

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

三維平行平板底部加熱之可壓縮

自然對流現象研究

An investigation of natural convection of compressible flow  
in a three dimensional Parallel plate with bottom side heated

研究生：黃上豪

指導教授：傅武雄 博士

中華民國一百年六月

三維平行平板底部加熱之可壓縮

自然對流現象研究

An investigation of natural convection of compressible flow  
in a three dimensional Parallel plate with bottom side heated

研究生：黃上豪

Student: Shang-Hao Huang

指導教授：傅武雄

Advisor: Wu-Shung Fu



A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science in Mechanical Engineering

June 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

# 三維平行平板底部加熱之可壓縮 自然對流現象研究

研究生：黃上豪

指導教授：傅武雄

國立交通大學機械工程學系

## 摘要

本研究利用數值方法研究三維平行平板底部加熱之可壓縮自然對流現象研究。流場利用有限差分法進行計算，計算方法可分為兩部分：第一部份為非黏滯性項的尤拉方程式採用 Roe 方法計算通量，並且加入 Preconditioning 矩陣，讓程式在計算低速可壓縮流可獲得良好之收斂結果；第二部份為黏滯性項的計算，採用二階中央插分法。在時間項方面則採用 LUSGS 隱式法。出口設非反射性邊界條件避免可壓縮流中壓力波的干擾。在許多應用例子中，溫差常常大於 30K，因此 Boussinesq assumption 不適用。

由數值計算的結果得知，流體的溫度受到加熱，體積開始膨脹，兩端的流體被擠出至大氣環境，加熱壁面附近開始產生迴流，在平行平板中，上方流體從平行平板流向大氣環境，下方則從大氣環境流向平行平板內，分佈延伸至平行平板兩端。此種邊界上的現象稱之為雙反射現象(dual-reflection phenomenon)。因邊際效應的關係，底部兩側紐塞數分佈較高，而越接近中心而紐塞數分佈逐漸降低，而隨著加熱長度( $l_1$ )與兩平板間距寬度( $h$ )比( $R = \frac{l_1}{h}$ )的增加，流場漸不穩定，但因加熱區域大，累積熱量多，故局部紐塞數小，熱傳效果越不好。

# **An investigation of natural convection of compressible flow in a three dimensional Parallel plate with bottom side heated**

Student : Shang-Hao Huang

Advisor : Wu-Shung Fu

Department of Mechanical Engineering

National Chao Tung University

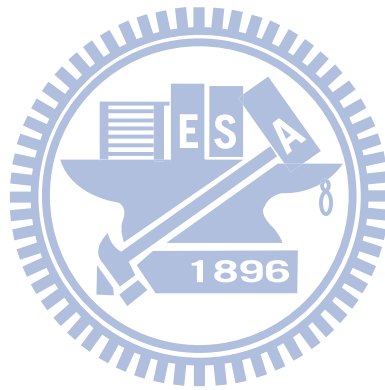
## **Abstract**

An investigation of natural convection of compressible flow in a three dimensional Parallel plate with bottom side heated . The finite difference is adopted and the computational approaches are divided into two parts. One is the inviscid terms. The Roe scheme is utilized to deal with the flux of inviscid terms and the preconditioning matrix is added to let the scheme to be more effective for all speed filed. The other is viscous term and the central difference of second order is utilized to handle it. The temporal term is solved by LUSGS. Non-reflection conditions at the outlet is derived in order to resolve reflections induced by acoustic waves. In many other important natural convection problems, the temperature differences are often higher than 30 K, Boussinesq assumption is not inapplicable.

Based on the numerical results, the volume of fluid is expended due to the rising temperature, and thus leads to the fluid leaving the control volume on both ends. Then a backflow region is observed, fluid near the top half of the parallel plate flows outward, and flows inward near the bottom which is names dual-reflection phenomenon. And because of the boundary conditions, the distribution of nueslt number of the bottom side is higher near the ends, decreases as to the center. The flow is unsteady as the heated length to the height between two parallel plate ratio gets higher. However, as the heated region gets larger, heat is accumulated, which leads to the local nusselt number decreasing and a lower heat transfer rate.

## 致謝

由衷的感謝指導老師傅武雄教授在這兩年來給予課業和論文上的指導，以及在生活中各方面的關心與照顧，在此謹致最高的謝忱與敬意。同時也感謝機械系諸位師長在課業方面的指導。另外要特別感謝博士班學長姐李崇綱、黃玠超、王威翔以及黃耘在數值模擬計算以及軟體使用上的協助以及指導。還有實驗室同學劉冠蘭、范仕坤、林佑聰，學弟妹黃崑榕、鄭景木、羅啟修、李世豪和吳珮蓉在精神上的鼓勵讓我可以順利完成論文。更要感謝感謝父母親及家人在求學路上一路的支持與幫助，不斷的給予耐心與支持，讓我能繼續堅持下去。最後感謝朋友同學親友們的一路上的鼓勵與關心，今日才能順利完成學業。

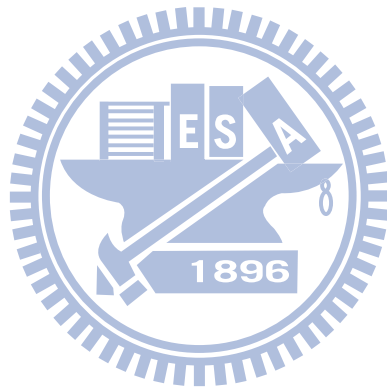


## 目錄

中文摘要 .....	i
英文摘要 .....	ii
致謝 .....	iii
目錄 .....	iv
表目錄 .....	v
圖目錄 .....	vii
符號表 .....	viii
一、緒論 .....	1
二、物理模式 .....	9
2-1 水平平行平板物理尺寸與分析模式 .....	9
2-2 分析假設及統御方程式 .....	10
2-3 邊界條件 .....	11
三、數值計算模式 .....	13
3-1 統御方程式 .....	14
3-2 Roe scheme .....	16
3-3 Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws(MUSCL) .....	23
3-4 Preconditioning 法 .....	25
3-5 LUSGS implicit method .....	33
3-6 非反射性邊界(Non-reflection Boundary) .....	35
3-7 週期性邊界 .....	39
四、結果與討論 .....	41
五、結論 .....	72
參考文獻 .....	73

表目錄

表 3-1 精度係數值.....24



## 圖目錄

圖 1-1 GPU 及 CPU 浮點運算速度比較圖 .....	7
圖 1-2 顯示卡 NVIDIA Tesla C1060 安裝於本研究室之電腦示意圖 .....	8
圖 2(a~b)物理模式圖 .....	12
圖 3-1 黎曼問題特徵值結構圖 .....	22
圖 3-2 差分示意圖 .....	30
圖 3-3 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 、 $L_4$ 與 $L_5$ 於管道兩端的方向性示意圖 .....	38
圖 3-4 週期性邊界條件設定 .....	38
圖 4-1 網格測試圖 .....	47
圖 4-2 $Ra^* = 1.58 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 0.035s$ ) .....	48
圖 4-3 $Ra^* = 1.58 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 0.45s$ ) .....	49
圖 4-4 $Ra^* = 1.58 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 3.45s$ ) .....	50
圖 4-5 $Ra^* = 1.58 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 3.95s$ ) .....	51
圖 4-6 $Ra^* = 4.73 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 0.1s$ ) .....	52
圖 4-7 $Ra^* = 4.73 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 0.35s$ ) .....	53
圖 4-8 $Ra^* = 4.73 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 1.35s$ ) .....	54
圖 4-9 $Ra^* = 4.73 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 2.55s$ ) .....	55
圖 4-10 $Ra^* = 4.73 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 2.7s$ ) .....	56
圖 4-11 $Ra^* = 4.73 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 3.6s$ ) .....	57
圖 4-12 $Ra^* = 4.73 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 4.55s$ ) .....	58
圖 4-13 $Ra^* = 8.66 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 0.6s$ ) .....	59
圖 4-14 $Ra^* = 8.66 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 0.75s$ ) .....	60
圖 4-15 $Ra^* = 8.66 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 0.8s$ ) .....	61
圖 4-16 $Ra^* = 8.66 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 1s$ ) .....	62
圖 4-17 $Ra^* = 8.66 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 1.25s$ ) .....	63



圖 4-18 $Ra^* = 8.66 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 7.55s$ ).....	64
圖 4-19 $Ra^* = 8.66 \times 10^6$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖( $t = 7.65s$ ).....	65
圖 4-20 流場速度量值轉換成雷諾數之比較圖.....	66
圖 4-21 內部質量隨時態變化圖.....	67
圖 4-22 加熱壁面時間平均局部紐塞數之比較圖.....	68
圖 4-23 平均紐塞數隨時間變化圖.....	69
圖 4-24 底部高溫壁面時間平均剪應力之比較圖.....	70
圖 4-25 頂部絕熱壁面時間平均剪應力之比較圖.....	71



## Nomenclature

$A$	area[ $m^2$ ]
$g$	acceleration of gravity ( $m/s^2$ )
$h$	the distance between the top plate and the bottom plate ( $m$ )
$k$	thermal conductivity ( $W/mK$ )
$l_1$	dimensional length of heat surface ( $m$ )
$l_2$	the distance between the outlet and the heat surface ( $m$ )
$l_3$	dimensional length of the plate ( $m$ )
$m$	Internal mass defined in Eq.(4-5) $m = \iiint_{x y z} \rho(P,T) dx dy dz$ (kg)
$M$	local Mach number
$\overline{Nu}_x$	average local Nusselt number with time defined in Eq. (4-1) $\overline{Nu}_x = \frac{1}{t} \int_t \frac{h}{k_0(T_h - T_c)} [k(T) \frac{\partial T}{\partial y}]_{wall} dt$
$\overline{Nu}$	average Nusselt number with area defined in Eq. (4-6) $\overline{Nu} = \frac{1}{A} \iint_{x y} Nu_x dx dy$
$P$	pressure ( $Pa$ )
$P_0$	surrounding pressure ( $Pa$ )
$R$	gas constant ( $J/kg/K$ )
$Ra$	Rayleigh number defined in Eq.(4-2) $Ra = Pr \frac{g \rho_0^2 (T_h - T_c) h^3}{T_0 \mu(T)^2}$
$Ra^*$	correct Rayleigh number defined in Eq.(4-3) $Ra^* = Pr \frac{g \rho_0^2 (T_h - T_c) h^3}{T_0 \mu(T)^2} \frac{l_1}{h}$
$Re$	Reynold number
$t$	time ( $s$ )
$t^*$	dimensionless time $t^* = t \frac{\mu_0}{\rho_0 h^2}$

$T$	temperature ( $K$ )
$T_0$	temperature of surroundings ( $K$ )
$T_h$	temperature of heat surface ( $K$ )
$w$	dimensional width of the plate ( $m$ )
$x$	Cartesian coordinate system x direction
$y$	Cartesian coordinate system y direction
$z$	Cartesian coordinate system z direction

*Greek symbols*

$\rho$	density ( $kg / m^3$ )
$\rho_0$	surrounding density ( $kg / m^3$ )
$\mu$	viscosity ( $N \cdot s / m^2$ )
$\mu_0$	Surrounding viscosity ( $N \cdot s / m^2$ )
$\gamma$	specific heat ratio
$\bar{\tau}$	average stress with time defined in Eq. (4-7)
	$\bar{\tau} = \frac{1}{t} \int_t \mu(T) \frac{\partial u}{\partial y} dt \quad (kg / m \cdot s^2)$

# 第一章 緒論

近年來，電子設備與產品蓬勃發展，由於效能的提高，也造成電子元件的高功率發展，加上半導體製程技術的進步，促使消費性電子產品的使用與生活型態做結合，因而目前許多電子產品皆走向高效能、微小化的趨勢，致使電子元件舉凡電腦CPU，顯示卡，筆記型電腦或智慧型手機等其封裝元件之發熱密度愈來愈高，其單位熱通量亦相對地不斷增加，對性能及可靠度等方面均造成不容忽視之影響。因此在未來電子產品的發展趨勢走向更輕薄短小之際，其性能及可靠度的提升將取決於其散熱技術。一般正常電腦CPU在執行程式下溫度大約為攝氏50~60度之間，超過攝氏八十度則電腦會基於保護狀態，自動關閉系統。大部分電子元件都有其溫度操作範圍，元件的效能與壽命與溫度有極大關聯性。因此為了維持元件於額定溫度下運作，將此密集的熱量能有效散逸於系統外之環境，必須透過散熱系統將元件所產生大量熱能移轉至周圍流體。傳統的散熱片大多數是由鋁合金所製造，其熱傳導性只屬於中等程度，對於目前元件發熱功率越來越高的情況，逐漸有捉襟見肘的情形發生，目前電子元件的發熱量達到每平方公分數十瓦的等級，且接點可承受的溫度約在攝氏150度以下。

目前散熱系統分為主動式與被動式。主動式散熱，就是要透過提供能源來解決散熱的問題，比較常見的有利用風扇產生強制對流使空氣通過散熱鰭片或是使用水冷器驅動流體帶走大量的熱量等，被動式的散熱，就是在系統產生高低溫時，流體因密度變化產生自然對流的方式來散熱，例如散熱鰭片(heat sink)、熱管(heat pipe)或是一般的金屬件。隨著製程技術的進步，熱功率不斷向上的爬升，但電子產品的發展趨勢為輕薄短小以便攜帶，故內部裝備擺置空間狹窄，則造成主動式散熱器無法擺置，加上攜帶振動問題，將會提高故障率與成本，而仰賴自然對流的被動式散熱裝置，因構造固定簡單，微小化容易，而不須任何額外能源驅動，對於現代環保觀念和使其電子產品節能而能增加持久續航運作。

兩平行平板自然對流散熱具有廣泛的應用，在學術和工業研究中是一個非常重要的研究項目。例如太陽能接收系統，消防研究，沉積過程的半導體製造和磁碟陣列……等，

其中之傳熱機理和流體流動模式值得仔細研究。因此如何改良空氣對流的方式以及增加自然對流所能散逸之熱量成為研究的主要課題之一。

兩平行平板自然對流之特點為密度隨溫度而變且流速緩慢，為了避免求解過程的複雜性，Boussinesq 近似法假設流體密度是常數，溫度變化的影響僅侷限於動量方程中的浮力源項。以下文獻提出使用Boussinesq 假設的分析結果Janssen and Henkes [1] 針對二維方形封閉空穴，以Boussinesq 假設求解，工作流體為空氣，Ra 數測試範圍為  $10^6 \sim 2 \times 10^8$ 。Ostrach [2] 針對方形封閉空穴實驗觀察速度在封閉腔內的分布為反對稱，若黏滯係數為溫度函數時，高溫壁面流體邊界層較小。Barletta[3]討論在二維平板自然對流，左側為低溫壁面，右側為高溫壁面以Boussinesq 假設求解，研究發現黏性的耗散會增加浮力效應。Suastegui [4]二維暫態層流有限管長，在一側中間段等溫加熱，其餘為絕熱壁面，研究不同浮慣比在加熱面附近的迴流現象。Yang等人[5]研究二維兩平行水平板之自然對流和熱穩定性，兩個平板有三種不同的加熱升溫方式：頂板加熱，底部板加熱，和兩平板同時加熱，結果發現熱能擾動誘導流場波動。動能的擾動流體運動隨時間顯示了不同的變化趨勢。對於頂板加熱方式，最後的總動能接近一個逐漸衰減的階段，而對於底部加熱的情況下，似乎動能都在以指數成長，表明這種加熱模式下，熱流體運動將變得不穩定。Ra變化在  $2.87 \times 10^3 \sim 9.11 \times 10^4$  範圍內。然而，由Gray[6]可得知，在冷熱表面溫差小於30K 時才可適用，但在現實工業應用中，例如：在半導體製程，蒸鍍、乾燥過程中，往往溫差高達上百度，故較不適用；對於Ra 數(Rayleigh Number) 不大的層流中(溫度差異較小)，以Boussinesq 假設為基礎所獲得結果尚屬合理；對於溫度差異較大者若未考慮密度的改變，將減少模擬結果的正確性。

以下文獻提出不使用Boussinesq假設自然對流流場與熱傳分析。Chenoweth與Paolucci [7]採用低馬赫數近似法，針對二維方形空穴溫度差異大的流場，以低馬赫數近似法求解之，並顯示流場之物理現象跟展弦比、Ra 有關。Hung與Cheng[8]使用理想氣體方程式計算封閉腔體的自然對流，假設初始狀態的密度分佈為一指數函數，並比較在不同大氣壓力下對Nu的影響，研究結果發現，壓力變動對於以Boussinesq 流體無影響，而以理想氣體流體，壓力增加Nu隨之增加。Horibata[9]比較Boussinesq 與低馬赫數兩種

近似法在空穴流中的差異，發現在 $Ra=10^6$ 時，使用Boussinesq 近似法來進行預測，所產生的最大誤差約在2.1%，而使用低馬赫數法的最大誤差量約為-1.3%。Fu和Li等人[10]研究在有限管道內，討論一高溫度壁面造成自然對流，且由於溫度差高於30K，不使用Boussinesq assumption，且由於流場極易被邊界條件所影響而造成較大的誤差，故在出入口使用非反射性邊界。

在實驗的部分Husar and Sparrow [11]曾提出對不同形狀之水平向上受熱表面周圍的自然對流流場觀察，該研究利用加熱線圈加熱觀測表面，觀察此研究結果中不同形狀之流場，發現當 $Ra$ 變化在 $10^7 \sim 10^8$ 之間時，加熱面上方出現許多垂直於加熱表面邊緣排列的條狀上昇氣流，而 $Ra$ 大於 $10^8$ 時，發展成紊流場。

Rotem and Claassen [12]將加熱平板放置於一密閉空間中，觀察到氣流由平板邊緣流往平板中心時，會先於平板上方形成層流邊界層，在一段距離後產生分離，而流至平板中心線處附近時，會與對向之氣流發生碰撞因而產生不穩定的流場。Hassan and Mohamed [13]觀察等溫水平加熱平板實驗，該研究並指出局部熱通量最低處即為流場發生分離處，發現平板之局部熱通量與距離的變化在平板中心區域的部份是幾乎不變動的，而在靠近平板邊緣區域則如同層流流場會隨邊界層的增加而降低。Yousef et.al. [14]針對等溫加熱平板之自然對流現象討論，研究發現加熱板上方的氣流溫度分佈可能因擾動而有震盪不連續的現象。Kitamura 和 Kimura[15]利用實驗研究水作為傳熱介質流過加熱水平板產生自然對流，加熱源為均勻熱通量。其中流場利用染料做可視化和溫度場利用液晶測溫觀察，並且測量局部Nu數。 $Ra$ 變化在 $10^5 \sim 10^6$ 範圍內。研究發現流場隨進入加熱區距離增加，可分為四個區域（1）層流流場（2）平行條狀流場（3）過渡流場（4）紊流流場。Kitamura 與 Asakawa [16]利用實驗研究，測量兩水平平板之間流體流動與傳熱的自然對流，底板加熱，加熱源為均勻熱通量，頂部為隔熱，工作流體為水。針對板的寬度及底部和頂部板之間的差距不同來做探討。並且對局部Nu數進行了測定。研究發現流場不穩定現象隨著兩平板間距增加而發生。Pretot et al. [17] 局部Nu數在加熱平板邊緣有一最大值，隨著進入加熱平板上方區域的距離增加而變小，最後在加熱區中心處達一最小值。Manca 等人 [18]進行了一項實驗研究觀察三種加熱方式：（1）兩平行平板加熱，



(2) 頂板加熱，底板不加熱，(3) 底板加熱，頂板不加熱中，流動模式發生二次流，主要流動的形狀為 C 型。這種二次流結構產生的熱量，導致縱向渦流產生。觀察平行板之間的均勻熱通量加熱的空氣流動和可視化並且測定空氣的溫度。其中 Grashof numbers 在  $1.22 \times 10^5 \sim 1.06 \times 10^6$  範圍內做討論。Turgue 與 Onur[19] 同時進行實驗和三維數值模擬研究，使用不可壓縮理想氣體方程式，探討兩水平平板間距與溫差之間的自然對流影響，加熱為底板等溫和頂部為隔熱。空氣是作為傳熱介質。Ra 變化在  $1108 \sim 2.339 \times 10^5$  範圍內。

