ 1.2]$進行模擬。在模擬結果中我們利用以符號 LQR0 表示 LQR 控制在標稱系統下所得到的結果，以符號 LQR1 表示 LQR 控制在系統有匹配的外在干擾下所得到的結果，以符號 ISMC 表示 ISMC 控制在系統有匹配的外在干擾下所得到的結果。圖 4.14(a)-(d)分別是狀態誤差的變化情形，我們由圖 4.14 可以看出除了e_3以外，LQR0 與 LQR1 的狀態誤差軌跡明顯不同。圖 4.15(a)-(d)分別是狀態誤差隨時間的變化情形，由圖 4.15 我們可以發現 LQR0 與 ISMC 的狀態軌跡幾乎完全相同，由此可見利用 ISMC 所設計的控制律的確能夠消除匹配的外在干擾，而 LQR 所設計的控制律卻無法消除匹配的外在干擾。

我們首先考慮無外在干擾之下 LQR 與 ISMC 控制律的性能比較。在表 4.1 中我們考慮$\Delta Q_1 = 0$的情況，其中 T 為模擬時間。表 4.1 我們可以看出 LQR 與 ISMC 控制方式的性能指標完全一樣，這是因為在無干擾的情況下 ISMC 的控制律為標稱控制律 ，且在本模擬中標稱控制律即 LQR 控制律，故性能指標相同。接著我們考慮有外在干擾之下 LQR 與 ISMC 控制律的性能比較。在表 4.2 中我們考慮$\Delta Q_1 = 0.2$的情況，其中 T 為模擬時間。由表 4.2 我們可以發現在 LQR 控制律之下，收斂時間t_e與t_{e_4}不存在，而 ISMC 控制律卻可以很快的將狀態誤差收斂至我們設定的區間內。

4.3.4 SMC、CLF 與 ISMC 控制律比較

在本節中我們首先考慮在有干擾的情況下，分別比較 SMC、CLF 與 ISMC 控制律之下狀態誤差的時間響應與控制輸入 u 的時間響應。我們分別在無外在干擾與有外在干擾的情況下，比較 SMC、CLF 與 ISMC 設計的控制律之性能表現。

我們選擇$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2$，初始狀態$\hat{x}_0 = [0.2\ 0.5\ 0.3\ 1.2]$進行模擬。在模擬結果中我們利用以符號 SMC 表示 SMC 控制在標稱系統有外在干擾下所得到的結果，以符號 CLF 表示 CLF 控制在系統有外在干擾下所得到的結果，以符號 ISMC 表示 ISMC 控制在系統有匹配的外在干擾下所得到的結果。其中 ISMC 控制律中為了使非匹配效應最小，我們選取$\mathbf{D} = [0\ ,0.1,1,-0.1579\ ]$]。圖 4. 17-圖 4. 20 為狀態誤差$e_1, e_2, e_3, e_4$的時間響應圖。由圖 4. 17-圖 4. 20 我們可以發現 SMC 與 CLF 的誤差狀態軌跡幾乎一樣，且除了e_4收斂時間較 ISMC 快以外，e_1, e_2, e_3隨時間震盪且收斂速度極慢，而在 ISMC 中e_1, e_2, e_3可以很快收斂。圖 4. 21 為 SMC 與 ISMC 之順滑變數σ的時間響應圖，模擬時間約 0.2 秒。在圖 4. 21 中我們可以發現 SMC 的順滑變數一開始並不在順滑平面上，所以可能在迫近階段(reaching phase)會造成閉迴路系統不穩定的現象，而 ISMC 的順滑變數一開始就在順滑平面上，所以不會有迫近階段可能發生的不穩定現象。圖 4. 22 為控制輸入 u 的時間響應圖，模擬時間約 0.15 秒，此模擬主要在觀察控制輸入 u 的暫態時間響應。在圖 4. 22 中我們可以看出 CLF 的控制律很不規則，有 3 次左右明顯的跳動，這是因為 CLF 控制律是以切換的方式進行設計；而 SMC 控制力的最大值發生在$t = 0$秒，而 ISMC 在$t = 0$秒時的控制力道卻是控制期間中的最小值。圖 4. 23 為控制輸入 u 的時間響應圖，模擬時間 10 秒，此模擬主要在觀察控制輸入 u 的穩態時間響應。在圖 4. 23 中我們可以發現 SMC 的控制律會在 1.3 左右持續震盪；CLF 在幾次不規則的跳動之後趨於定植；ISMC 在穩態時控制力道趨近於 SMC 穩態的平均力道，且低於 CLF 的穩態控制力道。

我們首先考慮無外在干擾之下 SMC、CLF 與 ISMC 控制律的性能比較。在表 4.1 中我們考慮$\Delta Q_1 = 0$的情況，其中 T 為模擬時間。表 4.1 中 ISMC 的收斂時間t_{e_4}雖然較 CLF 與 SMC 多 4 秒左右，但 CLF 與 SMC 的收斂時間t_e卻是 ISMC 的 10 倍以上。模擬間控制力道最大值即$\| u(t) \|_\infty$，最小的是 ISMC 控制律，最大的是 CLF 控制律；此外 ISMC 控制律模擬期間的控制能量總和也是三種控制律中最小的。最後，我們比較成本指標(cost function)可以發現 ISMC 控制律的成本指標明顯小於其他二種控制律。

我們接下來考慮有外在干擾之下 SMC、CLF 與 ISMC 控制律的性能比較。在表 4.2 中我們考慮$\Delta Q_1 = 0.2$的情況，其中 T 為模擬時間。ISMC 除了收斂時間t_{e_4}較慢以外，在收斂時間t_e、模擬間的最大控制力道、模擬間的控制能量總和及成本指標 ISMC 都有非常優異的表現。

表 4. 1: 性能比較表(無外在干擾)

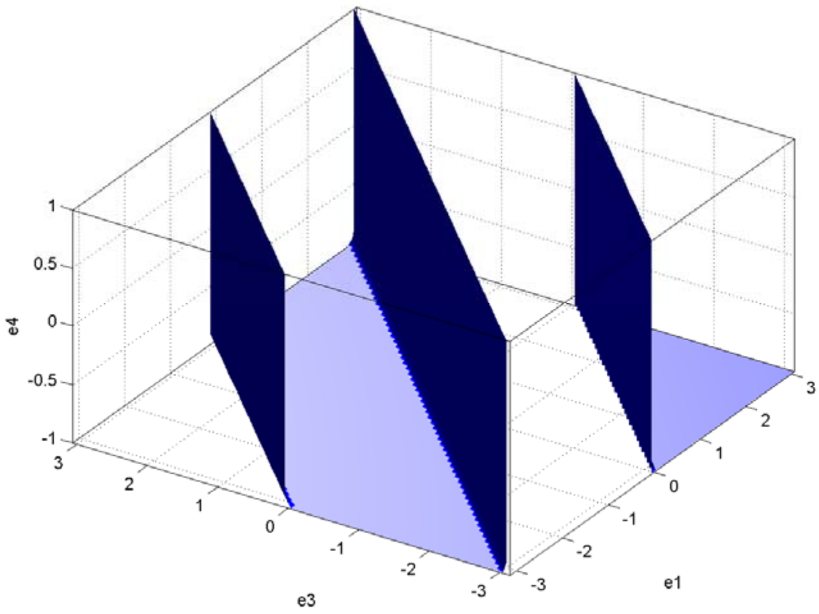
性能指標	控制方式			
	LQR	ISMC	SMC	CLF
t_e	3.428	3.428	49.458	53.414
t_{e_4}	4.048	4.048	0.032	0.034
$\Vert u(t) \Vert_\infty$	1.3924	1.3924	1.6356	1.8268
$\int_0^T u(t)^2 dt$	17.5062	17.5062	17.6244	17.7306
$\int_0^T \mathbf{e}(t)^T\mathbf{Q}\mathbf{e}(t)+u(t)^T\mathbf{R}u(t)dt$	15.8279	15.8279	17.6394	17.7256

$t_e = \min\{t \mid |e_i(\tau)| < 0.002, i = 1,2,3,4, \forall\tau \geq t\}$，$t_{e_4} = \min\{t \mid |e_4(\tau)| < 0.0005, \forall\tau \geq t\}$，$\Vert u(t) \Vert_\infty$為模擬期間最大控制力，$\int_0^T u(t)^2 dt$為模擬期間的控制能量總和，$\int_0^T [\mathbf{e}(t)^T\mathbf{Q}\mathbf{e}(t) + u(t)^T\mathbf{R}u(t)]dt$為成本指標(cost function)，其中$Q = I_{\mathbf{4x4}}$，$R = 0.9$

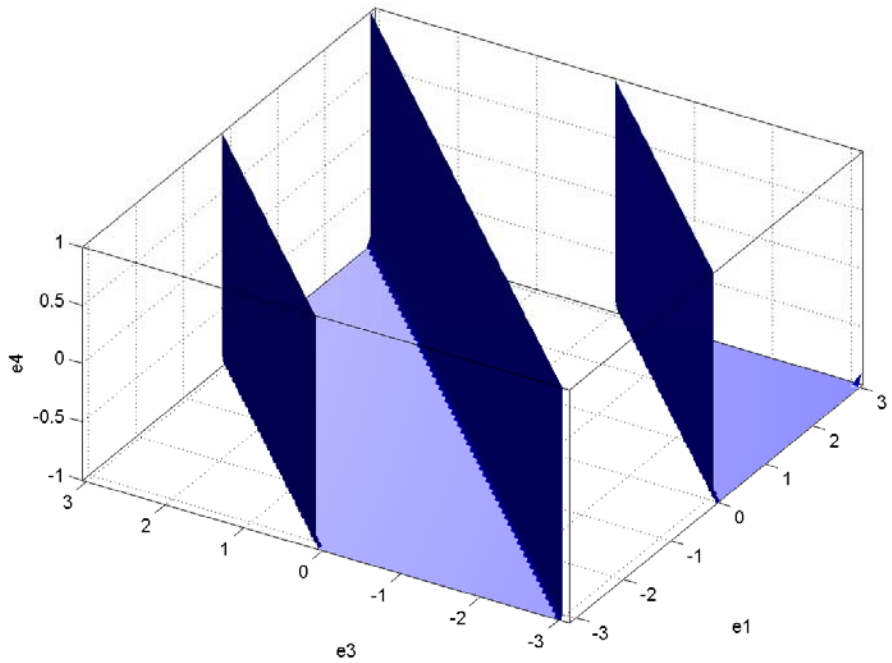
表 4. 2: 性能比較表(有外在干擾)

