

國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文

結合順滑模態控制與參考橫擺角速度選取方式
於車輛側向控制之研究

Study of combining SMC design and the reference
yaw rate selection in vehicle lateral control

研究生：吳榮人

指導教授：梁耀文 博士

中華民國一百年七月

結合順滑模態控制與參考橫擺角速度選取方式

於車輛側向控制之研究

**Study of combining SMC design and the reference
yaw rate selection in vehicle lateral control**

研 究 生：吳榮人

Student：Rong-Ren Wu

指導教授：梁耀文 博士

Advisor：Dr. Yew-Wen Liang

國立交通大學電控工程研究所



Submitted to Institute of Electrical and Control Engineering
College of Electrical Engineering and Computer Science
National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master

in

Electrical and Control Engineering

July 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 一 百 年 七 月

結合順滑模態控制與參考橫擺角速度選取方式 於車輛側向控制之研究

研究生：吳榮人

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電控工程研究所

摘要

本論文利用直接橫擺力矩控制（ Direct Yaw Moment Control，DYC ）技術探討車子側向控制之穩定性與操控性的相關議題。論文中結合順滑模態控制設計與參考橫擺角速度選取的方式使側滑角能維持在容許範圍內以維持行車之穩定性。首先，本論文針對 2-DOF 的線性車子模型分別設計時變與非時變的參考橫擺角速度，模擬結果顯示不但行車的穩定性可以確保，操控性能也可以有效的提升。所獲得的結果也應用在電子車具有煞車致動器故障時之可靠度控制議題，模擬結果顯示在部分致動器發生故障時車輛仍可維持其穩定性與操控性。最後，本論文也探討汽車行駛於 μ -split 路面時利用 DYC 控制方式的穩定問題，模擬結果顯示所提控制設計之有效性。

Study of combining SMC design and the reference yaw rate selection in vehicle lateral control

Student : Rong-Ren Wu

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

Institute of Electrical and Control Engineering

National Chiao Tung University

ABSTRACT

In this thesis, we study the vehicle stability and maneuverability issues using the direct yaw moment control (DYC) technique. The proposed scheme employs the sliding mode control (SMC) design and the reference yaw rate selection approach so that the vehicle not only maintains its stability but also achieves allowable maneuverability. For a 2-DOF linearized vehicle model, this thesis provides both time varying and time-invariant reference yaw rates, which are shown from simulation to be able to realize the maneuverability as better as possible and keep the vehicle under stable operation. We also extend the results to the reliability issues when the vehicle experiences actuators' outage. Besides, the DYC scheme is also employed to investigate the stability when vehicle drives on μ -split road. Simulation results demonstrate the benefits of the proposed scheme.

誌 謝

本論文得以順利完成需要感謝很多人的關心與協助。首先感謝我的指導教授梁耀文博士，感謝老師這兩年來的細心與耐心指導及對我孜孜不倦的教誨，讓我在遇到困難時指導我前進的方向，不僅在研究過程中受益良多，且待人處事各方面有許多成長。同時我也要感謝口試委員廖德誠博士、鄭治中博士和宋朝宗博士給予建設性的建議與指導使本論文更臻完備。

接下來，我要感謝實驗室的徐勝均學長、魏源廷學長、林立岡學長和鄭旭志學長在我遇到困難時能給予適時的意見與幫助，也謝謝同學智強、君豪以及學弟仰靚、弘儒和學妹鈞鈞的幫忙，讓我在準備碩論的過程中得以順利。謝謝 906 的各位及交大認識的朋友們，因為和你們的相識，讓我在兩年研究生涯多采多姿充滿回憶，沒有你們論文不可能順利完成。

最後要感謝我最愛的父親、母親與姊姊，由於你們的大力支持與鼓勵，使我可以無後顧之憂的在學業上勇往直前，也感謝在交大求學過程中陪伴著我的儀涵，謝謝你們，謹將此論文獻給你們。

吳榮人 謹識

中華民國一百年七月

新竹 交通大學

目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌 謝.....	iii
目 錄.....	iv
表 目 錄.....	vi
圖 目 錄.....	vii
符 號 表.....	x
第 1 章 緒論.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究動機.....	3
1.3 論文架構.....	5
第 2 章 相關研究.....	6
2.1 順滑模控制.....	6
2.1.1 順滑模控制介紹.....	7
2.1.2 順滑模控制器之設計.....	10
2.2 Magic formula 輪胎模型	14
2.3 四輪車輛動態模型.....	19
2.3.1 線性 2-DOF 車子動態	20
2.3.2 非線性 7-DOF 車子動態	22
第 3 章 參考橫擺角速度的選取（權重的設計）	24
3.1 側重操控性之參考橫擺角速度： γ_1 (maneuverability)	25
3.2 側重穩定性之參考橫擺角速度： γ_2 (stability)	29
3.3 權重（weighting）的介紹.....	33
3.4 權重（weighting）為非時變與時變的方式.....	34

3.4.1 權重 (weighting) 為非時變.....	35
3.4.1.1 change lane 動作之模擬.....	36
3.4.1.2 兩次 change lane 動作之模擬.....	39
3.4.2 權重 (weighting) 為時變.....	42
3.4.2.1 change lane 動作之模擬.....	43
3.4.2.2 躲避障礙物而進行 change lane 動作之模擬.....	46
3.4.2.3 兩次 change lane 動作之模擬.....	50
3.4.2.4 J 轉向 (J-turn) 動作之模擬.....	53
第 4 章 應用順滑模控制的可靠度設計於全車模型.....	57
4.1 問題描述.....	57
4.2 可靠度控制的設計.....	58
4.2.1 輸出追蹤公式化 (Output Tracking Formulation)	58
4.2.2 順滑模態控制的可靠度設計.....	60
4.2.3 錯誤偵測與診斷機制 (FDD).....	62
4.3 權重 (weighting) 的量測方式.....	62
4.4 結合順滑模態控制的可靠度設計與權重觀念於全車模型.....	65
4.4.1 change lane動作之模擬 (乾路面)	66
4.4.2 change lane動作之模擬 (packed snow路面)	71
4.5 順滑模態控制的可靠度設計應用於 μ -split 路面之探討	77
第 5 章 結論與未來研究方向.....	82
5.1 結論.....	82
5.2 未來研究方向.....	82
參考文獻.....	83
附錄.....	88

表 目 錄

表 2.1 車子輪胎的係數值 $a_0 \sim a_8$ (F_z in kN)	16
表 2.2 車子模擬參數.....	23



圖目錄

圖 1.1	順滑模態控制的可靠度設計之流程圖.....	4
圖 2.1	上順滑面快慢的示意圖.....	8
圖 2.2	順滑模態示意圖.....	9
圖 2.3	切跳 (chattering) 現象示意圖.....	9
圖 2.4	順滑層 (sliding layer) 示意圖.....	10
圖 2.5	Magic formula 參數表式之意義	16
圖 2.6	縱向力使用 Magic formula 輪胎模型.....	18
圖 2.7	側向力使用 Magic formula 輪胎模型.....	18
圖 2.8	四輪車輛模型.....	19
圖 2.9	非線性 single track 車子模型.....	20
圖 3.1	change lane 模擬圖 (γ_d 採用 γ_1).....	28
圖 3.2	Mz 模擬圖 (γ_d 採用 γ_1).....	29
圖 3.3	change lane 模擬圖 (γ_d 採用 γ_2).....	31
圖 3.4	側滑角(β).....	32
圖 3.5	Mz 模擬圖 (γ_d 採用 γ_2).....	32
圖 3.6	估測非時變權重所需的 $y_{\max}$ 值.....	37
圖 3.7	change lane 模擬圖 (γ_d 採用非時變權重).....	37
圖 3.8	Mz 模擬圖 (γ_d 採用非時變權重).....	38
圖 3.9	非時變權重之 γ_d 比較圖	38
圖 3.10	非時變權重之 γ_d 所影響的側滑角比較圖	39
圖 3.11	估測非時變權重所需的 $y_{\max}$ 值	40
圖 3.12	兩次 change lane 模擬圖 (γ_d 採用非時變權重).....	41
圖 3.13	兩次 change lane 之 Mz 模擬圖 (γ_d 採用非時變權重).....	41

圖 3.14	change lane 模擬圖 (γ_d 採用時變權重).....	44
圖 3.15	權重隨時間的變化圖.....	44
圖 3.16	Mz 模擬圖 (γ_d 採用時變權重).....	45
圖 3.17	時變權重之 γ_d 的比較圖.....	45
圖 3.18	時變權重之 γ_d 所影響的側滑角比較圖.....	46
圖 3.19	模擬躲避障礙物而採用的車速 (-5m/s).....	47
圖 3.20	躲避障礙而進行 change lane 的模擬圖 (γ_d 採用時變權重).....	47
圖 3.21	躲避障礙而進行 change lane 的權重變化圖.....	48
圖 3.22	躲避障礙而進行 change lane 的 Mz 模擬圖 (γ_d 採用時變權重).....	48
圖 3.23	躲避障礙而進行 change lane 之 γ_d 的比較圖.....	49
圖 3.24	躲避障礙而進行 change lane 之 γ_d 所影響的側滑角比較圖.....	49
圖 3.25	兩次 change lane 模擬圖 (γ_d 採用時變權重).....	50
圖 3.26	兩次 change lane 的權重變化圖.....	51
圖 3.27	兩次 change lane 的 Mz 模擬圖 (γ_d 採用時變權重).....	51
圖 3.28	兩次 change lane 之 γ_d 的比較圖.....	52
圖 3.29	兩次 change lane 之 γ_d 所影響的側滑角比較圖.....	52
圖 3.30	J-turn 轉向之模擬圖 (γ_d 採用時變權重).....	53
圖 3.31	J-turn 轉向的權重變化圖.....	54
圖 3.32	J-turn 轉向的 Mz 模擬圖 (γ_d 採用時變權重).....	54
圖 3.33	J-turn 轉向之 γ_d 的比較圖.....	55
圖 3.34	J-turn 轉向之 γ_d 所影響的側滑角比較圖.....	55
圖 3.35	J-turn 轉向之 X-Y 座標圖.....	56
圖 4.1	change lane 動作之前輪轉向角.....	64
圖 4.2	估測到的權重 ($\sigma = 0.5618$).....	64
圖 4.3	change lane 模擬圖 ($\sigma = 0.5618$).....	65

圖 4.4	change lane 於正常(乾)路面之 FDD 圖	67
圖 4.5	change lane 於正常(乾)路面，左後輪致動器 1.5 秒故障	68
圖 4.6	在正常(乾)路面的車速比較圖	68
圖 4.7	在正常(乾)路面的順滑變數 (sliding variable) 比較圖	69
圖 4.8	在正常(乾)路面的輪子制動/驅動扭力比較圖	69
圖 4.9	在正常(乾)路面的輪子轉速比較圖	70
圖 4.10	在正常(乾)路面的 X-Y 座標圖	70
圖 4.11	change lane 於 packed snow 路面之 FDD 圖	72
圖 4.12	change lane 於 packed snow 路面，左後輪致動器 1.5 秒故障	73
圖 4.13	在 packed snow 路面的車速比較圖	73
圖 4.14	在 packed snow 路面的順滑變數 (sliding variable) 比較圖	74
圖 4.15	在 packed snow 路面的輪子制動/驅動扭力比較圖	74
圖 4.16	在 packed snow 路面採用權重的 RSMC 之輪子制動/驅動扭力	75
圖 4.17	在 packed snow 路面的輪子轉速比較圖	75
圖 4.18	在 packed snow 路面採用權重的 RSMC 之輪子轉速	76
圖 4.19	在 packed snow 路面的 X-Y 座標圖	76
圖 4.20	行駛於 μ -split 路面，左後輪致動器 0 秒故障	78
圖 4.21	在 μ -split 路面的車速比較圖	78
圖 4.22	在 μ -split 路面的順滑變數 (sliding variable) 比較圖	79
圖 4.23	在 μ -split 路面的輪子制動/驅動扭力比較圖	79
圖 4.24	在 μ -split 路面的輪子轉速比較圖	80
圖 4.25	在 μ -split 路面之四個輪子的側向力比較圖	80
圖 4.26	在 μ -split 路面的 X-Y 座標圖	81
圖 (A)	車輛轉向到達穩態時的示意圖	89

符號表

μ	輪胎與地面之摩擦係數
$\hat{\mu}$	輪胎與地面之摩擦係數的估測值
f_{xi}	第 i 個輪胎之縱向摩擦力
f_{yi}	第 i 個輪胎之側向摩擦力
F_z	輪胎所受之正向力
λ	輪胎滑移率
α	輪胎滑移角
α_f	前輪之輪胎滑移角
α_r	後輪之輪胎滑移角
ω_i	第 i 個輪胎之角速度
δ_i	第 i 個輪胎之轉向角
T_i	第 i 個輪胎之制動/驅動扭力
I_z	車子的轉動慣量
I_w	輪胎的轉動慣量
R_w	輪胎半徑
β	車子之側滑角
$\hat{\beta}$	車子之側滑角的估測值
γ	車子之橫擺角速度
γ_d	車子之參考橫擺角速度
M_z	額外產生的力矩
F_y	車子側向力之總和
v	車子前進速度
v_x	車子縱向速度
v_y	車子側向速度



a_y	車子的外部加速度
C_f	前輪輪胎之橫向勁度
C_r	後輪輪胎之橫向勁度
l_f	車子中心點到前輪軸之垂直距離
l_r	車子中心點到後輪軸之垂直距離
l_t	前輪軸距或後輪軸距之一半
l	前輪軸到後輪軸之垂直距離
τ	時間常數
m	車子質量



第 1 章

緒論

1.1 研究背景

由於現在汽車技術的進步，車子的行駛速度也不斷的提升。根據統計，所有的事故中有超過 40% 是因為車速介於 80km/h 與 100km/h 而造成車子發生側滑（spin out）的意外，而車速在 160km/h 以上所發生的意外幾乎都是由於側滑所導致的 [1]。因此，如何提升汽車行駛的安全性是現在汽車重要的研究課題。

側滑（spin out）的產生是因為車體的側滑角（side-slip angle）過大，進而使車身失控而出現打轉或飄移的行為。當車速過快、行駛在摩擦力較低的路面 [2] 或是在一些特殊情況，例如：緊急避障、行駛於 μ -split 路面，皆會使側滑角變大而造成車子不穩定，所以對轉向的穩定度而言，側滑角的大小是一個很重要的參考依據。在 SAE 文獻 [3] 中提到，對一般駕駛者而言，能掌控的側滑角在 2° 左右，而專業的駕駛者則可容許在 4° 以下。但是側滑角的限制其實會隨路面狀況而改變，容許穩定的側滑角最大值並不如上面所述這麼嚴苛，在 AVEC 文獻 [1] 提到，在乾路面上，側滑角的限制在 10° 附近，若超過此限制，車子可能會喪失掉操控性而使其失控，在踩踏過的雪地（packed snow）上，側滑角的限制在 4° 左右。

當車體穩定性失衡時，若有一個主動式的系統能及時防止車輛失控，對駕駛者而言是非常重要的。由於 ABS（Anti-lock Braking System）、TCS（Traction Control System）分別在減速、加速的時候才透過控制縱向滑移率（slip ratio）來保證制動與驅動時縱向動力學的性能，間接的控制減速、加速時側向的穩定

性，但是在轉向的過程中，若所受的側向力接近輪胎和地面附著的極限，則汽車將有可能會失去操控性與穩定性。在 1980 年代，Vehicle Stability Control(VSC)系統被發展並應用於改善車子的穩定性能，其目的是保持車子在物理限制的前提下仍擁有其操控性 [4]。然而，不同汽車廠商對穩定性控制系統有不同的名稱，例：**Vehicle Stability Control—VSC** (TOYOTA, LEXUS)、**Dynamic Stability Control—DSC** (BMW, Mazda)、**Electronic Stability Program—ESP** (Audi, Chrysler, Mercedes, VW)、**StabiliTrak** (BUICK, Cadillac)、**AdvanceTrac** (Ford, LINCOLN)、**Vehicle Dynamics Control—VDC** (NISSAN) [5]等，其結構與功能類似，在這之中又以Bosch 提出的**Electronic Stability Program (ESP)** 最早商業化 [6]。本論文為了方便起見，統一稱作ESP。

ESP是一種主動式的安全系統，它包含了ABS與TCS並加入了橫擺力矩控制 (Yaw Moment Control)，從制動、驅動以及轉向的情況皆對汽車的穩定性有了很大的功用。其基本原理分為兩部分，第一部分是軌跡保持的操控性問題，由車子的橫擺角速度 (yaw rate) 來描述，另一部分則是穩定性的問題，可由車子質心的側滑角來描述 [5]。透過控制車子的橫擺角速度與側滑角兩個變數來探討車體的操控性及穩定性是ESP主要的方式，但由於兩個變數存在著耦合的關係，也造成控制上的難度。橫擺力矩控制 (Yaw Moment Control) 可經由影響前後軸側向力的平衡或差動制動力 (differential braking) 來產生穩定的橫擺力矩。[5], [7]-[8]一般而言有：

- 1.主動轉向系統 (例如：主動前輪轉向、主動後輪轉向、4WS)

2. **DYC** (Direct yaw control，直接橫擺力矩控制)：控制車子驅動和制動力
主動轉向系統在側向加速度較小的幅度內，控制力道取決於與方向盤轉角成比例的輪胎側偏力，但由於車身的限制，在高側向加速度時，側偏力不再與方向盤成比例，進而導致過多轉向。而 **DYC** 則是當車體不穩時，藉由對四個輪子的驅動與制動所產生的縱向力，額外產生一個可穩定的橫擺力矩，此方式也被

ESP 系統廣泛應用，為目前效果很好的穩定方式之一，本論文接下來也是透過此方式來改善車子的操控性與穩定性。

1.2 研究動機

對車子外部動態而言，車輪的轉向角若僅由駕駛者輸入，則可把它視為一個不可控的元素。而透過輪子驅動、制動所額外產生的橫擺力矩在此我們可把它當作一個控制輸入，從相對階數的觀念而言，一個控制輸入僅只能控制一個變數，所以我們不能同時控制橫擺角速度與側滑角兩個變數 [8]-[10]。在本論文中，橫擺力矩控制（Yaw Moment Control）是採用對橫擺角速度去做控制，並透過順滑模態控制（Sliding Mode Control：SMC）使實際的橫擺角速度（actual value of the yaw rate）與參考的橫擺角速度（reference yaw rate）之間的誤差變小，因而達到良好的可控性。

由於只對橫擺角速度作控制，雖保有不錯的操控性，但車子的穩定性則無法確保，而就算保有穩定性，可能又會喪失掉車子的操控性。為了改善這些問題，本論文透過選取參考的橫擺角速度（reference yaw rate）方式，在不失穩定性的情況下，仍可保有不錯的操控性，此部分會在第三章詳述之。

另一方面，由於近幾年石化能源的減少及大家對環境污染的重視，能源汽車的發展有其優勢與迫切性。本論文在第四章考慮以電子車（Electric Vehicles：EVs）的模型來當作控制對象，相對於傳統內燃引擎（internal combustion engine：ICE），電子車（EVs）的優勢更多 [11]。在 [12]-[13]文章中，總結出擁有以下優點：(1)馬達產生的轉矩很快也很精確、(2)馬達可以安裝在四個輪子上、(3)可以很精確的知道馬達的轉矩大小，這些優勢使得電子車（EVs）比起傳統ICE型的車子可以更輕易的估計路面的情況，也由於四個馬達皆可獨立的去驅動或制動，對比於內燃引擎（ICE）來說，橫擺力矩控制（Yaw Moment Control）可以提供更多的方式來維持ESP系統的穩定。

1.3 論文架構

本論文在後續的章節編排如下所述：第二章介紹順滑模態控制理論和 Magic formula 輪胎模型以及四輪車子動態模型（線性 2-DOF 車子模型、非線性 7-DOF 車子模型）。第三章先說明側重操控性的參考橫擺角速度（reference yaw rate）以及側重穩定性的參考橫擺角速度之觀念與優缺點，接著再引入權重的觀念來改善參考的橫擺角速度使車子的穩定性可以獲得改善。在這之中，我們從線性 2-DOF 的車子模型中，估測出非時變的權重，但也因為它不隨時間變動的缺點，最後為了符合實際應用而設計出一個可隨車速、前輪轉向角而變動的權重並應用於線性的簡化模型使得車子在保有穩定性的前提下又可擁有不錯的操控性。第四章則應用順滑模態控制的可靠度設計方式並結合權重的觀念於非線性的全車模型中，探討在車速過快或行駛於低摩擦力路面以及行駛在直線的 μ -split 路面時，輪子煞車扭力發生故障之可靠度問題去做分析與討論。第五章做結論與討論未來可研究之方向。



第 2 章

相關研究

2.1 順滑模態控制

目前已有大量文獻採取順滑模態控制 (sliding mode control, SMC) 來解決各式各樣的控制問題，其原因不外乎它擁有以下優點：反應快速、實現容易、對不確定性 (uncertainties) 或外在干擾具有強健性 (Robustness) [15]-[21]。在非線性可靠度控制部分，目前有三種控制方式，依序為線性二次調節 (Linear quadratic regulation, LQR)、 H^∞ [22]-[24]與順滑模態控制 (sliding mode control, SMC) [20]，而前面兩種方式都需要針對二次成本函數 (quadratic cost function) 設計出最佳控制律，故不可避免的須要去解Hamilton-Jacobi方程式或不等式的問題。眾所周知，解Hamilton-Jacobi方程式非常不容易，所以LQR與 H^∞ 設計方式在實現上有其困難性。不過透過利用幕級數 (power series) 方法 [25]，可以得到Hamilton-Jacobi方程式的近似解，但此方法並沒有考慮穩健性 (Robustness) 的問題，若系統存在不確定性 (uncertainties) 或是外在干擾時，系統可能會受到影響而不穩定。然而，透過順滑模態控制 (sliding mode control, SMC) 的方式，不僅可以解決可靠度問題，而且SMC還容忍著系統不確定性或對外在干擾的穩健性 (Robustness)，更不必去求解Hamilton-Jacobi方程式或不等式的解，因而大大減少計算上的負擔也增加控制律實現的可行性，所以本論文皆採取順滑模態的控制方式。在本節我將介紹順滑模態控制並簡述其控制器的設計方式，而SMC的可靠度設計部分我們會留到第四章針對非線性的可靠度控制問題再去探討。

2.1.1 順滑模態控制介紹

順滑模態控制(sliding mode control, SMC), 或者稱變結構控制 (variable structure control, VSC), 在 1960 年代由俄國人 Filippov 率先提出的非線性控制法則。其特點在於利用不連續的控制輸入, 使系統最終會被限制在一個預先決定的順滑面 (sliding surface) 上, 而受控系統的行為則是由順滑面來規範。當順滑函數為零時, 表示系統上到了順滑面, 此時狀態軌跡沿著順滑面滑行的運動方式我們稱之為順滑模態 (sliding mode), 所以順滑面的選取方式在 SMC 的設計上就顯得非常重要。

對一般系統而言, 順滑函數可能是線性或非線性的, 這邊我們選擇線性的順滑函數形式如下:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.1)$$

其中, $\mathbf{x}$ 表示系統狀態變數。

接著, 為了使讓系統可以上順滑面, 所以必須使設計的控制器滿足下列條件:

$$\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \leq -\eta \|\mathbf{s}\|_2, \quad \eta > 0 \quad (2.2)$$

其中 $\|\cdot\|_p$ 代表 p -範數 (p -norm) [26]。

而 (2.2) 式又稱為 "到達條件 (reaching condition)" [27], 下面我們對 "到達條件 (reaching condition)" 做了一些解釋如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{s}^T \mathbf{s}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{s}\|_2^2) \\ &= \|\mathbf{s}\|_2 \cdot \frac{d}{dt} \|\mathbf{s}\|_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

之後把 (2.3) 式的結果帶入 (2.2) 式, 可得 (2.4) 式

$$\|\mathbf{s}\|_2 \cdot \frac{d}{dt} \|\mathbf{s}\|_2 \leq -\eta \|\mathbf{s}\|_2 \quad (2.4)$$

把 (2.4) 式整理後，如 (2.5) 式所示：

$$\frac{d}{dt} \|s\|_2 \leq -\eta \quad (2.5)$$

由上面的推導，可發現 $\|s(x(t))\|_2$ 對時間的變化率都小於或等於 $-\eta$ ，這也表示 $s(x(t))$ 有限時間會變成 $s(x(t))=0$ ，也暗示著 $x(t)$ 有限時間會上順滑面上。除此之外，當 η 越大，狀態上到順滑面的速度也會越快，所以 η 將是影響軌跡上順滑面快慢的的關鍵，如圖 2.1 所示。

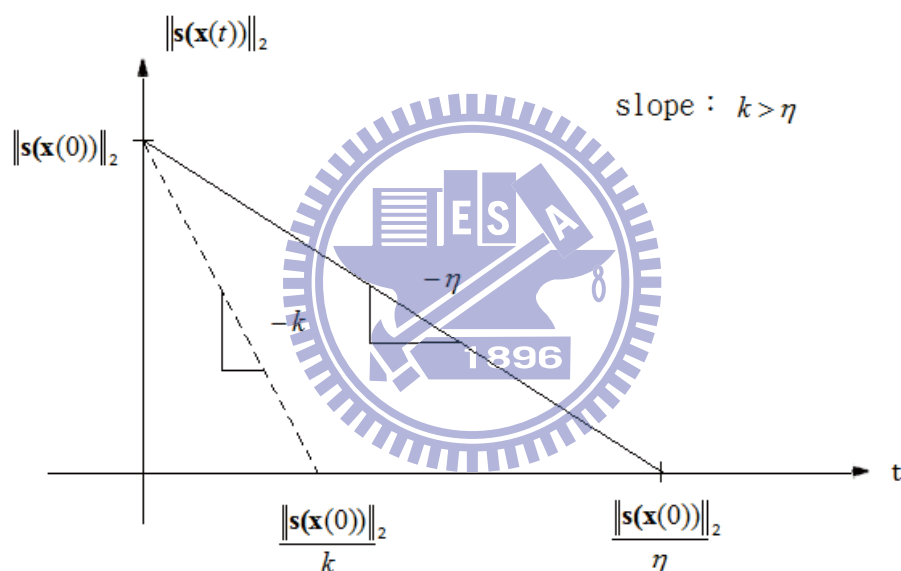


圖 2.1 上順滑面快慢的示意圖

有了 (2.2) 式此條件，可保證任一狀態倘若在順滑面上，則其軌跡必會趨近順滑面，也正因如此，當系統進入順滑模態（sliding mode）後，其動態會受控於順滑面，如圖 2.2 所示。

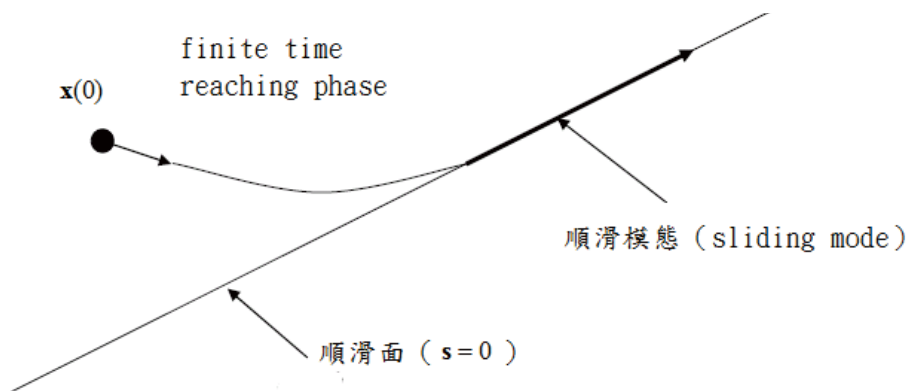


圖 2.2 順滑模態示意圖

但實際上，早期的順滑模態控制由於使用 sgn 函數來設計，因而造成狀態在趨近順滑面的過程中受到不連續控制輸入的影響，並不會完全落在順滑面上，而是在順滑面附近來回變動，而這也造成順滑模態控制若在高頻做切換的動作時會有"切跳 (chattering)"現象。此現象除了會產生不必要的能量消耗外，嚴重則會激發一些系統潛在於高頻的未模部分 (high frequency unmodeled parts) 進而使系統不穩定，如圖 2.3 所示。

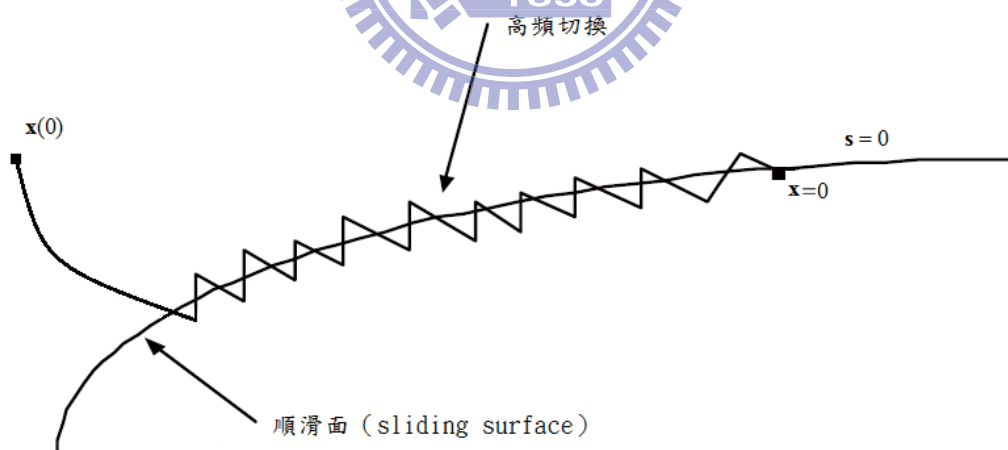


圖 2.3 切跳 (chattering) 現象示意圖

然而，切跳現象雖無法避免但其大小可由控制輸入的程度而定，在 [28] 提出順滑層 (sliding layer) 的概念，其順滑層的示意圖如下：

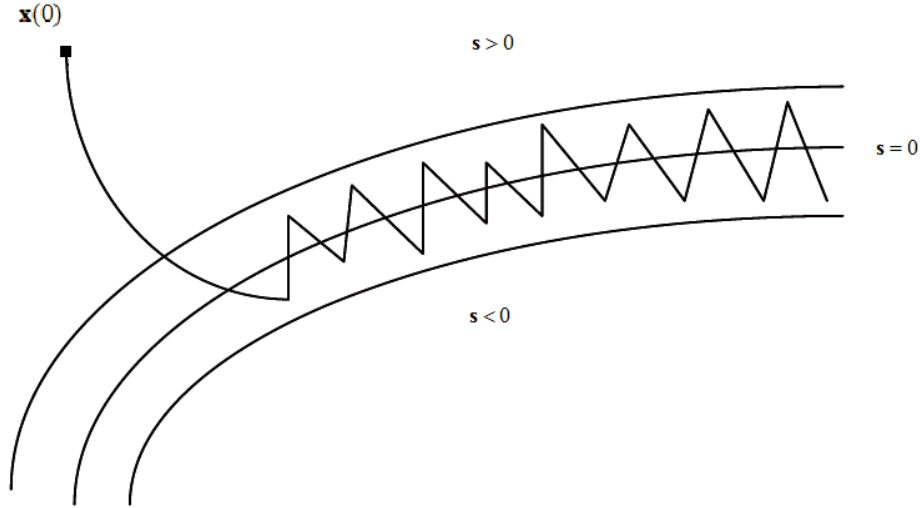


圖 2.4 順滑層 (sliding layer) 示意圖

其方式是透過飽和函數 (Saturation Function)、磁滯函數 (Hysteresis Function)、磁滯-飽和函數 (Hysteresis Saturation Function) 來取代原來的符號函數 (Sign Function)，而這些方式應用於實際系統中，也確實可以獲得有效的改善。

2.1.2 順滑模態控制器之設計

順滑模態控制器的設計主要分成二個步驟 [27], [29]-[31]，如下：

步驟一：選取適當的順滑面使系統的軌跡在順滑模態時能滑向控制目標點。

步驟二：設計合適的控制器使系統能在有限時間內上到順滑面

以下我們考慮一非線性動態系統如 (2.6)-(2.7) 式：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_o(\mathbf{x}) + G_o(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

其中 $\mathbf{x} \in R^n$ 為狀態變數， $\mathbf{u} \in R^m$ 為控制輸入， $\mathbf{y} \in R^2$ 為系統輸出， $\mathbf{f}_o(\mathbf{x}) \in R^n$ 及

$G_o(\mathbf{x}) \in R^{n \times m}$ 為已知的平滑函數。

接著定義系統輸入-輸出關係式 (input-output relation equation) 如下：

$$\begin{bmatrix} y_1^{(p)} \\ y_2^{(q)} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (2.8)$$

其中 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$ 、 $G(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} G_1(\mathbf{x}) \\ G_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ 。

y_1 與 y_2 之相對階數 (relative degree) 分別為 p 與 q , $\mathbf{f}: R^n \rightarrow R^2$ 及 $G: R^n \rightarrow R^{2 \times m}$ 。

此外，對所有 $\mathbf{x}$ 而言，我們假設 $G(\mathbf{x})$ 為列滿秩 (full row rank) 。 $\mathbf{d}$ 為外在干擾 (external disturbance) 所造成的擾動，並假設 $\|\mathbf{d}\|_2 \leq \rho$, 且 $\rho > 0$ 。

控制律設計的目標：希望透過控制律使系統輸出追蹤到參考輸出 (reference output)，若假設 $\mathbf{y}_d$ 為參考輸出，其目的就是希望 $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_d$ 。另外，我們定義輸出誤差與順滑面分別為 (2.9) 與 (2.10) 式：

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d \quad (2.9)$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^{(p-1)} + a_{(p-1)} e_1^{(p-2)} + \dots + a_2 \dot{e}_1 + a_1 e_1 \\ e_2^{(q-1)} + b_{(q-1)} e_2^{(q-2)} + \dots + b_2 \dot{e}_2 + b_1 e_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

其中 $a_i > 0$, $i = 1, \dots, (p-1)$ 與 $b_j > 0$, $j = 1, \dots, (q-1)$

然後我們考慮設計控制律如下所示：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \quad (2.11)$$