綜合以上論述，多數限制較多，是為求符合 Boussinesq Assumption 用於溫差 30 度以內之限制，壁面溫度設定低；而依目前大部分的計算方式，在計算流場部份依照流體速度將其區分為可壓縮流(大於 0.3 馬赫)與不可壓縮流(小於 0.3 馬赫)，此種區隔卻嚴重的影響其應用範圍，在自然對流平行平板中雖然是低速流場但因為伴隨局部高溫使該處密度發生變化，流體因此體積膨脹或收縮，造成壓力差而引發流動，此即為可壓縮流之自然對流效應，故此高溫下的熱傳與熱對流效應，需要求解完整的 Navier-Stokes 方程式以得此可壓縮流中密度的變化，以期能同時考慮密度與壓力變化之效應符合實際物理現象。

本研究針對三維的流場做模擬，其中工作流體不論高速或低速皆視為可壓縮流，因此密度隨著壓力與溫度的變化而改變，對於實際工業界中的應用較為廣泛與實際。以增加應用範圍。Li[20]發展出黏性流場之全域速度場數值解法，此種方法最大的困難處在於計算低速流場時，由於可壓縮流必須遵守 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 條件，因此在低速流體時，受限於流體變化傳遞速度(約等於聲速)，時階將會極小。在此種情況造成計算過程將耗費極大的時間與整體過低的計算效率。為了改善此缺點，在計算可壓縮流時加入 Preconditioning 法，藉此讓流體即使在低速時，也可有較高的效率與良好的收斂性。在計算此種低馬赫數流體的方面，目前有密度基底法(Density-based method)與壓力基底法(Pressure-based method)。本文以密度基底法為主。而在密度基底法中又以 Turkel[21]提出 Preconditioning 法最為廣泛應用，不僅可同時應用在可壓縮流與不可壓縮流中，更可以讓程式的收斂性增加。而在做數值計算時，主要是利用到網格之間的物

物理量，因此用到 MUSCL 法來處理網格間的物理量，在計算流場時空間部分以 ROE 法 [22]來計算出非黏滯性項的通量，黏滯性項部分則採用二階中央插分，重力項則不使用 Boussinesq approximation。

在時階部份為了能夠使程式能夠加速收斂，因此採用 LUSGS implicit[23]方法；而當在程式中加入 Preconditioning 法時，同時破壞了統御方程式，為了彌補此一缺點，必須加入 Artificial time term 來修正方程式；最後利用 Dual time stepping[24]來計算暫態的物理量

除了發展全域黏性流場的計算方法外，由於流場極易被邊界條件所影響而造成較大的誤差，因此採用低速可壓縮的非反射性邊界，以解決上述問題。為了解析可壓縮流進出口邊界的問題，Rudy 等人[25]提出非反射性邊界條件，此方法簡單且容易應用。Poinsot 等人[26]則提出 Navier-Stokes characteristics boundary conditions(NSCBC)，除了出口條件外，亦包含如何解決進口以及有無滑移壁面條件等問題。除此之外，應用於管道兩端的低速非反射性邊界，因為不需增加大空間，所以大幅提昇計算效率。

在三維流場的計算極為複雜耗時，電腦必須有龐大的儲存容量與有效的計算方法方以應付。平行運算為一種有效的方法，目前最常見可分為兩大類，一為 OpenMP(Open Multi-Processing)，一台電腦擁有多核心(multicores)的中央處理器(Central Processing Unit, CPU)，目前最多為十二核心的中央處理器，方便節省空間與金錢，但共同執行的處理器核心有限。另一為 MPI(The Message Passing Interface,)利用網路連結各電腦，平行運算界網路連結之電腦群同時執行，可連結極多數，但效率會逐漸降低，且價格昂貴須有廣大空間供電腦置放。為解決上述缺失，本研究自力開發現有的電腦與英偉達(NVIDIA)公司的硬體顯示卡(價格約四萬台幣)之間的連結與程式編輯，將平行運算於 CUDA(Compute Unified Device Architecture)計算平台上執行。亦即將顯示卡內原為繪圖功能而具有利於浮點運算、數量極多執行緒(multithread)與高記憶體頻寬(memory bandwidth)的特性，轉換成所需的計算功能。過去以顯示卡(NVIDIA 8800GTX)作為平行運算工具，在 CUDA 平台上作數值模擬的有 Brandvik 和 Pullan[27]，以有限體積法離散三維尤拉方程式，解渦輪葉片上的非黏性可壓縮流，得其計算效能約為中央處理器(Intel



Core 2 Duo 2.33 GHz)的 16 倍，測試網格較少時 CPU 計算速度則會相較有些微增加；Corrigan 等[28]用非結構性網格，以 NACA0012 機翼及一飛彈為例，解此超音速可壓縮流流場，比較中央處理器(Intel Core 2 Q9450)及顯示卡(NVIDIA Tesla)在不同案例下單精準及雙精準的計算效能，結果在單精準浮點數下使用顯示卡計算速度約為四核中央處理器的 9.4~9.9 倍，而雙精準則為 1.56~2.5 倍。

圖(1-1)為英特爾(Intel)公司的中央處理器與英偉達(NVIDIA)公司的硬體顯示卡單浮點運算速度的比較圖[29]，可得知兩者的差距。圖(1-2)則是英偉達公司的硬體顯示卡安裝於本研究室之電腦示意圖，利用 CUDA 計算平台於平行運算，不但可大幅縮短計算時間，且可降低電腦成本與使用空間。

此外，將考慮平行平板自然對流生成過渡流之熱傳問題，此類研究在現今文獻中少有論述，大都為討論強制對流下的紊流模擬，由於為強制對流，故能一開始得知流量而給予特定擾動進行循環計算，其結果只能類似於穩態紊流流場，然而對於自然對流慢慢轉變成過渡流之過程，無法預先得知由於氣體受熱其密度與壓力變化所導致的流量，亦即無法確定誘導成紊流的驅動力，即無法使用前述方法計算。過去常以擾動流場利用紊流現象增加熱傳效益，而大多的數值模擬研究皆是以周期性邊界加以些許紊流強度反覆計算得到一個紊流流場，並非真實物理尺寸下的紊流模擬，若考慮自然對流狀態下的物理模型，無法預先得知因流場變化而產生的進口流量，此種方法即無法模擬出自然對流從層流轉變成過渡流之過程，故研究此類自然對流誘導紊流之研究亦為重要方向之一。為了提高實際應用範圍，為了瞭解上述自然對流誘導過渡流之熱傳問題，將研究模擬三維平行平板自然對流誘導過渡流的問題，並對其從層流轉變成過渡流過程中的機制加以分析，以期能了解過渡流流場對熱傳的影響並加以改善。

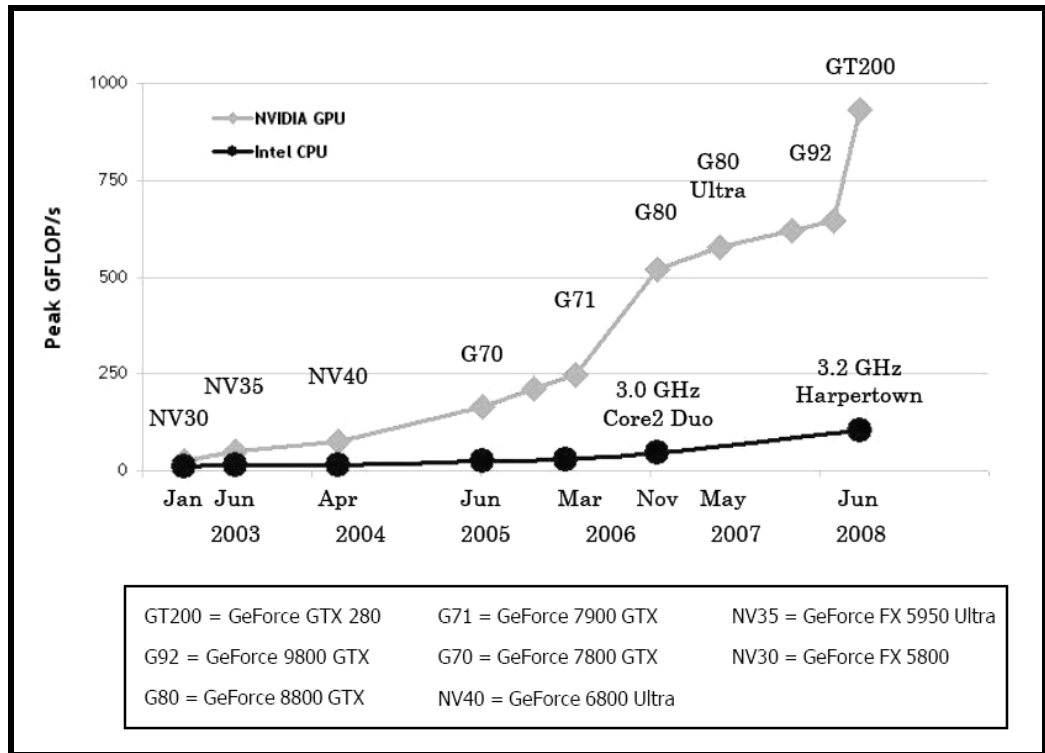


圖 1-1 GPU 及 CPU 浮點運算速度比較圖



圖 1-2 顯示卡 NVIDIA Tesla C1060 安裝於本研究室之電腦示意圖

## 第二章 物理模式

### 2-1 水平平行平板物理尺寸與分析模式：

由頂板與底板所構成之平行平板所採用的物理模式圖如圖 2-1 所示，為一三維水平放置之平行平板。其長與寬分別為  $2l_2+l_1$  和  $w$ 。而平行平板之間的間距為  $h$ 。加熱面則放置於底板中，其長度與寬度分別為  $l_1$  與  $w$ 。除此之外，加熱面的溫度為  $T_h$ ，除了加熱面外，其餘壁面皆為絕熱條件。而外面的環境溫度與壓力分別為  $T_c = 298.0592K$  與  $P_0 = 101300Pa$ 。

由於壁面加熱的關係，平行平板內將會產生自然對流現象。首先，於平行平板內，加熱面上方的氣體上升至頂板壁面。接著開始沿著頂板壁面的兩邊流出。在此時，平行平板兩端出入口也開始從外界吸入溫度較低的流體。於是，在平行平板兩端，將會因為聲波速度與流體速度差異過大而造成上下壁面全然不同的反射現象。並且在同一平面上，存在著由於流動方向所造成兩種方向相異的「雙反射現象」，故出入口條件部分採用非反射性邊界條件。

而因假設為無限延伸平行平板，故設置  $z$  方向為週期性邊界條件。

2-2 分析假設及統御方程式：

本研究選擇層流流場作為模擬流場，流場作以下假設：

1. 可壓縮流，空氣密度會隨溫度與壓力而改變。
2. 工作流體為空氣，假設為理想氣體。流體性質為牛頓流體(Newtonian fluid)，黏滯係數為等方向性。
3. 考慮重力效應。
4. 絕熱壁面與高溫壁面均為不可滑移(No slip condition)

統御方程式分別為連續方程式(Continuity equation)、動量方程式(Momentum equations)與能量方程式(Energy equations)，壓力方面則假設流體為理想氣體，利用理想氣體狀態方程式定義。

連續方程式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \quad (2-1)$$

動量方程式：

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + B_i \quad (2-2)$$

能量方程式：

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j E + p u_j) = -\frac{\partial}{\partial x_j} q_j + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i \sigma_{ij}) + u_i B_i \quad (2-3)$$

理想氣體狀態方程式：

$$p = \rho RT \quad (2-4)$$

其中  $\sigma_{ij} = \mu_{\epsilon,if} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right]$

$$B_i = -(\rho - \rho_0)g$$

## 2-3 邊界條件：

本研究所採用的統御方程式為可壓縮Navier-stokes 方程式，因此需要給定的邊界條件有：初始狀態(Initial condition)、出入口條件(Inlet Outlet condition)、壁面邊界(Boundary condition)

### 2.3.1 初始狀態：初始速度、初始壓力、初始密度

初始速度 $u$ ：0 m/s

初始速度 $v$ ：0m/s

初始速度 $w$ ：0m/s

初始壓力 $p$ ：一大氣壓力(101300Pa )

初始密度 $\rho$ ：空氣密度(1.1842kg /m<sup>3</sup>)

### 2.3.2 出入口條件：

出入口速度 $u$ ：非反射性邊界條件

出入口溫度 $T$ ：非反射性邊界條件

出入口壓力 $p$ ：非反射性邊界條件

### 2.3.3 壁面邊界：

邊界速度：不可滑移條件， $u = v = w = 0$  m/s

邊界溫度：加熱壁面溫度 $T_h$

邊界密度：在垂直壁面方向，梯度為零， $\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0$

邊界壓力：壓力設為 $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

### 2.3.4 5. 週期性邊界：

ABCD面與EFGH面採用週期性邊界，故

邊界速度：週期性邊界

邊界溫度：週期性邊界

邊界壓力：週期性邊界

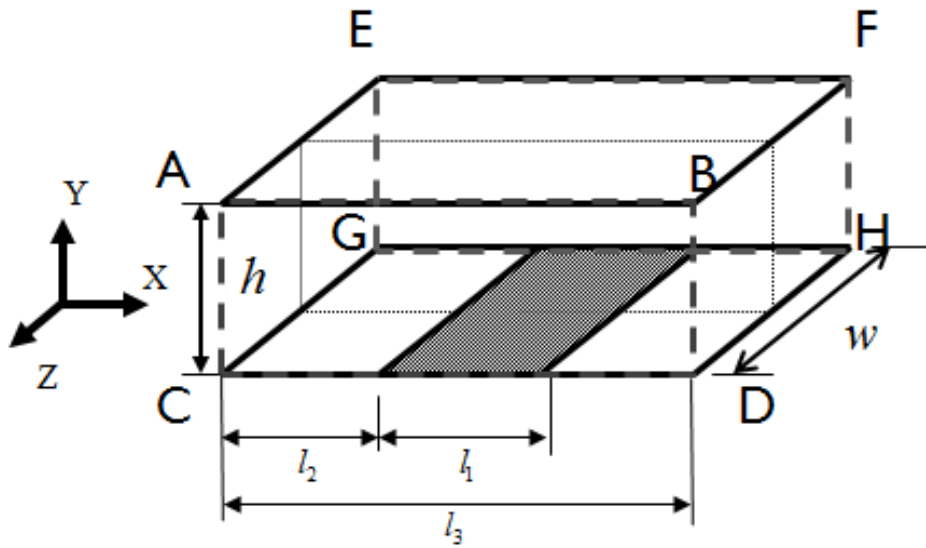


圖 2(a). 三維水平平行平板物理模式圖



$$P_0 = 101300 Pa \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$T_0 = 298.0592 k \quad u = v = 0$$

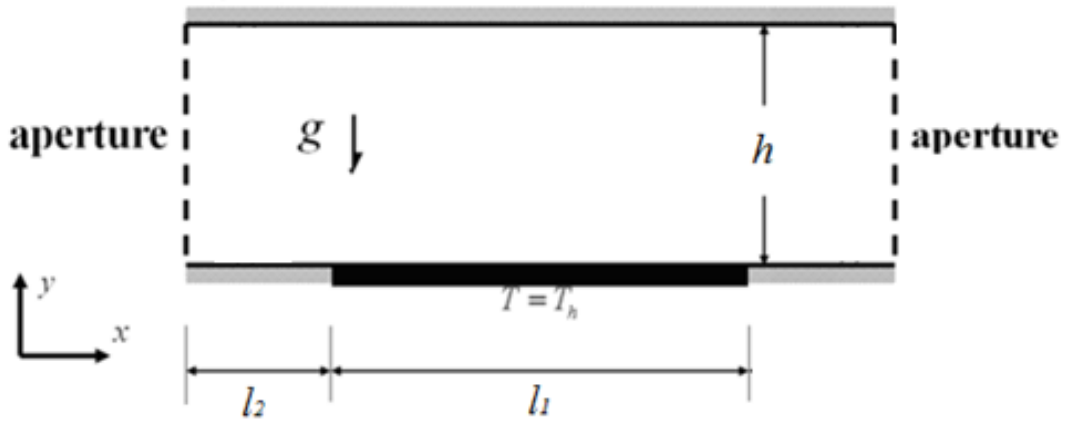


圖 2(b). XY 平面物理模式圖

圖 2 物理模式圖

### 第三章 數值計算模式

本章主旨在說明本論文的數值計算所使用的所有模式。第一節整理所求解的 Navier-Stokes 方程式。將 Navier-Stokes 方程式拆解為非黏滯項與黏滯項。第二節介紹的為黎曼解中的 ROE 法，利用 ROE 法來求出非黏滯項的通量。接著第三節介紹 MUSCL 法，此法是為了解出 ROE 法中使用的網格之間的物理量，然後為了防止在高階插分時產生震盪現象，在 MUSCL 法插分的結果方程式中加入 Minmod limiter 以確保程式不會發散。第四節為介紹 Preconditioning 法，因為當計算低速可壓縮流時，因速度和音速的數量級上差距過大，在數值分析時造成計算的困難，所以為彌補此一缺點須使用 Preconditioning 法。第五節為 LUSGS Scheme，為了加快收斂速度並且避免能量耗散問題，因此利用 LUSGS Scheme，而程式因為在使用 Preconditioning 時，加入 Artificial time term 時，已破壞了整個統御方程式，因此需使用 Dual time stepping 疊代使其在 Artificial domain 收斂時才能進入下一個真實時階，將在此小節做詳細的解說。第六節則詳細介紹本文在出口條件部份採用的非反射性邊界條件，用以避免低速可壓縮流中，出入口處壓力波易反彈而造成的干擾。第七節介紹本文在 z 方向邊界條件部份採用的週期性邊界條件，用以假設無限延伸之平行平板，減少計算範圍與時間。綜合上述，本論文在數值上的計算過程為，首先將 Navier-Stokes 方程式拆解為非黏滯項與黏滯項。利用 MUSCL 法算出 ROE 法所需要的網格間物理量並搭配 Minmod limiter 以確保程式不會發散，求解出非黏滯性項的通量，並且在計算通量時加入 Preconditioning 法，以拉近與音速的數量級。接下來利用二階中央插分法對黏滯項做插分進而求出黏滯性項；然後再與 ROE 法求出的非黏滯性項通量做結合得到真正的物理通量。最後使用 LUSGS Scheme 疊代以求出下一時階的物理量。



### 3-1、統御方程式：

本研究在計算流場的方面其統御方程式分可為兩大部分，第一部份為非黏滯性項的尤拉方程式，第二部份為黏滯性項。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-1)$$

$$P = \rho RT \quad (3-2)$$

其中在水平管道中

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho Eu + Pv - k \frac{\partial T}{\partial x} - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + P - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho Ev + Pv - k \frac{\partial T}{\partial y} - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

$$H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho u - \tau_{zx} \\ \rho v - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + P - \tau_{zz} \\ \rho Ew + Pw - k \frac{\partial T}{\partial z} - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)g \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)gv \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

$$E = \frac{P}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2),$$

$\rho$ 為密度， $P$ 為壓力。  $u$ 、 $v$ 、 $w$  分別為  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的速度，黏滯係數與熱傳導係數  $k$  利用 Sutherlands's law

$$\mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{T_0 + 110}{T + 110} \quad (3-8)$$

$$k(T) = \frac{\mu(T)\gamma R}{(\gamma-1)\text{Pr}} \quad (3-9)$$

其中

$$\rho_0 = 1.1842 \text{kg/m}^3, \quad g = 9.81 \text{m/s}^2,$$

$$\mu_0 = 1.85 \times 10^{-5} \text{Ns/m}^2, \quad T_0 = 298.0592 \text{K}, \quad Ra = \text{Pr} \frac{g \rho_0^2 (T_h - T_c) h^3}{T_0 \mu(T)^2}$$

$$\gamma = 1.4, \quad R = 287 \text{J/kg/K}, \quad \text{Pr} = 0.72.$$

上式可拆解成黏滯性項與非黏滯性項：

$$F = F_{inviscid} + F_{viscid} = \left\{ \begin{array}{l} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) u + pu - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ +u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} \end{array} \right\} \quad (3-10)$$

$$G = G_{inviscid} + G_{viscid} = \left\{ \begin{array}{l} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) v + pv - k \frac{\partial T}{\partial y} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ +u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} \end{array} \right\} \quad (3-11)$$

$$H = H_{inviscid} + H_{viscid} = \left\{ \begin{array}{l} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) w + pw - k \frac{\partial T}{\partial z} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ +u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} \end{array} \right\} \quad (3-12)$$

