第三章 OFDM 指標式通道估測

在 OFDM 傳輸系統中，我們在次載波上以特定的調變方式來傳送資料，如 PSK 或 QAM，因此接收端必須知道載波上的振幅與相位才能估測所傳送的資料，但由第二章我們知道每個次載波的信號都會被通道衰減所影響，造成振幅與相位的失真，因此我們必須精準的估測出通道頻率響應，通常可分為兩種估測方式，一是指標式估測法(Pilot-based channel estimation)，另一種是盲蔽式通道估測法(Blind channel estimation)。前者在傳送資料的過程加入一些 pilot，在接收端利用這些已知的 pilot 信號來估測通道，後者不需額外加入 pilot，利用接收到信號的特性來作通道估測。一般而言，指標式通道估測需付出一些額外的頻寬來傳送 pilot，相對也能有較佳的估測效能，在此我們以指標式估測法來估測通道頻率響應。

3.1 指標式估測法系統模型

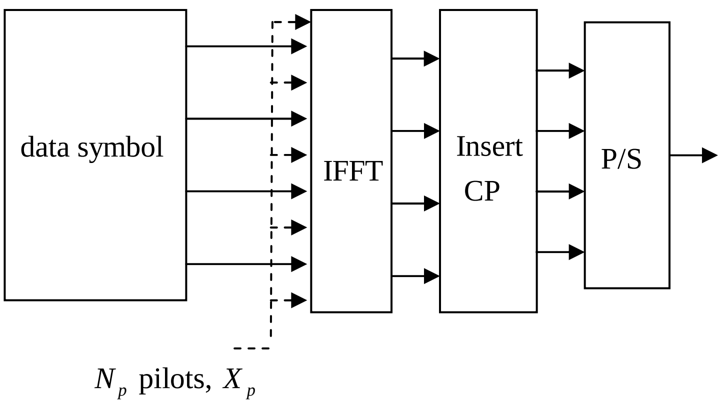

圖 3.1-1　指標式估測法的 OFDM 系統模型

如圖 3.1-1，我們在想要傳送的資料信號之間，讓N_p個已知的指標信號夾雜其中傳送出去，這些指標信號的值為已知的X_p，在接收端我們利用傳送指標信號的次載波位置的接收信號Y_p與X_p的關係來估算出 pilot 受到的通道頻率響應$\hat{H}_p$。定義估計通道與實際通道的誤差為$e = H_p - \hat{H}_p$，我們以均方誤差(Mean Square Error, MSE)來評估通道估計的效能，MSE 越小，代表我們通道估計的越準確。

$$MSE = E\left\{\|e\|^2\right\} = E\left\{\left\|H_p - \hat{H}_p\right\|^2\right\} \tag{3.1-1}$$

若為時變通道，根據 2.4 節的討論，接收信號還包含都卜勒效應造成的 ICI，將其視為雜訊的一部分，則實際通道響應為$H_{p,p}$：

$$MSE = E\left\{\|e\|^2\right\} = E\left\{\left\|H_{p,p} - \hat{H}_p\right\|^2\right\} \tag{3.1-2}$$

3.2 Pilot 位置的安排

在不同的通道狀況下適合不同的 pilot 編排樣式[17]，在此我們介紹兩種基本樣式並說明其考量的因素。

圖 3.2-1 為 OFDM 傳送端將連續的資料以 S/P 轉換為平行排列的資料，其中橫軸為時間函數，以 OFDM symbol 為單位，縱軸代表頻域，以 subcarrier 為單位，因此圈起來的部分就代表一個 OFDM 符元。

