

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

高階平面三角形殼元素之研究

A study on high order flat triangular shell element

研究生：盧致群

指導教授：蕭國模 博士

中華民國一百年八月

高階平面三角形殼元素之研究

A study on high order flat triangular shell element

研究生：盧致群

Student：Chih-Chun Lu

指導教授：蕭國模 博士

Advisor：Dr. Kuo-Mo Hsiao

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

August 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年八月

高階平面三角形殼元素之研究

研究生：盧致群

指導教授：蕭國模博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘要

本文主要目的為探討一個高階平面三角形殼元素在薄殼結構之幾何非線性分析的精確性。本文以共旋轉(co-rotational formulation)有限元素法及增量迭代法來探討薄殼的幾何非線性行為。本文將採用文獻上一個具旋轉自由度的三角形平面元素與一個 C_1 連續的高階三角形板元素疊加成一個3節點的高階平面三角殼元素，元素的節點自由度為3個位移、3個旋轉、3個平面應變及3個側向位移二次微分。本文以殼結構之切線剛度矩陣的行列式值來偵測平衡路徑上的分歧點及極限點。

本文採用牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法和弧長控制(arc-length control)法的增量疊代法來解結構的非線性平衡方程式並以數值例題測試該高階平面三角形殼元素的性能。

A Study on High Order Flat Triangular Shell Element

Student : Chih-Chun Lu

Advisor : Dr. Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

ABSTRACT

A new high order flat triangular shell element for the geometrically nonlinear analysis are presented. In this paper, co-rotational finite element formulation and incremental-iterative method are employed. The new shell element is the superposition of a triangular membrane element with drilling degree of freedom and a C_1 continuous high order triangular plate element. The element has 3 nodes and 12 degrees of freedom per node. The degrees of freedom at each node are 3 translations, 3 rotations, 3 membrane strains and 3 second derivative of lateral displacement. The zero value of the tangent stiffness matrix determinant of the structure is used as the criterion to detect the buckling state.

An incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method combined with constant arc length of incremental displacement vector is used for solving nonlinear equilibrium equations. Several numerical examples are used to demonstrate the performance of the shell element.

誌謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士在這兩年碩士班期間的指導與教誨，使本論文得以順利的完成。老師在研究上嚴謹的態度及日常生活上的關懷，使我受益良多，在此致上最高的謝意與敬意。感謝蔡佳霖老師及鄭文雅老師撥冗擔任口試委員並對本論文所提出的指正與建議，使本論文能夠更臻完善。

感謝蔡明旭、劉峰成、林寬正、蔡秉宏、林運融學長的照顧，同學翁林甫在學業上的砥礪與成長。感謝這一年來與我共處一室的室友在生活上的照顧，以及留在交清兩校同學和朋友，感謝你們陪伴我度過這兩年。

感謝父母親和關心我的親戚們對我的支持與鼓勵，僅以此成果與榮耀，獻給我親愛的父母以及所有關心我的人。



目 錄

中文摘要	I
英文摘要	II
誌謝	III
目錄	IV
表目錄	VI
圖目錄	VII
第一章 緒論	1
第二章 理論推導	8
2.1 基本假設	8
2.2 座標系統	8
2.3 殼元素的變形描述	10
2.4 元素內力與元素剛度矩陣	17
2.5 節點參數在各座標系統之間的轉換	21
2.6 元素節點變形參數的決定方法	25
2.7 旋轉向量	28
2.8 系統平衡方程式與收斂準則	28
第三章 數值計算方法與程序	30
3.1 增量迭代法	30
3.2 弧長控制法	32
3.3 二分法	32
3.4 數值程序	33
第四章 數值分析與結果	36
4.1 RQT 元素線性分析	36

4.2 RQT+QST 元素的幾何非線性與挫屈分析.....	38
例題一：圓柱殼片段受集中力作用.....	38
例題二：槽型梁受扭矩.....	38
例題三：受均勻壓縮位移之簡支板.....	39
例題四：槽型梁受均勻位移負荷之側向扭矩挫屈.....	40
例題五：T 形斷面梁受集中側力.....	41
例題六：角型梁受軸向集中力.....	42
例題七：懸臂圓柱殼受一對端點集中力.....	42
例題八：半球殼受二對集中力.....	43
例題九：聚酯圓柱薄殼受兩階段負荷作用.....	44
第五章 結論與展望.....	46
5.1 結論.....	46
5.2 未來研究方向.....	47
參考文獻.....	48
附錄 A.....	85
附錄 B.....	88
附錄 C.....	91
附錄 D.....	95



表目錄

表 4.1 簡支板受中點集中力 P 之無因次化中點側向位移	
$\frac{10^2 W_C D}{PL^2}$	52
表 4.2 簡支板受均勻分佈力 q_0 之無因次化中點側向位移	
$\frac{10^3 W_C D}{q_0 L^4}$	52
表 4.3 固定板受中點集中力 P 之無因次化中點側向位移	
$\frac{10^3 W_C D}{PL^2}$	53
表 4.4 固定板受均勻分佈力 q_0 之無因次化中點側向位移	
$\frac{10^3 W_C D}{q_0 L^4}$	53
表 4.5 槽型梁受扭矩的極限點	54
表 4.6 受均勻壓縮位移之簡支板的挫屈負荷	54
表 4.7 槽型梁受均勻位移負荷之側向扭轉的挫屈負荷	54
表 4.8 T 形斷面梁受集中側力的挫屈負荷	54

圖目錄

圖 2.1 三角元素的示意圖及節點自由度.....	55
圖 2.2 邊上切線和法線方向示意圖.....	56
圖 2.3 元素變形示意圖.....	57
圖 2.4 元素節點 j 中心面之 x_{ij}^B 軸受旋轉向量 $-\theta_{nj}$ 作用的示意圖.....	58
圖 2.5 元素節點 j 中心面之 $\theta_{ij}^E \mathbf{e}_3^E$ 為將 ${}^0x_{1j}^{B'}$ 軸旋轉到 $x_{1j}^{B'}$ 軸旋轉向量的示意圖.....	59
圖 2.6 旋轉向量.....	60
圖 4.1 固定板 (a)結構示意圖 (b)網格種類及切割示意圖.....	61
圖 4.2 圓柱殼片段受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)力負荷圖 (c)網格 10×10 示意圖.....	62
圖 4.3 圓柱殼片段受集中力作用的位移-負荷曲線圖.....	63
圖 4.4 槽型梁受扭矩之 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 $(1+2+1) \times 2$ 示意圖.....	64
圖 4.5 槽型梁受扭矩的位移-負荷曲線圖.....	65
圖 4.6 受均勻壓縮位移之簡支板的 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 4×6 示意圖.....	66
圖 4.7 受均勻壓縮位移負荷之簡支板的位移-負荷曲線圖.....	67
圖 4.8 (a)圖 4.7 中 I 點 ($\lambda = 0.596 W_E = 0.223$) (b)圖 4.7 中 J 點 ($\lambda = 3.069 W_E = 5.142$) (c)圖 4.7 中 K 點 ($\lambda = 10 W_E = 9.017$) 側向位移場的等高線圖.....	68
圖 4.9 槽型梁 (a)結構尺寸示意圖	

(b)網格(1+2+1)×2 示意圖.....	69
圖 4.10 T 形斷面梁 (a)結構尺寸示意圖	
(b)網格(2+2+3)×4 示意圖.....	70
圖 4.11 T 形斷面梁受側力之位移-負荷曲線圖	71
圖 4.12 角型梁 (a)結構尺寸示意圖	
(b)網格(2+3)×2 示意圖	72
圖 4.13 角型梁受軸向集中力之位移負荷曲線圖.....	73
圖 4.14 懸臂圓柱殼 (a)結構尺寸示意圖	
(b)網格 16×16 示意圖	74
圖 4.15 懸臂圓柱殼受一對端點集中力之位移負-荷曲線圖.....	75
圖 4.16 半球殼 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 12×12 示意圖	76
圖 4.17 半球殼受到二對集中力之位移-負荷曲線圖.....	77
圖 4.18 圓柱薄殼 (a)結構示意圖 (b)俯視圖 (c)前視圖	78
圖 4.19 圓柱薄殼第一階段受力 E 點之負荷參數-位移曲線圖.....	79
圖 4.20 圓柱薄殼第二階段受力 E 點之位移-負荷曲線圖.....	80
圖 4.21 圓柱薄殼第二階段受力 E 點位移-負荷曲線	
之主要路徑與次要路徑.....	81
圖 4.22 (a)圖 4.21 中 O 點($-W_E = 0 \quad \lambda = 0$)	
(b)圖 4.21 中 I 點($-W_E = 7.5309 \quad \lambda = 6.5386$)	
側向位移場的等高線圖.....	82
圖 4.23 (a)圖 4.21 中 J 點($-W_E = 9.1726 \quad \lambda = 9.1452$)	
(b)圖 4.21 中 K 點($-W_E = 11.5455 \quad \lambda = 14.5136$)	
側向位移場的等高線圖.....	83
圖 4.24 (a)圖 4.21 中 M 點($-W_E = 9.4736 \quad \lambda = 9.4156$)	
(b)圖 4.21 中 N 點($-W_E = 14.5441 \quad \lambda = 9.14933$)	



第一章 緒論

在近代工程設計的發展上，對材料的要求與結構的表現趨向於高強度與輕量化，不論機械、建築結構、航太設備及運輸工業等，設計上必須考量以最小成本及重量來達到所要求的機能與強度，同時兼顧外型的美觀。由於薄殼在承受彎曲應力與拉伸應力時有良好的表現，又擁有極佳的重量強度比，因此薄殼結構常被廣泛應用在工程及生活上。目前常見的薄殼結構有建築屋頂、飛機蒙皮、液體儲存槽、人造衛星、火箭、船體結構等。

薄殼結構受到外力作用經常會產生大位移和大旋轉，在大位移和大旋轉的問題中，位移和外力往往不是線性關係，因此需要使用非線性分析的方法來探討由幾何形狀改變所造成的非線性行為。常見的幾何非線性分析的推導方法有三種：全拉格朗日法、更新拉格朗日法和共旋轉法。全拉格朗日法是用初始狀態為參考位置來表示總位移和旋轉；更新拉格朗日法是以結構上一個平衡狀態為參考位置來表示增量位移和旋轉；共旋轉法是利用建立在元素當前變形位置的元素座標將剛體位移及旋轉從總位移及旋轉中扣除，剩下的位移和旋轉即為小位移和小旋轉，因此若使用共旋轉法，原本在線性分析的元素也可以應用在大位移、小應變的幾何非線性分析，共旋轉法在梁與殼結構的幾何非線性分析已經被廣泛的使用[1-6]。

使用有限元素法分析薄殼結構是一個有系統的方法，但在殼元素的發展過程中，一直沒有人提出一個收斂快速、準確度高、使用簡單且可以應

用在各種例題的完美殼元素，因此有很多文獻在推導新的殼元素的或是改良殼元素的性能。殼元素大致分為三類：平面殼元素[1-6]、曲面殼元素和等參數元素。平面殼元素是由一個平面板元素和一個平面元素疊加而成，此種元素的推導方式簡單，而且在數值計算上比曲面殼元素更有效率[7]，已分別應用在殼結構的線性和幾何非線性分析[1-6]。

從形狀分類，殼元素大致分為兩種：四邊形殼元素和三角形殼元素。三角形殼元素具有容易切割複雜幾何形狀的優點，因此三角形的元素被廣泛的探討及使用。

CST(constant strain triangle)元素和 LST(linear strain triangle)元素都是最簡單的平面元素，在薄殼分析上常常使用它們與合適的板元素疊加，因為這種平面三角殼元素缺少旋轉自由度(drilling degree of freedom)，所以其元素剛度的面內旋轉剛度(in-plane rotational stiffness)為零，為了避免系統剛度矩陣因奇異性(singularity)造成分析的困難，常見的解決方法有兩種：(1) 加上一個人工的面內旋轉自由度[11-13,15]。(2) 採用具有旋轉自由度的平面元素[8-11]。文獻[10]提到三角平面元素加入旋轉自由度的優點為：改善三角平面元素的性能並避免使用到三角形邊上的節點，因為邊上的節點會影響到網格生成，而且在模擬非線性分析與動態分析時較為困難；當三角平面元素與三角板元素疊加時，能滿足物理上一個節點有 3 個旋轉自由度的要求；三角形元素與殼元素、板元素或是梁元素同時使用時，能使接合簡

單化。1964 至 1983 年期間，許多人在研究如何在 3 節點的三角形平面元素上加入節點旋轉自由度，希望能得到一個 3 節點 9 個自由度且具節點旋轉自由度的三角形平面元素，但是都沒有得出可用的元素。1984 年文獻 [8]Allman 提出第一個成功帶有旋轉自由度、3 個節點 9 個自由度的三角形平面元素。2002 年文獻 [9]提出 DLST 元素是一個具有 12 個自由度，三角形頂點自由度為 2 個位移、1 個旋轉並且邊上中點自由度為 1 個位移。2003 年文獻 [10]提出的 OPT 元素具有 3 個節點，每個節點 2 個位移、1 個旋轉的自由度。2008 年文獻 [11] 成功的將一個具有旋轉自由度的 QST 元素 [10]應用在平面應變問題的共旋轉法幾何非線性分析上，該元素具有 3 個節點、18 個自由度，每個節點有 2 個位移、1 個旋轉及 3 個應變自由度。由文獻 [11] 的例題可以發現在使用同樣數目的元素網格時，使用 QST 元素分析的結果比其他具有旋轉自由度之 3 個節點、9 個自由度的 Allman、OPT 元素好，這個結果推測是正確的，因為 QST 元素的自由度比 Allman、OPT 元素多。

從 1960 年起有許多的三角形板元素被提出 [5,6,7,8]，其中具有 3 個節點，每個節點有 1 個位移、兩個旋轉自由度，總共 9 個自由度之三角形板元素的研究發展最為迅速。

文獻 [12] 中比較 DKT、HSM、BCIZ、HCT、A-9、STRUDL 等 9 個自由度三角形板元素的線性分析和振動分析後，認為 DKT 元素是這些三角形板元素中最有效率的元素，在靜態和模態分析中均可以收斂到準確的答案。

文獻上有許多使用 DKT 板元素加上一個平面元素形成的殼元素進行幾何非線性分析，1981 年文獻[1]使用 CST 平面元素和 DKT 板元素疊加成一個殼元素，並用更新拉格朗日法分析大位移及大旋轉的薄殼結構，但更新拉格朗日法的增量旋轉必須是小角度，因此 1987 年文獻[2]使用相同的殼元素，搭配共旋轉法解決增量旋轉大小限制的問題。2006 年文獻[3]採用文獻[2]的殼元素和共旋轉法，以數值例題探討殼結構受到各種位移負荷之幾何非線性問題。2006 年文獻[4]將兩種平面元素(Allman、OPT)與多種板元素(DKT、TRIC、AQR)互相搭配疊加，用共旋轉法測試挫屈例題，從文獻[4]結論可以得知 DKT 元素和 OPT 元素搭配的殼元素在例題裡有比較好的結果。

由以上文獻得知，DKT 元素在幾何非線性分析中是一個高精度、收斂快的元素並且已被廣泛的使用，但 DKT 元素還是有些缺陷：文獻[10]中指出該元素內部不能滿足 $\frac{\partial w}{\partial x} = \theta_y$ 、 $\frac{\partial w}{\partial y} = \theta_x$ 且沒有定義側向位移場 w ，因為計算板元素之質量矩陣及幾何剛度矩陣需要該元素的側向位移場 w ，所以 DKT 元素的質量矩陣和幾何剛度矩陣皆使用其他元素的側向位移場來推導，因此在薄板彎曲振動及挫屈分析的準確性不能令人滿意。

2007 年文獻[5]沿用文獻[3]中 CST 平面元素和 DKT 板元素疊加成一個殼元素，配合共旋轉法和位移負荷模擬文獻[13]中的實驗(詳見附錄 A)，但無法模擬出實驗中 d-cone 旋轉的現象。2010 年文獻[6]使用 DKT 板元素和

具有平面旋轉自由度的 QST 平面元素[11]疊加成一個殼元素配合共旋轉法分析幾何非線性和挫屈例題，雖然在大部份的例題中有很好的結果，但仍然無法模擬出文獻[13]中的 d-cone 旋轉的現象，本人推測原因為 DKT 元素不具有 C_1 連續的特性，且 DKT 元素內部沒有定義側向位移場，因此必須使用其他元素的位移場推導幾何剛度矩陣。文獻[13]使用文獻[14]的元素模擬實驗的圓柱薄殼，在薄殼變成波浪狀之前，數值模擬和實驗得出的受力-位移曲線相當吻合，但數值模擬無法得出 d-cone 的旋轉的型態。文獻[14]使用有限元素法，考慮的薄膜應變為不完整非線性項，並且假設 x 、 y 、 z 方向的位移是完整五次多項式，計算 Von Karman 板殼理論推導出來的能量式，利用找出該能量的最小值求得薄殼結構的變形。文獻[16]推測該數值模擬無法得出 d-cone 的旋轉的型態，原因可能為離散化的不足。就本人所知，目前還沒有文獻使用數值模擬得出文獻[13]的 d-cone 的旋轉的型態，因此該實驗的數值模擬可以用來檢驗殼元素性能優劣的基準問題(Benchmark)。

在板元素的發展中，三角形板元素不全是只有 9 個自由度，一個 C_1 連續且位移場是五次高階多項式的三角形板元素在 1965 年以後陸續被提出。1968 年文獻[15]把位移假設為完整五次多項式的元素稱為 TUBA 6，除了在三頂點有 1 個側向位移 $w_{,i}$ 、2 個側向位移一次微分 $w_{,xi}$ 、 $w_{,yi}$ ，3 個側向位移兩次微分 $w_{,xxi}$ 、 $w_{,xyi}$ 、 $w_{,yyi}$ 之外，還有 3 個邊上中點側向位移對邊上法線方向微分 $w_{,nk}$ ，共計 6 個節點、21 個自由度。1969 年文獻[16]中也假設

側向位移是五次多項式，並且利用邊上的側向位移對邊上法線方向微分 $w_{,n}$ 是三次變化三個限制條件將三個邊上的自由度 $w_{,n4}$ 、 $w_{,n5}$ 、 $w_{,n6}$ 去掉，因此 6 個節點減為 3 個節點、21 個自由度減為 18 個自由度。文獻[16]中有做靜態和動態的例題測試，從得到的數據可以發現不但收斂速度很快，跟解析解相比也非常的相近，因此文獻[16]作者 Cowper 認為 18 個自由度的高階板元素是非常優秀的元素。文獻[17]比較了 6 節點、21 個自由度的板元素和簡化過後的 3 節點、18 個自由度的板元素在線性例題上的準確度和收斂性，發現簡化過後的 18 個自由度的板元素在精度和收斂性上相較於 21 度板元素並沒有喪失很多，又由於只有 3 個頂點為節點的三角形板元素在網格切割上會比 6 個節點、邊界上有節點的三角形板元素更加方便，所以 18 個自由度的板元素會比 21 個自由度的板元素實用。文獻[17]最後的結論提到此 18 個自由度的高階板元素除了性能良好，此元素還有其他特點，其一：因為有曲率當作節點自由度，因此可以直接計算出 internal moment。其二，有曲率 $w_{,xxi}$ 、 $w_{,xyi}$ 、 $w_{,yyi}$ 當作節點自由度，在結構邊界條件上的設定可以更加的滿足實際情況。

雖然這種 18 個自由度 C_1 連續的高階板元素很早就被提出，也被證實是一個性能優良的元素，但因為計算效率的問題，三角形板元素的發展著重於 9 個自由度的板元素，因此在板殼的應用上鮮少有文獻使用。1990 年文獻[18]使用文獻[19]的推導法，將 18 個自由度 C_1 連續的高階板元素剛度矩

陣拆成多個矩陣相乘，此推導法不需要使用數值積分，因此提昇了計算剛度矩陣的效率。2004 年文獻[20]初次把此元素的形狀函數應用到 fusion MHD(magneto hydrodynamic)的問題上，並且在結論裡提到此 C_1 連續的元素比 C^0 連續的元素更有效率、具有更多的優點。綜合此元素和 DKT 元素相比的優點：擁有更高的精確度和收斂速度、 C_1 連續、具有定義的側向位移場可以推導幾何剛度和質量矩陣。就本人所知，薄殼結構分析中還沒有文獻使用此 18 個自由度的高階板元素和平面元素疊加形成的殼元素配合共旋轉法分析幾何非線性和挫屈的問題。因此本文將使用文獻[18]推導的 18 個自由度 C_1 連續的高階板元素和文獻[11]具有旋轉自由度的 QST 平面元素疊加成一個殼元素，配合共旋轉法和推導準確的幾何剛度，試圖在分析薄殼結構挫屈問題中能夠更加的精準偵測到平衡路徑上的分歧點和挫屈模態，進一步模擬得到文獻[16]實驗中觀察到 d-cone 旋轉的現象。為了方便稱呼，本文將 18 個自由度 C_1 連續的高階板元素簡稱為 RQT(reduced quintic triangular)元素

本文在第二章介紹本研究使用的平面殼元素以及決定變形參數的方法。在第三章介紹本文的數值計算方法及程序。在第四章將使用線性及非線性例題測試本文的平面三角形殼元素的性能，以及說明本文提出決定元素變形參數的方法是可行的。

第二章 理論推導

本文將文獻[11]上具旋轉自由度的 QST 平面元素(quadratic strain triangle element)與 RQT 板元素(reduced quintic triangular element) [18]疊加成一個 3 節點 36 個自由度的平面三角殼元素，元素的節點自由度為 3 個位移、3 個旋轉、3 個平面應變和 3 個位移二次微分。本章將描述本文中殼元素的基本假設，並且介紹本文中所使用的座標系統，接下來分別推導平面元素、板元素的剛度矩陣及幾何剛度以及節點參數在各座標系統之間的轉換關係，最後提出一個決定元素節點變形參數的方法。

2.1 基本假設

本文中對非線性平面三角殼元素的推導，做以下假設：

- (1) 薄膜變形及彎曲變形之間無耦合作用，因此平面元素的變形和板元素的變形可以各自描述。
- (2) 元素的變形位移及旋轉為小位移及小旋轉。
- (3) 在元素變形前，垂直於元素中心面的法向線段，在元素變形後，依然保持直線，且沒有伸長或縮短及垂直於變形後的中心面。

2.2 座標系統

為了描述系統的運動及元素的變形，本文定義了三組座標系統：

(a) 固定總體座標系統(global coordinate system) : X_i^G ($i=1,2,3$)

結構體所有節點的座標、系統的邊界條件與其他座標系統的基底，以及結構的平衡方程式，均在此座標系統中定義。在 X_i^G 座標系統內之座標值以 (X, Y, Z) 表示。

(b) 元素座標系統(element coordinate system) : x_i^E ($i=1,2,3$)

此座標系統是建立在每一個元素變形後的最新位置上，其座標原點為元素節點 1， x_1^E 軸為元素節點 1 與元素節點 2 在元素平面上的連線， x_2^E 軸是在元素平面上垂直於 x_1^E 軸，且朝著元素節點 3 的方向， x_3^E 軸則是由 x_1^E 軸與 x_2^E 軸外積而得。元素的位移、元素變形、元素節點內力與元素剛度矩陣是在此座標系統中定義，然後經由座標轉換，將其轉換至總體座標系統及基礎座標系統。本文中 ${}^0x_i^E$ 表示初始未變形時的元素座標， ${}^Ix_i^E$ 表示第 I 個增量迭代收斂後的元素座標， x_i^E 表示當前變形位置的元素座標。在 x_i^E 座標系統內之座標值以 (x, y, z) 表示。

(c) 節點基礎座標系統(base coordinate system) : x_{ij}^B ($i=1,2,3$) ($j=1,2,3$)

此座標系統的原點是剛接在結構離散後的每一個節點，並與對應的節點一起移動及旋轉。本文中節點 j 在其初始位置之 x_{3j}^B 軸的方向為曲面在該節點的法線方向， x_{1j}^B 軸、 x_{2j}^B 軸的方向為曲面在該節點互相垂直的切線方向，節點的應變、側向位移二次微分自由度是在此座標系統中定義。本文中 ${}^0x_{ij}^B$ 表示元素節點 j 在初始未變形時的節點基礎座標， ${}^Ix_{ij}^B$ 表示元素節點 j 在第

I 個增量迭代收斂後的節點基礎座標， x_{ij}^B 表示元素節點 j 在當前變形位置的節點基礎座標。

2.3 殼元素的變形描述

如圖 2.1 所示，殼元素中心面上有三個節點，每個節點的自由度分別是 x_1^E 、 x_2^E 、 x_3^E 軸方向的位移 u_j 、 v_j 、 w_j ($j=1,2,3$)，繞 x_1^E 、 x_2^E 、 x_3^E 軸方向的位移轉角 θ_{xj} 、 θ_{yj} 、 θ_{zj} ($j=1,2,3$)，應變分量 ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} ($j=1,2,3$) 以及側向位移的二次微分 $w_{,xxj}$ 、 $w_{,xyj}$ 、 $w_{,yyj}$ ($j=1,2,3$)。

在圖 2.1 中的殼元素節點自由度 u_j 、 v_j 及 θ_{zj} ($j=1,2,3$) 是 QST 平面元素[4]節點自由度，而 w_j 、 θ_{xj} 、 θ_{yj} ($j=1,2,3$) 為 RQT 板元素[16-18]的節點自由度。本文以下敘述的元素變形、元素內力及元素剛度都是定義在元素座標下。

2.3.1 QST 平面元素的變形描述

本文採用的三角平面元素其位移場為三次變化，應變場則為二次變化。此元素有 3 個節點，每個節點有 6 個自由度，此元素可使用彼此間能互相轉換的不同節點參數。本文中採用的節點參數為節點 j 在元素座標 x_1^E 、 x_2^E 軸的位移分量 u_j 、 v_j ，應變分量 ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} 及逆時鐘方向的旋轉 θ_{zj} 。但為了方便推導，本文在元素推導時使用的節點參數是節點 j 在 x_1^E 、 x_2^E 軸的位移分量 u_j 、 v_j 以及 x_1^E 、 x_2^E 軸的位移分量分別對面積座標 (area

coordinates) ξ 、 η 的微分 $u_{,\xi_j}$ 、 $u_{,\eta_j}$ 、 $v_{,\xi_j}$ 、 $v_{,\eta_j}$ ，面積座標的介紹詳見附錄 B。

此元素的位移場可表示為：

$$u = \mathbf{N}_u^t \mathbf{q}_\xi \quad (2.1)$$

$$v = \mathbf{N}_v^t \mathbf{q}_\xi \quad (2.2)$$

$$\mathbf{q}_\xi = \{\mathbf{q}_{\xi 1} \quad \mathbf{q}_{\xi 2} \quad \mathbf{q}_{\xi 3}\} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{N}_u = \{N_1 \quad 0 \quad N_2 \quad N_3 \quad 0 \quad 0 \quad N_4 \quad 0 \quad N_5 \quad N_6 \quad 0 \quad 0 \quad N_7 \quad 0 \quad N_8 \quad N_9 \quad 0 \quad 0\} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{N}_v = \{0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad N_3 \quad 0 \quad N_4 \quad 0 \quad 0 \quad N_5 \quad N_6 \quad 0 \quad N_7 \quad 0 \quad 0 \quad N_8 \quad N_9\} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{q}_{\xi_j} = \{u_j \quad v_j \quad u_{,\xi_j} \quad u_{,\eta_j} \quad v_{,\xi_j} \quad v_{,\eta_j}\} \quad (2.6)$$

其中 $u = u(\xi, \eta)$ 、 $v = v(\xi, \eta)$ 分別為在 x_1^E 、 x_2^E 軸的位移分量， \mathbf{N}_u 為對應於 u 的形狀函數， \mathbf{N}_v 為對應於 v 的形狀函數， \mathbf{q}_ξ 為節點參數向量， N_i ($i=1,2,3,\dots,9$)為面積座標的三次函數，其表示式詳見附錄 C，另外本文中 $\{ \}$ 表行矩陣。