$\mathbf{u}_0$ 的目的在使狀態維持在順滑面上，至於 $\mathbf{u}_1$ 則是使系統狀態能在有限時間上到順

滑面上。而 $\mathbf{u}_0$ 對應的條件，我們可以用 (2.12) 式來表示

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

在不考慮外在干擾的情況下，來求得 $\mathbf{u}_0$ （令 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ ）。其推導如下：

首先，對順滑面微分

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{s}} &= \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e_1^{(p)} + a_{(p-1)}e_1^{(p-1)} + \dots + a_2\ddot{e}_1 + a_1\dot{e}_1 \\ e_2^{(q)} + b_{(q-1)}e_2^{(q-1)} + \dots + b_2\ddot{e}_2 + b_1\dot{e}_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) + G_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_0 - y_{1d}^{(p)} + a_{(p-1)}e_1^{(p-1)} + \dots + a_2\ddot{e}_1 + a_1\dot{e}_1 \\ f_2(\mathbf{x}) + G_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_0 - y_{2d}^{(q)} + b_{(q-1)}e_2^{(q-1)} + \dots + b_2\ddot{e}_2 + b_1\dot{e}_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) - y_{1d}^{(p)} + a_{(p-1)}e_1^{(p-1)} + \dots + a_2\ddot{e}_1 + a_1\dot{e}_1 \\ f_2(\mathbf{x}) - y_{2d}^{(q)} + b_{(q-1)}e_2^{(q-1)} + \dots + b_2\ddot{e}_2 + b_1\dot{e}_2 \end{bmatrix} + G(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

可得 $\mathbf{u}_0 = -G^+(\mathbf{x}) \cdot \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) - y_{1d}^{(p)} + a_{(p-1)}e_1^{(p-1)} + \dots + a_2\ddot{e}_1 + a_1\dot{e}_1 \\ f_2(\mathbf{x}) - y_{2d}^{(q)} + b_{(q-1)}e_2^{(q-1)} + \dots + b_2\ddot{e}_2 + b_1\dot{e}_2 \end{bmatrix}$ (2.13)

其中 $G^+(\mathbf{x}) = -G^T(\mathbf{x}) \cdot [G(\mathbf{x}) \cdot G^T(\mathbf{x})]^{-1}$ 為 $G(\mathbf{x})$ 的 pseudo inverse。

然而，狀態在趨近順滑面的過程中，可能會遭受到外部雜訊的干擾而使狀態離開順滑面，因此我們必須再透過一個不連續的控制律 $\mathbf{u}_1$ 把離開順滑層的狀態推

回順滑面上。 $\mathbf{u}_1$ 對應的條件為 (2.2) 式 $\boxed{\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \leq -\eta \|\mathbf{s}\|_2, \eta > 0}$ ，其推導過程如下：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{s}^T \cdot \begin{bmatrix} e_1^{(p)} + a_{(p-1)}e_1^{(p-1)} + \dots + a_2\ddot{e}_1 + a_1\dot{e}_1 \\ e_2^{(q)} + b_{(q-1)}e_2^{(q-1)} + \dots + b_2\ddot{e}_2 + b_1\dot{e}_2 \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{s}^T \cdot \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) + G_1(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) - y_{1d}^{(p)} + a_{(p-1)}e_1^{(p-1)} + \dots + a_2\ddot{e}_1 + a_1\dot{e}_1 + d_1 \\ f_2(\mathbf{x}) + G_2(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) - y_{2d}^{(q)} + b_{(q-1)}e_2^{(q-1)} + \dots + b_2\ddot{e}_2 + b_1\dot{e}_2 + d_2 \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{s}^T \cdot \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) - y_{1d}^{(p)} + a_{(p-1)}e_1^{(p-1)} + \dots + a_2\ddot{e}_1 + a_1\dot{e}_1 \\ f_2(\mathbf{x}) - y_{2d}^{(q)} + b_{(q-1)}e_2^{(q-1)} + \dots + b_2\ddot{e}_2 + b_1\dot{e}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{s}^T \cdot G(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) + \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{d}
 \end{aligned}$$

把 (2.13) 式的 $\mathbf{u}_0$ 帶入上式後，可得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{s}^T \cdot G(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{d} \\
 &\leq \mathbf{s}^T \cdot G(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_1 + \|\mathbf{s}^T\|_2 \cdot \|\mathbf{d}\|_2 \\
 &\leq \mathbf{s}^T \cdot G(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_1 + \rho \|\mathbf{s}^T\|_2 \quad (\text{因為 } \|\mathbf{d}\|_2 \leq \rho \text{ 且 } \rho > 0)
 \end{aligned}$$

為了滿足 (2.2) 式，我們設計 $\mathbf{u}_1$ 如 (2.14) 所示

$$\mathbf{u}_1 = -G^+(\mathbf{x}) \cdot \begin{bmatrix} (\rho + \eta) \cdot \text{sgn}(s_1) \\ (\rho + \eta) \cdot \text{sgn}(s_2) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

最後可使得

$$\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \leq - \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\rho + \eta) \cdot \text{sgn}(s_1) \\ (\rho + \eta) \cdot \text{sgn}(s_2) \end{bmatrix} + \rho \|\mathbf{s}^T\|_2$$

又因為 $\mathbf{s}^T \cdot \text{sgn}(\mathbf{s}) = s_1 \cdot \text{sgn}(s_1) + s_2 \cdot \text{sgn}(s_2) = |s_1| + |s_2| = \|\mathbf{s}\|_1$ 及向量範數 (norm) 不等

式 $\|\mathbf{s}\|_1 > \|\mathbf{s}\|_2$ ，故我們可把上式整理如下：

$$\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \leq -(\rho + \eta) \|\mathbf{s}\|_2 + \rho \|\mathbf{s}^T\|_2 = -(\rho + \eta) \|\mathbf{s}\|_2 + \rho \|\mathbf{s}\|_2 \leq -\eta \|\mathbf{s}\|_2$$

故最後控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ 如 (2.13) 與 (2.14) 式所示。

2.2 Magic formula 輪胎模型

輪胎的結構與力學特性決定了汽車的性能，其所受的影響例如：縱向力、側向力、垂直力等皆直接影響車子在行進中的操控性與穩定性。由於輪胎的複雜結構與其非線性的力學特性，所以如何選擇輪胎模型對車輛動力學的仿真技術而言影響甚大。這邊我們選用一個半經驗型的"Magic formula輪胎模型"[32]-[36]來描述單純縱向（pure longitudinal）的摩擦力模組，單純橫向（pure lateral）的摩擦力模組。

(1) 輪胎縱向摩擦力：

$$f_{xi}(\lambda_i) = D_1 \sin(C_1 \tan^{-1}(B_1 \lambda_i - E_1(B_1 \lambda_i - \tan^{-1}(B_1 \lambda_i)))) \quad (2.15)$$

輪胎縱向摩擦力中的各參數計算方式：

$$C_1 = a_0 \quad (2.16)$$

$$D_1 = a_1 \cdot F_z^2 + a_2 \cdot F_z = \mu_{x0} \cdot F_z \quad (2.17)$$

$$B_1 C_1 D_1 = (a_3 \cdot F_z^2 + a_4 \cdot F_z) \cdot e^{-a_5 \cdot F_z} \quad (2.18)$$

$$B_1 = \frac{B_1 C_1 D_1}{C_1 D_1} \quad (2.19)$$

$$E_1 = (a_6 \cdot F_z^2 + a_7 \cdot F_z + a_8) \quad (2.20)$$

其中 F_z 為輪胎所受之正向力， μ_{x0} 為(類似)最大縱向摩擦係數，是 Magic Formula 內部的一個常數， λ 為輪胎的滑移率（slip-ratio）。另外， $a_0 \sim a_8$ 為給定之參數 [32]-[33]，其數值如表 2.1 所示。一般認為，真正的縱向摩擦係數為

$$\mu_x = \frac{f_{xi}}{F_z} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
\text{也就是, } \frac{f_{xi}(\lambda_i)}{F_z} &= \frac{D_1 \sin(C_1 \tan^{-1}(B_1 \lambda_i - E_1(B_1 \lambda_i - \tan^{-1}(B_1 \lambda_i))))}{F_z} \\
&= \frac{(\mu_{x0} \cdot F_z) \cdot \sin(C_1 \tan^{-1}(B_1 \lambda_i - E_1(B_1 \lambda_i - \tan^{-1}(B_1 \lambda_i))))}{F_z} \\
&= \mu_0 \cdot \sin(C_1 \tan^{-1}(B_1 \lambda_i - E_1(B_1 \lambda_i - \tan^{-1}(B_1 \lambda_i)))) \\
&= \mu_x(\lambda_i)
\end{aligned}$$

所以可發現 μ_{x0} 是 $\mu_{xi}(\lambda_i)$ 的最大值。接著，利用 $a_0 \sim a_8$ 求出 D_1 後，用 D_1 去除以 F_z 即可求得 μ_{x0} ，也就是說 μ_{x0} 是一個可以求的定值。

(2) 輪胎橫向摩擦力：

$$f_{yi}(\alpha_i) = D_2 \sin(C_2 \tan^{-1}(B_2 \alpha_i - E_2(B_2 \alpha_i - \tan^{-1}(B_2 \alpha_i)))) \quad (2.22)$$

輪胎橫向摩擦力中的各參數計算方式：

$$C_2 = a_0 \quad (2.23)$$

$$D_2 = a_1 \cdot F_z^2 + a_2 \cdot F_z = \mu_{y0} \cdot F_z \quad (2.24)$$

$$B_2 C_2 D_2 = a_3 \cdot \sin\left(a_4 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{F_z}{a_5}\right)\right) \quad (2.25)$$

$$B_2 = \frac{B_2 C_2 D_2}{C_2 D_2} \quad (2.26)$$

$$E_2 = (a_6 \cdot F_z^2 + a_7 \cdot F_z + a_8) \quad (2.27)$$

其中 F_z 為輪胎所受之正向力， μ_{y0} 為(類似)最大(橫向)摩擦係數，是 Magic formula 內部的一個常數， α 為輪胎的滑移角 (slip angle)。如同縱向力一般，可以發現 μ_{y0} 是 $\mu_{yi}(\alpha_i)$ 的最大值。另外， $a_0 \sim a_8$ 其數值如表 2.1 所示 (附註：與縱向摩擦力中的各參數計算方式的 $a_0 \sim a_8$ 數值並不相同)。利用 $a_0 \sim a_8$ 求出 D_2

後，用 D_2 去除以 F_z 即可求得 μ_{y0} ，此時的 μ_{y0} 也是一個可以求的定值。

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
F_x, N	1.65	-21.3	1144	49.6	226	0.069	-0.006	0.056	0.486
F_y, N	1.30	-22.1	1011	1078	1.82	0.208	0.000	-0.354	0.707

表 2.1：車子輪胎的係數值 $a_0 \sim a_8$ (F_z in kN)

此外，縱向力 (f_{xi}) 與側向力 (f_{yi}) 的 Magic formula 摩擦力模組中的 B 、 C 、 D 和 E 依序為剛性因子 (stiffness factor)、形狀因子 (shape factor)、峰值 (peak value) 和曲率因子 (curvature factor) [34]，如圖 2.5。

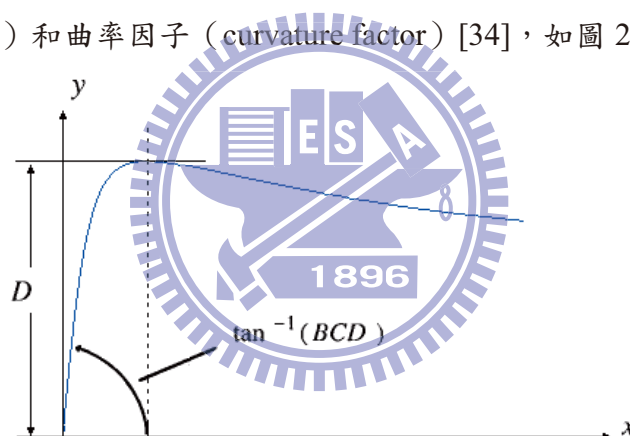


圖 2.5 Magic formula 參數表示之意義

討論不同路面的摩擦力模組：

路面摩擦力係數不同也會造成縱向力與側向力的改變，所以在接下來的部分我們針對路面狀況不同時，其 Magic formula 摩擦力模組表示方式做了以下的說明。由於 Magic formula，其為一個半經驗型的摩擦力模組，而是假設在乾路面下的情況下所發展出來的摩擦力模組，因此不論縱向或側向力其係數 $a_0 \sim a_8$ 也是針對乾路面所訂定。倘若我們想利用 Magic formula 來表示不同路面的縱向

力或側向力時，因已知一組係數 $a_0 \sim a_8$ ，其表示的是乾路面下的參數（附註：非乾路面的係數 $a_0 \sim a_8$ 我們並無從得知）。[36]我們假設輪胎的縱向勁度（longitudinal stiffness）和橫向勁度（cornering stiffness）為定值，以及輪胎的正向力（normal force）為定值，只考慮換 μ_{x0} 與 μ_{y0} 是可變的（i.e., $\mu_x(\lambda)$ 與 $\mu_y(\alpha)$ 的最大值是會隨著不同路面變的）。換句話說，在只擁有（針對乾路面）已知的係數 $a_0 \sim a_8$ 、和相對應求得的 μ_{x0} 與 μ_{y0} （其中 $\mu_{x0} = \mu_{y0} = \mu_0$ ），透過其提供的方法來描述當 $\mu_0 \rightarrow \mu$ （已知的值）時，則上一個部份所提出的 $f_{xi}(\lambda_i)$ 或 $f_{yi}(\alpha_i)$ 會如何變化。

變化方式如下：對應乾路面的 μ_0 以及係數 $a_0 \sim a_8$ 為我們已知，假設對應新路面的 μ 也為已知。定義如 (2.28) 式：



(2.28)

當 $\mu_0 \rightarrow \mu$ ，則

(1) 輪胎縱向摩擦力($f_{xi}(\lambda_i) \rightarrow f_{xi}'(\lambda_i)$):

$$f_{xi}'(\lambda_i) = R \cdot D_1 \sin(C_1 \tan^{-1}(B_1 \lambda_i - E_1(B_1 \lambda_i - \tan^{-1}(B_1 \lambda_i)))) \quad (2.29)$$

(2) 輪胎橫向摩擦力($f_{yi}(\alpha_i) \rightarrow f_{yi}'(\alpha_i)$):

$$f_{yi}'(\alpha_i) = R \cdot D_2 \sin(C_2 \tan^{-1}(B_2 \alpha_i - E_2(B_2 \alpha_i - \tan^{-1}(B_2 \alpha_i)))) \quad (2.30)$$

附註：一般而言， $\mu_0 = 1$ [36]。

圖 2.6 與圖 2.7，其 f_x 為縱向力(單位：N)， λ 為輪胎滑移率 (slip-ratio)， f_y 為

側向力(單位：N)， α 為輪胎滑移角 (slip-angle)，垂直力 $F_z = 3.188 \text{ (kN)}$ 。

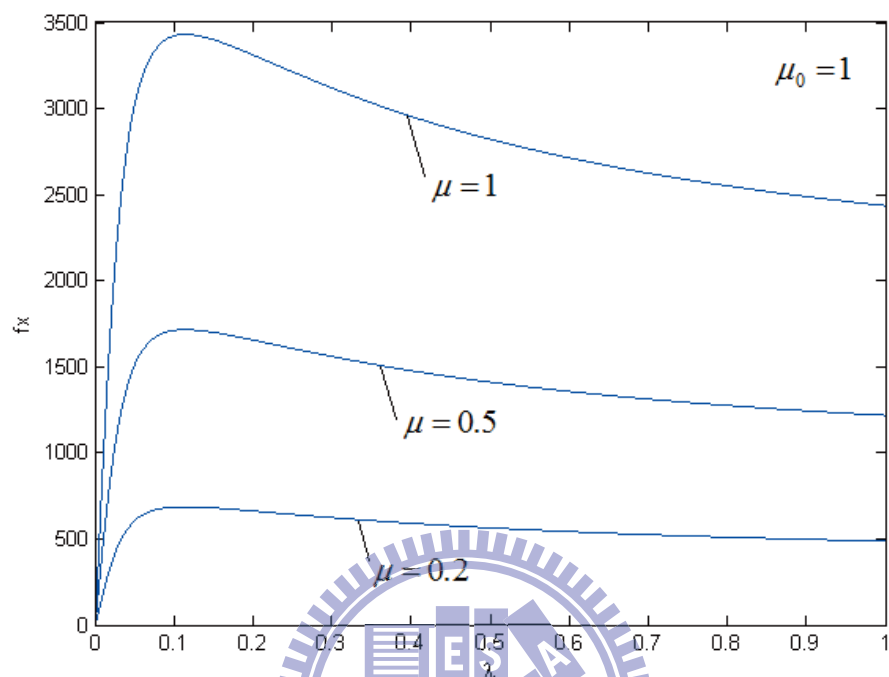


圖 2.6 縱向力使用 Magic formula 輪胎模型

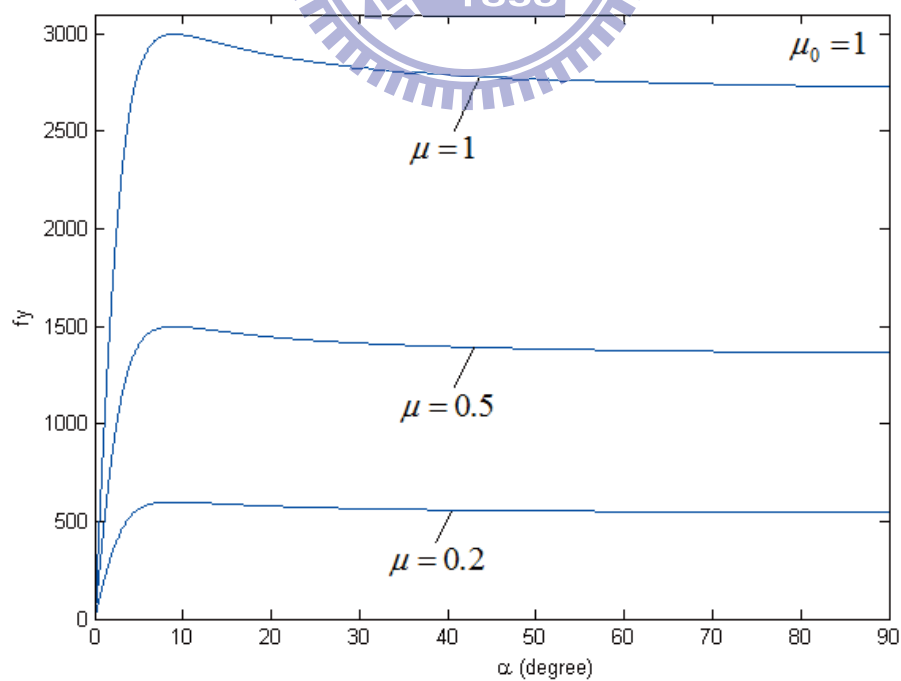


圖 2.7 側向力使用 Magic formula 輪胎模型

2.3 四輪車輛動態模型

考慮偏航平面 (yaw plane) 的動態並考慮前輪轉向角為 δ_f ，而後輪轉向角為零。接著依序對線性 2-DOF 與非線性 7-DOF 的車子動態做介紹，我們的四輪車輛模型如圖 2.8 所示：

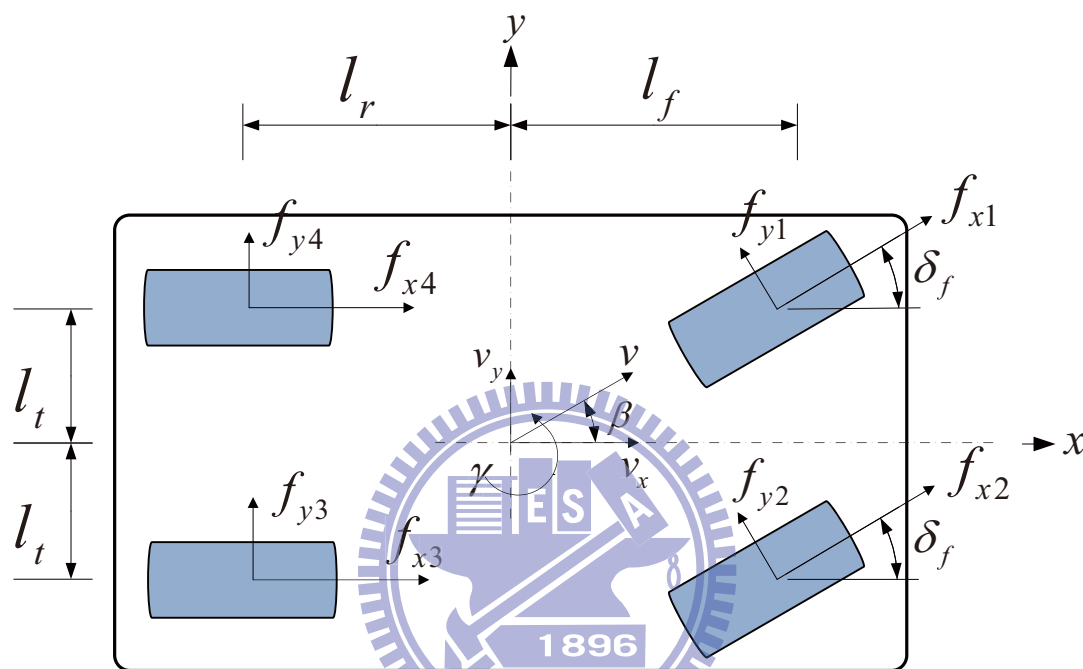


圖 2.8 四輪車輛模型

四輪車的中心點為車子的重心 (CG: center of gravity)；以中心為起點，車頭方向為正向的 x 座標，車子左邊方向為正向的 y 座標； v 為車子前進的速度，而 v_x 與 v_y 則分別為車子速度在 x 座標與 y 座標上的分量； γ 為橫擺角速度 (yaw rate)； β 為側滑角 (side-slip angle)； l_f 與 l_r 分別為車子中心點到前輪軸與後輪軸之垂直距離， l_t 則為前輪軸距或後輪軸距之一半。在本論文中底標的數字 1, 2, 3, 4 依序是表示前左輪 (front-left)，前右輪 (front-right)，後右輪 (rear-right)，後左輪 (rear-left)。

2.3.1 線性 2-DOF 車子動態

考慮 2-DOF 的 single track 模型 [37]，如圖 2.9 所示。由於它是由一個前輪與一個後輪所組成的模型，所以這邊我們假設四輪車右側與左側的模型相同皆為 single track 模型。從該模型可以導出(2.30)與(2.31)式 [38]：

$$ma_y = \sum F_y \quad (2.31)$$

其中 $\sum F_y = 2f_{yf} \sin \delta_f + 2f_{yf} \cos \delta_f + 2f_{yr}$ ；

$$I_z \dot{\gamma} = (2f_{yf} \sin \delta_f)l_f + (2f_{yf} \cos \delta_f)l_f - (2f_{yr})l_r + M_z \quad (2.32)$$

M_z ：額外產生的力矩

a_y ：為車子的外部加速度（lateral acceleration）

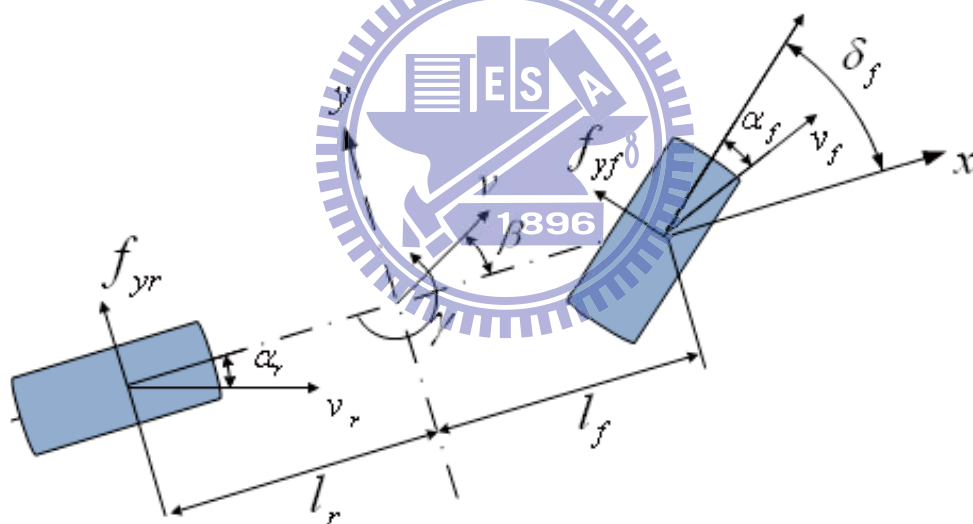


圖 2.9 非線性 single track 車子模型

由於我們這邊只針對外部動態去做討論，所以假設車子以 v_x 為定值的方式前進。

接著透過假設 δ_f 很小（i.e., $\sin \delta_f = \delta_f$ 和 $\cos \delta_f = 1$ ）和不考慮縱向力的影響以

及把運動學定義的側向加速度(a_y)近似成 $a_y \approx v_x(\dot{\beta} + \gamma)$ 的方式，則可以把(2.31)

式與(2.32)式簡化如下：

$$\dot{\beta} = \frac{1}{mv_x}(2f_{yf} + 2f_{yr}) - \gamma \quad (2.33)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{I_z}(2f_{yf} \cdot l_f - 2f_{yr} \cdot l_r + M_z) \quad (2.34)$$

接著我們使用局部區域的近似方式，透過等效的輪胎橫向勁度（tire cornering stiffness）把式 (2.33)和 (2.34)式簡化成等效的線性 2-DOF模型。輪胎橫向勁度的定義如下式：

$$C \text{ (輪胎橫向勁度)} = \frac{f_y}{\alpha} \quad (2.35)$$

其中 f_y 為橫向摩擦力， α 為輪胎滑移角。

所以前輪橫向摩擦力（ f_{yf} ）與後輪橫向摩擦力（ f_{yr} ）可用下式表示：

$$f_{yf} = -C_f \left(\frac{v_x \beta + l_f \gamma}{v_x} - \delta_f \right) \quad (2.36)$$

$$f_{yr} = -C_r \left(\frac{v_x \beta - l_r \gamma}{v_x} \right) \quad (2.37)$$

最後，透過 (2.35)式的定義，我們可以簡化成線性的 2-DOF動態 [38]，其動態表示如 (2.38)式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(2C_f + 2C_r)}{mv_x} & -1 + \frac{2l_r C_r - 2l_f C_f}{mv_x^2} \\ \frac{2l_r C_r - 2l_f C_f}{I_z} & \frac{-2l_f^2 C_f - 2l_r^2 C_r}{I_z v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2C_f}{mv_x} \\ \frac{2l_f C_f}{I_z} \end{bmatrix} \delta_f + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} M_z \quad (2.38)$$

其中 C_f 和 C_r 分別為前輪與後輪的輪胎橫向勁度。

2.3.2 非線性 7-DOF 車子動態

考慮 7-DOF 車子模型如圖 2.8 其車子動態如下 [39]：

$$\begin{bmatrix} m\dot{v} \\ mv\dot{\beta} \\ I_z\dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta & s\beta & 0 \\ -s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} f_{xi}c\delta_i - f_{yi}s\delta_i \\ f_{xi}s\delta_i + f_{yi}c\delta_i \\ M_{zi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ mv\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{R_w f_{xi} - T_i}{I_w}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.40)$$

其中 $M_{zi} = l_{xi}(f_{xi}c\delta_i - f_{yi}s\delta_i) + l_{yi}(f_{xi}s\delta_i + f_{yi}c\delta_i)$, $i = 1, \dots, 4$ 。

這邊， c 與 s 依序為 cosine 與 sine 函數（例如： $c\beta = \cos\beta$ 、 $s\delta_i = \sin\delta_i$ ）， m 為車子質量， I_z 與 I_w 分別為車子與輪胎的轉動慣量（the moment of inertia）， R_w 為輪胎半徑， ω 、 δ 與 T 依序為輪胎角速度（wheel angular speed）、輪胎轉向角（steering wheel angle）和輪胎的制動/驅動扭力（brake/drive torque）， f_{xi} 與 f_{yi} 分別為輪胎和路面之間的縱向與側向摩擦力。這邊我們假設 $\delta_1 = \delta_2 = \delta_f$ ， $\delta_3 = \delta_4 = 0$ ， $l_{x1} = l_{x4} = l_t$ ， $l_{x2} = l_{x3} = -l_t$ ， $l_{y1} = l_{y2} = l_f$ ， $l_{y3} = l_{y4} = -l_r$ [39]。而縱向力（ f_{xi} ）與側向力（ f_{yi} ）的表式方式，我們採用 (2.15) 和 (2.22) 式的 Magic formula 摩擦力模組如下：

$$f_{xi}(\lambda_i) = D_1 \sin(C_1 \tan^{-1}(B_1 \lambda_i - E_1(B_1 \lambda_i - \tan^{-1}(B_1 \lambda_i))))$$

$$f_{yi}(\alpha_i) = D_2 \sin(C_2 \tan^{-1}(B_2 \alpha_i - E_2(B_2 \alpha_i - \tan^{-1}(B_2 \alpha_i))))$$

此外，(2.15) 式和 (2.22) 式中的 λ 、 α 分別是輪胎的滑移率（wheel slip-ratio）與輪胎的滑移角（wheel slip-angle），其定義如下 [39]：

$$\lambda_i = \frac{v - R_w \omega_i}{\max\{v, R_w \omega_i\}}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.41)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} -\tan^{-1}\left(\frac{l_f \gamma + v \cdot s \beta}{v \cdot c \beta}\right) + \delta_f, & i = 1, 2. \\ \tan^{-1}\left(\frac{l_f \gamma - v \cdot s \beta}{v \cdot c \beta}\right), & i = 3, 4. \end{cases} \quad (2.42)$$

附註： $\lambda_i < 0$ 表示第 i 的輪子正在加速（acceleration）；

$\lambda_i > 0$ 表示第 i 個輪子正在減速（deceleration）。

附註：第三章及第四章的車子模擬參數如下 [40]：

參數(單位)	符號	數值
車子質量 (kg)	m	1300
車子中心點到前輪軸之垂直距離 (m)	l_f	1.25
車子中心點到後輪軸之垂直距離 (m)	l_r	1.25
前輪軸到後輪軸之垂直距離 (m)	l	2.5
前輪軸距/後輪軸距之一半 (m)	l_t	0.8
輪胎半徑 (m)	R_w	0.3
車子的轉動慣量 (kgm^2)	I_z	2000
輪胎的轉動慣量 (kgm^2)	I_w	0.6
前輪輪胎之橫向勁度 (N/rad)	C_f	54053
後輪輪胎之橫向勁度 (N/rad)	C_r	54053

表 2.2：車子模擬參數

第 3 章

參考橫擺角速度的選取 (權重的設計)

為了讓車子在轉彎的過程中，可以保有良好的操縱性能使得車子有近似中性轉彎的特性是很重要的。[11]當考慮車子定速度並以固定的轉向半徑的條件下行駛，我們可以稱此行為中性轉向行為 (neutral steer behavior)。車子參考的橫擺角速度 (reference yaw rate: γ_d) 如下表示

$$\gamma_d = \frac{v_x}{l} \delta_f \quad (3.1)$$

v_x 為車子縱向速度， l 為車子前後輪的軸距， δ_f 為前輪的轉向角。

然而實際橫擺角速度 (actual value of the yaw rate: γ) 是否大於或小於參考的橫擺角速度 (reference yaw rate: γ_d) 可以做為判斷車子是否處於飄移 (不足轉向) 或打轉 (過度轉向) 的情況。所以當 $\gamma - \gamma_d$ 的差值越小，會導致車子近似中性轉向的行為，這也意味著車子的操縱性能很好。但大部分的车子為了安全起見皆被設計在不足轉向的行為 (under-steering behavior)，除了少部分為了競賽的車輛被設計在過度轉向的行為 (over-steering behavior)，若設計在中性轉向的行為，則車子很容易因為外在干擾而導致車子變成過度轉向因此發生危險 [41]，故我們需要更好的導向性使車子能接近中性轉向以保有良好的操控性能。

3.1 側重操控性之參考橫擺角速度： γ_1 (maneuverability)

在 [42] 提出的方法，是以線性 2-DOF 車子模型的基礎下，推得一個在操縱性上擁有不錯表現的參考橫擺角速度 (γ_d)。線性車子模型的狀態空間表示式 [38] 如公式 (3.2) 所示：

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_d \\ \dot{\gamma}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_d \\ \gamma_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \delta_f \quad (3.2)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{-(2C_f + 2C_r)}{mv_x} \quad , \quad a_{12} = -1 + \frac{2l_r C_r - 2l_f C_f}{mv_x^2} \quad , \quad b_1 = \frac{2C_f}{mv_x} \\ a_{21} &= \frac{2l_r C_r - 2l_f C_f}{I_z} \quad , \quad a_{22} = \frac{-2l_f^2 C_f - 2l_r^2 C_r}{I_z v_x} \quad , \quad b_2 = \frac{2l_f C_f}{I_z} \end{aligned} \quad (3.3)$$

前輪的轉向角到參考橫擺角速度的轉移函數被推導如下：

首先，將公式 (3.2) 轉成拉普拉斯轉換 (Laplace transform)

$$s \cdot \beta_d = a_{11} \cdot \beta_d + a_{12} \cdot \gamma_d + b_1 \cdot \delta_f \quad (3.4)$$

$$s \cdot \gamma_d = a_{21} \cdot \beta_d + a_{22} \cdot \gamma_d + b_2 \cdot \delta_f \quad (3.5)$$

其中 s 為拉普拉斯變數 (Laplace variable)。

然後，把 (3.4) 式整理如下

$$\beta_d = \frac{1}{(s - a_{11})} \cdot (a_{12} \cdot \gamma_d + b_1 \cdot \delta_f) \quad (3.6)$$

接著把 (3.6) 代入 (3.5)，可得 $(s - a_{22}) \cdot \gamma_d = \frac{a_{21}}{(s - a_{11})} \cdot (a_{12} \cdot \gamma_d + b_1 \cdot \delta_f) + b_2 \cdot \delta_f$