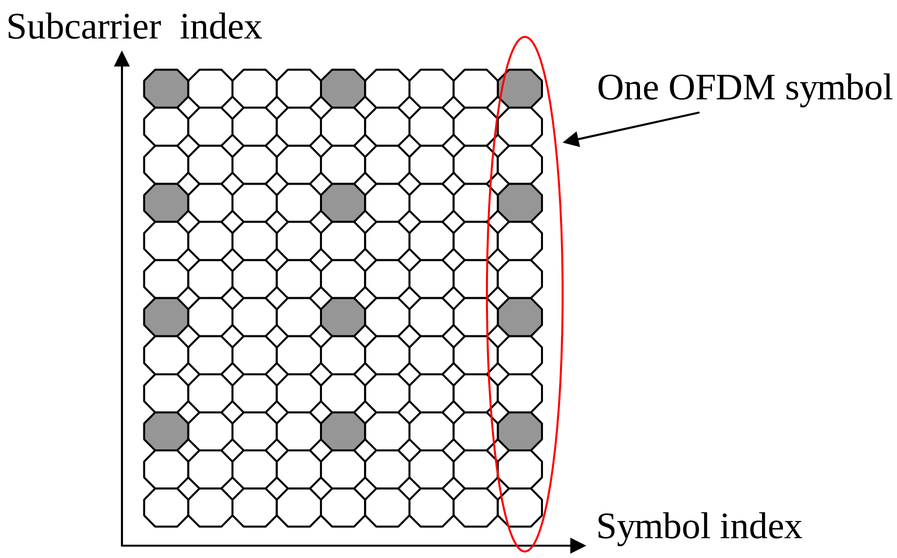

圖 3.2-1　Pilot 的安排樣式，灰色為 pilot 位置，白色為資料位置

圖中白色的區塊代表傳送資料的次載波，而灰色的區塊代表傳送 pilot 的次載波，接收端利用此 pilot 樣式估計通道須兩個步驟:

1. 接收端收到信號後，利用灰色區塊已知 pilot 信號將其頻率上通道頻率響應估測出來。

2. 估計出 pilot 位置的通道響應後，以內插法計算其他白色區塊(data part)的通道值。

在相同的 Symbol index 上，如圖 3.2-1 圈起來的部分，pilot 估出的通道值可視為在該時間點通道頻率響應在頻率軸上的取樣，因此 data 部分的通道值需對 pilot 估出的通道值作頻域上的內插。同理，在相同的 Subcarrier index 上，pilot 估出的通道值可視為在該次載波上通道頻率響應於時間軸上的取樣，而 pilot 間 data 部分的通道值需對 pilot 估出的通道值作時域上的內插。

總而言之，整體的通道估計，就是將 pilot 所估出通道頻率響應的取樣值分別在時域與頻域以內插法建構出來。因此，除了 pilot 估計的準確度外，pilot 擺放密度越大，整體通道估計準確度越高，但資料傳送速率也相對下降，若 pilot 密度越小，資料傳送速率提升，但內插法的誤差可能將大幅提高，這是必須作取捨(trade-off)的。

因此決定 pilot 在時域與頻域的密度，有其依循的準則，當通道為頻率選擇通道(frequency-selective channel)，其在頻率軸變動越快，就必須增加 pilot 在縱軸的數量來增加取樣點。若通道為時變通道，當同一次載波上通道頻率響應隨時間變化加快，就必須增加 pilot 在時間軸上的數量以增加取樣點。無論是在時域或頻域，pilot 對通道取樣的速率必須滿足 Nyquist 的取樣定理。

通道的變化程度有兩個指標：同調時間(coherent time)與同調頻寬(coherent bandwidth)[18]。同調時間為都卜勒擴散(Doppler spread)的倒數: $t_{co} = \frac{1}{f_{D_{\max}}}$，都卜勒擴散代表通道頻率響應在時間軸上的變動頻寬，因此在同調時間內，各次載波上通道頻率響應變動不大。而同調頻寬為最大路徑延遲的倒數: $f_{co} = \frac{1}{\tau_{\max}}$，在同調頻寬內，通道頻率響應變動不大。故令時間軸上每兩個 pilot 相距 D_t 個 OFDM symbol，頻率軸上每隔 D_f 個次載波放置一個 pilot，則 D_t 與 D_f 必須符合 Nyquist 取樣定理:

$$D_t T_b \le \frac{t_{co}}{2} \tag{3.2-1}$$

$$D_f \Delta f \le \frac{f_{co}}{2} \tag{3.2-2}$$

其中，T_b 為 OFDM 符元區間，Δf 為次載波間距，簡言之為兩個 pilot 之間的距離必須在 coherent time/bandwidth 的一半以內，如此在 pilot 間通道變化約可視為線性關係。