由小變形的假設，元素內任意點的正應變、剪應變及逆時鐘方向的剛體旋轉可表示為：

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (2.9)$$

$$\theta = \frac{1}{2}(v_{,x} - u_{,y}) \quad (2.10)$$

因 u 、 v 都是 ξ 、 η 的顯函數，所以 $u_{,x}$ 、 $u_{,y}$ 與 $u_{,\xi}$ 、 $u_{,\eta}$ 及 $v_{,x}$ 、 $v_{,y}$ 與 $v_{,\xi}$ 、 $v_{,\eta}$

的關係可表示成(詳見附錄 C)：

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{\xi x} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{Bmatrix} v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{\xi x} \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{A}_{\xi x} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (2.14)$$

$$y_{ij} = y_i - y_j \quad (2.15)$$

其中 x_j 、 y_j 分別是元素節點 j 在元素座標系統的座標值。

令節點參數向量 \mathbf{q}_x 與 \mathbf{q}_m 分別為：

$$\mathbf{q}_x = \{\mathbf{q}_{x1} \quad \mathbf{q}_{x2} \quad \mathbf{q}_{x3}\} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{q}_m = \{\mathbf{q}_{m1} \quad \mathbf{q}_{m2} \quad \mathbf{q}_{m3}\} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{q}_{xj} = \{u_j \quad v_j \quad u_{,xj} \quad u_{,yj} \quad v_{,xj} \quad v_{,yj}\} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{q}_{mj} = \{u_j \quad v_j \quad \varepsilon_{xj} \quad \varepsilon_{yj} \quad \gamma_{xyj} \quad \theta_{zj}\} \quad (2.19)$$

其中 $u_{,xj}$ 、 $u_{,yj}$ 、 $v_{,xj}$ 、 $v_{,yj}$ 分別為 $u_{,x}$ 、 $u_{,y}$ 、 $v_{,x}$ 、 $v_{,y}$ 在元素節點 j 之值， ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} 、 θ_{zj} 分別為 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 、 θ 在元素節點 j 之值。由(2.11)式與(2.12)

式，可求得(2.3)式中 \mathbf{q}_ξ 與(2.16)式中 \mathbf{q}_x 的關係：

$$\mathbf{q}_\xi = \mathbf{T}_{\xi x} \mathbf{q}_x \quad (2.20)$$

$$\mathbf{T}_{\xi x} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi x} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{R}_{\xi x} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\xi x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\xi x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & y_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{31} & y_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{21} & y_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

由(2.7)至(2.9)式可求得(2.16)式中 \mathbf{q}_x 與(2.17)式中 \mathbf{q}_m 的關係：

$$\mathbf{q}_x = \mathbf{T}_{xm} \mathbf{q}_m \quad (2.23)$$

$$\mathbf{T}_{xm} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{xm} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{xm} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{xm} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{R}_{xm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

將(2.20)式與(2.23)式代入(2.1)式與(2.2)式可得：

$$u = \mathbf{N}_u^t \mathbf{T}_{\xi m} \mathbf{q}_m = \mathbf{N}_{um}^t \mathbf{q}_m \quad (2.26)$$

$$v = \mathbf{N}_v^t \mathbf{T}_{\xi m} \mathbf{q}_m = \mathbf{N}_{vm}^t \mathbf{q}_m \quad (2.27)$$

$$\mathbf{T}_{\xi m} = \mathbf{T}_{\xi x} \mathbf{T}_{xm} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi x} \mathbf{R}_{xm} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi x} \mathbf{R}_{xm} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi x} \mathbf{R}_{xm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi m} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{R}_{\xi m} = \mathbf{R}_{\xi x} \mathbf{R}_{xm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & 0 & y_{21}/2 & -y_{21} \\ 0 & 0 & x_{31} & 0 & y_{31}/2 & -y_{31} \\ 0 & 0 & 0 & y_{21} & x_{21}/2 & x_{21} \\ 0 & 0 & 0 & y_{31} & x_{31}/2 & x_{31} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

2.3.2 RQT 板元素的變形描述

本文採用的三角形板元素[16-18]有 3 個節點、每個節點有 6 個自由度。節點自由度分別為節點 j 在元素座標下 x_3^E 軸的側向位移 w_j 、繞著 x_1^E 軸的旋轉角 θ_{xj} 、繞著 x_2^E 軸的旋轉角 θ_{yj} 和側向位移二次微分 $w_{,xx}$ 、 $w_{,xy}$ 、 $w_{,yy}$ 。文獻[18]中推導的 RQT 元素自由度為 w_j 、 $w_{,xj}$ 、 $w_{,yj}$ 、 $w_{,xxj}$ 、 $w_{,xyj}$ 、 $w_{,yyj}$ ($j=1,2,3$)，本文為了跟具有旋轉自由度的平面元素疊加，必須將 $w_{,xj}$ 、 $w_{,yj}$ 轉換為 θ_{xj} 、 θ_{yj} ，因此本文先採用文獻[18]形狀函數的推導，其後轉換元素自由度並且推導元素的內力及剛度矩陣。

文獻[18]中，假設元素的側向位移場是一個完整五次多項式，用面積座標表示為：

$$\begin{aligned} w = & \alpha_1 L_1^5 + \alpha_2 L_2^5 + \alpha_3 L_3^5 + \alpha_4 L_1^4 L_2 + \alpha_5 L_1^4 L_3 + \alpha_6 L_2^4 L_1 + \alpha_7 L_2^4 L_3 + \alpha_8 L_3^4 L_1 + \alpha_9 L_3^4 L_2 \\ & + \alpha_{10} L_1^3 L_2^2 + \alpha_{11} L_1^3 L_3^2 + \alpha_{12} L_2^3 L_1^2 + \alpha_{13} L_2^3 L_3^2 + \alpha_{14} L_3^3 L_1^2 + \alpha_{15} L_3^3 L_2^2 + \alpha_{16} L_1^3 L_2 L_3 \\ & + \alpha_{17} L_2^3 L_1 L_3 + \alpha_{18} L_3^3 L_1 L_2 + \alpha_{19} L_1 L_2^2 L_3^2 + \alpha_{20} L_2 L_1^2 L_3^2 + \alpha_{21} L_3 L_1^2 L_2^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

其中 $\alpha_1 \sim \alpha_{21}$ 為未定係數。

$\alpha_1 \sim \alpha_{18}$ 可以很輕易的用 18 個節點自由度表示，再利用位移在邊上法線方

向微分 $w_{,n}$ 為三次函數的三個限制條件，可以把 $\alpha_{19} \sim \alpha_{21}$ 各自表示成 $\alpha_1 \sim \alpha_{18}$ 的函數，邊上的切線和法線方向示意如圖 2.2。最後把用 $\alpha_1 \sim \alpha_{21}$ 代入(2.30)式，整理各節點自由度的係數，即可得到形狀函數 $N_{y1} \sim N_{y18}$ 。

側向位移場可以由形狀函數和節點自由度表示成[18]：

$$w = \mathbf{N}_y^t \mathbf{q}_y \quad (2.31)$$

$$\mathbf{N}_y^t = \{N_{y1} \quad N_{y2} \quad N_{y3} \quad \dots \quad N_{y18}\} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{q}_y^t = \{\mathbf{q}_{y1} \quad \mathbf{q}_{y2} \quad \mathbf{q}_{y3}\} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{q}_{yj}^t = \{w_j \quad w_{,xj} \quad w_{,yj} \quad w_{,xxj} \quad w_{,xyj} \quad w_{,yyj}\} \quad (2.34)$$

其中 \mathbf{q}_y 為節點自由度向量

根據克西荷夫的板理論，元素的位移場及旋轉場可以表示為為：

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.35)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.36)$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.37)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.38)$$

由(2.37)和(2.38)式可以推導出不同節點自由度 \mathbf{q}_b 、 \mathbf{q}_y 的轉換矩陣 \mathbf{T}_{by} ：

$$\mathbf{q}_y = \mathbf{T}_{yb} \mathbf{q}_b \quad (2.39)$$

$$\mathbf{T}_{yb} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yb} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{yb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{yb} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{R}_{yb} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

其中

$$\mathbf{q}_b = \{\mathbf{q}_{b1} \quad \mathbf{q}_{b2} \quad \mathbf{q}_{b3}\} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{q}_{bj} = \{w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad w_{,xx} \quad w_{,xy} \quad w_{,yy}\} \quad (2.43)$$

將(2.39)式代入(2.31)式推得：

$$w = \mathbf{N}_y^t \mathbf{q}_y = \mathbf{N}_y^t \mathbf{T}_{yb} \mathbf{q}_b = \mathbf{N}_b^t \mathbf{q}_b \quad (2.44)$$

$$\mathbf{N}_b = \mathbf{T}_{yb}^t \mathbf{N}_y \quad (2.45)$$

其中 \mathbf{N}_b 為本文 RQT 板元素的形狀函數，其表示式詳見附錄 C

假設板的變形為小變形，其應變可以表示成：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.46)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.47)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.48)$$

將(2.35)、(2.36)式是代入(2.46)至(2.48)式推得：

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.49)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.50)$$

$$\gamma_{xy} = -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -z \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.51)$$

將(2.44)式代入(2.49)至(2.51)式可以將應變寫成形狀函數與節點自由度的函數：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_b^t}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{N}_b^t}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_b^t}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \mathbf{q}_b = -z \mathbf{B}_b \mathbf{q}_b \quad (2.52)$$

其中 \mathbf{B} 為應變-位移的關係矩陣：

$$\mathbf{B}_b = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_b^t}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{N}_b^t}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_b^t}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}_{3 \times 18} \quad (2.53)$$


2.4 元素內力與元素剛度矩陣

本文中殼元素的節點內力是由 QST 平面元素及 RQT 板元素的節點內力 \mathbf{f}_m 、 \mathbf{f}_b 組合而成，元素剛度矩陣 \mathbf{k} 是由 QST 平面元素剛度矩陣 \mathbf{k}_m 、RQT 板元素剛度矩陣 \mathbf{k}_b 所疊加而成。本節中將用虛功原理推導 QST 平面元素及 RQT 板元素的節點內力及剛度矩陣。

在平面應力狀態，等向性線彈性材料的應變與應力關係為：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.54)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} \quad (2.55)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (2.58)$$

其中 E 是楊氏模數(Young's module)， ν 是蒲松比(Poisson ratio)。

2.4.1 QST 平面元素之節點內力與剛度矩陣

將(2.26)式、(2.27)式代入(2.7)至(2.8)式可得：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{B}\mathbf{T}_{\xi\theta}\mathbf{q}_\theta \quad (2.59)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u,x}^t \\ \mathbf{N}_{v,y}^t \\ \mathbf{N}_{u,y}^t + \mathbf{N}_{v,x}^t \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

其中 $\mathbf{N}_{u,x}^t$ 、 $\mathbf{N}_{u,y}^t$ 、 $\mathbf{N}_{v,x}^t$ 、 $\mathbf{N}_{v,y}^t$ 的表示式詳見附錄 B。

將(2.59)式代入(2.54)式可得：

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{T}_{\xi\theta}\mathbf{q}_m \quad (2.62)$$

由虛功原理可得：

$$\delta\mathbf{q}_m^t \mathbf{f}_m = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}_m^t \boldsymbol{\sigma}_m dV \quad (2.63)$$

$$\mathbf{f}_m = \{\mathbf{f}_{m1} \quad \mathbf{f}_{m2} \quad \mathbf{f}_{m3}\} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{f}_{mj} = \{f_{xj} \quad f_{yj} \quad m_{\varepsilon xj} \quad m_{\varepsilon yj} \quad m_{\gamma j} \quad m_{zj}\} \quad (2.65)$$

其中 \mathbf{f}_m 為對應於 \mathbf{q}_m 的元素節點內力， f_{xj} 、 f_{yj} 分別為對應於 u_j 、 v_j 的節點力， $m_{\varepsilon xj}$ 、 $m_{\varepsilon yj}$ 、 $m_{\gamma j}$ 分別為對應於 ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} 的廣義節點力矩， m_{zj} 為對應於 θ_{zj} 的節點傳統力矩， V 為元素體積。

將(2.59)式、(2.62)式代入(2.63)式可得

$$\delta \mathbf{q}_m^t \mathbf{f}_m = \delta \mathbf{q}_m^t \mathbf{T}_{\xi m}^t \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{T}_{\xi m} \mathbf{q}_m \quad (2.66)$$

由(2.66)式可得：

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{k}_m \mathbf{q}_m \quad (2.67)$$

$$\mathbf{k}_m = \mathbf{T}_{\xi m}^T \mathbf{k}_{\xi} \mathbf{T}_{\xi m} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{k}_{\xi} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (2.69)$$

其中 \mathbf{k}_{ξ} 、 \mathbf{k}_m 分別為應於 \mathbf{q}_{ξ} 、 \mathbf{q}_m 的 QST 元素剛度矩陣。



2.4.2 RQT 板元素的節點內力及剛度矩陣

將(2.52)式代入(2.54)式可得：

$$\boldsymbol{\sigma}_b = -z \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{T}_{by}^t \mathbf{q}_b \quad (2.70)$$

由虛功原理 $\delta W_I = \delta W_E$ 可得：

$$\delta \mathbf{q}_b^t \mathbf{f}_b = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^t \boldsymbol{\sigma}_b dV \quad (2.71)$$

$$\mathbf{f}_b = \{\mathbf{f}_{b1} \quad \mathbf{f}_{b2} \quad \mathbf{f}_{b3}\} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{f}_{bj} = \{f_{zj} \quad m_{xj} \quad m_{yj} \quad b_{xj} \quad b_{xyj} \quad b_{yj}\} \quad (2.73)$$

其中 \mathbf{f}_b 為對應於 \mathbf{q}_b 的元素節點內力， f_{zj} 為對應於 w_j 的節點力， m_{xj} 、 m_{yj} 為對應於 θ_{xj} 、 θ_{yj} 的節點力矩， b_{xj} 、 b_{xyj} 、 b_{yj} 為對應於 $w_{,xx}$ 、 $w_{,xy}$ 、 $w_{,yy}$ 的節點雙力矩， V 為元素體積。

將(2.52)、(2.70)式代入(2.71)式推得：

$$\delta \mathbf{q}_b^t \mathbf{f}_b = \delta \mathbf{q}_b^t \int_V z^2 \mathbf{T}_{by} \mathbf{B}^t \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{T}_{by}^t \mathbf{q}_b dV \quad (2.74)$$

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{T}_{by} \int_A \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{T}_{by}^t \mathbf{q}_b \quad (2.75)$$

$$\mathbf{D} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{E} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

h 為元素厚度

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{k}_b \mathbf{q}_b \quad (2.77)$$

$$\mathbf{k}_b = \mathbf{T}_{bx} \int_A \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{T}_{bx}^t \quad (2.78)$$

其中 \mathbf{k}_b 為 RQT 板元素線性剛度矩陣。

2.4.3 元素幾何剛度矩陣

本文在幾何非線性分析中，切線剛度為線性剛度加上幾何剛度。文獻[26]中以完整的 Green's strain 及 total Lagrangian 推導法推導出三維元素之切線剛度矩陣的通式。文獻[6]修改、簡化文獻[26]推導元素幾何剛度矩陣的方法，使其適用於推導殼元素的幾何剛度。本文採用文獻[6]推導殼元素幾何剛度的方法，元素幾何剛度矩陣可表示式成

$$\mathbf{k}_\sigma = \int_V \mathbf{G}^t \mathbf{M} \mathbf{G} dV \quad (2.79)$$

$$\mathbf{G} = \{\mathbf{G}_1 \ \mathbf{G}_2 \ \mathbf{G}_3\} \quad \mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{uj,x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{vj,x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{wj,x} \\ \mathbf{N}_{uj,y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{vj,y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{wj,y} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_x \mathbf{I} & \tau_{xy} \mathbf{I} \\ \tau_{xy} \mathbf{I} & \sigma_y \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} \text{ 為 } 3 \times 3 \text{ 單位矩陣} \quad (2.81)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_m + \boldsymbol{\sigma}_b \quad \boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} \quad (2.82)$$

其中 $j=1,2,3$ 為第 j 個節點， \mathbf{I} 為 3×3 的單位矩陣、 $\mathbf{0}$ 為 1×6 的零矩陣， $\boldsymbol{\sigma}_m$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_b$ 為(2.66)式、(2.74)式之 QST 平面元素及 RQT 板元素的應力場。

為了簡化幾何剛度的計算，本文中 \mathbf{N}_{uj} 、 \mathbf{N}_{vj} 、 \mathbf{N}_{wj} 皆為線性位移場，其線性位移場與 CST 元素[12]的形狀函數相同，因此本文在非線性迭代中使用的切線剛度為近似切線剛度。

2.5 節點參數在各座標系統之間的轉換

為了建立結構的平衡方程式，必須將元素節點參數 \mathbf{q} 中的 u_j 、 v_j 、 w_j 和 θ_{xj} 、 θ_{yj} 、 θ_{zj} 轉換成固定總體座標的分量， ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} 、 $w_{,xx}$ 、 $w_{,xy}$ 、 $w_{,yy}$ 轉換成對應於節點基礎座標的分量，才能將各元素節點內力組合成結構系統節點內力以及將元素剛度矩陣疊加成結構系統剛度矩陣。在元素座標的節點位移 u_j 、 v_j 、 w_j 和節點旋轉 θ_{xj} 、 θ_{yj} 、 θ_{zj} 與在固定總體座標的節點位

移和節點旋轉之關係式為：

$$\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{GE}^t \begin{Bmatrix} U_j \\ V_j \\ W_j \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{GE}^t \begin{Bmatrix} \theta_{Xj}^G \\ \theta_{Yj}^G \\ \theta_{Zj}^G \end{Bmatrix} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{A}_{GE} = [\mathbf{e}_1^E \quad \mathbf{e}_2^E \quad \mathbf{e}_3^E] \quad (2.85)$$

其中 U_j 、 V_j 、 W_j 分別為在 X_1^G 、 X_2^G 、 X_3^G 軸的位移分量， θ_{Xj}^G 、 θ_{Yj}^G 、 θ_{Zj}^G 分別為在 X_1^G 、 X_2^G 、 X_3^G 軸的旋轉分量， \mathbf{e}_i^E ($i=1,2,3$) 為元素座標 x_i^E ($i=1,2,3$) 方向的單位向量。

其中節點應變 ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} 和 $w_{,xx}$ 、 $w_{,xy}$ 、 $w_{,yy}$ 在元素座標與節點基礎座標之間的關係式為：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \mathbf{R}_{EBj}^\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}_j^B \quad (2.86)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \{ \varepsilon_{xj} \quad \varepsilon_{yj} \quad \gamma_{xyj} \} \quad (2.87)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = \{ \varepsilon_{xj}^B \quad \varepsilon_{yj}^B \quad \gamma_{xyj}^B \} \quad (2.88)$$

$$\mathbf{R}_{EBj}^\varepsilon = \begin{bmatrix} c_{Bj}^2 & s_{Bj}^2 & -c_{Bj}s_{Bj} \\ s_{Bj}^2 & c_{Bj}^2 & c_{Bj}s_{Bj} \\ 2c_{Bj}s_{Bj} & -2c_{Bj}s_{Bj} & c_{Bj}^2 - s_{Bj}^2 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_j = \mathbf{R}_{EBj}^\kappa \boldsymbol{\kappa}_j^B \quad (2.90)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_j = \{ w_{,xxj} \quad w_{,xyj} \quad w_{,yyj} \} \quad (2.91)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_j^B = \{ w_{,xxj}^B \quad w_{,xyj}^B \quad w_{,yyj}^B \} \quad (2.92)$$

$$\mathbf{R}_{EBj}^{\kappa} = \begin{bmatrix} c_{Bj}^2 & -2c_{Bj}s_{Bj} & s_{Bj}^2 \\ c_{Bj}s_{Bj} & c_{Bj}^2 - s_{Bj}^2 & -c_{Bj}s_{Bj} \\ s_{Bj}^2 & 2c_{Bj}s_{Bj} & c_{Bj}^2 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

其中 c_{Bj} 、 s_{Bj} 分別為 \mathbf{e}_{1j}^B 在元素座標 x_1^E 、 x_2^E 軸的分量， ε_{xj}^B 、 ε_{yj}^B 、 γ_{xyj}^B 、 $w_{,xxj}^B$ 、 $w_{,xyj}^B$ 、 $w_{,yyj}^B$ 為對應於節點基礎座標 x_{1j}^B 、 x_{2j}^B 軸的分量， \mathbf{e}_{ij}^B ($i, j=1,2,3$) 為節點基礎座標 x_{ij}^B ($i, j=1,2,3$) 方向的單位向量。

\mathbf{q}_B 為位移、旋轉定義在總體座標，應變、側向位移二次微分自由度定義在基礎座標的節點自由度向量。 \mathbf{q}_E 為位移、旋轉、應變、側向位移二次微分自由度皆定義在元素座標的節點自由度向量，其兩者轉換關係 \mathbf{T}_{EB} 為：

$$\mathbf{q}_B = \{\mathbf{q}_{B1} \quad \mathbf{q}_{B2} \quad \mathbf{q}_{B3}\} \quad (2.94)$$

$$\mathbf{q}_{Bj} = \{U_j \quad V_j \quad W_j \quad \theta_{Xj}^G \quad \theta_{Yj}^G \quad \theta_{Zj}^G \quad \varepsilon_{xj}^B \quad \varepsilon_{yj}^B \quad \gamma_{xyj}^B \quad w_{,xxj}^B \quad w_{,xyj}^B \quad w_{,yyj}^B\} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{q}_E = \mathbf{T}_{EB} \mathbf{q}_B \quad (2.96)$$

$$\mathbf{q}_{Ej} = \{u_j \quad v_j \quad w_j \quad \theta_{Xj} \quad \theta_{Yj} \quad \theta_{Zj} \quad \varepsilon_{xj} \quad \varepsilon_{yj} \quad \gamma_{xyj} \quad w_{,xxj} \quad w_{,xyj} \quad w_{,yyj}\} \quad (2.97)$$

$$\mathbf{T}_{EB} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{EB1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{EB2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{EB3} \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

$$\mathbf{T}_{EBj} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{GE}^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{GE}^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{EBj}^{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{EBj}^{\kappa} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

殼元素在元素座標下的節點內力可以表示成：

$$\mathbf{f}_E = \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_b \quad (2.100)$$

$$\mathbf{f}_E = \{\mathbf{f}_{E1} \quad \mathbf{f}_{E2} \quad \mathbf{f}_{E3}\} \quad (2.101)$$

$$\mathbf{f}_{Ej} = \{f_{xj} \quad f_{yj} \quad f_{zj} \quad m_{xj} \quad m_{yj} \quad m_{zj} \quad m_{\varepsilon xj} \quad m_{\varepsilon yj} \quad m_{\gamma j} \\ b_{\kappa xj} \quad b_{\kappa yj} \quad b_{\kappa j}\} \quad (2.102)$$

由反梯度法則(contragradient law)及(2.96)式可得：

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{T}_{EB}^t \mathbf{f}_E \quad (2.103)$$

$$\mathbf{f}_B = \{\mathbf{f}_{B1} \quad \mathbf{f}_{B2} \quad \mathbf{f}_{B3}\} \quad (2.104)$$

$$\mathbf{f}_{Bj} = \{F_{Xj} \quad F_{Yj} \quad F_{Zj} \quad m_{Xj}^G \quad m_{Yj}^G \quad m_{Zj}^G \quad m_{\varepsilon xj}^B \quad m_{\varepsilon yj}^B \quad m_{\gamma j}^B \\ b_{\kappa xj}^B \quad b_{\kappa yj}^B \quad b_{\kappa j}^B\} \quad (2.105)$$

其中 \mathbf{f}_B 為對應於 \mathbf{q}_B 的元素節點內力， F_{Xj} 、 F_{Yj} 、 F_{Zj} 分別為對應於 U_j 、 V_j 、 W_j 的節點力， m_{Xj}^G 、 m_{Yj}^G 、 m_{Zj}^G 為對應於 θ_{Xj}^G 、 θ_{Yj}^G 、 θ_{Zj}^G 的節點傳統力矩， $m_{\varepsilon xj}^B$ 、 $m_{\varepsilon yj}^B$ 、 $m_{\gamma j}^B$ 分別為對應於 ε_{xj}^B 、 ε_{yj}^B 、 γ_{xyj}^B 的廣義節點力矩， $b_{\kappa xj}^B$ 、 $b_{\kappa yj}^B$ 、 $b_{\kappa j}^B$ 分別為對應於 $w_{,xxj}^B$ 、 $w_{,xyj}^B$ 、 $w_{,yyj}^B$ 的廣義節點力矩。將(2.96)式、(2.100)式代入

(2.103)式可得：

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{k}_B \mathbf{q}_B \quad (2.106)$$

$$\mathbf{k}_B = \mathbf{T}_{EB}^t \mathbf{k}_E \mathbf{T}_{EB} \quad (2.107)$$

其中 \mathbf{k}_E 是使用直接剛度法將 \mathbf{k}_m 和 \mathbf{k}_b 結合的殼元素在元素座標下的線性剛度。

2.6 元素節點變形參數的決定方法

本文中採用增量迭代法解非線性平衡方程式，假設第 I 個位置已知，此處的第 I 個位置，是指第 I 個增量迭代收斂後的平衡位置。 \mathbf{x}_j 為元素節點 j ($j=1,2,3$) 在當前元素座標上的位置向量， ${}^I\mathbf{X}_j$ 、 ${}^I x_{ij}^B$ 、 ${}^I\boldsymbol{\varepsilon}_j$ 、 ${}^I\boldsymbol{\kappa}_j$ 、 ΔU_j 、 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j$ 、 $\Delta\boldsymbol{\kappa}_j^B$ 以及 $\Delta\phi_j$ 分別為元素節點 j 在固定總體座標中第 I 個位置的位置向量、元素節點 j 在第 I 個位置的節點基礎座標、元素節點 j 在第 I 個位置的應變向量、元素節點 j 在第 I 個位置的側向位移二次微分向量、元素節點 j 的位移增量向量、元素節點 j 的應變增量向量、元素節點 j 的側向位移二次微分增量向量以及元素節點 j 的旋轉增量。本文中假設元素節點 j 受 ΔU_j 、 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j$ 、 $\Delta\boldsymbol{\kappa}_j^B$ 以及 $\Delta\phi_j$ 作用後的變形過程如下：

1. 節點 j 受 ΔU_j 的作用由第 I 個位置 ${}^I\mathbf{X}_j$ 平移到節點當前變形位置 \mathbf{X}_j ，在移動過程中，節點 j 無剛體旋轉，即元素各邊在節點的切線方向維持不變，剛接在其上的節點基礎座標的方位亦不變。
2. 節點 j 及剛接在其上的節點基礎座標軸 ${}^I x_{ij}^B$ 受到 $\Delta\phi_j$ 作用，旋轉到當前變形位置的 x_{ij}^B 。
3. 節點 j 在當前變形位置的節點基礎座標上之應變分量增加一個增量 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j$ 。
4. 節點 j 在當前變形位置的節點基礎座標上之側向位移二次微分量增加一個增量 $\Delta\boldsymbol{\kappa}_j^B$ 。

由上述的變形過程可知節點 j 當前變形位置的固定總體座標 \mathbf{X}_j 可以由 ${}^I\mathbf{X}_j$ 加上 $\Delta\mathbf{U}_j$ 得到，由 \mathbf{X}_j 可以利用元素座標定義求出當前變形位置的元素座標 x_i^E 。如圖 2.3 所示，將元素變形後當前變形位置的元素座標 x_i^E 與初始未變形時的元素座標 ${}^0x_i^E$ 重疊，並且將當前變形位置的元素座標 x_i^E 旋轉一個角度 α ， α 決定方式詳見附錄 D。元素節點變形參數可決定如下：