性能指標	控制方式			
	LQR	ISMC	SMC	CLF
t_e	X	4.336	75.196	50.712
t_{e_4}	X	4.202	0.038	0.034
$\parallel u(t) \parallel_\infty$	1.3809	1.3711	1.6356	1.7397
$\int_0^T u(t)^2 dt$	17.2821	16.8824	16.9845	17.6501
$\int_0^T \mathbf{e}(t)^T\mathbf{Q}\mathbf{e}(t)+u(t)^T\mathbf{R}u(t)dt$	15.6307	15.2688	17.0316	16.0329

$t_e = \min\{t \mid |e_i(\tau)| < 0.002, i = 1,2,3,4, \forall\tau \geq t\}$ ，$t_{e_4} = \min\{t \mid |e_4(\tau)| < 0.0005, \forall\tau \geq t\}$，$\parallel u(t) \parallel_\infty$為模擬期間最大控制力，$\int_0^T u(t)^2 dt$為模擬期間的控制能量總和，$\int_0^T [\mathbf{e}(t)^T\mathbf{Q}\mathbf{e}(t) + u(t)^T\mathbf{R}u(t)]dt$為成本指標(cost function)，其中$\mathrm{Q} = \mathrm{I}_{\mathbf{4x4}}$，$\mathrm{R} = 0.9$



(a)



(b)

圖 4.4：$Q_{10}=9$，白色區域為誤差狀態e_1、e_3、e_4滿足$\Omega(\mathbf{e})$的區域，(a) k=0.38 (b) k=10

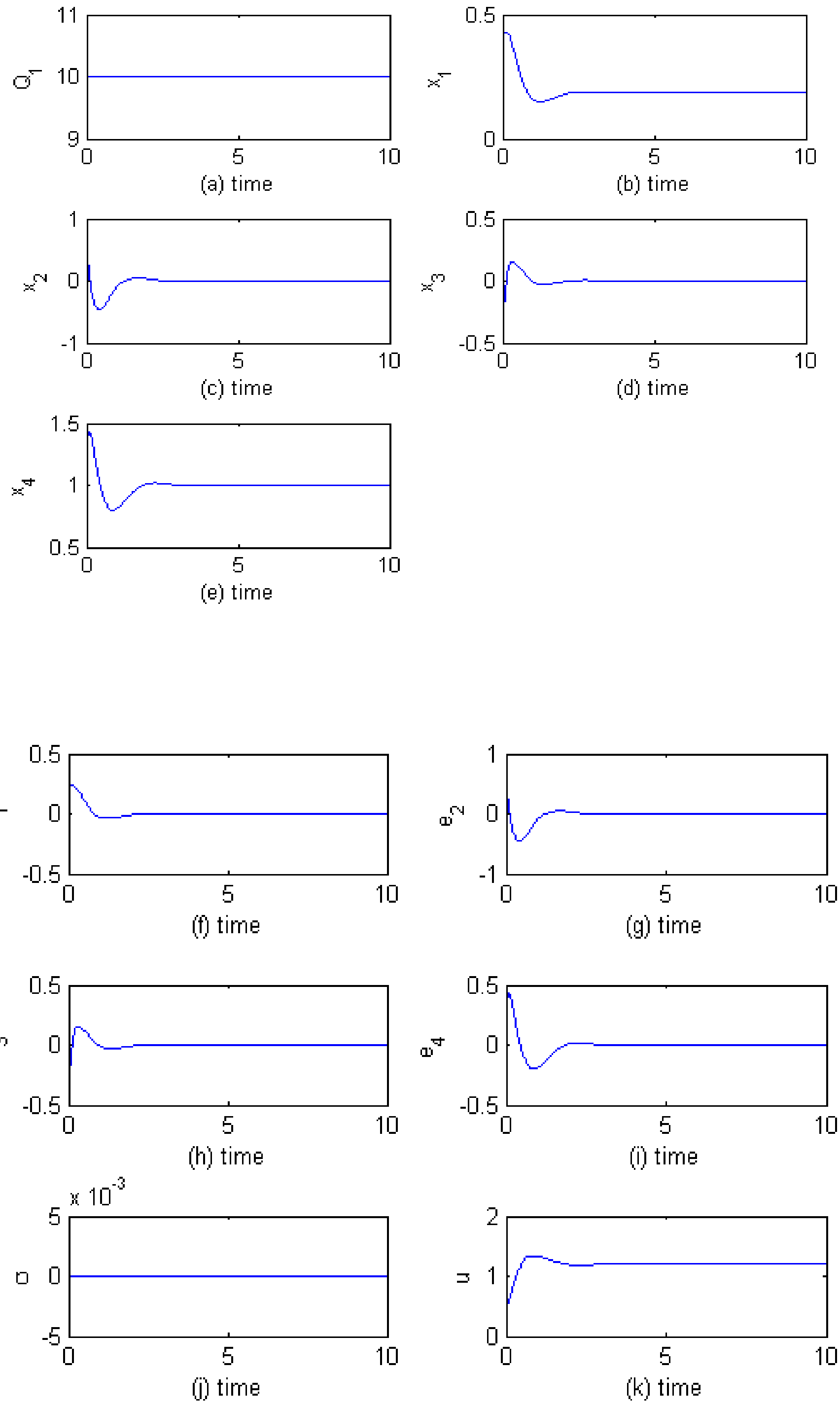
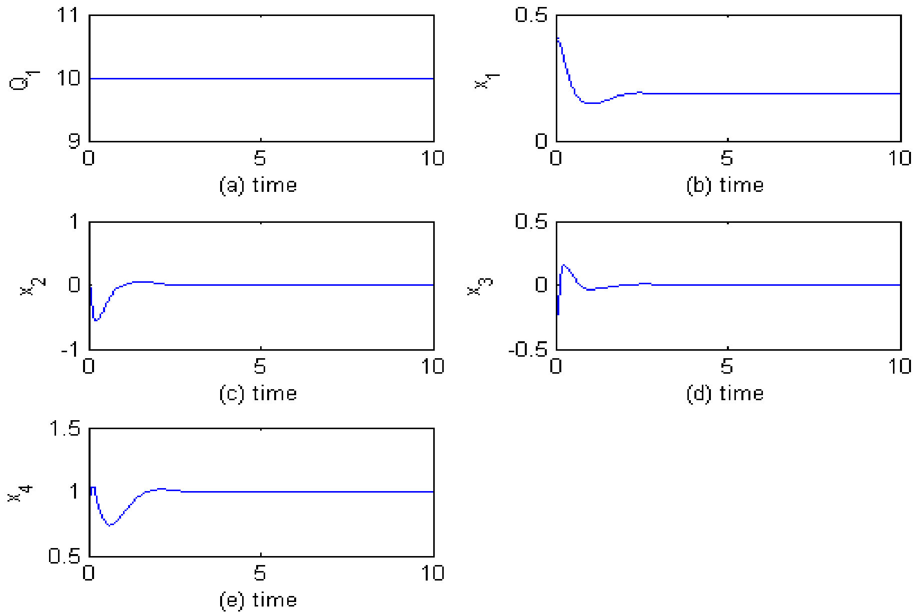


圖 4. 5：$Q_{10} = 10$，$\Delta Q_1 = 0$，初始電壓為正值，模擬時間 10 秒，(a)Q_1值，(b)狀態x_1，(c)狀態x_2，(d)狀態x_3，(e)狀態x_4，(f)狀態e_1，(g)狀態e_2，(h)狀態e_3，(i)狀態e_4，(j)順滑變數σ ， (k) u 值



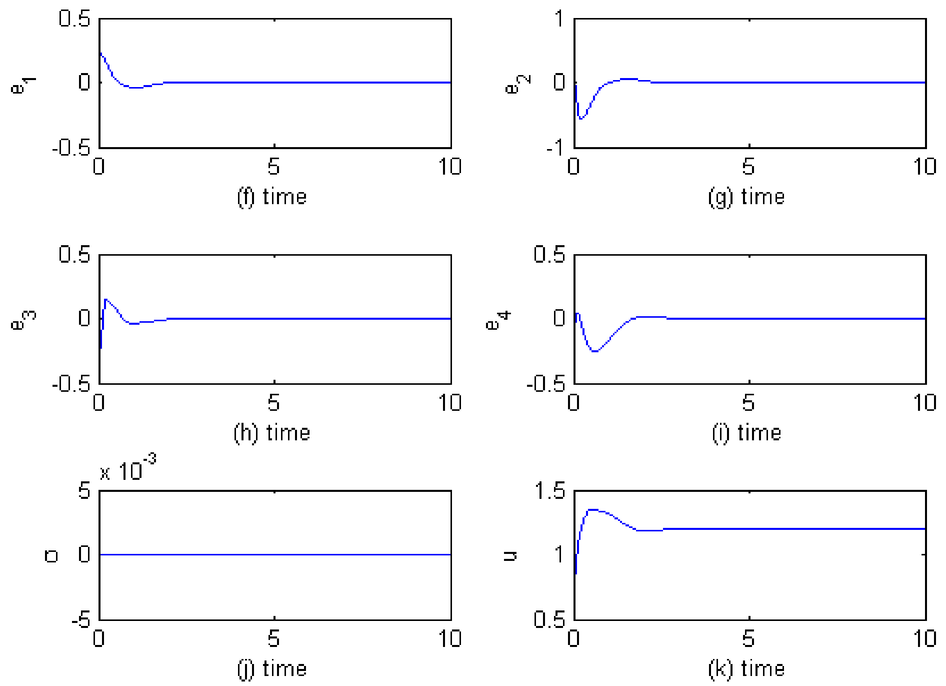


圖 4. 6：$Q_{10} = 10$，$\Delta Q_1 = 0$，初始電壓為負值，模擬時間 10 秒，(a)Q_1值，(b)狀態x_1，(c)狀態x_2，(d)狀態x_3，(e)狀態x_4，(f)狀態e_1，(g)狀態e_2，(h)狀態e_3，(i)狀態e_4，(j)順滑變數σ ， (k) u 值