在此我們舉出兩種基本 pilot 的排列方式。如圖 3.2-2，左圖為 block type，右圖為 comb-type。

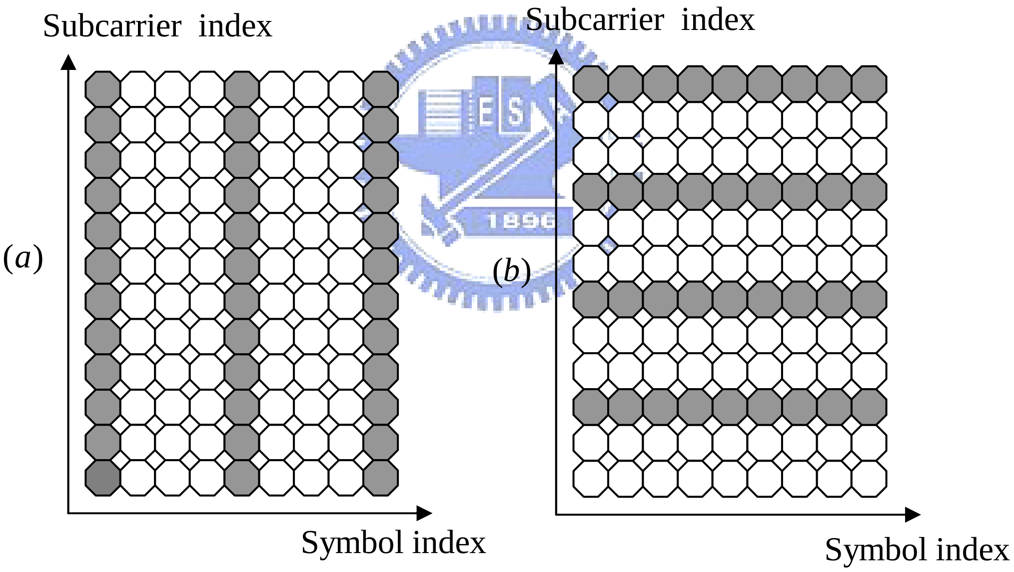

圖 3.2-2　基本 pilot 排列方式 (a)Block-type　(b)Comb-type

Block-type 將一個 OFDM symbol 視為一個 block，並且 pilot 便放置在整個 OFDM symbol 所有載波上，$D_f = 0$，故不用在頻域作內插，在時域仍必須符合式(3.2-1)取樣定理每隔 D_t 個 OFDM symbol 放置一組 pilot block，再對時域做內插估出整體通道。由式(3.2-2)可知在頻率軸上 pilot 密度越高，

越能忍受頻率選擇衰減通道，且當同調時間長，pilot 在時間軸間隔可拉較遠，故 Block-type 適合用於緩慢衰減的頻率選擇通道。

圖 3.2-2(b)為 Comb-type 排列，與 Block-type 相反，在固定的次載波上每個 OFDM symbol 都放 pilot，故 $D_t = 0$，不需在時域作內插，而在頻域上 pilot 間隔需滿足式(3.2-2)取樣定理，再對頻域作內插估算整體通道。當最大通道延遲長，在頻率軸 pilot 密度勢必提高，則將浪費過多頻寬於 pilot 的傳送，故 Comb-type 適合用於快速平坦衰減通道。

在本論文第五章的模擬中，為寬頻高速系統，特色是 symbol duration 較短，故都卜勒影響較輕微，pilot 間隔需滿足:

$$D_t \le \frac{t_{co}}{2T_b} = \frac{1}{2 f_{D,\max} T_b} = \frac{1}{2 \cdot 1.38_{KHz} \cdot 20.48_{\mu s}} = 17.6 \qquad (3.2\text{-}3)$$

$$D_f \le \frac{f_{co}}{2\Delta f} = \frac{1}{2\tau_{\max}\Delta f} = \frac{1}{2 \cdot 1.76_{\mu s} \cdot 48.8_{KHz}} = 5.8 \qquad (3.2\text{-}4)$$

可見適合使用 Block-type 排列方式，不過，為了進一步採用 2-D pilot 排列(如圖 3.2-1)以節省頻寬，我們需分析在頻域作內插所帶來的誤差影響。因此在模擬時，我們仍採用 Comb-type pilot 排列方式，排除時域內插所帶來的些許誤差影響，單就 Comb-type 造成的通道估計誤差進行討論。下一節開始我們就 Comb-type 通道估計演算法與內插進行說明。

