

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

薄片射出成型於充填時之二維流動模擬

2D Flow Simulation and Analysis of the Filling in Thin Plate
Injection Molding

研究生：陳宏信

指導教授：周長彬 教授

中華民國一百年六月

薄件射出成型於充填時之二維流動模擬

2D Flow Simulation and Analysis of the Filling in Thin Plate Injection
Molding

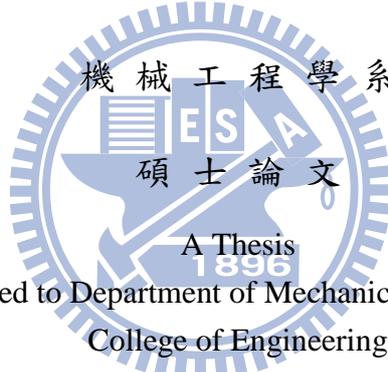
研究生:陳宏信

Student : Hung-Hsin Chen

指導教授:周長彬 教授

Advisor : Chang-Ping Chou

國立交通大學



Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Mechanical Engineering

June 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 一 百 年 六 月

薄件射出成型於充填時之二維流動模擬

研究生：陳宏信

指導教授：周長彬

國立交通大學 機械工程學系 碩士班

摘要

本研究以薄件射出成型中充填時的二維模擬為主，以基礎理論和數值分析法計算建構出不同幾何的流動趨勢，並利用類似的物理模型，將一般薄件充填問題視為平面的熱傳導問題，並將熔膠流動情況用熱傳導熱量流動的方式呈現，並將三維的流動情況化簡成二維的主要流動趨勢，試圖加速模擬的時間。

理論計算使用Mathematica數學軟體做運算，並和Flunet這套流體力學計算軟體所做的數值分析做比較，試圖找出最適合的二維邊界條件及參數設定。同時利用Flunet作為平面熱傳導的模擬平台，以熱量流動的方式表現出熔膠在模穴中的流動。並將設計的薄件模型(7cm×8cm)以模流軟體Moldex3D eXplorer做比較，可以得到相似的結果。

關鍵字：FLUENT、Hele-Shaw Flow、Pipe Flow、Stokes Flow

2D Flow Simulation and Analysis of the Filling in Thin Plate Injection Molding

Students : Hung-Hsin Chen

Advisor : Chang-Ping Chou

**Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University**

Abstract

For now, the use of 3-dimensional (3D) simulation system in the analysis of model injections is time-consuming and not efficient enough for industries. As compared with 3D, 2-dimensional (2D) simulation could be much suitable for the analysis of thin models with relatively simple structure. In this study, we tried to develop a 2D simulation system for the filling of thin model injection to shorten the time needed for the analysis. This 2D simulation system is theoretically based on simplifying the geometrical characteristics of 3D structure *via* the setting of boundary conditions and parameters. The flow of melted plastic in the thin model injection was considered as the heat flow in the heat conduction. By converting the 3D flow condition of materials to major 2D flow tendency, the time used in simulation could be largely reduced.

To optimize boundary conditions and parameters, theoretical computing was performed by the use of Mathematica software and the results were compared with the analysis obtained from Fluent. Using the Fluent software as a platform, the flow of melted plastic in the cavity was stimulated as a heat flow. The results of stimulation for a 7cm × 8cm thin model were then compared with the results collected by the use of Moldex3D eXplorer software for the same model. The results obtained from both Fluent and Moldex3D eXplorer are similar.

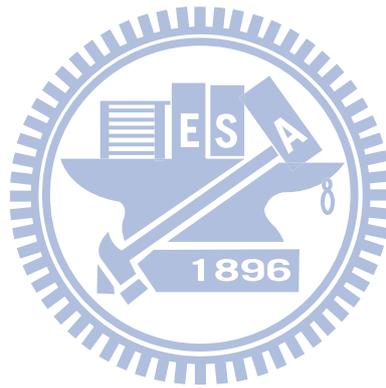
keywords : FLUENT 、 Hele-Shaw Flow 、 Pipe Flow 、 Stokes Flow

誌謝

謝謝你，謝謝妳，謝謝幫助過我的人，謝謝老師、學長、同學、學弟，
謝謝陪我度過碩士兩年歲月的人們，感恩啦~

還要感謝我的家人，你們在背後的支持是我前進的動力，讓我有辦法
完成這份論文。

特別感謝 CITY CAFE，幫助我榨出多餘的一點點精神。



宏信

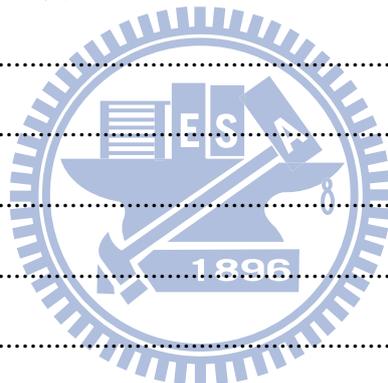
謹誌於交大工五 EE520

目錄

摘要	i
Abstract.....	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vii
表目錄	xii
第一章 緒論	1
1-1 前言	1
1-2 研究動機及目標	2
1-3 文獻回顧	3
1-3-1 射出成型相關文獻	3
1-3-2 充填相關文獻	6
第二章 理論	8
2-1 塑膠材料	8
2-1-1 塑膠材料的分類和簡介	8
2-1-2 塑膠物性簡介	11
2-2 射出成型	14
2-2-1 射出成型簡介	14
2-2-2 射出成型過程	14
2-2-3 射出成型問題	18
2-2-4 射出成型理論	21
2-3 Hele-Shaw	30
2-3-1 Hele-Shaw Cell	30

2-3-2 Hele-Shaw Flow	31
2-4 2.5D 模流分析技術	36
2-5 熱傳導理論	38
第三章物理模型和理論計算	41
3-1 物理模型	41
3-1-1 模型假設	42
3-1-2 黏度模型	43
3-2 理論計算	45
3-2-1 牛頓流體在圓管和平板內的流動	46
3-2-2 非牛頓流體在平板內的流動	51
3-2-3 流動幾何邊界	56
3-2-4 有明顯方向性的幾何變化	59
第四章 數值模擬	61
4-1 數值方法	61
4-1-1 軟體簡介	61
4-1-1 FLUENT 求解程序	62
4-2 研究流程	64
4-3 熔膠在不同厚度平板中的流動趨勢	66
4-3-1 模型建立	66
4-3-2 邊界條件	68
4-3-3 材料性質	70
4-3-4 計算模型和初始條件	71
4-3-5 模擬結果	71
4-4 邊界上的流動趨勢	75
4-4-1 模型建立	76

4-4-2 邊界條件	77
4-4-3 模擬設定條件	78
4-4-3 模擬結果	79
4-5 方向性的流動趨勢	82
4-5-1 y軸方向模擬	82
4-5-2 x軸方向模擬	86
4-6 非牛頓流體於非圓形管的理論修正	89
4-7 利用熱傳導表現充填時流動	90
4-7-1 模型與假設	91
4-7-2 模擬設定條件	94
4-7-3 模擬結果與比較	95
第五章 結論和建議	97
5-1 結論	97
5-2 建議	97
參考資料	99
附錄一	102
附錄二	104
附錄三	106
附錄四	108



圖目錄

圖 1-1 壓力與厚度關係圖	4
圖 1-2 半圓形模穴示意圖	4
圖 1-3 實驗與模擬比較	5
圖 1-4 考慮硬化層的影響	5
圖 1-5 波前示意圖	6
圖 1-6 不同流場的探討	7
圖 2-1 塑化示意圖	15
圖 2-2 充填示意圖	16
圖 2-3 保壓示意圖	17
圖 2-4 冷卻示意圖	17
圖 2-5 頂出示意圖	18
圖 2-6 Hele-Shaw Cell 模型	31
圖 2-7 Hele-Shaw Flow 示意圖	31
圖 2-8 不滑動邊界條件	32
圖 2-9 壓力於 Hele-Shaw Flow 示意圖	33
圖 2-10 2.5D 技術示意圖	36
圖 3-1 圓管流動平板流動徑向流動示意圖	41
圖 3-2 薄件幾何邊界示意圖	42
圖 3-3 明顯方向性的幾何變化示意圖	42
圖 3-4 擬塑性流體黏度示意圖	43

圖 3-5 低剪應變黏度修正(最大值).....	44
圖 3-6 高剪應變黏度修正(最小值).....	44
圖 3-7 塑性流體應力和應變關係圖.....	45
圖 3-8 塑性流體應力和應變關係圖.....	45
圖 3-9 圓管穩定流動情況.....	47
圖 3-10 圓管流動殼層分析法.....	47
圖 3-11 平板穩定流動情況.....	49
圖 3-12 徑向流動示意圖.....	51
圖 3-13 平板穩態流動剪應力關係圖.....	52
圖 3-14 剪應力和剪應變關係圖.....	52
圖 3-15 剪應力和剪應變關係圖.....	53
圖 3-16 τ_{Max} 在 I 區域速度分布圖.....	54
圖 3-17 τ_{Max} 在 II 區域速度分布圖.....	54
圖 3-18 τ_{Max} 在 III 區域速度分布圖.....	54
圖 3-19 平均速度和壓力梯度關係圖.....	55
圖 3-20 平均速度和壓力梯度關係圖.....	56
圖 3-21 邊界流動示意圖.....	57
圖 3-22 邊界流動示意圖.....	58
圖 3-23 邊界兩軸平均速度和壓力梯度關係比較圖.....	59
圖 3-24 方向性的幾何變化情況示意圖.....	59
圖 4-1 數值分析模擬流程圖.....	61
圖 4-2 FLUENT 求解程序圖.....	64

圖 4-3 研究流程圖	66
圖 4-4 平板流動模型示意圖	67
圖 4-5 建模和邊界條件設定示意圖	67
圖 4-6 網格設定示意圖	68
圖 4-7 設定量測點示意圖	69
圖 4-8 邊界速度 0.05 m/s 速度圖	72
圖 4-9 邊界速度 0.5 m/s 速度圖	72
圖 4-10 邊界速度 5 m/s 速度圖	72
圖 4-11 邊界速度 0.05 m/s 速度分布和理論計算比較圖	73
圖 4-12 邊界速度 0.5 m/s 速度分布和理論計算比較圖	73
圖 4-13 邊界速度 5 m/s 速度分布和理論計算比較圖	73
圖 4-14 邊界速度 0.05 m/s 壓力圖	74
圖 4-15 邊界速度 0.5 m/s 壓力圖	74
圖 4-16 邊界速度 5 m/s 壓力圖	74
圖 4-17 端口效應圖	75
圖 4-18 模擬和理論計算比較圖(5 mm)	75
圖 4-19 邊界流動模型	76
圖 4-20 建模和邊界條件設定示意圖	76
圖 4-21 入口網格設定示意圖	77
圖 4-22 壓力量測點示意圖	78
圖 4-23 邊界速度 0.05 m/s 速度圖	79
圖 4-24 邊界速度 0.5 m/s 速度圖	80