把其整理後，如下

$$\gamma_d \cdot [s^2 - (a_{11} + a_{22})s + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})] = (b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11} + b_2 s) \cdot \delta_f$$

再透過移項整理成 (3.7) 式

$$\frac{\gamma_d(s)}{\delta_f(s)} = \frac{b_2 s + (b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11})}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})} \quad (3.7)$$

最後可把 (3.7) 式，此二階系統改寫成下式：

$$\frac{\gamma_d(s)}{\delta_f(s)} = \frac{(b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11})}{(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})} \cdot \frac{1 + \frac{b_2}{(b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11})} s}{1 - \frac{(a_{11} + a_{22})}{(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})} s + \frac{1}{(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})} s^2}$$

為了方便，我們把上式簡化成公式 (3.8)，如下所示：

$$\frac{\gamma_d(s)}{\delta(s)} = G_R \frac{1 + T_R s}{1 - (T_A / D_A) s + (1 / D_A) s^2} \quad (3.8)$$

其中

$$G_R = \frac{b_1 a_{21} - b_2 a_{11}}{D_A} \quad (3.9)$$

$$T_R = \frac{b_2}{b_1 a_{21} - b_2 a_{11}} \quad (3.10)$$

$$T_A = a_{11} + a_{22} \quad (3.11)$$

$$D_A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (3.12)$$

接著，再把公式(3.9)-(3.12)簡化如下：

$$G_R = \frac{b_1 a_{21} - b_2 a_{11}}{D_A} = \frac{v_x}{l + \frac{m(l_r C_r - l_f C_f)}{2l C_f C_r} \cdot v_x^2} = \frac{v_x}{l + \frac{k_{us}}{k_{us}} v_x^2} \quad (\text{且 } l = l_f + l_r)$$

$$T_A = a_{11} + a_{22} = -\frac{(2C_f + 2C_r)}{m v_x} - \frac{(2l_f^2 C_f + 2l_r^2 C_r)}{I_z v_x}$$

$$D_A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \frac{4C_f C_r l^2 + 2m v_x^2 (l_r C_r - l_f C_f)}{I_z m v_x}$$

而且 G_R 為二階系統的穩態值 (steady state)

由於 T_A 為負值，若 D_A 為大於零，則此線性的車子模型是穩定的

$$D_A > 0 \rightarrow l + \frac{m(l_r C_r - l_f C_f)}{2l C_f C_r} \cdot v_x^2 > 0$$

$$\text{也暗示著：} \quad l + k_{us} v_x^2 > 0 \quad (3.13)$$

其中

$$k_{us} = \frac{m}{2l} \left(\frac{l_r}{C_f} - \frac{l_f}{C_r} \right) \quad (3.14)$$

代表不足轉向梯度（under-steer gradient）[43]。

若 $k_{us} > 0$ 為不足轉向， $k_{us} = 0$ 為中性轉向， $k_{us} < 0$ 為過度轉向。一般而言，若車子在不足轉向的前提下 k_{us} 越大，車子在高速行駛會更安全穩定 [11]。有關不足轉向梯度的定義與觀念本章節就不贅述，請參考後面附錄。

然而 [44]-[47] 提出，若橫向速度（lateral velocity）收斂至零，我們可以把橫擺角速度（yaw rate）的響應修正為一階延遲系統，如下：

$$\gamma_d(s) = \frac{\gamma_{1(\text{maneuverability})}}{1 + \tau s} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{1(\text{maneuverability})} &= \frac{v_x}{l + k_{us} v_x^2} \cdot \delta_f \\ &= \frac{v_x}{l + \frac{m(l_r C_r - l_f C_f)}{2l C_f C_r} v_x^2} \cdot \delta_f \end{aligned} \quad (3.16)$$

τ 為時間常數（time constant）， s 為拉普拉斯變數（Laplace variable）。

這樣的修正方式除了可以增加車子穩定性的限制又可以避免前輪轉向角對二階系統所產生的震盪。透過選取 $\gamma_{1(\text{maneuverability})}$ 當作參考的橫擺角速度（ γ_d ），我們可以確保車子在轉向時可以達到良好的操控性能。但是，當避障、車速過快或在低摩擦力路面行駛等情況下，車體的側滑角（side-slip angle）會逐漸增大。過多的側滑角會導致駕駛人轉向的輸入在橫擺運動不敏感，因而造成橫向

穩定的惡化，使得車子在橫向的行為變的不穩定。下面我們模擬參考橫擺角速度選用 γ_1 的方式在車速為 25m/s (90km/hr) 進行 change lane 的動作，其前輪轉向角 δ_f 如圖 3.1(a) 給定。從圖 3.1(b) 與 3.1(d) 可發現 γ 有追蹤到 γ_d 並且隨 δ_f 而變動，最大值約為 0.8rad/sec。但也發現使用 γ_1 的方式會使得車體的側滑角超過側滑角容許的最大值（附註：第三章的部分，我們考慮比較嚴謹的方式如 SAE 文獻[3]內所述， $\beta_{\max} = 2^\circ$ ，約 0.0349/sec 來當作側滑角的限制），如圖 3.1(c)。所以，若只採取 γ_1 (maneuverability) 的方式於車子側向控制，雖擁有不錯的操控性，但車子的穩定性我們無法掌握它。圖 3.2 為控制輸入 M_z ，轉動力矩約 5000Nm 以內。

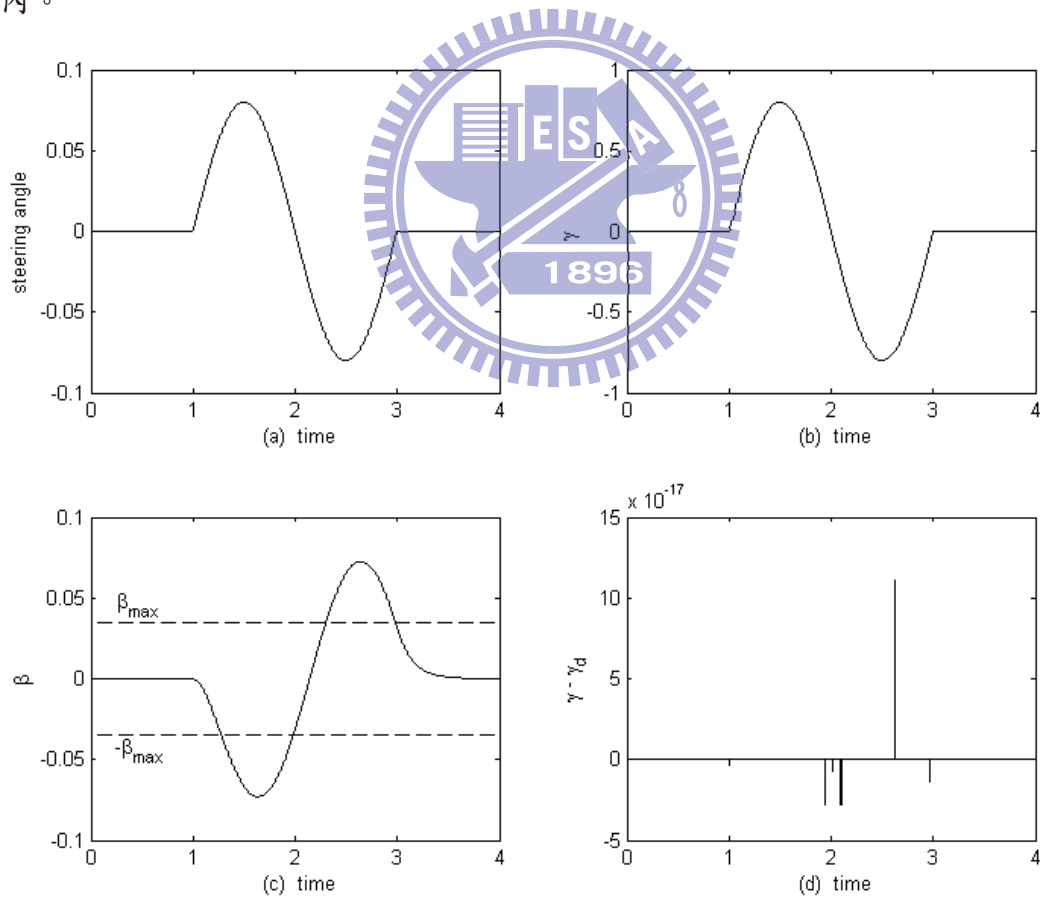


圖 3.1 change lane 模擬圖 (γ_d 採用 γ_1)

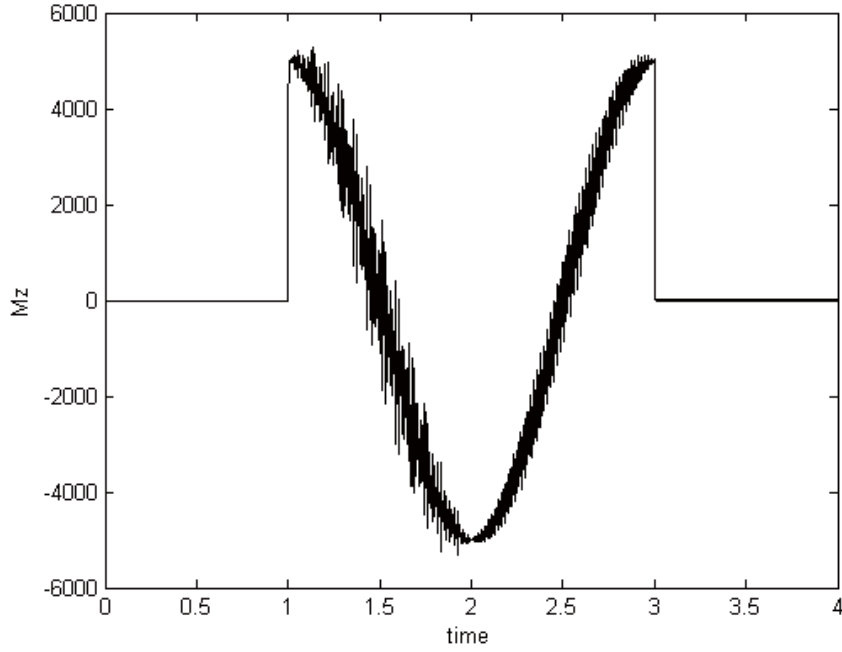


圖 3.2 M_z 模擬圖 (γ_d 採用 γ_1)

3.2 側重穩定性之參考橫擺角速度： γ_2 (stability)

近幾年，在 [9]-[10]裡提出了另一種參考橫擺角速度 (γ_d) 的方式，我們稱為 γ_2 (stability)。為了使車體的側滑角維持在一個合理的小區域內，我們需要改善車子的橫向穩定。考慮非線性 2-DOF 車子的外部動態如(3.17)所示：

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -\gamma + \frac{2F_{yf} \cos(\delta_f) + 2F_{yr}}{mv_x} \\ \dot{\gamma} = l_f \cdot 2F_{yf} \cos(\delta_f) - l_r \cdot 2F_{yr} + M_z \end{cases} \quad (3.17)$$

假使透過 M_z 使得 γ 追蹤到 γ_d ，我們可以把 β 動態改寫成(3.18)式如下：

$$\dot{\beta} = -\gamma_d + \frac{2F_{yf} \cos(\delta_f) + 2F_{yr}}{mv_x} \quad (3.18)$$

接著，我們把參考的橫擺角速度（ γ_d ）定義如 [10] 所述：

$$\gamma_{2(stability)} = k\beta + \frac{2F_{yf} \cos \delta_f + 2F_{yr}}{mv_x} \quad (3.19)$$

透過此參考橫擺角速度(γ_d)的選取，暗示著車體的側滑角會漸進收斂至零：

$$\dot{\beta} = -k\beta \quad (3.20)$$

其中 k 必須為嚴格正數（strictly positive）。

在 [9] 裡面，也如同上面的概念，從線性 2-DOF 車子模型 [38] 中找到了合適的

$\gamma_{2(stability)}$ ，其想法如下：首先，考慮下列線性 2-DOF 車子模型，如 (2.38) 式

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(2C_f + 2C_r)}{mv_x} & -1 + \frac{2l_r C_r - 2l_f C_f}{mv_x^2} \\ \frac{2l_r C_r - 2l_f C_f}{I_z} & \frac{-2l_f^2 C_f - 2l_r^2 C_r}{I_z v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2C_f}{mv_x} \\ \frac{2l_f C_f}{I_z} \end{bmatrix} \delta_f + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} M_z$$

並假設

$$\gamma_d(s) = \frac{\gamma_{2(stability)}}{1 + \tau s} \quad (3.21)$$

$$\gamma_{2(stability)} = \frac{2C_f v_x}{mv_x^2 + 2(l_f C_f - l_r C_r)} \cdot \delta_f \quad (3.22)$$

透過 M_z （額外產生的轉動慣量）使得 γ 可以追到 γ_d ，因使我們可把 γ 看似

$\gamma = \gamma_d$ 並帶入車體側滑角動態（side-slip angle dynamic）內。最後，可發現(3.23)

式與(3.20)式相同，車體側滑角皆會收斂至零，進而確保車子的穩定。

$$\dot{\beta} = \frac{-(2C_f + 2C_r)}{mv_x} \beta \quad (3.23)$$

下面我們模擬參考橫擺角速度選用 γ_2 的方式在車速為 25m/s（90km/hr）進行

change lane 的動作，其前輪轉向角 δ_f 如圖 3.3(a) 給定。從圖 3.3(b) 與 3.3(d) 可發

現 γ 有追蹤到 γ_d 並且隨 δ_f 而變動，其最大值為 0.26 rad/sec，相對於圖 3.1(b) 中

γ 最大值 0.8 rad/sec 小很多，也意味著使用 γ_2 的方式會使 γ_d 較小，操控性能較差。但是，我們也發現使用 γ_2 的方式，車體的側滑角近似於零，遠小於 $\beta_{\max}$ ，如圖 3.3(c)與圖 3.4。所以，若只採取 γ_2 (maneuverability) 的方式於車子側向控制，雖可以使車體的側滑角很小而維持在側滑角容許的最大值內進而確保其穩定性，但因為 γ_d 很小，無形中車子會喪失很多的操控性，使駕駛者無法隨心所欲的操控車子行進的方向，若遇到前方有緊急狀況可能因為轉向的幅度不大而造成意外發生。圖 3.5 為控制輸入 M_z ，轉動力矩約 8000Nm 以內。

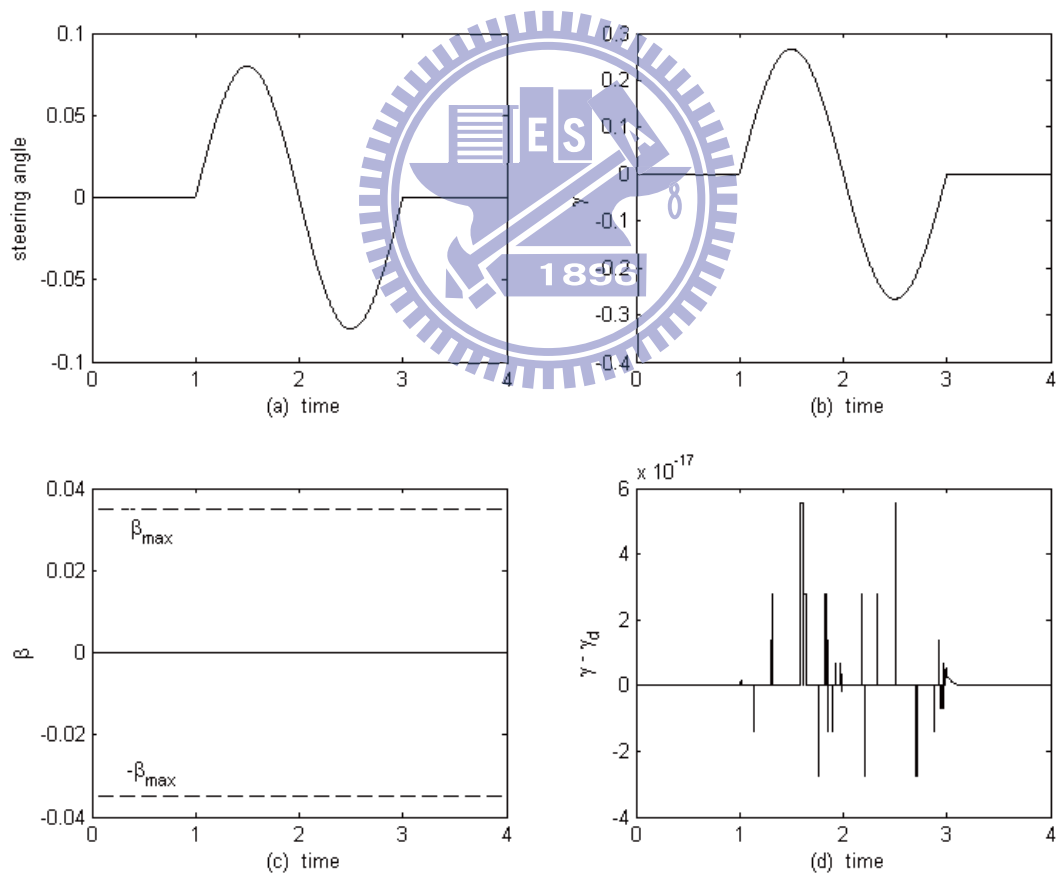


圖 3.3 change lane 模擬圖 (γ_d 採用 γ_2)

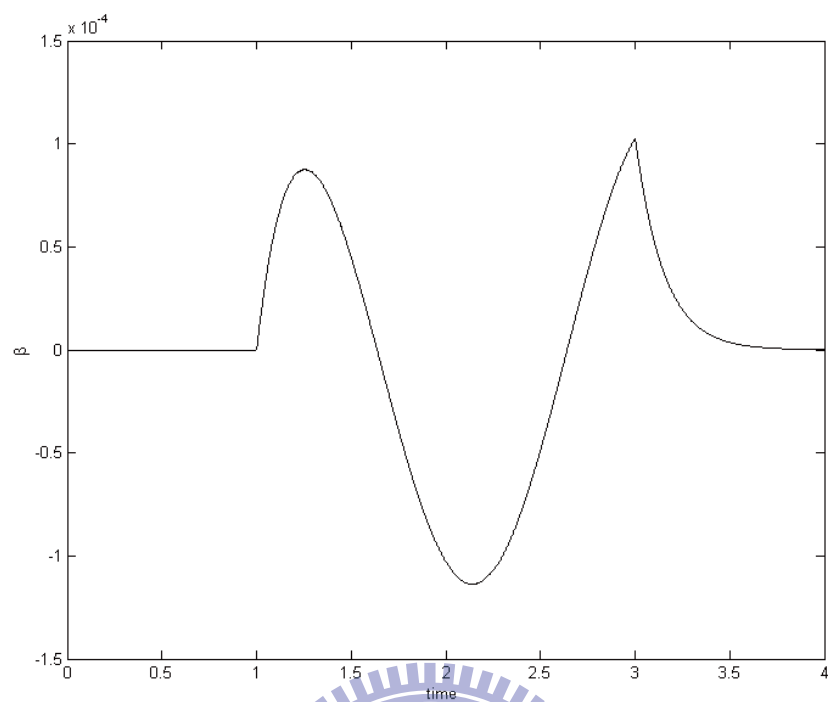


圖 3.4 側滑角(β)

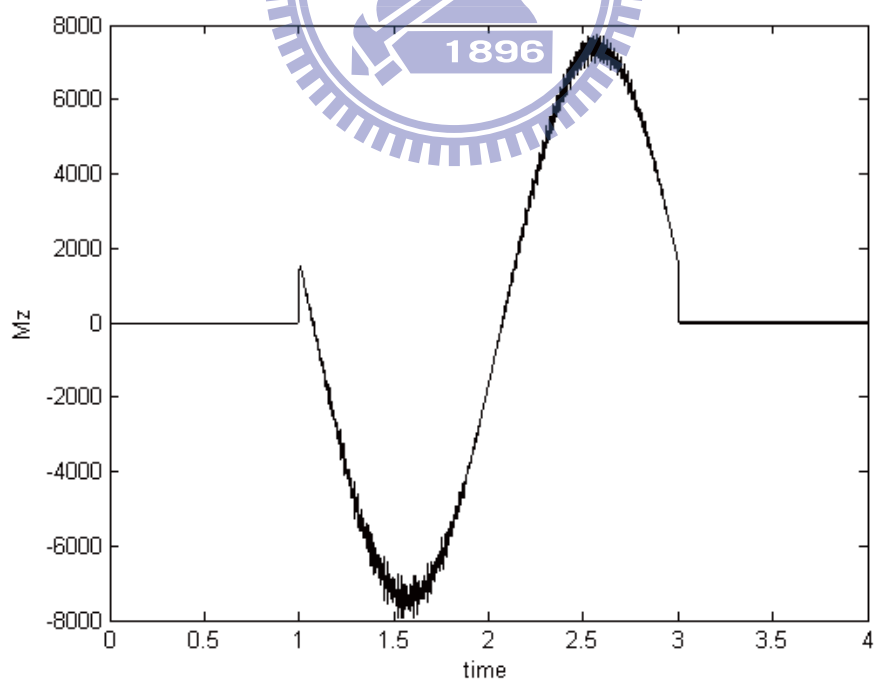


圖 3.5 Mz 模擬圖 (γ_d 採用 γ_2)

3.3 權重 (weighting) 的介紹

從 3.1 和 3.2 節分別提到兩種參考的橫擺角速度 (γ_d)，一種是 $\gamma_{1 (maneuverability)}$ 另一種是 $\gamma_{2 (stability)}$ 。選擇 $\gamma_{1 (maneuverability)}$ 可以得到良好的操控性能，但可能會因為行駛的狀況而導致車體的側滑角 (side-slip angle) 變大，而喪失車子的穩定性。選擇 $\gamma_{2 (stability)}$ 可以使得車子的穩定性能佳並確保車子舒適性與安全性，但其缺點是會喪失掉許多的操控性，使駕駛者在操控上不如預期。

從 [13] 中，提出了透過車體側滑角的大小來決定選取 $\gamma_{1 (maneuverability)}$ 或是 $\gamma_{2 (stability)}$ 的方式。其定義如下：

$$\gamma_d = \sigma \cdot \gamma_{1 (maneuverability)} + (1 - \sigma) \cdot \gamma_{2 (stability)} \quad (3.24)$$

其中 $0 \leq \sigma \leq 1$ 。

當側滑角很小時， σ 選擇 1；當側滑角很大時， σ 選擇 0，但此方式可能會造成權重 (weighting) 是不連續的狀況，在 0 與 1 切跳。由於權重的分析與結果在近期的文獻中討論甚少，在加上筆者認為此方式確實可以在車子轉向的操控性與穩定性有了更多的自由度，故本論文接著會在後續的章節中討論權重方式所帶來的優勢，並考慮權重為非時變與時變兩種方式。最後，把權重方式應用於車子簡化模型在不同的駕駛情況（例如：車速過快、緊急避障）。此外，第四章的部分我們也會把權重觀念帶入非線性的全車模型中，探討在不同的道路狀況下（ μ -split 路面、low- μ 路面）權重所帶來的優勢並做分析與討論。

3.4 權重 (weighting) 為非時變與時變的方式

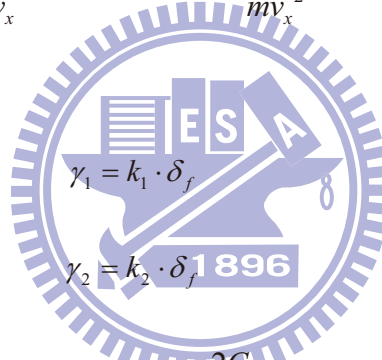
我們的想法是如何透過權重 (weighting) 選取的方式使得車子在穩定性可以維持的前提下又可以擁有不錯的操控性。透過下面線性的 2-DOF 車子模型，如 (2.38) 式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(2C_f + 2C_r)}{mv_x} & -1 + \frac{2l_r C_r - 2l_f C_f}{mv_x^2} \\ \frac{2l_r C_r - 2l_f C_f}{I_z} & \frac{-2l_f^2 C_f - 2l_r^2 C_r}{I_z v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2C_f}{mv_x} \\ \frac{2l_f C_f}{I_z} \end{bmatrix} \delta_f + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} M_z$$

當 γ 可追蹤到 γ_d 時，我們可以把 β 動態用下式表示：

$$\dot{\beta} = -\frac{(2C_f + 2C_r)}{mv_x} \beta + \left(-1 + \frac{2l_r C_r - l_f C_f}{mv_x^2}\right) \gamma_d + \frac{2C_f}{mv_x} \delta_f \quad (3.25)$$

為了方便計算，我們假設



$$\gamma_1 = k_1 \cdot \delta_f \quad (3.26)$$

$$\gamma_2 = k_2 \cdot \delta_f \quad (3.27)$$

$$\dot{\beta} = -k \cdot \beta + k_3 \cdot \gamma_d + \frac{2C_f}{mv_x} \cdot \delta_f \quad (3.28)$$

其中

$$k = \frac{(2C_f + 2C_r)}{mv_x} \quad (3.29)$$

$$k_1 = \frac{v_x}{l + k_{us} v_x^2} = \frac{2l C_f C_r v_x}{2l^2 C_f C_r + mv_x^2 (l_r C_r - l_f C_f)} \quad (3.30)$$

$$k_2 = \frac{2C_f v_x}{mv_x^2 + 2(l_f C_f - l_r C_r)} \quad (3.31)$$

$$k_3 = -1 + \frac{2l_r C_r - l_f C_f}{mv_x^2} \quad (3.32)$$

附註： k 、 k_1 、 k_2 、 k_3 皆為車子縱向速度(v_x)的函數

接著把 (3.24) 式帶入 (3.25) 式的 β 動態內，可得

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= -k \cdot \beta + k_3 \cdot [\sigma \cdot k_1 + (1 - \sigma) \cdot k_2] \cdot \delta_f + \frac{2C_f}{mv_x} \cdot \delta_f \\ &= -k \cdot \beta + [\sigma \cdot k_3(k_1 - k_2) + k_3 k_2 + \frac{2C_f}{mv_x}] \cdot \delta_f\end{aligned}$$

由於 $k_3 k_2 = -\frac{2C_f}{mv_x}$ ，故 β 動態可簡化如下式：

$$\dot{\beta} = -k \cdot \beta + \sigma \cdot k_3(k_1 - k_2) \cdot \delta_f \quad (3.33)$$

為了方便分析，再令 $h = k_3(k_1 - k_2)$

$$\dot{\beta} = -k \cdot \beta + \sigma \cdot h \cdot \delta_f \quad (3.34)$$

接著，我們在後面的 3.4.1 節與 3.4.2 節就針對 (3.34) 式的 β 動態去做權重的推導，進而分析出非時變权重與時變權重的兩種方式使車體的側滑角不會超過側滑角的限制。



3.4.1 权重（weighting）為非時變

當考慮权重為定值時，可求出 β 的值如下式：

$$\beta = e^{-k\beta} \cdot \beta(0) + \sigma \cdot h \cdot \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \cdot \delta_f(\tau) \cdot d\tau = \sigma \cdot h \cdot y(t) \quad (3.35)$$

由於車子尚未轉向前，側滑角初始值可看似零，故令 $\beta(0) = 0$ 代入 (3.35) 式，其

結果如 (3.36) 式所示：

$$\beta = \sigma \cdot h \cdot \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \cdot \delta_f(\tau) \cdot d\tau = \sigma \cdot h \cdot y(t) \quad (3.36)$$

其中 $y(t) = \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \cdot \delta_f(\tau) \cdot d\tau$ ，我們可用下列動態求出，如 (3.37) 式

$$\dot{y} = -k \cdot y + \delta_f(t) \quad (3.37)$$

相對應的轉移函數如 (3.38) 式

$$\frac{Y(s)}{\delta_f(s)} = \frac{1}{s+k} \quad (3.38)$$

因為我們考慮權重為定值，又加上必須確保車子在轉向的過程中是穩定的，故車體的側滑角需滿足此條件： $-\beta_{\max} \leq \beta \leq \beta_{\max}$ 。然而側滑角會隨著前輪轉向角 $\delta_f(t)$ 的改變而變大，所以在估測權重時，我們要考慮 $|y(t)|_{\max} = y_{\max}$ 。有了以上的假設與條件，權重可以利用下式估測出來：

$$\sigma = \left| \frac{\beta_{\max}}{h \cdot y_{\max}} \right| \quad (3.39)$$

3.4.1.1 change lane 動作之模擬

下面模擬參考橫擺角速度選用權重為定值的方式於車速 25m/s (90km/hr) 進行change lane的動作，其前輪轉向角 δ_f 如圖 3.7(a) 給定。透過公式 (3.37) 的動態可求得 $y_{\max}$ ，如圖 3.6。接著把算出來的 h 值 ($h = -6.6737$) 與 $\beta_{\max} = 0.0349$ 以及 $y_{\max} = 0.01094$ 帶入公式 (3.39)，進而測出 $\sigma = 0.478$ 。其結果如圖 3.7(b) 與 3.7(d) 所示， γ 有追蹤到 γ_d 並且隨 δ_f 而變動，其最大值為 0.52 rad/sec。而圖 3.7(c) 也顯示側滑角正好落在 $\beta_{\max}$ 上面而沒超過它。圖 3.8 為控制輸入 M_z ，轉動力矩約 6000Nm 以內。從圖 3.9 與圖 3.10 更可以發現到使用權重的方式相對於只使用 γ_1 或 γ_2 ，側滑角不會超過其容許最大值 (確保穩定性)，又能盡可能的提升參考橫擺角速度使得操控性能更接近 γ_1 的方式。

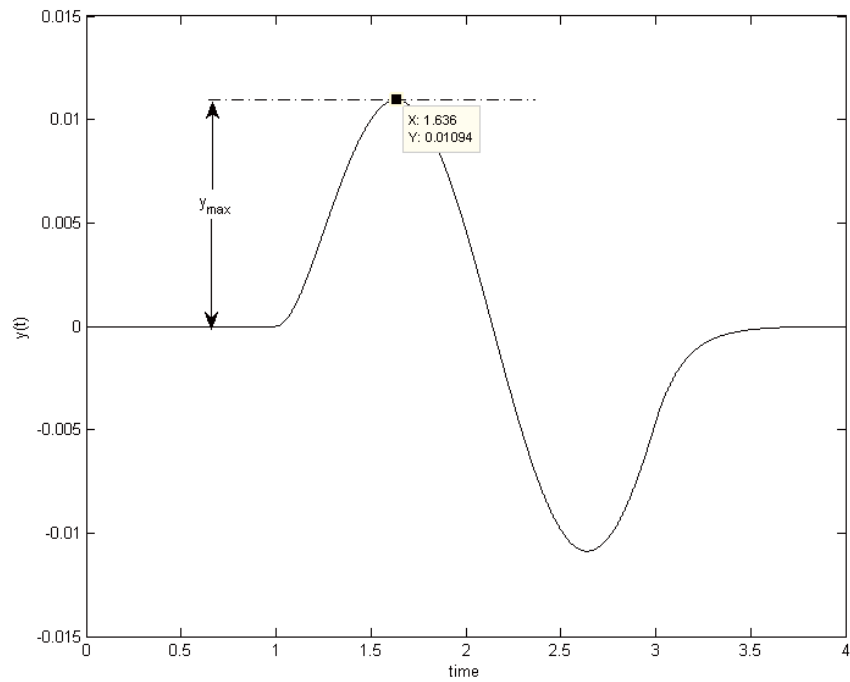


圖 3.6 估測非時變權重所需的 $y_{\max}$ 值

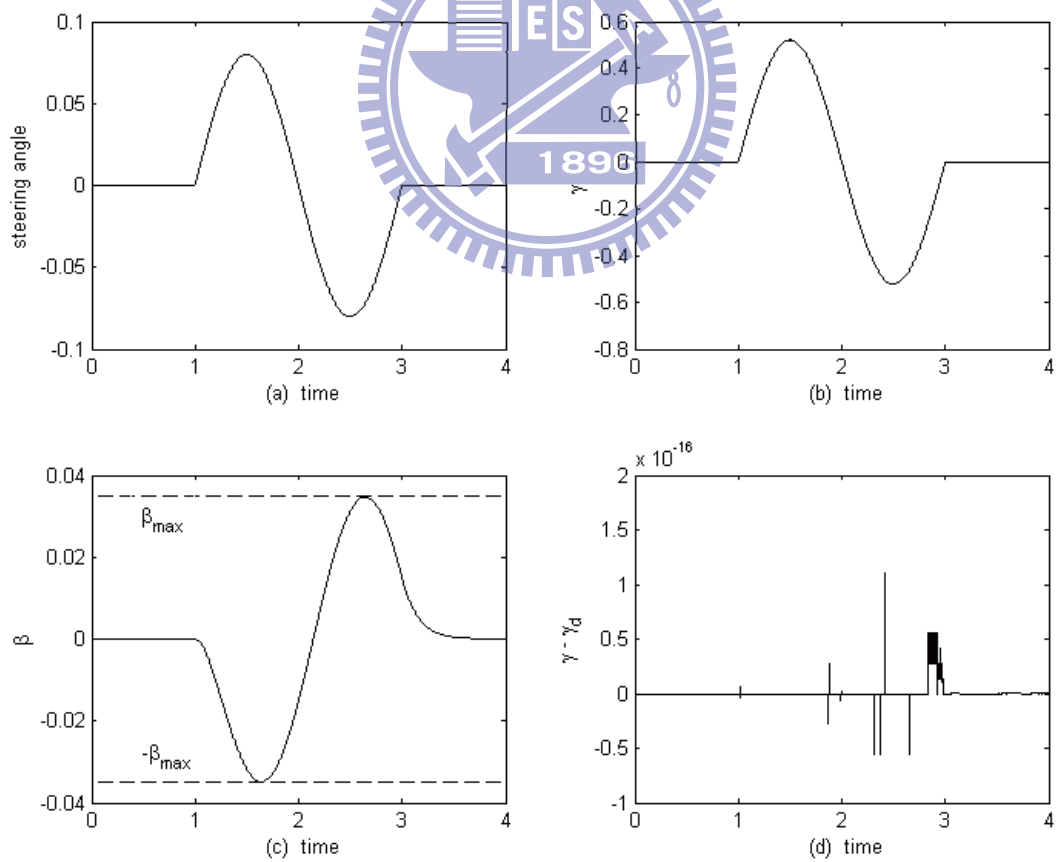


圖 3.7 change lane 模擬圖 (γ_d 採用非時變權重)