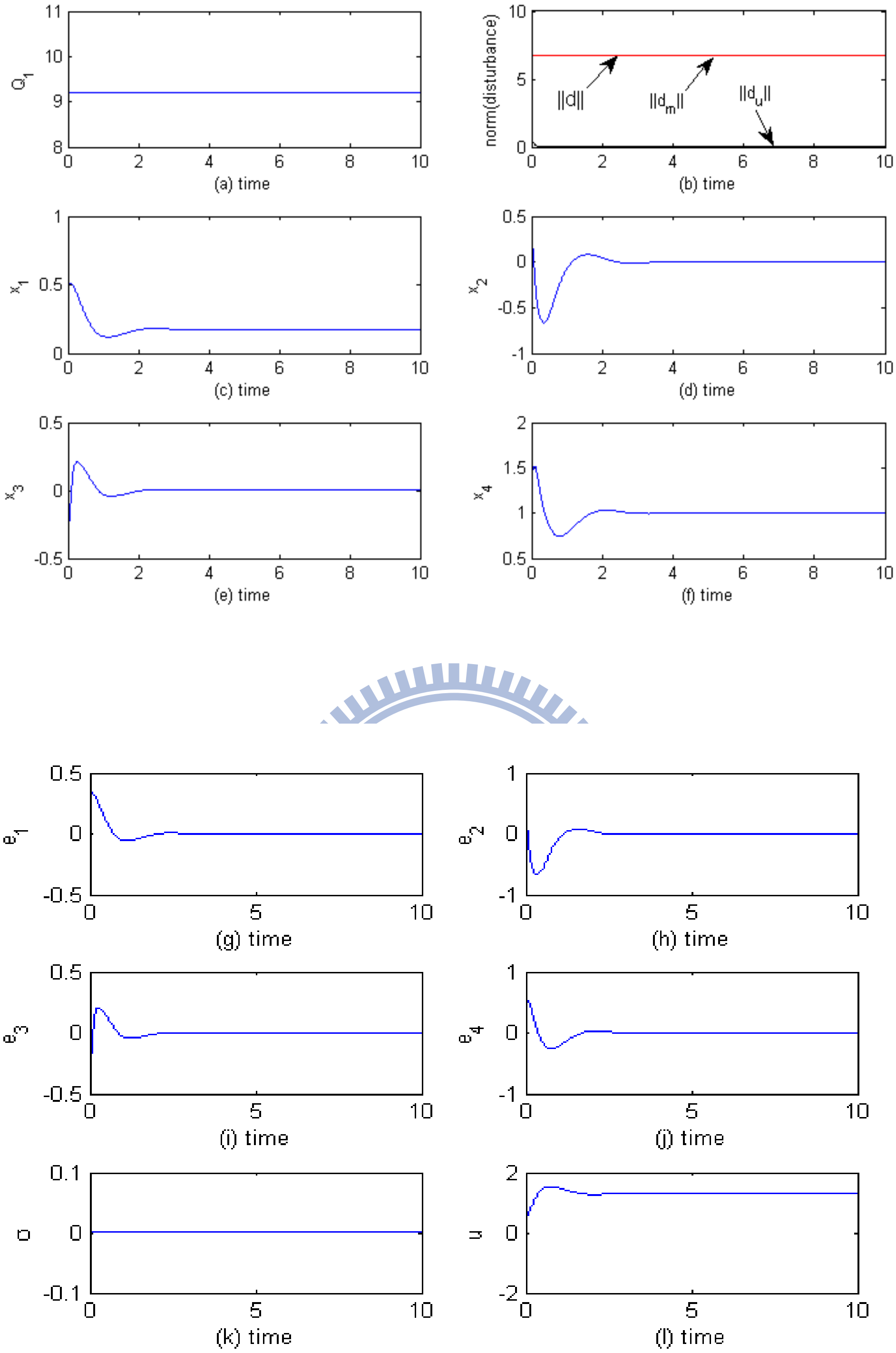


圖 4. 7：$Q_{10}=9$，$\Delta Q_1=0.2$，只考慮匹配的不確定因素，模擬時間 10 秒，(a)Q_1值，(b)$\mathbf{d}$、$\mathbf{d}_\mathbf{m}$、$\mathbf{d}_\mathbf{u}$的範數，(c)狀態x_1， (d)狀態x_2， (e)狀態x_3， (f)狀態x_4， (g)狀態e_1，(h)狀態e_2， (i)狀態e_3， (j)狀態e_4， (k)順滑變數σ， (l) u 值

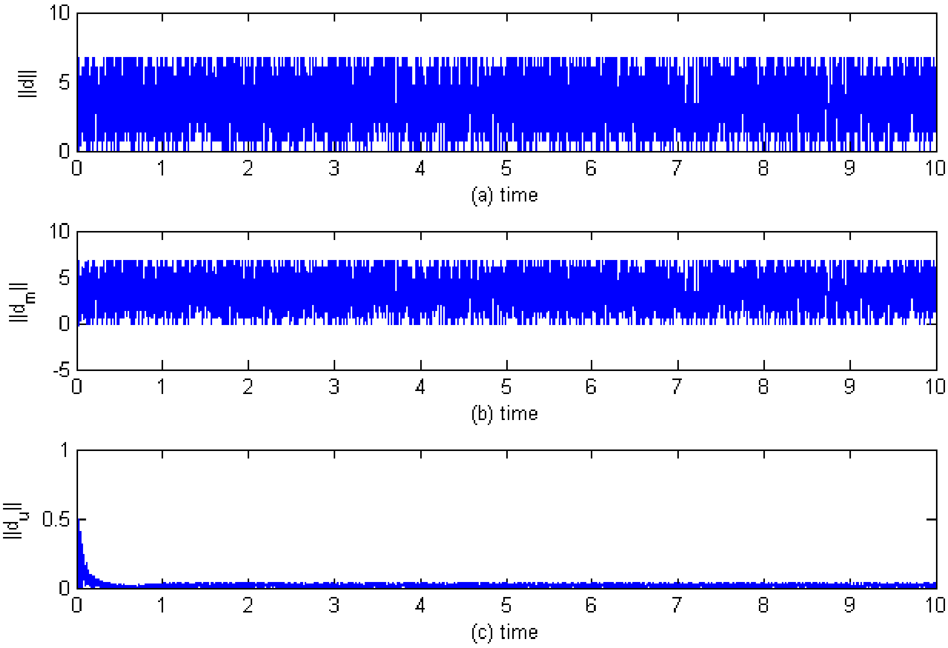


圖 4. 8：$Q_{10} = 9$，ΔQ_1為介於$-0.2 \sim 0.2$的隨機訊號，$\mathbf{D} = [0, 0.1, 1, -0.1579]$，考慮只有匹配的不確定因素，模擬時間 10 秒，(a) $\mathbf{d}$的範數，(b) $\mathbf{d_m}$的範數，(c) $\mathbf{d_u}$的範數