由非黏滯項所組成的方程式，即稱為尤拉方程式。

### 3-2、Roe scheme：

在雙曲線的守恆形式方程式中，若其初始條件包含有不連續的片段連續(piecewise)常數，此類型的問題通稱為黎曼(Riemann)問題。因為其包含有不連續解，因此在流體計算上有著相當廣泛的應用。一維線性黎曼方程式如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{其中 } A \text{ 為一常數 Jacobian 矩陣。} \quad (3-13)$$

初始條件為  $U^{(0)} = (u_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)})^T$ 。左上方括號代表時間  $t$  為 0。

求出  $A$  之特徵值矩陣以及特徵向量。

$$A = K \Lambda K^{-1} \quad , \quad \text{其中 } \Lambda \text{ 為特徵值矩陣：} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} \circ$$

$K = [K^{(1)}, \dots, K^{(m)}]^T$  為特徵向量，故  $AK^{(i)} = \lambda_i K^{(i)}$ 。

接著定義特徵變數  $W$  (characteristic variables)，其定義如下：

$$W = W(t, x), \quad W = K^{-1}U \quad \text{或} \quad U = KW \circ \quad \text{因此} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = K \frac{\partial W}{\partial t} \quad \text{且} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = K \frac{\partial W}{\partial x} \quad , \quad \text{將此結果代入(3-4)}$$

式中可得：

$$KW_t + AKW_x = 0 \quad , \quad \text{可再繼續簡化成：}$$

$$W_t + \Lambda W_x = 0 \quad (3-14)$$

方程式(3-5)稱為 canonical form 或 characteristic form。

將以上的結果簡單整理如下：

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_3 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_3 \end{bmatrix}_x = 0 \quad (3-15)$$

(3-12)可由特徵曲線法求得其解為：

$$\begin{cases} w_i(x, t) = w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \alpha_i & x - \lambda_i t < 0 \\ w_i(x, t) = w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \beta_i & x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \quad (3-16)$$

其中， $\alpha_i$  與  $\beta_i$  為初始值的特徵變數。由於  $U = KW$ ，可以得到  $U(x,t) = \sum_i^m w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) K^{(i)}$

參照圖(3-1)，可以進一步推導出

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i K^{(i)} + \sum_{i=p+1}^m \beta_i K^{(i)} \quad (3-17)$$

除此之外，還可決定出  $U(x,t)$  中的 jump  $\Delta U$ ：

$$\Delta U = U_R - U_L = \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-18)$$

其中  $\tilde{\alpha}_i = \beta_i - \alpha_i$ 。

在一維線性黎曼問題中，雖然有 exact solution，但在非線性問題裡需利用疊代等方法，這些動作將耗費大量的時間，因此在實際應用上並不廣泛。為了解決此問題，一般皆求解近似黎曼問題〈approximation Riemann problem〉解而不直接求其 exact solution。在求解近似黎曼問題中最被廣泛應用的方法為 Roe 所提出，亦即為 Roe scheme，其內容如下：

假設一維尤拉方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-19)$$

根據 chain rule，可將方程式(3-19)改寫如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{再令 } A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}, \text{ 於是方程式(3-23)可以表示成：} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3-20)$$

其中， $A(U)$  就稱為 Jacobian 矩陣。

而 Roe scheme 將原本的 Jacobian 矩陣  $A(U)$  用一常數 Jacobian 矩陣  $\tilde{A}(U_L, U_R)$  代替，因此本來的黎曼問題可以改寫成近似黎曼問題：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ U(x,0) = U_L \quad x < 0 \\ U(x,0) = U_R \quad x > 0 \end{aligned} \quad (3-21)$$

於是前述方法可以得到(3-19)的近似解。由以上的原理可得知，在近似黎曼問題上，

Roe 利用常數 Jacobian 矩陣取代原本的 Jacobian 矩陣使方程式由非線性轉變成線性，但是初始條件並沒有改變，因此可以得到方程式(3-14)的近似解。為了要求得合理的常數 Jacobian 矩陣，須合乎 Roe 所提出的四項條件：

1.  $U$  與  $F$  之間，存在著線性轉換的關係。
2. 當  $U_R - U_L \rightarrow U$ ，則  $\tilde{A}(U_L, U_R) \rightarrow A(U)$ ，此處  $A = \frac{\partial F}{\partial U}$ 。
3.  $\tilde{A}(U_L - U_R) = F_L - F_R$ 。
4. 矩陣  $\tilde{A}$  的特徵向量必須線性獨立。

這四項條件都是雙曲線方程式所需具備的，這同時也說明了 Roe 所提出的常數 Jacobian 矩陣必須有實數特徵值，其所對應的特徵向量必須線性獨立。除此之外，條件 3.則是為了符合守恆定律（conservation law）與 Rankine-Hugoniot 條件。

線性黎曼問題的解析解，可以直接從(3-16)與(3-17)式得到， $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$  的解可以利用

下面的方程式計算：

$$U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = U_L + \sum_{\lambda_i < 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-22)$$

$$\text{或 } U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = U_R - \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-23)$$

其中  $i + \frac{1}{2}$  表示網格與網格之間的分界面(face)。

而黎曼問題的近似解，則須從解近似黎曼問題著手：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(U)}{\partial x} = 0, \text{ 根據(3-21)式可得知 } \tilde{F} = \tilde{A}U$$

為了符合守恆的條件，因此下式必須成立：

$$\tilde{F}(U_R) - \tilde{F}(U_L) = F(U_R) - F(U_L) \quad (3-24)$$

接著在固定體積的條件下，積分近似解  $U_{i+\frac{1}{2}}(0)$ ，可得到通量(flux)的數值公式：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{F}(U_{i+\frac{1}{2}}(0)) - F(U_R) - \tilde{F}(U_R) \quad (3-25)$$

再從  $\tilde{F} = \tilde{A}U$  的關係中可進一步求得：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{A}U_{i+\frac{1}{2}}(0) - F(U_R) - \tilde{A}U_R \quad (3-26)$$

再根據(3-22)式與(3-23)式可以推導出：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_R) - \tilde{A} \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_R) - \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^+ \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (3-27)$$

或

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_R) + \tilde{A} \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_L) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^- \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (3-28)$$

(3-27)與(3-28)所指的  $\tilde{\lambda}_i^-$  與  $\tilde{\lambda}_i^+$  分別是代表負的特徵值與正的特徵值，接著再利用平均的方法將  $F_{i+\frac{1}{2}}$  更進一步表示成：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ F(U_R) + F(U_L) - \sum_{i=1}^m |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \right] \quad (3-29)$$

再由(3-17)式可再次改變  $F_{i+\frac{1}{2}}$  的形式如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ F(U_R) + F(U_L) - |\tilde{A}| \Delta U \right] \quad (3-30)$$

其中  $\Delta U = U_R - U_L$ 、 $|\tilde{A}| = \tilde{A}^+ - \tilde{A}^- = \tilde{K} |\tilde{\Lambda}| \tilde{K}^{-1}$ ， $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |\lambda_m| \end{pmatrix}$ 。

接下來需找出  $|\tilde{A}|$  中所需的物理量，必須利用下列方法：

現考慮一維等溫尤拉方程式：

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (3-31)$$

其中  $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix}$ ； $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + a^2 p \end{bmatrix}$ ， $a$  為聲速

方程式(3-31)的 Jacobian 矩陣與其對應的特徵值與特徵向量如下所示：

$$A(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

特徵值： $\lambda_1 = u - a$ ， $\lambda_2 = u + a$

特徵向量： $K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \end{bmatrix}$ ， $K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \end{bmatrix}$

接著選定 parameter vector Q

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{U}{\sqrt{\rho}} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho u} \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

再將  $F$  與  $U$  利用  $Q$  表示：

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = q_1 Q = \begin{bmatrix} q_1^2 \\ q_1 q_2 \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 q_2 \\ q_2^2 + a^2 q_1^2 \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

為了表示出  $\Delta U$  與  $\Delta F$  需在定義 averaged vector  $\tilde{Q}$ ：

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(Q_L + Q_R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R} \\ \sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R \end{bmatrix} \quad (3-36)$$

再找出  $\tilde{B} = \tilde{B}(\tilde{Q})$  與  $\tilde{C} = \tilde{C}(\tilde{Q})$  使得

$$\Delta U = \tilde{B} \Delta Q ; \Delta F = \tilde{C} \Delta Q \quad (3-37)$$

將(3-37)結合可得

$$\Delta F = (\tilde{C} \tilde{B}^{-1}) \Delta U \quad (3-38)$$

再根據上述條件 3 求出近似 Jcaobian 矩陣

$$\tilde{A} = \tilde{C} \tilde{B}^{-1} \quad (3-39)$$

為了滿足(3-37)，可以求得

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 2\tilde{q}_1 & 0 \\ \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \end{bmatrix} ; \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \\ 2a^2 \tilde{q}_1 & \tilde{q}_2^2 \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

再帶入(3-39)可得

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \tilde{u}^2 & 2\tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

$\tilde{u}$  為 Roe averaged velocity

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-42)$$

因此可以用同樣方法得到以下物理量：

$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-43)$$

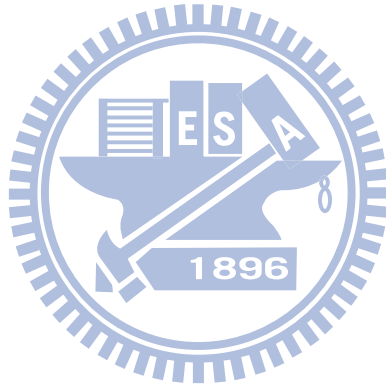
$$\tilde{w} = \frac{\sqrt{\rho_L} w_L + \sqrt{\rho_R} w_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-44)$$

$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-45)$$

$$\tilde{a} = [(\gamma - 1)(\tilde{H} - 1/2\tilde{V})]^{1/2} \quad (3-46)$$

其中  $\tilde{u}$ 、 $\tilde{v}$ 、 $\tilde{w}$  分別代表  $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向的速度。 $\tilde{H}$ 、 $\tilde{a}$  則分別為焓和音速。

(3-42)~(3-45)式中的  $U_L$  以及  $U_R$  則是利用 MUSCL 法求出。





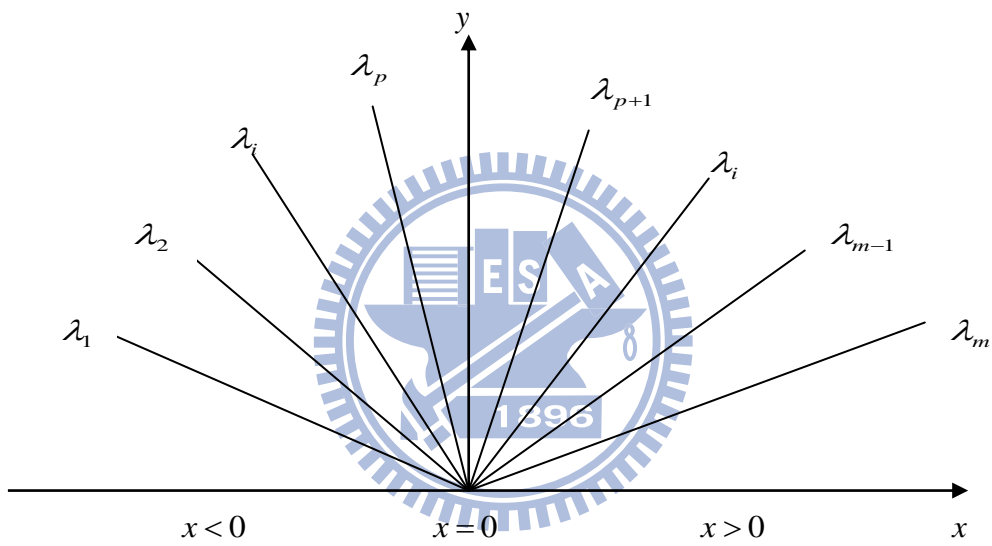


圖 3-1 黎曼問題特徵值結構圖

### 3-3、Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws(MUSCL)：

本論文使用其方程式如下：

$$u_{i+1/2}^L = u_i + 1/2 \Delta u_{i+1/2}^L \quad (3-47)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_i - 1/2 \Delta u_{i+1/2}^R \quad (3-48)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1/2}^L &= (1-\beta)(u_{i+1} - u_i) + \beta(u_i - u_{i-1}) + \theta^c(-u_{i-1} + 3u_i - 3u_{i+1} + u_{i+2}) \\ &+ \theta^d(-u_{i-2} + 3u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1}) \end{aligned} \quad (3-49)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1/2}^R &= (1-\beta)(u_{i+1} - u_i) + \beta(u_{i+2} - u_{i+1}) + \theta^c(-u_{i-1} + 3u_i - 3u_{i+1} + u_{i+2}) \\ &+ \theta^d(-u_i + 3u_{i+1} - 3u_{i+2} + u_{i+3}) \end{aligned} \quad (3-50)$$

其中(3-49)、(3-50)式中的  $\beta$ 、 $\theta^c$ 、 $\theta^d$  值可由表(3-1)中查得。代入不同的值可以得到不同的精度。本論文則是使用三階精度，以減少數值計算的消散性。

在程式中，高次項的插分法在不連續的情況下，容易使震盪變大，為了降低震盪，本研究在 MUSCL 法插分出來的方程式中加入 minmod limiter，用來確保程式不會發散。

因此(3-47)與(3-48)式需改寫如下：

$$u_{i+1/2}^L = u_i + 1/2 \min \text{mod}(\Delta u_{i+1/2}^L) \quad (3-51)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_i - 1/2 \min \text{mod}(\Delta u_{i+1/2}^R) \quad (3-52)$$

$$\min \text{mod}(x, y) = \text{Sgn}(x) \text{Max}\{0, \text{Min}[|x|], y \text{Sgn}(x)\} \quad (3-53)$$

表 3-1：精度係數值

$\beta$	$\theta^c$	$\theta^d$	Order
1/3	0	0	2
1/3	-1/6	0	3
1/3	0	-1/6	4
1/3	-1/10	-1/15	5
1/3	-1/10	-1/15	6



### 3-4、Preconditioning 法：

為了增加 N-S 方程式於低馬赫速可壓縮流的準確度與效率，因此於方程式中增加 preconditioning 法。其方程式如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-54)$$

上式為原始方程式，接著將保守形式 (conserved variables) 轉變成主要變數形式 (primitive variables)，其形式如下：

$$M \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-55)$$

其中  $U_p = [p \quad u \quad v \quad w \quad T]^T$ ， $M$  為轉換矩陣：

$$M = \frac{\partial U}{\partial U_p} = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \rho_p v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \rho_p w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ \rho_p H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-56)$$

其中  $\rho_p = \frac{\partial \rho}{\partial p}$ ； $\rho_T = \frac{\partial \rho}{\partial T}$

接著將(3-55)式的方程式乘上矩陣  $K$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(H - |V|^2) & -u & -v & -w & 1 \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

再將  $K$  與  $M$  相乘

$$KM = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-58)$$

將(3-58)式帶入(3-55)式，連續方程式：

$$\rho_p \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = S \quad (3-59)$$

在理想氣體中可將(3-59)再表示成

$$\frac{\gamma}{C^2} \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = S \quad (3-60)$$

其中  $C$  為聲速

由(3-60)式可以看出，在等密度條件下，由於  $\rho_p$  為零，(3-59)式將變成

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = S \quad (3-61)$$

上式即為不可壓縮流的連續方程式。

綜上所述，可以得知只要改變(3-58)式中的  $\rho_p$  項，利用當地流場速度 (local velocity) 的倒數取代，即可轉換系統中的特徵值，藉此改變低速情況下流場的聲速，使聲速與流場速度冪次級數(order)相同，系統不再受到 CFL 條件的限制，提高程式的計算效率。

利用  $\theta$  取代  $\rho_p$  項：

$$\theta = \left( \frac{1}{U_r^2} - \frac{1}{TC_p} \right) \quad (3-62)$$

$$U_r = \begin{cases} \varepsilon \times U_{\max} & \text{if } |u| < \varepsilon \times C \\ |u| & \text{if } \varepsilon \times C < |u| < C \\ C & \text{if } |u| > C \end{cases} \quad (3-63)$$

其中  $\varepsilon$  為一極小的值，約等於  $10^{-5}$ ，其主要是用來防止停滯點 (stagnation point) 在計算時所造成的奇異點 (singular point) 現象。對於黏制性流體而言， $U_r$  必須大於流體的當地擴散速度 (local diffusion velocity)，因此  $U_r$  還需加入下列限制：

$$U_r = \max \left( U_r, \frac{V}{\Delta x} \right)$$

將  $\theta$  帶入(3-58)式後，可得到一新矩陣  $\Gamma_{nc}$

$$\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-64)$$

經過上述推導之後，方程式從(3-54)式轉變如下：

$$\Gamma_{nc} \frac{\partial U_p}{\partial t} + K \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) = S \quad (3-65)$$

為了讓(3-65)式中的通量項再度轉換成保守形式，在乘上  $K^{-1}$

$$(K^{-1}\Gamma_{nc}) \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-66)$$

根據(3-66)式，定義

$$\Gamma = K^{-1}\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho}{T} \\ \theta u & \rho & 0 & 0 & \frac{-\rho u}{T} \\ \theta v & 0 & \rho & 0 & \frac{-\rho v}{T} \\ \theta w & 0 & 0 & \rho & \frac{-\rho w}{T} \\ \theta H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{-\rho}{T} H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-67)$$

最後方程式簡化成如下形式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-68)$$

$U_p$  為 primitive form  $[P, u, v, w, T]^T / J$ ，由於方程式在時間項經過改變，因此必須重新推

導 Roe 所提出的近似黎曼解。在(3-30)式中，可以觀察到  $F_{i+\frac{1}{2}}$  項，是由  $\frac{1}{2}(F(U_R) + F(U_L))$

的中央差分法加上為了解決不連續面問題的 artificial viscosity term  $\frac{1}{2}|\tilde{A}|\Delta U$  所組成。加

入 preconditioning 的方程式只需在 artificial viscosity term 做改變即可，其推導如下：

$$\begin{aligned} \Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} &= S \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) &= \Gamma^{-1} S \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left( A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} \right) &= \Gamma^{-1} S \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left( AM \frac{\partial U_p}{\partial x} + BM \frac{\partial U_p}{\partial y} + CM \frac{\partial U_p}{\partial z} \right) &= \Gamma^{-1} S \end{aligned} \quad (3-69)$$

其中  $M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$

所以 artificial viscosity terms 改寫如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_R + F_L) - \frac{1}{2} |\Gamma^{-1} AM| \Delta U_p \quad (3-70)$$

其中  $|\Gamma^{-1} AM| = KA \times |DA| \times KA^{-1}$

解完非黏滯性項之後，接著要解的是黏滯性項；在黏滯性項方面，採二階中央差分法。由於在尤拉方程式中計算的範圍皆為網格與網格之間的通量項，因此在黏滯性項方面，所需要得到的速度梯度項也必須是網格之間的通量項。下列以三維的 X 方向為例，圖 3-2 為其示意圖。

圖 3-2 中各編號所代表的位置分別為：

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow (i, j+1, k) ; 2 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k) ; 3 \rightarrow (i+1, j+1, k) ; \\ 4 &\rightarrow (i, j, k-1) ; 5 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k-1) ; 6 \rightarrow (i+1, j, k-1) ; \\ 7 &\rightarrow (i, j, k) ; 8 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k) ; 9 \rightarrow (i+1, j, k) ; \\ 10 &\rightarrow (i, j, k+1) ; 11 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k+1) ; 12 \rightarrow (i+1, j, k+1) ; \\ 13 &\rightarrow (i, j-1, k) ; 14 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j-1, k) ; 15 \rightarrow (i+1, j-1, k) ; \end{aligned}$$

其各速度梯度差分分別如下表示：

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\Delta U}{\Delta X} = \frac{U(9) - U(7)}{\Delta X} \quad (3-71)$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\Delta V}{\Delta X} = \frac{V(9) - V(7)}{\Delta X} \quad (3-72)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\Delta W}{\Delta X} = \frac{W(9) - W(7)}{\Delta X} \quad (3-73)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\Delta U}{2\Delta Y} = \frac{U(2) - U(14)}{2\Delta Y} \quad (3-74)$$

$$\text{其中 } U(2) = \frac{U(3) + U(1)}{2} ; U(14) = \frac{U(13) + U(15)}{2}$$

所以

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{U(3) + U(1)}{2}\right)}{2\Delta Y} - \frac{\left(\frac{U(13) + U(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{U(3) + U(1) - U(13) + U(15)}{4\Delta Y} \quad (3-75)$$