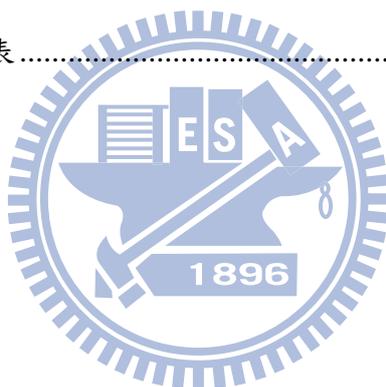
圖 4-25 邊界速度 5 m/s 速度圖	80
圖 4-26 邊界速度 0.05 m/s 壓力圖	80
圖 4-27 邊界速度 0.5 m/s 壓力圖	81
圖 4-28 邊界速度 5 m/s 壓力圖	81
圖 4-29 邊界模擬和理論計算比較圖(5 mm)	81
圖 4-30 邊界模擬和理論計算比較圖(5 mm)	82
圖 4-31 方向性y軸模型	82
圖 4-32 網格局部加密示意圖	83
圖 4-33 y軸方向 0.02 m/s 速度圖	83
圖 4-34 y軸方向 0.2 m/s 速度圖	84
圖 4-35 y軸方向 2 m/s 速度圖	84
圖 4-36 y軸方向 0.02 m/s 壓力圖	84
圖 4-37 y軸方向 0.2 m/s 壓力圖	85
圖 4-38 y軸方向 2 m/s 壓力圖	85
圖 4-39 y軸方向和 1.75 mm 平板理論計算比較圖	86
圖 4-40 放大速度圖	86
圖 4-41 放大壓力圖	86
圖 4-42 x軸方向的四種截面非原管管流	87
圖 4-43 截面 1, 2, 3 在 0.02 m/s 出口速度分布圖	88
圖 4-44 截面 1, 2, 3 出口速度分布圖	88
圖 4-45 截面 1 在三個速度出口速度分布圖	89
圖 4-46 截面 3 在三個速度出口速度分布圖	89

圖 4-47 截面 1.3 平均數據趨勢線.....	90
圖 4-48 邊界厚度 5mm 數據趨勢線.....	90
圖 4-49 傳導係數與壓力的關係.....	91
圖 4-50 三維幾何模型.....	93
圖 4-51 二維熱傳導平面模型.....	93
圖 4-52 材料熱容假設圖.....	94
圖 4-53 FLUENT 熱傳導模型.....	96
圖 4-54 Moldex3D eXplorer 模流分析軟體.....	96



表目錄

表 2-1 常用塑膠及用途.....	9
表 2-2 常用塑膠的耐熱溫度（軟化溫度）.....	10
表 2-3 常用熱塑性塑膠的加工及模具冷卻溫度.....	11
表 2-4 常用熱固性塑膠的加工及模具冷卻溫度.....	11
表 2-5 射出成型常見問題解決方法.....	20
表 2-6 Hele-Shaw 類似物理現象.....	36
表 3-1 聚苯乙烯黏度係數表.....	43
表 3-2 簡單幾何的范寧摩擦係數.....	60
表 4-1 聚苯乙烯材料性質表.....	70



第一章 緒論

1-1 前言

塑膠具有許多優秀的性質，例如機械性質：強度佳、韌性足、高機械模數、低潛變性、耐磨損、耐疲勞性。及其他性質：耐化學性、良絕緣體、耐燃性、耐候性、尺寸安定性佳...等，故其使用範圍和種類迅速擴張，地位也日益重要。

一般塑膠成型的方式有射出成型（injection molding）、擠出成型（extrusion molding）、吹製成型（blow molding）、共射成型法（co-injection molding）、氣體輔助成型法（gas-assisted injection molding）...等，其中以射出成型法是使用最為廣泛的塑膠成型技術。

其中射出成型具有生產效率高、製程可自動化，也適合於成型複雜度高之塑件。而塑件品質的提升則須依靠良好的模具設計、適合的材料選擇以及適當的成型參數設定。

成型參數的設定對於塑件品質影響相當重大。它會影響成品的外觀及性質，最佳化後的成型參數能避免外觀上的缺陷，並維持塑件品質在一定的水準以上；例如收縮、翹曲變形、殘留應力等皆可維持在許可的範圍內。影響塑件品質的原因眾多，成型條件的設定亦隨塑件幾何形狀、材料選擇、模具設計等差異而有所不同。傳統上參數的設定係利用累積之經驗及試誤法，反覆的試模來找出較佳的參數組合，因此可以想像塑件在開發階段即需耗費相當多的時間及成本。

近年來電腦輔助設計 (CAD Computer Aided Design)、電腦輔助工程 (CAE Computer Aided Engineering) 與電腦輔助製造 (CAM Computer Aided Manufacturing) 系統也相對更加成熟，目前也被廣泛利用於射出成型加工上來提供成品設計、模具設計等分析。CAE 的分析可提供成型操作上許多的資訊，諸如融膠充填的流動情形、縫合線和氣孔位置、纖維排向和變形等。因此利用 CAE 可評估不同設計條件和不同材料之效益來建立設計準則。

1-2 研究動機及目標

近年來電子、通訊業的崛起，其塑膠製品均朝向輕、薄、短、小的目標發展。如手機外殼、筆記型電腦、PDA 等薄殼製品的需求日益殷切，因此薄殼成形的技術成為重要的研究方向。

而射出成型充填過程中，模穴內部流體動態主要是以可壓縮形式的連續方程式 (Continuity Equation) 與動量方程式 (Momentum Equation) 來做描述，共稱 *Navier-Stokes Equations*。但這樣的一個流體方程式為偏微方程式 $\vec{v}(x, y, z, t)$ ，要解這個非穩態偏微分方程並不容易，所以業界常用的 CAE 模流軟體，大多用有限元素法和數值分析法來求解近似解，但需要大量的計算時間，十分費工。

而在特殊的薄件情況下，流動類似平面的二維流動。傳統的 2.5D 模擬分析中利用 *Hele-Shaw Flow* (二維的 *Stoke Flow*) 這個描述流體在薄件中流動的方程式，來化簡複雜的流動方程式，此流動方程式類似於熱傳導方程式，本研究嘗試將射出成型充填的流動問題轉換成二維熱傳導的問題，以

不同的熱導參數來表現不同的薄件幾何形狀，以熱量流動的方式來表現充填時融膠的流動方式；首先將薄件形狀幾何，設成邊界條件，薄件厚度幾何，設成不同的傳導係數，而射出壓力的來源假設成熱傳的熱源，熱量流動的模式即類似充填時融膠的流動波前(Melt Front)圖，波前圖可以準確預測結合線的位置。

雖然目前已經有純3D的模流分析軟體，這項2.5D分析技術目前仍廣泛在工業界使用。對於大型件或流動長度(L)大於厚度(H)數倍以上的塑件，2.5D分析技術具有分析快速、設計變更簡便、準確性高的優點。

1-3 文獻回顧

1-3-1 射出成型相關文獻



塑膠的成型技術之發展約始於 1870 年。在 1940 年開發出螺桿預塑化射出成型機，1956 年 Willert 發明螺桿式射出成型機【1】。同年，Darnell 和 Mol 對於高分子固體粒子在螺桿間移動提出完整的分析【2】。1960 年，Ballman 和 Toor 提出模穴充填程序的非等向性模型，並且第一次應用電腦進行射出成型充填時的模擬分析【3】。1966 年，Walker 對高分子固體材料在射出機進料斗的流動作了詳細的力平衡關係之分析【4】。同年，Tadmor 及其研究人員提出融化液膜與固體層之溫度分佈與固體層熱量之理論分析，並佐以實驗證明，奠定了融熔段模擬分析的良好基礎【5】。1970 年 Harry 及 Parrott 針對長型薄件的流動路徑以數值模擬進行長型平板一維流動分析，並假設壓力與厚度成線性關係【6】（圖 1-1）。

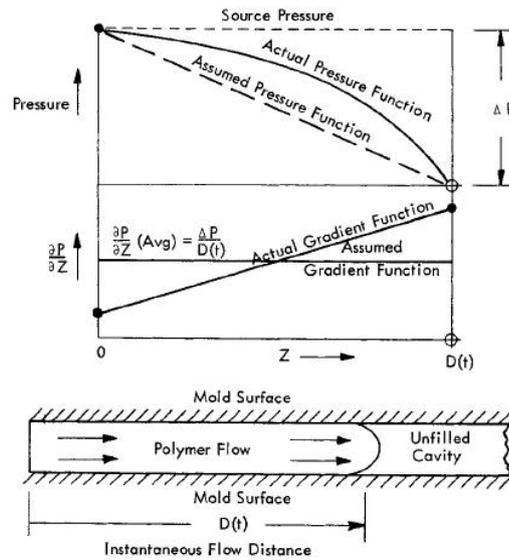


圖 1-1 壓力與 z 軸關係圖【6】

1972 年 Kamal 及 Kenig 以半圓形平板模穴模擬充填過程之速度、壓力及溫度分佈，並做實驗比較，發現分析結果與實驗結果相近【7】(圖 1-2)。

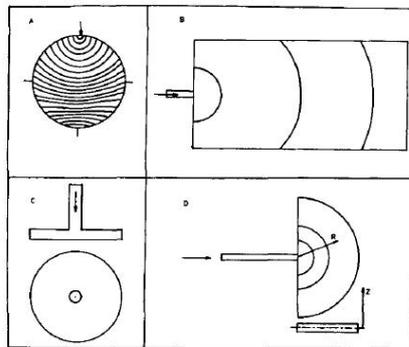


圖 1-2 半圓形模穴示意圖【7】

。1978 年 Thienel 及 Menges 建立平板模穴，由實驗量測及數值分析方法，探討充填過程之速度場、壓力場及溫度場【8】。1980 年，美國結構力學研究社 (SDRC: Structural Dynamics Research Corporation) 首先倡導電腦輔

助分析工程 (CAE) 一詞，認為其為執行新產品開發及設計上之綜合性電腦結構，算得上是企業界不折不扣的策略性系統。同年，Krueger 和 Tadmor 利用短射法，調整不同螺桿位置將之固定後射出充填，與理論預測比較，結果相當接近，包含溶接線位置亦是符合【9】（圖 1-3）。