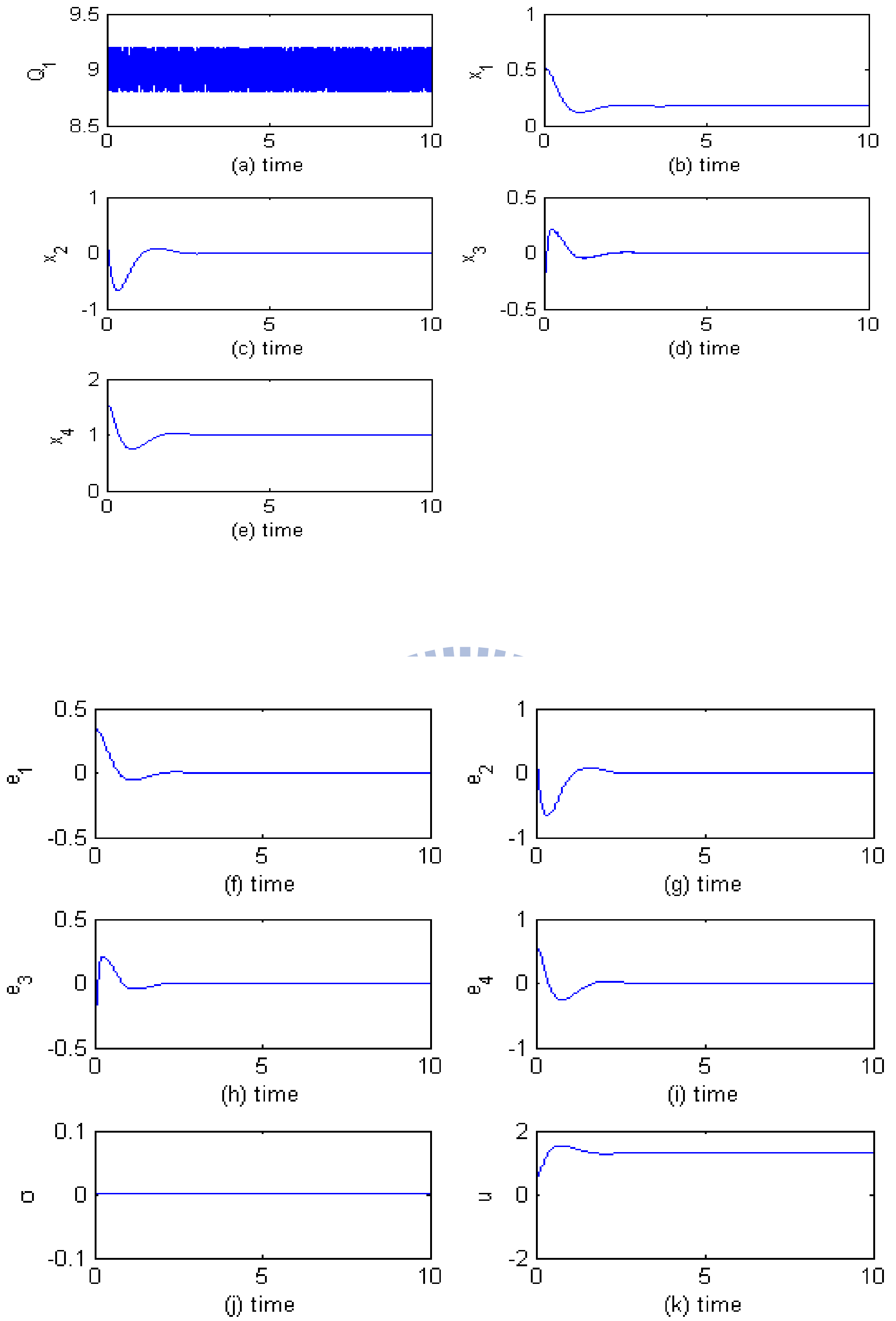


圖 4. 9：$Q_{10}=9$，ΔQ_1為介於$-0.2\sim0.2$的隨機訊號，只考慮匹配的不確定因素，模擬時間 10 秒，(a)Q_1值，(b)狀態x_1，(c)狀態x_2，(d)狀態x_3，(e)狀態x_4，(f)狀態e_1，(g)狀態e_2，(h)狀態e_3，(i)狀態e_4，(j) 順滑變數σ (k) u 值

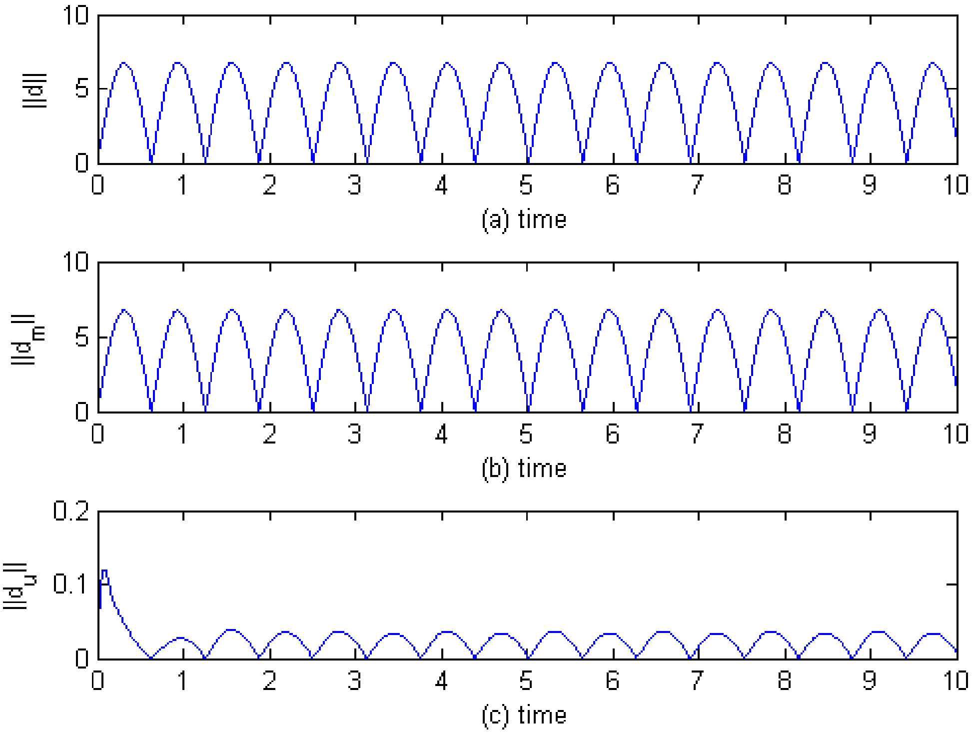


圖 4. 10： $Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2\sin(5t)$，$\mathbf{D} = [0 ,0.1,0.1579,1]$，考慮只有匹配的不確定因素，模擬時間 10 秒，(a) $\mathbf{d}$的範數，(b) $\mathbf{d}_{\mathbf{m}}$的範數，(c) $\mathbf{d}_{\mathbf{u}}$的範數

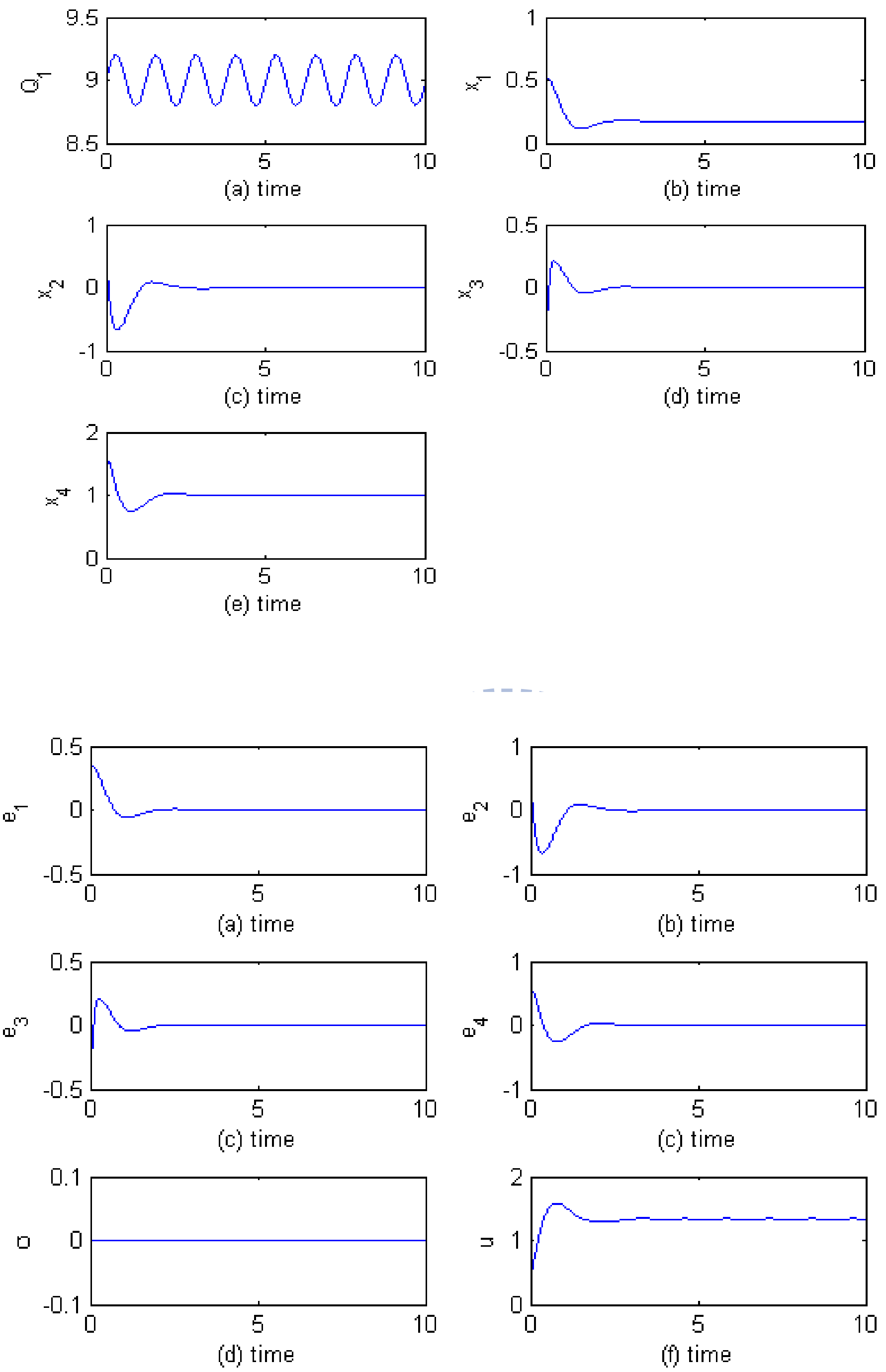


圖 4. 11：$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2\sin(5t)$，$\mathbf{D} = [0\ ,0.1,0.1579\ ,1]$，考慮只有匹配的不確定因素，模擬時間 10 秒，(a)Q_1值，(b)狀態x_1，(c)狀態x_2，(d)狀態x_3，(e)狀態x_4，(f)狀態e_1，(g)狀態e_2，(h)狀態e_3，(i)狀態e_4，(j)順滑變數σ (k) u 值