(1) 節點位移 \mathbf{u}_j

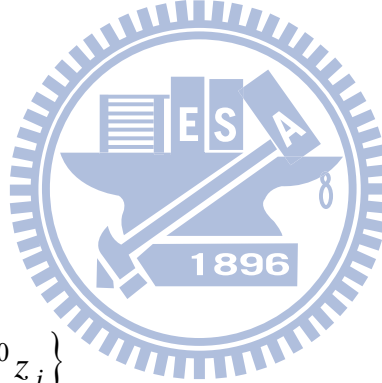
節點位移 \mathbf{u}_j 可由元素節點 j 在當前變形位置的元素座標上的位置向量 \mathbf{x}_j 與元素節點 j 在初始未變形時的元素座標上位置向量的 ${}^0\mathbf{x}_j$ 的差得出：

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{x}_j - {}^0\mathbf{x}_j \quad (2.108)$$

$$\mathbf{u}_j = \{u_j \quad v_j \quad w_j\} \quad (2.109)$$

$$\mathbf{x}_j = \{x_j \quad y_j \quad z_j\} \quad (2.110)$$

$${}^0\mathbf{x}_j = \{{}^0x_j \quad {}^0y_j \quad {}^0z_j\} \quad (2.111)$$



由元素座標定義的方式可知 ${}^0z_j = z_j = w_j = 0$ 。

(2) 節點應變 $\boldsymbol{\varepsilon}_j$

利用第 I 個位置在節點基礎座標上的節點應變向量 ${}^I\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 加上增量應變向量 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 可以求出當前變形位置的節點基礎座標上的節點應變向量：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = {}^I\boldsymbol{\varepsilon}_j^B + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B \quad (2.112)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = \{\Delta\varepsilon_{xj}^B \quad \Delta\varepsilon_{yj}^B \quad \Delta\gamma_{xyj}^B\} \quad (2.113)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 為當前變形位置的基礎節點座標上的節點應變向量。

(3) 側向位移二次微分 κ_j

利用第 I 個位置在節點基礎座標上的節點應變向量 ${}^I \kappa_j^B$ 加上增量應變向量 $\Delta \kappa_j^B$ 可以求出當前變形位置的節點基礎座標上的節點應變向量：

$$\kappa_j^B = {}^I \kappa_j^B + \Delta \kappa_j^B \quad (2.114)$$

$$\Delta \kappa_j^B = \left\{ \Delta w_{,xxj}^B \quad \Delta w_{,xyj}^B \quad \Delta w_{,yyj}^B \right\} \quad (2.115)$$

(3) 節點變形角 θ_{ij}

如圖 2.4 所示，將旋轉向量 $-\theta_{nj}$ 作用在 x_{ij}^B 軸上，使其旋轉到 $x_{ij}^{B'}$ 軸的新位置， θ_{nj} 可表示為：

$$\theta_{nj} = \sin^{-1} \left(\left\| \mathbf{e}_3^E \times \mathbf{e}_{3j}^B \right\| \frac{\mathbf{e}_3^E \times \mathbf{e}_{3j}^B}{\left\| \mathbf{e}_3^E \times \mathbf{e}_{3j}^B \right\|} \right) \quad (2.116)$$

其中 \mathbf{e}_3^E 及 \mathbf{e}_{3j}^B 分別為當前變形位置的元素座標之 x_3^E 軸的單位向量，及當前變形位置的節點基礎座標之 x_{3j}^B 軸的單位向量。此時， $x_{3j}^{B'}$ 軸與 x_3^E 軸重合，且 $x_{1j}^{B'}$ 軸和 $x_{2j}^{B'}$ 軸與 x_3^E 軸垂直，與 x_1^E 軸、 x_2^E 軸共平面，但不重合。

同理，在初始未變形時將旋轉向量 ${}^0 \theta_{nj}$ 作用在 ${}^0 x_{ij}^B$ 軸上，使其旋轉到 ${}^0 x_{ij}^{B'}$ 軸的新位置， ${}^0 \theta_{nj}$ 可表示為：

$${}^0 \theta_{nj} = \sin^{-1} \left(\left\| {}^0 \mathbf{e}_3^E \times {}^0 \mathbf{e}_{3j}^B \right\| \frac{{}^0 \mathbf{e}_3^E \times {}^0 \mathbf{e}_{3j}^B}{\left\| {}^0 \mathbf{e}_3^E \times {}^0 \mathbf{e}_{3j}^B \right\|} \right) \quad (2.117)$$

其中 ${}^0 \mathbf{e}_3^E$ 、 ${}^0 \mathbf{e}_{3j}^B$ 分別為初始未變形時元素座標之 ${}^0 x_3^E$ 軸的單位向量，以及初始未變形時基礎節點座標之 ${}^0 x_{3j}^B$ 軸的單位向量。若結構初始未變形時為曲面，則 ${}^0 x_3^E$ 軸和 ${}^0 x_{3j}^B$ 軸不平行，所以 ${}^0 \theta_{nj} \neq 0$ ；若結構初始未變形時為平面，

則 ${}^0x_3^E$ 軸和 ${}^0x_3^B$ 軸平行，所以 ${}^0\theta_{nj} = \mathbf{0}$ 。

如圖 2.5 所示， $\theta_{zj}\mathbf{e}_3^E$ ($j=1,2,3$) 為將 ${}^0x_{1j}^{B'}$ 軸旋轉到 $x_{1j}^{B'}$ 軸的旋轉向量， θ_{zj} 可表示為：

$$\theta_{zj} = \sin^{-1}\left(\frac{\|{}^0\mathbf{e}_{1j}^{B'} \times \mathbf{e}_{1j}^{B'}\|}{\|{}^0\mathbf{e}_{1j}^{B'} \times \mathbf{e}_{1j}^{B'}\|}\right) \cdot \mathbf{e}_3^E \quad (2.118)$$

其中 ${}^0\mathbf{e}_{1j}^{B'}$ 、 $\mathbf{e}_{1j}^{B'}$ 分別為初始未變形時之 ${}^0x_{1j}^{B'}$ 軸的單位向量，以及當前變形位置之 $x_{1j}^{B'}$ 軸的單位向量。

令 ${}^0\theta_{nj}^E$ 及 θ_{nj}^E 為將 ${}^0\theta_{nj}$ 與 θ_{nj} 分別以初始未變形時的元素座標及當前變形位置的元素座標為基底，節點變形角 θ_{ij} ($i=x,y$) ($j=1,2,3$)可表示為：

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ 0 \end{Bmatrix} = \theta_{nj}^E - {}^0\theta_{nj}^E \quad (2.119)$$



2.7 旋轉向量

本文中使用的旋轉向量來表示一個有限旋轉，如圖 2.6 所示，一向量 \mathbf{R} 受到一旋轉向量 $\phi\mathbf{n}$ 的作用而轉到一個新位置 \mathbf{R}' ， \mathbf{R} 與 \mathbf{R}' 之間的關係可表示成[39]

$$\mathbf{R}' = \cos\phi\mathbf{R} + (1 - \cos\phi)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})\mathbf{n} + \sin\phi(\mathbf{n} \times \mathbf{R}) \quad (2.120)$$

2.8 系統平衡方程式與收斂準則

結構系統受外力負荷時，其平衡方程式可表示為

$$\Psi(\mathbf{Q}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \lambda\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2.121)$$

其中 Ψ 為系統不平衡力向量，系統節點內力 \mathbf{F} 可由(2.114)式的元素節點內力

\mathbf{f}_B 疊加得出， \mathbf{Q} 為系統位移向量， λ 為負荷參數， \mathbf{P} 為參考外力負荷向量。

若外力為與變形位置相關(configuration dependent)的外力，則 \mathbf{P} 在每一個變形位置都須更新。本文以不平衡力 Ψ 的 weighted Euclidean norm 做為平衡迭代時的誤差度量，且收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{|\lambda\sqrt{N}\|\mathbf{P}\|} \leq e_{tol} \quad (2.122)$$

其中 N 代表離散系統的自由度總數， e_{tol} 為一給定的容許誤差值。



第三章 數值計算方法與程序

本文解(2.121)式的非線性平衡方程式所使用平衡迭代的數值計算方法是採用文獻[27]中所提出基於牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法和弧長控制(arc length control)法的增量迭代法。本文中為了求得分歧點，以系統切線剛度矩陣之行列式值為零來判斷。本文採用二分法決定增量位移向量的長度，以求得系統切線剛度矩陣之行列式值為零的平衡位置。為了求得次要平衡路徑，本文在平衡路徑的第一個挫屈負荷分歧點加入一個與第一挫屈模態向量方向一致的擾動位移。為了本文的完整性，以下將簡單介紹文獻[27]中提出的增量迭代數值計算方法與程序。

3.1 增量迭代法

若第 I 個增量的平衡位置為已知，令其位移向量為 \mathbf{Q}_I 、負荷參數為 λ_I ，則第 $I+1$ 個增量的初始增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ ，可以利用尤拉預測值(Euler predictor)求得[28]

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda\mathbf{r}_T \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_T = (\mathbf{K}_T^I)^{-1} \mathbf{P} \quad (3.2)$$

其中 $\Delta\lambda$ 為初始增量負荷參數， \mathbf{K}_T^I 為第 I 個平衡位置的系統切線剛度矩陣。

(3.1)式中的 $\Delta\lambda$ 可利用下式求出[27]

$$\Delta\lambda = \pm \Delta l / (\mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T)^{1/2} \quad (3.3)$$

其中正負符號決定方法為，當第 $I-1$ 與 I 個增量收斂時，其系統切線剛度矩陣之行列式值同號，則 $\Delta\lambda$ 的正負符號和第 I 個增量時相同；若異號則符號相反。 Δl 表示第 $I+1$ 個增量的增量弧長，其值可以如下決定[27]

$$\Delta l = \Delta l_I (J_D / J_I)^{1/2} \quad (3.4)$$

其中 J_D 為給定的期望迭代次數， J_I 為第 I 個增量迭代至平衡所使用的迭代

次數， Δl_I 為第 I 個增量的增量弧長。本文第一個增量的增量弧長 Δl_1 是由下式決定

$$\Delta l_1 = \frac{R_{\max} \|\mathbf{R}_0\|}{I_{\max} |r_c|} \quad (3.5)$$

上式中 R_{\max} 為給定的參考自由度之最大位移量， $\|\mathbf{R}_0\|$ 為參考外力負荷向量 \mathbf{P} 作用下的系統線性解之 Euclidean norm， I_{\max} 為給定之最大增量次數， $|r_c|$ 為 \mathbf{R}_0 在參考自由度的分量之絕對值。

在平衡迭代時若第 I 個位置的增量位移向量 $\Delta \mathbf{Q}$ 及增量位移負荷參數 $\Delta \lambda$ 已知時，由 $\mathbf{Q}_{I+1} = \mathbf{Q}_I + \Delta \mathbf{Q}$ ， $\lambda_{I+1} = \lambda_I + \Delta \lambda$ ，及 2.4 節、2.6 節的方法，則可以求得系統中各元素在當前的元素座標、節點位移、節點變形角。再利用 2.3 節的方法求得當前元素座標上的節點內力及剛度矩陣，再由 2.5 節中提到的座標轉換轉到固定總體座標與節點基礎座標的節點內力及剛度矩陣。當系統內力及外力求得後，系統不平衡力向量可以由(2.121)式求得：

$$\Psi_{I+1} = \Psi(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{I+1}) - \lambda_{I+1} \mathbf{P} \quad (3.6)$$

將(2.121)式在 $\lambda = \lambda_{I+1}$ ， $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{I+1}$ 時用泰勒展開式展開為

$$\Psi = \Psi_{I+1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \delta \mathbf{Q} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \delta \lambda + \mathbf{O}^2(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1}) = 0 \quad (3.7)$$

其中 $\mathbf{O}^2(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1})$ 為二次以上的高次項， $\delta \mathbf{Q}$ 為增量位移修正量， $\delta \lambda$ 為負荷參數修正量。根據(2.121)式，(3.7)式中的 $\partial \Psi / \partial \mathbf{Q}$ 與 $\partial \Psi / \partial \lambda$ 可表示為

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{K}_T \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = -\mathbf{P} \quad (3.9)$$

依牛頓法，忽略(3.7)式中二次以上的高次項，並將(3.8)式與(3.9)式代入，可以得出

$$\Psi_{I+1} + \mathbf{K}_T \mathbf{r} - \delta \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (3.10)$$

其中 $\mathbf{r} = \delta \mathbf{Q}$ 為增量位移修正量，整理(3.10)式，可得到位移修正量

$$\mathbf{r} = -\mathbf{K}_T^{-1}(\Psi_{I+1} - \delta\lambda\mathbf{P}) = \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T \quad (3.11)$$

其中 $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{K}_T^{-1}\Psi_{I+1}$ 為標準牛頓法的位移修正量， \mathbf{r}_T 在(3.2)式中已定義。

3.2 弧長控制法

(3.11)式中的負荷參數修正量 $\delta\lambda$ 可利用文獻[27]中所提出的定弧長控制法決定，其方法在每一個增量中固定其增量位移向量的 Euclidean norm 為一定值 Δl ，由新的增量位移向量 $(\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r})$ 可以得到

$$\Delta l^2 = (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r})^t (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}) \quad (3.12)$$

將(3.11)式代入(3.12)式可以得到

$$\Delta l^2 = (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T)^t (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T) \quad (3.13)$$

(3.13)式經過整理後可以得到 $\delta\lambda$ 的二次方程式

$$a_1\delta\lambda^2 + a_2\delta\lambda + a_3 = 0 \quad (3.14)$$

其中

$$a_1 = \mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T \quad (3.15)$$

$$a_2 = 2(\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0)^t \mathbf{r}_T \quad (3.16)$$

$$a_3 = (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0)^t (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0) - \Delta l^2 \quad (3.17)$$

將(3.11)式求得之增量位移修正量 \mathbf{r} 以及(3.14)式求得之負荷參數修正量 $\delta\lambda$ 加入上次迭代之 $\Delta\mathbf{Q}$ 與 $\Delta\lambda$ 中，可以得到新的增量位移向量與增量負荷參數，再進行下一次迭代，迭代過程將一直重複至(3.6)式中的系統不平衡力向量滿足(2.122)式的收斂準則為止。

3.3 二分法

利用 3.1 節的增量迭代法可以求得結構之主要平衡路徑。在每個增量的迭代收斂時，可以得到該增量在其平衡位置的負荷參數 λ 及結構剛度矩陣的

行列式值 $D(\lambda)$ 。令 λ_I 及 $D(\lambda_I)$ 分別表示第 I 個增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 值。 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 分別表示第 $I+1$ 個增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 值。 Δl_{I+1} 表示第 $I+1$ 個增量的增量位移向量之弧長。若 $D(\lambda_I)$ 大於零且 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零則可利用以下二分法求得挫屈負荷參數 λ_{cr} ：

(1) 令 $\Delta l_L = 0$ ， $\Delta l_R = \Delta l_{I+1}$ ， $\lambda_L = \lambda_I$ ， $\lambda_R = \lambda_{I+1}$ 。其中下標 L 及 R 表示左界及右界。

(2) 取 $\Delta l_{I+1} = \frac{\Delta l_L + \Delta l_R}{2}$ ，重做第 $I+1$ 個增量迭代，並求得新的 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 。

(3) 若 $D(\lambda_{I+1})$ 大於零，則令 $\lambda_L = \lambda_{I+1}$ ， $\Delta l_L = \Delta l_{I+1}$ 。若 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零，則令 $\lambda_R = \lambda_{I+1}$ ， $\Delta l_R = \Delta l_{I+1}$ 。

(4) 若下列二式挫屈誤差準則同時滿足，則 λ_{I+1} 即為系統挫屈負荷，否則回到步驟(2)，重新展開下一次二分法迭代。

$$\frac{|D(\lambda_{I+1})|}{|D(0)|} < e_D$$

$$\frac{|\lambda_R - \lambda_L|}{|\lambda_{I+1}|} < e_\lambda$$

其中 e_D 及 e_λ 為給定的容許誤差值，本文例題之計算給定 $e_D = 10^{-9}$ 及 $e_\lambda = 10^{-5}$ 。

3.4 數值程序

本文使用的增量迭代法之數值程序可以分為三個主要部分：

1. 輸入並計算開始分析所需的資料

(a) 輸入結構資料、邊界條件與負荷參數。

(b) 選擇一個參考自由度，並給定期望此自由度應達到的位移。

(c) 給定最大增量次數、最大迭代次數、期望迭代次數與容許誤差值。

(d)形成系統剛度矩陣並求得(3.5)式中的 \mathbf{R}_0 。

(e)利用(3.1)式、(3.3)式與(3.5)式計算初始增量位移向量、初始增量負荷參數與第一次增量弧長。

2. 使用迭代法求增量的收斂解

(a)由 2.6 節的方法，利用已知的增量位移求得當前元素的變形向量 \mathbf{q}_θ 和 \mathbf{u}_b ，並計算(2.100)式中元素節點內力 \mathbf{f}_E ，接著由 2.5 節座標轉換將 \mathbf{f}_E 利用(2.103)式轉換至 \mathbf{f}_B ，然後將元素節點內力 \mathbf{f}_B 組合成結構系統節點內力 \mathbf{F} 。

(b)計算(2.121)式的不平衡力 Ψ 。

(c)檢查(2.122)式的收斂準則，若滿足則進入第 3 部分；否則檢查迭代數，如果小於給定之最大迭代次數，則進行步驟(d)；否則減少增量弧長並以(3.1)式與(3.3)式計算新的增量位移向量與增量負荷參數，回到步驟(a)重新計算。

(d)利用(3.11)式與(3.14)式計算增量位移修正量與增量負荷參數修正量，回到步驟(a)重新計算。

3. 計算下一次增量所需的資料

(a)檢查參考自由度的位移及進行的增量次數是否已達給定值，若已達到給定值則停止分析工作；否則進行步驟(b)。

(b)計算(3.11)式中的切線剛度矩陣 \mathbf{K}_T 。本文中 \mathbf{K}_T 的計算方法是利用當前變形位置的元素座標重新計算元素剛度矩陣 \mathbf{k} ，再加上元素幾何剛度矩陣 \mathbf{k}_σ ，本文中忽略元素其他的幾何變形與內部應力對元素剛度矩陣造成的影響，再利用 2.52 節座標轉換將 \mathbf{k}_E 利用(2.107)式轉換至 \mathbf{k}_B ，然後將元素剛度矩陣 \mathbf{k}_B 疊加成結構系統剛度矩陣 \mathbf{K}_T 。

(c)利用(3.1)式、(3.3)式與(3.4)式計算下一次增量的增量位移向量、增量負荷參數與增量弧長。

(d)回到第 2 部分進行迭代工作。



第四章 數值分析與結果

本章節為了測試本文 RQT+QST 殼元素的性能，先使用一個線性例題測試 RQT 元素的準確性與收斂性，而 QST 元素的線性分析在文獻[11]有詳細的測試，故本文不再多加描述 QST 元素的性能。本章節亦使用多個幾何非線性例題和挫屈例題測試本文 RQT+QST 元素的性能，並且與文獻 [6]DKT+QST 元素和文獻[4]、[24]DKT+OPT 元素的結果相互比較。本章節最後測試了文獻[13]中聚酯圓柱薄殼受兩階段負荷作用的例題，並且跟文獻 [13]的實驗結果和文獻[5]、[13]的數值分析的結果相互比較。

4.1 RQT 元素線性分析

本例題考慮一個平面方形薄板分別受到中點集中力 P 與均勻分布力 q_0 作用。文獻[16]中曾用此 RQT 分析此例題，本例題採用與文獻[16]相同形式的網格及邊界條件來驗證本文程式的正確性及確認 RQT 元素的準確性。圖 4.1(a)為本例題的結構示意圖，圖 4.1(b)為本例題的網格示意圖，根據不同網格形式，網格可以分為 Q type 和 T type。本例題考慮了兩種邊界條件：簡支邊界(Simply supported boundary)與固定邊界(Clamped boundary)。因對稱之故，與文獻[16]一樣本文分析時僅考慮左下角 $\frac{1}{4}$ 薄板，分析時的邊界條件如下

簡支邊界的邊界條件：

$$w=0 \quad X=0, Y=0$$

$$w_{,x}=0 \quad Y=0, X=L$$

$$w_{,y}=0 \quad X=0, Y=L$$

$$w_{,xx}=0 \quad Y=0, X=L(\text{不包含}(L,L))$$

$$w_{,xy}=0 \quad X=L, Y=L$$

$$w_{,yy}=0 \quad X=0, Y=L(\text{不包含}(L,L))$$

固定邊界的邊界條件：

$$w=0 \quad X=0, Y=0$$

$$w_{,x}=0 \quad X=0, Y=0, X=L$$

$$w_{,y}=0 \quad X=0, Y=0, Y=L$$

$$w_{,xx}=0 \quad X=0, Y=0, X=L(\text{不包含}(L,L))$$

$$w_{,xy}=0 \quad X=0, Y=0, X=L, Y=L$$

$$w_{,yy}=0 \quad X=0, Y=0, Y=L(\text{不包含}(L,L))$$

本例題分析的結果文獻[16]的結果完全一樣，所以本文的程式應是正確的，

另外本文還用文獻[6]的 DKT 元素分析了本例題。表 4.1 至 4.4 為本文的結

果及文獻[16]、[22]的解析解。表 4.1 至 4.1 中 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ， W_C 為中點 C 的

側向位移，表中的百分誤差是相對於解析解的誤差。表 4.1、4.2 分別是簡

支板受到中點集中力及分佈力的無因次化 C 點側向位移，表 4.3、4.4 分別

是固定板受到中點集中力及分佈力的無因次化 C 點側向位移。由表 4.1 至表

4.4 可以看出在本例題，不管是 RQT 元素或是 DKT 元素，使用 Q type 的網格在收斂性上是優於 P type 的網格，而 RQT 元素的收斂速度也是遠大於 DKT 元素。

4.2 RQT+QST 殼元素的幾何非線性與挫屈分析

例題一：圓柱殼片段受集中力作用

本例題為一個圓柱殼片段受到單點集中力作用。圖 4.2(a)及圖 4.1(b)為圓柱殼片段的幾何形狀及受到集中力之示意圖。圓柱殼片段 AD 和 BC 兩邊為鉸接， AB 和 DC 兩邊為自由端，結構 E 點受到集中力負荷，其邊界條件設定為： AD 和 BC 兩邊 $U = V = W = \theta_x = \theta_y = 0$ 。本例題使用的網格為 10×10 ，容許誤差值取 10^{-4} 。圖 4.3 是本例題的平衡路徑圖，其中包含主要路徑及次要路徑。在主要路徑分析過程中使用了 27 個增量，每個增量平均迭代次數為 4 次。在次要路徑分析過程中使用了 21 個增量，每個增量平均迭代次數約為 4~5 次。在主要路徑上偵測到的挫屈負荷 $F_{cr} = 530.803$ ，此時 E 點向下位移 9.783mm。由圖 4.3 可以得知，本文的結果與文獻[23]相當吻合，故本文的數值程序可以準確的找出主要平衡路徑、分歧點及次要路徑。

例題二：槽型梁受扭矩(Channel section in torsion)

圖 4.4(a)、4.4(b)為槽型梁受力和網格示意圖，結構線段 AB 、 BC 、 CD 和 EF 、

FG 、 GI 為鉸接，結構 J 、 K 點受到集中力負荷，線段 AB 、 BC 、 CD 和 EF 、 FG 、 GI 受到均勻力負荷，其邊界條件為：在 M 點的 $U = 0$ ， B 、 F 點的 $V = 0$ ，線段 BC 及 FG 的 $W = 0$ 。本例題使用 $(1+2+1) \times 20$ 和 $(2+4+2) \times 40$ 兩種網格，取用的容許誤差為 10^{-5} 。表 4.1 為本文和文獻[4]、[6] 使用相同網格偵測到極限點的結果，由表中的結果可發現本文的結果與文獻的結果相當接近。本例題如果在迭代過程中加入幾何剛度，則會造成迭代難以收斂，並且無法求出完整的平衡路徑，圖 4.5 為網格 $(1+2+1) \times 20$ 、 $(2+4+2) \times 40$ 使用當前位置的線性剛度迭代所求出的位移-負荷曲線圖，由圖 4.5 可以發現本文的結果與文獻[6]的結果較接近，與文獻[4]的結果有相當的差距。



例題三：受均勻壓縮位移之簡支板(Simply supported compressed plate)

圖 4.6(a)、4.6(b) 為受均勻壓縮位移之簡支板及網格示意圖，結構線段 AB 、 BC 、 CD 及 AD 為簡支端，結構線段 AD 及 BC 受到均勻位移負荷 λ ，其邊界條件為：在線段 AB 及 CD 的 $W = \theta_y = \theta_z = 0$ ，線段 BC 及 AD 的

$W = \theta_x = \theta_z = 0$ ， A 點的 $V = 0$ 。本例題使用 4×6 、 4×10 、 6×12 和 8×20 四種網格，取用的容許誤差為 10^{-5} 。表 4.6 為本文和文獻[4]、[6] 的挫屈負荷。本例題在網格 4×6 的分析過程中使用了 16 個增量，每個增量平均迭代次數為 2 次，偵測到的挫屈負荷為 61.8281，在網格 4×10 的分析過程中使用了 13 個增量，每個增量平均迭代次數為 2 次，偵測到的挫屈負荷為 58.6947，在

網格 6×12 的分析過程中使用了11個增量，每個增量平均迭代次數為2次，偵測到的挫屈負荷為58.4172，在網格 8×20 的分析過程中使用了8個增量，每個增量平均迭代次數為2次，偵測到的挫屈負荷為57.8975。使用網格 8×20 分析，並且在偵測到分歧點後給予模態擾動即可進入次要路徑。在次要路徑的分析過程中使用了18個增量，每個增量的平均迭代次數為2次，圖4.7為點 E 、 AD 線段的位移-負荷曲線，圖中之反力為垂直 AD 邊的全部反力。圖4.8為本例題在平衡路徑圖4.7上對應點 I 、 J 、 K 之側向位移場的等高線圖， I 、 J 、 K 點對應的 λ 及 W_E 分別為 $(\lambda = 0.596 \ W_E = 0.223)$ 、 $(\lambda = 3.069 \ W_E = 5.142)$ 、 $(\lambda = 10 \ W_E = 9.017)$ 。



例題四：槽型梁受均勻位移負荷之側向扭轉挫屈(Lateral torsional buckling)

圖4.9(a)、4.9(b)為槽型梁受到均勻位移負荷及網格示意圖，圖中結構線段 AB 、 BC 及 CD 為固定端，結構線段 EF 、 FG 及 GI 受到均勻軸向位移負荷 λ ，除了軸向位移外，其它位移、旋轉都受到拘束，其邊界條件為：在線段 EF 、 FG 及 GI 的 $V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ ，固定端線段 AB 、 BC 及 CD 的 $U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ ，沿線段 AB 、 BC 、 CD 、 EF 、 FG 及 GI 方向的正應變為0。本例題使用 $(2 + 2 + 2) \times 14$ 和 $(4 + 4 + 4) \times 60$ 兩種網格，取用的容許誤差為 10^{-4} 。表4.7為本文在不同網格和文獻[4]、[6]的挫屈負荷。本例題在網格 $(2 + 2 + 2) \times 14$ 的分析過程中使用了12個增量，每個增量平均迭

代次數為1次，偵測到的挫屈負荷為2921.16，在網格 $(4+4+4)\times 60$ 的分析過程中使用了12個增量，每個增量平均迭代次數為1次，偵測到的挫屈負荷為2965.65。本文RQT+QST結果與DKT+QST[6]的結果很接近，但與文獻[4]的結果有一些差異。

例題五：T形斷面梁受集中側力(Transversally loaded T profile)