同理

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{V(3) + V(1)}{2}\right)}{2\Delta Y} - \frac{\left(\frac{V(13) + V(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{V(3) + V(1) - V(13) + V(15)}{4\Delta Y} \quad (3-76)$$

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{W(3) + W(1)}{2}\right)}{2\Delta Y} - \frac{\left(\frac{W(13) + W(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{W(3) + W(1) - W(13) + W(15)}{4\Delta Y} \quad (3-77)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\Delta U}{2\Delta Z} = \frac{U(11) - U(5)}{2\Delta Z} \quad (3-78)$$

$$\text{其中 } U(11) = \frac{U(10) + U(12)}{2} ; U(5) = \frac{U(4) + U(6)}{2}$$

所以

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\left(\frac{U(10) + U(12)}{2}\right)}{2\Delta Z} - \frac{\left(\frac{U(4) + U(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{U(10) + U(12) - U(4) + U(6)}{4\Delta Z} \quad (3-79)$$

同理

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\left(\frac{V(10) + V(12)}{2}\right)}{2\Delta Z} - \frac{\left(\frac{V(4) + V(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{V(10) + V(12) - V(4) + V(6)}{4\Delta Z} \quad (3-80)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\left(\frac{W(10) + W(12)}{2}\right)}{2\Delta Z} - \frac{\left(\frac{W(4) + W(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{W(10) + W(12) - W(4) + W(6)}{4\Delta Z} \quad (3-81)$$



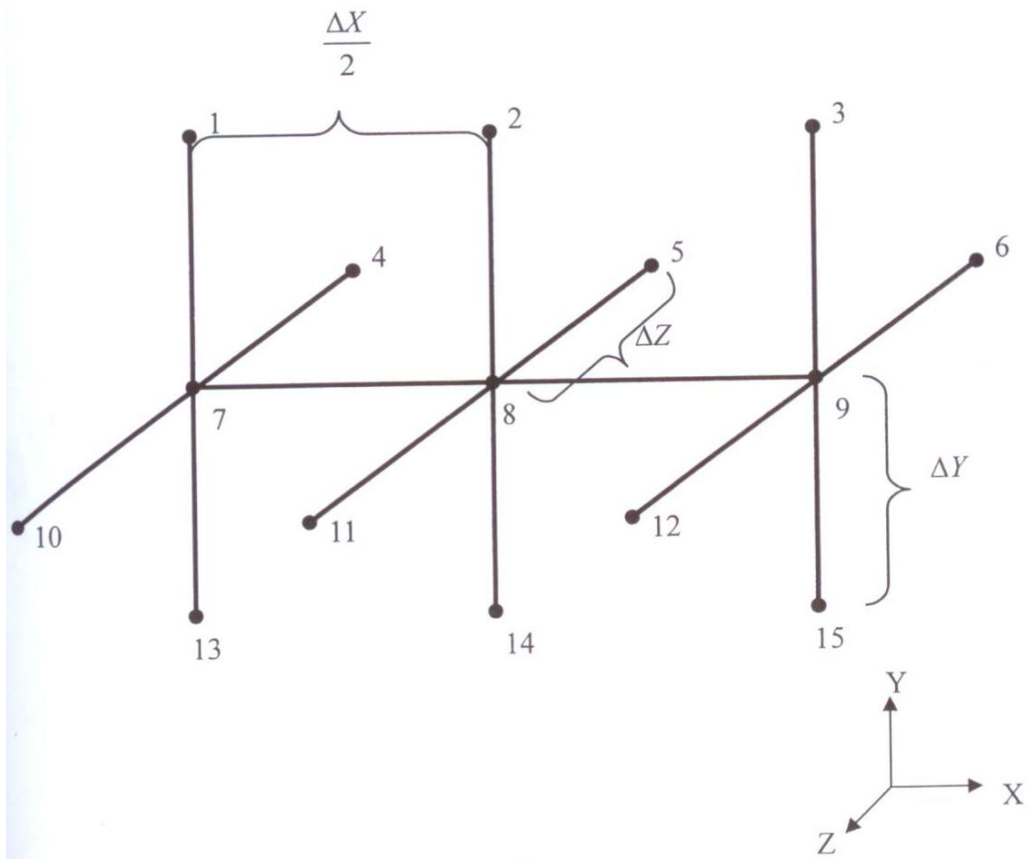


圖 3-2：差分示意圖

方程式(3-69)中的 Navier-Stokes 方程式在時間項方面遭到修改，利用修改後的方程式來計算暫態結果並不恰當，因此本程式再加入 dual time stepping，不僅讓程式在計算暫態結果方面較準確，更提高程式的效率，縮短計算時間。首先，先在原始 Navier-Stokes 方程式加入一虛擬時間項  $\partial U / \partial \tau$ ，稱為 artificial time term。方程式改變如下：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-82)$$

其中  $\tau$  即為 artificial time， $t$  為 physical time， $U$  為 conservative form  $[\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e]^T / J$

接著在 artificial time term 加入 preconditioning method：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-83)$$

最後對 artificial time term  $\partial U_p / \partial \tau$  採一階的有限差分離散，對 physical time term  $\partial U / \partial t$  採

二階的後項差分離散， $\frac{\partial F}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial G}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial H}{\partial z}$  利用中央插分法可得

$$\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta \tau} + \frac{3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2},j,k}^{k+1} - F_{i-\frac{1}{2},j,k}^{k+1}) + \frac{1}{\Delta y} (G_{i,j+\frac{1}{2},k}^{k+1} - G_{i,j-\frac{1}{2},k}^{k+1}) + \frac{1}{\Delta z} (H_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{k+1} - H_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{k+1}) = S \quad (3-84)$$

接著整理上式，先將其線性化

$$\Gamma \frac{\Delta U_p}{\Delta \tau} + \frac{3(U^n + M \Delta U_p) - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + \delta_x (F^k + A_p^k \Delta U_p) + \delta_y (G^k + B_p^k \Delta U_p) + \delta_z (H^k + C_p^k \Delta U_p) = S \quad (3-85)$$

其中  $\Delta U_p = U_p^{k+1} - U_p^k$ ， $M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$ ， $A_p = \frac{\partial F^k}{\partial U_p}$

$$F^{k+1} = F^k + A_p \Delta U_p。$$

$$U^{k+1} = U^k + M \Delta U_p$$

再將  $\Delta U_p$  項放置在等號左邊，其餘則在右邊：

$$\left[ \frac{I}{\Delta \tau} + \Gamma^{-1} M \frac{3}{2\Delta t} + \Gamma^{-1} (\delta_x A_p^k + \delta_y B_p^k + \delta_z C_p^k) \right] \Delta U_p = \Gamma^{-1} R^k \quad (3-86)$$

此處  $R^k = S - \left( \frac{3U^k - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} \right) - (\delta_x F^k + \delta_y G^k + \delta_z H^k)$ ， $I$  為單位矩陣。

其中  $M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$  ,  $A_p = \frac{\partial F}{\partial U_p}$  、  $B_p = \frac{\partial G}{\partial U_p}$  與  $C_p = \frac{\partial H}{\partial U_p}$  為 flux Jacobian 。

$k$  為 artificial time 中的疊帶次數， $n$  為 physical time 的計算階數。上述方程式，當 artificial time term 收斂時， $\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta \tau} = 0$ ，方程式即會回復到原始的 Navier-Stokes 方程式，並且包含著時間項，故程式可以計算暫態結果。本研究採用 LUSGS implicit 法計算時間方程式(3-82)，此法的優點除了收斂快速外，還有不需額外的 Artificial Dissipation 來幫助程式收斂。



### 3-5、LUSGS implicit method :

由 Yoon 等人提出 LUSGS implicit method

$$\tilde{A}_p = \Gamma^{-1} A_p^k, \tilde{B}_p = \Gamma^{-1} B_p^k, \tilde{C}_p = \Gamma^{-1} C_p^k$$

並將其分為兩部分:

$$\tilde{A}_p = \tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-, \tilde{B}_p = \tilde{B}_p^+ + \tilde{B}_p^-, \tilde{C}_p = \tilde{C}_p^+ + \tilde{C}_p^- \quad (3-87)$$

$$\text{其中 } \tilde{A}_p^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{A}_p^\pm | \lambda_{\tilde{A}} | I), \tilde{B}_p^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{B}_p^\pm | \lambda_{\tilde{B}} | I), \tilde{C}_p^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{C}_p^\pm | \lambda_{\tilde{C}} | I)$$

$\lambda_{\tilde{A}}, \lambda_{\tilde{B}}, \lambda_{\tilde{C}}$  分別為  $\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p$  中最大的特徵值。

將上三式帶入(3-86)

其中

$$\delta_x(\tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-) = \delta_x^- \tilde{A}_p^+ + \delta_x^+ \tilde{A}_p^- = \frac{A_{p,i}^+ - A_{p,i-1}^+}{\Delta x} + \frac{A_{p,i+1}^- - A_{p,i-1}^-}{\Delta x}$$

將上式帶入

$$\left[ \frac{I}{\Delta \tau} + \Gamma^{-1} M \frac{3}{2\Delta t} + \frac{A_{p,i}^+ - A_{p,i-1}^+}{\Delta x} + \frac{A_{p,i+1}^- - A_{p,i-1}^-}{\Delta x} + \frac{B_{p,i}^+ - B_{p,i-1}^+}{\Delta y} + \frac{B_{p,i+1}^- - B_{p,i-1}^-}{\Delta y} + \frac{A_{p,i}^+ - A_{p,i-1}^+}{\Delta z} + \frac{C_{p,i+1}^- - C_{p,i-1}^-}{\Delta z} \right] \Delta U_p = \Gamma^{-1} R^k \quad (3-88)$$

可將(3-88)式整理成

$$(L + D + U)\Delta U_p = \Gamma^{-1} R^k \quad (3-89)$$

其中

$$L = - \left[ \frac{1}{\Delta x} (\tilde{A}_p^+)_{i-1,j,k} + \frac{1}{\Delta y} (\tilde{B}_p^+)_{i,j-1,k} + \frac{1}{\Delta z} (\tilde{C}_p^+)_{i,j,k-1} \right]$$

$$D = \frac{I}{\Delta \tau} + \Gamma^{-1} M \frac{3}{2\Delta t} + \left\{ \frac{1}{\Delta x} [(\tilde{A}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{A}_p^-)_{i,j,k}] + \frac{1}{\Delta y} [(\tilde{B}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{B}_p^-)_{i,j,k}] + \frac{1}{\Delta z} [(\tilde{C}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{C}_p^-)_{i,j,k}] \right\}$$

$$U = \left[ \frac{1}{\Delta x} (\tilde{A}_p^-)_{i+1,j,k} + \frac{1}{\Delta y} (\tilde{B}_p^-)_{i,j+1,k} + \frac{1}{\Delta z} (\tilde{C}_p^-)_{i,j,k+1} \right]$$

$$\text{最後整理為 } (L + D)D^{-1}(D + U)\Delta U_p = \Gamma^{-1} R^k \quad (3-90)$$

上式可以用以下的步驟解出：

$$1. (L+D)\Delta U_p^* = \Gamma^{-1}R^k$$

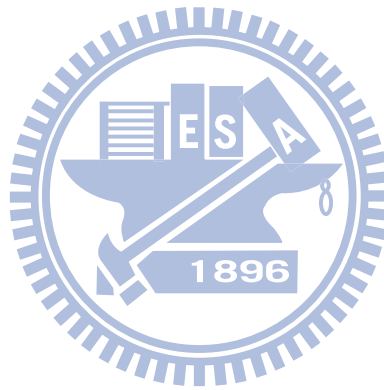
$$\text{其中 } \Delta U_p^* = D^{-1}(D+U)\Delta U_p^k$$

$$2. (D+U)\Delta U_p^k = D\Delta U_p^*$$

$$\Delta U_p^k = \Delta U_p^* - D^{-1}U\Delta U_p^k$$

$$3. U_p^{k+1} = U_p^k + \Delta U_p$$

4. 重複步驟一至三，直到  $\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta \tau} = 0$  則下一個物理時間項可求得。



### 3-6、非反射性邊界(Non-reflection Boundary)：

過去在模擬低速可壓縮流流場時，出口條件多利用速度完全發展流及大氣壓力邊界，然而此上述的出口條件設定方式，由於壓力波極易在出口處反射回計算區域而影響收斂，因此不適用於低速可壓縮流；且完全發展流出口在物理模式上需有一定長寬比例，將使網格需求增加。

再高速可壓縮流的情形下，Poinsot 與 Lele [26]發展的 LODI(local one-dimensional inviscid relations)法使非反射邊界適用於管道的進出口兩端。但因未使用 preconditioning 法，因此此法並無法適用於低速可壓縮流中。為了讓非反射性邊界適用於低速可壓縮流的情形下，需重新推導 LODI 方程式於邊界上，故本文在進出口兩端條件採用 Fu 和 Li 等人[10]改善的非反射性邊界條件，可適用於低速可壓縮流中，且大幅減少網格總數及計算時間。

除了壁面條件外，管道進出端的邊界條件則分為非反射性邊界與週期性邊界。再垂直與水平管道的自然對流模擬，採用非反射性邊界於管道兩端，其方法描述如下：

考慮一維 Navier-Stokes 方程式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-91)$$

接著將兩邊同乘  $\Gamma^{-1}$

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-92)$$

其中  $\Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$  可在轉換如下：

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} = \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial U_p} \frac{\partial U_p}{\partial x} = \Gamma^{-1} A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (3-93)$$

將方程式(3-93)帶入方程式(3-91)，便可得到 primitive form

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} = 0 \quad (3-94)$$

再將  $\Gamma^{-1} A_p$  作相似轉換以得到特徵速度

$$\Gamma^{-1}A_p = K\lambda K^{-1} \quad (3-95)$$

此處  $K$  為特徵向量矩陣， $\lambda$  為  $\Gamma^{-1}A_p$  的特徵值矩陣且表示流場中的特徵速度。根據 Dennis 等人[30]，特徵值下所示：

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \\ u' + c' \\ u' - c' \end{pmatrix} \quad (3-96)$$

此處  $u' = \frac{(\Theta+1)u}{2}$ 、 $c' = \frac{\sqrt{u^2(\Theta-1)^2 + 4\Theta c^2}}{2}$ ，其中  $\Theta \approx 100M^2$ 。

接著讓

$$L = \lambda K^{-1} \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (3-97)$$

$L$  如下所示：

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\rho\gamma} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \gamma \frac{\partial P}{\partial x} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} \\ u \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ (u' + c') \left[ \frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u' - c' - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ (u' - c') \left[ \frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u' + c' - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \end{pmatrix} \quad (3-98)$$

$L$  矩陣的物理意義為邊界條件上為波的強度隨時間變化的方程式。

根據方程式(3-96)， $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 、 $L_4$  與  $L_5$  分別為  $u$ 、 $u$ 、 $u$ 、 $u' + c'$  與  $u' - c'$ 。將方程式(3-97)帶入方程式(3-94)，可在表示如下：

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + KL = 0 \quad (3-99)$$

將方程式(3-99)展開可得壓力、速度與溫度在邊界條件上的方程式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{1}{2c'}[L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2\rho c'}(L_4 - L_5) &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial \tau} - L_3 &= 0 \\
\frac{\partial w}{\partial \tau} + L_2 &= 0 \\
\frac{\partial T}{\partial \tau} + L_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{2c'}[L_4(u' + c' - y) - L_5(u' - c' - y)] &= 0
\end{aligned} \tag{3-100}$$

方程式(3-100)可在離散如下：

$$\begin{aligned}
p^{k+1} &= p^k - \frac{\Delta t}{2\rho c'}[L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] \\
u^{k+1} &= u^k - \frac{\Delta t}{2\rho c'}(L_4 - L_5) \\
v^{k+1} &= v^k + L_3 \Delta t \\
w^{k+1} &= w^k - L_2 \Delta t \\
T^{k+1} &= T^k - L_1 \Delta t + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma + 1}{\gamma} (p^{k+1} - p^k)
\end{aligned} \tag{3-101}$$

根據圖 3-3(a)，如果流體從管內往大氣流出時， $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  與  $L_4$  方向與流體流動方向相同，因此可利用方程式(3-97)定義  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  與  $L_4$ 。由於  $u' - c'$  小於零的關係， $L_5$  的方向則與流體流動方向相反。由於壓力於極遠處的變化為零，所以  $\frac{\partial p}{\partial \tau} = 0$ ，方程式(3-100)

將如下：

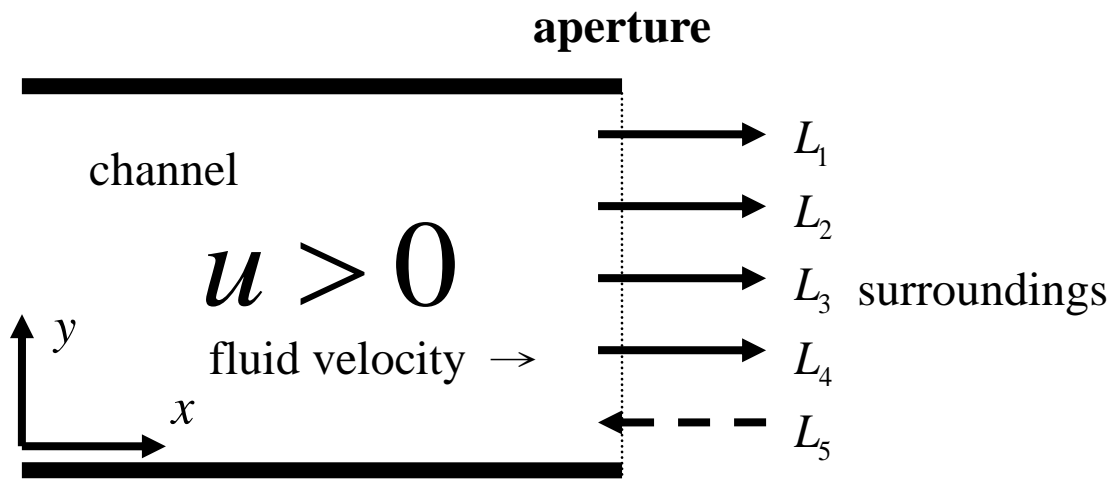
$$\frac{1}{2c'}[L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] = 0 \tag{3-102}$$

因此  $L_5$  可定義如下：

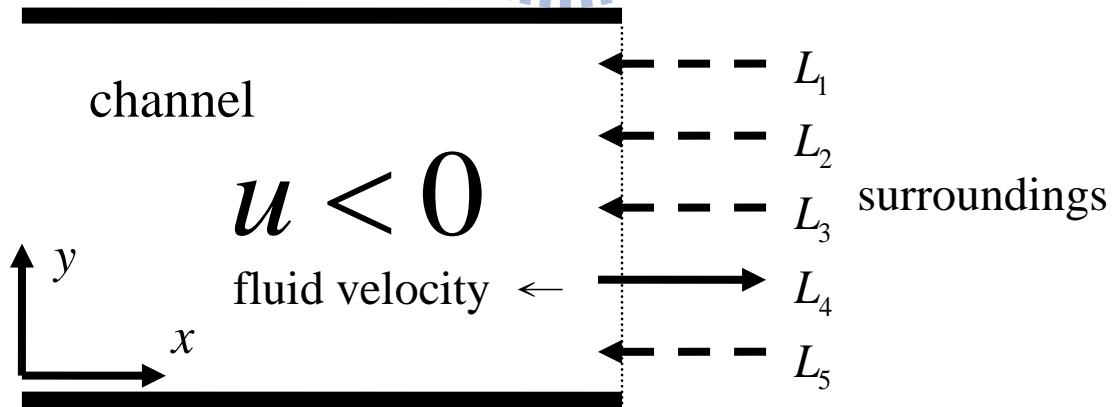
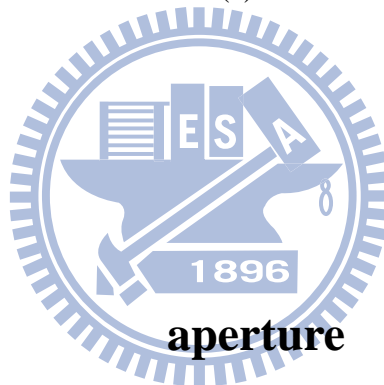
$$L_5 = \frac{(u' + c' - u)}{(u' - c' - u)} L_4 \tag{3-103}$$