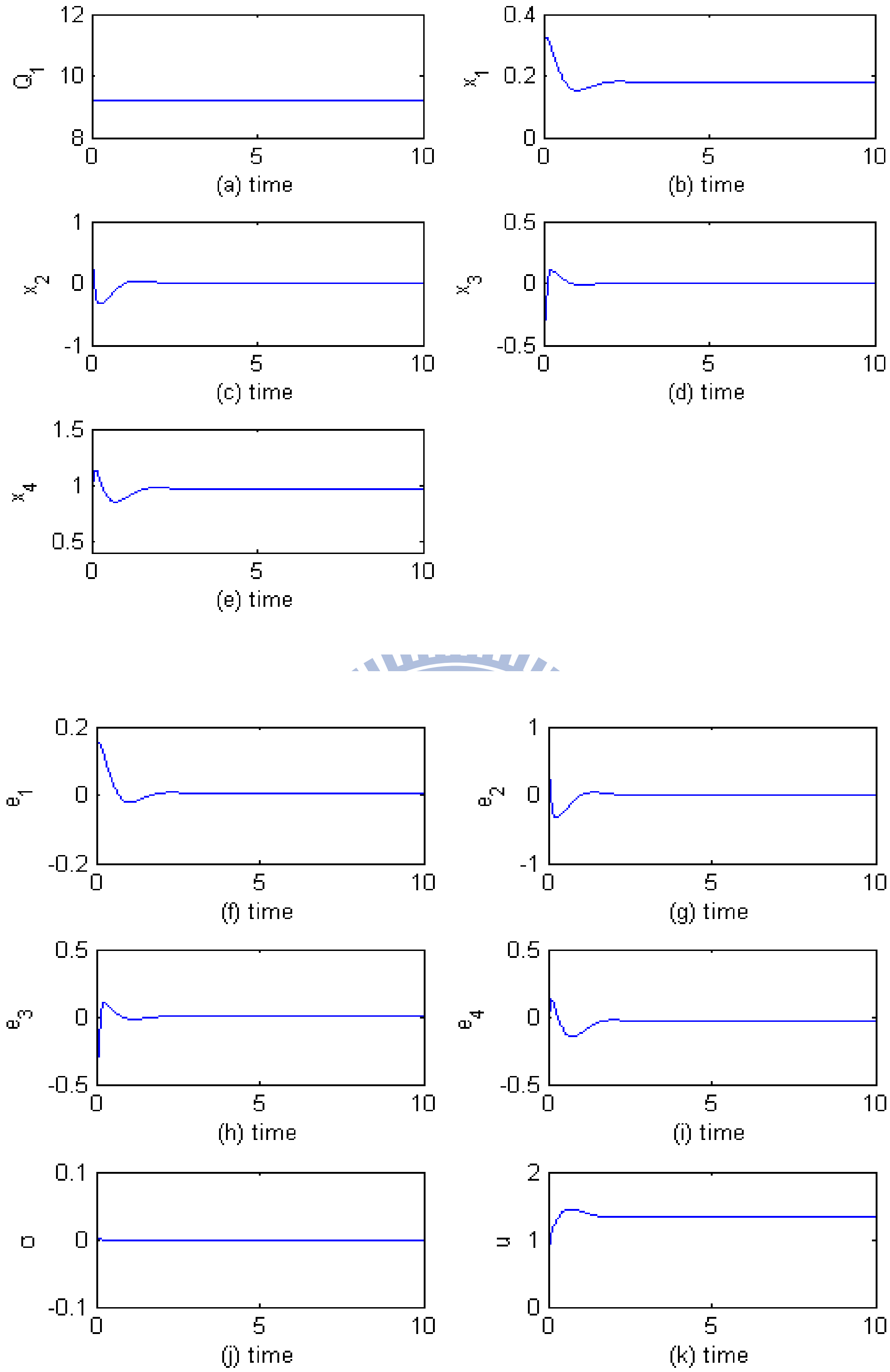


圖 4. 12：$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2$，$k = 0.1$，考慮有非匹配的不確定因素，模擬時間 10 秒，(a)Q_1值，(b)狀態x_1，(c)狀態x_2，(d)狀態x_3，(e)狀態x_4，(f)狀態e_1，(g)狀態e_2，(h)狀態e_3，(i)狀態e_4，(j)順滑變數σ　(k) u 值

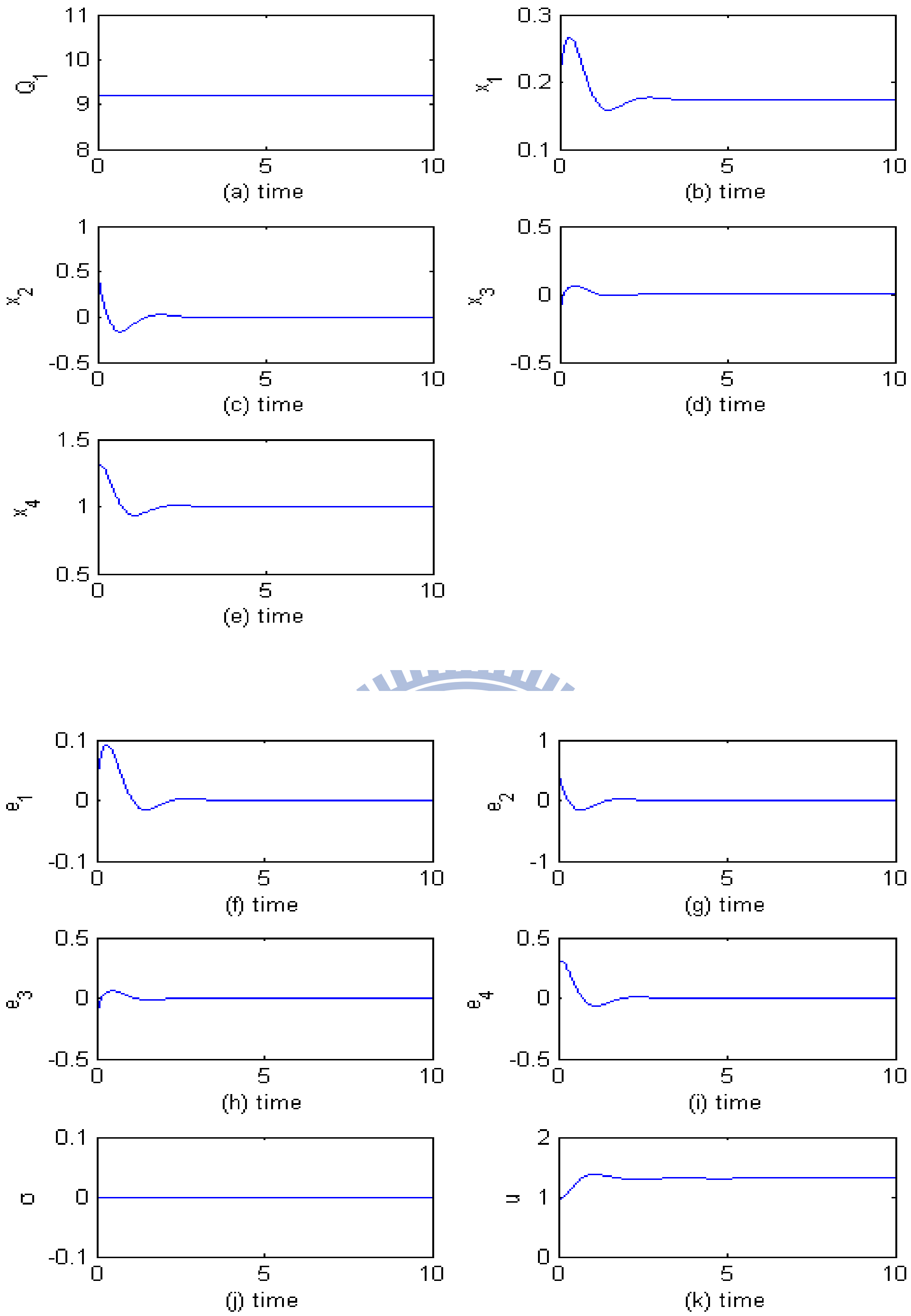


圖 4. 13：$Q_{10}=9$，$\Delta Q_1=0.2$，$k=0.38$，考慮有非匹配的不確定因素，模擬時間 10 秒，(a)Q_1值，(b)狀態x_1，(c)狀態x_2，(d)狀態x_3，(e)狀態x_4，(f)狀態e_1，(g)狀態e_2，(h)狀態e_3，(i)狀態e_4，(j)順滑變數σ，(k) u 值