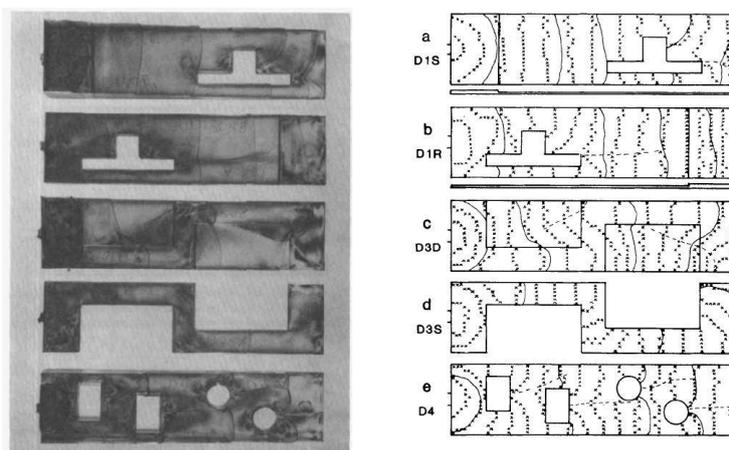


圖 1-3 實驗與模擬比較【9】

1993 年 Chiang 等人模擬平板之射出成型製程，考慮到流動時的硬化層並其預測溫度與壓力隨時間變化之結果與實驗值相近【10】（圖 1-4）。

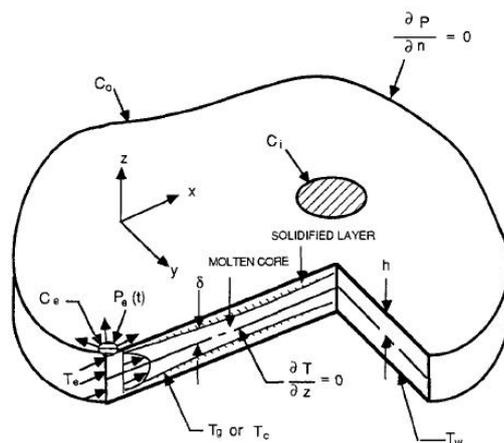


圖 1-4 考慮硬化層的影響【10】

1-3-2 充填相關文獻

牛頓流體的等溫充填模式，是最簡單的射出塑膠流動的充填模式。Richardson 首先提出完整的理論，其主要理論是根據潤滑原理 (lubrication theory) 推導而來又將複雜的三維流動理論簡化為 Hele-Shaw 二維流動【11】。Hele-Shaw 流動是用來模擬位能流的研究，射出理論目前多依照此原則來解析各種高分子流動。但事實上，高分子對模穴之流動大都遵守非牛頓流體模式，而對於形狀比較複雜模具及厚度有變化時，方程式變為非線性且無解析解，故須配合有限差分或數值分析來求解。

1940 年，Gilmore 和 Spencer 【12】提出塑膠模具射出成型模穴充填過程的壓力變動，並且研究發現模穴內流動會有兩種形式出現【13、14】。一種是均勻的波前流動方式，另一種是噴流現象。

1-3-3 Hele-Shaw 相關文獻

1972 年 Richardson 討論 Hele-Shaw Flow 在自由邊界的流動波前和流動模式，並考慮空隙中的應力變化【15】(圖1-5)。

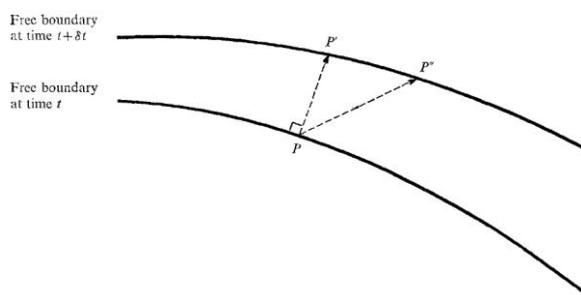


圖1-5 波前示意圖【15】

1984年Park和Homsy討論Hele-Shaw Flow在流動時變相的理論【16】。
1992年Howison討論Hele-Shaw Flow的波前問題，並導入虛數的概念用復變
的方法計算邊界問題，同時也討論不同流場的問題【17】。

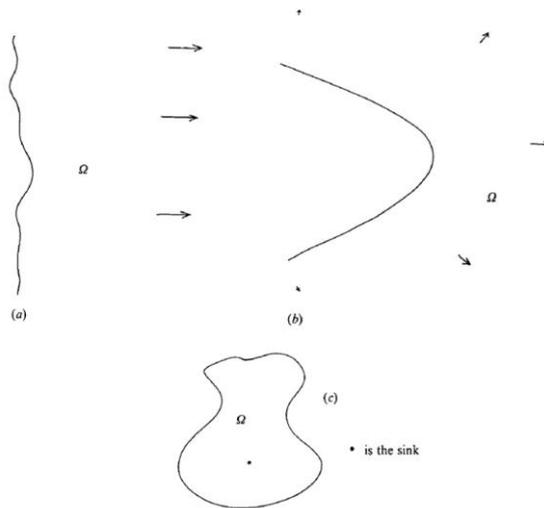


圖1-6 不同流場的探討【17】



第二章 理論

2-1 塑膠材料

2-1-1 塑膠材料的分類和簡介

塑膠的發展歷史並不長。十八世紀初，人類開始使用自然的高分子聚合物橡膠，並且發現橡膠的可塑性。而在橡膠的硫化(Vulcanization)加工作業中，發現可將橡膠變成一種硬質物質，而非原本的彈性體，這也是一開始塑膠的原型，直到了十九世紀中葉後才開始有全人工合成塑膠的出現。

塑膠材料(Plastics)屬於有機材料的一種，亦可稱為合成樹脂(Synthetics Resin)，是一種高分子聚合物。塑膠材料可利用多種成份的聚合(Polymerization)方式來製造(聚合反應是各個單體的小分子以不同聚合度鍵結成高分子量的巨大分子。)，因此塑膠材料種類非常多，且有各自不同的特性，混合的相容度高，特性也可疊加。

塑膠材料主要可分為熱塑性塑膠(Thermoplastic)與熱固性塑膠(Thermosetting)兩大類。熱塑性塑膠為單鍊狀體(Monomer)聚合物，由分子間的凡得瓦力而互相結合，其受熱時分子的動能上升，脫離束縛能(凡得瓦力)的分子變多而軟化變形，冷卻後分子又結合硬化，故其硬化—軟化的變化屬於可逆的物理變化，並沒有聚合時的化學變化，類似於材料固液轉變的原理，且可重複利用而不損及材料之性質。熱固性塑膠則為聚合中斷的半成品，加熱後也會呈現軟化與流動性。

但此時會繼續未完成的聚合化學變化，形成強固的網狀結構而硬化，即使再加熱也無法將之軟化，因此其硬化—軟化變化屬於不可逆的化學變化。由於熱塑性與熱固性塑膠材料都有受熱軟化的情形，因此都可以利用熱加工的方式來進行塑性加工，但唯熱固性塑膠則不具有再生的能力。

表2-1 常用塑膠及用途【18】

熱塑性塑膠	熱固性塑膠
<p>聚乙烯 (PE) 塑膠袋、塑膠瓶、撓性水管</p>	<p>酚甲醛樹脂 (電木) 電器零件、炊具把手</p>
<p>聚丙烯 (PP) 玩具、容器、漁網、繩索</p>	<p>聚酯樹脂 鈕扣、塗料、光板表層</p>
<p>聚氯乙烯 (PVC) 水電管、電線外皮、塑膠布</p>	<p>三聚氰胺 (美耐皿) 餐具、裝潢家具桌面、美耐板</p>
<p>聚苯乙烯 (PS) 電器外殼、保利龍 (發泡)</p>	<p>聚胺基甲酸酯 (PU) 泡綿、塗料、人工跑道、床墊</p>
<p>ABS 塑膠 (丙烯、丁二烯、苯乙烯的共聚物) 安全帽、工具箱、電器外殼</p>	<p>環氧樹脂 防水、接著劑、直升機螺旋槳</p>
<p>纖維素 牙刷柄、眼鏡框、方向盤</p>	<p>尿素樹脂 電話機外殼、接著劑</p>
<p>聚醯胺 (尼龍) 降落傘、漁網、塑膠齒輪</p>	<p>矽膠 塗料、脫模劑、美容</p>
<p>氟碳 (鐵氟龍) 不沾鍋內塗層、軸承</p>	<p>聚酯塑膠+玻璃纖維 (FRP) 遊艇、浴缸、汽車車體</p>
<p>聚對苯二甲酸乙酯 (PET) 保特瓶、容器</p>	

以加工性而言，塑膠材料易於削切，易和其他非塑膠材料互相膠合，且塑膠有遇熱即軟化的特性，可塑性極高。此外，塑膠的熔點溫度比起金屬材料低很多（例如：聚氯乙稀（PVC）大約在50°C就會軟化；常用於射出成型的聚苯乙烯則在120°C-180°C時會變成流動狀）。因此，用於塑膠的模具，其製造成本與難度也相對較低。塑膠射出成型機便是利用這種特性，將塑膠材料加熱至流體狀，再注射至模具中，待其冷卻即得成品。

表2-2 常用塑膠的耐熱溫度（軟化溫度）【18】

熱塑性塑膠	熱固性塑膠
高密度聚乙烯（HDPE）：121°C	酚類樹脂（木粉棉塊充填）：188 ~ 182°C
低密度聚乙烯（LDPE）：82 ~ 100°C	酚類樹脂（石綿充填）：177 ~ 260°C
聚丙烯（PP）：93 ~ 160°C	尿素樹脂：77°C
ABS樹脂：88 ~ 110°C	三聚氰胺（美耐皿）：99°C
聚氯乙稀（PVC）：66 ~ 79°C	不飽和聚脂樹脂：149 ~ 177°C
壓克力樹脂：60 ~ 93°C	環氧樹脂：149 ~ 260°C
尼龍（PA）：79 ~ 121°C	矽脂樹脂：< 316°C
聚碳酸酯（PC）：121°C	聚氨基甲酸酯（PU）：88 ~ 121°C
氟類樹脂：177 ~ 199°C	
纖維素類樹脂：60 ~ 104°C	