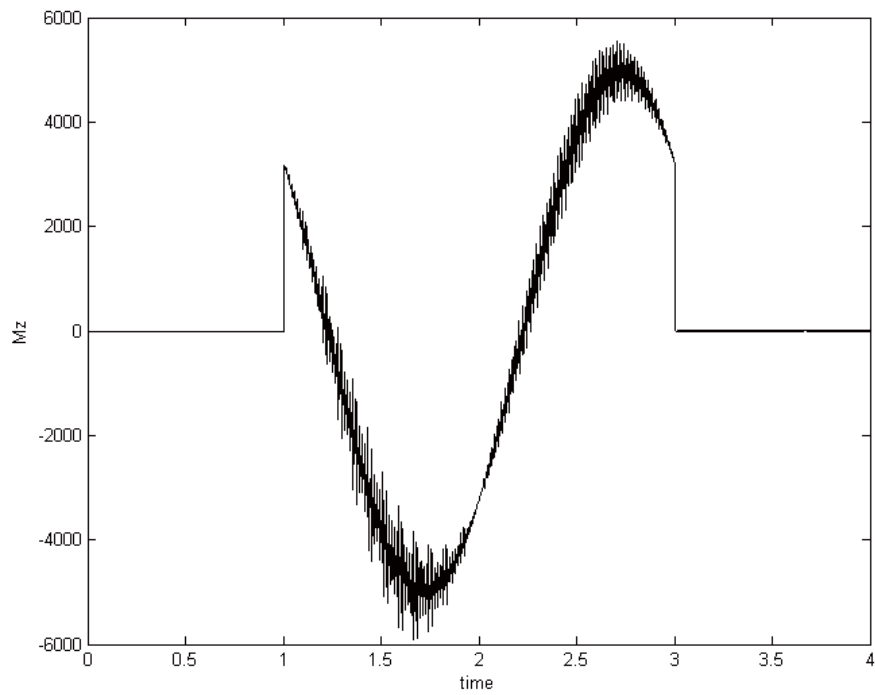


圖 3.8 M_z 模擬圖 (γ_d 採用非時變權重)

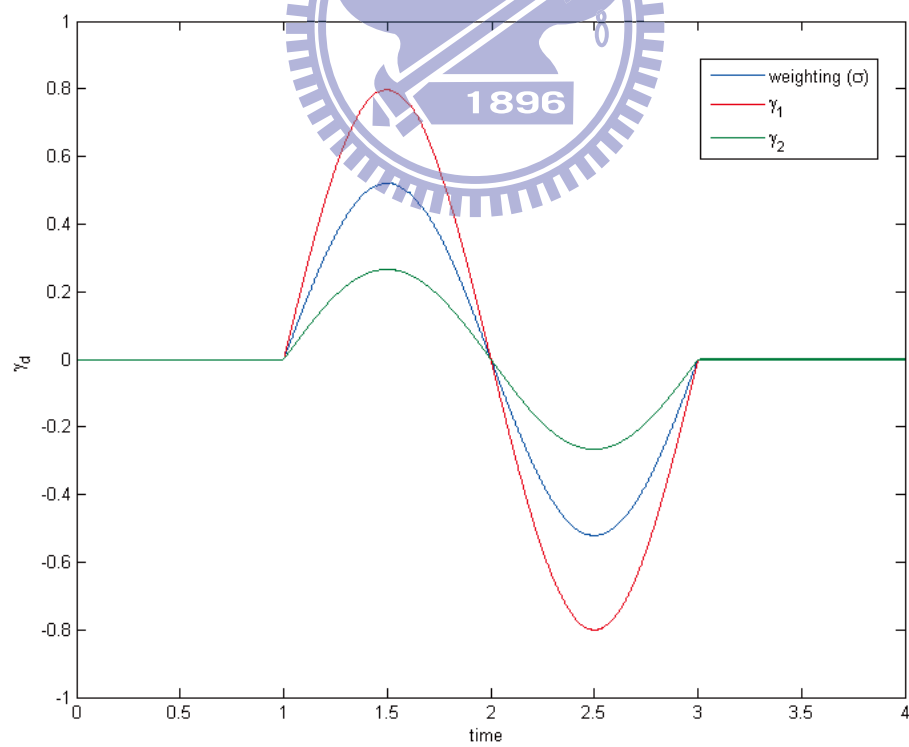


圖 3.9 非時變權重之 γ_d 比較圖

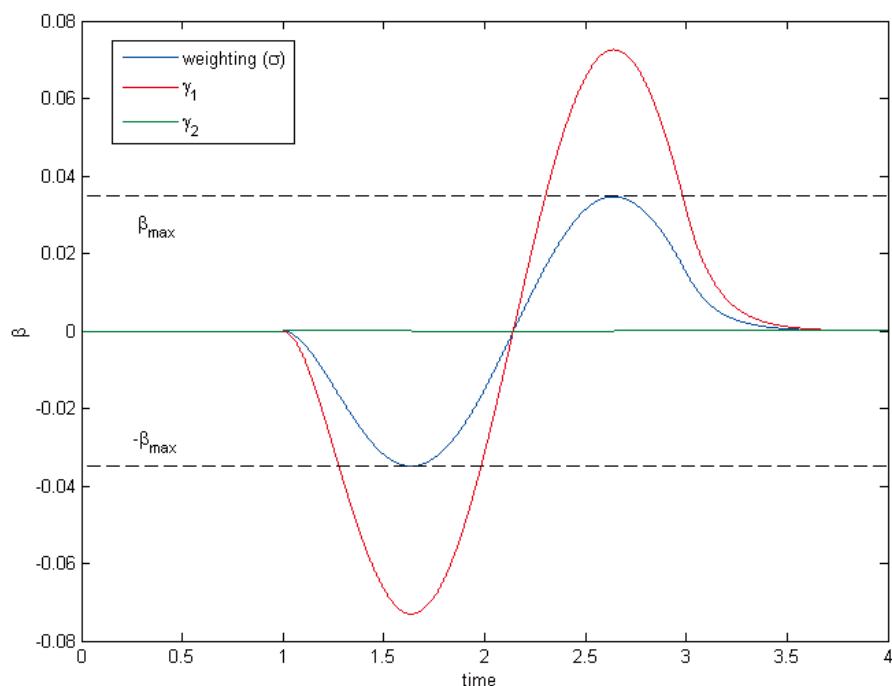


圖 3.10 非時變權重之 γ_d 所影響的側滑角比較圖

3.4.1.2 兩次 change lane 動作之模擬

但是由於權重為定值的方式會隨駕駛者給的 $\delta_f(t)$ 而影響，進而使得 $y(t)$ 之最大值被限制住，雖可確保其車體側滑角皆落在側滑角之最大值內，但是參考橫擺角速度則會逐漸變小的進而喪失其操控性，所以在應用上比較不實際。如下面的模擬所示，在車速 25m/s (90km/hr) 時，前輪轉向角如圖 3.9(a)，透過公式 (3.37) 的動態求得 $y_{\max}$ ，如圖 3.11。接著把算出來的 h 值 ($h = -6.6737$) 與 $\beta_{\max} = 0.0349$ 以及 $y_{\max} = 0.02195$ 帶入公式 (3.39)，進而測出 $\sigma = 0.2382$ 。其結果顯示側滑角不會超過其容許最大值 (確保穩定性)，如圖 3.12(c)，而圖 3.13 為控制輸入 M_z ，轉動力矩約 12000Nm 以內。但從圖 3.12(a)與 3.12(b)可以發現，當行經第二次 change lane 動作時，由於前輪轉向角的振幅比第一次 change lane

動作小了三倍，但因為權重為定值，使得第二次change lane動作的參考橫擺角速度降了很多（操控性逐漸變差）。因此，為了改變此缺點，我們在接下來的3.4.2 節提出時變的權重，使得權重能隨時間來做變換，並且在穩定的前提下仍可以提升其操控性。

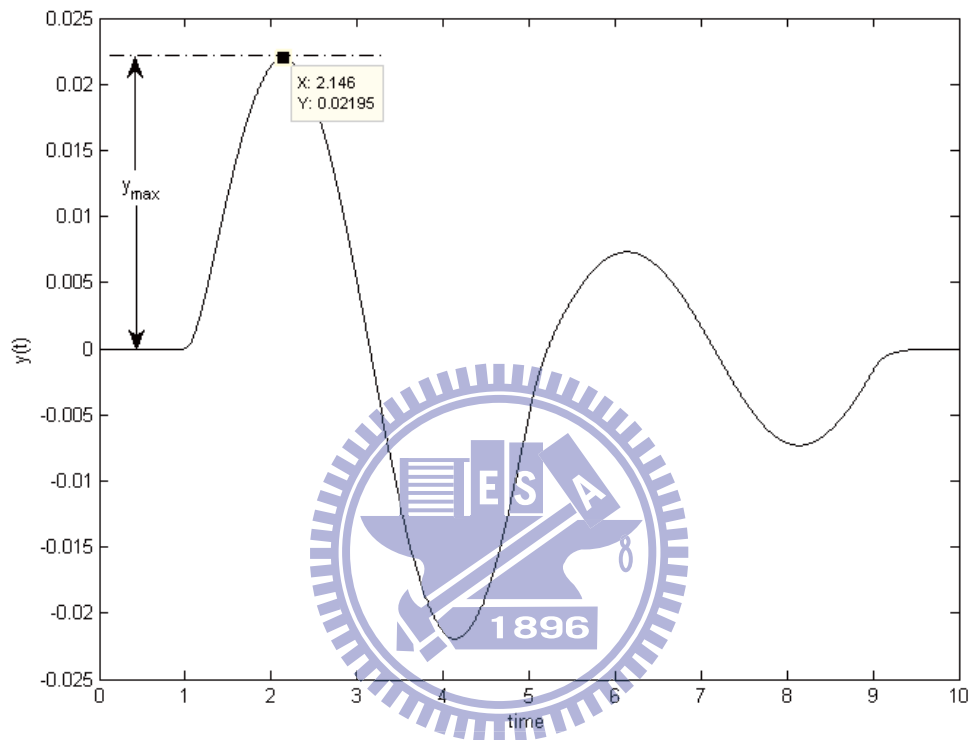


圖 3.11 估測非時變權重所需的 $y_{\max}$ 值

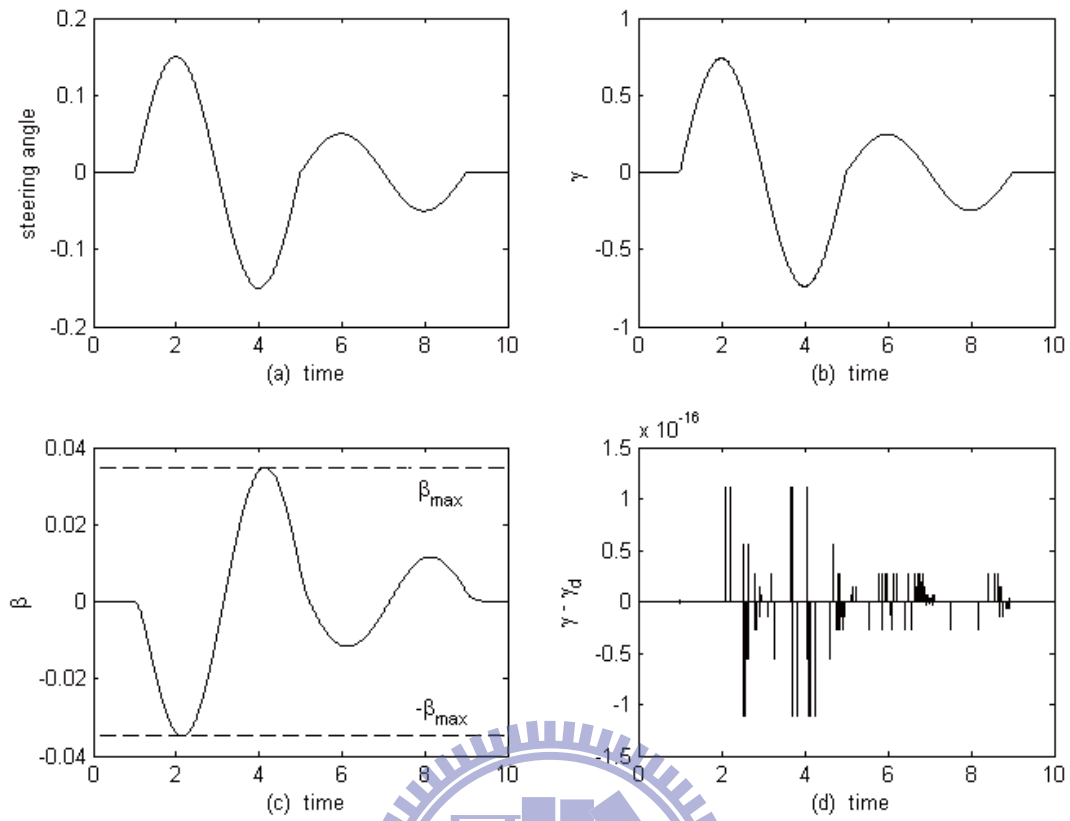


圖 3.12 兩次 change lane 模擬圖 (γ_d 採用非時變權重)

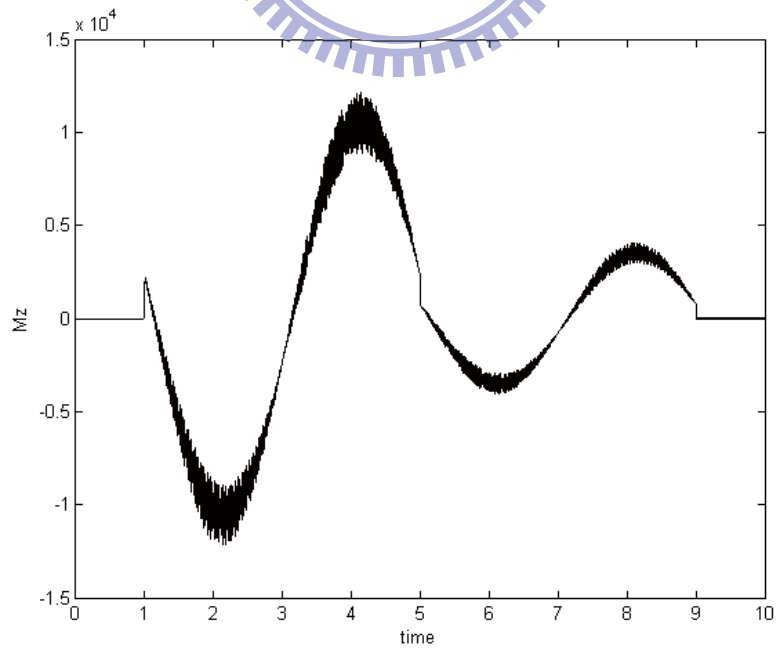


圖 3.13 兩次 change lane 之 M_z 模擬圖 (γ_d 採用非時變權重)

3.4.2 權重（weighting）為時變

由 3.4.1 節，我們了解到權重為定值的缺點，所以我們希望權重可以依照駕駛條件或車速等因素去做調整，讓它更符合實際應用而不是以固定的方式。

從 **unit-step response** 的想法：

我們可把 (3.34) 式 $\dot{\beta} = -k \cdot \beta + \sigma \cdot h \cdot \delta_f$ 看成 (3.40) 式：

$$\dot{\beta} = -k \cdot \beta + u \quad (3.40)$$

當 $u = u_0$ 時（定值），車體的側滑角最終會等同 $\frac{u_0}{k}$ 。可是隨著 $\delta_f(t)$ 逐漸增加，

會造成 u 變大，進而使得 $\beta \rightarrow \beta_{\max}$ ，所以為了確保車子可以穩定，我們必須讓

側滑角落在 $-\beta_{\max} \leq \beta \leq \beta_{\max}$ 範圍內。

有了以上的想法與條件，我們希望當側滑角趨近 $\beta_{\max}$ 時，側滑角能不繼續變大以避免超過 $\beta_{\max}$ ，所以我們把 (3.40) 式假設如 (3.41) 式

$$\dot{\beta} = 0 = -k \cdot \beta_{\max} + u \quad (3.41)$$

再把 (3.41) 式移項，可得

$$k \cdot \beta_{\max} = \sigma^* \cdot h \cdot \delta_f \quad (3.42)$$

接著把 (3.42) 式移項並修正成下式

$$\sigma^* = \left| \frac{k \cdot \beta_{\max}}{h \cdot (\delta_f + \varepsilon)} \right| \quad (3.43)$$

其中 ε 為一個極小的值。

附註：以下時變權重的模擬部分， ε 參數設 10^{-6} 。

這邊加入 ε 的理由是因為 δ_f 若為零(指車輪尚未轉向), 則會使 σ^* 的分母為零, 進而使得 σ^* 沒意義。為了避免此狀況發生故特別加了一個極小值 ε , 使得車輪在未轉向前, σ^* 的分母有值。雖然結果會使其趨向無窮大, 但透過(3.44)式的方式, 仍會使權重維持在 0 與 1 之間。最後權重選擇方式如 (3.44)式所示:

$$\sigma = \min\{\sigma^*, 1\} \quad (3.44)$$

其中 σ^* 如 (3.43)所示。

3.4.2.1 change lane 動作之模擬

下面模擬參考橫擺角速度選用權重為時變的方式在車速 25m/s (90km/hr) 進行change lane的動作, 其前輪轉向角 δ_f 如圖 3.14(a)給定。透過公式 (3.44)所產生的時變權重則如圖 3.15 所示在 0.43 與 1 之間變動, 結果顯示, γ 有追蹤到 γ_d 並且隨 δ_f 而變動, 其最大值為 0.5 rad/sec, 如圖 3.14(b)與 3.14(d)。圖 3.10(c)顯示側滑角落在 $\beta_{\max}$ 附近, 而且也沒超過側滑角容許的最大值, β 最大值為 0.034 rad/sec。而圖 3.16 為控制輸入Mz, 轉動力矩約 5200Nm以內, 從圖 3.17 與圖 3.18 更可以發現到使用權重的方式相對於只使用 γ_1 或 γ_2 , 側滑角不會超過其容許最大值(確保穩定性), 又能盡可能的提升參考橫擺角速度使得操控性能更接近 γ_1 的方式。

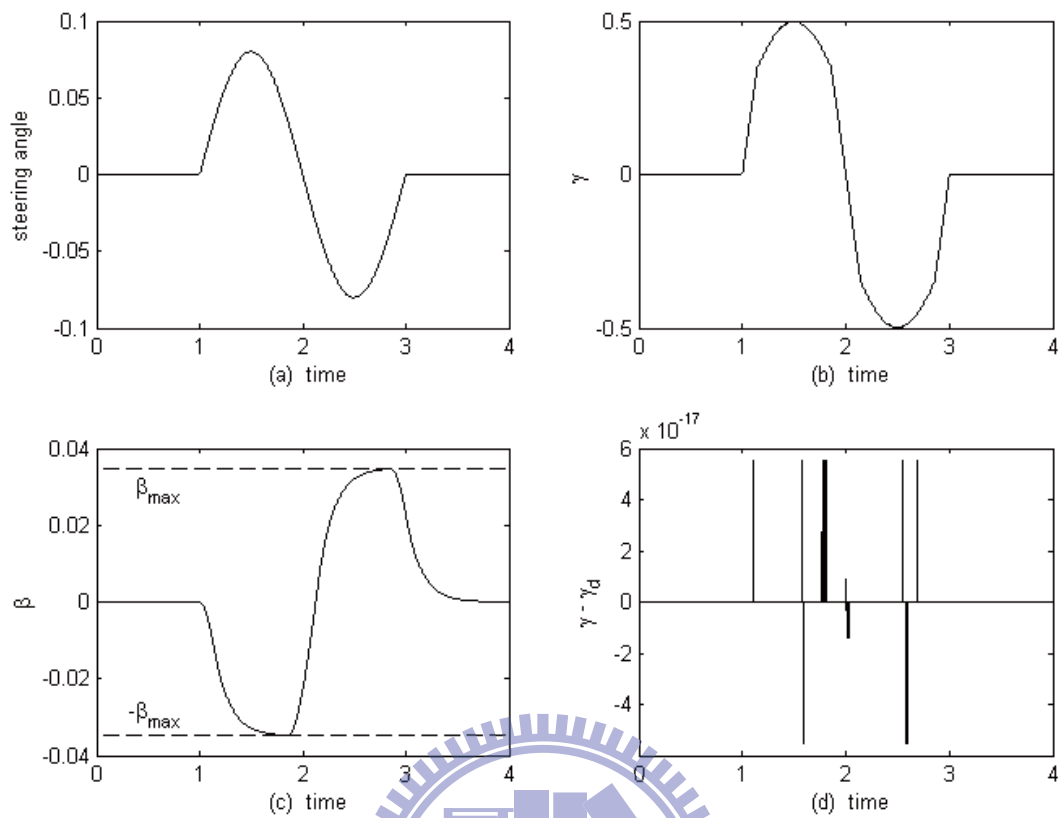


圖 3.14 change lane 模擬圖 (γ_d 採用時變權重)

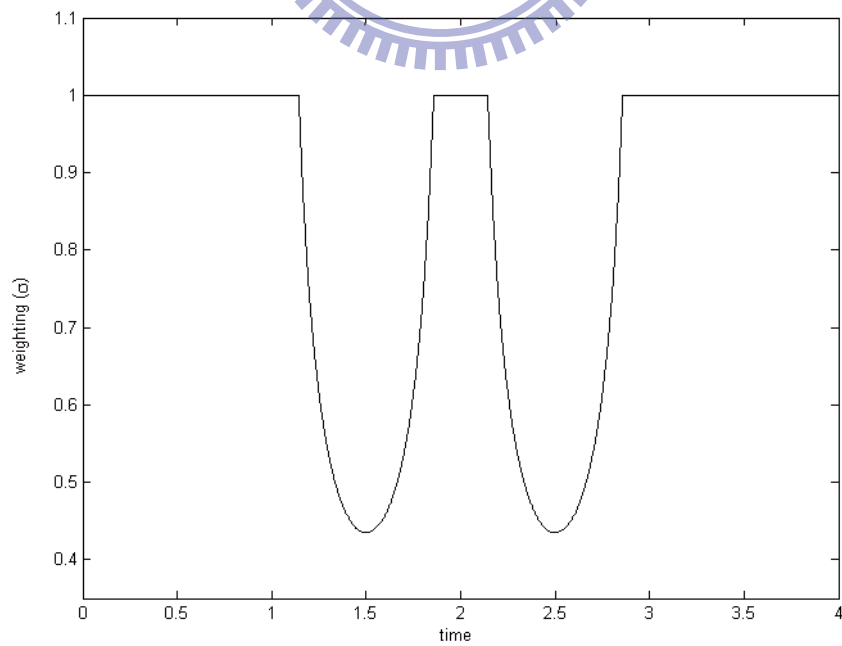


圖 3.15 權重隨時間的變化圖

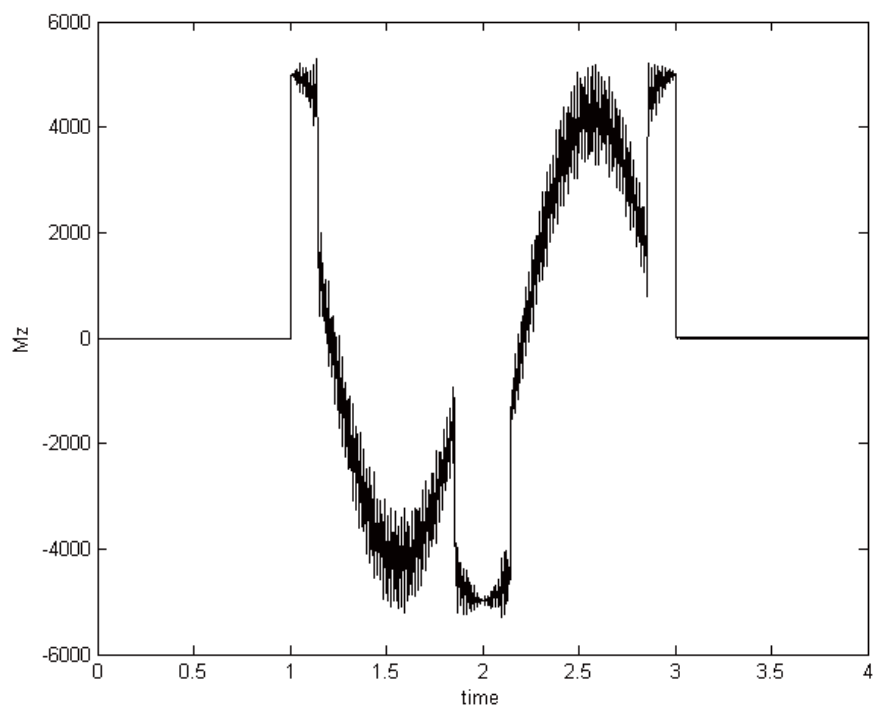


圖 3.16 M_z 模擬圖 (γ_d 採用時變權重)

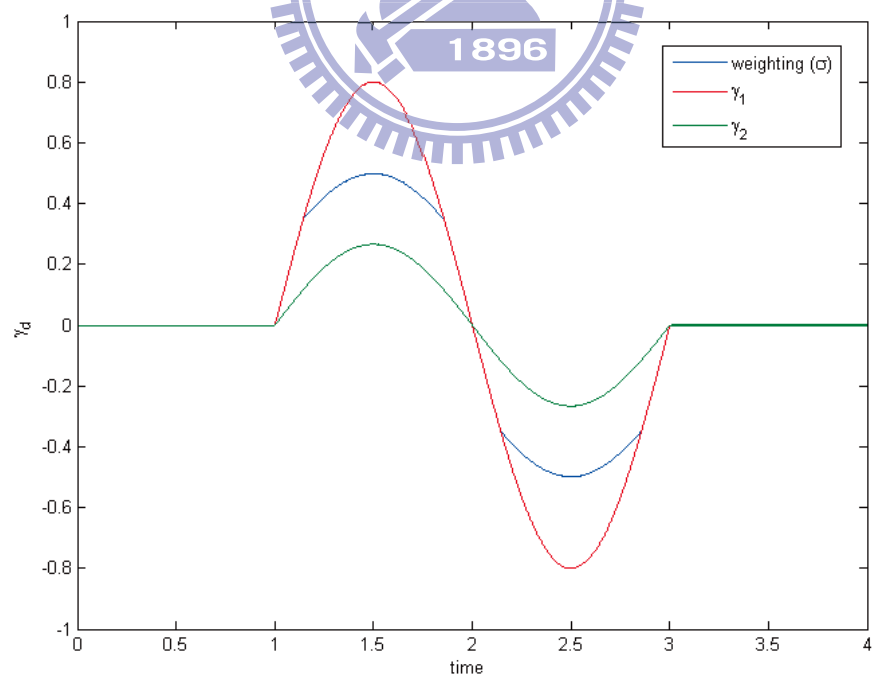


圖 3.17 時變權重之 γ_d 的比較圖

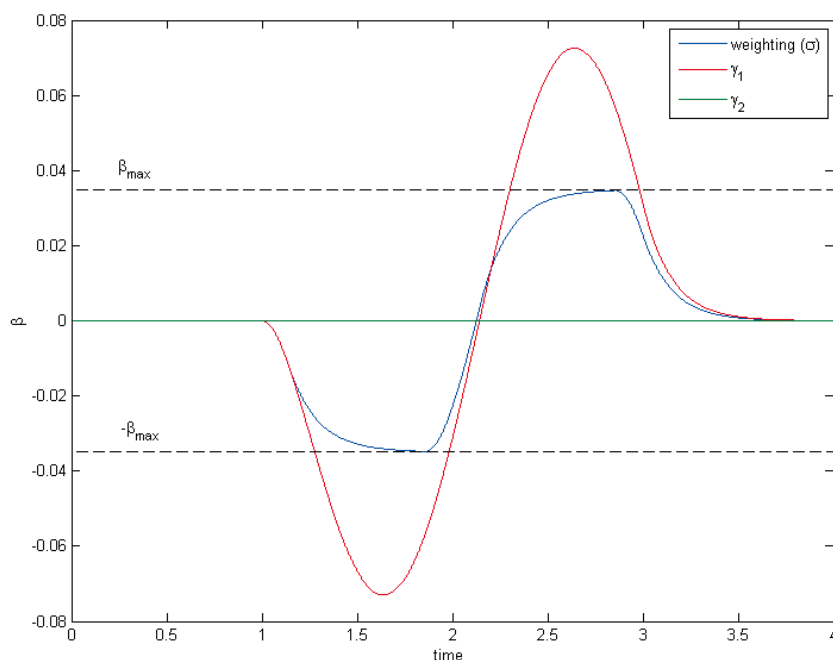


圖 3.18 時變權重之 γ_d 所影響的側滑角比較圖

3.4.2.2 躲避障礙物而進行 change lane 動作之模擬

這邊探討就算速度有了變化，不再是以等速度前進時，若透過時變的權重仍可以發揮其不錯的效能。這邊假設因躲避障礙物而進行 change lane 的動作是以每秒 5 公尺的速度煞車，如圖 3.19 所示。參考橫擺角速度選用權重為時變的方式在車速 30m/s (108km/hr) 前進，並在 1 秒後開始減速，其前輪轉向角 δ_f 如圖 3.20(a) 給定。透過公式 (3.44) 所產生的時變權重則如圖 3.21 所示，在 0.32 與 1 之間變動。而結果顯示， γ 有追蹤到 γ_d 並且隨 δ_f 而變動，其最大值為 0.45 rad/sec，如圖 3.20(b) 與 3.20(d)。另外，圖 3.20(c) 顯示側滑角落在 $\beta_{\max}$ 附近而且也沒超過側滑角容許的最大值， β 最大值為 0.345 rad/sec。而圖 3.22 為控制輸入 M_z ，轉動力矩約在 6000Nm 以下，從圖 3.23 與 3.24 更可以發現到使用權重的方式相對於只使用 γ_1 或 γ_2 ，側滑角不會超過其容許最大值（確保穩定性），又能盡可能的提升參考橫擺角速度使得操控性能更接近 γ_1 的方式。

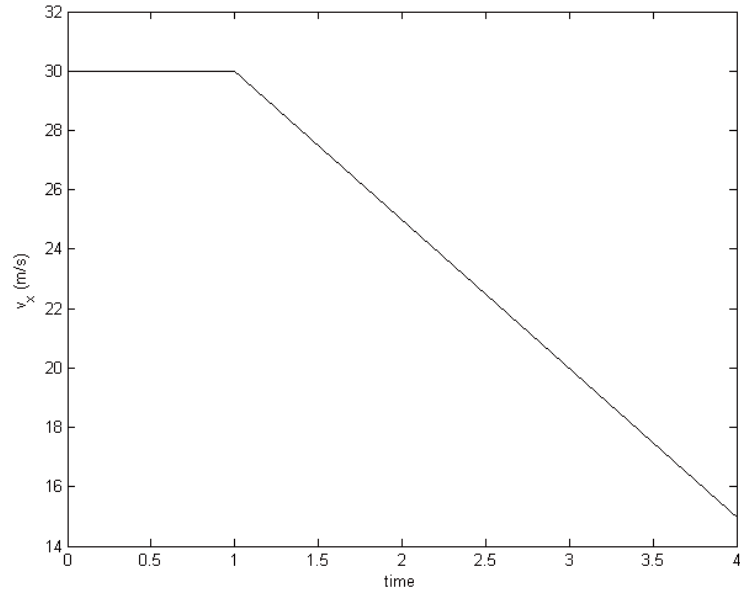


圖 3.19 模擬躲避障礙物而採用的車速 (-5m/s)

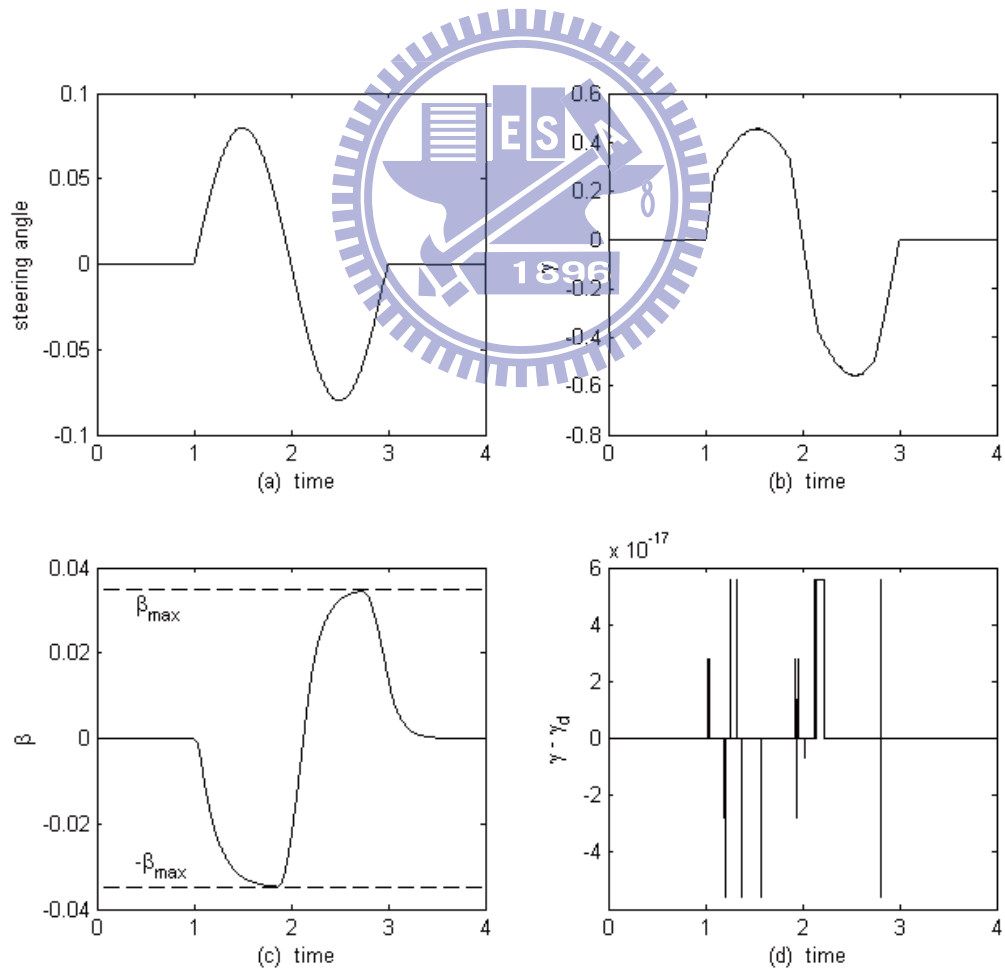


圖 3.20 躲避障礙而進行 change lane 的模擬圖 (γ_d 採用時變權重)