相反地，圖 3-3(b)則為流體從大氣環境往管內流動。 $L_4$  可由方程式(3-100)直接求得，由於非反射性邊界的關係， $L_1$ 、 $L_2$  與  $L_3$  則設定為 0。 $L_5$  則可由方程式(3-103)得到。





(a)



(b)

圖 3-3  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 、 $L_4$ 與 $L_5$ 於管道兩端的方向性示意圖

### 3-7、週期性邊界：

而週期性邊界條件設定如下。為了讓流場計算結果達到完全發展流，通常需要設定相當長度的管長，造成計算範圍增加，時間過長。為了解決此問題，週期性邊界為一種較為簡單的邊界條件設法。其優點為快速不耗費計算時間，缺點為當計算的流場若進出口幾何形狀不相同時便無法使用。所以較常被用來計算平板流或是管流等完全發展的流場。

其前側條件設置的方法如下：

$$\begin{aligned}P(i, j, 0) &= P(i, j, nz) \\u(i, j, 0) &= u(i, j, nz) \\v(i, j, 0) &= v(i, j, nz) \\w(i, j, 0) &= w(i, j, nz) \\T(i, j, 0) &= T(i, j, nz)\end{aligned}\tag{3-104}$$

後側條件設置的方法如下：

$$\begin{aligned}P(i, j, nz+1) &= P(i, j, 1) \\u(i, j, nz+1) &= u(i, j, 1) \\v(i, j, nz+1) &= v(i, j, 1) \\w(i, j, nz+1) &= w(i, j, 1) \\T(i, j, nz+1) &= T(i, j, 1)\end{aligned}\tag{3-105}$$

其中0代表進口的邊界虛格點(ghost cell)， $nz+1$ 代表出口的邊界虛格點，1則為進口的邊界格點， $nz$ 則為出口的邊界格點。其相對位置如圖 3-4 所示。





圖 3-4 週期性邊界條件設定

## 第四章 結果與討論

由於過去有關過渡流模擬之研究大多為強制對流下給定已知流量及擾動，此種方法對於純自然對流下誘導產生過渡流的情形無法得知，由於自然對流無法預先得知進口流量，其流量為高溫壁面加熱流體驅動造成的進口流量，而過去利用 Bossinesq 假設所模擬的自然對流現象並不適用於溫差大於 30K 的範圍，實際工業應用上會受到限制，故本研究以可壓縮流針對三種不同加熱長度 ( $l_1 = 0.02$ 、 $0.06$ 、 $0.11m$ ) 與兩平板間距寬度

( $h = 0.04m$ ) 比 ( $R = \frac{l_1}{h}$ ) 之三維水平平行平板進行暫態模擬，一共有三種長寬比，分別為

$R = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{2}$ 、 $\frac{11}{4}$ ，以下將分開討論說明。

而在程式計算時為有因次的計算，但是輸出的數據在作圖時轉為無因次的表示法，主要是為了方便討論與使用無因次之參數。以下為無因次化結果：

$$X = \frac{x}{l_3}, Y = \frac{y}{l_3}, Z = \frac{z}{l_3}$$

$$V_{mag} = \sqrt{(u)^2 + (v)^2 + (w)^2}$$

$$t^* = t \frac{\mu_0}{\rho_0 h^2}$$



在模擬計算之前，為求在此物理模型下能獲得精確之計算結果，而不使用過多網格而致花費時間過長，故需作網格測試以期能使用較少網格數而得最佳計算效率。而為了檢驗網格的適當性，共做了三種網格數目測試，在網格大小依次序為  $x \times y \times z$ ，分別為  $190 \times 120 \times 10$ 、 $220 \times 160 \times 10$ 、 $250 \times 200 \times 10$  三種，來做沿高溫壁面上中間位置之局部時間平均紐塞數分布圖來觀察。其中局部時間平均紐塞數  $\overline{Nu_x}$  的定義如下式：

$$\overline{Nu_x} = \frac{1}{t} \int_t \frac{h}{k_0(T_h - T_c)} [k(T) \frac{\partial T}{\partial y}]_{wall} dt \quad (4-1)$$

如圖 4-1 所示，可觀察到  $190 \times 120 \times 10$  的結果與其餘結果差異較大，而  $220 \times 160 \times 10$  與  $250 \times 200 \times 10$  的結果相當接近，為了節省計算時間上的耗費，故採用兩者中網格數較小的  $220 \times 160 \times 10$  為模擬條件。

在此模擬中同時考慮可壓縮性與溫度對流體黏度之影響，故 Rayleigh 數定義如下：

$$Ra = \text{Pr} \frac{g \rho_0^2 (T_h - T_c) h^3}{T_0 \mu(T)^2} \quad (4-2)$$

而 Rayleigh 數原定義所使用特徵長度的 ( $h^3$ ) 無法表示差異，故加入  $R = \frac{l_1}{h}$  為修正 Rayleigh 數 ( $Ra^*$ ) 定義如下：

$$Ra^* = \text{Pr} \frac{g \rho_0^2 (T_h - T_c) h^3 l_1}{T_0 \mu(T)^2 h} \quad (4-3)$$

接下來討論為長寬比  $R = \frac{1}{2}$ ，修正 Rayleigh 數約  $1.58 \times 10^6$  的結果。圖 4-2a 為  $t = 0.034s$  時，流體的溫度受到加熱，有了些微的升高。此時體積開始膨脹，因此平行平板兩端的流體被擠出至大氣環境。其流線如圖 4-2b 所示。圖 4-2c 則為壓力圖，由於位於加熱壁面附近較輕的流體膨脹的緣故，開始擠壓上方的流體，迫使上方流體往平行平板兩邊流出。

圖 4-3 為  $t = 0.45s$ ，由於自然對流效應的影響逐漸增大，讓溫度逐漸往左右邊扭曲，在加熱壁面附近也開始產生回流，如圖 4-3b 所示。由於加熱壁面的流體吸收熱量後開始膨脹，接著擠壓平行平板上方流體，讓流體從平行平板兩端溢出。由於回流的關係，造成加熱壁面附近的低壓，因此壓力如圖 4-3c 所示。

圖 4-4 為  $t = 3.45s$ ，由圖 4-4a 可觀察到溫度圖受到自然對流的影響，呈現扭曲的狀態。圖 4-4b 則可觀察到，在平行平板中，上方流體從平行平板流向大氣環境，下方則從大氣環境流向平行平板內，此分佈一直延伸至平行平板出口兩端。而壓力分佈則如圖 4-4c 所示，上方較大氣壓力為大，但壓差逐漸往平行平板兩端減少，下方則呈現相反的現象。此種發生於邊界上的現象稱之為雙反射現象(dual-reflection phenomenon)。

圖 4-5 為  $t = 3.95s$ ，觀察可發現到此與上張結果類似，流場已漸趨穩定。

接下來討論為長寬比  $R = \frac{3}{2}$ ，修正 Rayleigh 數約  $4.73 \times 10^6$  的結果。圖 4-6 為  $t = 0.1s$  時，流體的溫度受到加熱。此時體積開始膨脹，因此平行平板兩端的流體被排出至大氣環境，而在加熱區兩端點有小渦流。

圖 4-7 為  $t = 0.35s$ ，由於自然對流效應的影響逐漸增大，讓溫度逐漸往平行平板左右邊扭曲，在加熱壁面附近也開始產生回流並且逐漸往外推出，如圖 4-3b 所示。

圖 4-8 為  $t=1.35s$ ，由圖 4-7a 可觀察到溫度圖受到自然對流的影響，呈現扭曲的狀態，而碰到絕熱頂板後，加熱流體由左右兩邊上部出口排出。圖 4-8b 則可觀察到，在平行平板中，上方流體從平行平板流向大氣環境，下方則從大氣環境流向平行平板內，此分佈一直延伸至平行平板兩端。

圖 4-9 為  $t=2.25s$ ，由圖 4-9a 可觀察到在加熱面冷空氣由下方外界環境吸入並且逐漸加溫，而在中間匯集，累積熱能。圖 4-9b 則可觀察到，在平行平板中，上方流體從平行平板流向大氣環境，下方則從大氣環境流向平行平板內，並在底部加熱面形成兩個對稱小渦流。

圖 4-10 為  $t=2.7s$ ，由圖 4-10a 可觀察到在加熱面空氣在中間匯集，累積熱能，使密度減少，由於浮力效應造成接近高溫壁面流體向上，進而帶動下方部分流體吸入。圖 4-10b 則可觀察到，在平行平板中，在底部加熱面形成兩個對稱小渦流，往上方移動。圖 4-10c 也觀察到絕熱壁面有對稱低壓區。

圖 4-11 為  $t=3.6s$ ，由圖 4-11a 由於浮力效應造成接近高溫壁面流體向上，而碰到絕熱頂板後，加熱流體由左右兩邊上部出口排出。圖 4-11b 則可觀察到，在平行平板中，兩個對稱小渦流，往左右兩邊出口處移動。圖 4-11 也觀察到對稱低壓區也隨著往左右兩出口處分佈。

圖 4-12 為  $t=4.55s$ ，與圖 4-9 時很相近，可觀察到在加熱面冷空氣由下方外界環境吸入並且逐漸加溫，而在中間匯集，累積熱能。圖 4-9b 則可觀察到底部加熱面形成兩個對稱小渦流。而在  $t=3.6s$  之後不斷形成圖 4-9 至圖 4-12 的類週期性運動。

接下來討論為長寬比  $R = \frac{11}{4}$ ，修正 Rayleigh 數約  $8.66 \times 10^6$  的結果。圖 4-13 為  $t=0.6s$ ，由圖 4-13a 可觀察到在加熱面冷空氣由下方外界環境吸入並且逐漸加溫，左右兩側因為加熱距離長，浮力效應造成流體尚未在中間匯集即向上流動，而中央加熱面也有流體向上流動趨勢。圖 4-13b 則可觀察到，在平行平板中，上方流體從平行平板流向大氣環境，下方則從大氣環境流向平行平板內，並在底部加熱面形成四個對稱小渦流。

圖 4-14 為  $t=0.75s$ ，由圖 4-14a 可觀察到在加熱面高溫空氣中央部分因密度減小向

上移動外，而兩側高溫氣體亦向上移動，由於內側中央部分已有向上移動的流體，故兩側高溫流體不但向上並且向出口處擴散。圖 4-14b 則可觀察到，在平行平板中，在中央底部加熱面兩個對稱小渦流，往上方移動，並且向左右兩側出口排出，而外側兩渦流受到擠壓。

圖 4-15 為  $t=0.8s$ ，由圖 4-15a 可觀察到在加熱面高溫空氣中央部分接觸絕熱頂板，而兩側高溫氣體則持續向出口處擴散。圖 4-15b 則可觀察到，在中央底部加熱面兩個對稱小渦流，並且向左右兩側出口排出後，而外側兩渦流向上移動。

圖 4-16 為  $t=1s$ ，由圖 4-16a 加熱面空氣在中間匯集，累積熱能，加熱流體由左右兩邊上部出口排出。圖 4-16b 則可觀察到，外側兩渦流往上方移動，並且向左右兩側出口排出。

圖 4-17 為  $t=1.25s$ ，由圖 4-17a 可觀察到溫度圖受到自然對流的影響，而碰到絕熱頂板後，加熱流體由左右兩邊上部出口排出。圖 4-17b 則可觀察到，在平行平板中，上方流體從平行平板流向大氣環境，下方則從大氣環境流向平行平板內，此分佈一直延伸至平行平板兩端。

圖 4-18 為  $t=7.55s$ ，由圖 4-18a 可觀察到溫度圖受到自然對流的影響，呈現扭曲的狀態。圖 4-17b 則可觀察到，在平行平板中，上方流體從平行平板流向大氣環境，而流線擺向右方，流場已不對稱，此分佈一直延伸至平行平板兩端，而壓力分佈則如圖 4-18c 所示，上方較大氣壓力為大，下方反之，但左側下方低壓分佈較大。

圖 4-19 為  $t=7.65s$ ，由圖 4-19a 可觀察到溫度圖受到上方流體流向的影響，呈現往左偏擺分佈的狀態。圖 4-19b 則可觀察到，在平行平板中，上方流線擺向左方，流線隨時態而左右偏擺。而壓力分佈則如圖 4-19c 所示，右側下方低壓分佈較大。

圖 4-20 為將三個案例的流場速度，根據其特徵長度去換算為雷諾數，而雷諾數其表示為：

$$\text{Re} = \frac{\rho V_{\text{mag}} h}{\mu(T)} \quad (4-4)$$

可以發現在長寬比  $R = \frac{11}{4}$ 、修正 Rayleigh 數約  $8.66 \times 10^6$  的結果中，有部分流場的等效雷



諾數已超過 900，故其流場不穩定。長寬比  $R = \frac{3}{2}$ 、修正 Rayleigh 數約  $4.73 \times 10^6$  的結果中，有部分流場的等效雷諾數約為 700，故其流場較不穩定，且有類週期性運動。而反之觀察長寬比  $R = \frac{1}{2}$ 、修正 Rayleigh 數約  $1.58 \times 10^6$  的結果，整個流場的等效雷諾數皆小於 500，所以流場非常穩定。

而圖 4-21 為內部質量 ( $m$ ) 隨時態變化圖，而內部質量 ( $m$ ) 其表示為：

$$m = \iiint_{x y z} \rho(P, T) dx dy dz \quad (\text{kg}) \quad (4-5)$$

可觀察出在一開始加熱時因熱膨脹，故內部質量皆為向外流出，而長寬比  $R = \frac{11}{4}$ 、修正 Rayleigh 數約  $8.66 \times 10^6$  可觀察出因加熱長度為最大，故向外流出質量較多，且內部質量進出變化較大，而比  $R = \frac{1}{2}$ 、修正 Rayleigh 數約  $1.58 \times 10^6$  可觀察出因加熱長度為最小，故向外流出質量較小，且內部質量進出變化較穩定。

圖 4-22 為三個模擬的沿  $x$  方向加熱壁面，時間平均局部紐塞數  $\overline{Nu}_x$  之比較，可觀察出因邊際效應的關係，兩側紐塞數分佈較高，而越接近中心而紐塞數分佈逐漸降低，其中可以看到在長寬比  $R = \frac{1}{2}$ 、修正 Rayleigh 數約為  $1.58 \times 10^6$  的局部紐塞數較高，熱傳效果較好。而圖 4-23 為整個加熱壁面的紐塞數平均隨時間變化的比較圖，其中  $\overline{Nu}$  的表示式為：

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \iint_{x y} Nu_x dx dy \quad (4-6)$$

可以看出在長寬比  $R = \frac{1}{2}$ 、修正 Rayleigh 數約  $1.58 \times 10^6$  的模擬中其熱傳效果最明顯，而

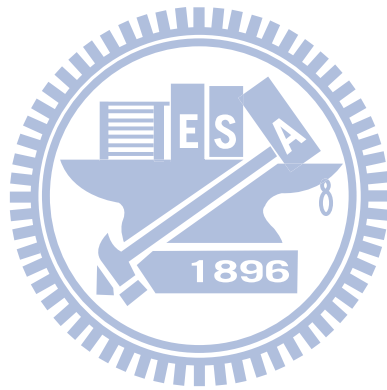
在圖 4-24 中為比較三個模擬的加熱面上一段時間的平均剪應力  $\overline{\tau}$ ，其表示式為：

$$\overline{\tau} = \frac{1}{t} \int_t \mu(T) \frac{\partial u}{\partial y} dt \quad (\text{kg} / \text{m} \cdot \text{s}^2) \quad (4-7)$$

在底部高溫壁面時間平均剪應力之比較圖中，可發現其為相反對稱，因左右入口吸入流體方向相反所致。而平均而論， $Ra^* = 8.66 \times 10^6$  的剪應力分布較為大在修正 Rayleigh 數較大的情形下其加熱面上的剪應力較大。而圖 4-25 為頂部絕熱壁面時間平均剪應力之



比較圖，在此圖中  $R = \frac{11}{4}$ 、修正 Rayleigh 數約  $8.66 \times 10^6$  的剪應力較大。此對流場產生不穩定有一定的影響。



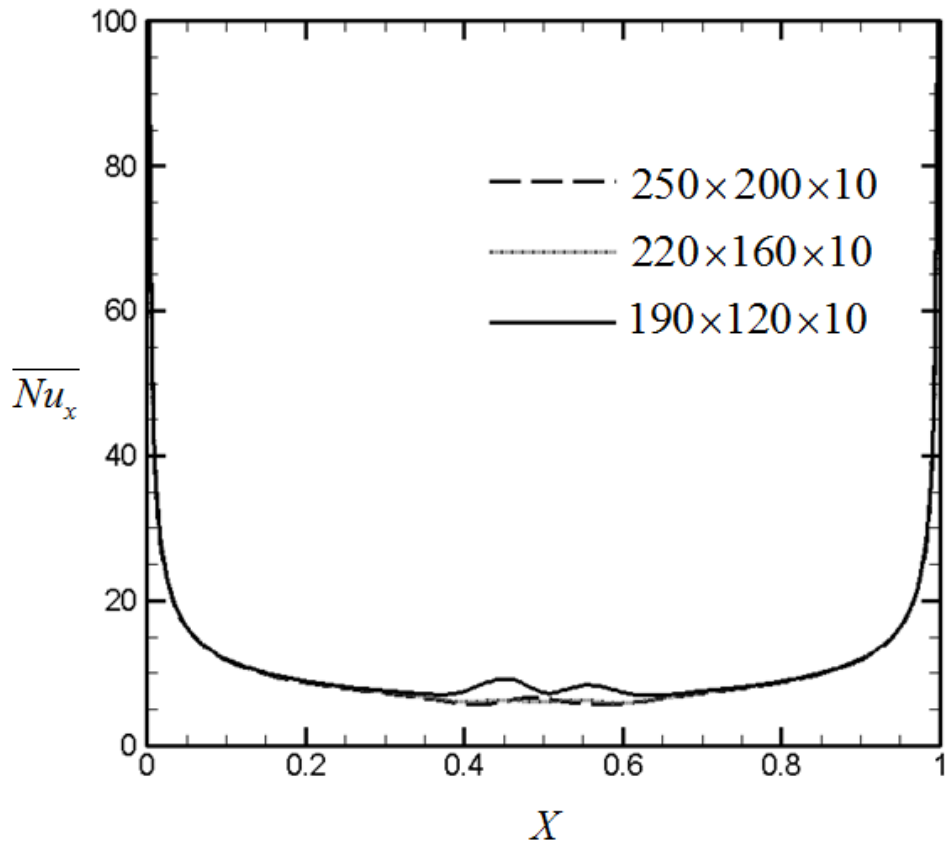
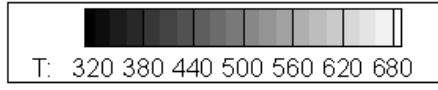
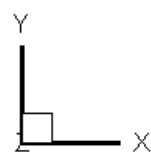
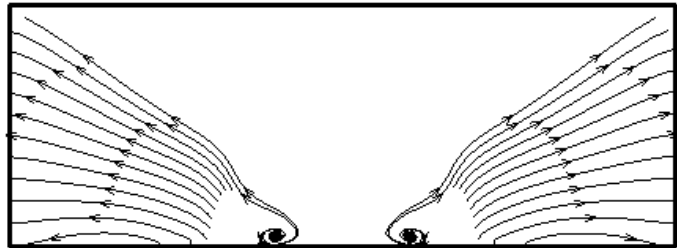


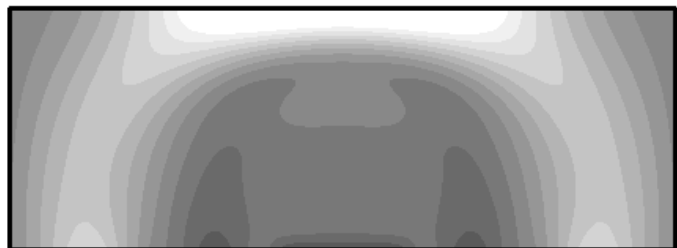
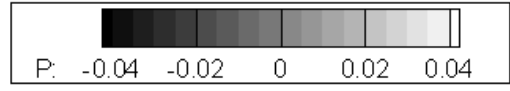
圖 4-1 網格測試圖