表 2-3 常用熱塑性塑膠的加工及模具冷卻溫度【19】

熱塑性塑膠	加工溫度 (°C)	模具冷卻溫度 (°C)
高密度聚乙烯	260 ~ 300	50 ~ 70
低密度聚乙烯	160 ~ 260	30 ~ 70
聚丙烯	250 ~ 270	40 ~ 100
聚苯乙烯	180 ~ 280	10 ~ 40
ABS 塑膠	210 ~ 240	40 ~ 90
硬聚氯乙烯 (粒料)	180 ~ 210	> 30
硬聚氯乙烯 (粉料)	170 ~ 200	50

表2-4 常用熱固性塑膠的加工及模具冷卻溫度【19】

熱固性塑膠	加工溫度 (°C)	模具固化溫度 (°C)
酚甲醛樹脂	60 ~ 80	170 ~ 190
三聚氰安甲醛塑膠	70 ~ 80	150 ~ 165
三聚氰安甲酚醛塑膠	60 ~ 80	160 ~ 180
聚脂樹脂	40 ~ 60	150 ~ 170
環氧樹脂	70	160 ~ 170

2-1-2 塑膠物性簡介

(1) 熱傳導：

物質單位長度，溫度改變 1°C 時的熱傳導速率，稱為熱傳係數，單位是 $W/m \cdot ^\circ C$ ，這是材料傳熱或散熱的一項指標。熱傳導度大的物質吸熱快散熱也快；綜合熱量的相關數據如比熱、熔膠溫度、熱傳導度等，即可透過軟體求得塑膠流動過程中，溫度的變化情形與冷卻所

需時間、凝固層成長等。

(2) 比熱：

使單位質量物質升高溫度 1°C 所需要的熱量，稱為比熱，單位是 $\text{J/Kg}^{\circ}\text{C}$ 。這是材料吸熱量或散熱量多少的一項指標。比熱大的物質在相同溫度差下，能吸收的熱量會較多，也就是需要較長的時間冷卻。由此物性可以換算能量成為溫度變化。

(3) 密度：

密度是指單位體積內的質量，單位是 Kg/Cm^3 ，也就是比容（specific volume）的倒數；比容或密度值都會受到壓力與溫度影響，這就是所謂的P-V-T行為。由P-V-T的數據圖上，取常壓（P）與操作平均溫度值（T），便可以得到其比容值，也就是熔膠密度。

(4) 非流動溫度：

非流動溫度是指熔融熱塑料流體停止流動時的最低溫度，這並不是一項基本的物性數據，但確是明顯的物理現象，可以用來作為流動情形的一項判定指標，尤其是用於短射預測、凝固層厚度與薄殼區域壓力的計算時。

(5) 黏度：

黏度可以視作在壓力推動下，塑膠流體流動的能力。黏度大則不易流動，黏度小則容易流動。黏度與溫度、剪率、壓力有關，一般來說溫度升高，剪率變大時，黏度會變小，容易流動。壓力大時則黏度

變大，但確實數據關係仍待個別研究。

在描述非牛頓流體或是高分子流體的黏度時，通常使用以下幾種黏度模式：

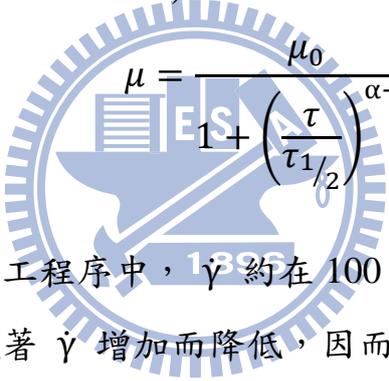
擬塑性流體 (Pseudoplastic Fluid)：

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = K\dot{\gamma}^{n-1} \quad n < 1$$

柯洛模型 (Carreau Model)：

$$\mu = m[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}}$$

艾力斯模型 (Ellis Model)：


$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_{1/2}}\right)^{\alpha-1}}$$

在一般塑膠加工程序中， $\dot{\gamma}$ 約在 $100 \sim 5000 \text{ s}^{-1}$ 之間，屬於高剪應力區，此時黏度隨著 $\dot{\gamma}$ 增加而降低，因而適用於上述模型。

(5) 雷諾數

對於一般聚合物熔融液而言，其變形流量亦即流量，行為並不遵守牛頓黏度定理（黏度 μ 為定值），屬於非牛頓流體的一種。這類流體尚包含了人體的血液、日常用品中的牙膏等。而有關非牛頓流體的探討，則包含於流變學之研究領域中，流變學是研究物質之流動與變形的科學，並不針對於何種材料，其在科學上最大的貢獻是在聚合物的應用上。1840年，德國工程師 G. Hagen 由觀察中發現，流體流動大

致可分為兩種形式—層流（Laminar）與紊流（Turbulent）。1883年，英國科學家 Osborne Reynold 由實驗證實了層流與紊流的基本特性，同時也證明了流體由層流轉換成紊流完全取決於下列的式子：

首先定義流體慣性力與黏滯力大小的相對比值如下：

$$R_e = \frac{\rho v L}{\mu} \cong \text{慣性力大小/黏滯力大小}$$

式中 R_e 為雷諾數

對高分子融膠而言，黏度通常都很大，雷諾數大約為 $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 。

2-2 射出成型

2-2-1 射出成型簡介



射出成型（Injection molding）為塑膠高分子聚合物成型中最常使用的方法之一，其原理是利用塑膠原料加熱擁有可塑性易加工的特性，將塑料加熱至熔融的流體狀態後，用高壓將熔融塑膠射入模具的模穴內，模穴限制熔融塑膠的幾何形狀，並控制流動的分布確保可以完整充滿模穴，冷卻後將硬化後的塑膠成品頂出模穴，即完成一次製程（適用於熱塑性塑膠，熱固性塑膠則如之前所提，先將原料加熱至軟化溫度，充填射入模穴後，將模具加熱至聚合溫度，加以硬化成型）【19】。

2-2-2 射出成型過程

射出成型的過程中主要包含五個階段：塑化、充填（Filling）、保

壓（Packing）、冷卻（Cooling）、頂出，以下是完整的射出成型步驟【21】【22】【23】。

(1) 塑化：

1. 塑料的預熱和熔化：

將塑膠原料倒入料桶，加熱至一定溫度（非軟化溫度）一段特定的時間除去殘留的水分，此步驟為預熱。帶動射出成型機的螺桿將塑膠原料餵入料管內，包圍於料管的電熱器加熱將料管內的塑膠加熱至熔融狀態後即可準備射出。

2. 模具預熱：

利用模具內的電熱器將模溫提高至一定溫度，以免高溫的熔融塑膠射入相對過低溫的模穴後急速冷卻硬化，阻礙流道影響整體射出情況（圖 2-5）。

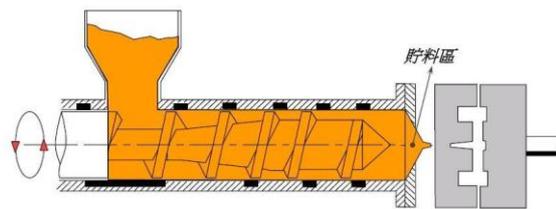


圖 2-1 塑化示意圖【19】

(2) 充填階段：

將熔融狀態塑膠利用油壓推動螺桿射出後，經噴嘴、澆道、流道、

澆口、最後充填滿整個模穴，完成充填程序。在充填的階段，塑料也漸漸冷卻硬化，可知整階段是一個非穩態的過程，溫度、壓力、位置、流速...等都隨時間變化，甚至黏度還會受到溫度和壓力所影響（圖 2-6）。

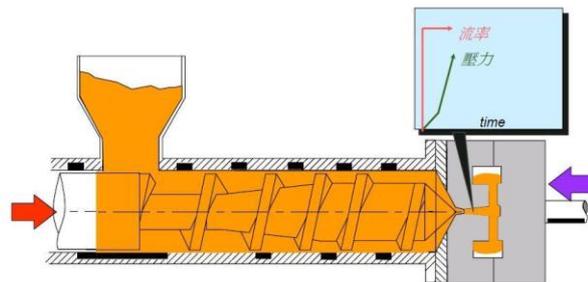


圖 2-2 充填示意圖【19】

(3) 保壓階段：

在熔膠已經充滿模穴的情況下，以螺桿施以高壓（保壓壓力）保持模穴內塑膠的壓力，此舉主要的目的有兩個，一為彌補未填滿的空隙確保模穴完全填滿，二是預先填入更多熔膠，以補償在冷卻後密度變化產生的體積收縮，同時可以讓成品更加緻密（熱固性塑膠則是在模具未加熱塑膠未反應前須保壓再填入熔膠以防止冷卻後成品收縮）。保壓的過程通常持續至澆口部分的塑料凝固硬化，良好的保壓控制可獲得較佳之尺寸精度（圖 2-7）。

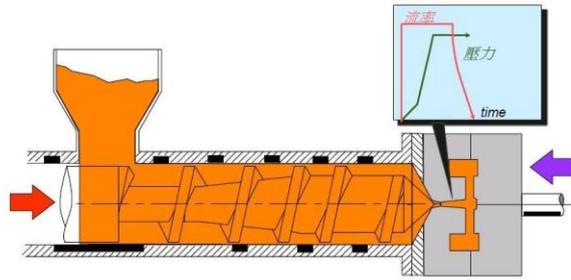


圖 2-3 保壓示意圖【19】

(4) 冷卻階段：

熔融的塑膠在模具內降溫冷卻固化成型，模具通有冷卻水可以加快塑膠的冷卻速度。均勻的冷卻可降低成品的殘留應力，減少體積收縮及翹曲，並增加良好的尺寸精度（圖 2-8）。