圖4.10(a)及圖4.10(b)為T形斷面梁受到集中力負荷之示意圖和網格分割示意圖，結構線段 AB 、 CD 和 EF 、 GI 為絞接，結構 J 點受到集中力負荷，其邊界條件設定為： C 點的 $V=0$ ，線段 CD 、 GI 的 $U=W=0$ ，線段 AB 及 EF 的 $W=0$ ，線段 CD 及 GI 沿線段方向的正應變為0。本例題使用 $(2+2+4)\times 20$ 、 $(3+3+5)\times 30$ 和 $(5+5+8)\times 50$ 三種網格，取用的容許誤差為 10^{-4} 。表4.8是本例題在不相同網格下，本文RQT+QST、DKT+OPT[22]和DKT+QST[6]元素的挫屈負荷。本例題在網格 $(2+2+4)\times 20$ 的分析過程中使用了7個增量，每個增量平均迭代次數為2次，偵測到的挫屈負荷為2899.19，在網格 $(3+3+5)\times 30$ 的分析過程中使用了7個增量，每個增量平均迭代次數為2次，偵測到的挫屈負荷為2908.74，在網格 $(5+5+8)\times 50$ 的分析過程中使用了7個增量，每個增量平均迭代次數為2次，偵測到的挫屈負荷為2857.16。使用網格 $(3+3+5)\times 30$ 分析，並且在偵測到分歧點後將模態當擾動位移，使其進入次要路徑。由圖4.11可發現，在次要路徑 W_J 、 V_J 的變化減小許多而 U_J 因為結構對稱的關係，在挫屈前沒有位移，但在挫屈後

U_j 的變化較為明顯，由圖4.11亦可發現梁挫屈後的負荷先增加後再減少。

例題六：角型梁受軸向集中力(Angle section beam)

圖 4.12 為角型梁其受到集中力負荷之示意圖。角型梁前端為固定端，末端為自由端，並且在自由端施加到一個單點的集中力，其邊界條件設定為：線段 BD 及 BF 的 $U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ ，沿線段 BD 及 BF 方向的正應變為 0。本例題使用 $(2+2) \times 25$ 和 $(4+6) \times 60$ 兩種網格，取用的容許誤差為 10^{-4} 。本例題在網格 $(2+2) \times 25$ 的分析過程中使用了 10 個增量，每個增量平均迭代次數為 4~5 次。在網格 $(4+6) \times 60$ 的分析過程中使用了 9 個增量，每個增量平均迭代次數為 4 次。圖 4.13 為 Angle section beam 之位移負荷曲線圖，其中包含文獻[4]DKT+ALL、DKT+OPT 元素和文獻[6]DKT+QST 元素及本文使用的 RQT+QST 元素的結果，由圖可以看出把平面元素 ALL 換成 OPT 元素時明顯影響了位移負荷曲線，把 OPT 元素換成 QST 元素也稍微影響位移負荷曲線，而把板元素 DKT 換成 RQT 時，位移負荷曲線變化很小，因此推測本例題使用不同平面元素會影響幾何非線性的平衡路徑，使用 DKT 板元素或 RQT 板元素則對曲線的影響較小。

例題七：懸臂圓柱殼受一對端點集中力(Pinched cantilever cylinder)

圖4.14為懸臂圓柱殼受集中力負荷及網格示意圖。圓柱殼前端為自由端，末端為固定端，在Pinched cantilever cylinder上端及下端各受到一個單點的集

中力。由於結構為上下、左右對稱，因此本例題僅考慮四分之一結構來進行分析，其邊界條件為：線段 BC 的 $W = \theta_x = \theta_y = 0$ ，線段 AD 的 $V = \theta_x = \theta_z = 0$ ，線段 CD 的 $U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ 。本例題使用 16×16 的網格，取用的容許誤差為 10^{-4} 。本例題在網格 16×16 的分析過程中使用了 14 個增量，每個增量平均迭代次數為 7 次。圖 4.15 為本例題之位移-負荷曲線圖，由圖 4.15 可見本文的結果與文獻 [6]、[24] 的結果非常接近。文獻 [6]、[24] 與本文用的元素數及網格皆相同。

例題八：半球殼受到二對集中力 (Pinched hemispherical shell)

圖 4.16(a)、4.16(b) 為半球殼受集中力負荷及網格示意圖。半球殼的頂端為固定端、底端為自由端，在底端前後左右端各受到一個單點的集中力，由於結構前後、左右對稱，因此本例題僅考慮四分之一結構進行分析，其邊界條件為：在 C 點的 $U = V = W = 0$ ，在前後結構對稱處線段 AC 的 $U = \theta_y = \theta_z = 0$ ，在左右結構對稱處線段 BC 之邊界條件為 $V = \theta_x = \theta_z = 0$ 。本例題使用 12×12 的網格，總共 276 個元素，採用的容許誤差為 10^{-4} 。本例題在分析過程中使用了 16 個增量，每個增量平均迭代次數為 3 次。圖 4.17 為半球殼之位移負荷曲線圖。由圖 4.17 可見本文的結果與文獻 [6]、[22] 的結果非常相近。

例題九：聚酯圓柱薄殼受兩階段負荷作用

本例題為文獻[16]的實驗，實驗的流程詳見附錄A。圖4.18為聚酯圓柱薄殼的示意圖。本例題第一階段的邊界條件設定為：

$$\text{線段 } FG \text{ 的 } V = W = \theta_x = \theta_z = \varepsilon_y = w_{,yy} = 0$$

$$\text{線段 } HI \text{ 的 } U = V = W = \theta_x = \theta_z = \varepsilon_y = w_{,yy} = 0$$

第一階段的位移負荷為：線段 FG 受到 $U = 28.64787748\lambda$ 、 $\theta_y = -\lambda$ 的位移負荷，線段 HI 受到 $\theta_y = \lambda$ 的位移負荷，其中 λ 為位移負荷參數。當 λ 到達 0.349066 時進入第二階段。第二階段的邊界設定為：

$$\text{線段 } FG \text{ 的 } U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = \varepsilon_y = w_{,yy} = 0$$

$$\text{線段 } HI \text{ 的 } U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = \varepsilon_y = w_{,yy} = 0$$

第二階段設定的力負荷為： E 點受到 $W = -\lambda$ ，其中 λ 為力負荷參數。本例題使用 30×60 的網格，第一階段採用的容許誤差為 10^{-6} ，第二階段採用的容許誤差為 10^{-5} 。圖4.19為第一階段 E 點側向位移 W_E 之負荷參數-位移圖，本文得到的負荷參數-位移曲線幾乎與文獻[5]的曲線重合。圖4.20為第二階段本文與文獻[5]、[13]數值分析以及文獻[13]實驗得到的 E 點側向位移-負荷曲線圖。本文在第二階段 E 點向下位移 9.1726mm 時找到第一個分歧點，在向下位移 12.0619mm 時找到第二個分歧點。在第一個分歧點時，將模態當擾動位移即可進入次要路徑，但在第二個分歧點時，將模態當擾動位移無法進入次要路徑。圖4.21為第二階段 E 點次要路徑的位移-負荷曲線圖。

圖4.22、4.23、4.24為圖4.21中對應主要路徑上 O 、 I 、 J 、 K 點以及次要路徑上 M 、 N 點之側向位移場的等高線圖。在圖4.21中， O 、 I 、 J 、 K 、 M 、 N 點對應的 $-W_E$ 及 λ 分別為 $(-W_E = 0 \ \lambda = 0)$ 、 $(-W_E = 7.5309 \ \lambda = 6.5386)$ 、 $(-W_E = 9.1726 \ \lambda = 9.1452)$ 、 $(-W_E = 11.5455 \ \lambda = 14.5136)$ 、 $(-W_E = 9.4736 \ \lambda = 9.4156)$ 、 $(-W_E = 14.5441 \ \lambda = 9.14933)$ 。



第五章 結論與展望

5.1 結論

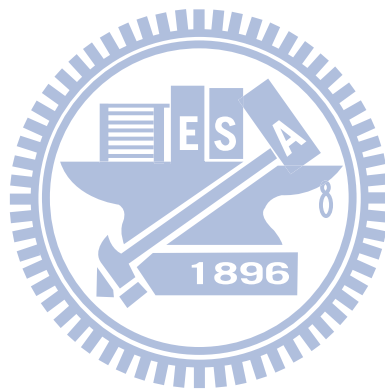
本文將一個具有 18 個自由度的三角形板元素和一個具有 18 個自由度的三角形平面元素疊加，形成一個高階的平面三角形殼元素。本文的殼元素每個節點具有 12 個自由度，比文獻上任何一個三角形殼元素還要具有更多的自由度，在元素邊界上，本文的殼元素滿足 C_1 連續的條件。因此，理論上本文的殼元素應該是一個收斂快、準確性高、性能非常優秀的殼元素。由本文第四章的數值例題測試可以得到以下結論：

1. 本文使用的 RQT 板元素在線性例題中，不論是收斂速度或是答案的準確性皆比 DKT 板元素優秀。
2. 本文使用近似的切線剛度，除了第四章的例題二之外，皆可以準確求出主要平衡路徑、次要平衡路徑以及分歧點。
3. 本文使用決定變形參數的方法，確實可以應用在幾何非線性分析上，並且有正確的結果。
4. 本文在酯圓柱薄殼受兩階段負荷作用的例題中，雖然沒有得到文獻[13]實驗中 d-cone 旋轉的現象，但可以求出在主要路徑上的兩個分歧點，以及在第一個分歧點上的次要路徑。第二個分歧點和文獻[13]實驗中 d-cone 旋轉時的 E 點側向位移相當接近，因此本文推測在主要路徑上的第二個

分歧點，應該有一條次要路徑對應於文獻[13]實驗中 d-cone 旋轉的現象。

5.2 未來研究方向

本文使用線性位移場推導幾何剛度，因此本文的切線剛度皆為近似剛度，以後的研究可以使用元素內部真實的位移場推導幾何剛度，求得準確的切線剛度，並且探討使用不同的切線剛度進行幾何非線性分析，會對迭代的過程和偵測分歧點、極限點的結果造成什麼影響。



參考文獻

- [1] K. J. Bathe, L. W. Ho, “A simple and effective element for analysis of general shell structures”, Computer and Structure, vol. 13, pp. 673-681, 1981.
- [2] K. M. Hsiao, “Nonlinear analysis of general shell structures by flat triangular shell element”, Computer and Structure, vol. 25, pp. 665-674, 1987.
- [3] 楊禮龍, “薄殼結構在位移負荷作用之下的幾何非線性分析”, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2006.
- [4] J. M. Battini, C. Pacoste, “On the choice of the linear element for corotational triangular shells”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, pp. 2125-2168, 2003.
- [5] 楊水勝, “拘限彈性薄板受側向位移負荷的行為研究”, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2007.
- [6] 林寬政, “平面三角形殼元素之改善研究”, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2010.
- [7] P. Khosravi, R. Ganesan, R. Sedaghati, “Corotational non-linear analysis of thin plates and shells using a new shell element”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 69, pp. 859-885, 2007.
- [8] D. J. Allman, “A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis”, Computers and Structures, vol. 19, pp. 1-8, 1984.

- [9] L. Damkilde, M. Gronne, “An improved triangular element with drilling rotations”, Proceedings of the 15th Nordic Seminar on Computational Mechanics, pp. 135-138, 2002.
- [10] C. A. Felippa, “A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, pp. 2125-2168, 2003.
- [11] 林育丞, “具旋轉自由度之三角平面元素的共旋轉推導法”, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2008.
- [12] J. L. Batoz, K. J. Bathe, L. W. Ho, “A study of three-node triangular plate bending elements”, International Journal for Numerical Methods in Engineer, vol. 15, pp. 1771-1812, 1980.
- [13] A. Boudaoud, P. Patrício, Y. Couder, M. B. Amar, “Dynamics of singularities in a constrained elastic plate”, Nature, vol. 407, pp. 718–720, 2000.
- [14] P. Patrício, W. Krauth, “Numerical solutions of the Von Karman equations for a thin plate”, Journal of Modern Physics, vol. 8, pp. 427-434, 1997.
- [15] J. H. Argyris, I. Fried, D. W. Scharpf, “The tuba family of plate elements for the matrix displacement method”, The Aeronautical Journal of the Aeronautical Society, Vol. 72, pp. 701-709, 1968.
- [16] G. R. Cowper, E. Kosko, G. M. Lindberg, M. D. Olson, “Static and dynamic applications of a high-precision triangular plate bending element”, AIAA Journal, Vol. 7, pp. 1957-1965, 1969.
- [17] K. Bell, “A refined triangular plate bending finite element”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 1, pp. 101-122, 1969.

- [18] Suman Dasgupta, Dipak Segupta, "A higher-order triangular plate bending element revisited", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, pp. 419-430, 1990. R. W. Clough, J. L. Tocher, "Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending", Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, WPAFB, Ohio, pp. 515-545, 1965.
- [19] K. T. Joseph, K. Singa Rao, "A fast algorithm for triangular plate bending element", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 14, pp. 1100-1104, 1979.
- [20] S. C. Jardin, "A triangular finite element with first-derivative continuity applied to fusion MHD applications", Journal of Computational Physics, Vol. 200, pp. 133-152, 2004.
- [21] C. Militello, C. A. Felippa, "The first ANDES elements: 9-DOF plate bending triangles", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 93, pp. 217-246, 1991.
- [22] Rober L. Taylor, Sanjay Govindjee, "Solution of clamped rectangular plate problems", Technical Report:UCB/SEMM, 2002.
- [23] E. H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry and M. Boudi, "Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Pade approximants", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 60, pp. 1987-2012, 2004.
- [24] J. M. Battini, "A modified corotational framework for triangular shell elements", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, pp. 1905-1914, 2007.

- [25] J. M. Battini, C. Pacoste, “On the choice of local element frame for corotational triangular shell elements”, Communication in Numerical Methods in Engineering, vol. 20, pp. 819-825, 2004.
- [26] O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science, CENTRAL BOOK CO., 1971.
- [27] M. A. Crisfield, “A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through””, Computers and Structures, vol. 13, pp. 55-62, 1981.
- [28] M. A. Crisfield, Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, John Wiley & Sons, 1991.



表 4.1 簡支板受中點集中力 P 之無因次化中點側向位移 $\frac{10^2 W_C D}{PL^2}$

Mesh	RQT		DKT*		Exact [16]
	Q type(error)	P type	Q type(error)	P type	
N=2	1.14928 (-0.931%)	1.13635 (-2.046%)	1.24840 (7.613%)	1.40314 (20.952%)	1.16008
N=4	1.15742 (-0.229%)	1.15333 (-0.583%)	1.16880 (0.751%)	1.28389 (10.672%)	
N=6	1.15890 (-0.102%)	1.15706 (-0.261%)	1.16470 (0.398%)	1.22499 (5.595%)	
N=8	1.15942 (-0.057%)	1.15838 (-0.147%)	1.16340 (0.286%)	1.19995 (3.436%)	

*本文使用文獻[6]程式計算的數據

表 4.2 簡支板受均勻分佈力 q_0 之無因次化中點側向位移 $\frac{10^3 W_C D}{q_0 L^4}$

Mesh	RQT		DKT[21]		Exact [16]
	Q type(error)	P type	Q type(error)	P type	
N=2	4.0609374 (-0.03484%)	4.06848 (0.15095%)	- (31.73%)	- (4.55%)	4.06235
N=4	4.0623473 (-0.00013%)	4.06273 (0.00920%)	- (4.49%)	- (5.37%)	
N=6	4.0623517 (-0.00002%)	4.06239 (0.00091%)	- -	- -	
N=8	4.0623524 (-0.00001%)	4.06236 (0.00018%)	- (1.01%)	- (1.56%)	

表 4.3 固定板受中點集中力 P 之無因次化中點側向位移 $\frac{10^3 W_C D}{PL^2}$

Mesh	RQT		DKT*		Exact [16]
	Q type(error)	P type	Q type(error)	P type	
N=2	5.53464 (-1.255%)	5.18580 (-7.479%)	5.66900 (1.142%)	6.21891 (10.953%)	5.605
N=4	5.58233 (-0.404%)	5.54273 (-1.111%)	5.85600 (4.478%)	6.35977 (13.466%)	
N=6	5.59990 (-0.091%)	5.58137 (-0.422%)	5.70800 (1.838%)	6.07079 (8.310%)	
N=8	5.60530 (0.005%)	5.59485 (-0.181%)	5.64100 (0.642%)	5.91075 (5.455%)	

*本文使用文獻[6]程式計算的數據

表 4.4 固定板受均勻分佈力 q_0 之無因次化中點側向位移 $\frac{10^3 W_C D}{q_0 L^4}$

Mesh	RQT		DKT[21]		Exact [22]
	Q type(error)	P type	Q type(error)	P type	
N=2	1.26130 (-0.318%)	1.14850 (9.232%)	- (31.73%)	- (4.55%)	1.26532
N=4	1.26432 (-0.079%)	1.26431 (0.080%)	- (4.49%)	- (5.37%)	
N=6	1.26523 (-0.007%)	1.26530 (-0.001%)	- -	- -	
N=8	1.26530 (-0.001%)	1.26532 (0.000%)	- (1.01%)	- (1.56%)	

表 4.5 槽型梁受扭矩的極限點

Mesh	Present($-W_J$)	DKT+QST[6]*	DKT+OPT[4]
$(1+2+1) \times 20$	1099.32 (18.53)	1104.65 (18.90)	1011.92
$(2+4+2) \times 40$	1104.98 (20.25)	1106.21 (20.08)	-
$(3+8+3) \times 56$	-	-	1080.86

表 4.6 受均勻壓縮位移之簡支板的挫屈負荷

Mesh	Present	DKT+QST[6]	DKT+OPT[4]
4×6	61.8281	58.4491	-
4×10	58.6947	56.5711	59.1703
6×12	58.4172	57.1983	-
8×20	57.8975	57.2570	58.4762

表 4.7 槽型梁受均勻位移負荷之側向扭轉的挫屈負荷

Mesh	Present	DKT+QST[6]	DKT+OPT[4]
$(2+2+2) \times 14$	2921.16	2888.91	-
$(2+2+2) \times 15$	-	-	2618.26
$(4+4+4) \times 60$	2965.65	2961.45	2529.29

表 4.8 T 形斷面梁受集中側力的挫屈負荷

Mesh	Present	DKT+QST[6]	DKT+OPT[4]
$(2+2+4) \times 20$	2899.19	2798.68	3103.86
$(3+3+5) \times 30$	2908.74	2847.75	-
$(5+5+8) \times 50$	2857.16	2829.02	2890