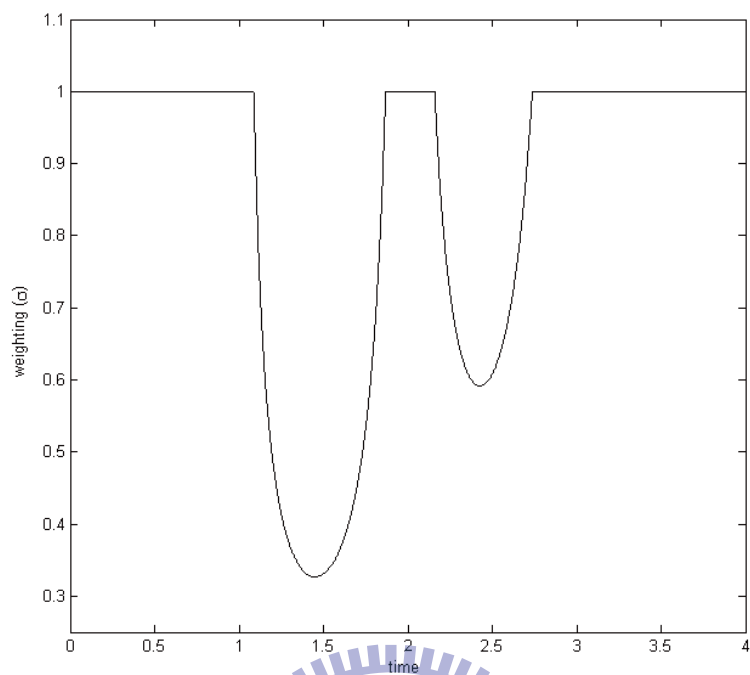


圖 3.21 躲避障礙而進行 change lane 的權重變化圖

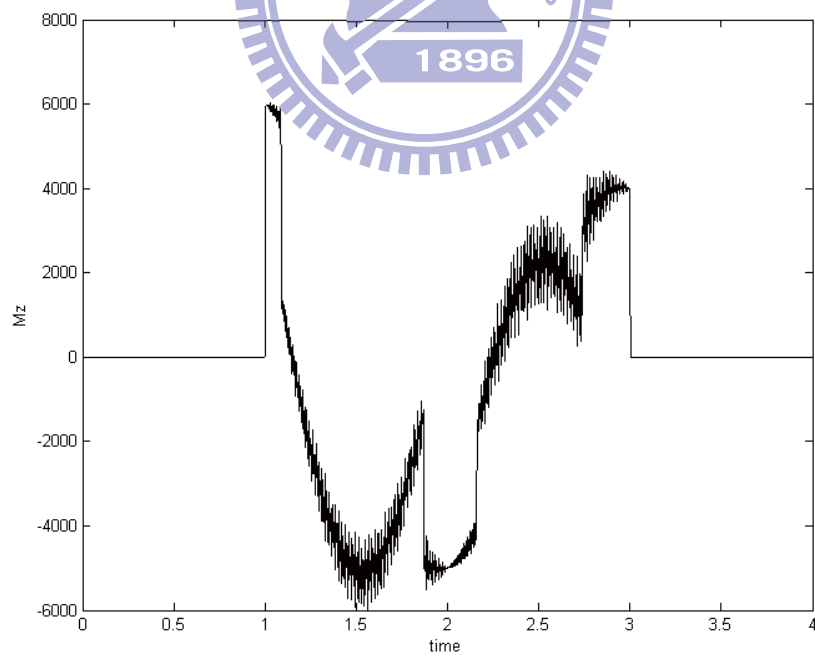


圖 3.22 躲避障礙而進行 change lane 的 Mz 模擬圖 (γ_d 採用時變權重)

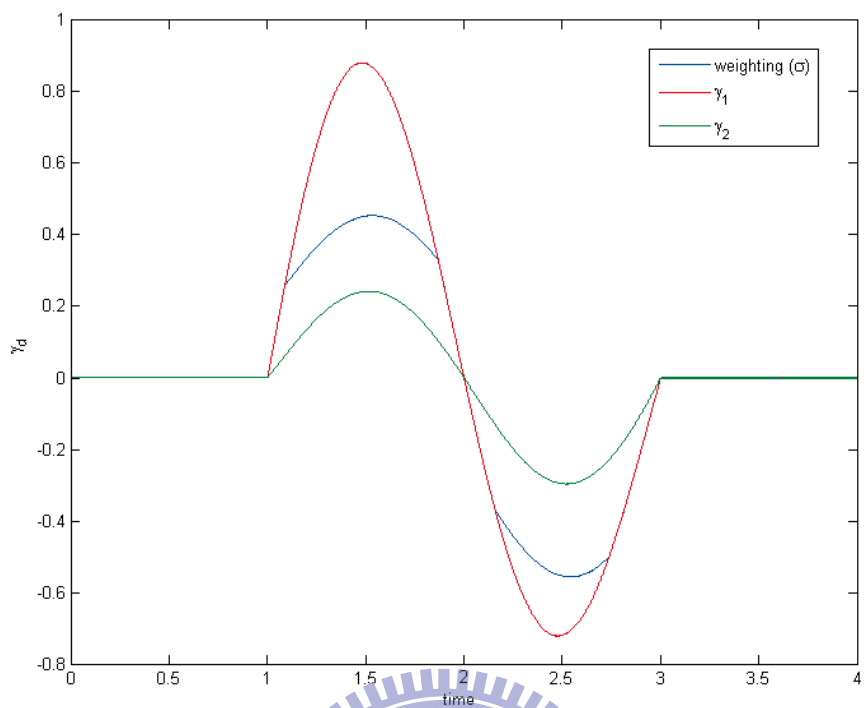


圖 3.23 躲避障礙而進行 change lane 之 γ_d 的比較圖

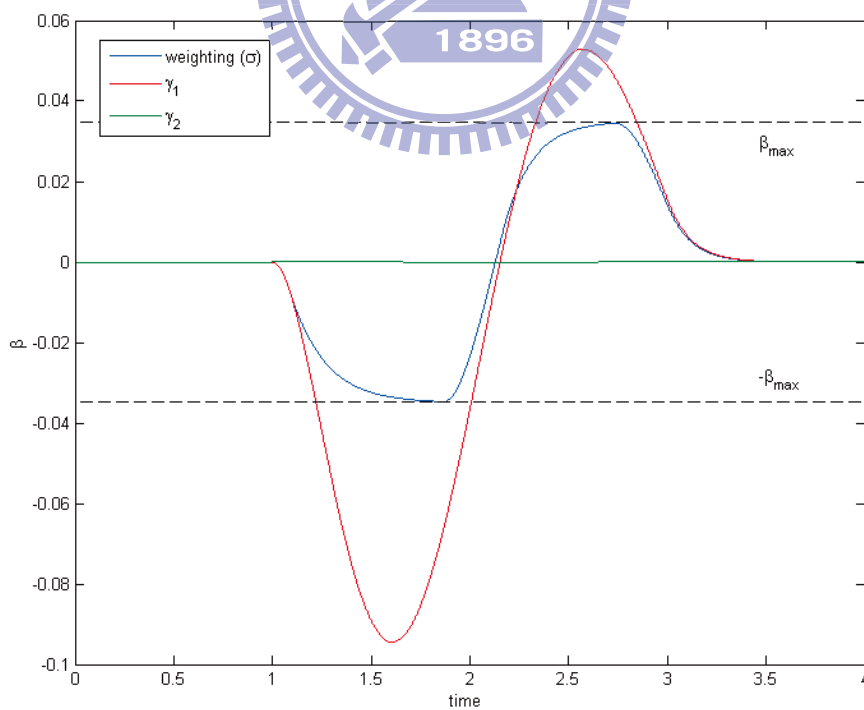


圖 3.24 躲避障礙而進行 change lane 之 γ_d 所影響的側滑角比較圖

3.4.2.3 兩次 change lane 動作之模擬

在 3.4.1.2 節提到，由於權重為定值的方式會隨駕駛者給的 $\delta_f(t)$ 而影響被限制住，雖可確保其車體側滑角皆落在側滑角之最大值內，但是參考橫擺角速度則會逐漸變小的進而喪失其操控性。這邊我們透過時變的權重來進行模擬並與非時變的權重做比較，如下面的模擬所示，在車速為 25m/s (90km/hr) 時，前輪轉向角如圖 3.25(a) 給定，時變的權重則如圖 3.20 所示，在 0.232 與 1 之間變動， γ 有追蹤到 γ_d 並且隨 δ_f 而變動，其最大值為 0.73 rad/sec，如圖 3.25(b) 與 3.25(d) 所示。另外，圖 3.25(c) 顯示側滑角落在 $\beta_{\max}$ 上，而且沒超過側滑角容許的最大值。從圖 3.28 中可觀察到採用時變權重在第二次 change lane 動作時，參考的橫擺角速度 (約 0.4rad/sec) 明顯大於非時變權重的參考橫把角速度 (約 0.24rad/sec)，也表示時變的權重的方式其操控性較不受 $\delta_f(t)$ 影響而變差。

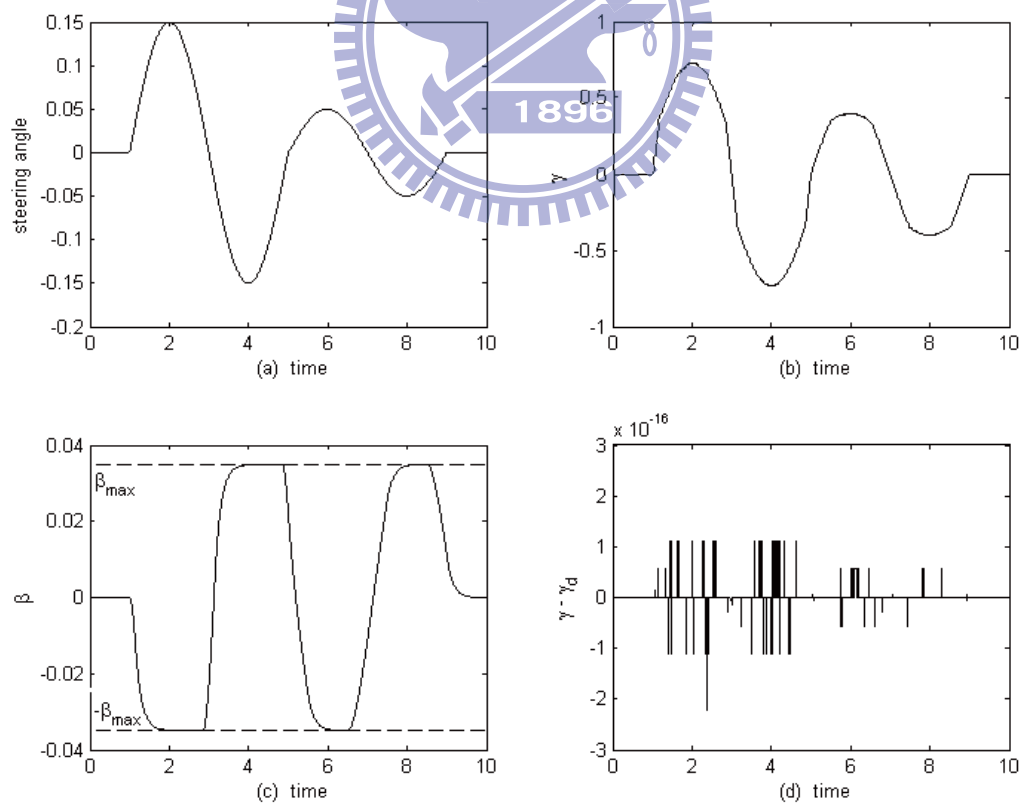


圖 3.25 兩次 change lane 模擬圖 (γ_d 採用時變權重)

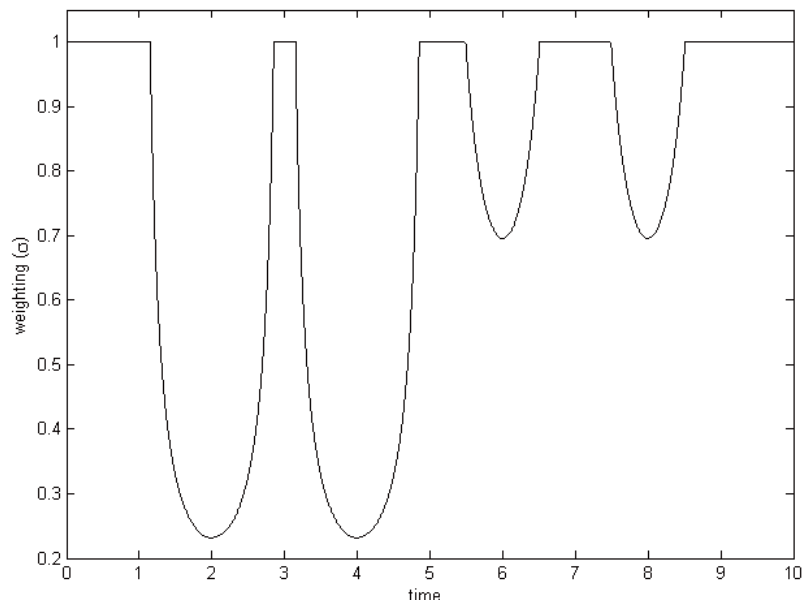


圖 3.26 兩次 change lane 的權重變化圖

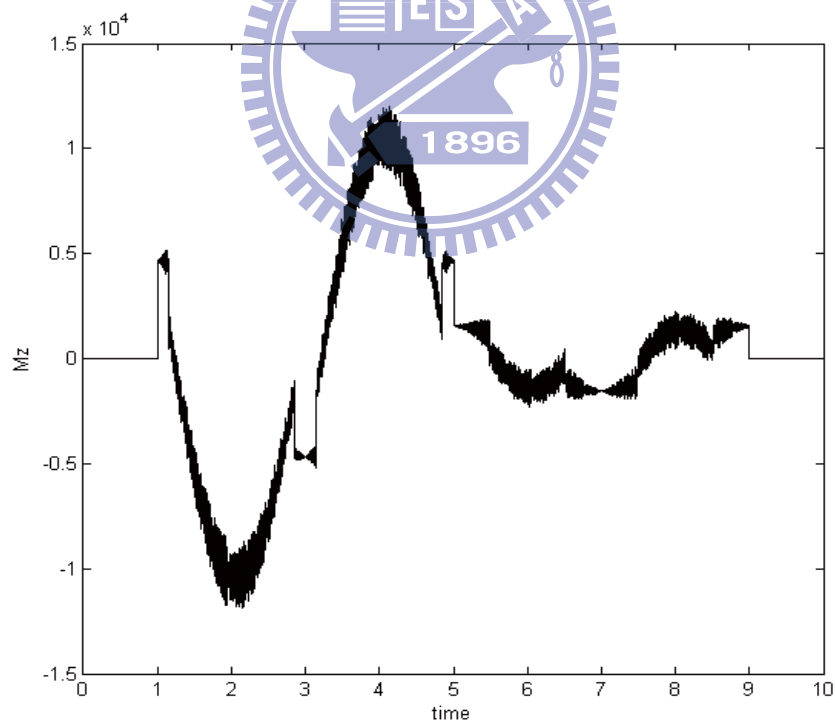


圖 3.27 兩次 change lane 的 Mz 模擬圖 (γ_d 採用時變權重)

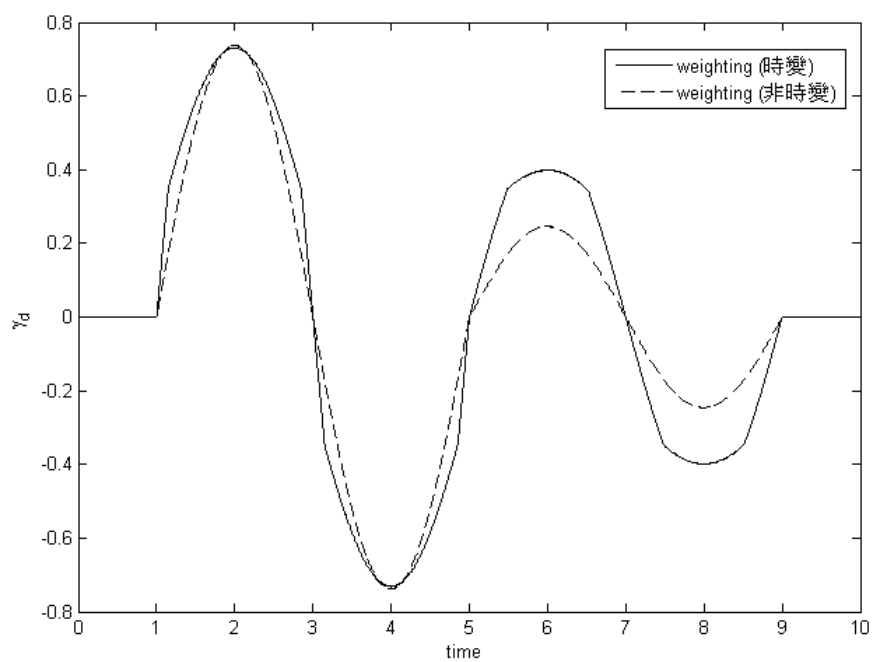


圖 3.28 兩次 change lane 之 γ_d 的比較圖

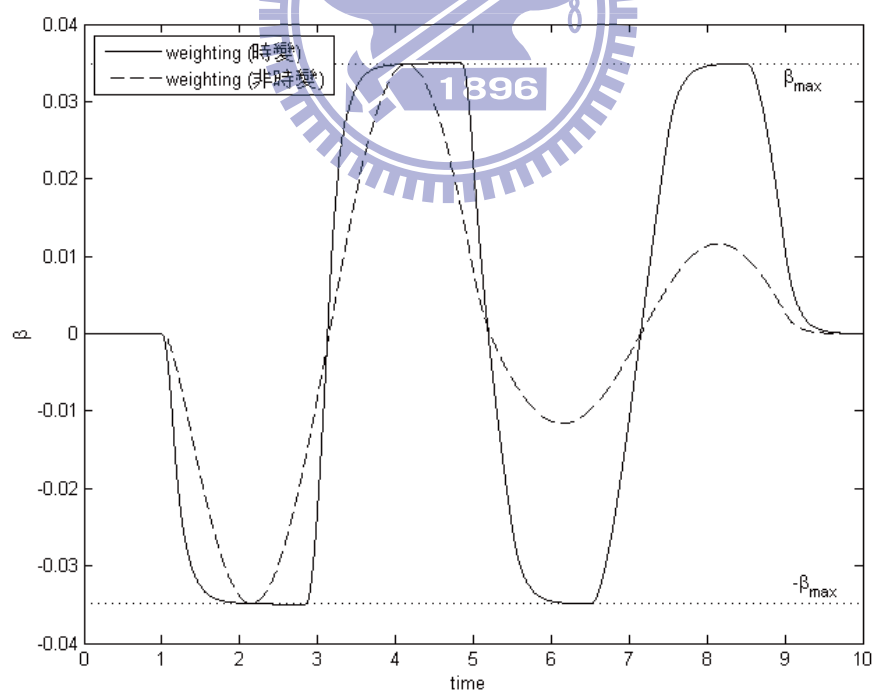


圖 3.29 兩次 change lane 之 γ_d 所影響的側滑角比較圖

3.4.2.4 J 轉向 (J-turn) 動作之模擬

下面模擬參考橫擺角速度選用權重為時變的方式在車速 25m/s (90km/hr) 進行J轉向 (J-turn) 之動作，其前輪轉向角 δ_f 如圖 3.30(a) 給定。透過公式 (3.44) 所產生的時變權重則如圖 3.31 所示在 0.35 與 1 之間變動，其結果也顯示， γ 有追蹤到 γ_d 並且隨 δ_f 而變動，其最大值為 0.56 rad/sec，如圖 3.30(b) 與 3.30(d) 所示。另外，圖 3.30(c) 顯示側滑角落在 $\beta_{\max}$ 附近，而且也沒超過側滑角容許的最大值。圖 3.32 為控制輸入 M_z ，轉動力矩約在 7100Nm 以內，而從圖 3.33 與 3.34 更可以發現使用權重的方式相對於只使用 γ_1 或 γ_2 ，側滑角不會超過其容許最大值 (確保穩定性)，又能盡可能的提升參考橫擺角速度使得操控性能更接近 γ_1 的方式，在 1.45 至 2 秒之間，也可觀察到權重的方式在此段時間為了確保穩定性而降低 γ_d 。圖 3.27 則為 J 轉向之 X-Y 圖。

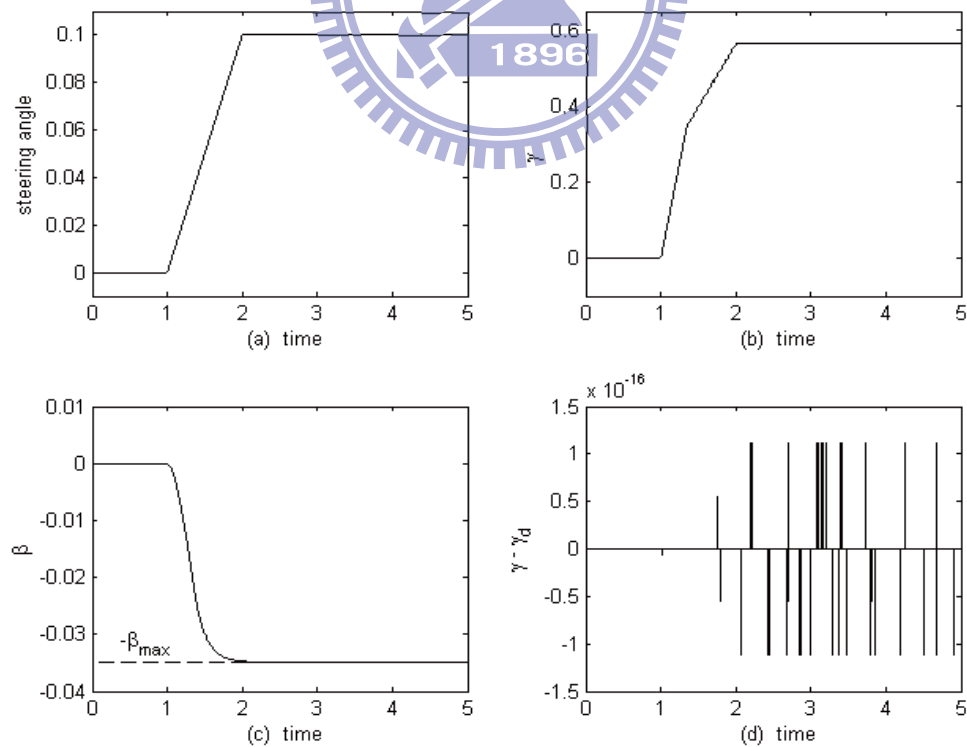


圖 3.30 J-turn 轉向之模擬圖 (γ_d 採用時變權重)

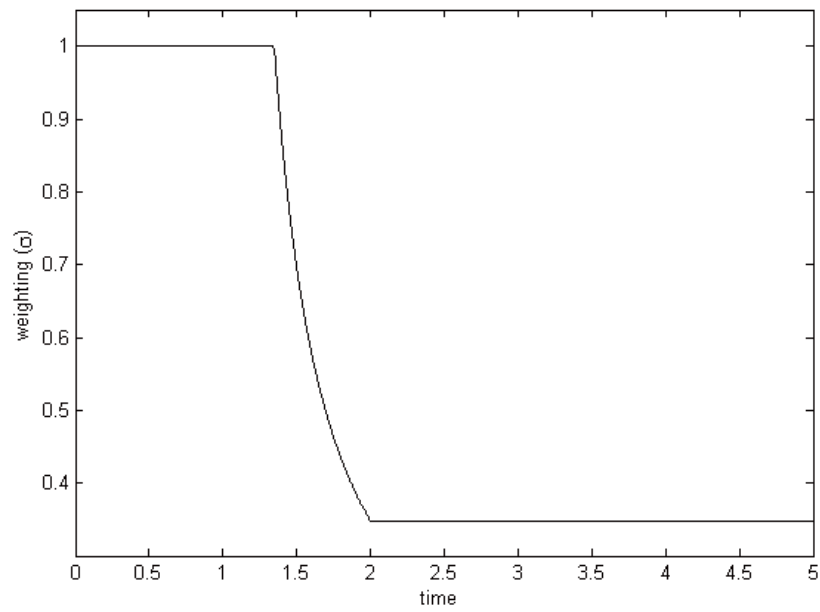


圖 3.31 J-turn 轉向的權重變化圖

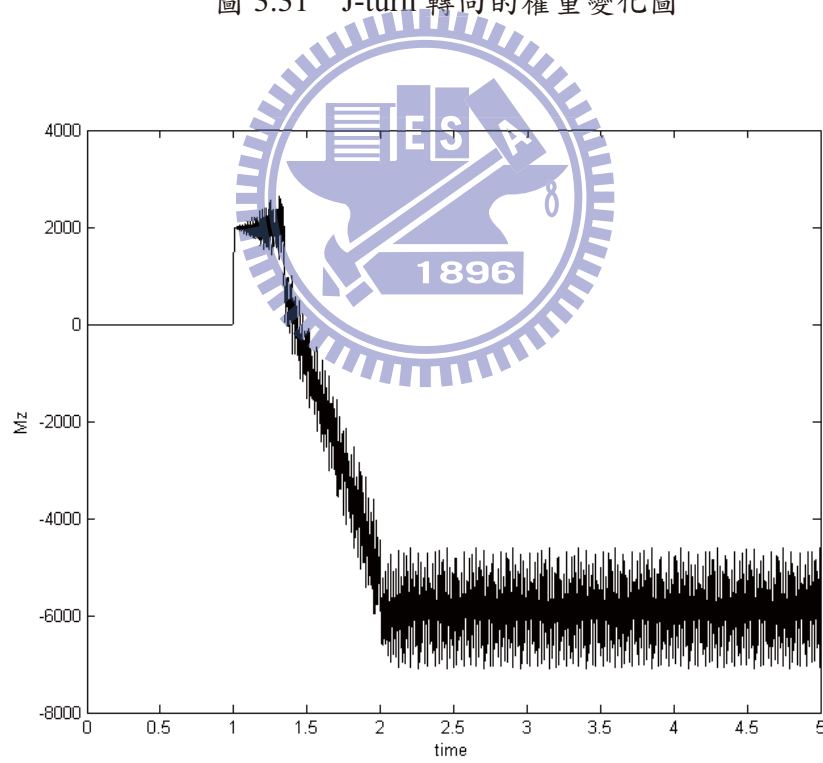


圖 3.32 J-turn 轉向的 M_z 模擬圖 (γ_d 採用時變權重)

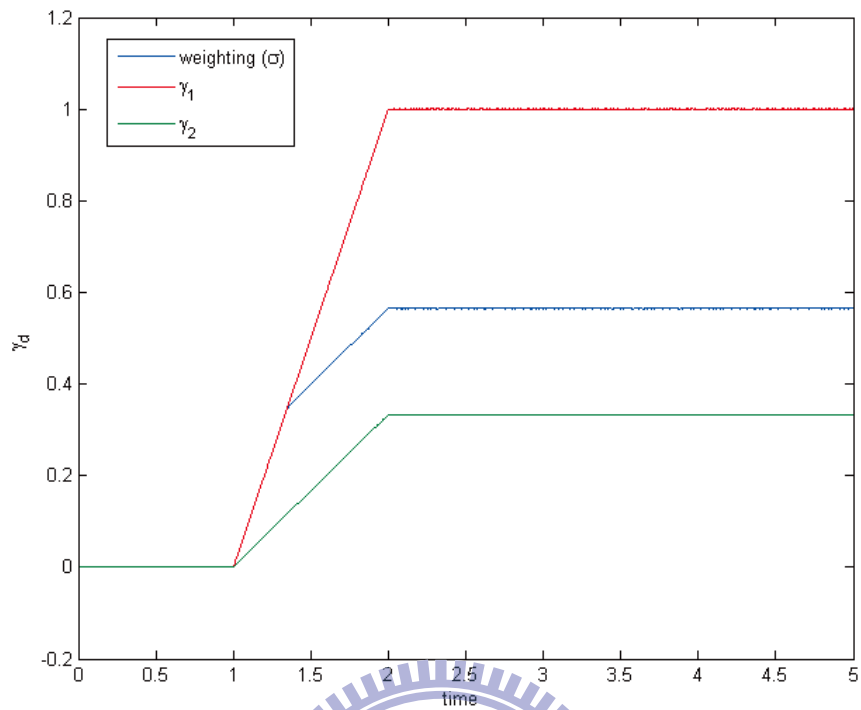


圖 3.33 J-turn 轉向之 γ_d 的比較圖

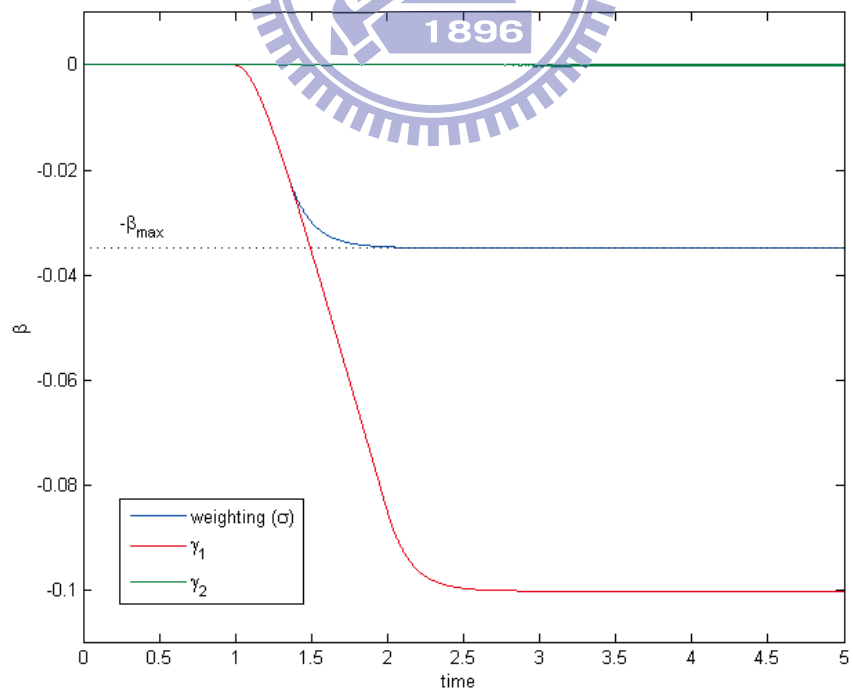


圖 3.34 J-turn 轉向之 γ_d 所影響的側滑角比較圖

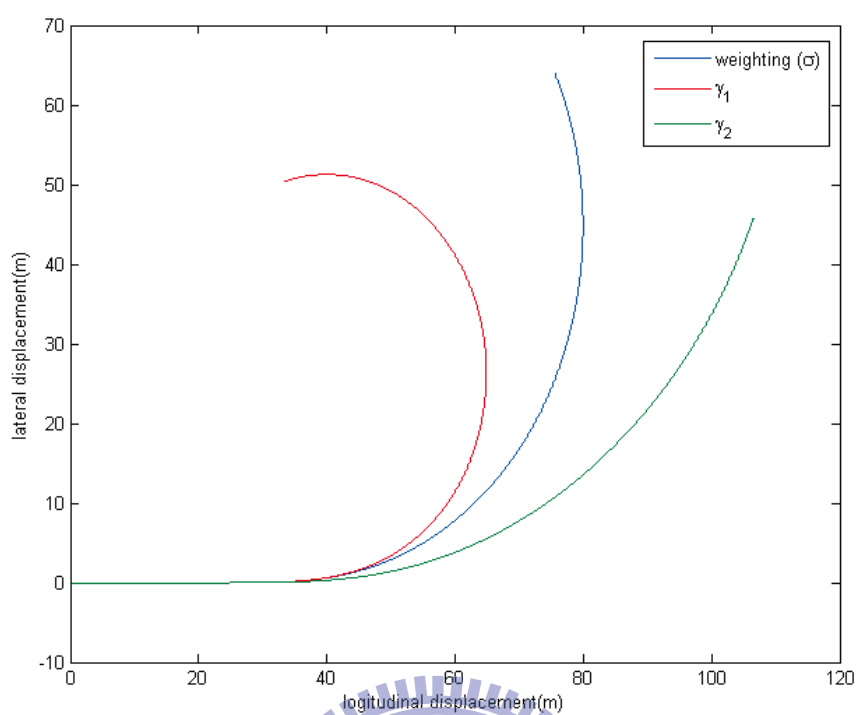


圖 3.35 J-turn 轉向之 X-Y 座標圖



第 4 章

應用順滑模控制的可靠度設計於全車模型

4.1 問題描述

駕駛者操控車子在正常的轉向過程中，可以透過分配四個輪子馬達的制動或驅動扭力來達成橫擺角速度追蹤到我們期望的參考橫擺角速度。但如果車子發生一些問題，像是估測重要參數的感應器故障（例如：車速、車體側滑角）或是致動器（actuator）故障（例如：轉向的動力系統和車輪的扭矩控制力）等，都會降低車子的性能而大大增加意外的發生 [52]，所以我們需要提供一個合適的可靠度控制當故障發生時仍能提供車子不錯的性能以確保駕駛者的安全。因此，這個章節我們會討論當致動器故障時，利用順滑模態控制的可靠度設計使得橫擺角速度可以追蹤到我們期望的參考橫擺角速度來提升車子性能，並且結合權重（weighting）的觀念使車子在穩定的前提下（i.e., 車體的側滑角維持在容許的範圍內），又能夠提供良好的操控性。