3.3 Pilot 位置的通道響應估測

我們在 N 個次載波的 OFDM 信號中放入 N_p 個 pilot，則第 k 個次載波所傳送的信號可表示為:

$$X(k) = X(mD_f + l) = \begin{cases} X_p(m) & l = 0, m = 0, \ldots, N_p - 1 \\ data & l = 1, \ldots, D_f - 1 \end{cases} \tag{3.3-1}$$

$X_p(m)$ 代表 pilot 所傳送的值，N_p 個 pilot 可以設定為相同值以簡化。接著，我們把 N_p 個通道頻率響應值以矩陣的形式表示:

$$\begin{aligned} \mathbf{H_p} &= \left[H_p(0)\ H_p(1)\ \ldots\ H_p(N_p - 1) \right]^T \\ &= \left[H(0)\ H(D_f)\ \ldots\ H((N_p - 1)D_f) \right]^T \end{aligned} \tag{3.3-2}$$

接收端所收到 pilot 位置信號以矩陣表示為:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y_p} &= \left[\mathrm{Y_p}(0)\ \mathrm{Y_p}(1)\ \ldots\ Y_p(N_p - 1) \right]^T \\ &= \left[\mathrm{Y}(0)\ \mathrm{Y}(D_f)\ \ldots\ Y((N_p - 1)D_f) \right]^T \end{aligned} \tag{3.3-3}$$

根據式(2.4-3)，可把接收訊號表示為:

$$\mathbf{Y_p} = \mathbf{X_p H_p} + \mathbf{I_p} + \mathbf{W_p} \tag{3.3-4}$$

其中，$\mathbf{X_p}$ 為 pilot 信號，$\mathbf{I_p}$ 為 pilot 所受 ICI 項，$\mathbf{W_p}$ 為 pilot 位置上雜訊。$\mathbf{X_p}$ 以矩陣表示為:

$$\mathbf{X_p} = \begin{bmatrix} X_p(0) & & 0 \\ 0 & X_p(1) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_p(N_p-1) \end{bmatrix}_{N_p \times N_p} \tag{3.3-5}$$

我們希望由$\mathbf{Y_p}$與$\mathbf{X_p}$的關係來求得$\mathbf{H_p}$，以下我們介紹最小平方差估測法(Least Square, LS)與最小均方誤差估測演算法(Miminum mean square error, MMSE)來估測我們所要的$\mathbf{H_p}$。

3.3.1 LS 演算法

問題: $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{W}$

現在$\mathbf{Y}$與$\mathbf{X}$已知，$\mathbf{W}$為雜訊，要找到估計值$\hat{\mathbf{H}}$使等式左右平方誤差最小，由於$\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{H}}$是$\mathbf{X}$行向量的線性組合，屬於$\mathbf{X}$的行空間，要讓$\mathbf{Y}$與$\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{H}}$最接近，則$\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{H}}$最佳的選擇為$\mathbf{Y}$在$\mathbf{X}$的行空間投影。由正交定理可得:

$$\left(\mathbf{X} \cdot \mathbf{H}\right)^H \cdot \left(\mathbf{Y} - \mathbf{XH}\right) = 0 \tag{3.3-6}$$

可得 LS 的解為:

$$\hat{\mathbf{H}} = \left(\mathbf{X}^H \mathbf{X}\right)^{-1} \left(\mathbf{X}^H \mathbf{Y}\right) \tag{3.3-7}$$

將$\mathbf{I_p}$視為雜訊的一部分，則 pilot 以 LS 演算法所估算通道為:

$$\hat{\mathbf{H}}_p = \left(\mathbf{X}_p{}^H \mathbf{X}_p\right)^{-1} \left(\mathbf{X}_p{}^H \mathbf{Y}_p\right) \tag{3.3-8}$$

其中，為 $\mathbf{X_p}$ 方陣存在反矩陣，故可簡化為:

$$\hat{\mathbf{H}}_p = \mathbf{X}_p^{-1}\left(\mathbf{X}_p^H\right)^{-1}\left(\mathbf{X}_p^H\mathbf{Y}_p\right) = \mathbf{X}_p^{-1}\mathbf{Y}_p$$
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{Y_p(0)}{X_p(0)} \\ \dfrac{Y_p(1)}{X_p(1)} \\ \vdots \\ \dfrac{Y_p(N_p-1)}{X_p(N_p-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_p(0) \\ \hat{H}_p(1) \\ \vdots \\ \hat{H}_p(N_p-1) \end{bmatrix} \tag{3.3-9}$$