(a) thermal contour



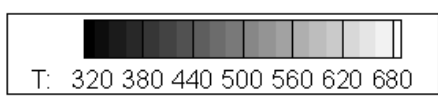
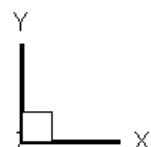
(b) streamlines



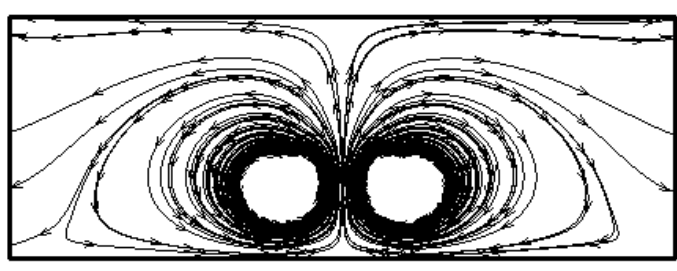
(c) pressure contour

$t = 0.035s$

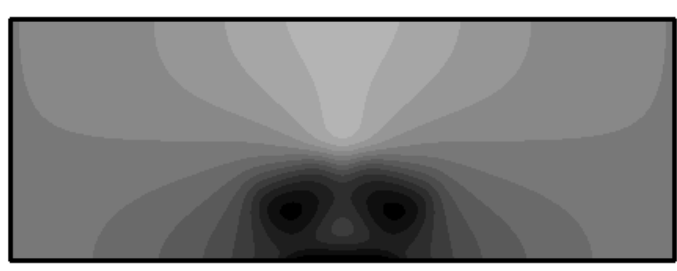
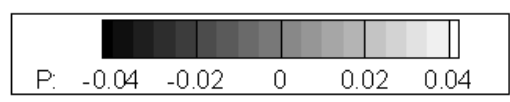
圖 4-2  $Ra^* = 1.58 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



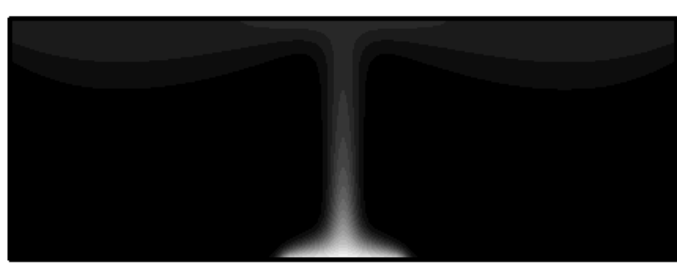
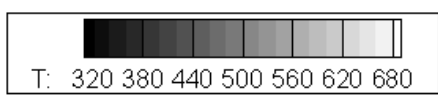
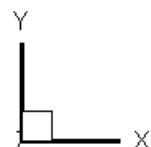
(b) streamlines



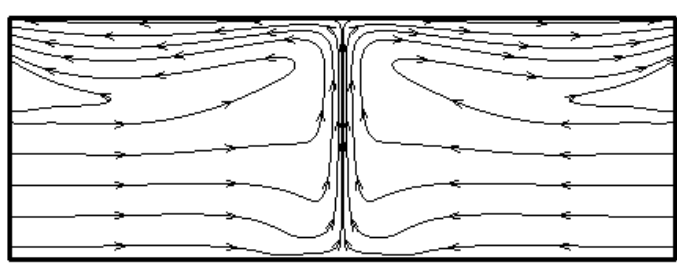
(c) pressure contour

$t = 0.45s$

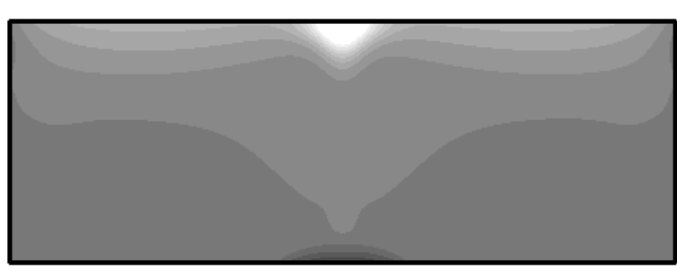
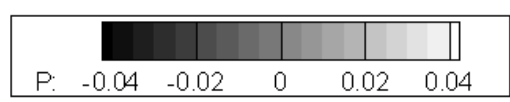
圖 4-3  $Ra^* = 1.58 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



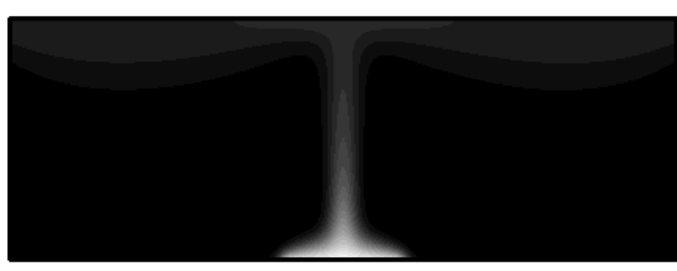
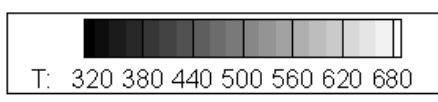
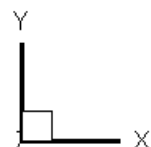
(b) streamlines



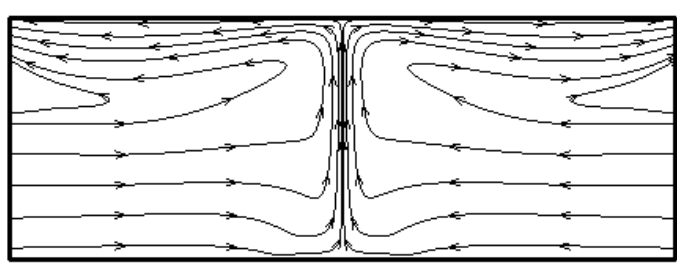
(c) pressure contour

$t = 3.45s$

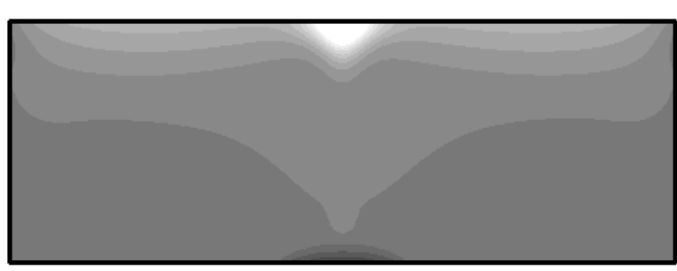
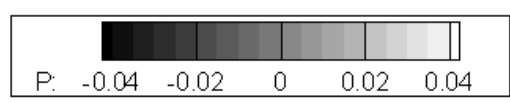
圖 4-4  $Ra^* = 1.58 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



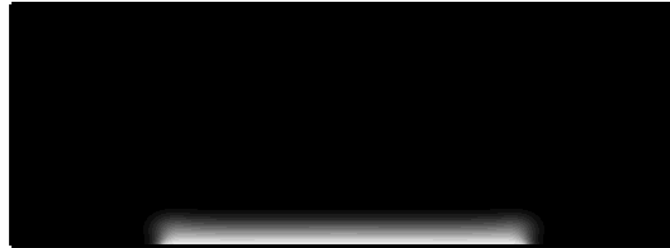
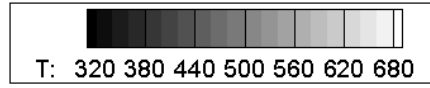
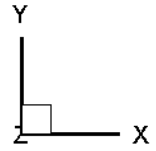
(b) streamlines



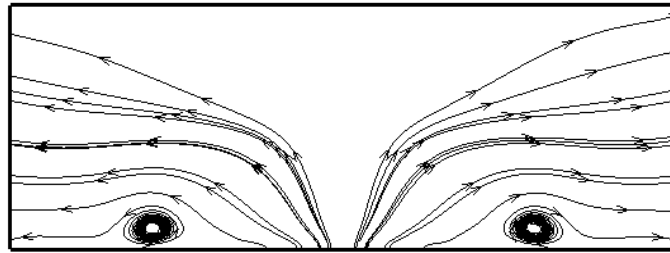
(c) pressure contour

$t = 3.95s$

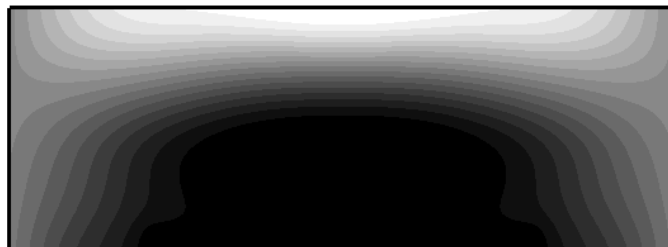
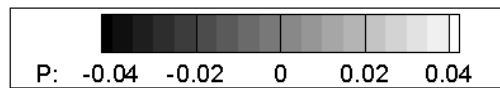
圖 4-5  $Ra^* = 1.58 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



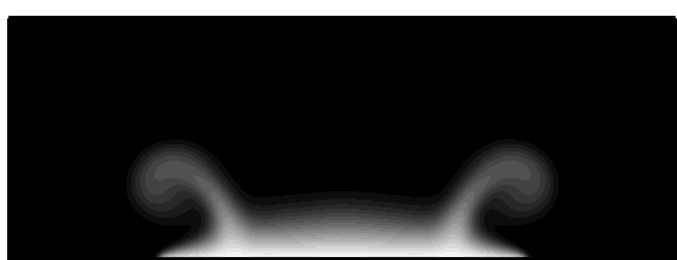
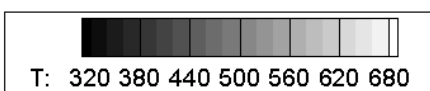
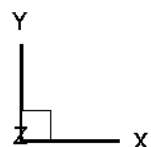
(b) streamlines



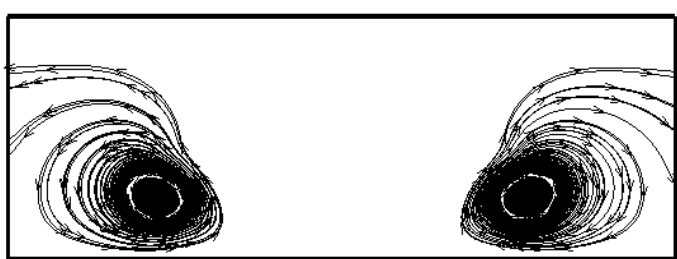
(c) pressure contour

$t = 0.1s$

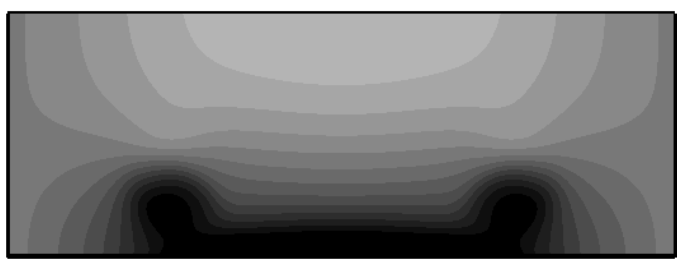
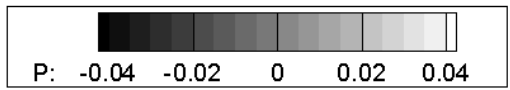
圖 4-6  $Ra^* = 4.73 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



(b) streamlines

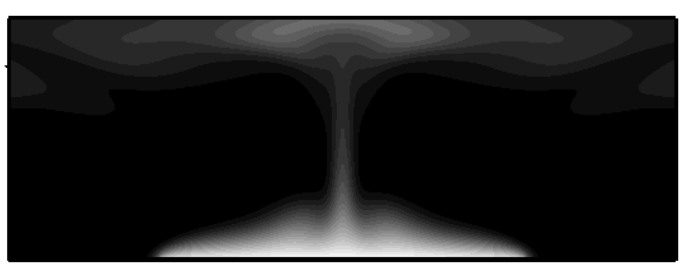
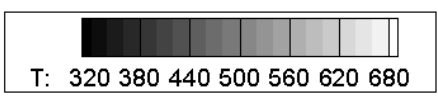
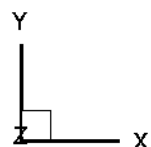


(c) pressure contour

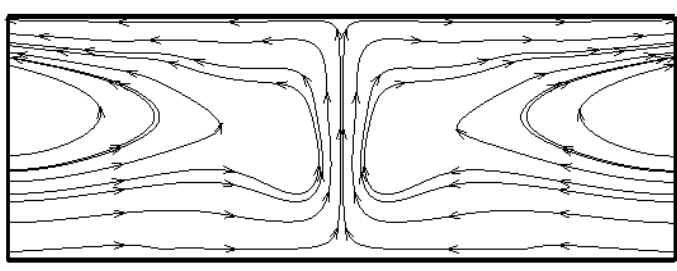
$t = 0.35s$

圖 4-7  $Ra^* = 4.73 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖

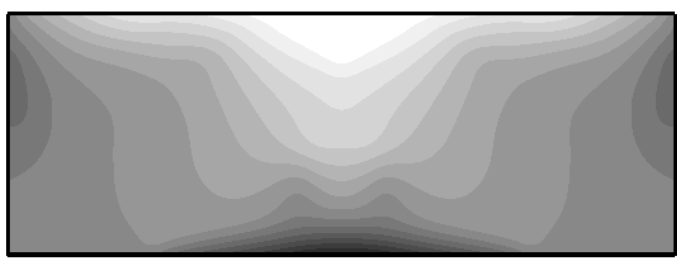
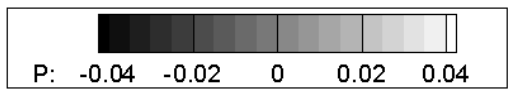




(a) thermal contour



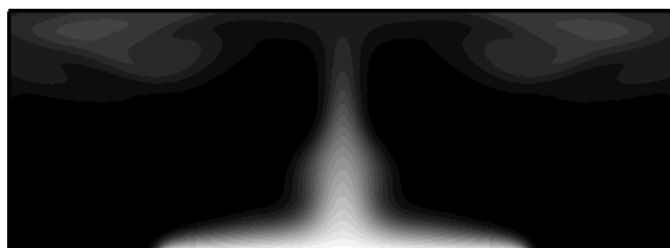
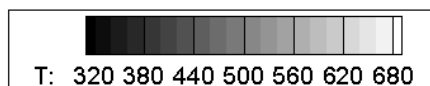
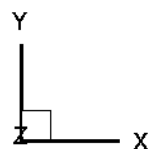
(b) streamlines



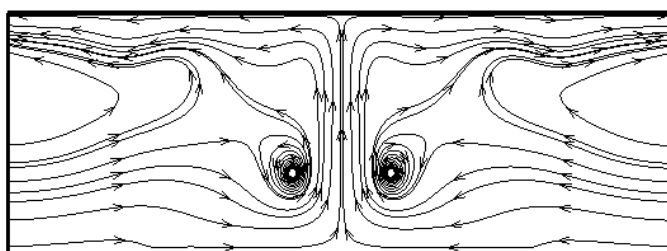
(c) pressure contour

$t = 1.35s$

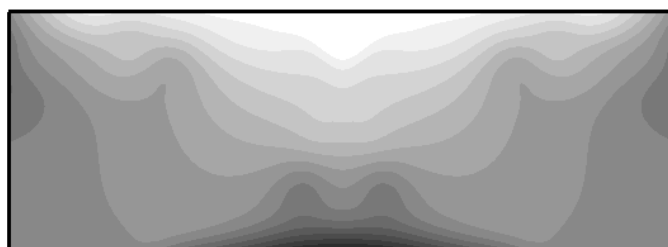
圖 4-8  $Ra^* = 4.73 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



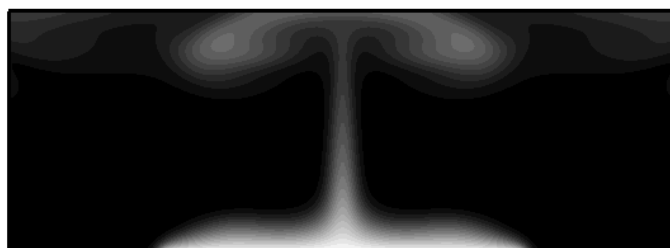
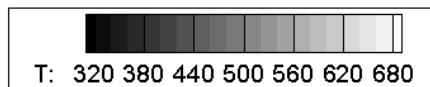
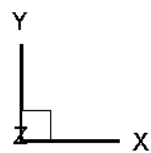
(b) streamlines



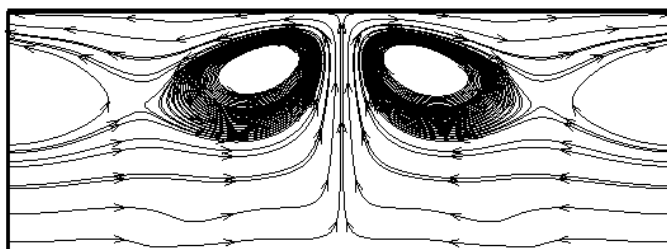
(c) pressure contour

$$t = 2.55s$$

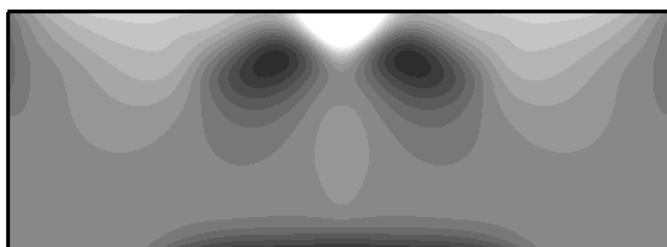
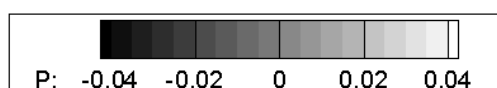
圖 4-9  $Ra^* = 4.73 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



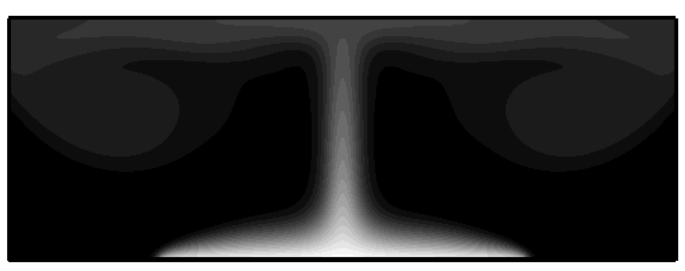
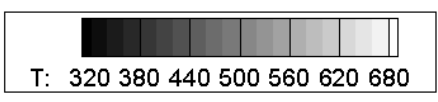
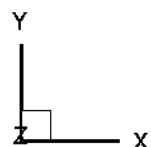
(b) streamlines



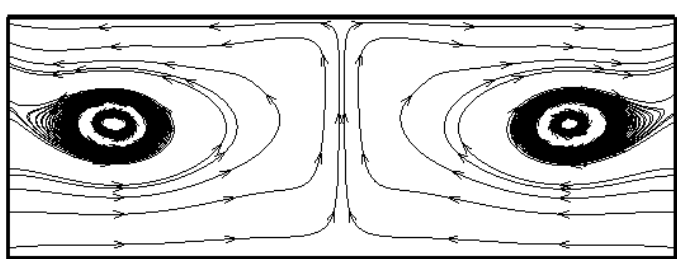
(c) pressure contour

$t = 2.7s$

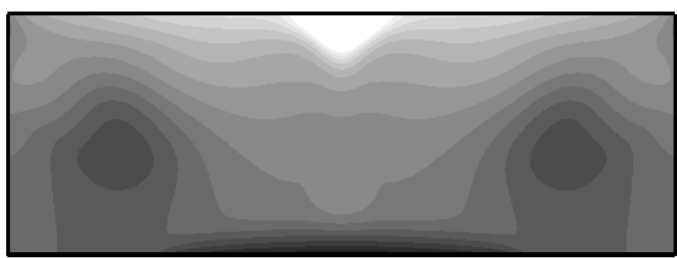
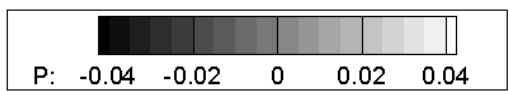
圖 4-10  $Ra^* = 4.73 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