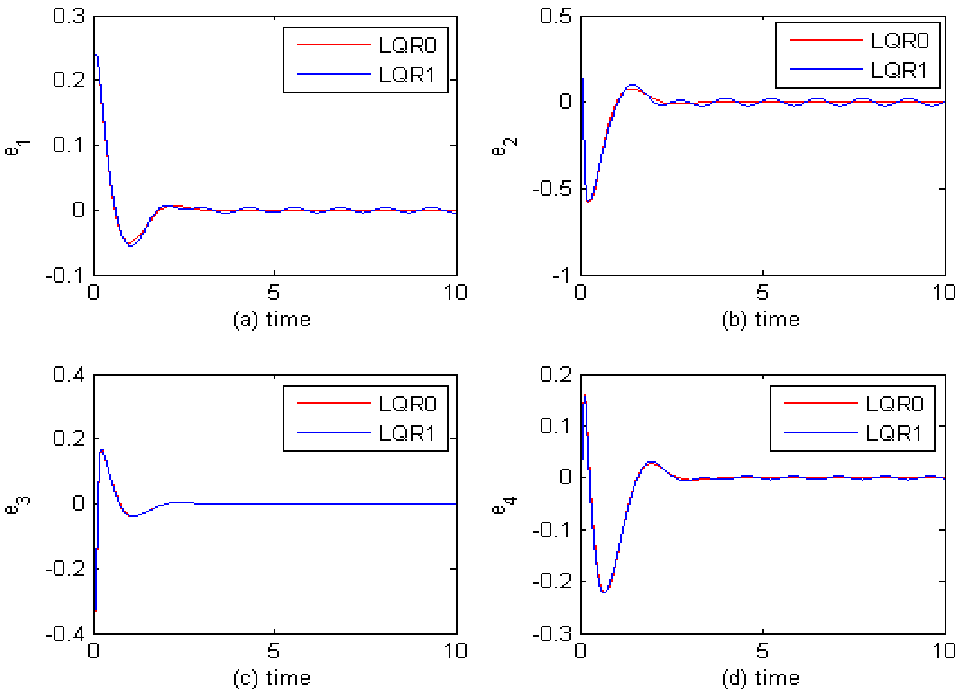


圖 4. 14：$Q_{10}=9$，$\Delta Q_1=0.2\sin(5t)$，初始狀態$\hat{x}_0=[0.4\ \ 0.4\ 0.3\ 0.8]$，模擬時間 10 秒，誤差狀態比較圖(控制律為 LQR0 與 LQR1)

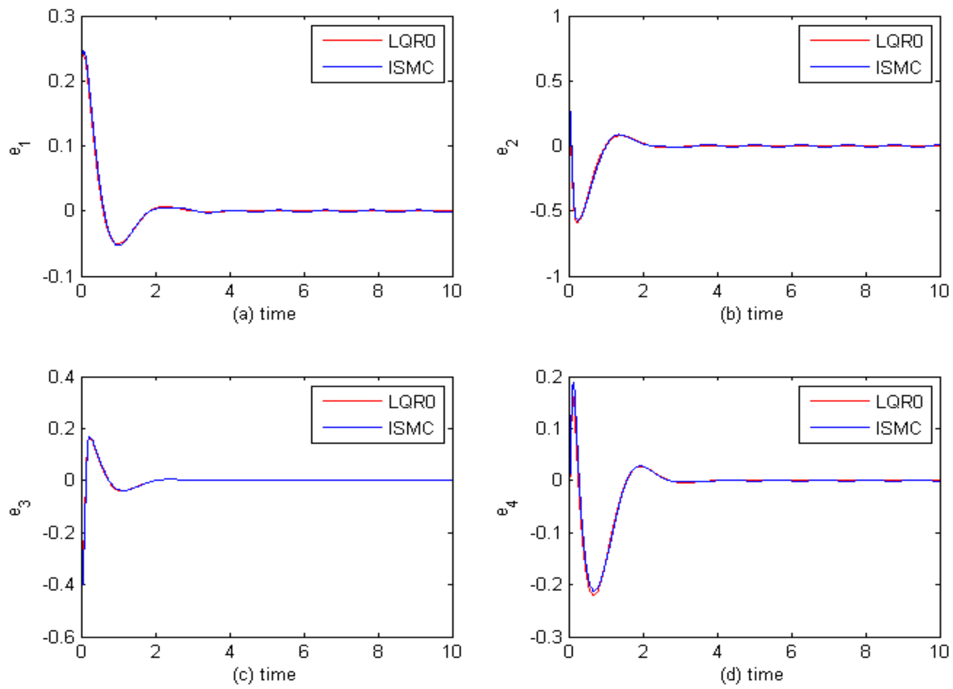


圖 4. 15：$Q_{10}=9$，$\Delta Q_1=0.2\sin(5t)$，初始狀態$\hat{x}_0=[0.4\ \ 0.4\ 0.3\ 0.8]$，模擬時間 10 秒，誤差狀態比較圖(控制律為 LQR0 與 ISMC)

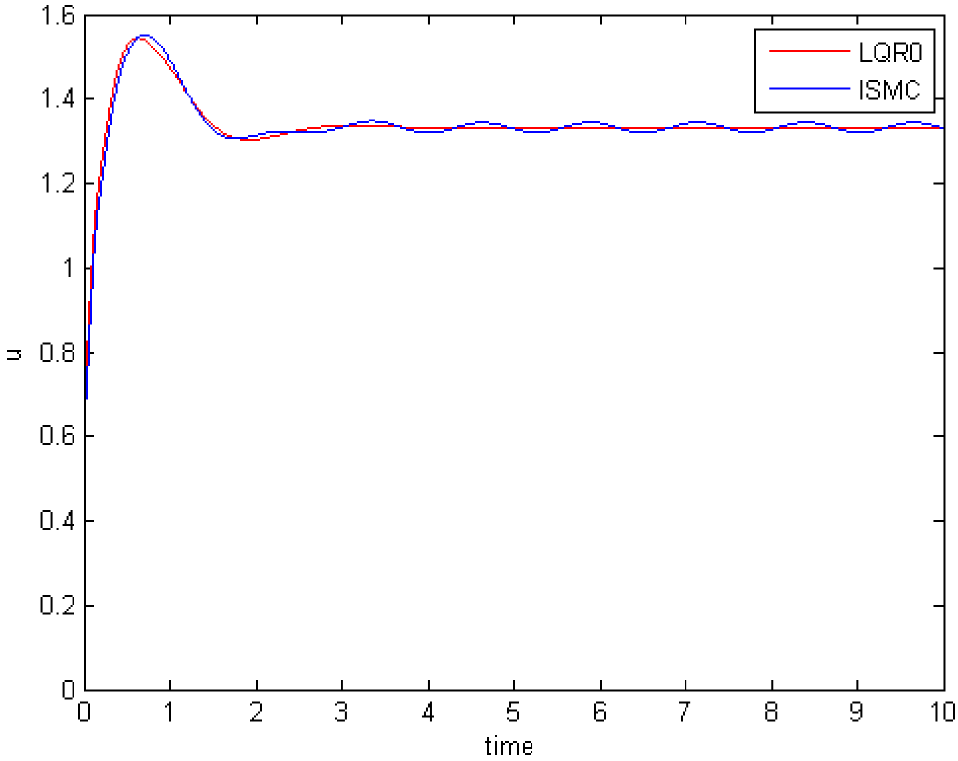


圖 4. 16：$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2\sin(5t)$，初始狀態$\hat{x}_0 = [0.4\ \ 0.4\ 0.3\ 0.8]$，模擬時間 10 秒，u 值比較圖(控制律為 LQR0 與 ISMC)

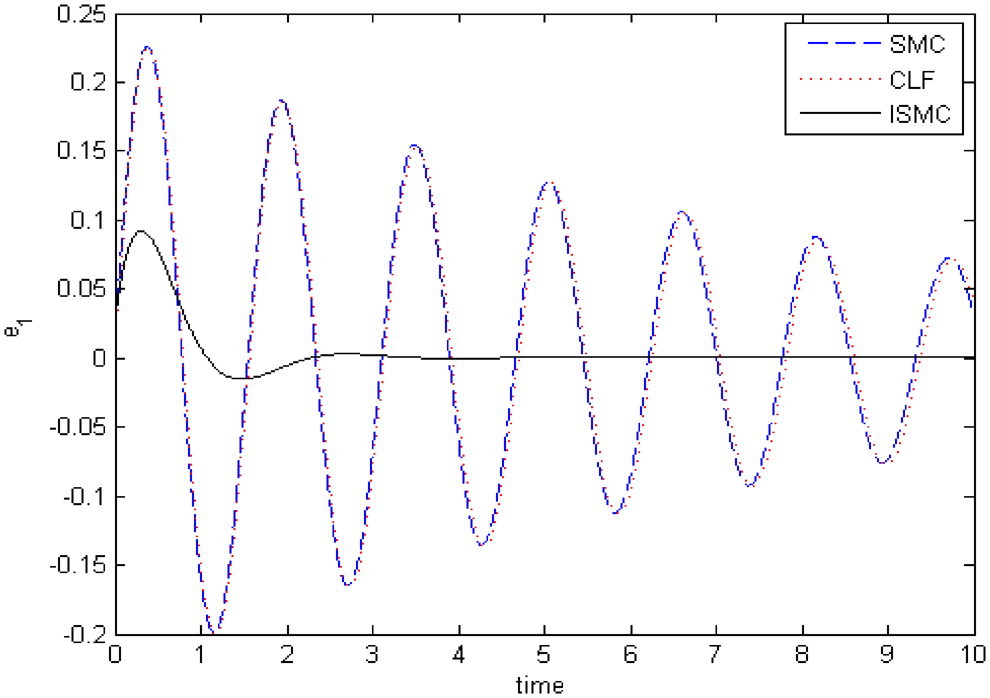


圖 4. 17： $Q_{10}=9$，$\Delta Q_1=0.2$，初始狀態$\hat{x}_0=[0.5\ \ 0.3\ 0.3\ 1.3]$，模擬時 10 秒，狀態誤差$e_1$時間響應比較圖