以 LS 演算法可將 pilot 上通道頻率響應求出，由 Mean square error(MSE)分析 LS 的效能:

$$\begin{aligned} MSE &= E\left\{\left\|H_p(k)-\hat{H}_p(k)\right\|^2\right\} \\ &= E\left\{\left(H_p(k)-\hat{H}_p(k)\right)^*\left(H_p(k)-\hat{H}_p(k)\right)\right\} \\ &= E\left\{\frac{W_p^*(k)W_p(k)}{X_p^*(k)X_p(k)}\right\} = E\left\{\frac{\left\|W_p(k)\right\|^2}{\left\|X_p(k)\right\|^2}\right\} \\ &= \frac{1}{PSINR} \end{aligned} \tag{3.3-10}$$

PSINR 為傳送 pilot 能量與接收端雜訊及干擾能量的比值，可見 LS 演算法可藉由提高 pilot 傳送功率提升其效能。而在時變通道中，儘管雜訊功率相當低，通道估計準確度仍會受到 ICI 的限制。

3.3.2 MMSE 與 LMS 演算法[19]

對傳送 pilot 的其中一個次載波而言，令 Y 為接收到之 pilot 信號，X 為傳送端 pilot 信號，滿足: $Y = HX + N$ ，H 為此次載波受到的頻率響應，N 為 AWGN。設 W 為想求得的 MMSE 濾波器權重，可寫出誤差函數為:

$$e(W) = Y - W^H X \tag{3.3-11}$$

由於 MMSE 的最佳解為使均方誤差最小，

$$W_{MMSE} = \arg\min_{W} \left(E\left\{ \left\| e(W) \right\|^2 \right\} \right) \tag{3.3-12}$$

根據威能解(Wiener Solution)，我們可以求出上式的最佳解:

$$W_{MMSE} = R_{xx}^{-1} R_{xy} \tag{3.3-13}$$

其中，

$$\begin{aligned} R_{xy} &= E\left\{ XY^* \right\} = E\left\{ X(HX+N)^* \right\} \\ &= E\left\{ XX^* \right\} H^* = R_{xx} H^* \end{aligned} \tag{3.3-14}$$

則可得 MMSE 解為: $W_{MMSE} = R_{xx}^{-1} R_{xy} = H^*$ (3.3-15)

我們發現，利用 MMSE 演算法可直接求得通道的共軛複數，且沒有其它雜訊的干擾，但 MMSE 演算法的缺點是我們無法知道交錯相關係數 R_{xy}。故我們以適應性訊號處理的技巧中 LMS 演算法以遞迴方式將濾波器權重收斂至 W_{MMSE} 。

根據式(3.3-11)，針對第 k 個 pilot 次載波位置我們可寫出其第 n 次遞迴之誤差函數為:

$$e_{p,k}(n)=Y_{p,k}(n)-\hat{W}^{*}_{p,k}(n-1)X_{p,k}(n) \tag{3.3-16}$$

LMS 演算法更新權重的步驟如下:

Step 1: $\hat{W}_{p,k}(0)=0$

Step 2: $e_{p,k}(n)=Y_{p,k}(n)-\hat{W}^{*}_{p,k}(n-1)X_{p,k}(n)$

Step 3: $\widehat{W}_{p,k}(n)=\widehat{W}_{p,k}(n-1)+\mu X_{p,k}(n)e^{*}_{p,k}(n)$ (3.3-17)

其中，μ代表更新權重的步階大小(step size)，μ越大代表收斂越快，但收斂的結果誤差較大，將μ調小可收斂至較精確的值，但收斂速度慢，可能需傳送數十個 OFDM symbol 才能達到穩定的收斂權重，在 SNR>0dB 時，我們可用 LS 所估通道的共軛複數作為 LMS 權重的初始值，加速其收斂時間。要注意的是，μ有範圍的限制，若過大將會發散而無法收斂: $0\le\mu\le\frac{2}{\lambda}$，$\lambda$代表 pilot 的平均輸入功率。