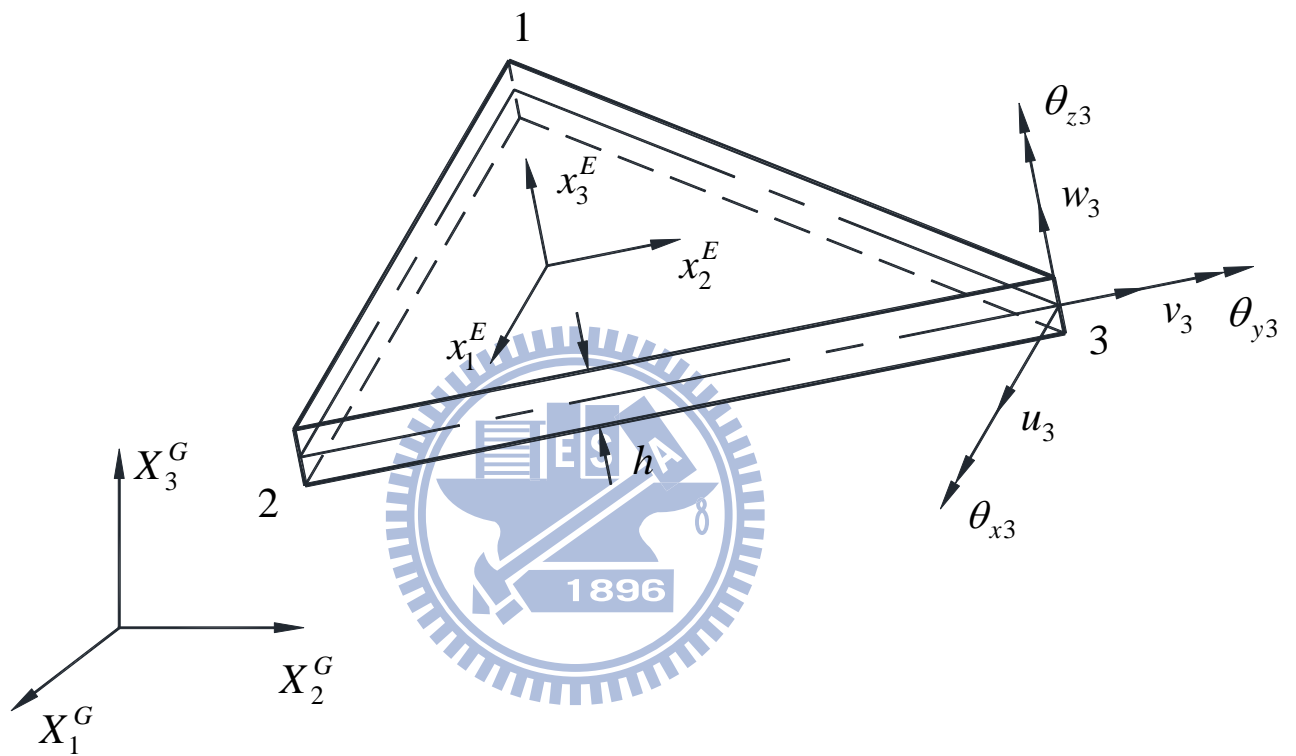


圖 2.1 三角元素的示意圖及節點自由

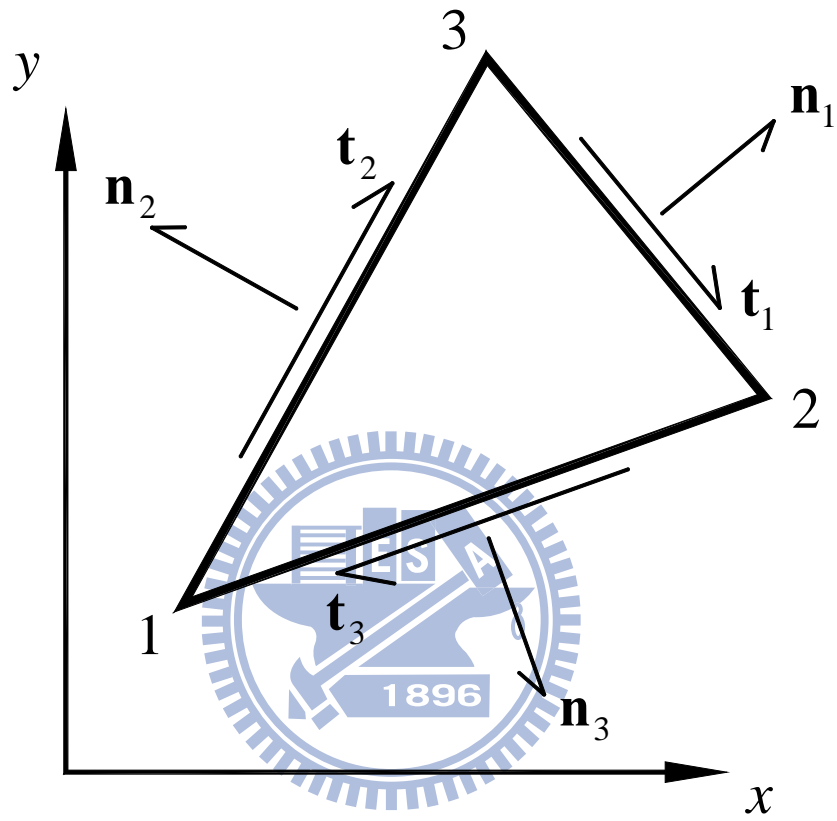


圖 2.2 邊上切線和法線方向示意圖

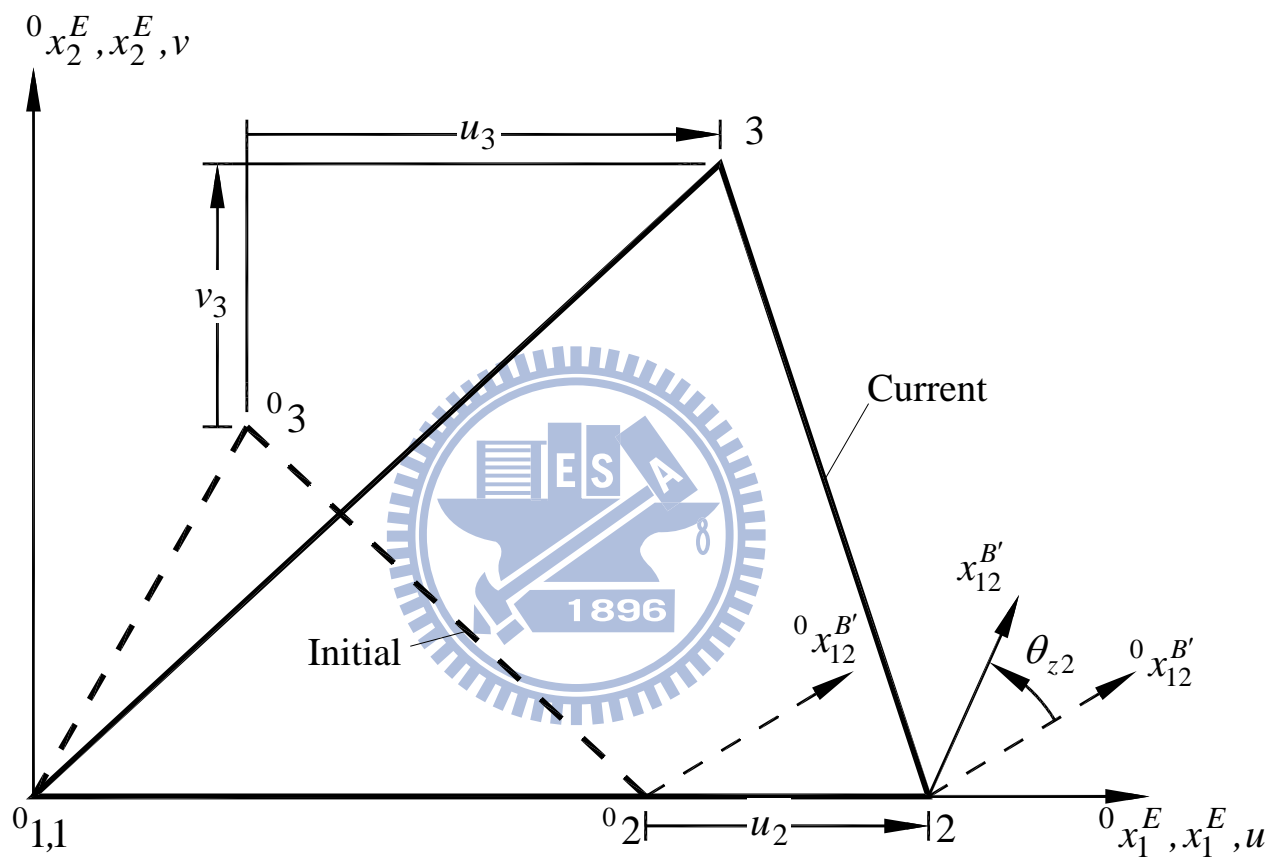


圖 2.3 元素變形示意圖

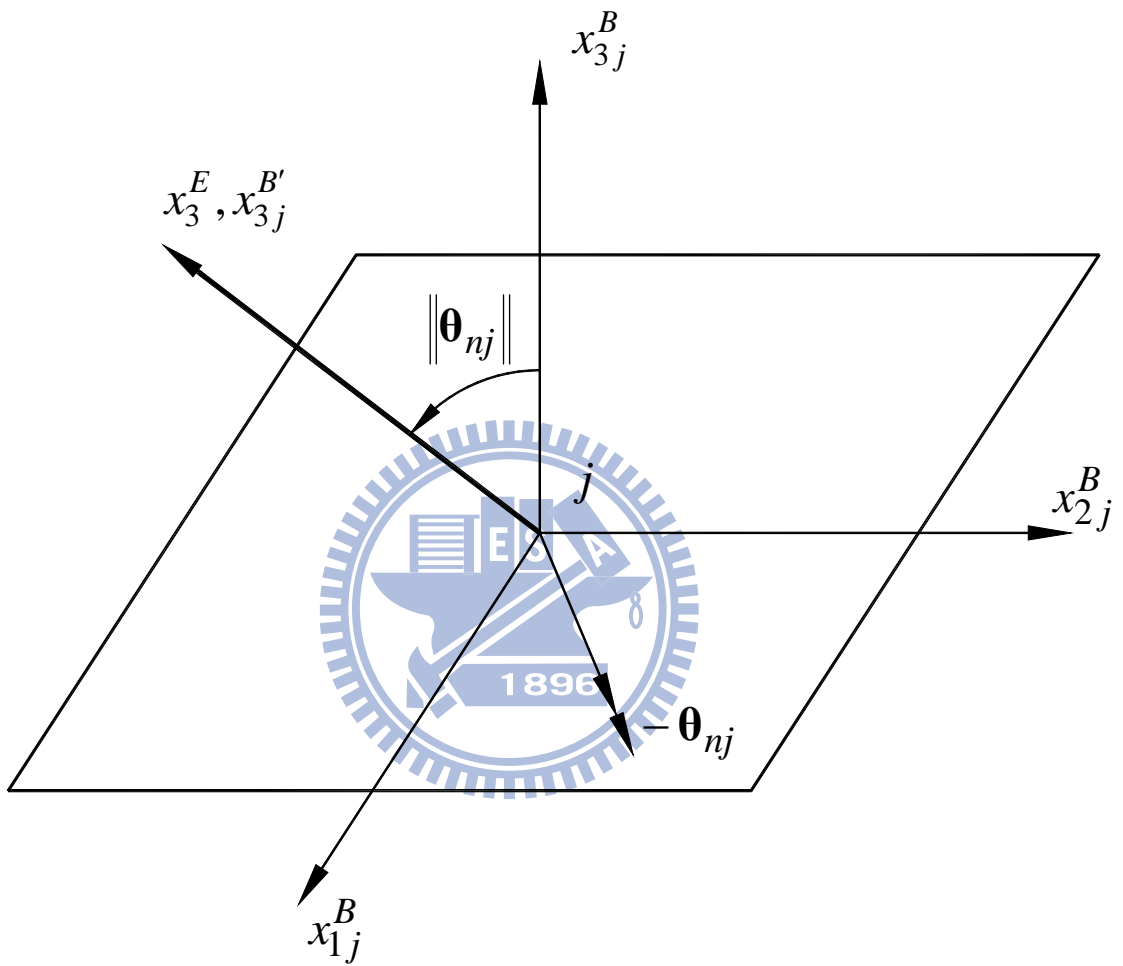


圖 2.4 元素節點 j 中心面之 x_{ij}^B 軸受旋轉向量 $-\theta_{nj}$ 作用的示意圖

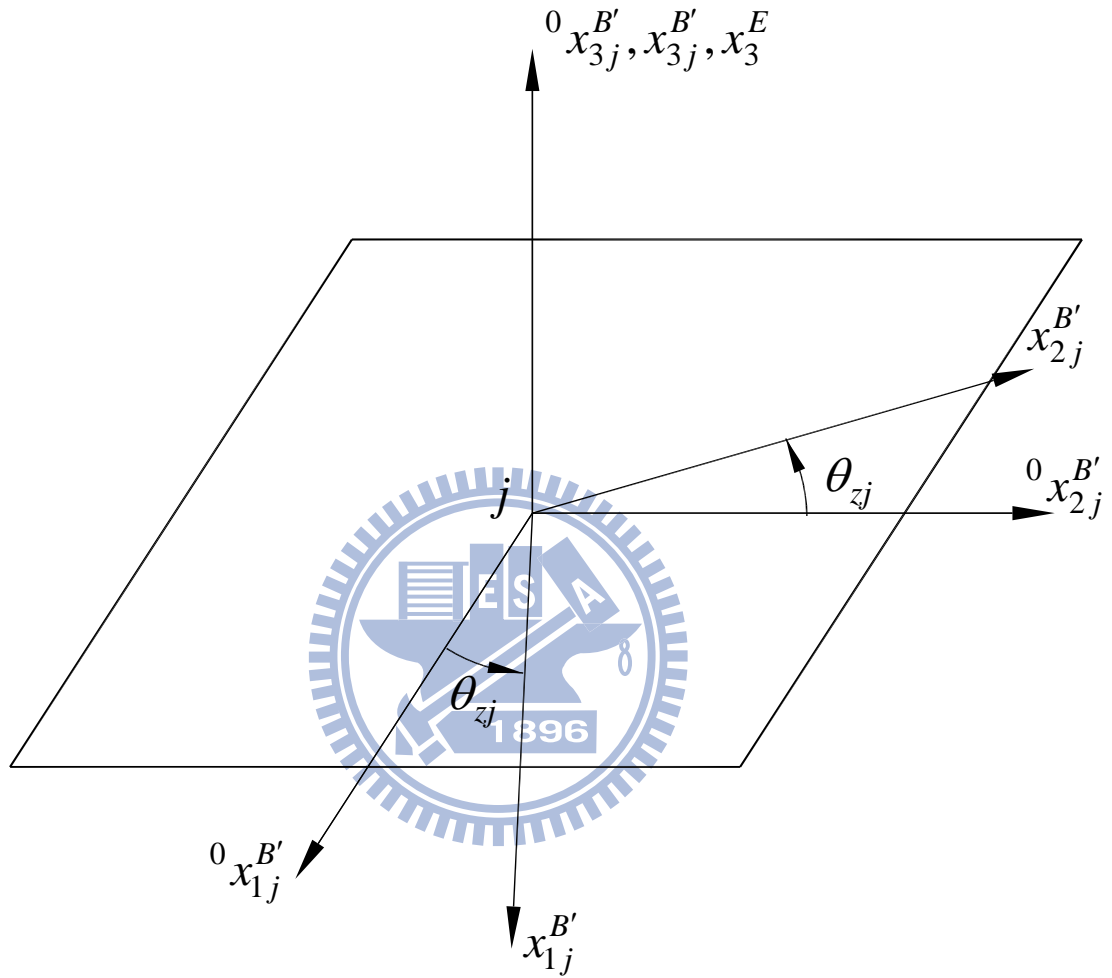


圖 2.5 元素節點 j 中心面之 $\theta_{zj} \mathbf{e}_3^E$ 為將 $0x_{1j}^{B'}$ 軸旋轉到 $x_{1j}^{B'}$ 軸旋轉向量的示意圖

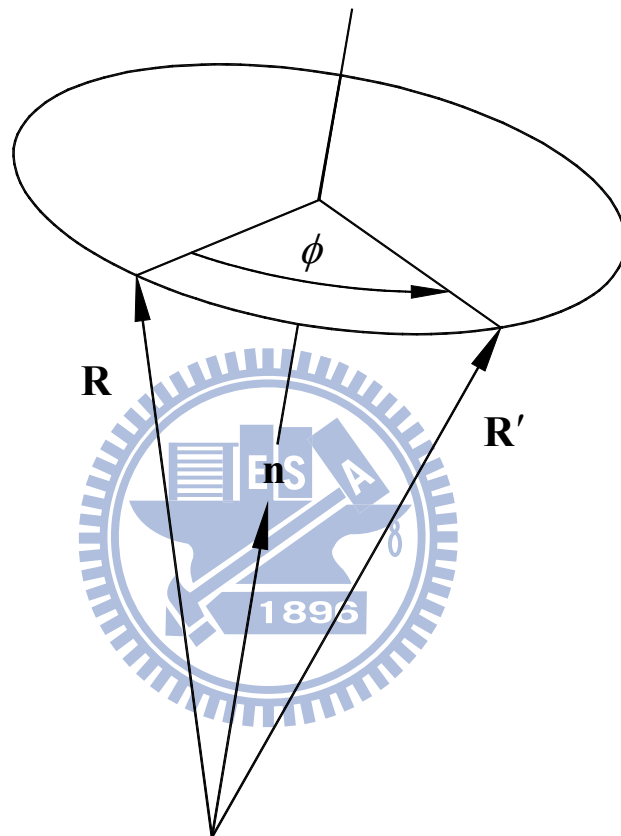
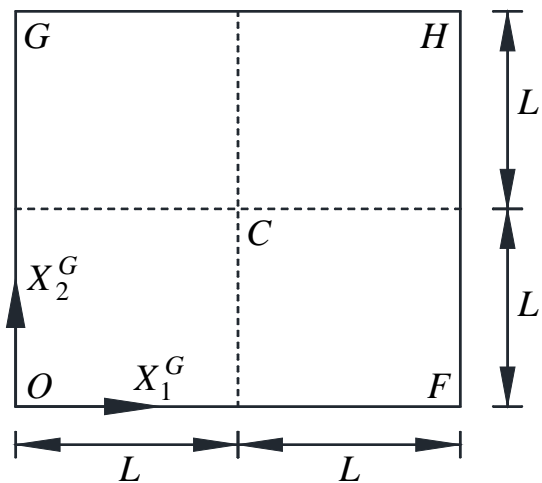


圖 2.6 旋轉向量

(a)



(b)

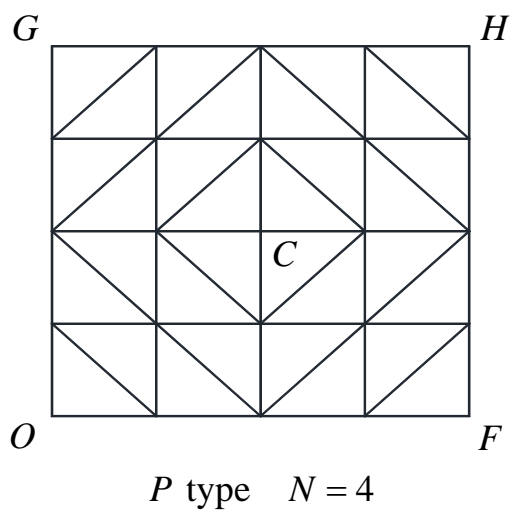
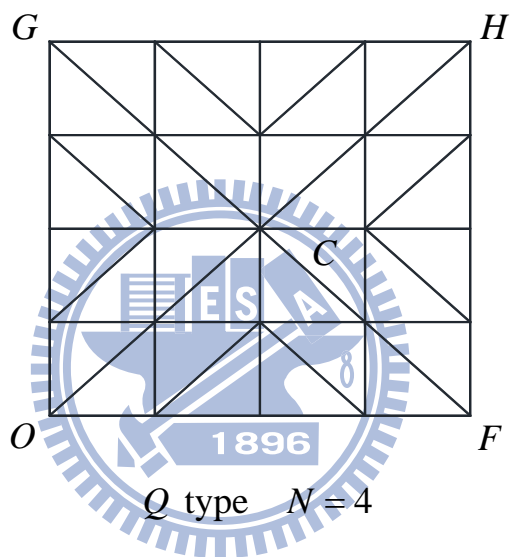
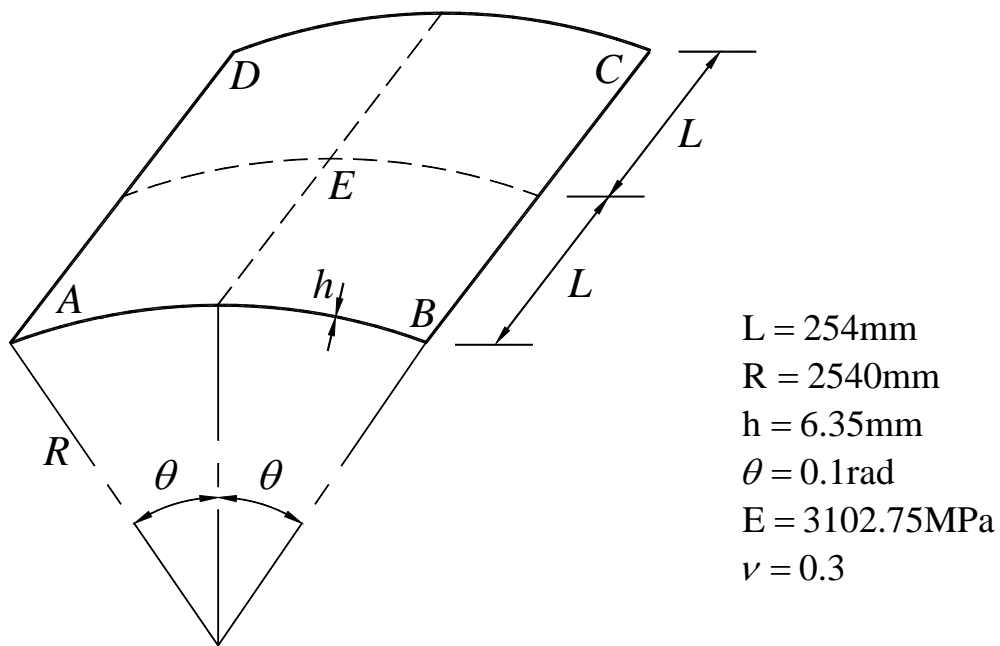
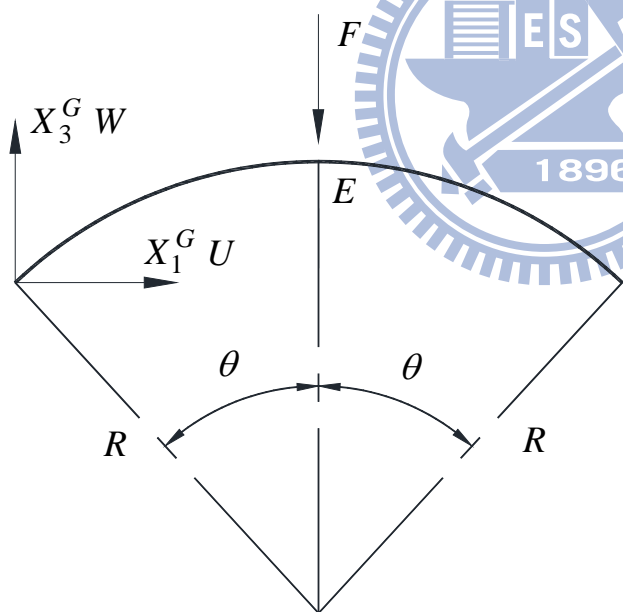


圖 4.1 方形薄板 (a)結構示意圖 (b)網格種類及切割示意圖

(a)



(b)



(c)

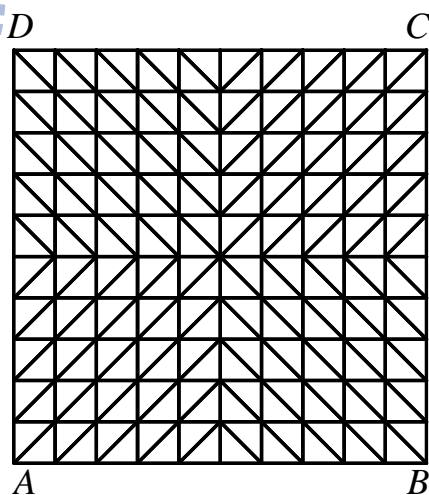


圖 4.2 圓柱殼片段受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖

(b)力負荷圖 (c)網格 10×10 示意圖

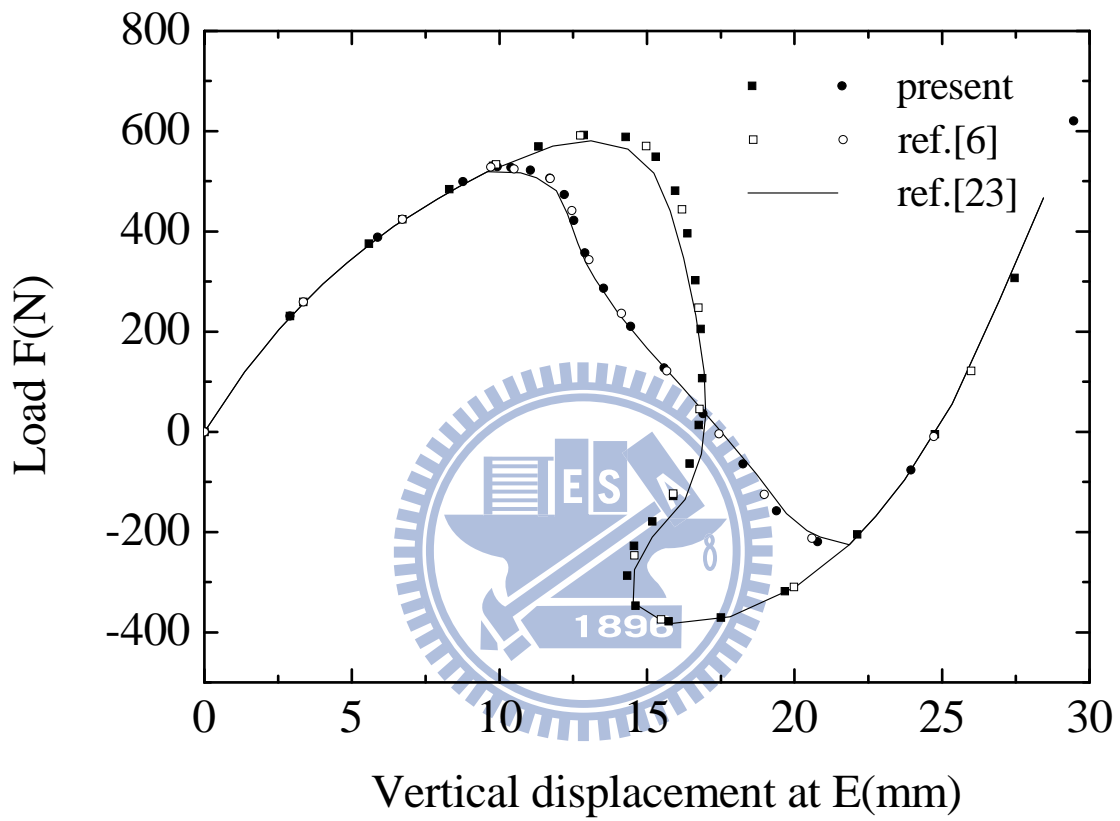
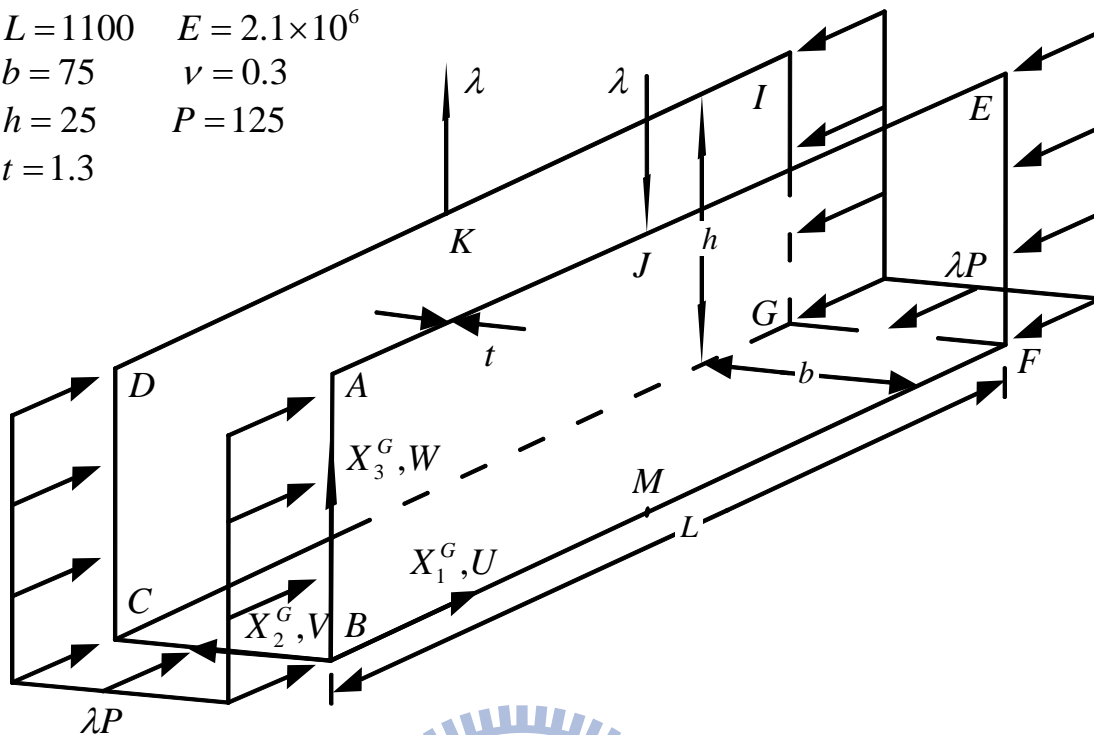


圖 4.3 圓柱殼片段受集中力作用的位移-負荷曲線圖

(a)

$$\begin{aligned} L &= 1100 & E &= 2.1 \times 10^6 \\ b &= 75 & \nu &= 0.3 \\ h &= 25 & P &= 125 \\ t &= 1.3 \end{aligned}$$



(b)

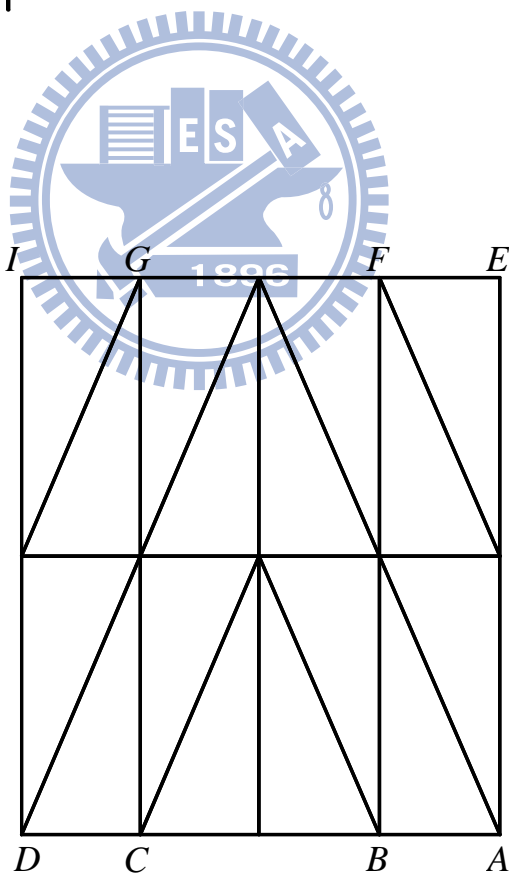


圖 4.4 槽型梁受扭矩之 (a)結構尺寸示意圖

(b)網格(1+2+1)×2 示意圖

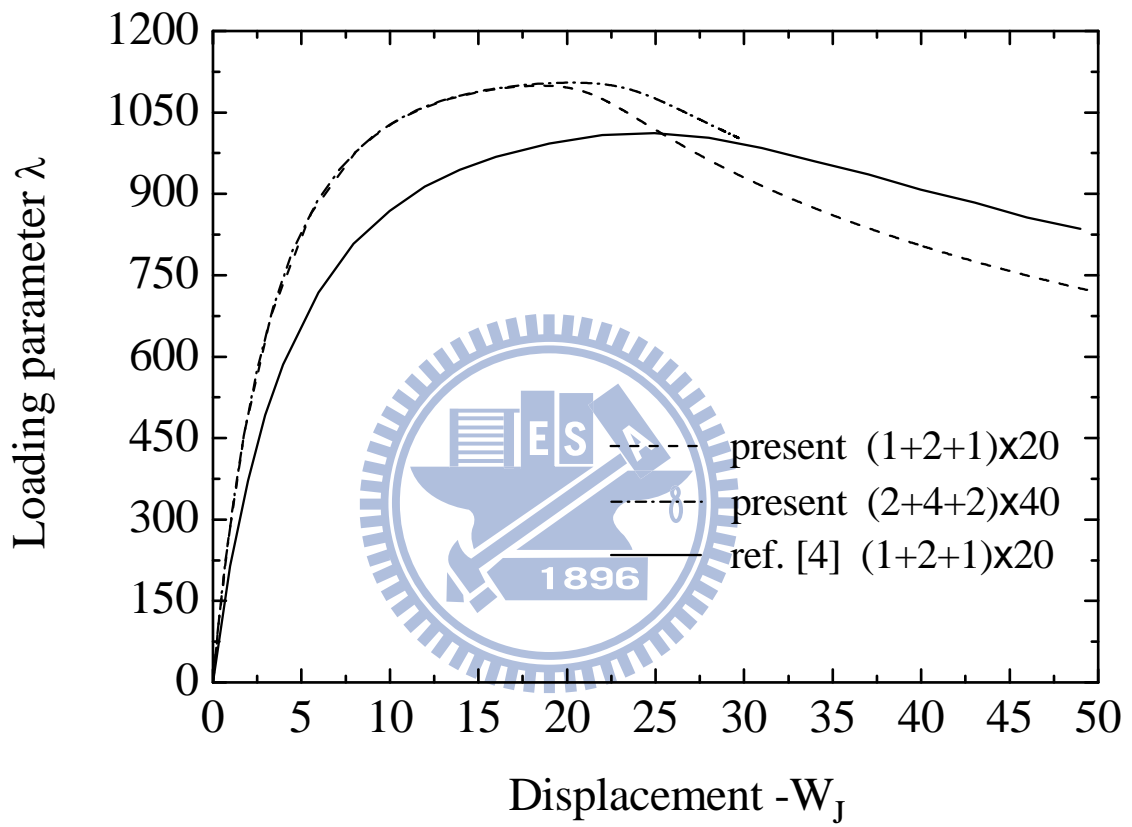
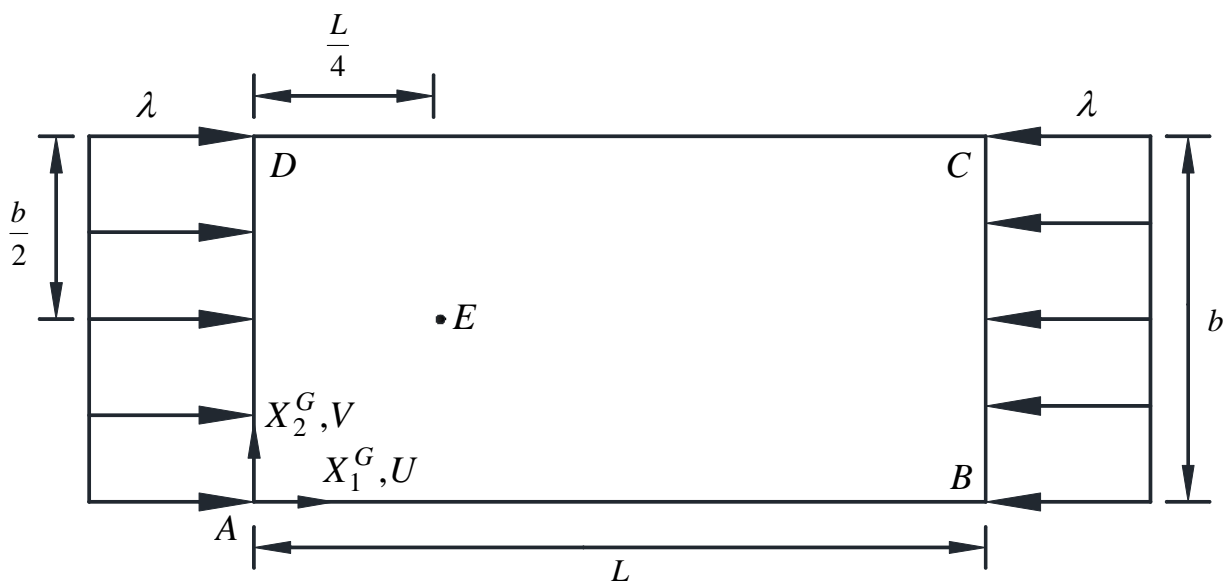


圖 4.5 槽型梁受扭矩的位移-負荷曲線圖

(a)

$$L = 100, b = 50, t = 2, E = 100, \nu = 0.3$$



(b)