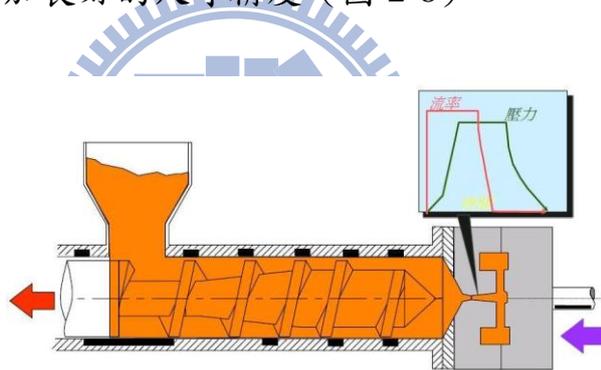


圖 2-4 冷卻示意圖【19】

(5) 頂出：

此時塑膠已經完全固化，純粹是機械上的操作：開模後頂出成品，清空模穴，重複將模具預熱，準備下一次射出（圖 2-9）。

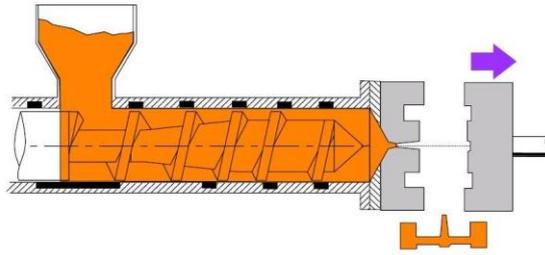


圖 2-5 頂出示意圖【19】

2-2-3 射出成型問題

在射出成型過程中，常會碰到一些問題導致失敗，以下將分成充填、保壓以及冷卻主要的三個階段來討論：

(1) 充填階段：

熔融塑膠要在未完全固化（有流動性）前充填滿整個模穴，否則得到的成品便不完整，一般稱此現象為短射（short shot）。主因是最早射出的塑料接觸到模具發生熱平衡而冷卻硬化。此外溫度越低熔融塑膠互相結合的相容性越低，也容易出現結合線（Parting Lines）和包封，結合線是成品材料強度的弱點，所以應盡量避免。另外剪切力和黏滯熱過大，也會讓高分子過熱改變化學性質而產生劣化。

(2) 保壓階段：

保壓階段主要影響的是壓力和時間。壓力過小，當熔融塑料在模穴內漸漸固化時，沒辦法把多餘熔融塑料射入模穴中，甚至不能完全填滿模穴的空隙，除了會讓成品不完整，也會因為冷卻而使體積收縮（Shrinkage）；壓力過大，塑料則會被擠進模具的接合處，產生毛邊

(Flash)。保壓時間過長，塑料會沾黏在模具上，取出後表面會粗糙甚至破壞，稱成品黏膜 (Product Sticking)。

(3) 冷卻階段：

熔融塑料逐漸冷卻固化產生收縮，因均勻的冷卻收縮只會改變尺寸大小，所以需要在保壓過程填入多餘的塑料。但不均勻的收縮便會產生殘留應力 (Residual Stress)，產品取出後便會變形翹曲 (Warpage) 甚至龜裂。

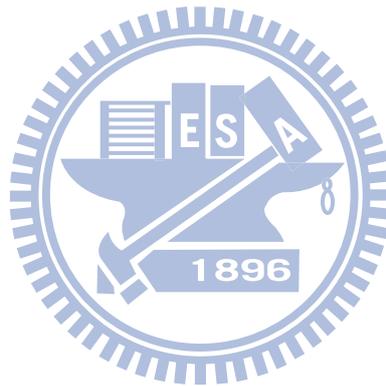


表 2-5 射出成型常見問題解決方法【19】

	短射	包風	結合線	流痕	毛邊	黏膜	變形	縮水
提高射出壓力	◎	◎	◎					◎
降低射出壓力					◎	◎		
提高射出時間	◎	◎						◎
降低射出時間					◎	◎		
提高射速	◎		◎					◎
降低射速		◎			◎	◎		
增加保壓壓力		◎	◎	◎				◎
減少保壓壓力								
增加冷卻時間						◎	◎	◎
減少冷卻時間								
提高模溫	◎		◎	◎				
降低模溫					◎		◎	◎
提高熔膠溫度	◎			◎				
降低熔膠溫度		◎			◎	◎	◎	
增加鎖模力					◎			
模具設計問題	◎				◎	◎		◎
模具排氣問題	◎		◎					◎
模具溫度不均	◎	◎					◎	

2-2-4 射出成型理論

塑膠射出成型牽涉複雜的高分子熱力與流動變化，熔膠在充填、保壓與冷卻過程中，歷經溫度、壓力與液、固相的變化及分子結構配向性等改變，對於此種複雜的動態行為為簡化分析起見，通常作以下假設【23】【24】：

- (1) 模擬充填過程中，視熔膠為非穩態不可壓縮流體，且密度、比熱、熱傳導係數為定值。並只考慮融膠流動的慣性力和黏滯力及壓力項。
- (2) 模擬保壓過程視熔膠為非穩態可壓縮流體，密度隨壓力和溫度變化，比熱、熱傳導係數為定值。這時熔膠幾乎沒有流動，所以不考慮慣性力和重力，即運動方程式中的慣性項與重力項可忽略不計，只需要考慮到熔膠的黏滯力和壓力。同時微小流動的方向只設為 x 、 y 軸，兩軸的速度對 x 、 y 微分或取拉普拉斯都是零。
- (3) 充填階段流動波前處(melt front)壓力等於大氣壓力，亦即假設模具有良好的排氣設計。
- (4) 模穴上、下模壁表面滿足不滑動邊界條件，亦即 $v_x = v_y = 0$ 在 $z \pm h$ ，而 h 為半模厚度。
- (5) 假設塑件之厚度較薄，厚度方向之速度幾乎為零，所以流體壓力與厚度方向座標無關，又厚度方向熱傳導效應遠大於熱對流

效應，因此忽略厚度方向之熱對流效應。

(6) 所有流場特性於厚度方向皆對稱於中間面。即：

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} , \frac{\partial T}{\partial z} = 0 , \text{ 在 } z = 0$$

充填階段方程式：

由於射出成型是以高壓將熔膠射入模穴，待其固化成型後取出的一種成型法，在探討模穴之數學模式時，因牽涉到熔膠之推擠、流動以及固化等行為，在分析上可由連續、動量及能量方程式加以描述。

(1) 連續方程式 (continuity equation)：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \vec{v}) = 0$$

若如上述假設 (2)，熔膠視為不可壓縮流體，即密度為定值，因此上式連續方程式可以化簡成：

$$\rho = \text{const} , \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 , \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

式中： x, y 為平面座標

z 為厚度方向座標

t 為時間

ρ 為熔膠密度

\vec{v} 為速度向量， v_x, v_y, v_z 為三個座標的分量

(2) 動量方程式 (momentum equation) :

描述塑料在加工過程中受力產生之動量變化 (加速情形) 或力平衡, 係由牛頓定律推倒而得, 可寫作下列的向量縮寫形式:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \nabla \cdot \sigma + \rho \vec{g}$$

慣性項 = 應力項 + 重力項

應力張量可寫成以下的矩陣形式:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} -P + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) & \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) & -P + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) & -P + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

將張量 σ 帶入:

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho \vec{g}_x$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho \vec{g}_y$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho \vec{g}_z$$

式中： σ 為熔膠應力張量

\vec{g} 為重力場

P 為熔膠壓力

μ 為黏滯係數

依上述假設，不考慮重力項，則上式可化簡為：

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$

慣性項 = 壓力項 + 黏滯項 + ~~重力項~~

由上式可知應力項由壓力項和黏滯力所組合而成。

一般而言在理論分析上我們慣常引入無因次變數將上式無因次化，以比較各項之數量級大小（及各項相對大小），經此處理後之運動方程式，忽略重力項，可寫成如下式子：

$$Re \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \nabla \cdot \sigma + \rho \vec{g}$$

連續方程式（Continuity Equation）與動量方程式（Momentum Equation）共稱Navier-Stokes Equations，Navier-Stokes Equations是一個主要描述流體運動模式的偏微分方程。

(3) 能量方程式：

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \mu \dot{\gamma}^2 + \beta T \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla P \right)$$

式中： T 為融膠溫度

C_p 為融膠比熱

k 為熱傳導係數

$\dot{\gamma}$ 為流體剪應變率

β 為膨脹係數

忽略式中由於熔膠膨脹壓縮效果之能量變化及 z 方向之對流熱傳導項，則可將上式簡化成：

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu \dot{\gamma}^2$$

保壓階段方程式：

結束充填階段後，模穴即開始進行保壓，對保壓行程而言，基本上熔體具有可壓縮性，密度是溫度和壓力的函數 $\rho(T, P)$ ，因此連續方程式 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ 已不適用，然而仍可由材料及模穴的幾何形狀加以分析。

(1) 連續方程式 (continuity equation)：

在連續方程式中，因密度隨壓力及溫度變化而變化，經由連鎖律之微分運算密度後，代入方程式可得：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = \kappa \quad \text{與} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} = -\beta$$

式中： κ 為材料等溫壓縮係數

忽略 x 與 y 方向之壓力梯度之影響後，可得到下列方程式：

$$\kappa \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

(2) 在保壓階段中熔膠幾乎沒有流動，故可忽略慣性項和重力項，可得動量方程式 (momentum equation)：

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$

慣性項 = 壓力項 + 黏滯項 + 重力項

展開方程式後：

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho \vec{g}_x \\ \rho \left[\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho \vec{g}_y \\ \rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho \vec{g}_z \end{aligned}$$

又同時假設 z 軸方向沒有速度 $v_z = 0$ 且 $\nabla^2 v_x = \nabla^2 v_y = 0$

動量方程式 (momentum equation) 即可化簡為：

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

一般而言，動量方程式左側之慣性項與右側之黏滯力項相較之下甚小，可予以忽略。在分子加工分析上，這種忽略非線性慣性項以

簡化方程式是一種 很好的近似，稱為蠕流近似 (creep flow approximation)，即：

$$\nabla P = \nabla^2 \vec{v}$$

我們在進行充填過程的理論模式建立時，亦假設蠕流近似成立。

(3) 能量方程式則在大小分析 (order of magnitude analysis) 後則可簡化如下：

$$\rho C_P \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu \dot{\gamma}^2 + \beta T \frac{\partial P}{\partial t}$$

冷卻階段方程式：

模具冷卻分析之目的，在於計算射出成型機於穩定生產之情況下，其公、母模表面之平均溫度分佈，以當作射出成型充填與保壓過程分析時，其熔膠之邊界條件。至於模具的溫度場分佈，則視為三度空間的立體範圍，因此可將能量方程式化簡得到溫度場方程式：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

式中： α 為材料熱傳導係數

由於上式為一非穩態的偏微分方程式，因此求解模具溫度時，需結合週期平均原理，以簡化問題的複雜性；對上式中成形週期積分，消去時間項後可得到：

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}\right) = 0$$

式中： \bar{T} 為整個成形週期的平均溫度

熔膠的熱量由模具傳到外界或被冷卻水帶走後將逐漸凝固，因此在計算溫度分佈時，假設熔膠為靜態，忽略黏滯熱與熱對流效應，只考慮其熱傳導效率，並假設成品厚度方向遠小於平面方向之尺度，即平面方向之截面積遠大於厚度方向之截面積，在厚度方向熱傳導效應量階較大，因此可忽略平面方向之熱傳導效應，所以將能量方程式化簡，得到熔膠之溫度場方程式：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