LMS 演算法能夠以簡單的運算將權重遞迴更新逼近於 MMSE 權重，不過需浪費一開始的數個 OFDM symbol 以達穩定收斂，在此我們不針對μ作最佳化的討論，在模擬中我們以μ能使權重於 10 個 OFDM symbol 內達成收斂為準。

3.3.3 通道內插

在我們以 pilot 估計出 pilot 位置的通道頻率響應後，我們利用已估得的通道值以內插法將其他 data 次載波上通道響應估算出來，內插的方式有很多，在此我們使用一階的線性內插，越高階的內插法可得到較佳的通道估測，但需付出較高的運算量[20]，在攜帶式裝置中，我們有時需犧牲些許效能減低功率消耗。

由式(3.3-1)與式(3.3-9)，pilot 位置已估出通道與其他次載波通道值可表示為:

$$H(k)=H(mD_f+l)=\begin{cases}\hat{H}_p(m) & l=0, m=0,\ldots,N_p-1\\ \hat{H}_{\text{interp}}(mD_f+l) & l<D_f, m=0,\ldots,N_p-1\end{cases} \tag{4.3-18}$$

其中，$\hat{H}_{\text{interp}}$ 即為以內插法估計出的通道響應:

$$\begin{aligned}H_{\text{interp}}(k)&=H_{\text{interp}}(mD_f+l)\\&=\begin{cases}H_p(m-1)+\left(H_p(m)-H_p(m-1)\right)\dfrac{l}{D_f}\\ \quad\text{when }\ (m-1)D_f<k<mD_f\\ H_p(N_p-1)+\left(H_p(N_p-1)-H_p(N_p-2)\right)\dfrac{l}{D_f}\\ \quad\text{when }\ (N_p-1)D_f<k<N\end{cases}\end{aligned} \tag{4.3-19}$$

以上數學式如圖 3.3-1 所示，傳送 data 之次載波上的通道我們以最為靠近的兩個 pilot 已估通道來做線性內插，基於式(3.2-2)pilot 間隔符合通道的取樣定理，則 pilot 間之通道變化將趨近線性關係，當然，pilot 間隔 D_f 越小，此

線性關係就越強烈，內插法的準度也能提升。最後，我們能估算出包含了pilot 與 data 部分的所有通道 $\hat{H}(k),\ k=0,...,N-1$，在接收端將各次載波的通道衰減補償回來後，即可作 OFDM 信號決策(decision)。

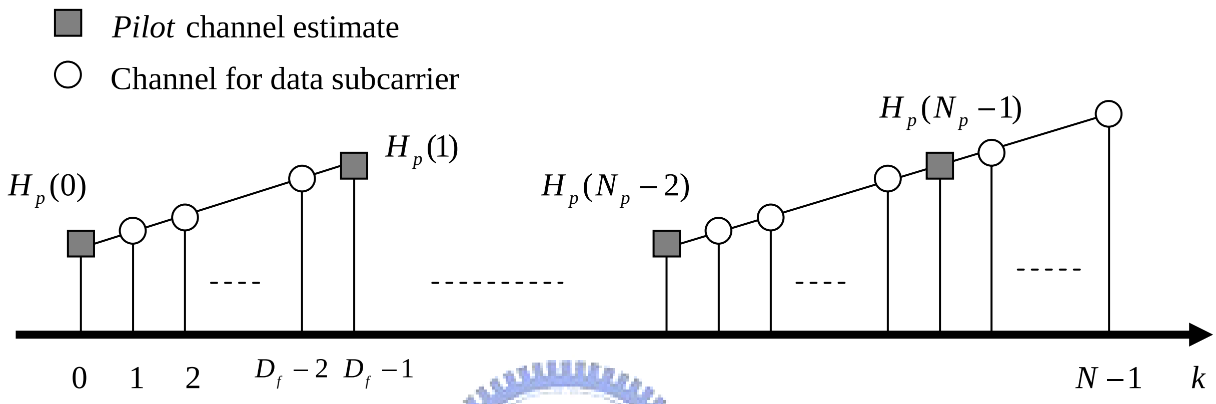

圖 3.3-1 一階線性通道內插