當車子行駛在摩擦力較低的路面上，車體側滑角除了可能會變大外 [2]，確保穩定所容許的側滑角最大值也會變小 [1]，所以側滑角在低摩擦力路面的重要性更不容忽視。後續部分我們也會透過順滑模態控制與權重的觀念於 low- μ 路面（行駛於摩擦力較低的路面）、 μ -split 路面（車子左右兩側的摩擦力不同），使車子的穩定性可以確保，並盡可能的提高其操控性，使車子能在安全的情況下仍能擁有不錯的性能。

4.2 可靠度控制器的設計

4.2.1 輸出追蹤公式化 (Output Tracking Formulation)

7-DOF 的車子模型中 (參考 2.3.2 節)，假設狀態 $\mathbf{x} = [v, \beta, \gamma, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4]$ ， $\mathbf{u} = [T_1, T_2, T_3, T_4]$ 和 $y = \gamma$ 。從公式(2.38)-(2.39)中我們選擇一個 γ 當作輸出，由此可知此系統為一個多輸入單輸出 (multi-input and single-output, MISO) 系統，而且需對此 MISO 系統的輸出 y 微分兩次才會出現輸入 $\mathbf{u}$ ，故相對階數為 2。其輸入-輸出關係式如下：

$$\ddot{\gamma} = \phi(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} + d \quad (4.1)$$

其中 $\phi(\mathbf{x}) \in R$ ， $G(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), g_3(\mathbf{x}), g_4(\mathbf{x})] \in R^4$ ， d 為不確定性或是量測的雜訊，而(4.1)式的 $\phi(\mathbf{x})$ 與 $g_i(\mathbf{x})$ 其表示方式，我們透過下面的定義來呈現。

縱向力與側向力的表示方式我們採用 Magic formula 模組，如(2.14)與(2.21)式。為了閱讀上的方便，我們定義(4.2)-(4.7)式

$$\varpi_1(\lambda_i) = B_1 \lambda_i - E_1 [B_1 \lambda_i - \tan^{-1}(B_1 \lambda_i)] \quad (4.2)$$

$$\varpi_2(\lambda_i) = C_1 \tan^{-1}[\varpi_1(\lambda_i)] \quad (4.3)$$

$$\varpi_3(\lambda_i) = \frac{B_1 C_1 D_1 \cos(\varpi_2(\lambda_i))[(1 - E_1)(1 + B_1^2 \lambda_i^2) + E_1]}{(1 + \varpi_1^2(\lambda_i))(1 + B_1^2 \lambda_i^2)} \quad (4.4)$$

$$\varpi_1(\alpha_i) = B_2 \alpha_i - E_2 [B_2 \alpha_i - \tan^{-1}(B_2 \alpha_i)] \quad (4.5)$$

$$\varpi_2(\alpha_i) = C_2 \tan^{-1}[\varpi_1(\alpha_i)] \quad (4.6)$$

$$\varpi_3(\alpha_i) = \frac{B_2 C_2 D_2 \cos(\varpi_2(\alpha_i))[(1 - E_2)(1 + B_2^2 \alpha_i^2) + E_2]}{(1 + \varpi_1^2(\alpha_i))(1 + B_2^2 \alpha_i^2)} \quad (4.7)$$

其中 $i = 1, \dots, 4$ 。

透過(4.2)-(4.7)式的定義後，我們可以把縱向力、側向力與其微分項表示如下：

$$f_{xi}(\lambda_i) = D_1 \sin(\varpi_2(\lambda_i)) \quad (4.8)$$

$$\frac{d}{dt} f_{xi}(\lambda_i) = \varpi_3(\lambda_i) \cdot \dot{\lambda}_i \quad (4.9)$$

$$f_{yi}(\alpha_i) = D_2 \sin(\varpi_2(\alpha_i)) \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt} f_{yi}(\alpha_i) = \varpi_3(\alpha_i) \cdot \dot{\alpha}_i \quad (4.11)$$

然後把(2.38)-(2.39)式結合(2.40)-(2.41)式後， $\phi(\mathbf{x})$ 與 $g_i(\mathbf{x})$ 如下所示：

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) = & \frac{1}{I_z} \sum_{i=1}^4 \{ -l_{xi} \cdot (f_{xi} s \delta_i + f_{yi} c \delta_i) \cdot \dot{\delta}_i + l_{yi} \cdot (f_{xi} c \delta_i - f_{yi} s \delta_i) \cdot \dot{\delta}_i \} \\ & + (l_{xi} c \delta_i + l_{yi} s \delta_i) \cdot \varpi_3(\lambda_i) \cdot \dot{\lambda}_{xi} + (l_{yi} c \delta_i - l_{xi} s \delta_i) \cdot \varpi_3(\alpha_i) \cdot \dot{\alpha}_i \} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$g_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{I_z} (l_{xi} c \delta_i + l_{yi} s \delta_i) \cdot \varpi_3(\lambda_i) \cdot \dot{\lambda}_{ui} \quad (4.13)$$

其中 $i=1, \dots, 4$ ，而且

$$\dot{\lambda}_{xi} = \begin{cases} \frac{I_w R_w \omega_i \dot{v} - R_w f_{xi} v}{I_w v^2} & \text{if } \lambda_i > 0 \\ \frac{\dot{v}}{R_w \omega_i} - \frac{f_{xi} v}{I_w \omega_i^2} & \text{if } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\dot{\lambda}_{ui} = \begin{cases} \frac{R_w}{I_w v} & \text{if } \lambda_i > 0 \\ \frac{v}{I_w R_w \omega_i^2} & \text{if } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\dot{\alpha}_i = \begin{cases} \dot{\delta} - \frac{(v^2 - l_f \gamma v \cdot s \beta) \dot{\beta} + l_f v \cdot c \beta \cdot \dot{\gamma} - l_f \gamma \cdot c \beta \cdot \dot{v}}{(v \cdot c \beta)^2 + (l_f \gamma + v \cdot s \beta)^2} & \text{if } i=1, 2 \\ \frac{(l_r \gamma v \cdot s \beta) \dot{\beta} + l_r v \cdot c \beta \cdot \dot{\gamma} - l_r \gamma \cdot c \beta \cdot \dot{v}}{(v \cdot c \beta)^2 + (l_f \gamma - v \cdot s \beta)^2} & \text{if } i=3, 4. \end{cases} \quad (4.16)$$

4.2.2 順滑模態控制的可靠度設計

可靠度控制 (Reliable Control) 一般可分成被動式 (Passive) 可靠度控制，另一種是主動式 (Active) 可靠度控制。被動式可靠度控制須先劃分出不會故障和可能會故障的促動器(actuator)，其優點為不需額外花時間或成本來做錯誤偵測與診斷的工作，但是實際上當異常現象發生前我們是很難判斷這方面的資訊的，無形中可能會犧牲系統正常狀況下的部分性能。另一方面，主動式可靠度控制可以透過錯誤偵測與診斷機制 (Fault Detection and Diagnosis, FDD) 隨系統狀況組織其控制法則，雖必須增加監測器成本及提高系統的複雜度，但卻能充分的發揮系統在各狀態下知性能表現。因此，在本章節中我們選用主動式可靠度控制來考慮(2.38)-(2.39)式之系統的可靠度輸出追蹤問題 (reliable output tracking issues)。

首先，我們假設成功的透過錯誤偵測與診斷機制 (FDD) 診斷出故障的致動器，而故障的原因可能是致動器在時間的變化下，有退化 (degradation)、放大 (amplification) 和斷電而停止運作 (outage) 等情況所導致的 [19]。當故障發生前我們有各種控制策略來執行我們希望車子達到的性能，可是一旦故障發生後，我們則必須切換到主動的可靠度控制來確保車子性能。透過FDD診斷後，我們可以把致動器分成 H 、 F 兩部分，其中我們假設在 H 部分的致動器都是正常運作，而 F 則代表故障的部分。因此，我們可以把(4.1)式改寫成

$$\ddot{\gamma} = \phi(\mathbf{x}) + G_H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_H + G_F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_F + d \quad (4.17)$$

其中 $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_H^T \ \mathbf{u}_F^T]^T$ 和 $G(\mathbf{x}) = [G_H(\mathbf{x}) \ G_F(\mathbf{x})]$ 。這邊我們假設 $\mathbf{u}_H \in R^k$ 、 $\mathbf{u}_F \in R^{4-k}$

($k \geq 1$)，而且為了可以使順滑模態控制在設計時，其等效控制(equivalent control)存在，必須假設 $\text{rank}(G_H(\mathbf{x})) = 1$ [30]。另外，假設藉由FDD的機制我們估測到故障部分的致動器輸出為 $\hat{\mathbf{u}}_F$ ，而估測誤差為 $\Delta \mathbf{u}_F$ 。

其 $\mathbf{u}_F$ 可如(4.18)式所示：

$$\mathbf{u}_F = \hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F \quad (4.18)$$

首先定義輸出誤差為

$$e = \gamma - \gamma_d \quad (4.19)$$

其目的是希望透過 SMC 的可靠度設計，使得 $e \rightarrow 0$ 。由(4.17)式可知相對階數為 2，我們可以把順滑面假設成

$$s = \dot{e} + c_1 e \quad (4.20)$$

其中 c_1 為大於零的常數。

從(4.17)-(4.20)式，我們可以得到

$$\dot{s} = \phi(\mathbf{x}) + G_H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_H + G_F(\mathbf{x}) \cdot (\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F) + d - \ddot{\gamma}_d + c_1 \dot{e} \quad (4.21)$$

為了使"到達條件 (reaching condition)"可以成立，我們做一個假設如下：

假設 4.1： 存在一個非負的函數 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 使得 $|G_F \cdot \Delta\mathbf{u}_F + d| \leq \rho(\mathbf{x}, t)$ 。

依照 2.1.2 節順滑模態控制器的設計過程，我們可以得到

$$\mathbf{u}_H = -G_H^+(\mathbf{x}) \cdot [\phi(\mathbf{x}) + G_F(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_F - \ddot{\gamma}_d + c_1 \dot{e} + (\rho(\mathbf{x}, t) + \eta) \cdot \text{sgn}(s)] \quad (4.22)$$

其中 $G_H^+(\mathbf{x}) = -G_H^T(\mathbf{x}) \cdot [G_H(\mathbf{x}) \cdot G_H^T(\mathbf{x})]^{-1}$ ，而且 η 為一個大於零的常數會影響系統狀態到順滑面的收斂速度。

從假設 4.1 以及(4.21)-(4.22)式，我們也可以保證(2.2)式 $s \dot{s} \leq -\eta|s|$ 可以滿足，使

得系統能有限時間上到順滑面上，其證明如下：

$$s \dot{s} = s \cdot [G_F(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{u}_F + d - (\rho(\mathbf{x}, t) + \eta) \cdot \text{sgn}(s)] \leq -\eta|s| \quad (4.23)$$

4.2.3 錯誤偵測與診斷機制 (FDD)

因本論文採用主動式的可靠度控制，所以必須有一個FDD的機制來做錯誤的偵測與診斷。這邊我們假設輪胎的縱向力 (f_{xi})、制動/驅動輪子的扭力 (T_i) 和輪子的角速度 (ω_i) 都可以從量測或估測來得到，接著利用 [20]的方式設計出一個觀察器如下：

$$\dot{\xi}_i = \frac{R_w f_{xi} - T_i}{I_w} + a_i(\omega_i - \xi_i), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.24)$$

其中 $a_i > 0$ 。

接著定義殘留訊號 (residual signal) 如(4.25)式

$$r_i = \omega_i - \xi_i, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.25)$$

當第 i 個制動/驅動輪子的扭力發生故障時，殘留訊號會瞬間大於一定的臨界值，此時錯誤偵測與診斷機制就會發出警報，進而判斷出哪個制動/驅動輪子的扭力發生問題。

4.3 權重 (weighting) 的量測方式

此部分我們採取全車模型並考慮到輪胎的實際特性，並透過 Magic formula 的摩擦力模組來描述前後輪的縱向力與側向力。但前後輪的側向力會根據輪胎滑移角與輪胎橫向徑度的影響而有非線性的變化，所以實際上在這部分權重的方式並不能如前面的方式設計。但是權重的觀念我們仍可以透過量測的方式，有效的抑制車體的側滑角使之維持在側滑角容許的最大值內，其方式如下：透過側向加速度的想法，我們可以近似成

$$a_y \approx v \cdot (\gamma + \dot{\beta}) \quad (4.26)$$

接著做移項如下式

$$\dot{\beta} = -\gamma_d + \frac{a_y}{v} \quad (4.27)$$

再把(3.24)的參考橫擺角速度帶入(4.2)式，可得

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -[\sigma \cdot \gamma_1 + (1-\sigma) \cdot \gamma_2] + \frac{a_y}{v} \\ &= -\sigma \cdot (\gamma_1 - \gamma_2) - \gamma_2 + \frac{a_y}{v} \\ &= -\sigma \cdot \int (\gamma_1 - \gamma_2) dt - \int \gamma_2 dt + \int \frac{a_y}{v} dt \end{aligned} \quad (4.28)$$

接著對(4.3)式取積分並移項如下

$$\sigma \cdot \int (\gamma_1 - \gamma_2) dt = \int \frac{a_y}{v} dt - \int \gamma_2 dt - \beta \quad (4.29)$$

最後再移項可得到權重的估測值如下：

$$\sigma = \frac{\int \frac{a_y}{v} dt - \int \gamma_2 dt - \beta_{\max}}{\int (\gamma_1 - \gamma_2) dt} \quad (4.30)$$

由於權重為正值所以必須加絕對值

$$\sigma = \left| \frac{\int \frac{a_y}{v} dt - \int \gamma_2 dt - \beta_{\max}}{\int (\gamma_1 - \gamma_2) dt} \right| \quad (4.31)$$

然後取最小的權重以保證車體的側滑角能在側滑角容許的最大值內。

接著我們以車子初速為 30m/s (108km/hr) 進行 change lane 的動作來模擬全車模型取得權重 (weighting) 的方式，前輪的轉向角 δ_f 如圖 4.1 所示，並透過使用 $\gamma_d = \gamma_1$ 的方式來模擬取得的權重。本章控制律之參數設定： $\eta = 10$ ， $c_1 = 1$ ，而 u_1 我們採用 saturation function，其 boundary layer 為 0.1，而參考橫擺角速度的時間常數皆設定成 $\tau = 0.001$ 。從公式(4.31)我們可以得到權重為 0.5618，如圖

4.2。把估測出的權重帶入後如圖 4.3 所示，側滑角剛好落在最大值 0.1745 附近，
所以權重的方式確實可以保證車子在轉向時的穩定性。

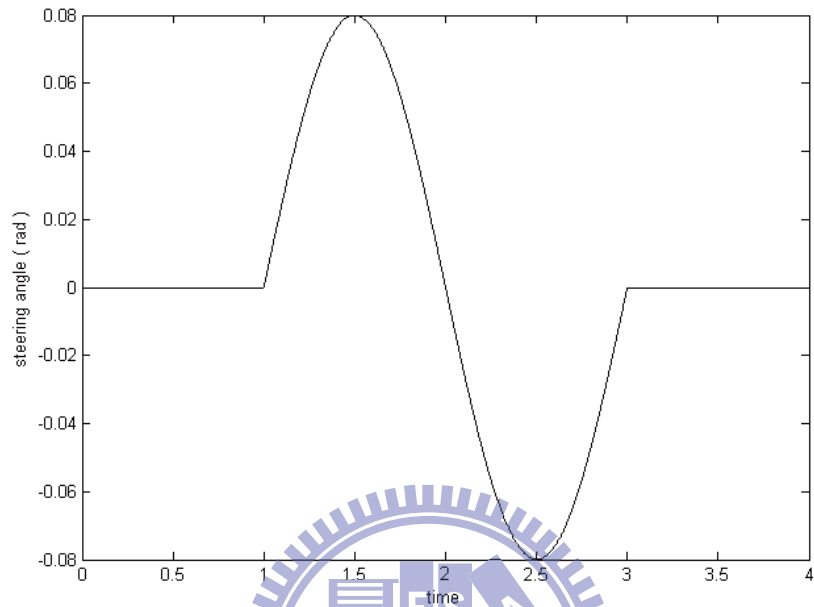


圖 4.1 change lane 動作之前輪轉向角

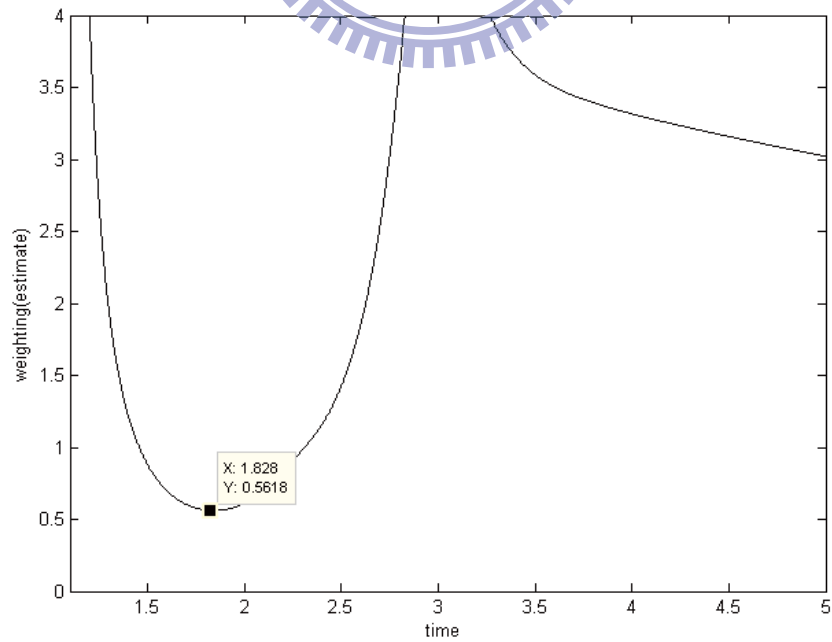


圖 4.2 估測到的權重 ($\sigma = 0.5618$)

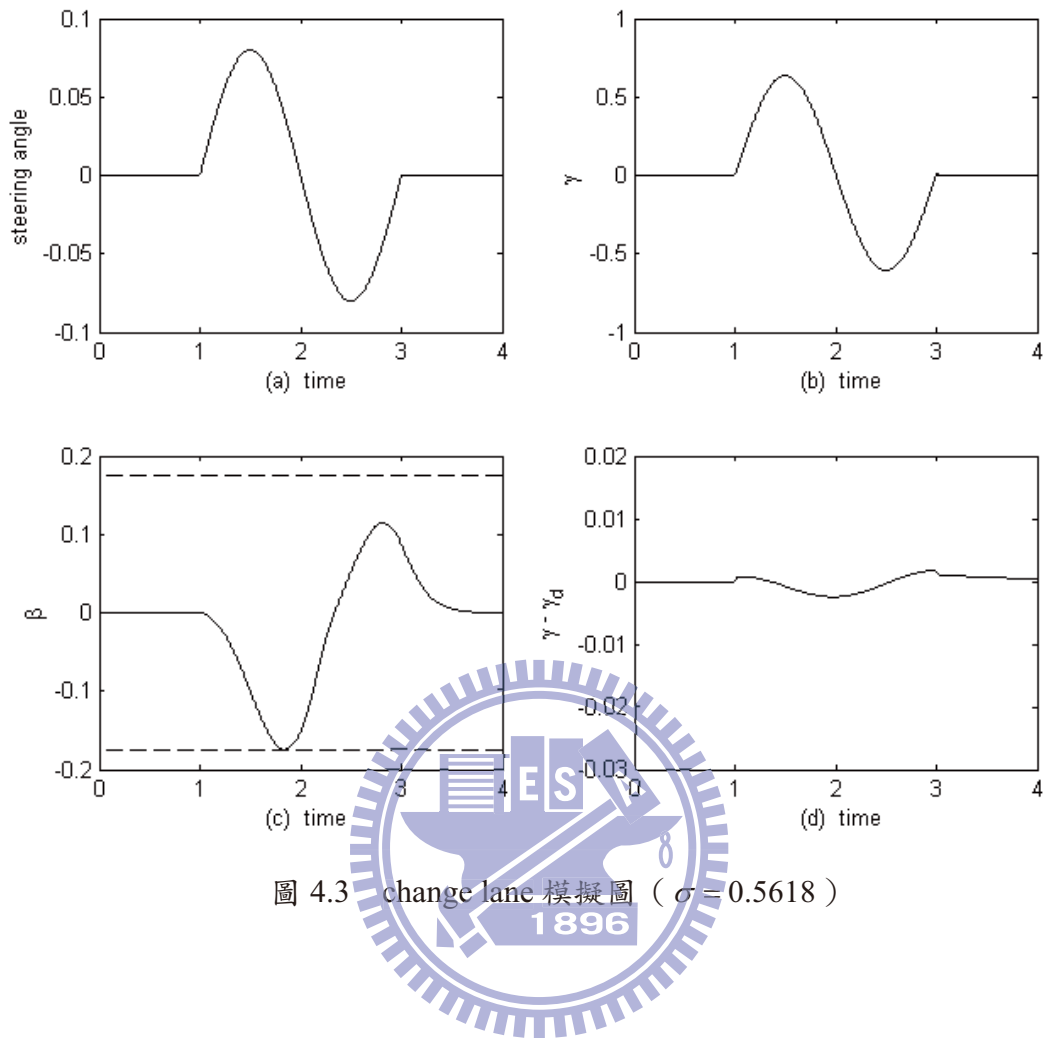


圖 4.3 change lane 模擬圖 ($\sigma = 0.5618$)

4.4 結合順滑模態控制的可靠度設計與權重觀念於全車模型

下面我們考慮車輪在change lane動作時車輪壞掉，透過FDD機制偵測出故障的輪子扭力，並透過SMC的可靠度設計與權重的觀念使車子在致動器發生問題時，仍可以在側滑角容許的最大值內以保持穩定，並分別在 4.4.1 與 4.4.2 節討論正常(乾)路面（側滑角限制約 10 度）與在踩踏過的雪地（packed snow）上（側滑角的限制在 4 度）模擬車輪致動器突然發生故障的狀況 [1], [34]。

4.4.1 change lane 動作之模擬（乾路面）

首先，我們考慮車子初速為 30m/s（108km/hr）進行 change lane 的動作，前輪的轉向角 δ_f 如圖 4.4(a)且估測的權重為 0.576。考慮車子在 change lane 的過程中偵測到 1.5 秒時左後輪的致動器故障，並分別使用 RSMC（附註：這邊我們簡稱 SMC 的可靠度設計為 RSMC）結合權重的方式與單純考慮 SMC 或是 RSMC 的方式做分析比較。圖 4.4(a)為車子左後輪的殘留訊號(residual signal)，可清楚看到在 1.5 秒時瞬間有了一個大於臨界值的訊號，此時左後輪的警報器就發生警告（附註：alarm_i，i=1,...,4，分別表示左前輪、右前輪、右後輪、左後輪之 alarm）。從圖 4.5 中，SMC 的控制方式在出現警報時很明顯的失去效能，橫擺角速度無法追蹤到參考橫擺角速度，而採用 γ_1 與權重的 RSMC 控制方式雖然都可以使得橫擺角速度追蹤到參考橫擺角速度，但採用 γ_1 的 RSMC 控制方式之側滑角（約 0.32 rad/sec）以大於 $\beta_{\max}$ （0.1745 rad/sec），所以穩定性可能會有問題。反觀採用權重的 RSMC 控制方式使得側滑角落在 $\beta_{\max}$ 值內，所以看得出穩定性有了保證。圖 4.5 為車速比較圖，也可發現採用 RSMC 在 change lane 時，速度大約在 27m/s 與 30m/s 之間，而採用權重的方式只在 28m/s 與 30m/s 之間起伏更小，使得車子較不會因為速度差太大而使駕駛人有了不舒適感。圖 4.7 為順滑變數的比較圖，SMC 在故障發生後很明顯的，已經跑出順滑面上，相對於 RSMC 則可清楚看到它有能力使狀態保持在順滑面上以維持車子性能。圖 4.8 為四個輪子的制動/驅動扭力，在 1.5 秒左後輪的扭力故障沒辦法提供致動/驅動的能力來控制左後輪的縱向力，而 RSMC 的方式則可透過另外三個輪子扭力使其橫擺角速度追蹤到參考橫擺角速度，從圖中也可看到只採用 γ_1 方式之扭力約在 750Nm 以下，而採用權重的方式其扭力則在 500Nm 以下，所以可發現

採用權重的方式所花的力道也小很多。而圖 4.9 為四個輪子轉速，可明顯看出採用權重的方式相對於只採用 γ_1 的方式，其輪子轉速起伏也較小。圖 4.10 則為車子 change lane 動作採用三種方式的 X-Y 座標圖。

附註：圖 4.5-圖 4.10 中，藍色表示為 RSMC 採取權重的控制方式；紅色為 RSMC 採取 γ_1 的控制方式；黑色為 SMC 的控制方式；圖 4.5(C)之黑色點線則為 $\beta_{\max}$ 。