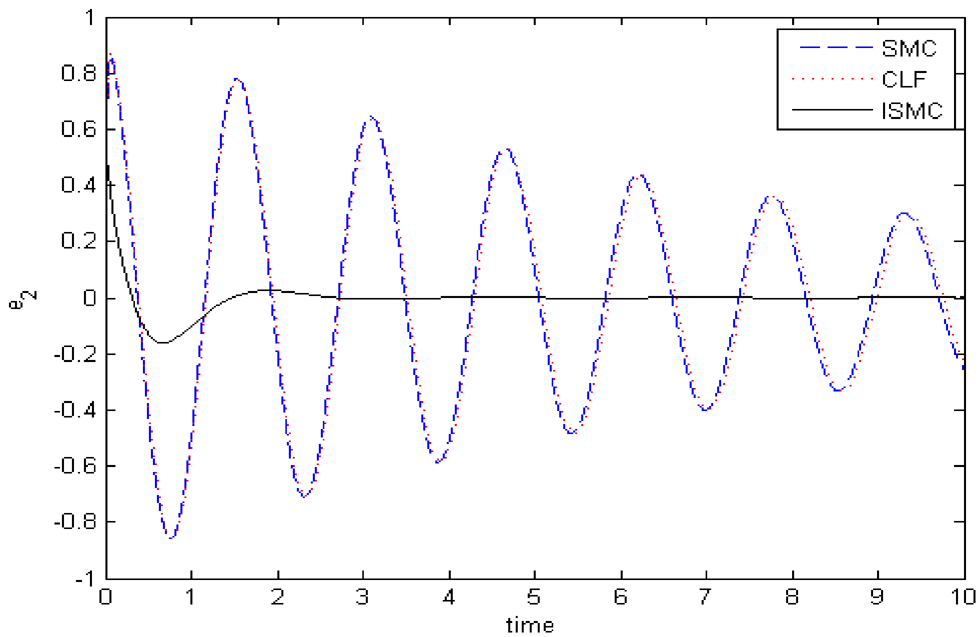


圖 4. 18：$Q_{10}=9$，$\Delta Q_1=0.2$，初始狀態$\hat{x}_0=[0.5\ \ 0.3\ 0.3\ 1.3]$，模擬時 10 秒，狀態誤差$e_2$時間響應比較圖

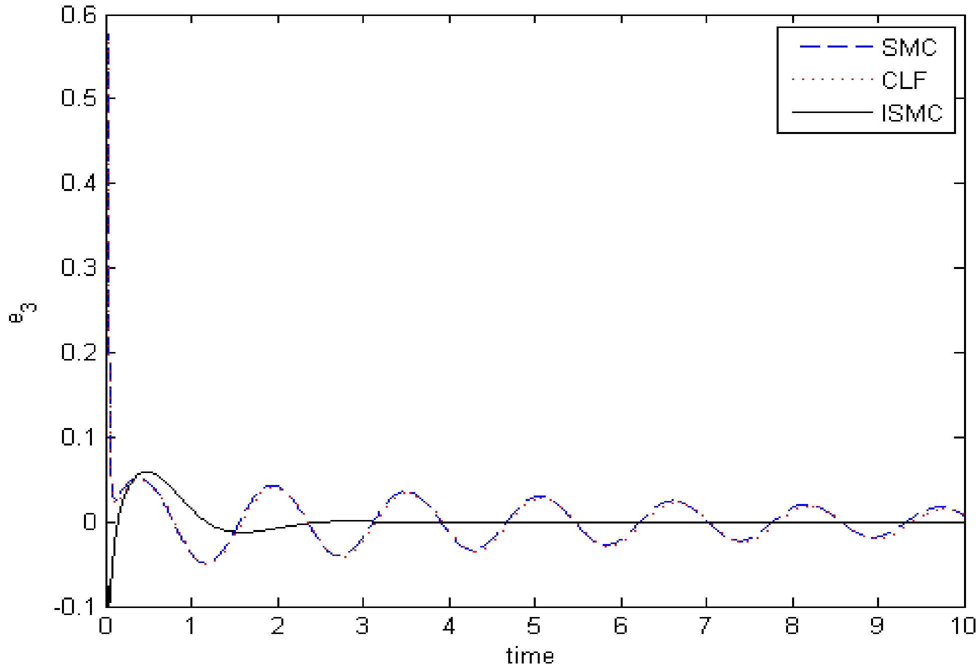


圖 4. 19：$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2$，初始狀態$\hat{x}_0 = [0.2\ \ 0.5\ 0.3\ 1.2]$，模擬時 10 秒，狀態誤差$e_3$時間響應比較圖

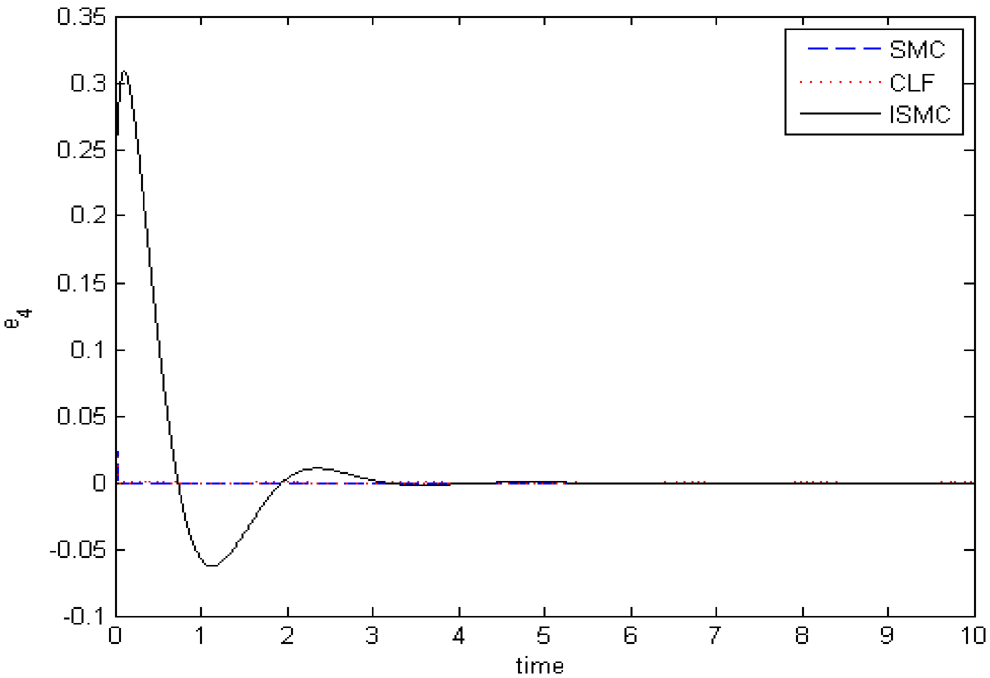


圖 4. 20：$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2$，初始狀態$\hat{x}_0 = [0.2\ \ 0.5\ 0.3\ 1.2]$，模擬時 10 秒，狀態誤差$e_4$時間響應比較圖

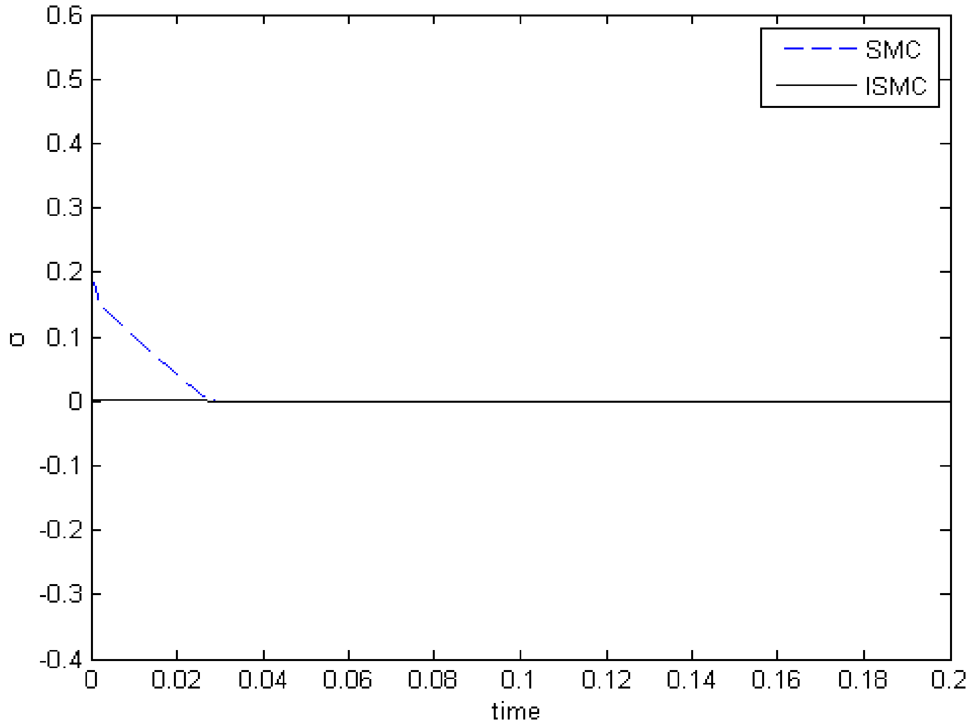


圖 4. 21：$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2$，初始狀態$\hat{x}_0 = [0.2\ \ 0.5\ 0.3\ 1.2]$，模擬時約 0.2 秒，順滑變數σ比較圖