在射出成型過程中，冷卻時間占了將近一半以上的時間，同時是非常重要的成型參數之一，模穴的冷卻時間理論如下：

由一維熱傳能量方程式計算半平板厚度 h

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

估計上式每一項量階大小後得到：

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \cong \rho C_p \frac{\Delta T}{t}$$

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \cong \frac{\alpha \Delta T}{h} \frac{1}{h} = \frac{\alpha \Delta T}{h^2}$$

由上兩式可得到：

$$t \cong \frac{h^2 \rho C_p}{\alpha}$$

除了上面的冷卻理論之外，提供兩組半經驗公式用於平板型和圓柱形的成品：

平板型冷卻時間：

$$t \cong \frac{h^2}{\alpha \pi^2} \ln \left[\frac{8}{\pi^2} \left(\frac{T_m - T_w}{T_e - T_w} \right) \right]$$

圓柱型冷卻時間：

$$t \cong 0.173 \frac{R^2}{\alpha} \ln \left[0.6916 \left(\frac{T_m - T_w}{T_e - T_w} \right) \right]$$

式中： h 為材料等溫壓縮係數

R 為圓柱半徑

T_m 為塑初始溫度

T_w 為模溫初始溫度

T_e 為塑件頂出溫度

塑料統御方程式：

影響翹曲變化的因素眾多，除了上述各個階段外，仍須考慮到塑料本身的材質特性，因此須找出能夠描述塑料特性的方程式，可由以下兩組狀態方程式與本質方程式來描述：

(1) P-V-T狀態方程式：

塑料在射出過程中，歷經了固態與液態兩相，其狀態可由壓力、體積、溫度來描述，在 P-V-T 的數學模式中，又以Tait 模式的適用性最好且應用最為廣泛：

$$V(T, P) = V_0(T) \left[1 - C \ln \left(1 + \frac{P}{B(T)} \right) \right]$$

當溫度大於玻璃轉換溫度時：

$$V_0(T) = a_1 + a_2 \bar{T} \quad , \quad B(T) = a_3 e^{-a_4 \bar{T}} \quad , \quad V(T, P) = 0$$

當溫度小於玻璃轉換溫度時：

$$V_0(T) = a_5 + a_6 \bar{T} \quad , \quad B(T) = a_7 e^{-a_8 \bar{T}} \quad , \quad V(T, P) = a_9 e^{(a_{10} T - a_{11} P)}$$

式中： a_n 、 C 皆為材料參數

(2) 本質方程式：

以Cross 模式來描述塑料之黏度、溫度、壓力與剪切率的關係：

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + C(\mu_0 \dot{\gamma})^{1-n}} \quad , \quad \mu_0 = B e^{\left(\frac{T_b}{T} + AP \right)}$$

式中： A 、 B 、 C 、 T_b 皆為材料參數

2-3 Hele-Shaw

2-3-1 Hele-Shaw Cell

原始的 Hele-Shaw Cell 模型如圖 2-10，是兩片距離 0.02 英吋的玻璃

璃，其中一片挖有一個小洞，並從小洞中給予壓力，將流體擠至兩片玻璃的縫隙中，觀察其壓力和流動模式。

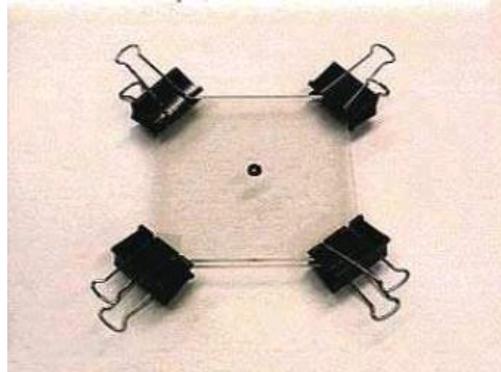


圖 2-6 Hele-Shaw Cell 模型【25】

2-3-2 Hele-Shaw Flow

Hele-Shaw Flow 定義為流體在兩個非常靠近的平行平板內的小空隙流動的 Stokes Flow(圖 2-11)，在流體力學中很多問題皆近似 Hele-Shaw Flow，因此這類流動的研究是很重要的，特別是在微流動的流體研究，同時在這種小空隙平板的設計，黏滯力遠大於慣性力，故也適合雷諾數 R_e 非常低的流體研究。

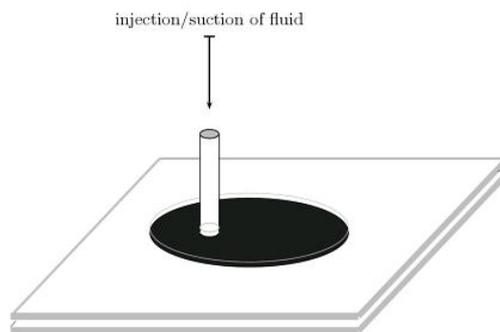


圖 2-7 Hele-Shaw Flow 示意圖【25】

一維的 Hele-Shaw Flow :

流體在空隙中的一維流動模式如圖2-12所示，在平面間的流動即如同流體問題中的穩定管流，流速呈現一個拋物線且同時符合接觸平板速度為零的不滑動邊界條件（no-slip boundary condition），因此流速的公式寫為【25】：

$$v_x|_{-h,h} = v_y|_{-h,h} = 0$$

$$v(z) = -\nabla P \left(\frac{h^2 - z^2}{2\mu} \right)$$

由上公式可得知流速正比於壓力梯度 $-\nabla P$ ，且反比於流體黏度 μ 。現在將 $v(z)$ 積分除以厚度求平均流速，這裡的平均流速 \bar{v} 就是波前的移動速度，故寫為：

$$\bar{v} = -\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \nabla P \left(\frac{h^2 - z^2}{2\mu} \right) dz = -\frac{h^2}{3\mu} \nabla P$$

上式同時稱為一維的 Navier-Stokes Equations。

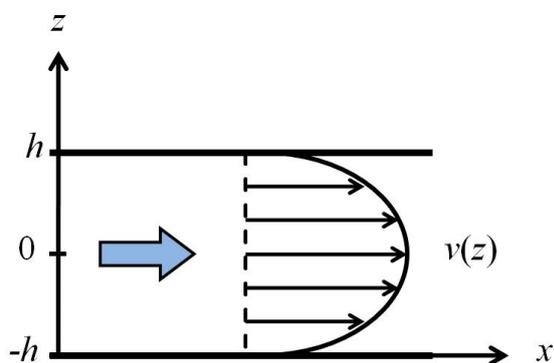


圖 2-8 不滑動邊界條件

二維的 Hele-Shaw Flow :

二維的流動如圖 2-13 所示， S 為波前，原點為壓力點，假設還沒有流體流到的地方壓力為零，為了推導二維 Navier-Stokes Equations，我們先寫下三維的動量方程式（momentum equation）和連續方程式（continuity equation），並直接捨去重力項【25】：

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \nabla^2 \vec{v} \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

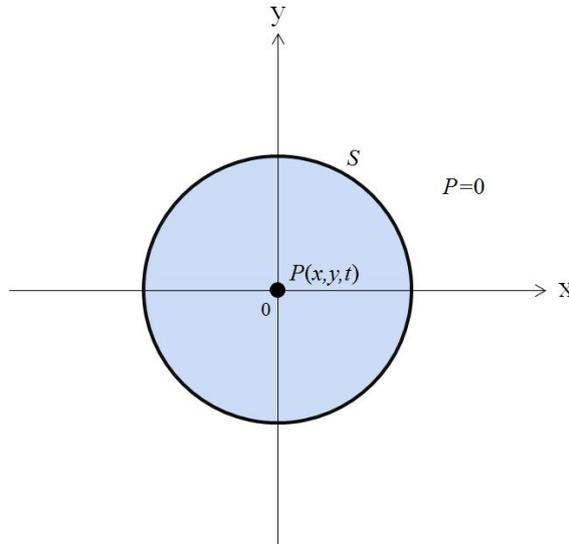


圖 2-9 壓力於 Hele-Shaw Flow 示意圖

這裡因為假設流體不能壓縮 $\rho = const$ ，所以連續方程式寫為 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ 即可，同時假設流體在流動時十分緩慢，並且沒有 z 軸方向速度，故：

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad \text{and} \quad v_z = 0$$

由上式的假設可將動量方程式改寫為：

$$\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) v_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_x$$

$$\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_y$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

又假設厚度非常小，即可得到在遲緩移動下的 Navier-Stokes Equation：

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

現在知道 v_x, v_y 為 z 的函數，所以寫為：

$$v_x(z) = -\frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{h^2 - z^2}{2\mu} \right), \quad v_y(z) = -\frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{h^2 - z^2}{2\mu} \right)$$

同一維時求取平均速度則可得到波前速度：

$$\overline{v_x} = -\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{h^2 - z^2}{2\mu} \right) dz = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{h^2}{3\mu}$$

$$\overline{v_y} = -\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{h^2 - z^2}{2\mu} \right) dz = -\frac{\partial P}{\partial y} \frac{h^2}{3\mu}$$

$$\bar{v} = -\frac{h^2}{3\mu} \nabla P$$

上式可寫為：

$$\bar{v} = -D\nabla P$$

式中： D 為傳導係數， D 值由射出塑料的黏度 μ 和薄件模穴厚度 $2h$ 而定。

同時壓力必為連續函數（除非是波前部分，波前未到達的地方設壓力為零），我們可將壓力的連續函數寫為：

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (\nabla \cdot \bar{v})$$

帶入波前速度 \bar{v} 函數變成：

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -(\nabla \cdot D\nabla P)$$

又單純薄件厚度為定值， $D = \text{const}$ ，上式可化簡為：

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -D\nabla^2 P$$

類似熱傳定律。在這裡我們主要模擬的公式已經完整推倒，本研究主要探討不同的邊界條件和不同厚度傳導係數的設定及厚度變化（ $D(x,y)$ ，傳導係數不為定值，為 x,y 的函數）時的參數設定。

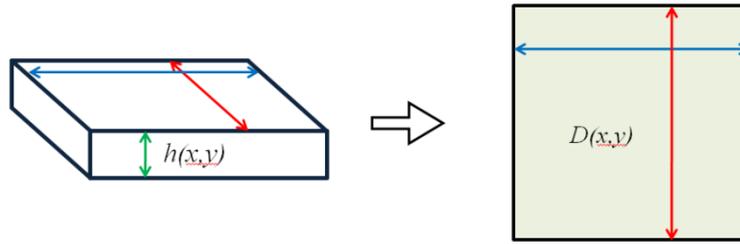


圖 2-10 2.5D 技術示意圖

得到這樣的結論並不意外，熔膠的流動趨勢的確是由壓力所致，流動的方式如熱傳導熱傳的模式相同，熔膠的流動方向由壓力的梯度所定，而熱量的傳導方向也是由溫度梯度來決定，表 2-6 提供幾種類似傳導模式的物理現象來佐證：