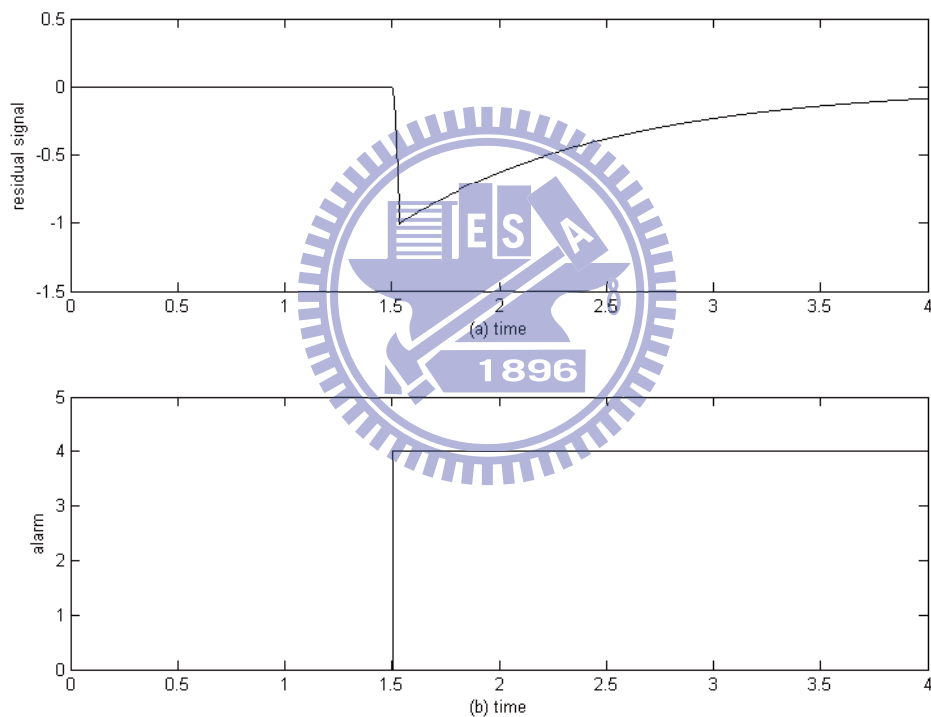


圖 4.4 change lane 於正常(乾)路面之 FDD 圖

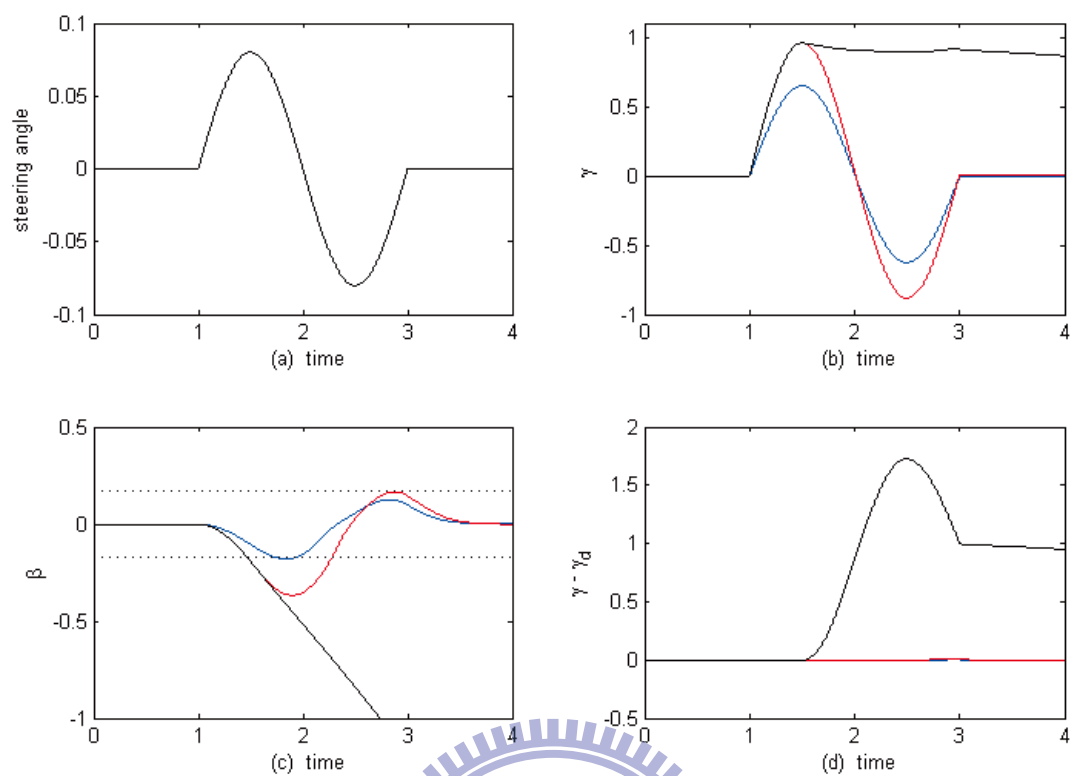


圖 4.5 change lane 於正常(乾)路面，左後輪致動器 1.5 秒故障

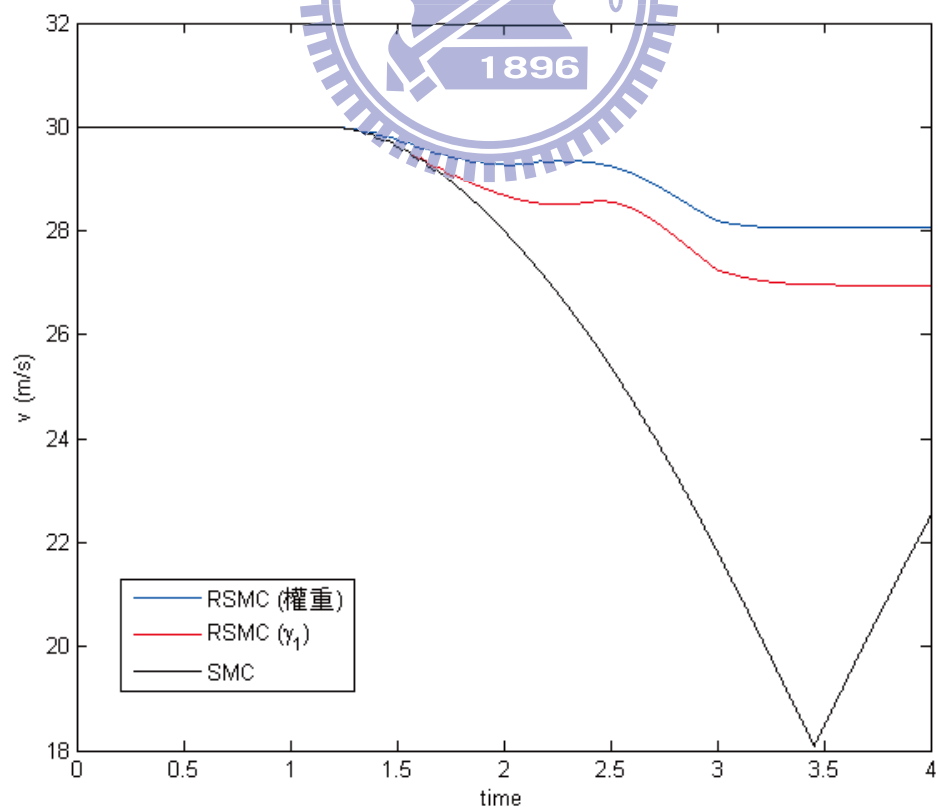


圖 4.6 在正常(乾)路面的車速比較圖

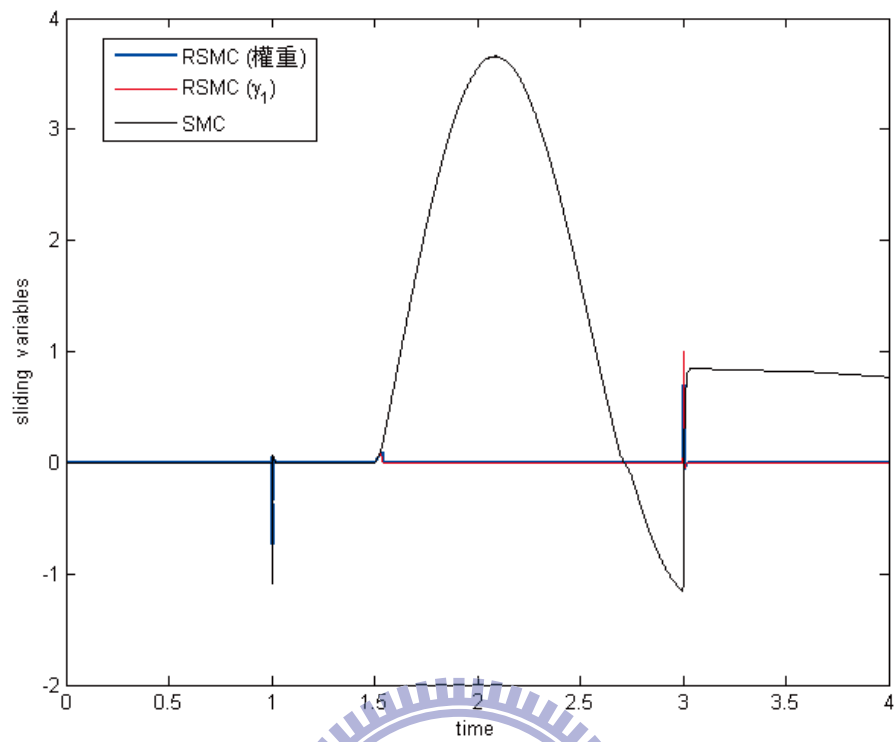


圖 4.7 在正常(乾)路面的順滑變數 (sliding variable) 比較圖

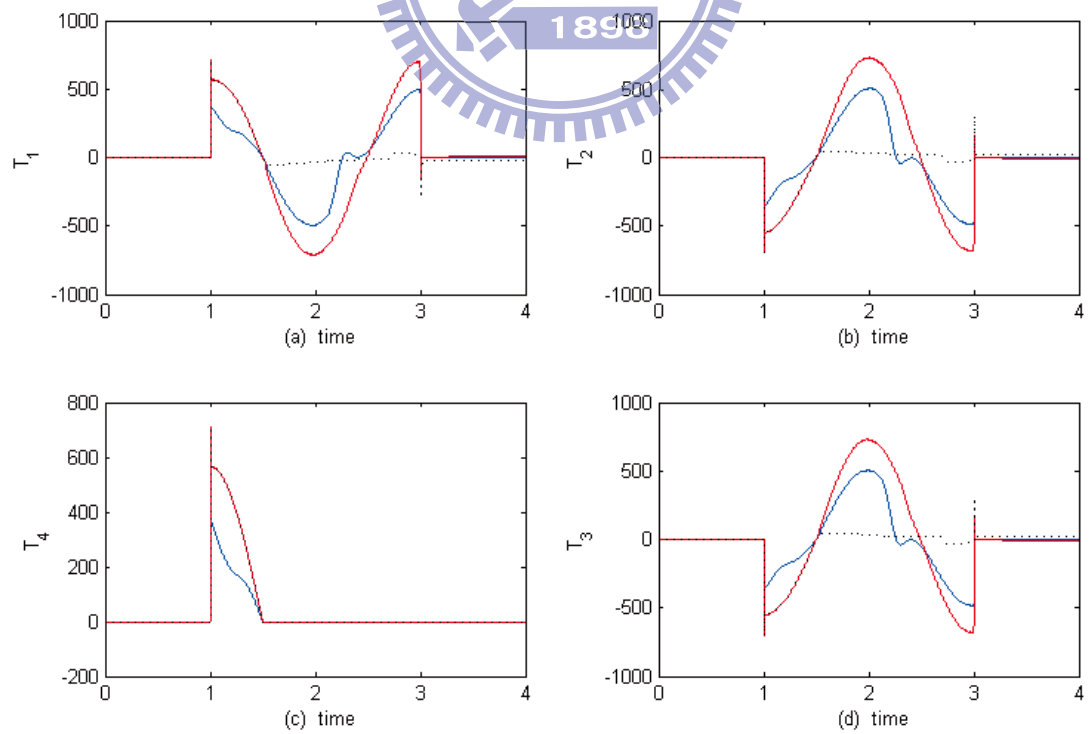


圖 4.8 在正常(乾)路面的輪子制動/驅動扭力比較圖

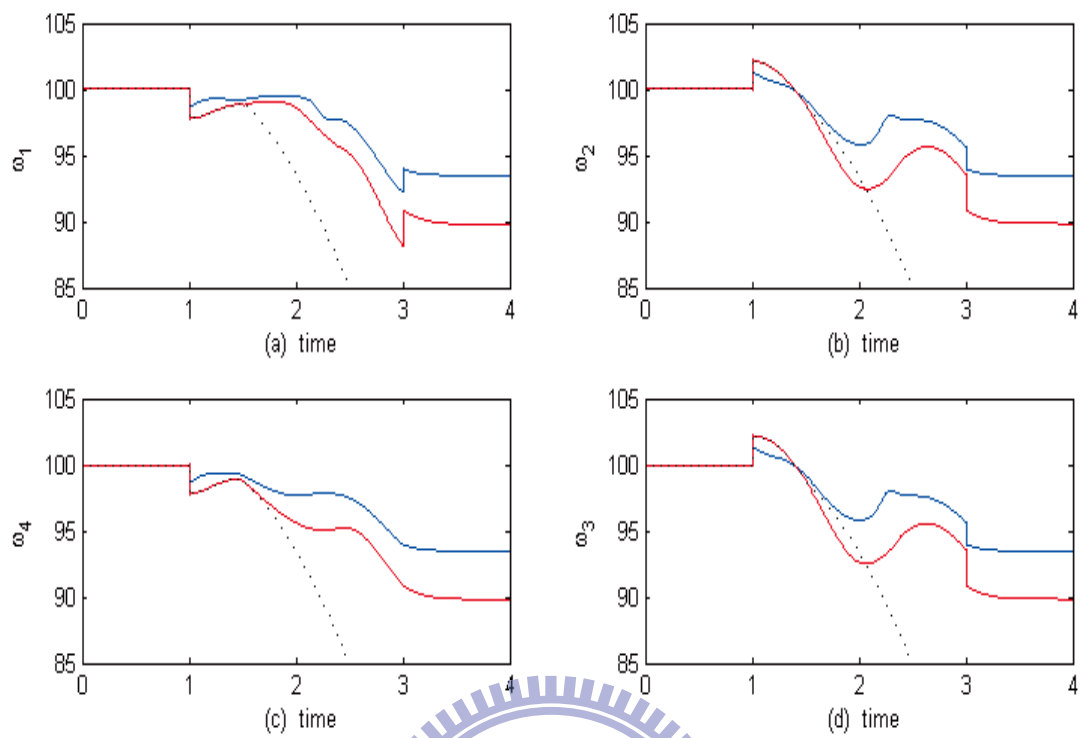


圖 4.9 在正常(乾)路面的輪子轉速比較圖

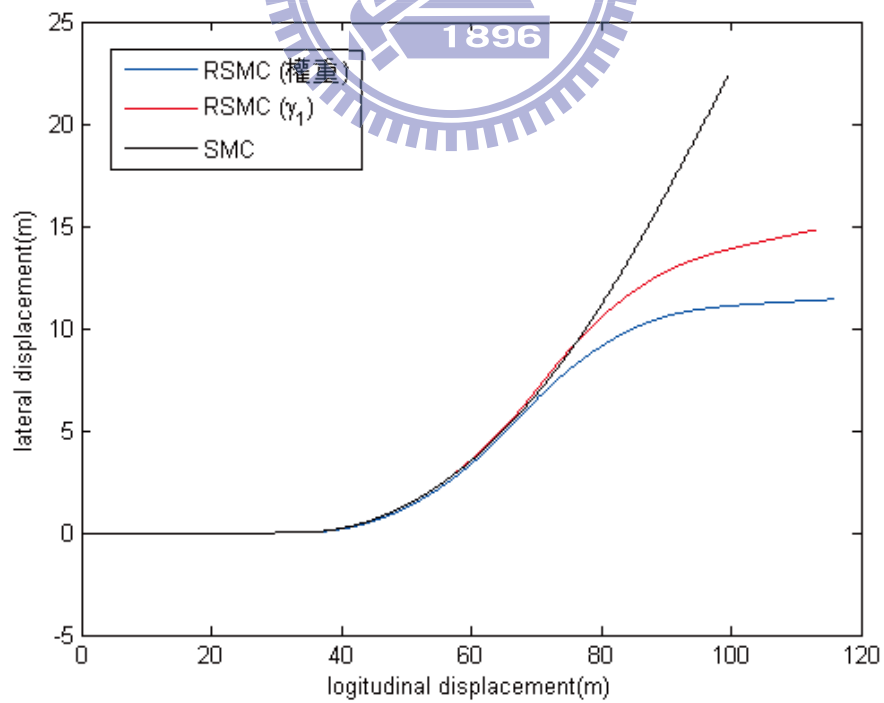


圖 4.10 在正常(乾)路面的 X-Y 座標圖

4.4.2 change lane 動作之模擬 (packed snow 路面)

首先，我們考慮車子初速為 20m/s (76km/hr) 於packed snow路面上進行 change lane的動作 (附註：packed snow路面之摩擦力係數為 0.35，側滑角最大值为 4 度，摘錄文獻 [1], [34])，前輪的轉向角 δ_f 如圖 4.12(a)且估測的權重為 0.326。考慮車子在change lane 的過程中偵測到 1.5 秒時左後輪的致動器故障，並分別使用RSMC (附註：這邊我們簡稱SMC的可靠度設計為RSMC) 結合權重的方式與單純考慮SMC或RSMC的方式來做分析比較。圖 4.11(a)為車子左後輪的殘留訊號 (residual signal)，可清楚看到在 1.5 秒時瞬間有了一個大於臨界值的訊號，此時左後輪的警報器就發生警告 (附註：alarm_i，i=1,...,4，分別表示左前輪、右前輪、右後輪、左後輪之alarm)。從圖 4.12 中，SMC的控制方式在出現警報時很明顯的失去效能，橫擺角速度無法追蹤到參考橫擺角速度，而採用 γ_1 的RSMC控制方式在摩擦力較低的路面，在 1.7 秒後可發現橫擺角速度也無法追蹤到參考橫擺角速度，反觀採用權重的RSMC控制方式，仍可以追到參考橫擺角速度，而且側滑角也落在packed snow路面所容許的 4 度內，約 0.0698 rad/sec。從圖 4.13 的車速比較圖中可清楚看到，採用權重的方式其車速在 20m/s 上下起伏，振幅在 0.4m/s，速度差不大而使駕駛人在行駛中較不會有不舒適感。圖 4.14 為順滑變數的比較圖，SMC在故障發生後很明顯的，已經跑出順滑面上，而只採用RSMC的方式在低摩擦力路面很明顯的，也會離開順滑面上，而採用權重的RSMC方式則可清楚看到它有能力使狀態保持在順滑面上以維持車子性能。圖 4.15 為四個輪子的制動/驅動扭力，可以發現到只透過RSMC方式的扭力已過大並且不穩，約在 10 的五次方以上。而圖 4.16 是我們把圖 4.15 放大只單純探討權重的RSMC方式，在 1.5 秒左後輪的扭力故障沒辦法提供致動/驅動的能力來控制左後輪的縱向力，然而權重的RSMC方式仍可透過另外三個輪子扭力使其橫擺角速度追蹤到參考橫擺角速度，從圖中可看到透過權重方式的扭力

約在 300Nm 以下，所花的力道也不大。而圖 4.17 為四個輪子轉速，我們也可發現使用 RSMC 的輪子轉速過大，尤其右側前、後輪的轉速在 60 到 450 rad/s 起伏，與左側相比而言，車子可能已經出現打轉的現象。圖 4.18 是我們把圖 4.17 放大只單純探討權重的 RSMC 方式，其轉速約在 63.5 到 69 rad/sec 之間，輪子轉速起伏也不大。圖 4.19 則為車子 change lane 於 packed snow 路面且採用三種方式的 X-Y 座標比較圖。

附註：圖 4.12-圖 4.19 中，藍色表示為 RSMC 採取權重的控制方式；紅色為 RSMC 採取 γ_1 的控制方式；黑色為 SMC 的控制方式；圖 4.12(C) 之黑色點線則為 $\beta_{\max}$ 。

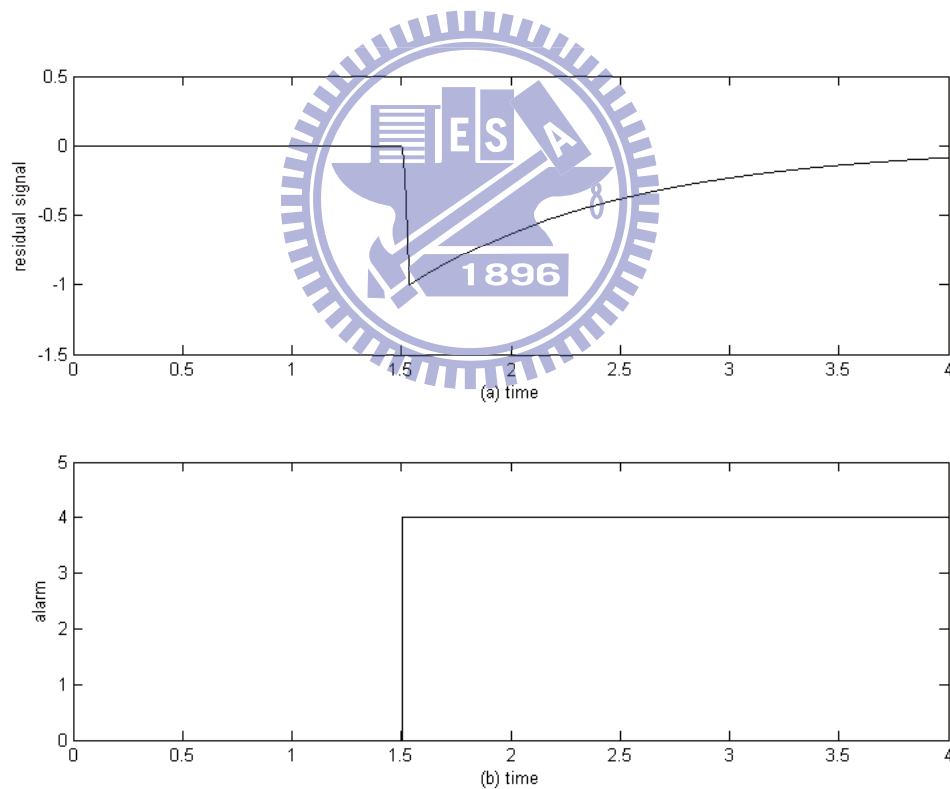


圖 4.11 change lane 於 packed snow 路面之 FDD 圖

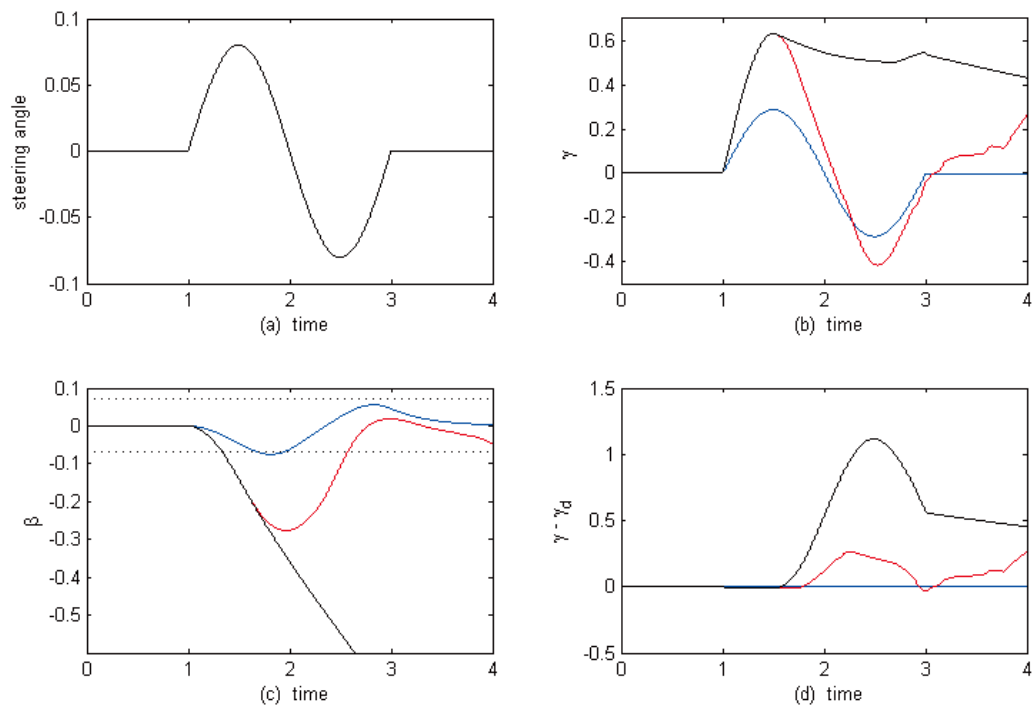


圖 4.12 change lane 於 packed snow 路面，左後輪致動器 1.5 秒故障

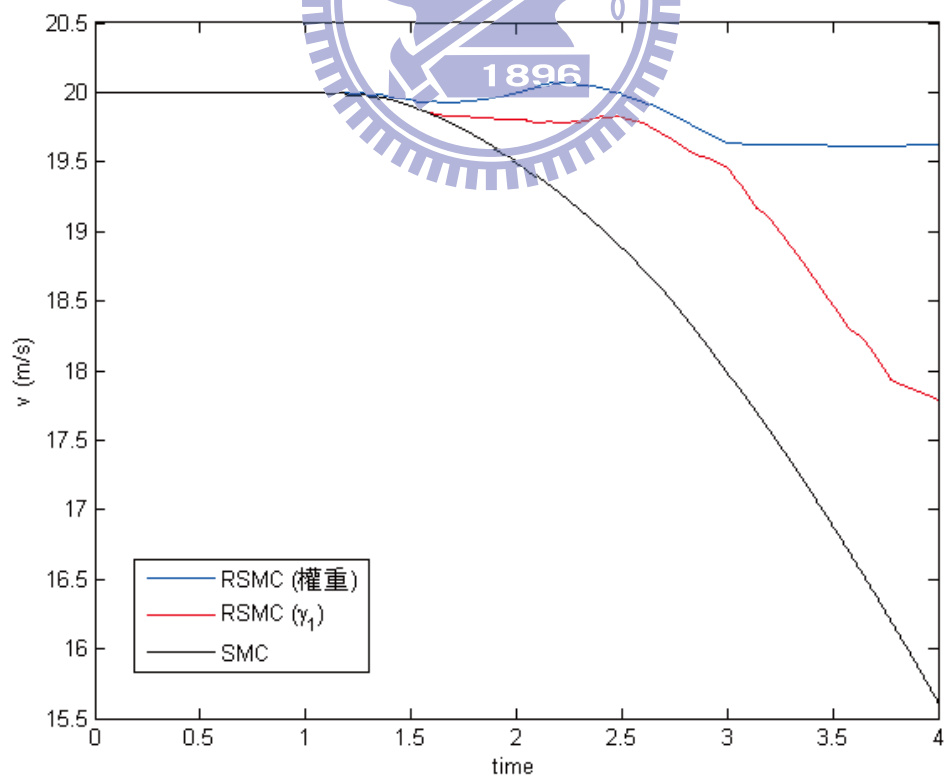


圖 4.13 在 packed snow 路面的車速比較圖

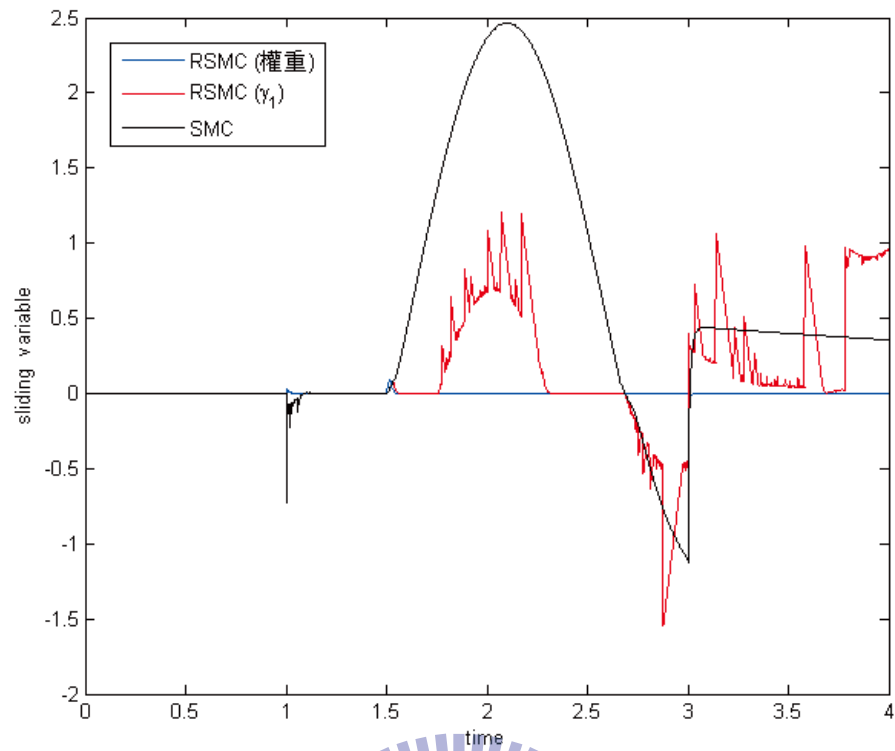


圖 4.14 在 packed snow 路面的順滑變數 (sliding variable) 比較圖

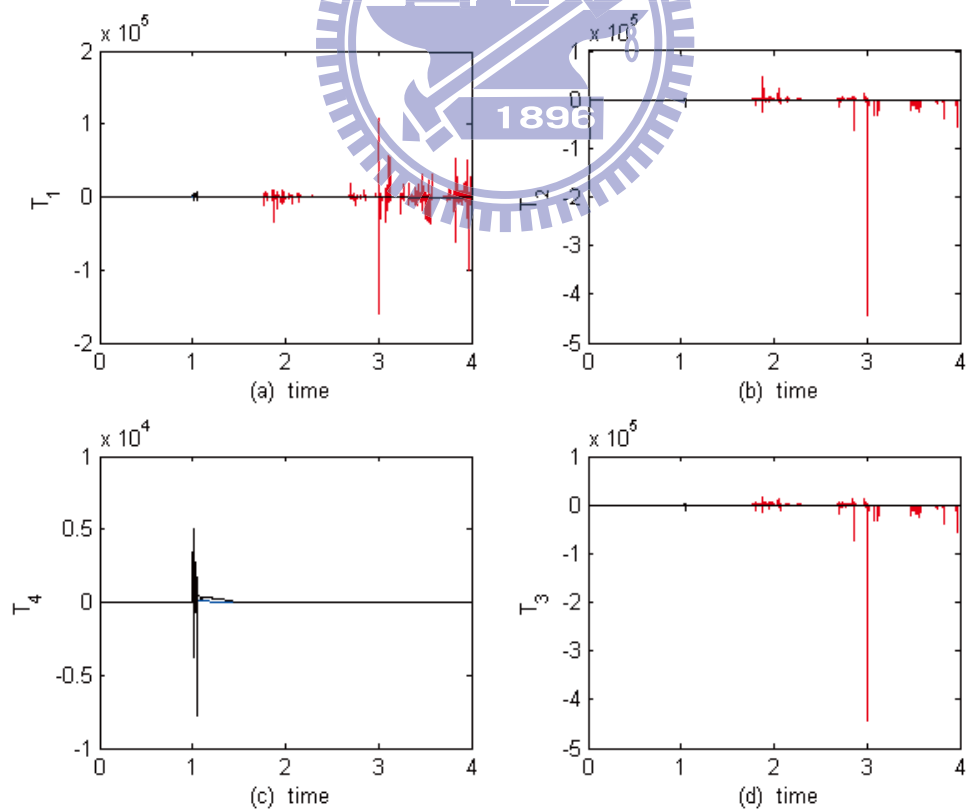


圖 4.15 在 packed snow 路面的輪子制動/驅動扭力比較圖

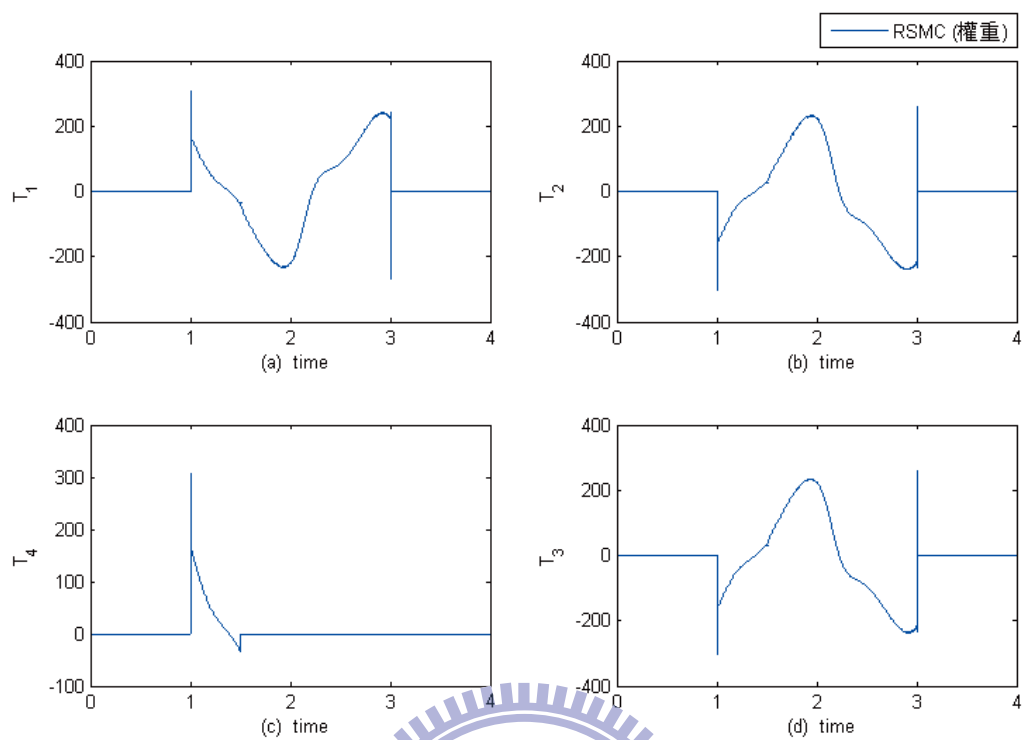


圖 4.16 在 packed snow 路面採用權重的 RSMC 之輪子制動/驅動扭力

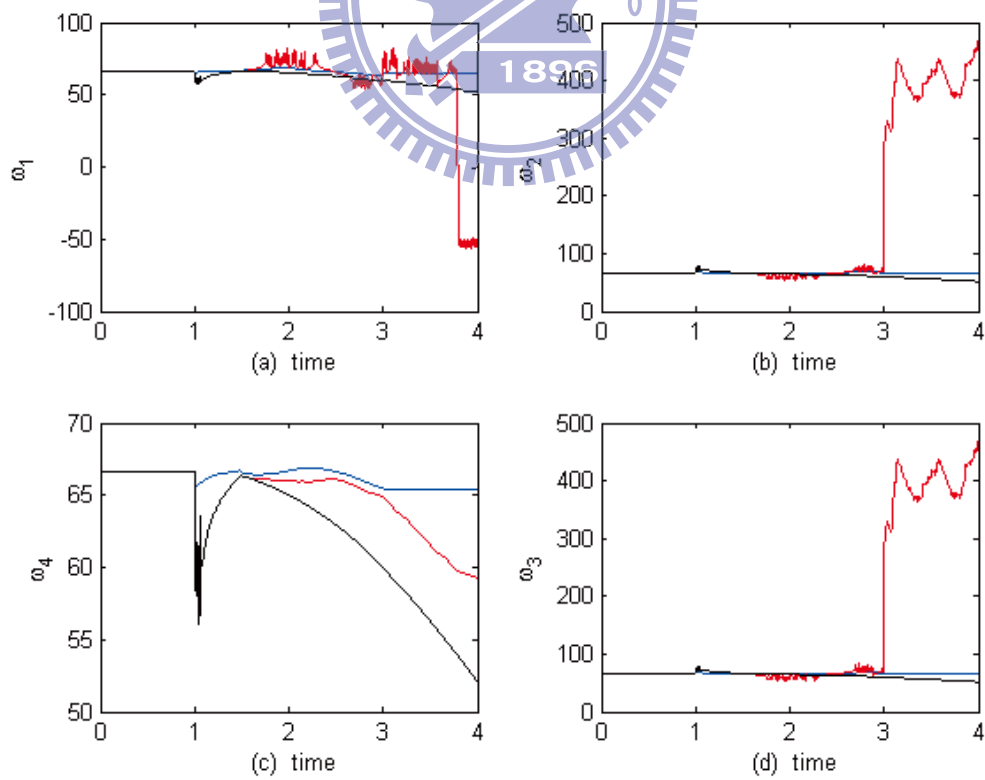


圖 4.17 在 packed snow 路面的輪子轉速比較圖

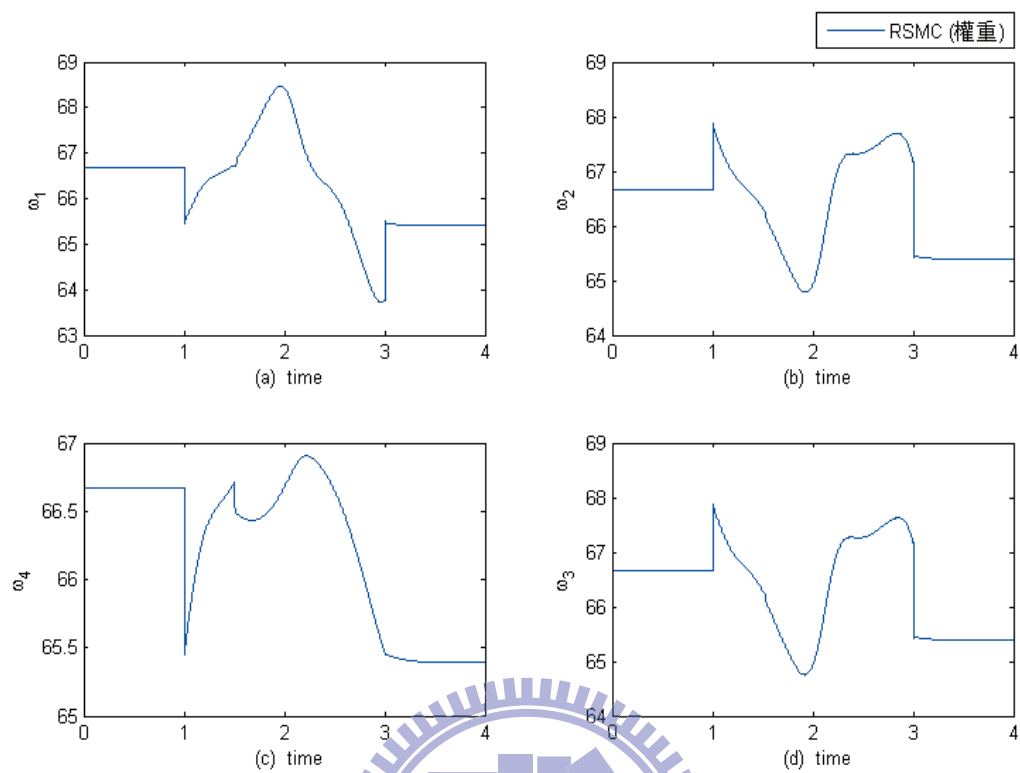


圖 4.18 在 packed snow 路面採用權重的 RSMC 之輪子轉速

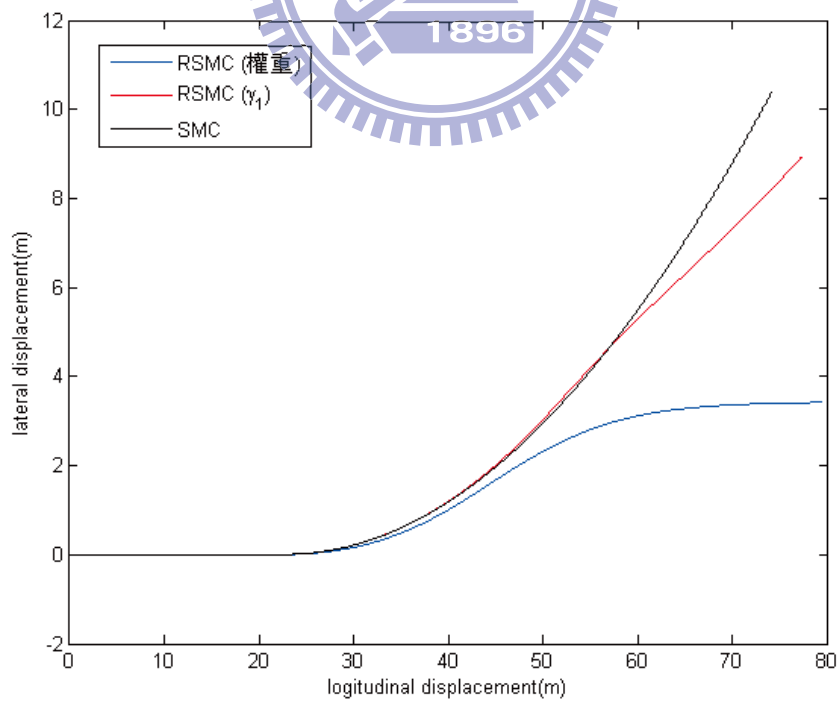


圖 4.19 在 packed snow 路面的 X-Y 座標圖

4.5 順滑模態控制的可靠度設計應用於 μ -split 路面之探討

當車子左右兩側輪胎行駛的路面之摩擦力有明顯差異時，我們稱此路面為 μ -split 路面。行駛於 μ -split 路面的過程中，可能會因為兩側的摩擦力不同而瞬間產生橫擺角速度使車子打轉甚至偏駛到其它車道去。一般而言，車子在 μ -split 路面下定速通過或輕微煞車時，對其穩定性可透過駕駛者去對方向盤做微調來保持穩定，但是若考慮主動式的穩定控制而言，我們可透過DYC的方式去做穩定控制，而不需靠駕駛者來操控。此外，行經 μ -split 路面若是發生車子致動器故障的問題，其影響更是不容忽視。所以接下來，本論文透過DYC的方式並結合SMC的可靠度設計，假設當車速以40/ms (144km/hr) 行駛於 μ -split 路面時（附註：我們假設左側為乾路面 $\mu = 1$ ；右側為雪地 $\mu = 0.3$ ），此時左後輪的致動器發生故障，車體瞬間產生一個橫擺角速度的情況下，來模擬直接的橫擺力矩控制(DYC) 透過RSMC與SMC的方式來比較，其模擬結果如下：