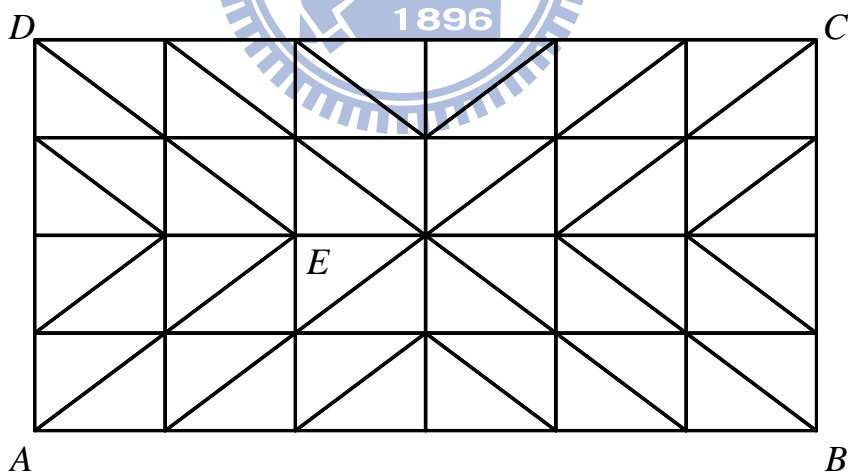


圖 4.6 受均勻壓縮位移之簡支板的 (a)結構尺寸示意圖

(b)網格 4x6 示意圖

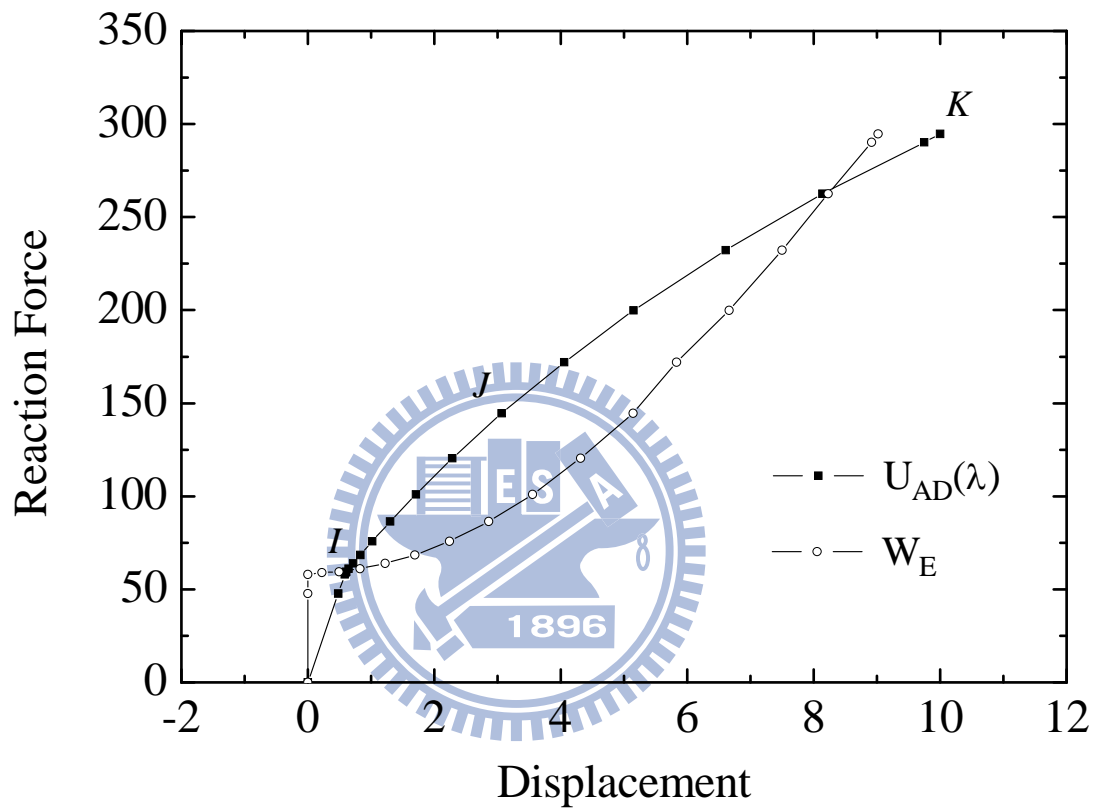


圖 4.7 受均勻壓縮位移負荷之簡支板的位移-負荷曲線圖

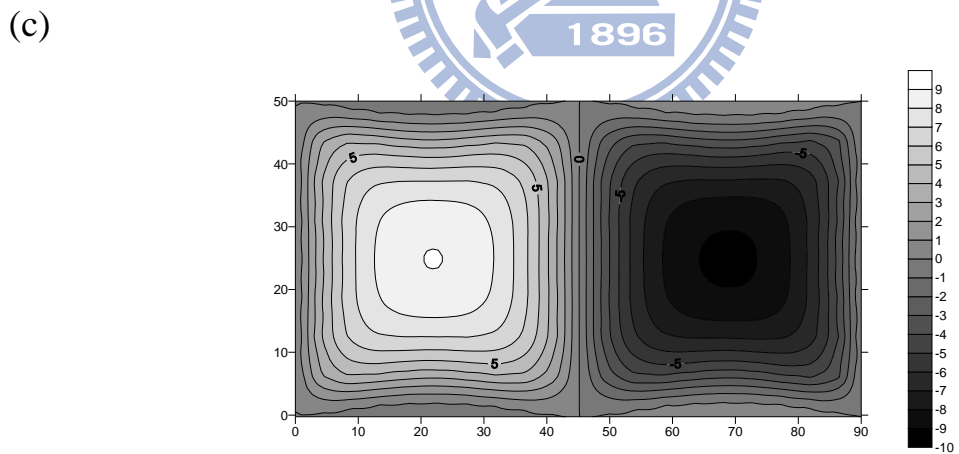
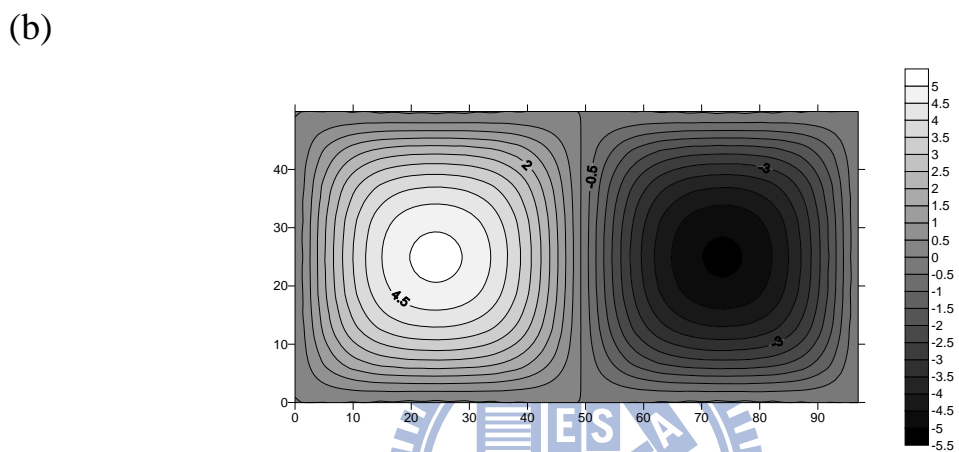
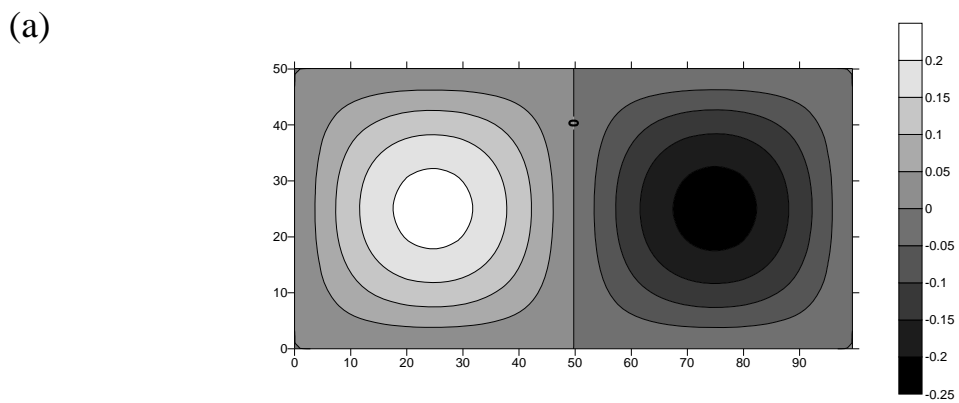
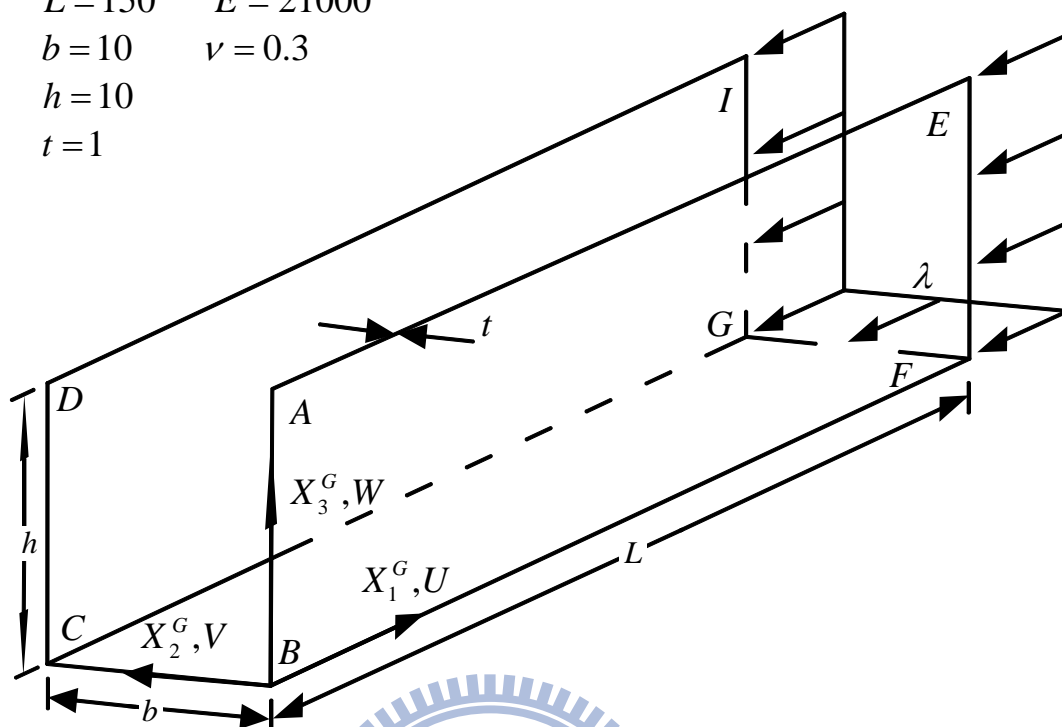


圖 4.8 (a)圖 4.7 中 I 點 ($\lambda = 0.596 W_E = 0.223$) (b)圖 4.7 中 J 點
 ($\lambda = 3.069 W_E = 5.142$) (c)圖 4.7 中 K 點 ($\lambda = 10 W_E = 9.017$)

側向位移場的等高線圖

(a)

$$\begin{aligned} L &= 150 & E &= 21000 \\ b &= 10 & \nu &= 0.3 \\ h &= 10 \\ t &= 1 \end{aligned}$$



(b)

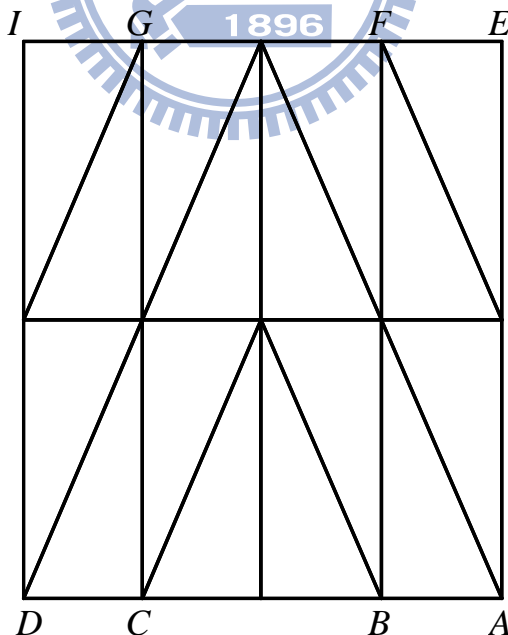
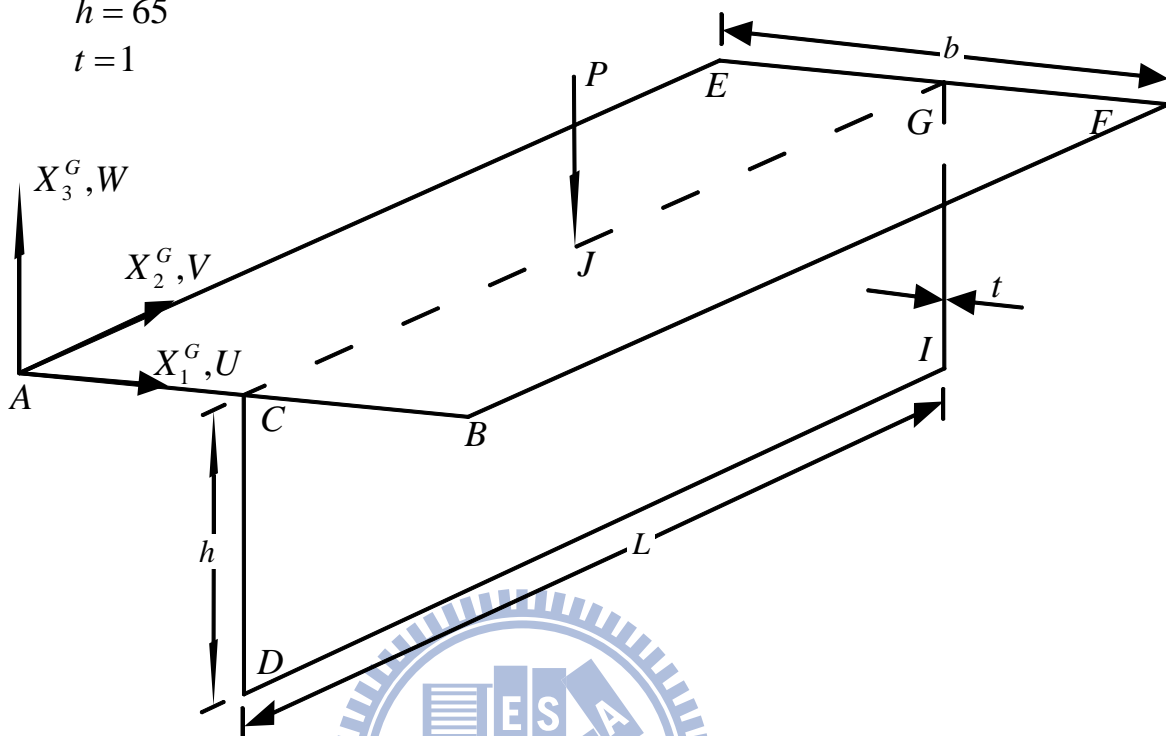


圖 4.9 槽型梁 (a)結構尺寸示意圖

(b)網格 $(1+2+1) \times 2$ 示意圖

(a)

$$\begin{aligned} L &= 450 & E &= 70960 \\ b &= 38 & \nu &= 0.321 \\ h &= 65 \\ t &= 1 \end{aligned}$$



(b)

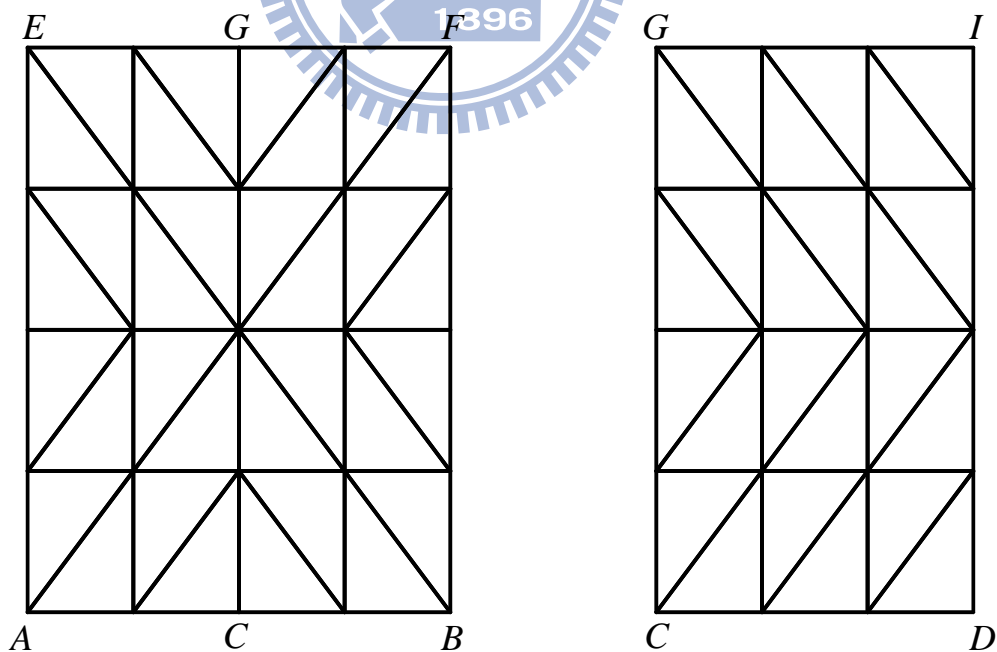


圖 4.10 T 形斷面梁 (a)結構尺寸示意圖

(b)網格(2+2+3)×4 示意圖

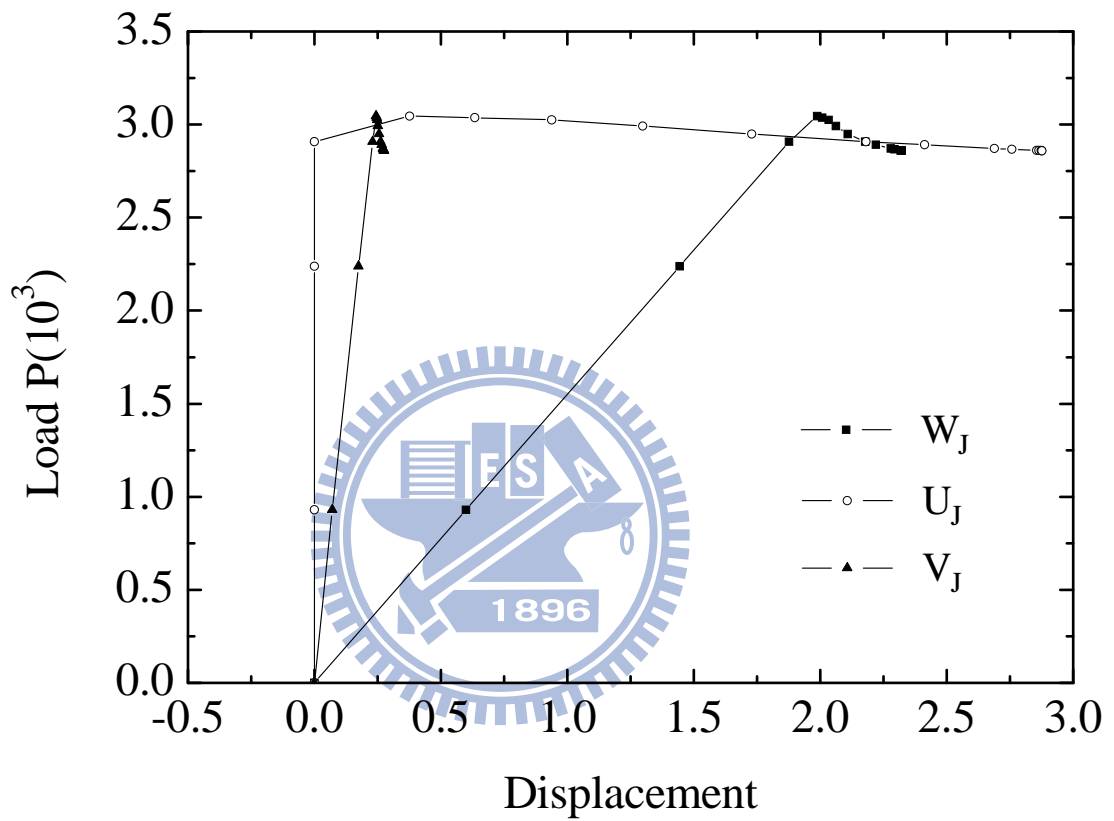


圖 4.11 T 形斷面梁受側力之位移-負荷曲線圖

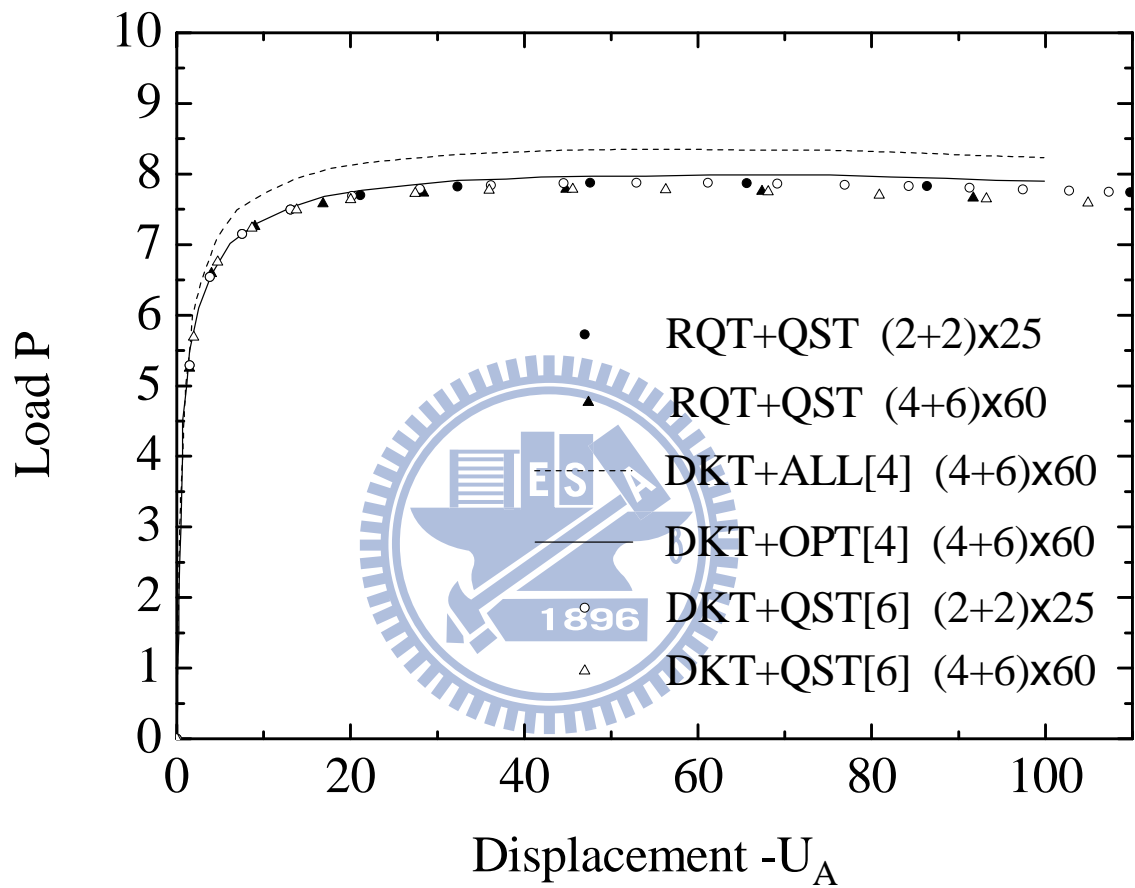
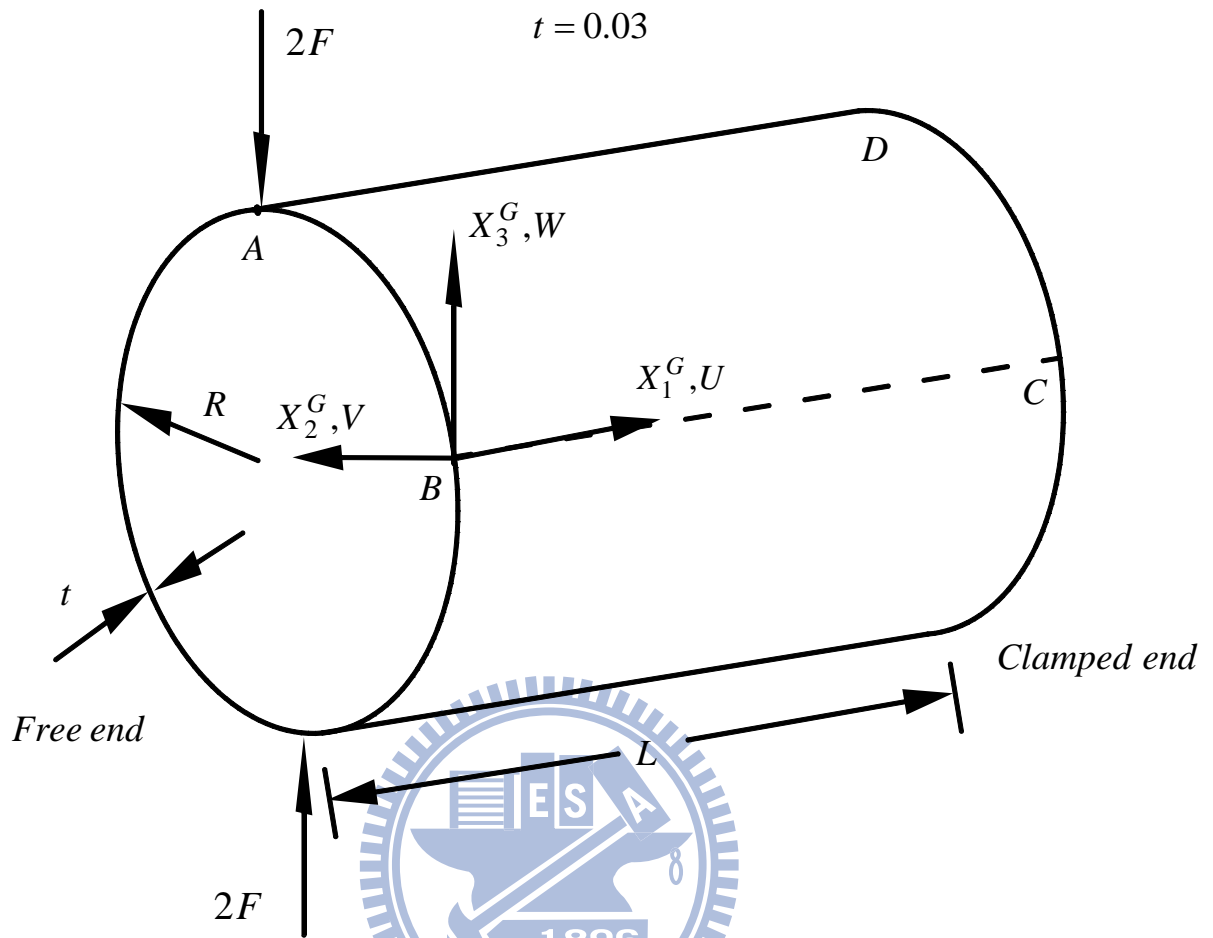


圖 4.13 角型梁受軸向集中力之位移-負荷曲線圖

(a)

$$\begin{aligned} R &= 1.016 & E &= 2.0685 \times 10^7 \\ L &= 3.048 & \nu &= 0.3 \\ t &= 0.03 \end{aligned}$$



(b)