表 2-6 Hele-Shaw 類似物理現象【26】

	Darcy's law	Fourier's law	Fick's law	Ohm's law
Flux of	Groundwater, q (m/s)	Heat, q_H (W/m ²)	Solute, f (g/m ² ·s)	Charge, i (A/m ²)
Potential	Head, h (m)	Temperature, T (K)	Concentration, C (g/m ³)	Voltage, V (V)
Medium property	Hydraulic conductivity, K (m/s)	Thermal conductivity, κ (W/K·m)	Diffusion coefficient, D_d (m ² /s)	Electrical conductivity, σ (1/Ω·m)
	$q = -K \nabla h$	$q_H = -\kappa \nabla T$	$f = -D_d \nabla C$	$i = -\sigma \nabla V$

以上分別為達西定律 (Darcy's Law)、傅立葉熱傳定律 (Fourier's Law)、菲克氏定律 (Fick's Law)、歐姆定律 (Ohm's Law)。其中特別提到達西定律，主要描述於地下水在沙土孔隙內傳導的現象，而這種流動的假設同樣是在雷諾數 Re 非常小的流體運動，並且地下水的流動非常緩慢，也和熔膠流動的蠕流現象十分相似。

2-4 2.5D 模流分析技術

模流分析技術的演進大致上可分為三個世代，每一代技術的演進

都使得模流預測的正確性及便利性更上一層樓。

第一代的模流分析技術始於 1970 年代中期，由於受限於電腦的運算能力與容量，採用二維平面展開的方式，將流道系統與意模穴以人工或半自動方式展開，計算不同流動路徑的流量與壓力降的關係，以預測塑料在模穴內的流動行為，一般又稱為 Layflat 法。此法最大的限制就是使用者必須先行猜想塑料流動的可能路徑，才能進行模流分析，因此誤差偏高，而且人工作業繁雜，目前已不再有人使用。

第二代的模流分析技術出現於 1980 年左右一般通稱為中間面(mid plane)，即 2.5D 模流分析技術。首先將三維的 CAD 模型簡化，以薄殼模型搭配產品厚度代表原始 CAD 模型，桿狀元素搭配直徑代表流道系統，再透過適當的理論假設簡化，運用有限元素法(Finite element method)混合有限差分法(Finite difference method)進行模擬計算。這種數學模型可完整地導入塑料流動的非牛頓黏度特性、黏滯升溫(Viscous heating)、比容變化(PVT relationship)、非等溫材料性質、模溫變化...等，因此可以在理論假設範圍內準確預測塑料的流動、溫度、剪切率、剪切應力...等特性。

2.5D 技術後續也曾經衍生出所謂的雙面流技術(dual-domain technology)，雖然提升了 2.5D 模型製備的便利性，但其正確性卻仍受限於 2.5D 技術的先天理論限制。

第三代的模流分析技術即目前最新的 3D 實體模流分析技術，主要是電腦計算速度日新月異，發展的運算方式也有新的發展，例如平行運算和自動化網格處理技術...等，已可處理早期沒有辦法做到的大量

運算。3D 實體模流分析技術不但能將傳統 2.5D 分析法無法考量的實際狀況列入分析考量，還能簡化從 CAD 到 CAE 的模型準備時間，可望將模流分析的工具落實到每個設計工程師的電腦桌面。透過快速準確的計算、完整的塑膠材料庫與射出成型條件設定，並且搭配人性化的操作界面與最新的三維立體繪圖技術，真實呈現所有分析結果，滿足每個設計者對模具及產品最佳化的需求。【27】

2.5D 模流分析技術常常因為模型簡化過程中改變產品結構剛性，導致流動行為預測失真，但最大的優點即是計算速度，即表現了大部分的趨勢，缺點就是對物件有嚴格的限制，若是肉厚太大，或是厚度方向變化太大，便會有嚴重的錯誤，以圖 2-15 表示 2.5 D 網格建立方式，各家軟體的網格建立方式不近相同，但大致上會保留厚度方向網格，並非真正的化簡成二維網格。本研究嘗試將厚度幾何的影響模擬成物體的導熱特性，以二維的傳導來化簡流動。

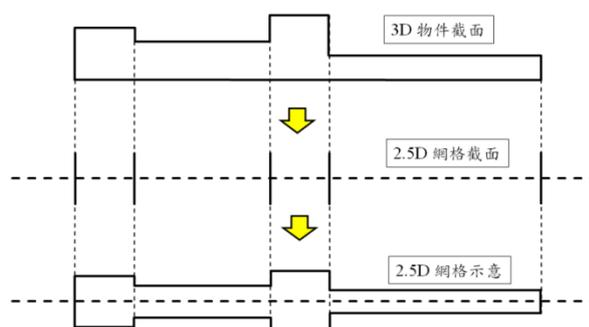


圖 2-11 2.5D 網格建立示意圖

2-5 熱傳導理論

在輸送現象中另一個重要領域為熱傳導 (heat transfer)。依熱力學

第零定律(熱平衡)：「若A與B兩物體分別與第三者C物體達成熱平衡,則A、B兩物體即使並未直接熱接觸,彼此亦屬熱平衡狀態」；此處物體熱平衡狀態之度量即為溫度,當兩物體達到熱平衡時,我們稱此兩物具有同樣的溫度；反之當溫度不同時,即發生熱量傳輸。而熱傳導具三種不同型態：傳導、對流及輻射。任何熱交換均是由其中之一或綜合型態呈現。傳導是熱經由固體或靜止液體進行熱的傳遞；對流是以液體的流動來傳遞熱量；而輻射並不需要藉著任何媒介來傳遞熱量,其是以電磁輻射的放射進行熱交換。

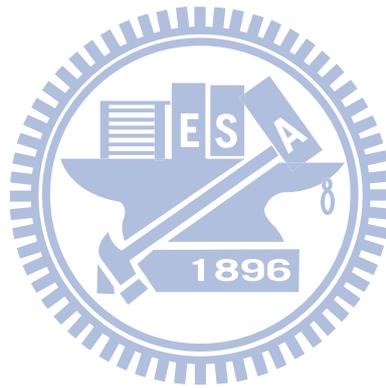
1.傳導 (conduction)：在物質之巨觀速度 (bulk velocity) 等於零之前提下,兩互相接觸系統間或一連續物質中不同位置因溫度不同,熱量由高溫處流至低溫處,稱為”傳導”。由微觀角度,熱是藉由鄰近分子間的熱運動程度之不同而交互傳遞；在物體內存在一溫度梯度時,能量較高的的分子會透過碰撞、轉動、振動等方式將能量轉予較低的分子；在固態金屬中,熱能亦可藉自由電子所傳遞。

2.對流 (convection):熱對流通常發生在固液界面/固氣界面/液氣界面,兩相間存溫度差異,透過流動相(氣相或液相)的帶動,造成溫度不同區域間之混合,使熱量從高溫處流往低溫處。對流又可分成強制對流(forced convection)與自然對流 (free convection) 兩種,前者由外力因素引起對流驅動力,後者則因流體受熱傳導影響使局部溫度變化,造成流體之局部密度變化,因密度差而發生流動,連帶將熱量傳送至另一處。

3.輻射 (radiation)：在高於絕對零度的任何物質均會放出電磁波

(electromagnetic wave)，電磁波在真空中以光速傳遞，遇到物質則會部份反射，部分穿透，部分吸收。高溫系統放出電磁波，其部份能量以熱型式被低溫系統所吸收之行為稱為熱輻射；電磁波能量高低與放出物質溫度與表面性質有關，溫度愈高者散發電磁波能量較高。

本論文在使用熱傳導表現流動的熔膠，邊界條件主要設定為固體，主要使第一個熱傳導特性(傳導)，對流及輻射就不在多作討論



第三章物理模型和理論計算

3-1 物理模型

當熔膠在模具內流動時，流場的流動模式將受到模具幾何、黏度、壓力...等因素的影響，系統非常繁雜，本研究將探討射出成型常見的四種主要幾何流動(如下示意圖)：

1. 圓管和兩平板間的一維流動，見圖 3-1(上)。
2. 兩平板間的二維流動(徑向流動)，見圖 3-1(下)。
3. 流動幾何邊界，見圖3-2。
4. 有明顯方向性的幾何變化，見圖 3-3。

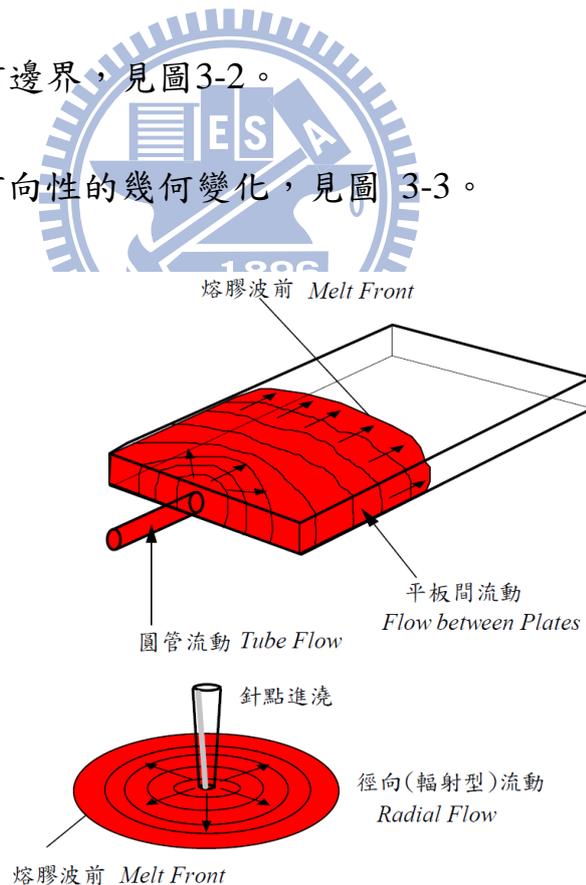


圖 3-1 圓管流動平板流動徑向流動示意圖



圖 3-2 薄件幾何邊界示意圖

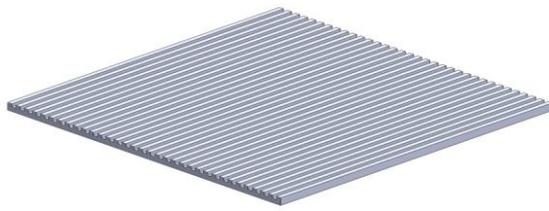


圖 3-3 明顯方向性的幾何變化示意圖

3-1-1 模型假設

本研究的理論計算和數值模擬皆以以下的假設作為邊界條件的設定：

1. 射出進膠量為定值。
2. 模具邊界速度為零(邊界不滑動效應)。
3. 在流動時設定為穩定的層流，沒有紊流。
4. 忽略波前噴泉效應的影響，即未充填的模具幾何不影響其流動，且空模穴壓力為零。
5. 重力影響不考慮。