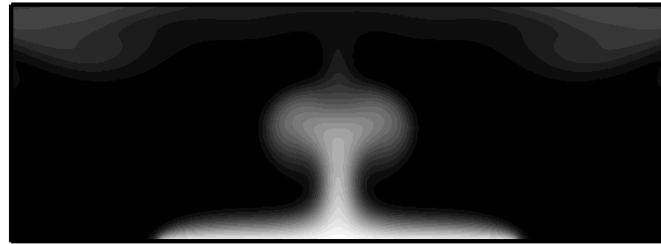
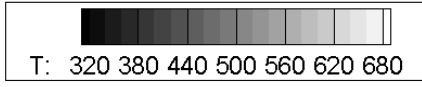
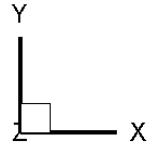
(b) streamlines



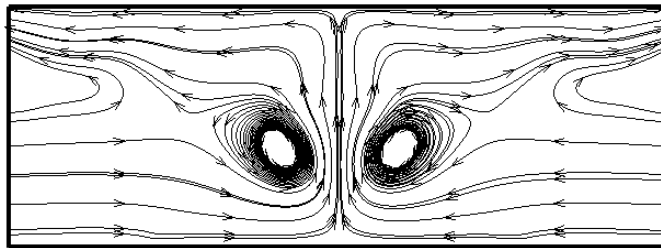
(c) pressure contour

$t = 3.6s$

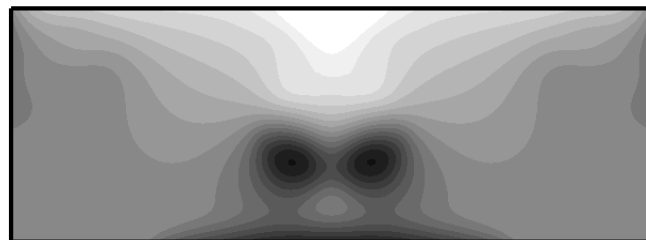
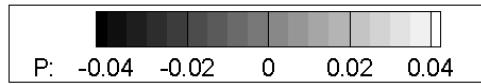
圖 4-11  $Ra^* = 4.73 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



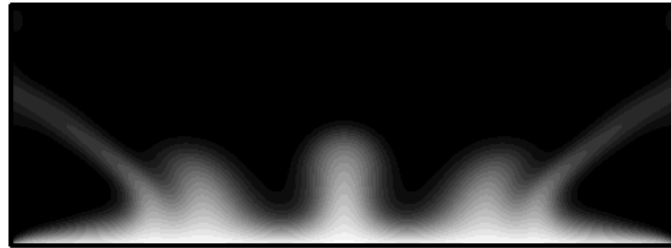
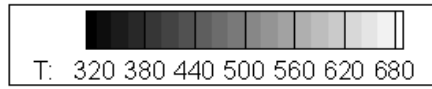
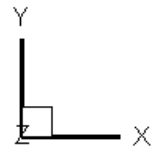
(b) streamlines



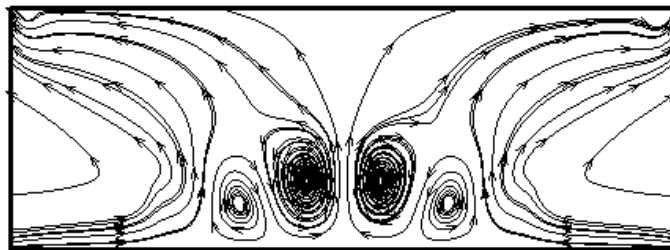
(c) pressure contour

$t = 4.55s$

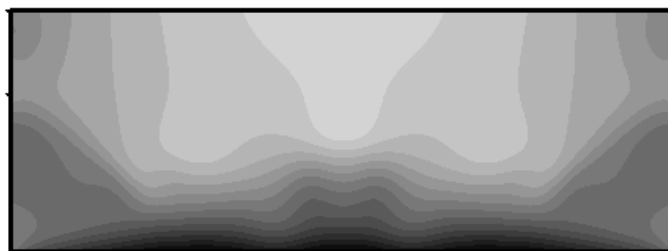
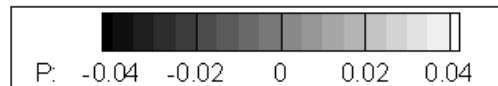
圖 4-12  $Ra^* = 4.73 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



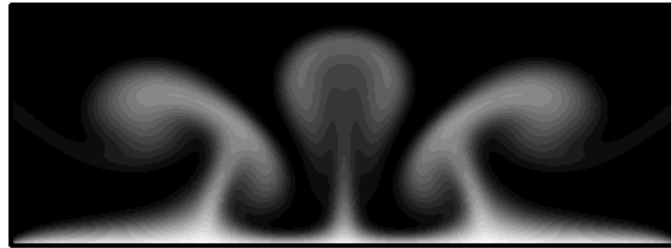
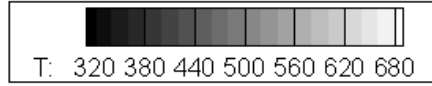
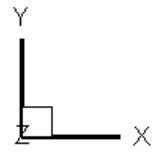
(b) streamlines



(c) pressure contour

$t = 0.6s$

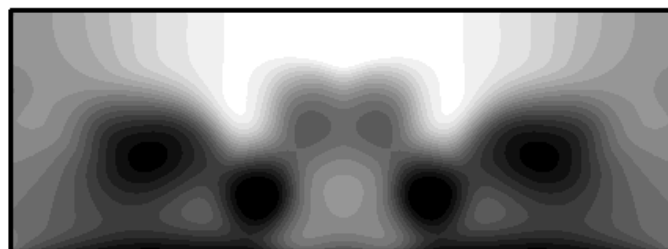
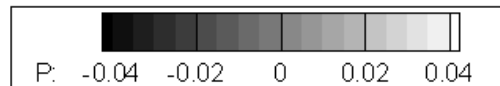
圖 4-13  $Ra^* = 8.66 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



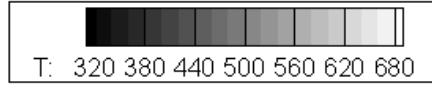
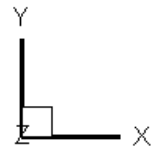
(b) streamlines



(c) pressure contour

$t = 0.75s$

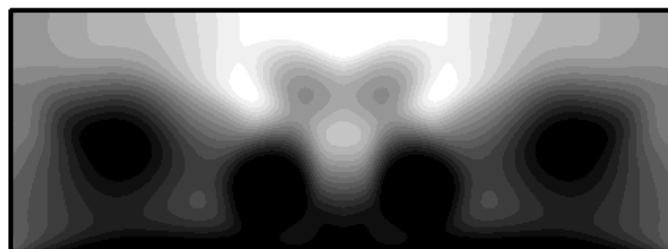
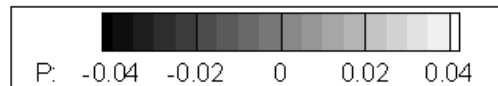
圖 4-14  $Ra^* = 8.66 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



(b) streamlines

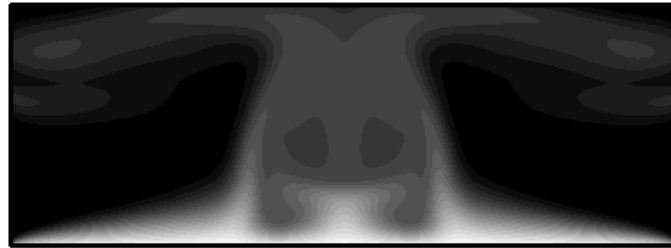
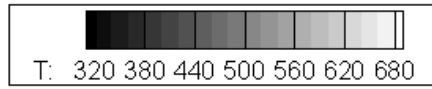
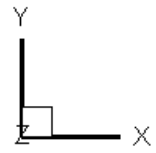


(c) pressure contour

$t = 0.8s$

圖 4-15  $Ra^* = 8.66 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖

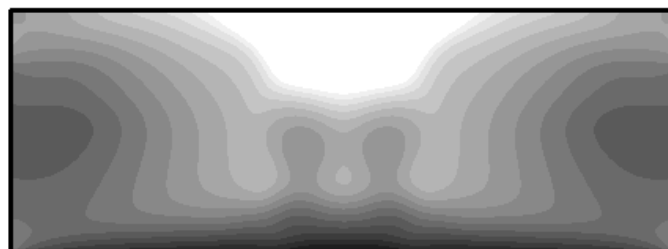
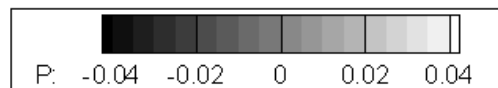




(a) thermal contour



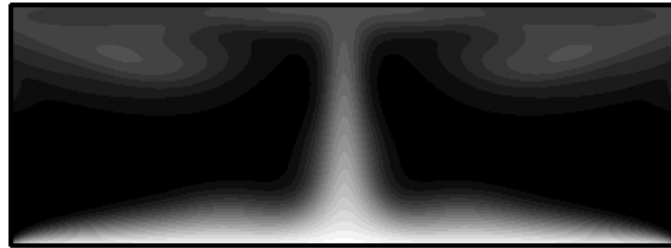
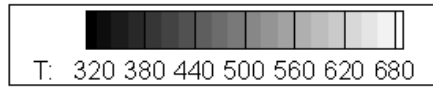
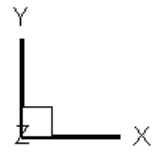
(b) streamlines



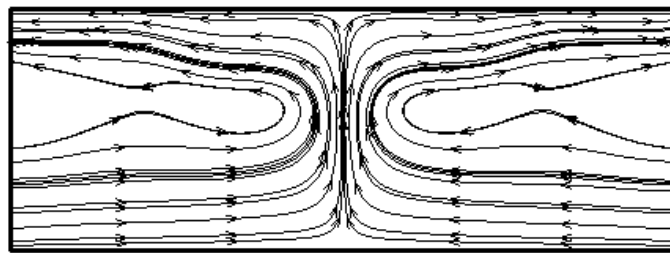
(c) pressure contour

$t = 1s$

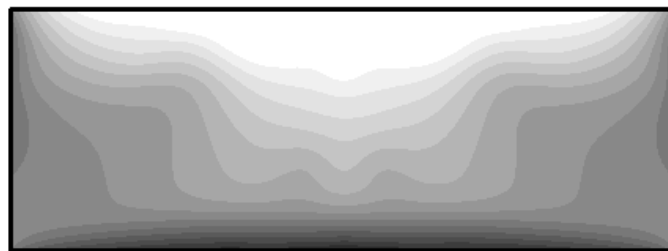
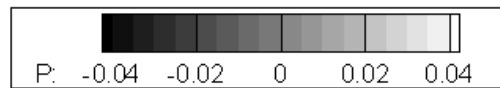
圖 4-16  $Ra^* = 8.66 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



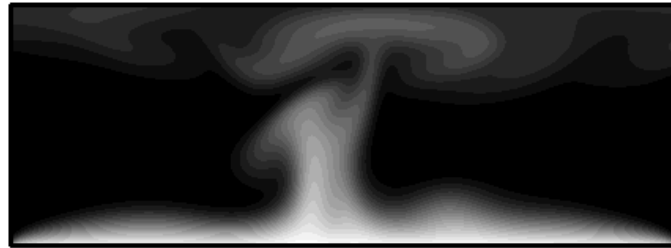
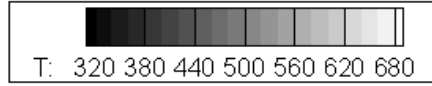
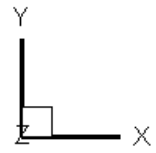
(b) streamlines



(c) pressure contour

$t = 1.25s$

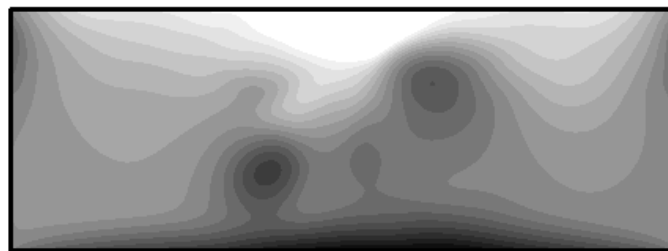
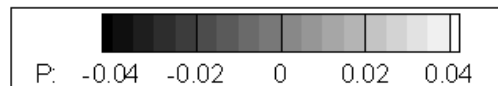
圖 4-17  $Ra^* = 8.66 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



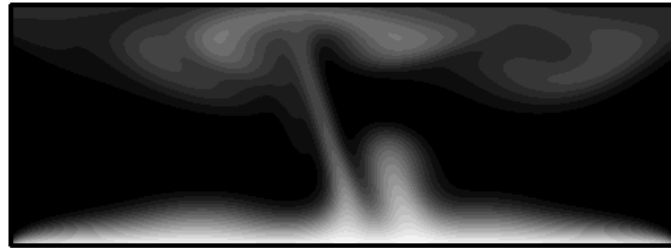
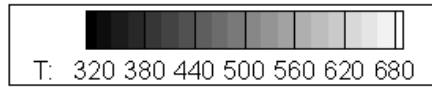
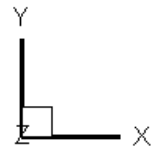
(b) streamlines



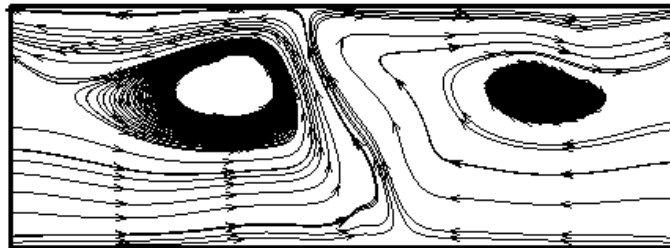
(c) pressure contour

$t = 7.55s$

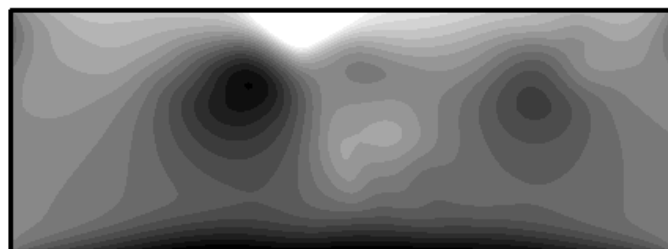
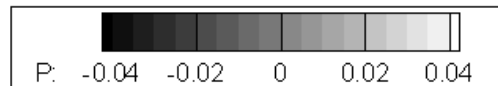
圖 4-18  $Ra^* = 8.66 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



(a) thermal contour



(b) streamlines



(c) pressure contour

$$t = 7.65s$$

圖 4-19  $Ra^* = 8.66 \times 10^6$  下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖

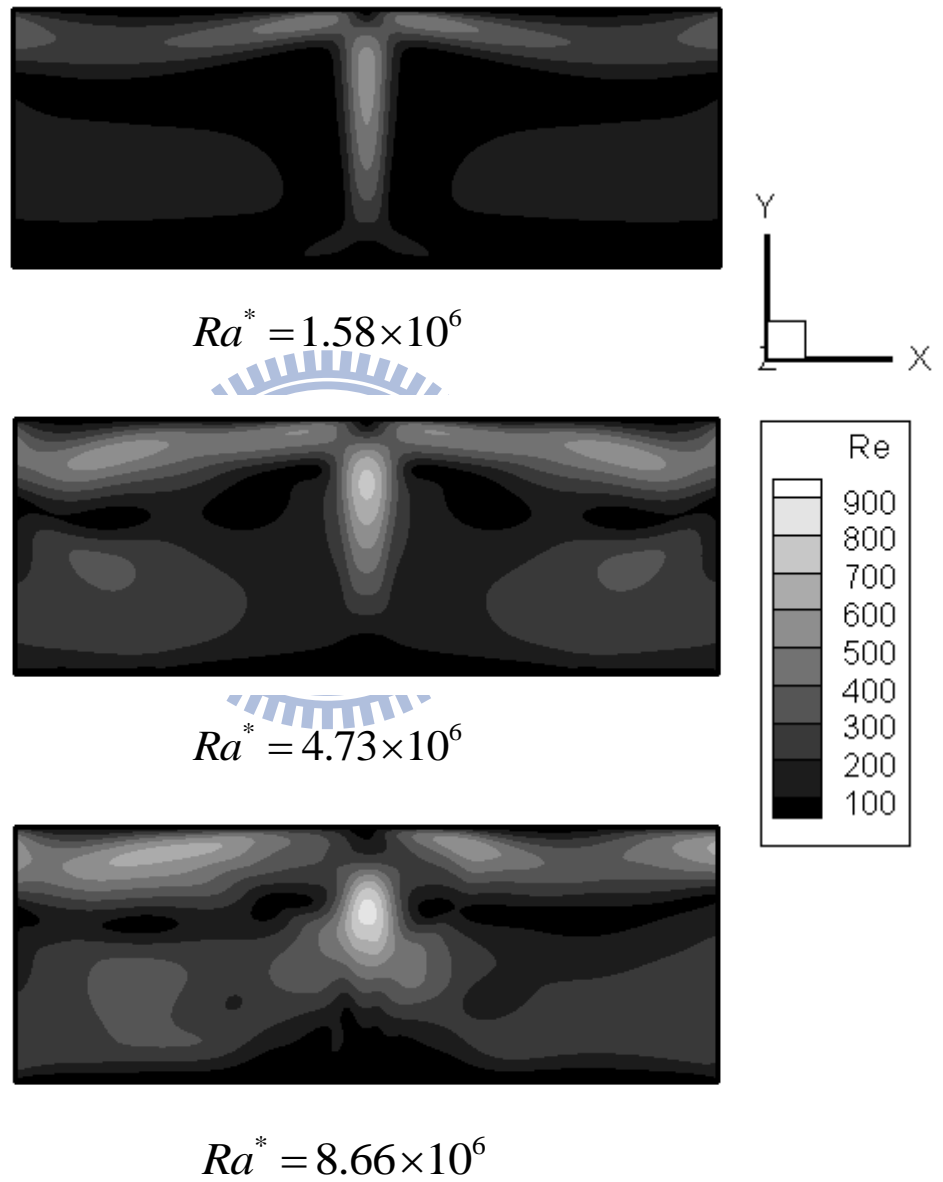


圖 4-20 流場速度量值轉換成雷諾數之比較圖

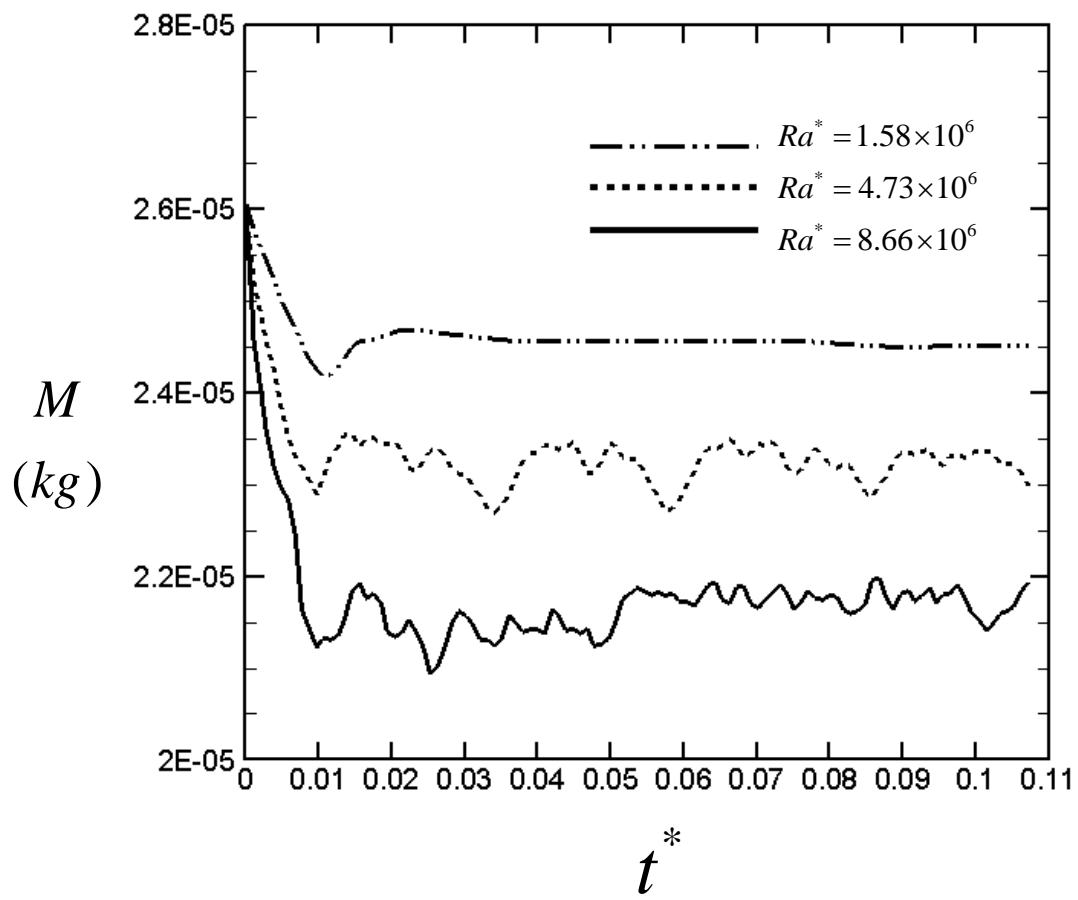


圖 4-21 內部質量隨時態變化圖

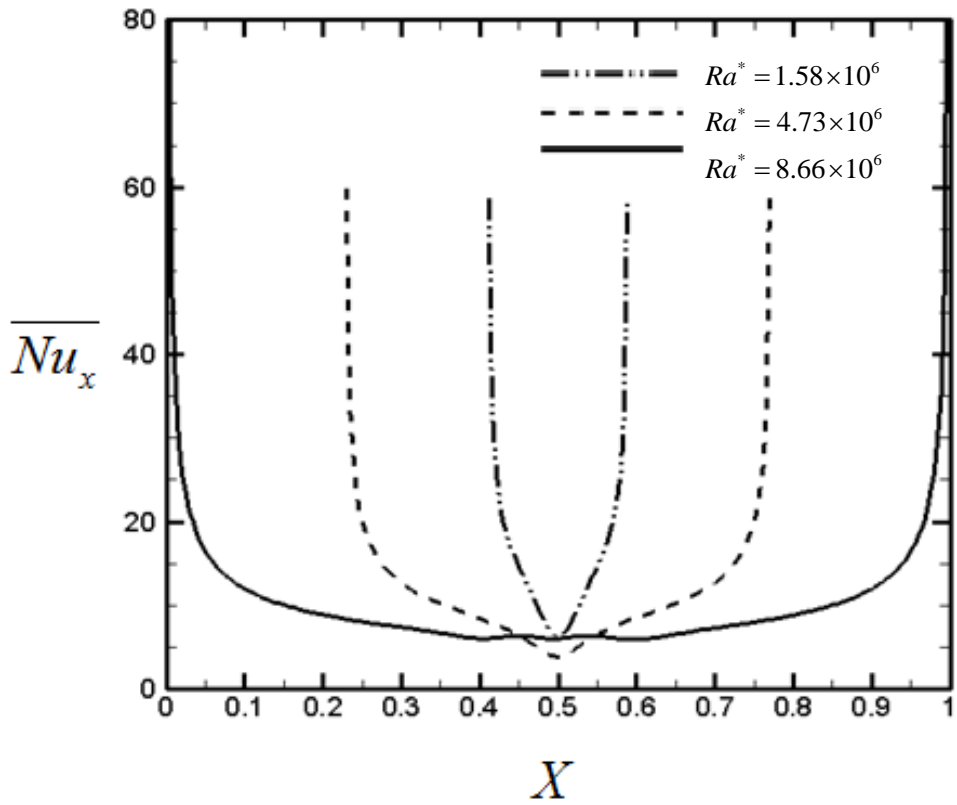


圖 4-22 加熱壁面時間平均局部紐塞數之比較圖

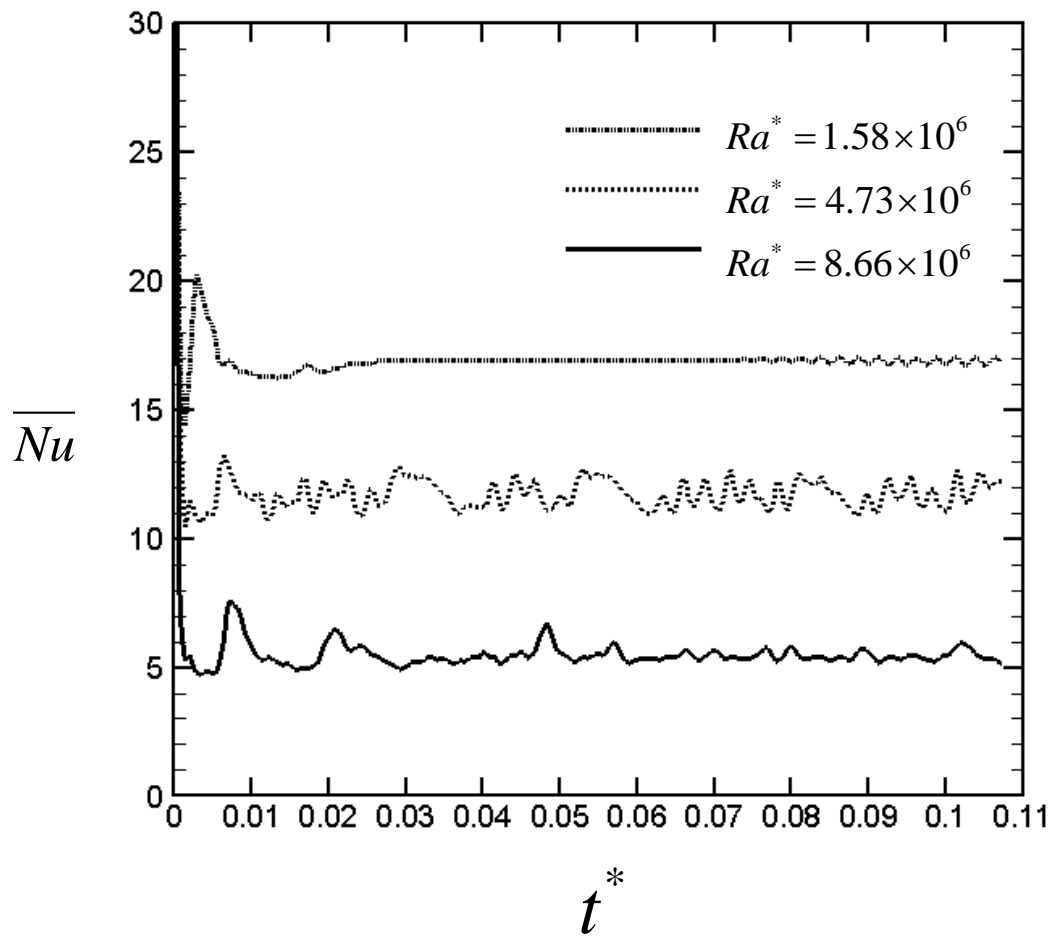


圖 4-23 平均紐塞數隨時間變化圖



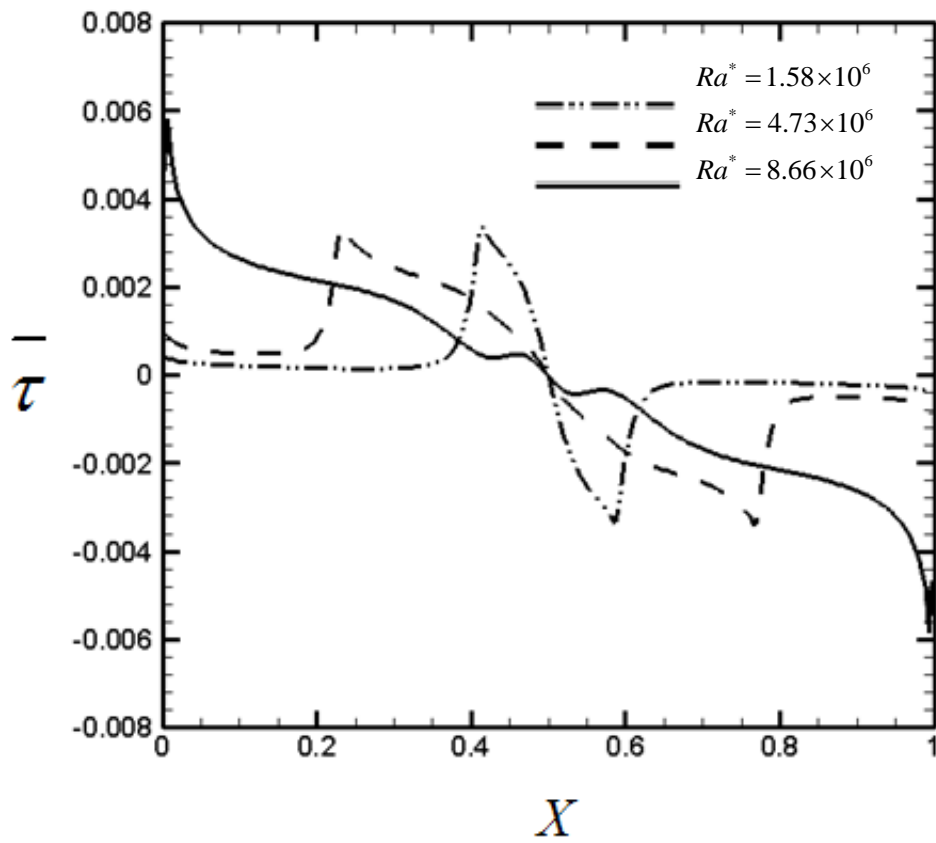


圖 4-24 底部高溫壁面時間平均剪應力之比較圖

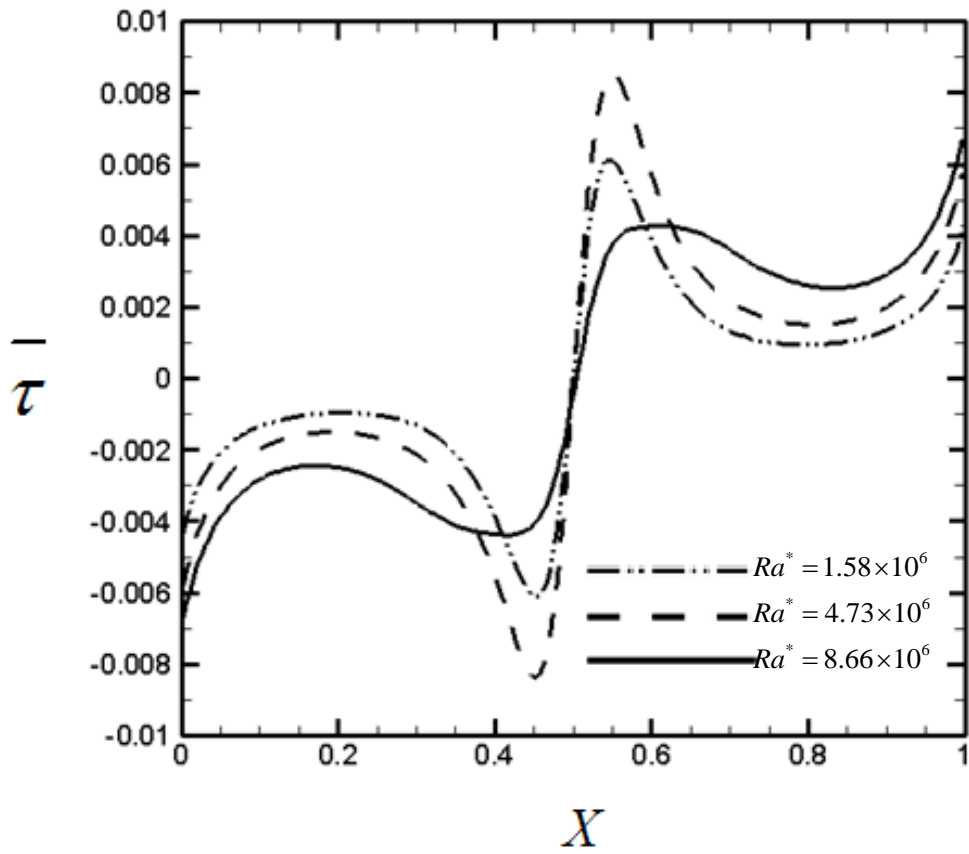


圖 4-25 頂部絕熱壁面時間平均剪應力之比較圖

## 第五章 結論

本研究利用數值方法研究三維平行平板底部加熱之可壓縮自然對流現象研究。利用 ROE 法來求出非黏滯項的通量，MUSCL 法解出 ROE 法中使用的網格之間的物理量，當計算低速可壓縮流時，因速度和音速的數量級上差距過大，在數值分析時造成計算的困難，所以為彌補此一缺點須使用 Preconditioning 法。而程式因為在使用 Preconditioning 時，加入 Artificial time term 時，已破壞了整個統御方程式，因此需使用 Dual time stepping 疊代使其在 Artificial domain 收斂時才能進入下一個真實時階，利用 LUSGS Scheme 疊代以求出下一時階物理量。

從本文數值模擬結果所得到結論如下：

1. 流體的溫度受到加熱，體積開始膨脹，兩端的流體被擠出至大氣環境，加熱壁面附近開始產生迴流，在平行平板中，上方流體從平行平板流向大氣環境，下方則從大氣環境流向平行平板內，分佈延伸至平行平板兩端。此種邊界上的現象稱之為雙反射現象(dual-reflection phenomenon)。
2. 在加熱長寬比  $R = \frac{11}{4}$ 、修正 Rayleigh 數約  $8.66 \times 10^6$  的結果中，有部分流場的等效雷諾數已超過 900，故其流場不穩定。長寬比  $R = \frac{3}{2}$ 、修正 Rayleigh 數約  $4.73 \times 10^6$  的結果中，有部分流場的等效雷諾數約為 700，故其流場較不穩定，且有類週期性運動。而觀察長寬比  $R = \frac{1}{2}$ 、修正 Rayleigh 數約  $1.58 \times 10^6$  的結果，整個流場的等效雷諾數皆小於 500，所以流場穩定。
3. 因邊際效應的關係，兩側紐塞數分佈較高，而越接近中心而紐塞數分佈逐漸降低，其中在長寬比  $R = \frac{1}{2}$ 、修正 Rayleigh 數約為  $1.58 \times 10^6$  的局部紐塞數較高，熱傳效果較好，雖然流場穩定，但因加熱區域小，累積熱量少。長寬比  $R = \frac{11}{4}$ 、修正 Rayleigh 數約  $8.66 \times 10^6$  的結果中雖然流場不穩定，但加熱區域大，累積熱量多，局部紐塞數較小。

## 參考文獻

1. R. J. A. Janssen, and R. A. W. M. Henkes, “Accuracy of Finite-Volume Discretizations for the Bifurcating Natural-Convection Flow in a Square Cavity,” Numerical Heat Transfer, vol. 24, pp. 191-207, 1993.
2. S. Ostrach, “Natural convection in enclosure,” Advances in Heat Transfer, Vol. 8, pp. 161-226, 1972.
3. Antonio Barletta, “Laminar mixed convection with viscous dissipation in a vertical channel,” Int. J. Heat Mass Transfer vol.41 , pp. 3501-3513, 1998.
4. L. Martinez-Suastegui , and C. Trevino, “Transient laminar opposing mixed convection in a differentially and asymmetrically heated vertical channel of finite length,” Int. J. Heat Mass Transfer vol.51 , pp. 5991-6005, 2008.
5. H. Yang, Z. Zhu, J. Gilleard, “Numerical simulation of thermal fluid instability between two horizontal parallel plates, ” International Journal of Heat and Mass Transfer ,vol.44,pp.1485–1493, 2001.
6. D.D.Gray, A.Giorigini,” The validity of Boussinesq approximation for liquids and gases”, International Journal of Heat and Mass Transfer vol.19, pp.545-551, 1976.
7. D. R. Chenoweth, and S. Paolucci, “Natural Convection in an Enclosed Vertical Air Layer with Large Horizontal Temperature Differences,” Journal of Fluid Mechanics, vol. 169, pp.173-210, 1986.
8. Kuo-Shu Hung and Chin-Hsiang Cheng, “PRESSURE EFFECTS ON NATURAL CONVECTION FOR NON-BOUSSINESQ FLUID IN A RECTANGULAR ENCLOSURE,” Numerical Heat Transfer, vol.41, pp.515-528, 2002.
9. Y. Horibata, “Numerical Simulation of a Low-Mach-Number Flow with a Large Temperature Variation,” Computers of Fluids, vol.21, pp. 185-200, 1992.
10. W. S. Fu, C. G. Li, C. P. Huang and J. C. Huang, “An investigation of high temperature difference natural convection in a finite length channel without Boussinesq assumption, ” Int. J. Heat Mass Transfer vol.52 , pp. 2571-2580, 2009.
11. Husar, R.B. and Sparrow, E.M., “Patterns of Free Convection Flow Adjacent to Horizontal Heated Surfaces”, Int. J. Heat Mass Transfer. vol.11, pp.1206-1208, 1968.
12. Z. Rotem, L. Claassen, Natural convection above unconfined horizontal surfaces, J. Fluid Mech. vol.39, pp.173-192, 1969.

13. K.-E. Hassan, S.A. Mohamed, Natural convection from isothermal flat surfaces, Int. J. Heat Mass Transfer. vol.13 , pp.1873-1886,1970.
14. Yousef, W.W., Tarasuk, J.D., and McKeen, W.J. ,“Free Convection Heat Transfer From Upward-Facing Isothermal Horizontal Surfaces” ASME J. Heat Transfer. vol. 104, pp. 493-500, 1982.
15. K. Kitamura, F. Kimura, “Heat transfer and fluid flow of natural convection adjacent to upward-facing horizontal plates, ” International Journal of Heat and Mass Transfer, vol.38 pp.3149–3159,1995.
16. K. Kitamura, T. Asakawa, “Fluid flow and heat transfer of natural convection over upward-facing, horizontal, heated plate shrouded by a parallel insulated plate,”Heat Transfer Asian Research ,vol.29, pp.333–346, 2000.
17. Pretot, S., Zeghmati, B., Le Palec, G., “Theoretical and Experimental Study of Natural Convection on a Horizontal Plate”, Applied Thermal Engineering, vol 20, pp.873-891, 2000.
18. O. Manca, B. Morrone, S. Nardini, “Experimental analysis of thermal instability in natural convection between horizontal parallel plates uniformly heated, ”Journal of Heat Transfer (Transactions of the ASME) vol.122,pp.50–57, 2000.
19. Oğuz Turgut, Nevzat Onur, “An experimental and three-dimensional numerical study of natural convection heat transfer between two horizontal parallel plates,” International Journal of Heat and Mass Transfer vol.34 , pp. 644–652, 2007.
20. 李崇綱“黏性流體之全域速度場數值解法研究”，國立交通大學 碩士論文(2006)
21. E. Turkel, “Preconditioned method for solving the incompressible and low speed compressible equations,” Journal of Computational Physics, vol.72, pp.277-298, 1987.
22. P.L.Roe, “Approximation Riemann solver, Parameter Vectors, and Difference Schemes.”, Journal of Computational Physics,vol.43,pp.357-372,1981.
23. Yoon S, Jameson S,”\_Lower-upper symmetric-Gauss-Seidel method for Euler and Navier-Stokes equations” , AIAA Journal ,vol.26,pp.1025-1026,1988.

24. X.F.Xu,J.S.Lee and R.H.Pletcher,“ A compressible finite volume formulation for large eddy simulation of turbulent pipe flows at low Mach number in Cartesian coordinates.”, Journal of Computational Physics,vol.203, pp.22-48,2005.
25. D. H. Rudy and J. C. Strikwerda, “ A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations, ” Journal of Computational Physics, vol.36, pp.55-70, 1980.
26. T. J. Poinso and S. K. Lele, “ Boundary conditions for Navier-Stokes, ” Journal of Computational Physics, vol. 101 , pp.104-129, 1992.
27. Brandvik T, Pullan G,” Acceleration of a 3D Euler Solver Using Commodity Graphics Hardware,” Forty-sixth AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA 2008-607, 2008.
28. Andrew Corrigan,Fernando F. Camelli,Rainald Lohner,John Wallin,“ Running Unstructured Grid-based CFD solvers on Modern Graphics Hardware,” International Journal for Numerical Methods in Fluids,DOI:10.1002,flid. 2254, 2010.
29. nVIDIA , CUDA, <http://www.nvidia.com/cuda/>
30. J. Dennis, P. Thomas, B. Pieter, “Recent Enhancements to OVERFLOW,” Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 35th, Reno, NV, 1997.