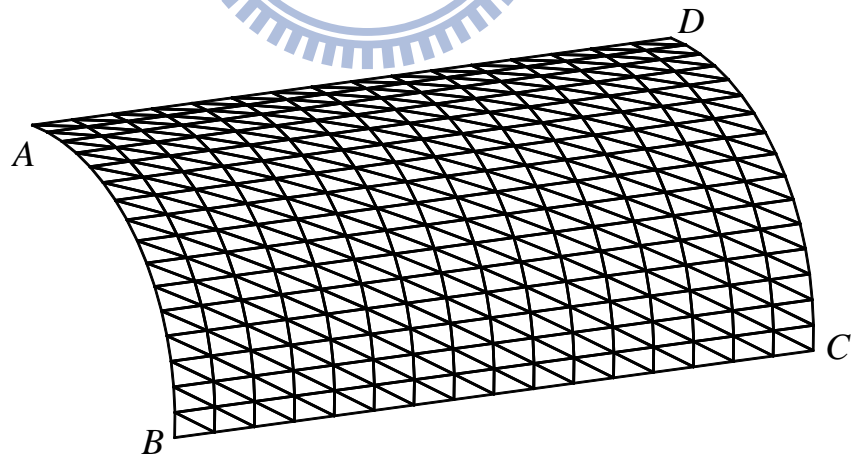


圖 4.14 懸臂圓柱殼 (a)結構尺寸示意圖

(b)網格 16×16 示意圖

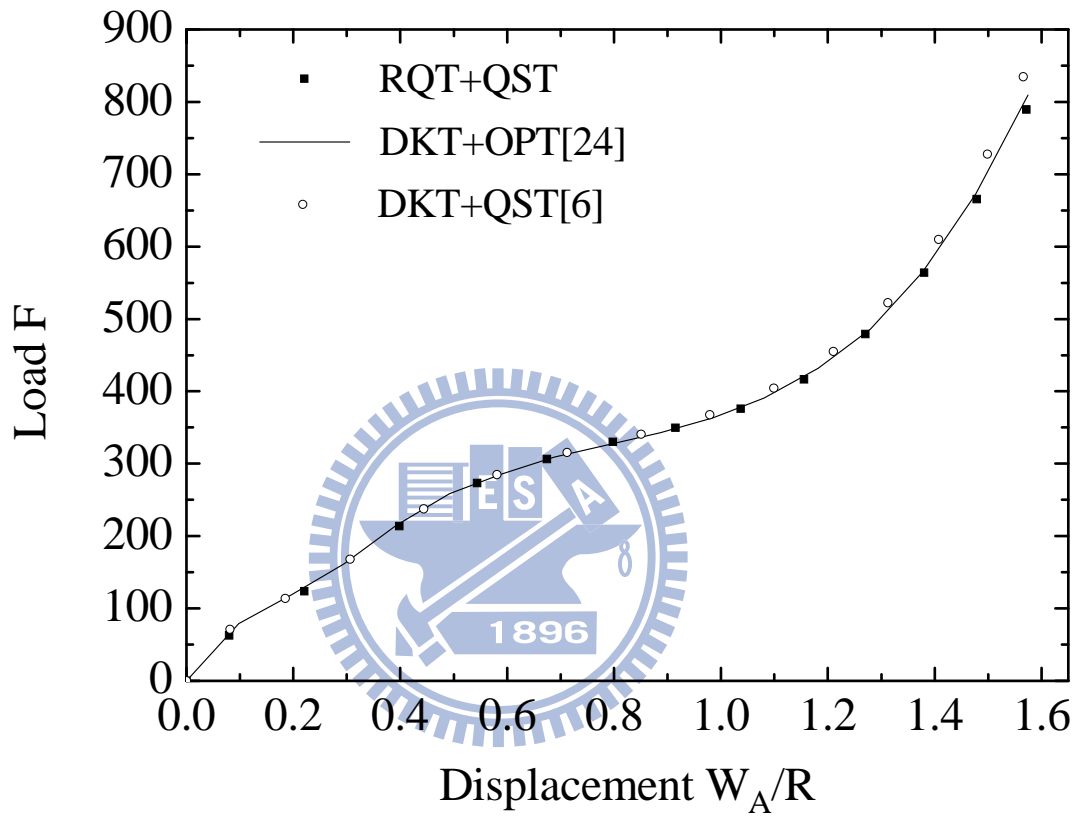
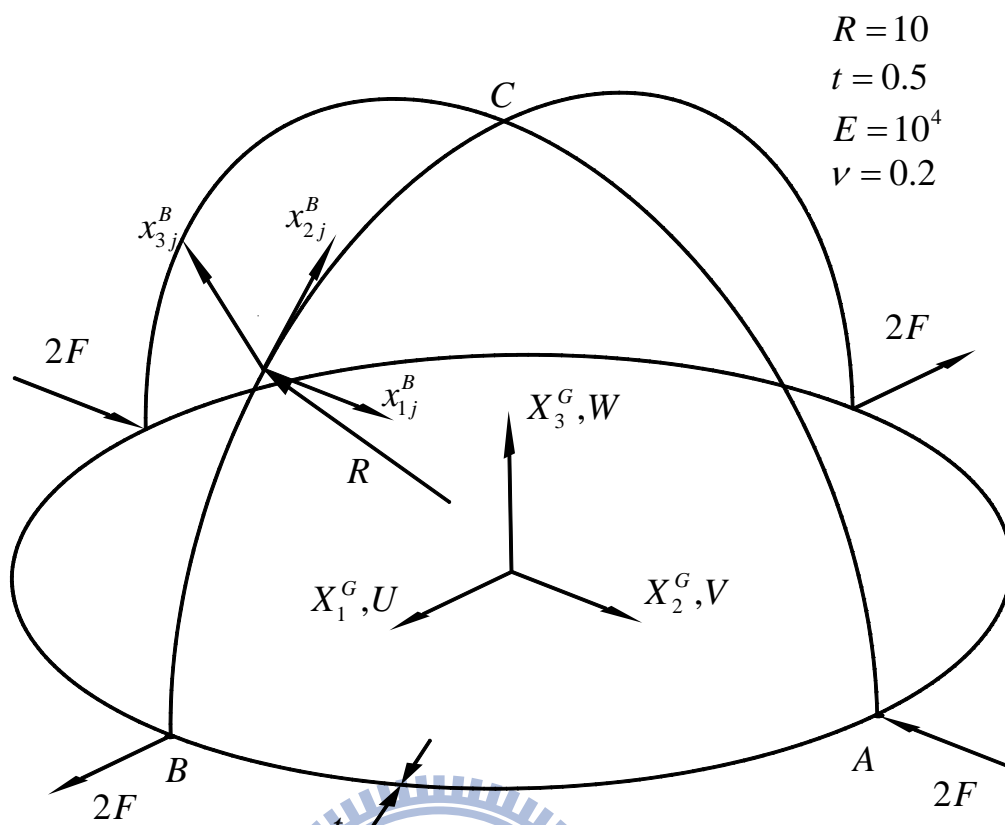


圖 4.15 懸臂圓柱殼受一對端點集中力之位移負-荷曲線圖

(a)



(b)

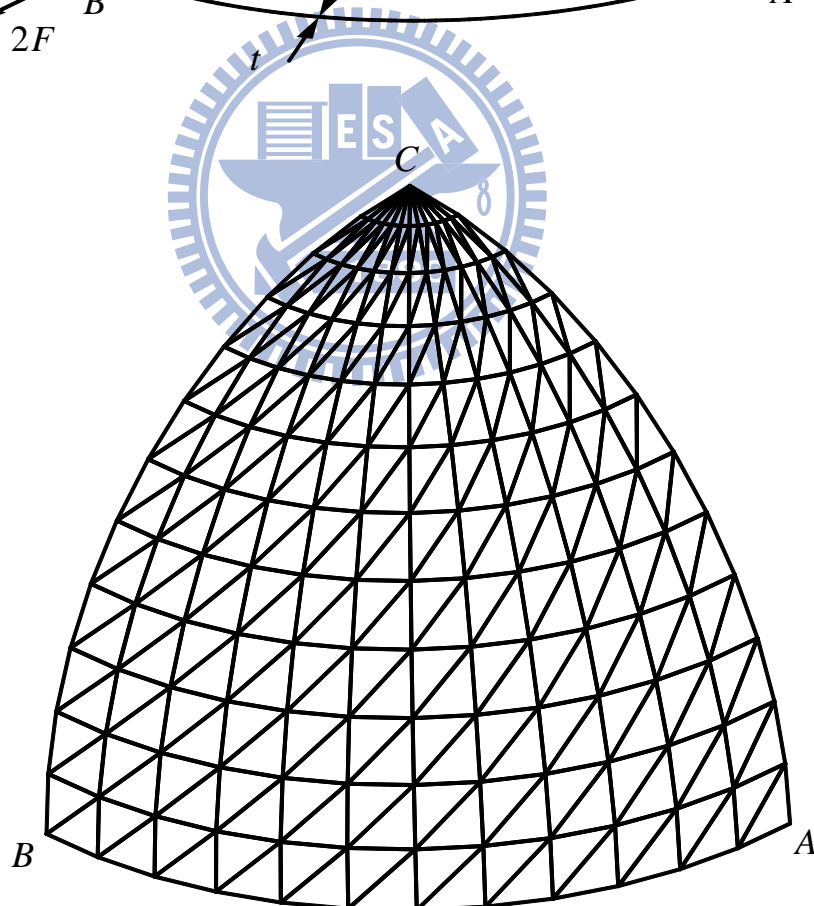


圖 4.16 半球殼 (a)結構尺寸示意圖

(b)網格 12×12 示意圖

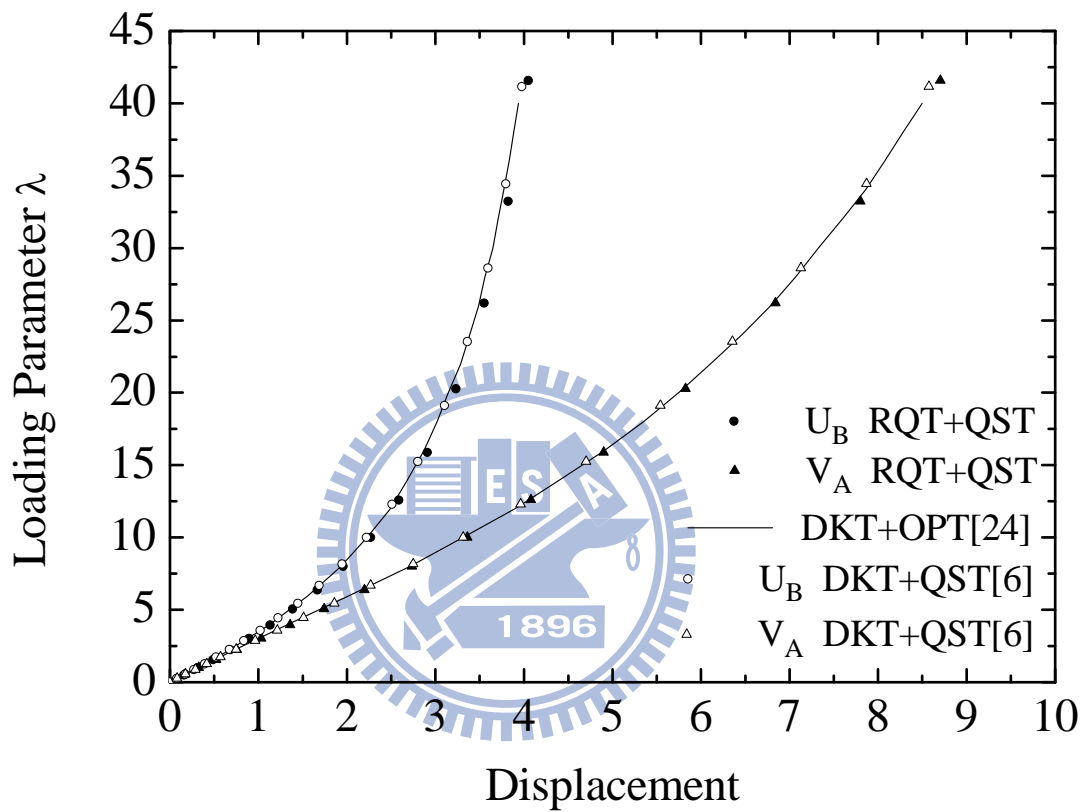


圖 4.17 半球殼受到二對集中力之位移-負荷曲線圖

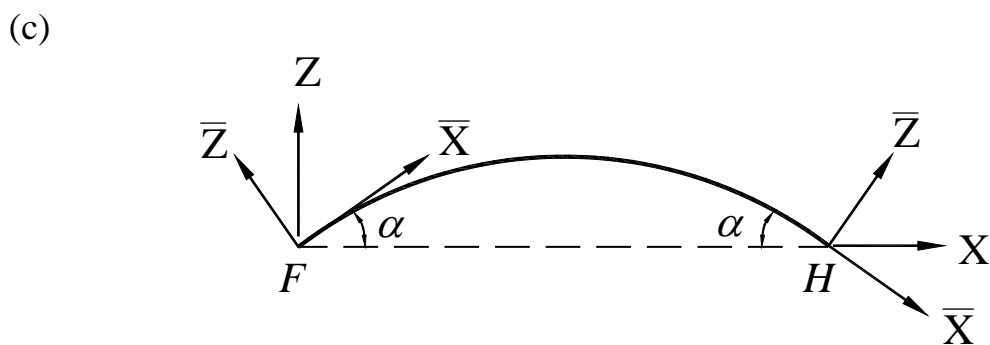
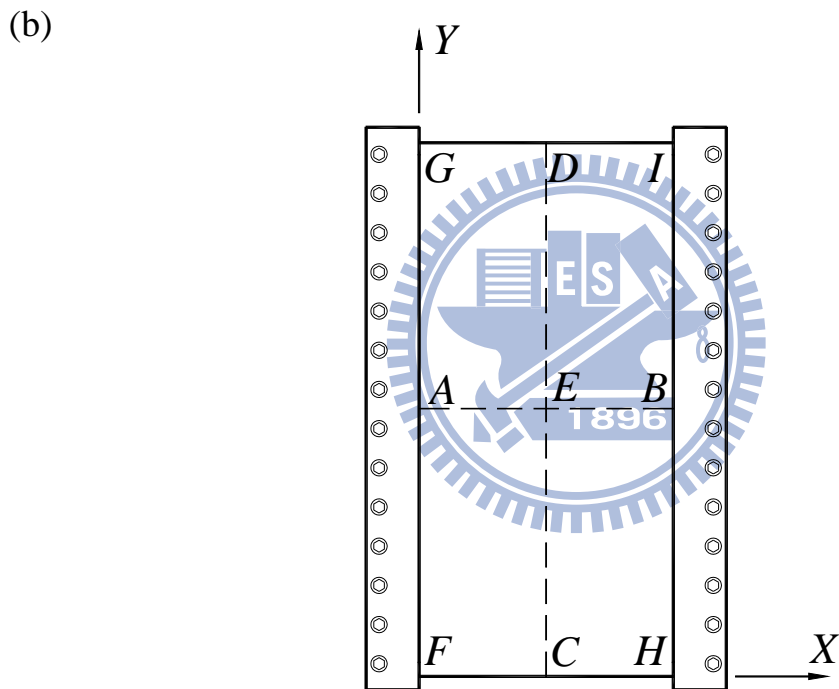
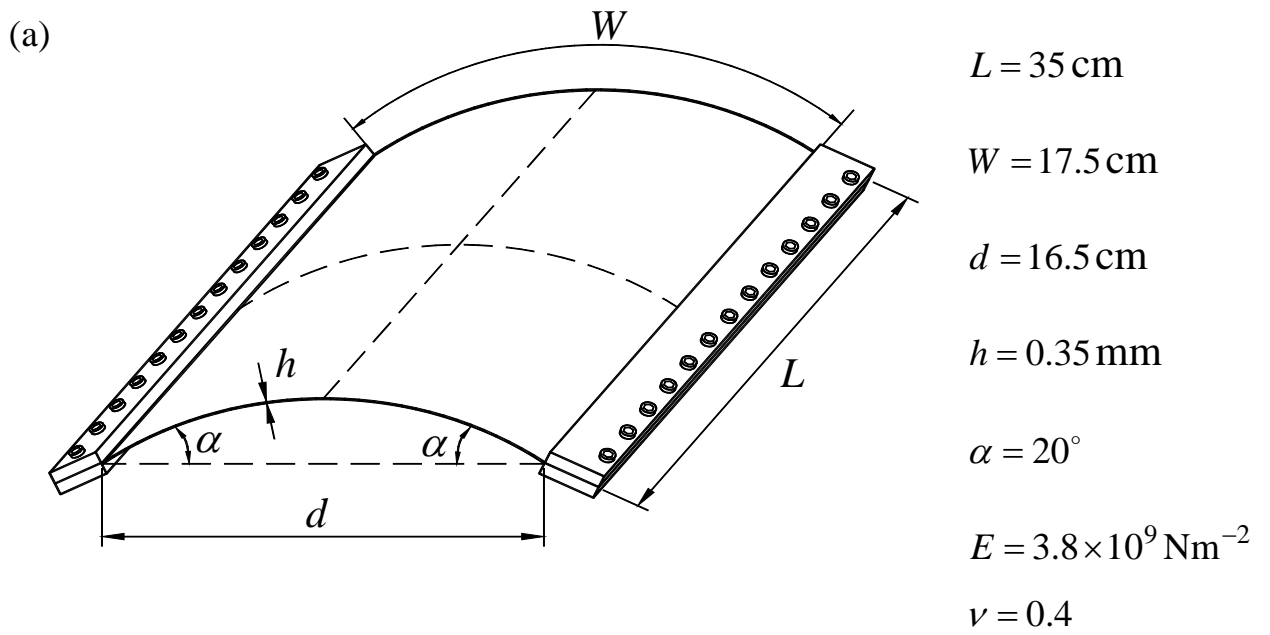


圖 4.18 圓柱薄殼 (a)結構示意圖 (b)俯視圖 (c)前視圖

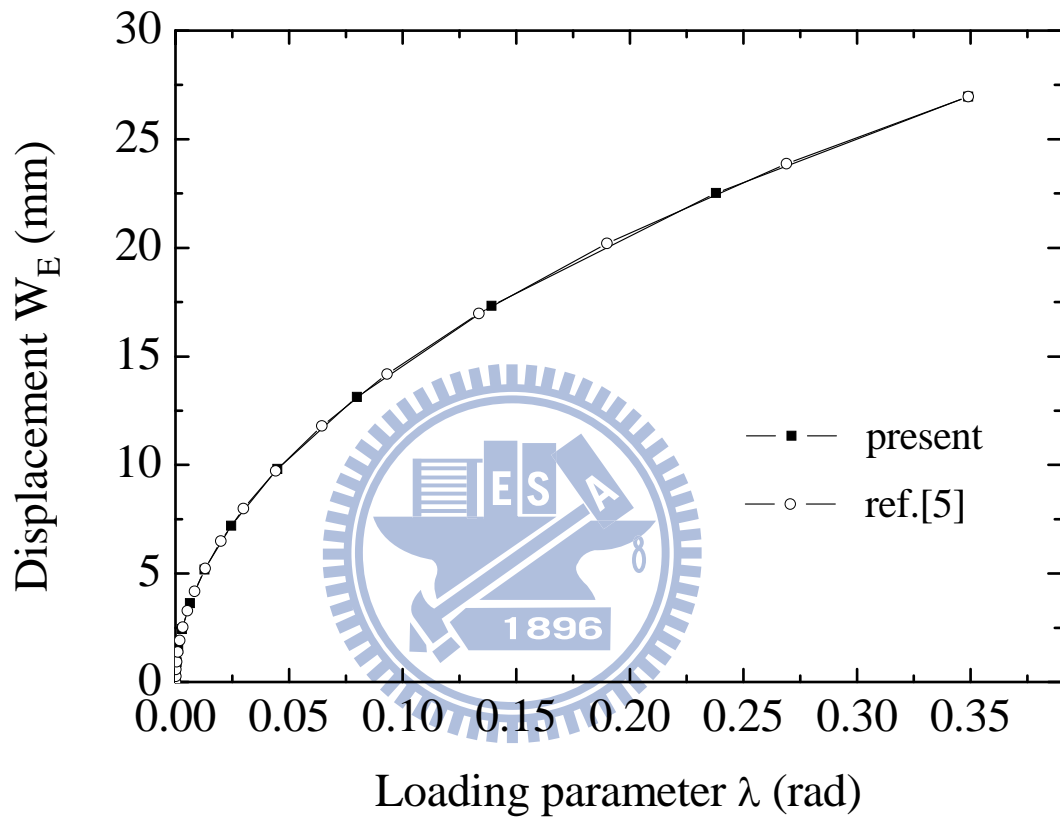


圖 4.19 圓柱薄殼第一階段受力 E 點之負荷參數-位移曲線圖

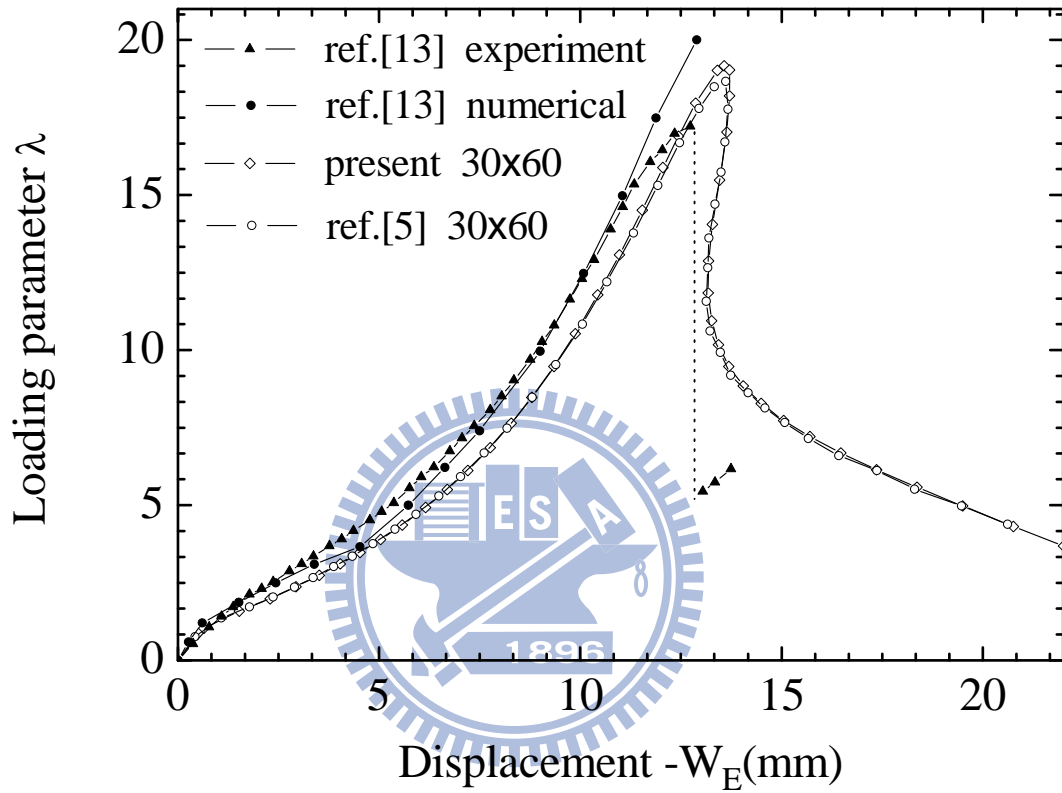


圖 4.20 圓柱薄殼第二階段受力 E 點之位移-負荷曲線圖

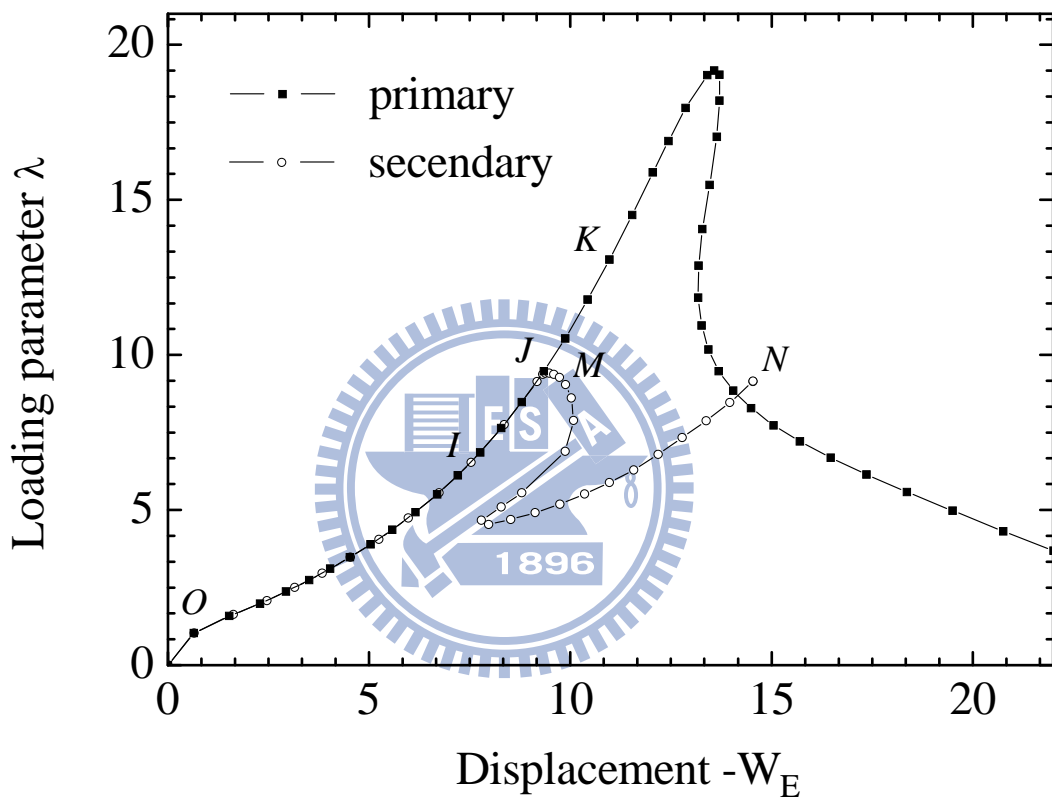
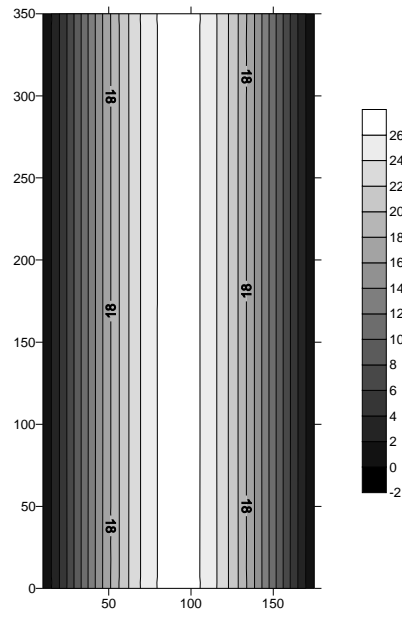


圖 4.21 圓柱薄殼第二階段受力 E 點位移-負荷曲線之主要路徑與次要路徑

(a)



(b)

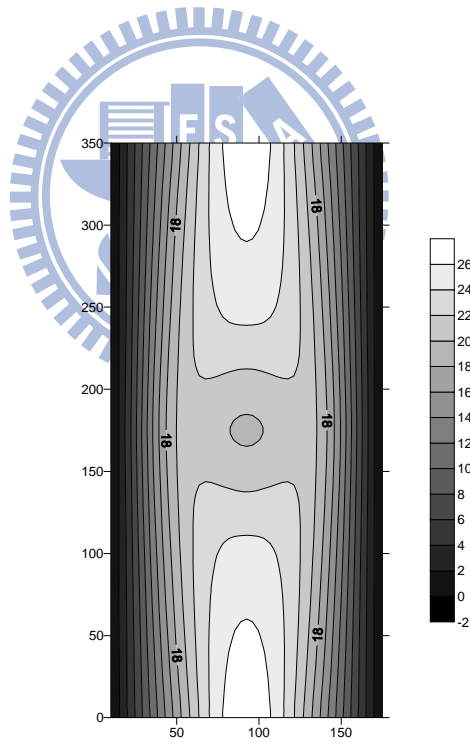
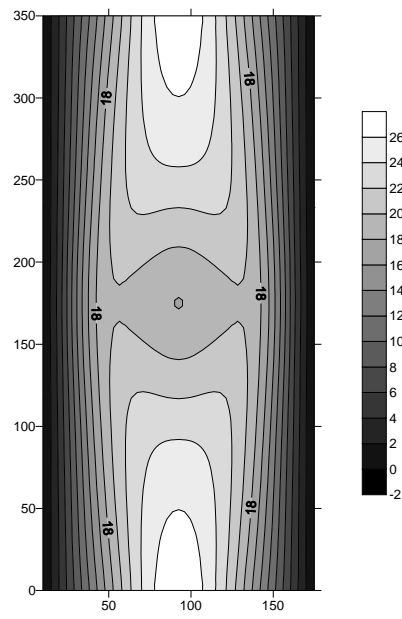