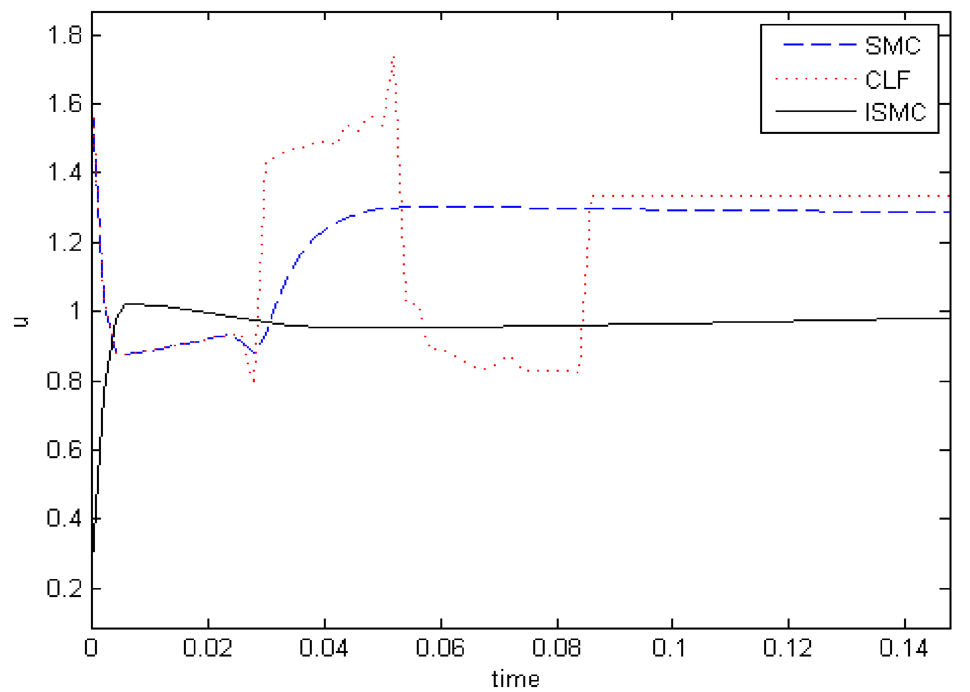


圖 4. 22：$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2$，初始狀態$\hat{x}_0 = [0.2\ \ 0.5\ 0.3\ 1.2]$，模擬時約 0.15 秒，u 值比較圖

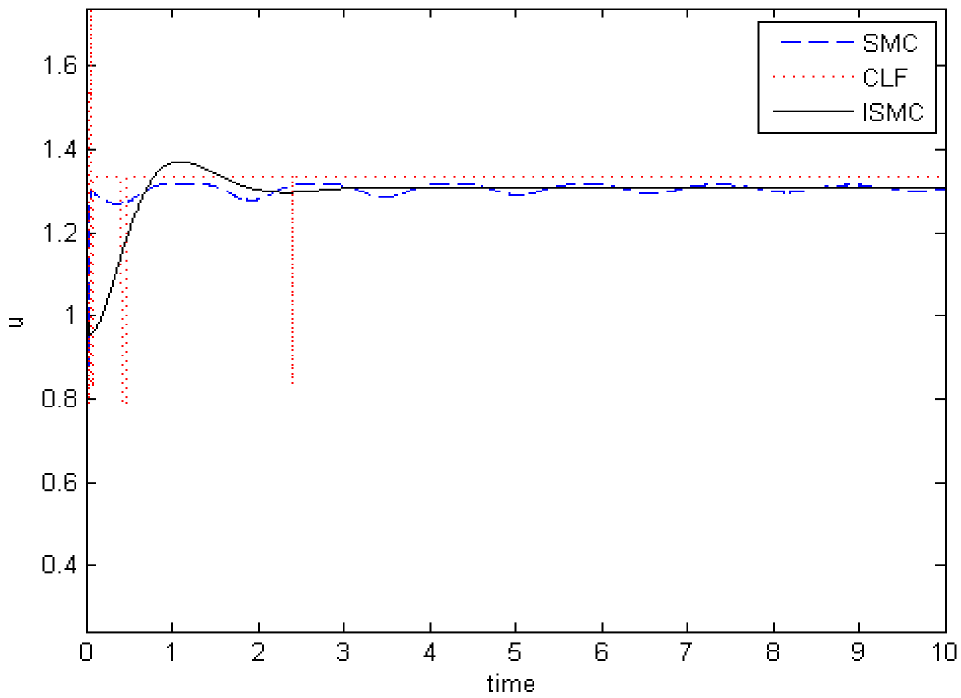


圖 4. 23：$Q_{10} = 9$，$\Delta Q_1 = 0.2$，初始狀態$\hat{x}_0 = [0.2\ \ 0.5\ 0.3\ 1.2]$，模擬時 10 秒，u 值比較圖

第五章

結論與未來研究方向

5.1 結論

在本論文中，我們將積分順滑模控制技術應用於二次多項式系統穩健輸出追蹤並達成內部動態穩定之性能。此外，論文中所提出的 ISMC 設計方式不但改善了論文[4]中利用順滑模態控制技術來達到穩健輸出追蹤時不保證內部動態穩定的問題，同時改進了論文[17]中利用控制李亞普諾夫理論來達到穩健輸出追蹤時內部狀態收斂速度慢的問題。為了利用 ISMC 設計穩定控制律，我們首先將追蹤問題變成穩定化問題，接著仿照 ISMC 設計流程[5][6]對二次多項式系統設計控制律。由於 ISMC 設計具有能將匹配式干擾完全消除且可經由順滑面的選取使非匹配式干擾影響最小的特性，故我們自行定義二次多項式系統的匹配式與非匹配式干擾。在定義二次多項式系統的匹配式與非匹配式干擾之後，我們針對三種情況設計 ISMC 控制律，在所設計的控制律下我們證明了當系統只有匹配的參數不確定因素時，系統狀態不但能維持在順滑面上，且干擾系統之狀態也會與標稱系統之軌跡相同。最後我們也將 ISMC、SMC 及 CLF 控制律應用於電力系統時之

性能表現進行比較，模擬結果不但顯示 ISMC 控制律可達成穩定輸出追蹤，而且內部動態收斂速度遠快於其他二者，同時在模擬期間所需的最大控制力道、控制能量總和、以及成本指標方面，ISMC 控制律都有比較優異的表現。

5.2 未來研究方向

在本論文中，我們針對系統控制器存在輸入二次項且系統相對階數為一階時利用 ISMC 設計控制律，未來可將研究主題延伸如下：

1. 研究系統相對階數為高階時 ISMC 穩定控制律之設計策略。
2. 探討系統控制器存在高次項時之 ISMC 控制設計。
3. 進一步考慮系統有非匹配的參數不確定因素時，如何選取順滑變數中之投影矩陣 **D** 使得非匹配效應能降至最低。

參考文獻

[1] O. Bethoux, T. Floquet, and J. P. Barbot, "Advanced Sliding Mode Stabilization of a Levitation System," presented at the Eur. Control Conf., Cambridge, U. K., 2003.

[2] E. Moulay and W. Perruquetti, "Stabilization of nonaffine systems: A Constructive Method for Polynomial Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50, pp. 520-526, 2005.

[3] J. Zhong, D. Cheng, and X. Hu, "Constructive Stabilization for Quadratic input Nonlinear Systems," Automatica, vol. 44, pp. 1996-2005, 2008.

[4] 許益銘，二次多項式系統之穩健輸出追蹤之研究，國立交通大學，碩士論文，2008.

[5] F. Castanos and L. Fridman, "Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 51, pp. 853-858, 2006.

[6] W. J. Cao and J. X. Xu, "Nonlinear integral-type sliding surface for both matched and unmatched uncertain systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, pp. 1355-1360, 2004.

[7] D. C. Liaw, K. H. Fang, and C. C. Song, "Bifurcation analysis of power systems with tap changer," Proc. 2005 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control (ICNSC'05), Tucson, Arizona, U.S.A., pp. 283-288, 2005

[8] I. Dobson, H. D. Chiang, J. S. Thorp, and L. Fekih-Ahmed, "A model of voltage collapse in electric power systems," Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 3, pp. 2104-2109, Dec 7-9 1988.

[9] E. H. Abed, A. M. A. Hamdan, H. C. Lee, and A. G. Parlos, "On bifurcations in power system models and voltage collapse," Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 6, pp. 3014-3015, Dec. 5-7 1990.

[10] B. H. Lee and K. Y. Lee, "A study on voltage collapse mechanism in electric power systems," IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, No. 3, pp. 966-974, 1991.

[11] E. H. Abed, J. C. Alexander, H. Wang, A. M. A. Hamdan, and H. C. Lee, "Dy- namic bifurcations in a power system model exhibiting voltage collapse," IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Vol. 5, pp. 2509-2512, May 3-6 1992.

[12] H. D. Chiang, I. Dobson, R. J. Thomas, J. S. Thorp, and L. Fekih-Ahmed, "On voltage collapse in electric power systems," IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 5, No. 2, pp. 601-611, 1990.

[13] P. Kundur, Power System Stability and Control, New York: McGraw-Hill, 1994.

[14] J. H. Choi and J. C. Kim, "Advanced voltage regulation method of power dis- tribution systems interconnected with dispersed storage and generation systems," IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 16, No. 2, pp. 329-334, 2001.

[15] H. Ohtsuki, A. Yokoyama, and Y. Sekine, "Reverse action of on-load tap changer in association with voltage collapse," IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, No. 1 pp. 300-306, 1991.

[16] C. A. Smith, M. A. Redfern, and S. Potts, "Improvement in the performance of on-load tap changer transformers operating in series," IEEE Power

Engineering Society General Meeting, vol. 3, pp. 1905-0910, July. 13-17 2003.

[17] 吳家榮，應用CLF於二次多項式系統之穩健輸出追蹤之研究，國立交通大學，碩士論文，2009

[18] K. Walve, “Modelling of power system components at severe disturbances,” International conference on Large High Voltage Electric Systems, CIGRE pp. 18-38, 1986.

[19] W. W. Price, H. D. Chiang, H. K. Clark, C. Concordia, D. C. Lee, J. C. Hsu, S. Ihara, C. A. King, C. J. Lin, and Y. Mansour, “Load representation for dynamic performance analysis,” IEEE Transactions on Power Systems, vol. 8, pp. 472-482, 1993.

[20] Murray R. Spiegel, Mathematical Handbook, McGraw-Hill Company