從圖4.20中，可發現當輪子故障後，透過RSMC的方式可以利用剩下的輪子致動器來產生穩定的橫擺力矩，在短時間內即可把瞬間變大的橫擺角速度收斂至零。而採用SMC方式則比較無法在短時間內使橫擺角速度收斂至零。從4.21也可發現RSMC由於能在短時間內使車子穩定，相對於SMC而言，速度差較小，駕駛者也比較不會有不舒適感。圖4.22則可看到RSMC能短時間內回到順滑面上，而SMC需要的時間相對較長。從圖4.23中，由於車子右側之摩擦力較低，所以側向力與左側相比相對較小，所以左側的前、後輪所需的扭力相對較小，而因為左後輪故障，故可以清楚看到左前輪的扭力需要很大，而RSMC為了要在短時間內穩定所以需要給的扭力相對於SMC而言大很多，約700Nm左右。圖4.24的輪子轉速比較圖中，RSMC對比於SMC而言，輪子轉速起伏較小，而圖4.25的四個輪子之側向力圖，可清楚看到因為 μ -split 路面的影響，右側輪胎的側向力相對於左側而言小很多。圖4.26則為X-Y座標圖，從圖中也可發現在輪胎故障時，若採用SMC方式，在短時間內因為無法即時去穩定車身而可能會有偏向其它車道的危險性。

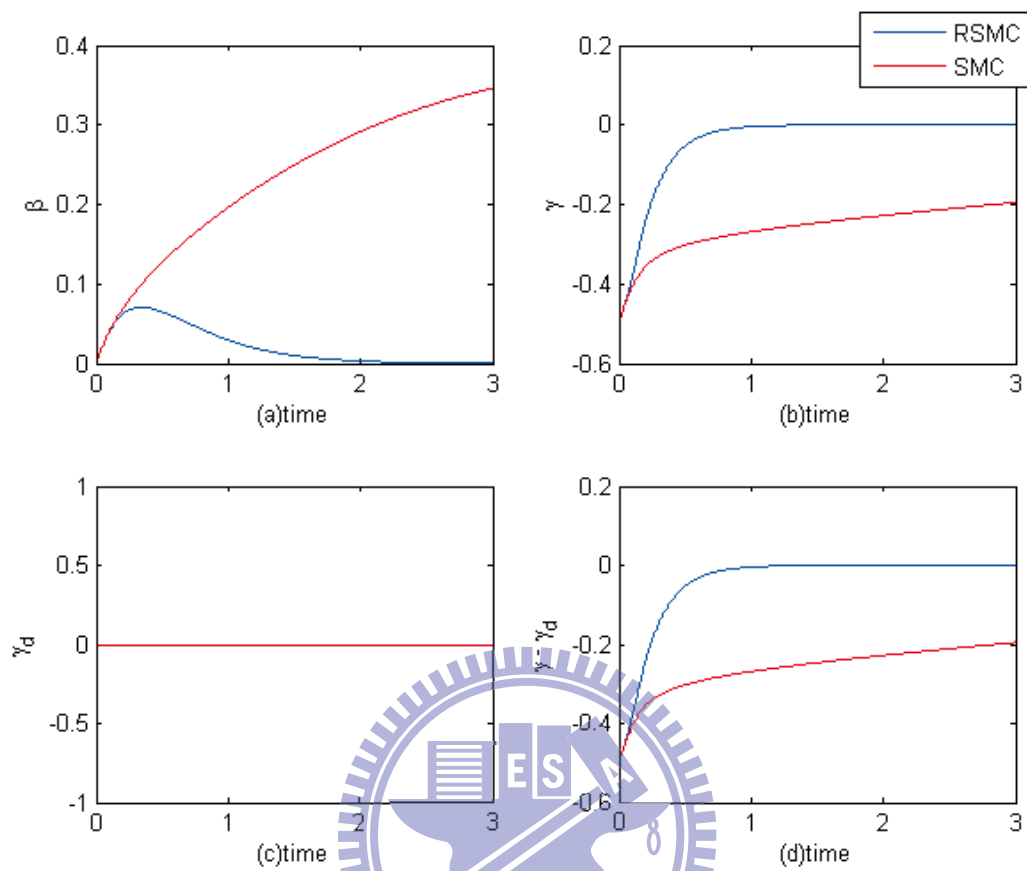


圖 4.20 行駛於 μ -split 路面，左後輪致動器 0 秒故障

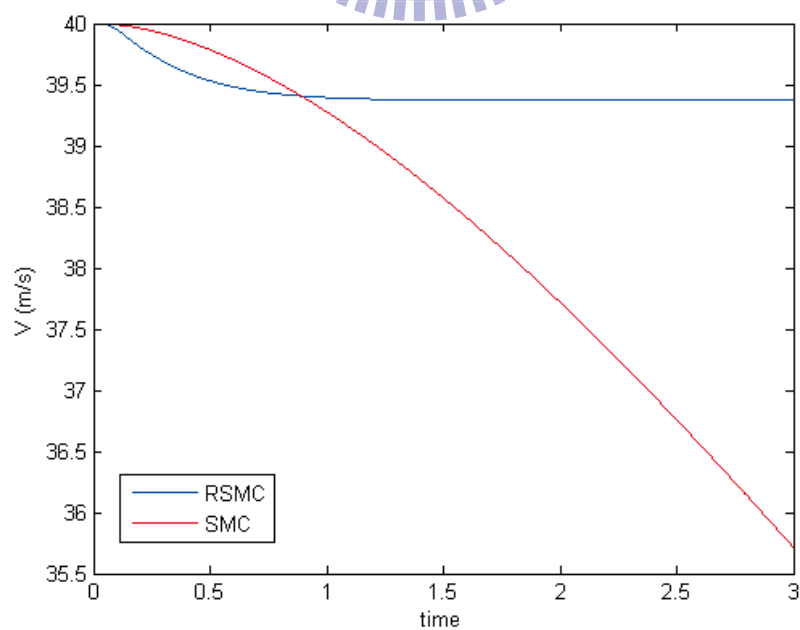


圖 4.21 在 μ -split 路面的車速比較圖

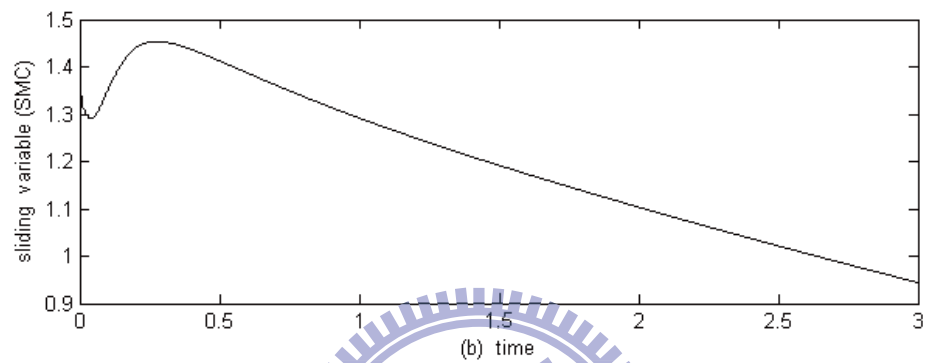
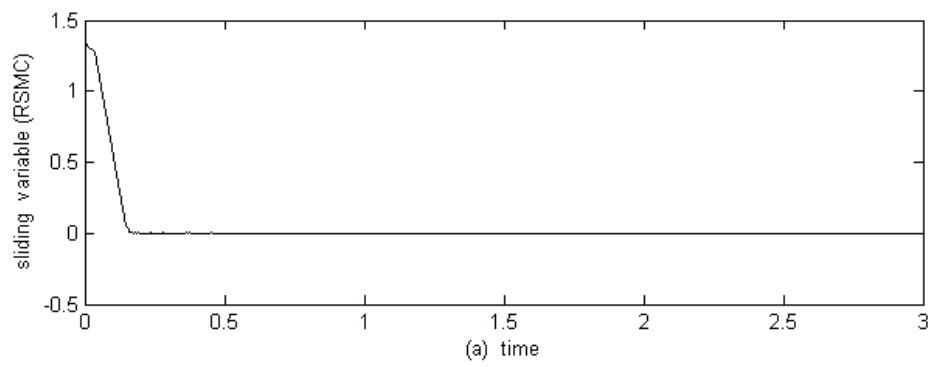


圖 4.22 在 μ -split 路面的順滑變數 (sliding variable) 比較圖

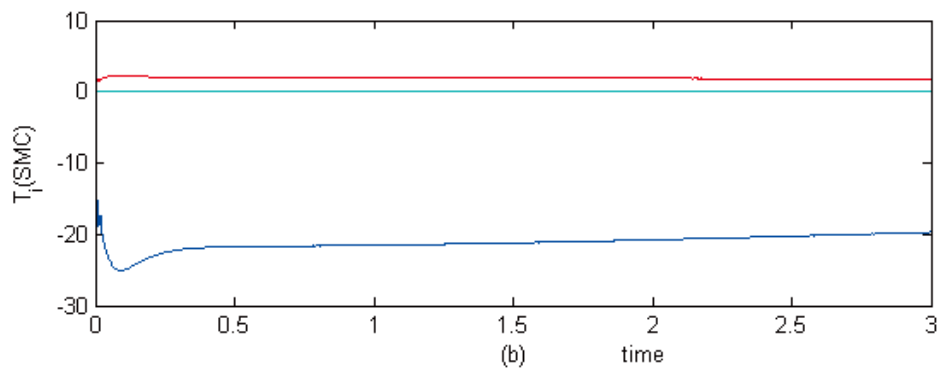
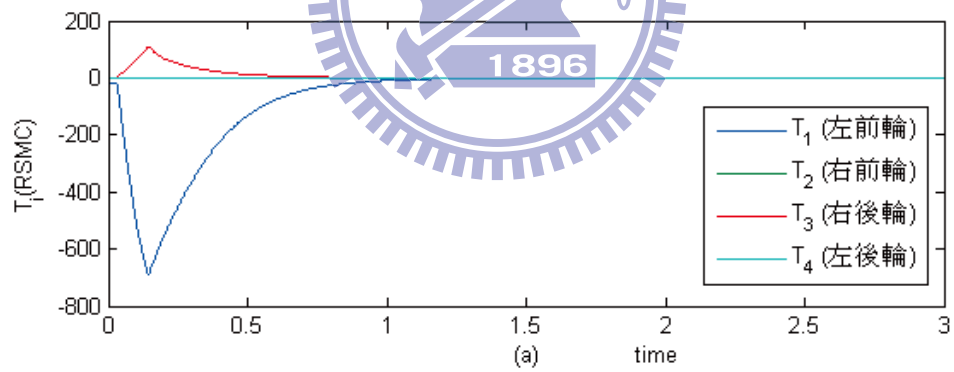


圖 4.23 在 μ -split 路面的輪子制動/驅動扭力比較圖

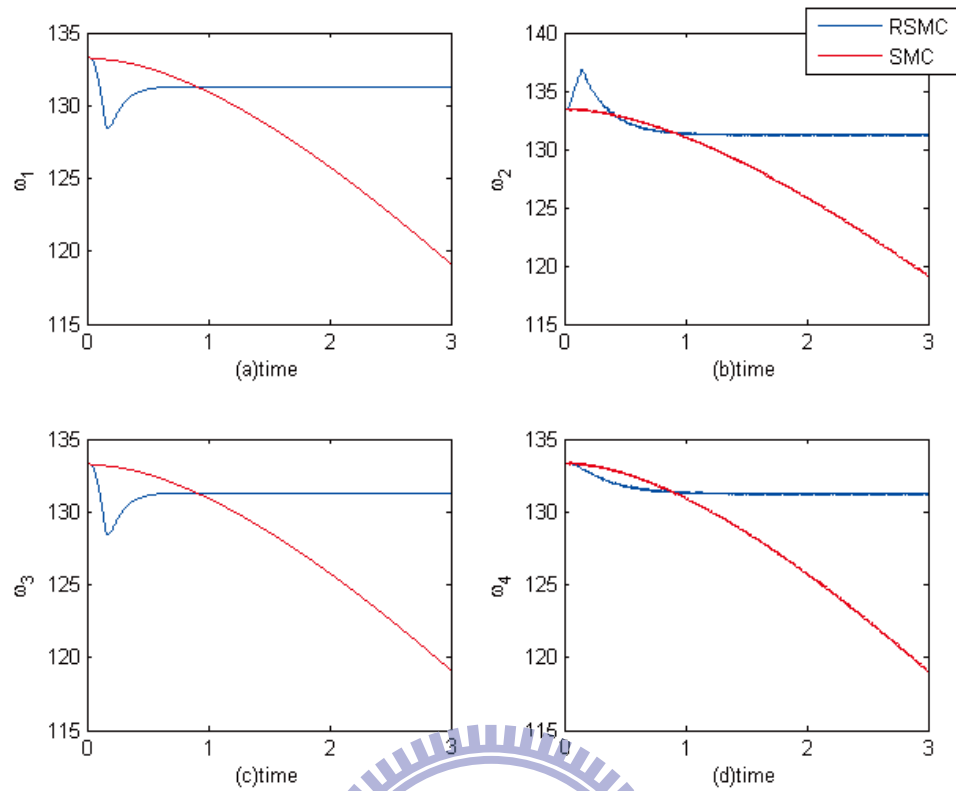


圖 4.24 在 μ -split 路面的輪子轉速比較圖

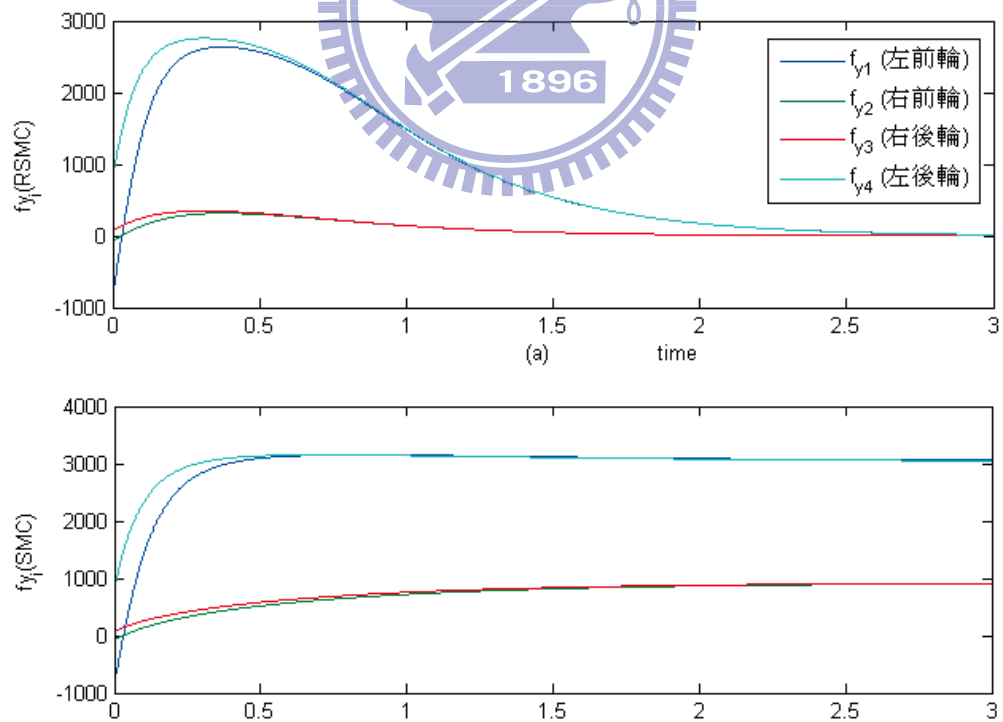


圖 4.25 在 μ -split 路面之四個輪子的側向力比較圖

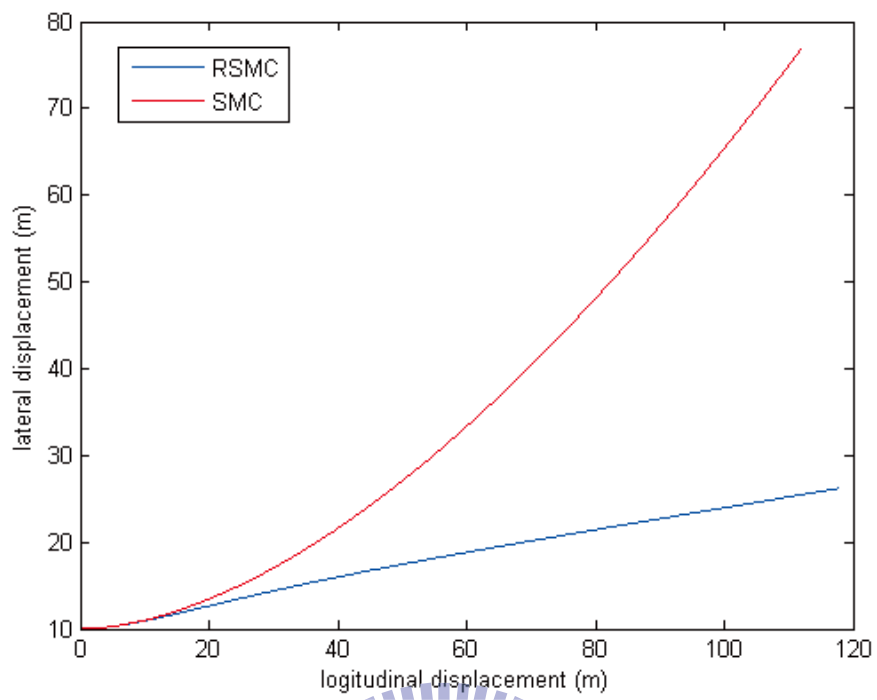
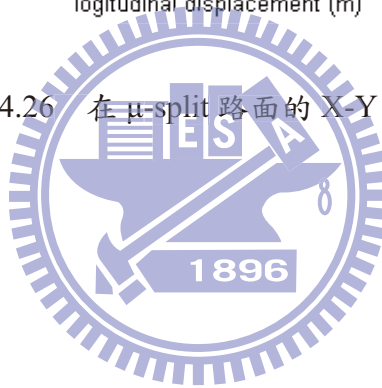


圖 4.26 在 μ -split 路面的 X-Y 座標圖



第 5 章

結論與未來研究方向

5.1 結論

在本論文中，透過順滑模態控制與參考橫擺角速度選取的概念使車體的側滑角能落在側滑角容許穩定的最大值內以確保車子穩定性，並使得參考橫擺角速度能盡可能的增加以提升車子的操控性。接著，考慮以電子車當作控制對象，藉由電子車可以獨立對四個輪子的致動器做制動與驅動之能力的特點來增強直接橫擺力矩控制（DYC）的能力。此外，我們還針對車子輪子的致動器可能有故障的情形發生，所以對輪子致動器在轉向過程中發生故障的可靠度問題做了一些探討，依序為乾路面、摩擦力低的路面與 μ -split 路面來做分析討論，並與單純只考慮 SMC 和 RSMC 做比較，也確實發現結合順滑模態控制的可靠度設計與參考橫擺角速度選取方式的確可以有效的提升車子的穩定性。

5.2 未來研究方向

由於權重的方式確實有其優勢，但考慮輪胎的實際特性，時變權重的設計方式並不如線性模型中那樣的容易，所以時變權重在全車模型的設計方式仍是值得我們繼續探討的問題。此外，本論文在車輛穩定性的控制方式由於是採用 yaw moment control 中的直接橫擺力矩控制（DYC），其優勢雖然很明顯，但它是透過控制縱向的摩擦力來產生額外的橫擺力矩，如果能再結合 4WS 的方式（i.e., 透過側向力來產生橫擺力矩）則能有效提升車子的穩定性。

參考文獻

- [1] A. T. Van Zanten, R. Erhardt, G. Pfaff, F. Kost, H. Uwe and T. Ehret, "Control Aspects of the Bosch-VDC," *Proceedings of the International Symposium on Advanced Vehicle Control*, vol. 1, pp. 573-608, 1996.
- [2] D. Piyabongkarn, R. Rajamani, J. A. Grogg, J. Y. Lew, "Development and Experimental Evaluation of a Slip Angle Estimator for Vehicle Stability Control," *IEEE Trans. Control Systems Technology*, vol. 17, no. 1, 2009.
- [3] A. T. van Zanten, "VDC systems development and perspective," *SAE 980235*.
- [4] J. Huang, J. Ahmed, A. Kojic, and J.-P. Hathout, "Control oriented modeling for enhanced yaw stability and vehicle steerability," *Proceedings of American Control Conference*, vol. 4, pp. 3405-3410, 2004.
- [5] Zheng Shui-bo, Han Zheng-zhi, Tang Hou-jun, "Vehicle stability control," *China Academic Journal Electronic Publishing House*, 2005.
- [6] A. T. van Zanten, "Bosch ESP systems: 5 years of experience," *SAE 2000 Automotive Dynamics & Stability Conference*, 2000.
- [7] Abe M, "Vehicle dynamics and control for improving handling and active safety : From four-wheel steering to direct yaw moment control," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: J. Multi-body Dynamics*, pp. 87-101, 1999.
- [8] N. Masao, S. Motoki, G. Feng, "Study on integrated control of active front steer angle and direct yaw moment," *Society of Automotive Engineers of Japan Review*, pp. 309-315, 2002.
- [9] S. H. You, J. S. Jo, S. Yoo, J. O. Hahn, K. I. Lee, "Vehicle lateral stability management using gain-scheduled robust control," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 20, no. 11, pp. 1898-1913, 2006.
- [10] J. S. Jo, S. You, J. Joeng, K. Lee, K. Yi, "Vehicle stability control system for enhancing steerability, lateral stability, and roll stability," *International Journal of Automotive Technology*, pp. 571-576, 2008.
- [11] E. Esmailzadeh, A. Goodarzi, G. R. Vossoughi, "Optimal yaw moment control law for improved vehicle handling," *Mechatronics*, pp. 659-675, 2003.

- [12] F. Li, J. Wang, and Z. Liu, "Motor torque based vehicle stability control for four-wheel-drive electric vehicle," *IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference*, pp. 1596-1601, 2009.
- [13] Y. Hori, "Future vehicle driven by electricity and control—research on four-wheel-motored "UOT Electric March II"," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 51, pp. 954-962, 2004
- [14] Y.-T. Wei, "Study of robust and reliable control for electric vehicles," *National Chiao Tung University*, 2010.
- [15] Matteo. Amodeo, A. Ferrara, R. Terzaghi, and C. Vecchio, "Wheel slip control via second-order sliding-mode generation," *IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems*, vol. 11, pp. 122-131, 2010.
- [16] W.-J. Cao and J.-X. Xu, "Nonlinear integral-type sliding surface for both matched and unmatched uncertain systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 49, pp. 1355-1360, 2004.
- [17] F. Castanos and L. Fridman, "Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 51, pp. 853-858, 2006.
- [18] M. Canale, L. Fagiano, A. Ferrara, and C. Vecchio, "Comparing internal model control and sliding-mode approaches for vehicle yaw control," *IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems*, vol. 10, pp. 31-41, 2009.
- [19] Y.-W. Liang and S.-D. Xu, "Reliable control of nonlinear systems via variable structure scheme," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 51, pp. 1721-1726, 2006.
- [20] Y.-W. Liang, S.-D. Xu, C.-L. Tsai, "Study of VSC reliable designs with application to spacecraft attitude stabilization," *IEEE Trans. Control Systems Technology*, vol. 15, pp. 332-338, 2007.
- [21] Y.-W. Liang, S.-D. Xu, L.-W. Ting, "T-S model-based SMC reliable design for a class of nonlinear systems," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 56, no. 9, pp. 3286-3295, 2009.

- [22] R. J. Veillette, "Reliable linear-quadratic state-feedback control," *Automatica*, vol. 31, pp. 137-143, 1995.
- [23] G.-H. Yang, J. Lam, and J. Wang, "Reliable controller design for nonlinear system," *Proc. 35th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 112-117, 1996.
- [24] G.-H. Yang, Y. Liu, J. Wang, and C. B. Soh, "Reliable nonlinear controller system design using redundant control element," *Proc. 35th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 118-123, 1996.
- [25] J. Huang and C.-F. Lin, "Numerical approach to computing nonlinear H sub (infinity) control laws," *J. Guidance, Control Dynamics*, vol. 18, no. 5, pp. 989 - 994, 1995.
- [26] R. A. Horn and C. R. Johnson, "Matrix Analysis," 2009.
- [27] V. I. Utkin, "Sliding Modes in Control and Optimization," *Springer-Verlag*, 1992.
- [28] J.-J. E. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators," *Int. J. Control*, vol. 38, pp. 465-492, 1983.
- [29] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding mode," *IEEE Trans. Automation Control*, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, 1977.
- [30] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial," *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, pp. 212-232, 1988.
- [31] D.-C. Liaw, Y.-W. Liang, and C.-C. Cheng, "Nonlinear control for missile terminal guidance," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 122, pp. 663, 2000.
- [32] J. Y. Wong, "Theory of Ground Vehicles," *Wiley*, 2008.
- [33] E. Bakker, L. Nyborg, H. Pacejka, "Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies," *Society of Automotive Engineers Paper*, no. 870421, 1987.

- [34] R. Rajamani, "Vehicle dynamics and control," *Springer*, 2006.
- [35] Junmin Wang, R.G. Longoria, "Combined tire slip and slip angle tracking control for advanced vehicle dynamics control systems," *Proc. 45th IEEE Conf. on Decision and Control*, 2006.
- [36] N. Ding, and S. Taheri, "An adaptive integrated algorithm for active front steering and direct yaw moment control based on direct lyapunov method," *Int. J. of Vehicle System Dynamics*, 2009.
- [37] S. Antonov, A. Fehn and A. Kugi, "A new flatness-based control of lateral vehicle dynamics," *Vehicle System Dynamics*, pp. 789–801, 2008.
- [38] Cong Geng, "Direct yaw-moment control of an in-wheel-motored electric vehicle based on body slip angle fuzzy observer," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 56, no. 5, pp. 1411-1419, 2009.
- [39] U. Kiencke and L. Nielsen, "Automotive control systems for engine, driveline, and vehicle," *Springer Verlag, Berlin*, 2000.
- [40] W. Xiang, P. C. Richardson, C. Zhao, and S. Mohammad, "Automobile brake-by-wire control system design and analysis," *IEEE Trans. Vehicular Technolog*, vol. 57, no. 1, 2008.
- [41] Y.-S. Luo, "Application of four-wheel steering control of the vehicle lateral motion," *National Chiao Tung University*, 2010.
- [42] M. Mirzaei, G. Alizadeh , M. Eslamian and S. Azadi, "An optimal approach to non-linear control of vehicle yaw dynamics," *Proc. I MECH E Part I J. Syst. Control Eng.*, vol. 222, pp. 217, 2008.
- [43] Thomas D. Gillespie, 林筱增, "車輛運動力學," *科技圖書*, 2002.
- [44] M. Eslamian, M. Mirzaei, and G. Alizadeh, "Enhancement of vehicle lateral stability by non-linear optimal control of yaw dynamics," *Mech. & Aerospace Eng. J.* vol. 2, no 3, pp. 97-106, 2007.
- [45] O. Mokinamar, and M. Abe, "Active wheel steering and yaw moment control combination to maximize stability as well as vehicle responsiveness during quick lane change for active vehicle handling safety," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, vol. 216, no 2, pp. 115-124, 2002.

- [46] M. Abe, Y. Kano, K. Suzuki, Y. Shibahata, and Y. Furukawa, "Side-slip control to stabilize vehicle lateral motion by direct yaw moment," *Society of Automotive Engineers of Japan Paper*, pp. 413-419, 2001.
- [47] W. Cho, J. Yoon, S. Yim, B. Koo, and K. Yi, "Estimation of tire forces for application to vehicle stability control," *IEEE Trans. Vehicular Technology*, vol. 59, pp. 638- 649, 2010.
- [48] Seungwuk Moon, Wanki Cho and Kyongsu Yi, "Intelligent vehicle safety control strategy in various driving situations," *Vehicle System Dynamics*, 2010.
- [49] Z. Guangcai, L. Yugong, L. Xiaomin, L. Keqiang, "A research of DYC for independent 4WD EV based on control target dynamic regulated," *IEEE*, 2007.
- [50] C. Winkler, "Simplified analysis of the steady-state turning of complex vehicles," *Vehicle System Dynamics*, pp. 141-180, 1998.
- [51] M. Eslamian, G. Alizadeh, and M. Mirzaei, "Optimization-based non-linear yaw moment control law for stabilizing vehicle lateral dynamics. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers," *Part D: Journal of Automobile Engineering*, 2007.
- [52] H. Yang, V. Cocquempot and B. Jiang, "Optimal fault-tolerant path-tracking control for 4WS4WD electrical vehicles," *IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems*, vol. 11, pp. 237-243, 2010

附錄

在本論文的(3.14)式有提到不足轉向梯度 (under-steer gradient)，它由軸上的負載（指前、後軸）和輪胎的徑度（指前、後輪）所組成，用來決定轉向輸入的大小以及方向 [42]，而它所帶給的物理意義我們會在以下做些說明。

在考慮只有前輪驅動時，車輛轉向到達穩態時的示意圖如圖(A)所示， O 點為前後輪中心點的速度方向之垂線交點， R 為 O 點到車子質心之距離（稱旋轉半徑）。若只考慮經由前輪與後輪轉向力的平衡如 [34],[50]所敘述，則我們可以得到

$$\delta_f = \frac{1}{R} + \alpha_f - \alpha_r \quad (\text{A.1})$$

對一個以速度 v_x 向前運動的車輛來說，輪胎所有側向力之和須等於質量乘以向心加速度（外部加速度： a_y ）如下式：

$$F_y = 2f_{yf} + 2f_{yr} = m \cdot \frac{v_x^2}{R} \quad (\text{A.2})$$

由於穩態轉向時 $\dot{\gamma} = 0$ ，並再把(A.3)-(A.5)式帶入(A.2)式後

$$f_{yf} = C_f \cdot \alpha_f \quad (\text{A.3})$$

$$f_{yr} = C_r \cdot \alpha_r \quad (\text{A.4})$$

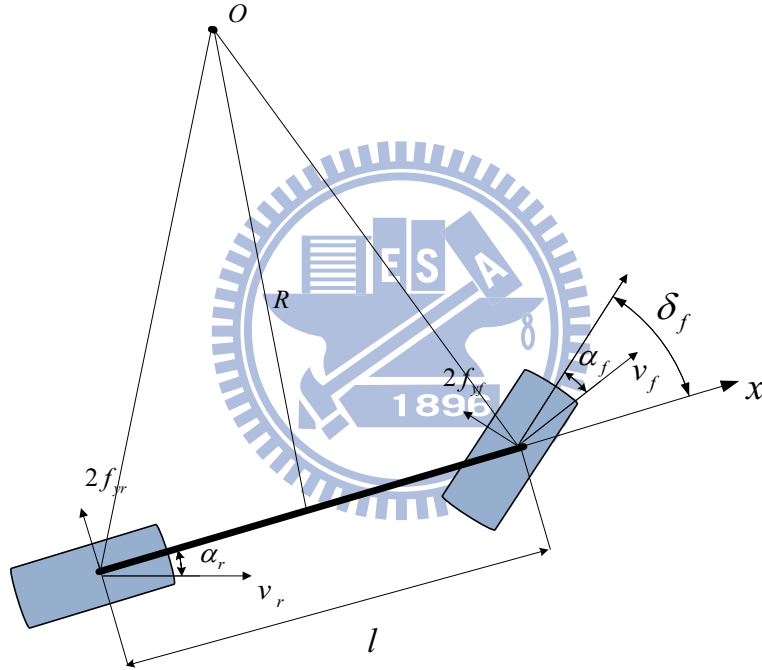
$$I_z \dot{\gamma} = 2C_f \left(\delta_f - \frac{v_y + \gamma \cdot l_f}{v_x} \right) \cdot l_f - 2C_r \left(-\frac{v_y - \gamma \cdot l_r}{v_x} \right) \cdot l_r \quad (\text{A.5})$$

可得(A.6)式如下

$$\begin{cases} \alpha_f = \left(\frac{m}{2C_f} \frac{l_r}{l} \right) \cdot \frac{v_x^2}{R} \\ \alpha_r = \left(\frac{m}{2C_r} \frac{l_f}{l} \right) \cdot \frac{v_x^2}{R} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

接著把(A.6)式帶入(A.1)式後，整理可得

$$\delta_f = \frac{1}{R} + \left(\frac{m}{2C_f} \frac{l_r}{l} - \frac{m}{2C_r} \frac{l_f}{l} \right) \cdot \frac{v_x^2}{R} \quad (\text{A.7})$$



圖(A) 車輛轉向到達穩態時的示意圖

由(A.7)式可知，車輛在轉向到達穩態時，其轉向角會被軸距 l 、旋轉半徑 R 、車速來影響外，軸上的負載（指前、後軸）和輪胎的橫向徑度（指前、後輪）也會直接影響，因此我們可以把不足轉向梯度當作是決定穩態轉向的指標。

一般而言，我們會定義 $m_f = \frac{l_r}{l}$ 、 $m_r = \frac{l_f}{l}$ ，則不足轉向梯度可以用下式表示 [41]：

$$k_{us} = \frac{1}{2} \left(\frac{m_f}{C_f} - \frac{m_r}{C_r} \right) \quad (\text{A.8})$$

依據 k_{us} 的正負，我們可以把穩態轉向分為三類。

(1) 中性轉向 (Neutral steering) $k_{us} = 0$

當車輛為中性轉向時，從(A.6)-(A.7)式可發現前輪滑移角與後輪滑移角同，也表示在固定的旋轉半徑下轉向時，轉向角不隨車速改變為定值；在固定轉向角時，車子的旋轉半徑也不隨車速變大或變小。

(2) 不足轉向 (Under steering) $k_{us} > 0$

當車輛為不足轉向時，從(A.6)-(A.7)式可發現前輪滑移角大於後輪滑移角，若在固定的旋轉半徑下轉向，車速越快時轉向角必須要越大才能維持相同的旋轉半徑，也意味著駕駛者必須要一直增加轉向角來轉向；在固定轉向角轉向時，車速若越快，則車子的旋轉半徑會變大。

(3) 過度轉向 (Over steering) $k_{us} < 0$

當車輛為過度轉向時，從(A.6)-(A.7)式可發現前輪滑移角小於後輪滑移角，若在固定的旋轉半徑下轉向，車速越快時轉向角必須要越小才能維持相同的旋轉半徑，也意味著駕駛者必須要一直減少轉向角來轉向；在固定轉向角轉向時，車速若越快，則車子的旋轉半徑會變小。