圖 4.22 (a)圖 4.21 中 O 點 ($-W_E = 0 \lambda = 0$) (b)圖 4.21 中 I 點

($-W_E = 7.5309 \lambda = 6.5386$) 側向位移場的等高線圖

(a)



(b)

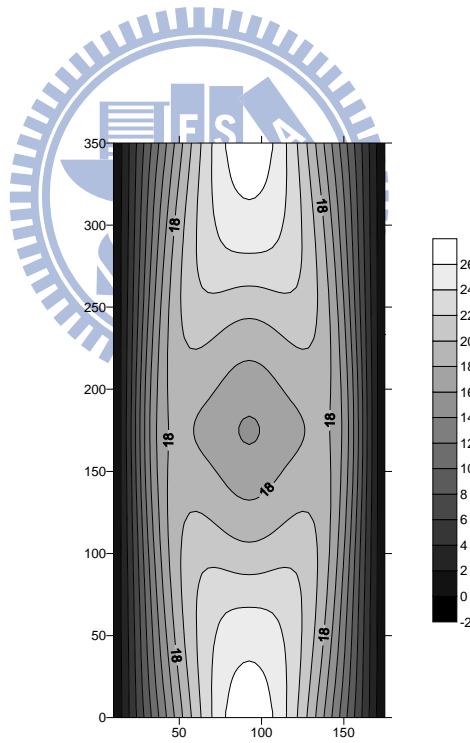
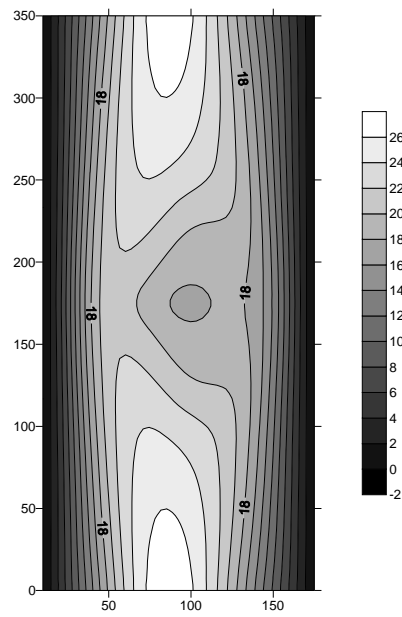


圖 4.23 (a)圖 4.21 中 J 點 ($-W_E = 9.1726$ $\lambda = 9.1452$) (b)圖 4.21 中 K 點

($-W_E = 11.5455$ $\lambda = 14.5136$) 側向位移場的等高線圖

(a)



(b)

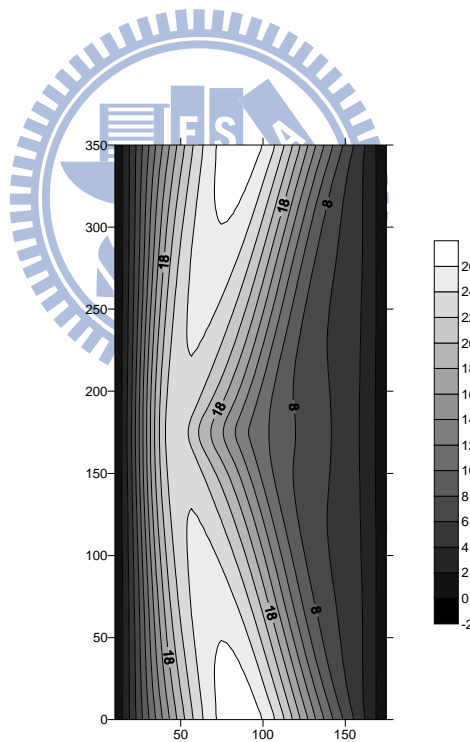


圖 4.24 (a)圖 4.21 中 M 點($-W_E = 9.4736$ $\lambda = 9.4156$) (b)圖 4.21 中 N 點
($-W_E = 14.5441$ $\lambda = 9.14933$) 側向位移場的等高線圖

附錄 A

文獻[13]的實驗是探討一聚酯圓柱薄殼受位移負荷作用後的非線性行為，文中將一薄片的兩個長邊以夾鉗固定，再將其彎成柱狀殼，兩邊夾持端相距一固定距離 d ，並與水平面維持一固定角度 α (如圖 A.1)，然後在薄殼中心施加一向下的位移負荷。在其實驗中隨著位移負荷的增加，結構連續產生四個特殊的幾何變形，如圖 A.2 所示。第一個變形是中心向下位移 $4mm$ 時，薄殼中心附近出現兩個對稱 X、Y 軸的 d-cone (developable cone) (圖 A.2a)。第二個變形是中心向下位移 $11.5mm$ 時，出現兩個新的 d-cone，而四個 d-cone 圍成一個對薄殼中心轉了一個角度的菱形(圖 A.2b)。第三個變形是中心向下位移 $12.5mm$ 時，四個 d-cone 的連線形成一個梯形(圖 A.2c)。第四個變形是中心向下位移 $15mm$ 時，梯形底邊兩個 d-cone 移到薄殼自由端的邊界時，產生一個不連續的變化，使薄殼變成波浪狀的圓柱殼(圖 A.2d)。文獻[13]提到殼的長度若不夠長，則無法觀察到菱形及後來的梯形圖形這兩種型態，會提早產生波浪狀的柱狀殼。薄片的尺寸和材料參數如下：

長度 $L = 35cm$

寬度 $W = 17.5cm$

厚度 $h = 0.35mm$

楊氏係數 $E = 3.8 \times 10^9 N/m^2$

$\alpha = 20^\circ$
 $d = 16.5\text{cm}$

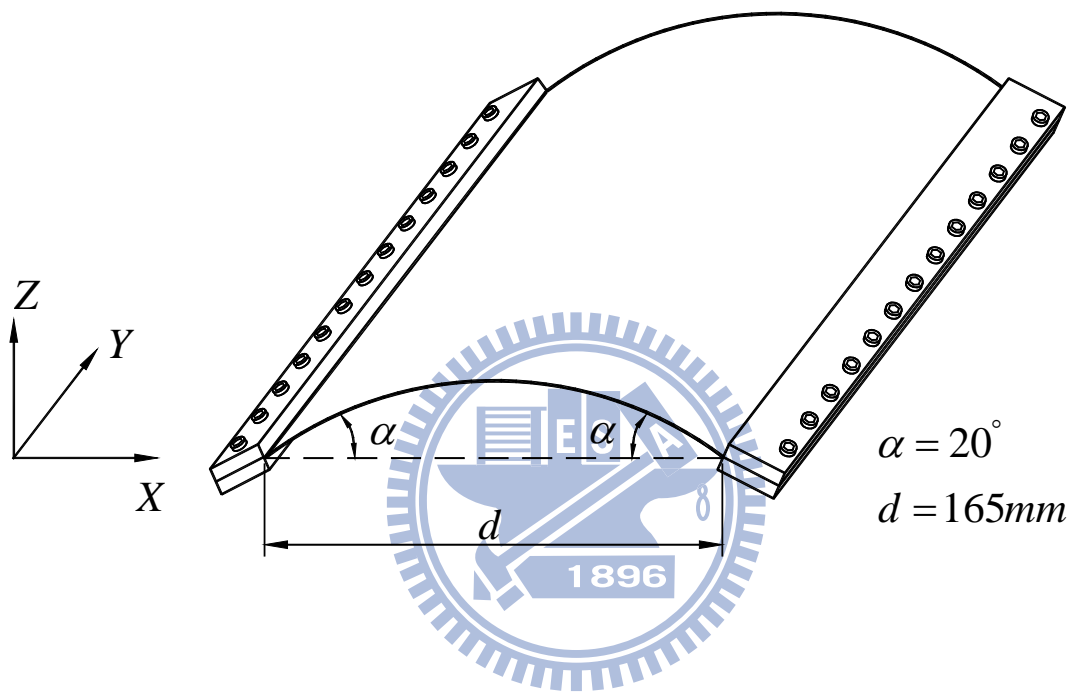


圖 A.1 柱狀薄板結構示意圖

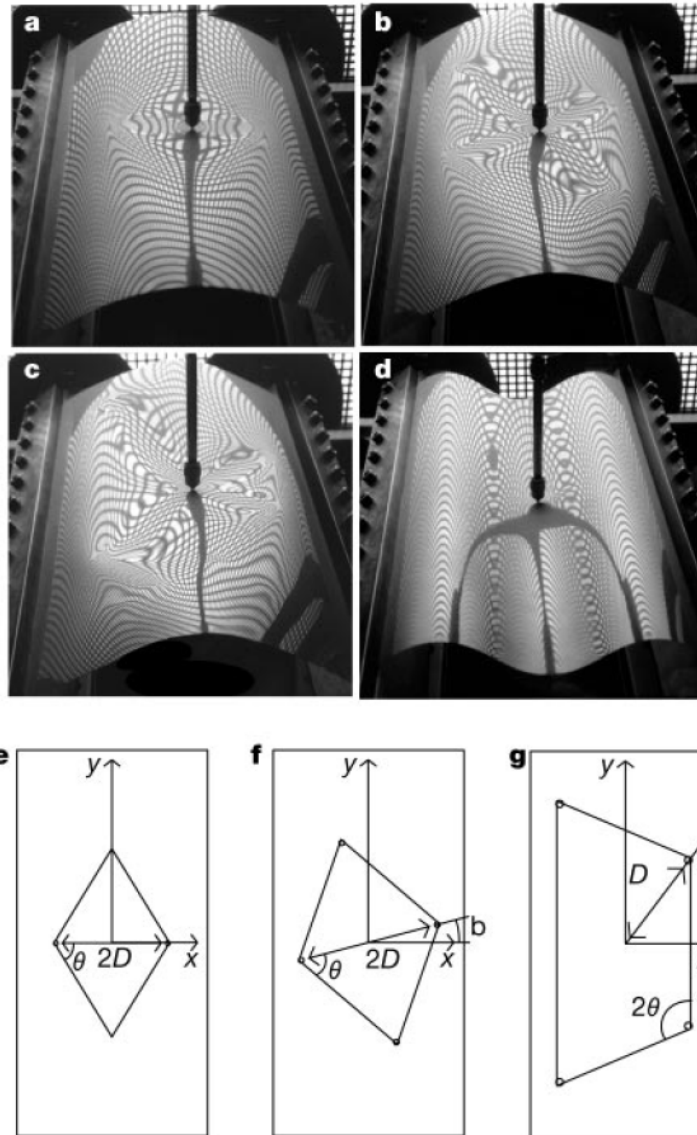


圖 A.2 文獻[13]實驗所觀察到四種變形轉換(a-d)及
對應於 a-c 圖結構的上視圖(e-g)

附錄 B

B.1 面積座標的定義

如圖 B.1 所示， x 、 y 為三角形中任一點 P 在直角座標中的座標值，將 P 點與三角形的三個頂點作連線，就形成了三個小三角形，三個頂點 1、2、3 相對應的三個小三角形的面積分別為 A_1 、 A_2 、 A_3 ，令面積座標

$$\lambda = L_1 = \frac{A_1}{A} \quad (\text{B.1})$$

$$\xi = L_2 = \frac{A_2}{A} \quad (\text{B.2})$$

$$\eta = L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (\text{B.3})$$

$$A = \frac{1}{2}(x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21}) \quad (\text{B.4})$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (\text{B.5})$$

$$y_{ij} = y_i - y_j \quad (\text{B.6})$$

其中 A 為三角形 123 的面積， x_i 、 y_i 代表三角形頂點 i 的 x 和 y 座標。 λ 、 ξ 、 η 稱為三角形中 P 點的面積座標，固

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \quad (\text{B.7})$$

由(B.1)式至(B.3)式與(B.7)式可以得出

$$\lambda + \xi + \eta = 1 \quad (\text{B.8})$$

本文在 QST 平面元素推導中，使用 λ 、 ξ 、 η 為面積座標表示方式，且 λ 、 ξ 、 η 之間不是互相獨立，因此任意函數可以表示為 $\phi = \phi(\xi, \eta)$ 。在 RQT 板元素推導中，使用 L_1 、 L_2 、 L_3 為面積座標表示方式，且 L_1 、 L_2 、 L_3 之間視為互相獨立，因此任意函數可以表示為 $\phi = \phi(L_1, L_2, L_3)$ 。

B.2 面積座標與直角座標的關係

P 點之面積座標與直角座標之間的關係可表示成：

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

與

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_{23} & x_{32} \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_{31} & x_{13} \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

若任意函數為 $\phi = \phi(\xi, \eta)$ 面積座標函數，則其對 x 或 y 的微分可表示成

$$\begin{Bmatrix} \phi, x \\ \phi, y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi, x & \eta, x \\ \xi, y & \eta, y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi, \xi \\ \phi, \eta \end{Bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

(B.11) 式可以利用 (B.10) 式微分得出

$$\begin{bmatrix} \xi, x & \eta, x \\ \xi, y & \eta, y \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & y_{12} \\ x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

若任意函數為 $\phi = \phi(L_1, L_2, L_3)$ 面積座標函數，則其對 x 或 y 的微分為 [21]：

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2A} (b_1 \frac{\partial \phi}{\partial L_1} + b_2 \frac{\partial \phi}{\partial L_2} + b_3 \frac{\partial \phi}{\partial L_3})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2A} (c_1 \frac{\partial \phi}{\partial L_1} + c_2 \frac{\partial \phi}{\partial L_2} + c_3 \frac{\partial \phi}{\partial L_3})$$

其中

$$b_i = y_i - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$

若 $i = 1$ ，則 $j = 2$ 、 $k = 3$

$$i = 2，則 j = 3、k = 1$$

$i=3$ ，則 $j=1$ 、 $k=2$

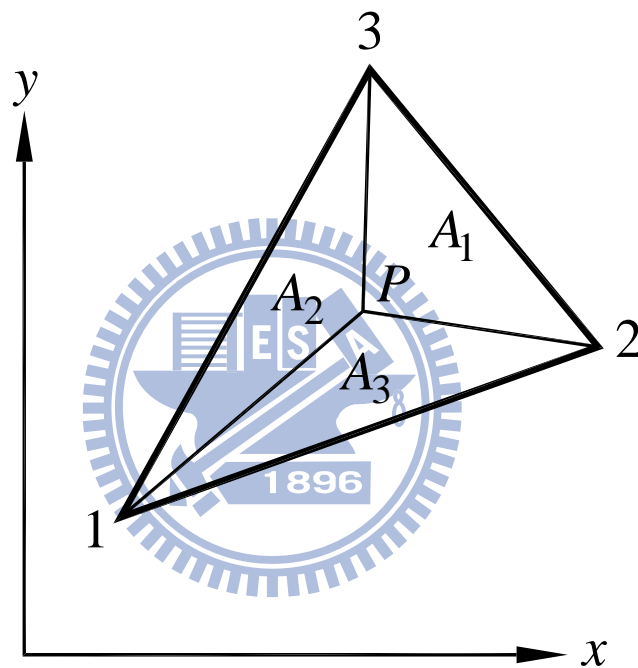


圖 B.1 面積座標表示方法

附錄 C

C.1 QST 元素的形狀函數及其微分

在(2.1)式與(2.2)式中 N_i ($i=1, \dots, 9$) 及其對 ξ 、 η 的偏微分，可表示為：

i	N_i	$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
1	$\lambda^2(3-2\lambda)+2a$	$6\lambda(-1+\lambda)+2b$	$6\lambda(-1+\lambda)+2c$
2	$\xi\lambda^2+a/2$	$\lambda(\lambda-2\xi)+b/2$	$-2\xi\lambda+c/2$
3	$\eta\lambda^2+a/2$	$-2\lambda\eta+b/2$	$\lambda(\lambda-2\eta)+c/2$
4	$\xi^2(3-2\xi)+2a$	$6\xi(1-\xi)+2b$	$2c$
5	$\xi^2(-1+\xi)-a$	$\xi(-2+3\xi)-b$	$-c$
6	$\xi^2\eta+a/2$	$2\xi\eta+b/2$	$\xi^2+c/2$
7	$\eta^2(3-2\eta)+2a$	$2b$	$6\eta(1-\eta)+2c$
8	$\xi\eta^2+a/2$	$\eta^2+b/2$	$2\xi\eta+c/2$
9	$\eta^2(-1+\eta)-a$	$-b$	$\eta(-2+3\eta)-c$

其中

$$\lambda = 1 - \xi - \eta \tag{B.1}$$

$$a = \xi\eta\lambda \tag{B.2}$$

$$b = \eta(\lambda - \xi) \tag{B.3}$$

$$c = \xi(\lambda - \eta) \tag{B.4}$$

在(2.73)式中的 $\mathbf{N}_{u,x}$ 、 $\mathbf{N}_{u,y}$ 、 $\mathbf{N}_{v,x}$ 、 $\mathbf{N}_{v,y}$ 為：

$$\mathbf{N}_{u,x} = \xi_{,x} \mathbf{N}_{u,\xi} + \eta_{,x} \mathbf{N}_{u,\eta} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{N}_{u,y} = \xi_{,y} \mathbf{N}_{u,\xi} + \eta_{,y} \mathbf{N}_{u,\eta} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{N}_{v,x} = \xi_{,x} \mathbf{N}_{v,\xi} + \eta_{,x} \mathbf{N}_{v,\eta} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{N}_{v,y} = \xi_{,y} \mathbf{N}_{v,\xi} + \eta_{,y} \mathbf{N}_{v,\eta} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{N}_{u,\xi} = \begin{Bmatrix} N_{1,\xi} \\ 0 \\ N_{2,\xi} \\ N_{3,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{4,\xi} \\ 0 \\ N_{5,\xi} \\ N_{6,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{7,\xi} \\ 0 \\ N_{8,\xi} \\ N_{9,\xi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{N}_{u,\eta} = \begin{Bmatrix} N_{1,\eta} \\ 0 \\ N_{2,\eta} \\ N_{3,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{4,\eta} \\ 0 \\ N_{5,\eta} \\ N_{6,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{7,\eta} \\ 0 \\ N_{8,\eta} \\ N_{9,\eta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{N}_{v,\xi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{1,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{2,\xi} \\ N_{3,\xi} \\ 0 \\ N_{4,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{5,\xi} \\ N_{6,\xi} \\ 0 \\ N_{7,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{8,\xi} \\ N_{9,\xi} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{N}_{v,\eta} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{1,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{2,\eta} \\ N_{3,\eta} \\ 0 \\ N_{4,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{5,\eta} \\ N_{6,\eta} \\ 0 \\ N_{7,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{8,\eta} \\ N_{9,\eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

其中 $\xi_{,x}$ 、 $\eta_{,x}$ 、 $\xi_{,y}$ 、 $\eta_{,y}$ 已在附錄 B 中之(B.13)式定義。

C.2 RQT 板元素的形狀函數

形狀函數 $N_{b1} \sim N_{b6}$ 的表示式為：

$$N_{b1} = L_1^5 + 5L_1^4L_2 + 5L_1^4L_3 + 10L_1^3L_2^2 + 10L_1^3L_3^2 + 20L_1^3L_2L_3 + 30r_{21}L_1^2L_2L_3^2 + 30r_{31}L_1^2L_3L_2^2$$

$$N_{b2} = -b_3L_1^4L_2 + b_2L_1^4L_3 - 4b_3L_1^3L_2^2 + 4b_2L_1^3L_3^2 + 4(b_2 - b_3)L_1^3L_2L_3 \\ + (3b_1 + 15r_{21}b_2)L_1^2L_2L_3 - (3b_1 + 15r_{31}b_3)L_1^2L_3L_2^2$$

$$N_{b3} = -c_3L_1^4L_2 + c_2L_1^4L_3 - 4c_3L_1^3L_2^2 + 4c_2L_1^3L_3^2 - 4(c_3 - c_2)L_1^3L_2L_3 \\ + (3c_1 + 15r_{21}c_2)L_1^2L_2L_3^2 - (3c_1 + 15r_{31}c_3)L_1^2L_3L_2^2$$

$$N_{b4} = \frac{c_3^2}{2}L_1^3L_2^2 + \frac{c_2^2}{2}L_1^3L_3^2 - c_2c_3L_1^3L_2L_3 + (c_1c_2 + \frac{5}{2}r_{21}c_2^2)L_2L_3^2L_1^2L_1^2 \\ + (c_1c_3 + \frac{5}{2}r_{31}c_3^2)L_3L_2^2$$

$$N_{b5} = -b_3c_3L_1^3L_2^2 - b_2c_2L_1^3L_3^2 + (b_2c_3 + b_3c_2)L_1^3L_2L_3 - (b_1c_2 + b_2c_1 + 5r_{21}b_2c_2)L_2L_3^2L_1^2 \\ - (b_1c_3 + b_3c_1 + 5r_{31}b_3c_3)L_3L_2^2L_1^2$$

$$N_{b6} = \frac{b_3^2}{2}L_1^3L_2^2 + \frac{b_2^2}{2}L_1^3L_3^2 - b_2b_3L_1^3L_2L_3 + (b_1b_2 + \frac{5}{2}r_{21}b_2^2)L_2L_3^2L_1^2L_1^2 \\ + (b_1b_3 + \frac{5}{2}r_{31}b_3^2)L_3L_2^2$$

其中

$$r_{ij} = -\frac{b_i b_j + c_i c_j}{b_i^2 + c_i^2}$$

$$b_i = y_i - y_k$$

$$c_i = x_i - x_k$$

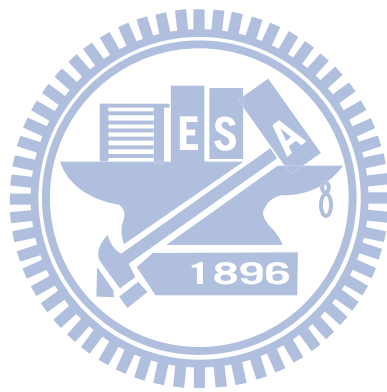
$N_{b7} \sim N_{b18}$ 的形狀函數可以由 $N_{b1} \sim N_{b6}$ 的下標替換求出。

下標替換的順序(cyclic permutation)：

1 → 2

2 → 3

3 → 1



附錄 D

此元素座標系統為文獻[25]所提出。元素座標系統為原點在形心 O ，並且當前變形位置元素座標軸轉 α 角使得當前變形位置的元素各節點對應初始未變形時的元素各節點的距離平方和為最小，如圖 D.1 所示。

當前變形位置元素座標軸轉 α 角後， α 角逆時鐘方向為正，元素各節點 j 座標值的關係式：

$$\bar{x}_j = \cos \alpha x_j + \sin \alpha y_j \quad (\text{D.1})$$

$$\bar{y}_j = -\sin \alpha x_j + \cos \alpha y_j \quad (\text{D.2})$$

當前變形位置元素各節點 j 座標值表示為 (x_j, y_j) ，當前變形位置元素座標軸轉 α 角後元素各節點 j 座標值表示為 (\bar{x}_j, \bar{y}_j) 。

當前變形位置元素座標軸轉 α 角後的當前變形位置的元素各節點對應初始未變形時的元素各節點的距離平方和：

$$\sum_{j=1}^3 [(\bar{x}_j - {}^0x_j)^2 + (\bar{y}_j - {}^0y_j)^2] \quad (\text{D.3})$$

初始未變形時的元素各節點 j 座標值表示為 $({}^0x_j, {}^0y_j)$ 。

(D.1)和(D.2)代入(D.3)可得：

$$\sum_{j=1}^3 [(\cos \alpha x_j + \sin \alpha y_j - {}^0x_j)^2 + (-\sin \alpha x_j + \cos \alpha y_j - {}^0y_j)^2] \quad (\text{D.4})$$

(D.4)對 α 微分可得：

$$\sum_{j=1}^3 [(\sin \alpha x_j - \cos \alpha y_j)^0 x_j + (\cos \alpha x_j + \sin \alpha y_j)^0 y_j] \quad (D.5)$$

令(D.5)為 0 可得：

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{j=1}^3 (x_j^0 y_j - y_j^0 x_j)}{\sum_{j=1}^3 (x_j^0 y_j + y_j^0 x_j)} \quad (D.6)$$

此時當前變形位置元素座標軸轉 α 角使得當前變形位置的元素各節點對應
初始未變形時的元素各節點的距離平方和為最小。

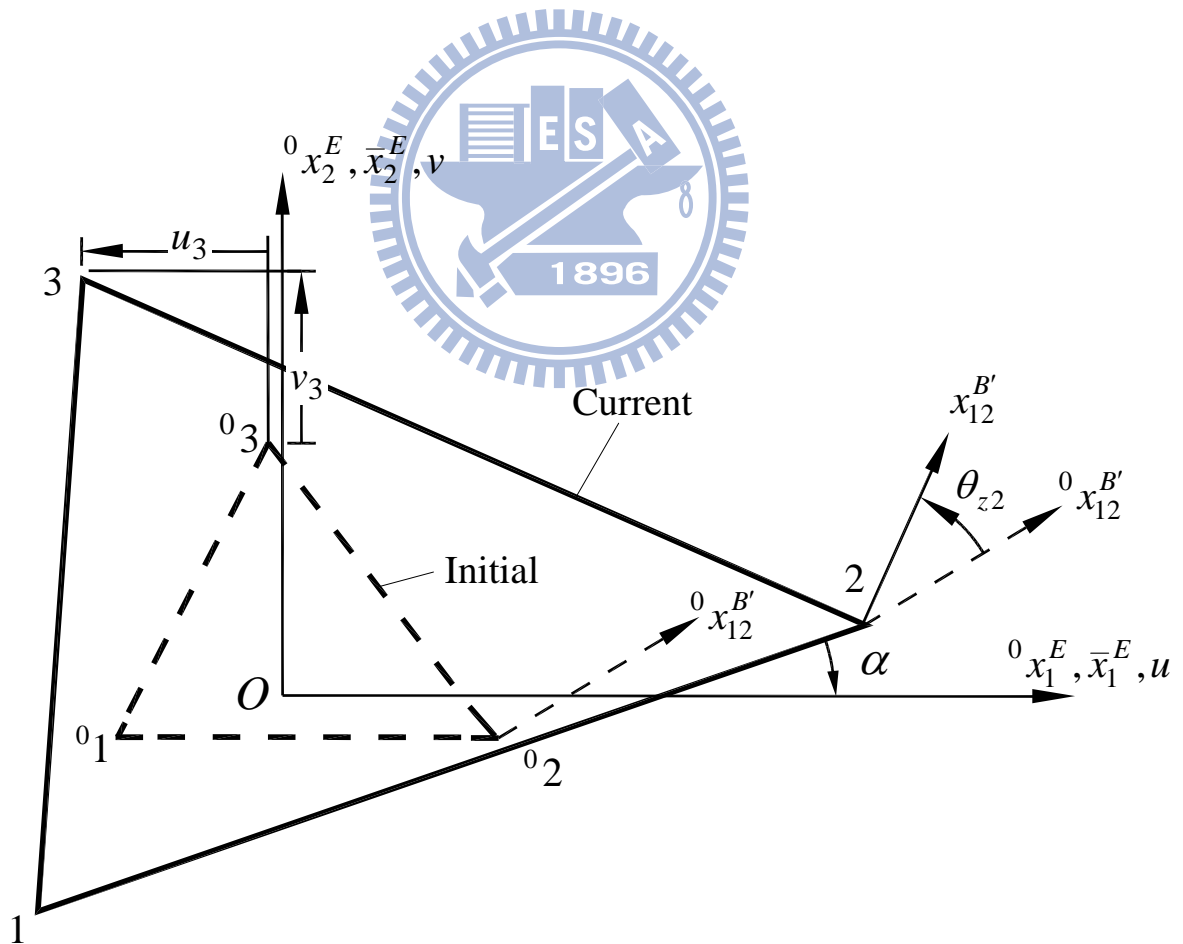


圖 D.1 元素變形示意圖