3-1-2 黏度模型

本研究使用的黏度模型為擬塑性流體(*Pseudoplastic Fluid*)：

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad n < 1$$

以塑膠聚苯乙烯polystyrene(PS)為做為模擬的填充物，表3-1顯示塑膠聚苯乙烯在不同溫度下的 k 和 n 值，其黏度示意圖則見圖3-4 (以下的圖形皆設定溫度為225°C)：

表3-1 聚苯乙烯黏度係數表

溫度°C	k	n
190	4.47×10^4	0.22
210	2.38×10^4	0.25
225	1.56×10^4	0.28

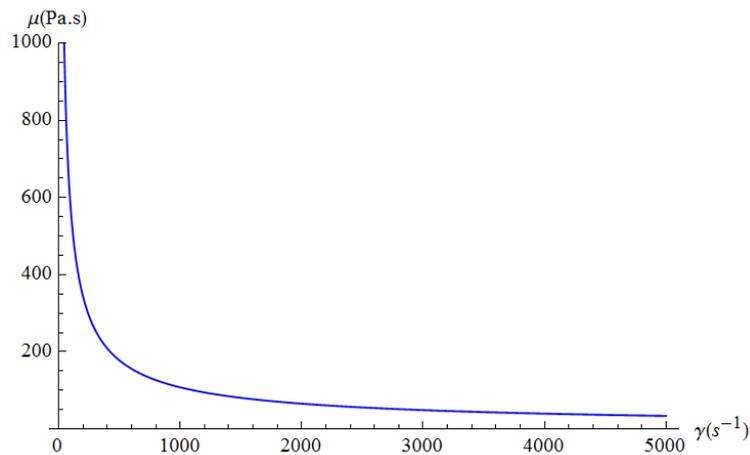


圖 3-4 擬塑性流體黏度示意圖

黏度模型由於是指數函數，在剪應變為零時黏度趨近於無限大，在剪應變極大時黏度則趨近於無限小，但如此並不能確切描述塑膠材料的特性，故通常會在模型內設定剪應變範圍，並設定最大值和最小值(如圖3-5及圖3-6)，避免在小剪應變或過大剪應變範圍內失真，而此模型的剪應變範圍為 $100 \sim 5000(s^{-1})$ 。修正後如下：

$$\mu = \begin{cases} k100^{n-1}, & \gamma \leq 100 \\ k\gamma^{n-1}, & 100 \leq \gamma \leq 5000 \\ k5000^{n-1}, & \gamma \geq 5000 \end{cases}$$

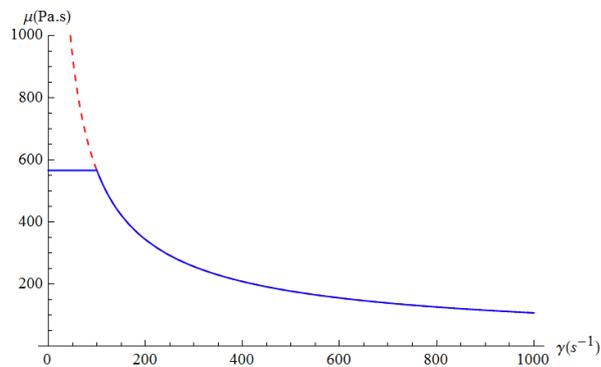


圖 3-5 低剪應變黏度修正(最大值)

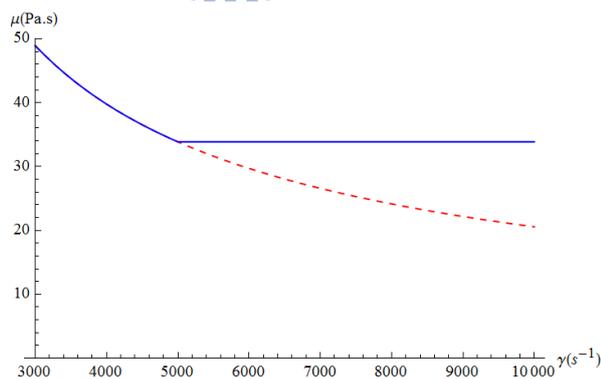


圖 3-6 高剪應變黏度修正(最小值)

$\tau = \mu\gamma$ ，模型的剪應力修正後如下，由圖3-7、圖3-8可以發現修正

後的模型依然同樣為不連續函數：

$$\tau = \begin{cases} k\gamma 100^{n-1}, & \gamma \leq 100 \\ k\gamma^n, & 100 \leq \gamma \leq 5000 \\ k\gamma 5000^{n-1}, & \gamma \geq 5000 \end{cases}$$

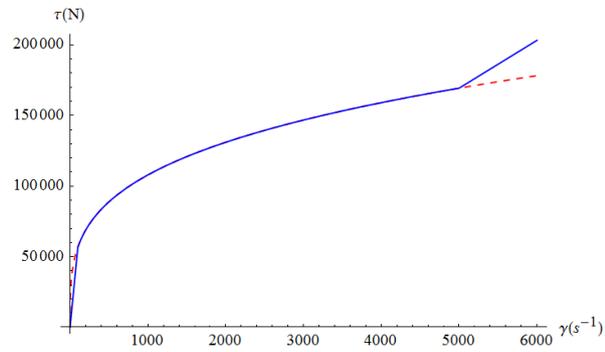


圖 3-7 塑性流體應力和應變關係圖

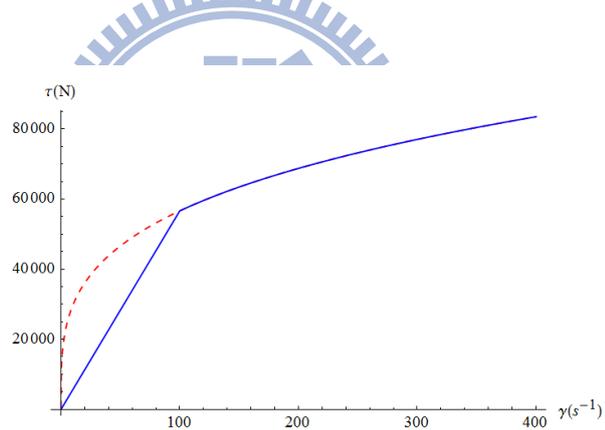


圖 3-8 塑性流體應力和應變關係圖

3-2 理論計算

在理論計算的部分，因為射出成型機以螺桿推動，進膠量和進膠速度為可控制項。本研究著重在模穴幾何對流動的影響，及不同幾何的壓力分佈。

3-2-1 牛頓流體在圓管和平板內的流動

本研究主要利用流體力學中不可壓縮黏性管流(*Pipe Flow*)的理論來計算和探討熔膠在管內可能的流動方式，圓管通常是用來運送流體的，管內的流動主要靠管線中的壓力推動，類似於熔膠被擠進模穴後的流動方式。

本研究用兩種方式推導預測牛頓流體在管內的流動。如圖3-9所示，穩態的層流只在z軸方向有速度，而邊界速度則為零，是一個半徑r的函數，又而因為穩態流動，所以所有變數對時間微分為零，且若不考慮重力項，可得：【28】

$$v_z = v_z(r), \quad v_r = v_\theta = g_r = g_\theta = g_z = 0$$

1. 參考附錄一，圓柱座標的Navier-Stokes Equation：

由上假設可化簡剩下z分量：

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

使用分離變數法和邊界條件 $v_z(0) = v_z(R) = 0$ ，可解得速度分布

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (R^2 - r^2)$$

積分求得平均速度：

$$v_{avg} = -\frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (R^2 - r^2) r dr = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dP}{dz}$$

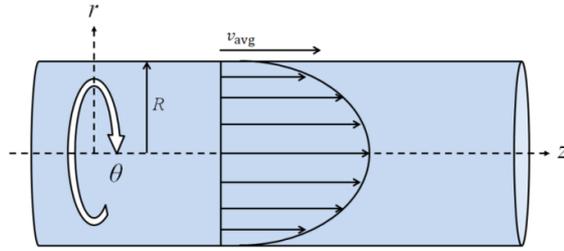


圖 3-9 圓管穩定流動情況

2. 殼層分析：

參考圖3-10在殼層體積內力平衡為：

$$(2\pi r dr P)_z - (2\pi r dr P)_{z+dz} + (2\pi r dz \tau)_r - (2\pi r dz \tau)_{r+dr}$$

共除 $2\pi dr dz$ ：

$$r \frac{P_{z+dz} - P_z}{dz} + \frac{(r\tau)_{r+dr} - (r\tau)_r}{dr} = 0$$

$$r \frac{dP}{dz} = -\frac{d(r\tau)}{dr}, \quad \tau = -\mu \frac{dv_z}{dr}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

同上方程式。

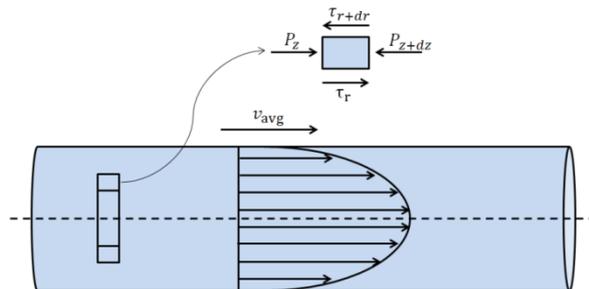


圖 3-10 圓管流動殼層分析法

一維的平板計算同上。成熟的層流如圖3-11所示，只有x軸方向有速度，視為y的函數且邊界速度為零，而因為穩態流動，所以所有變數對時間微分為零，此時若不考慮重力項，且假設z方向為無限大，則可得：

$$v_x = v_x(y) \quad , \quad v_y = v_z = g_x = g_y = g_z = 0$$

1. 參考附錄一笛卡爾座標Navier-Stokes Equation：

由上假設可化簡剩下x分量：

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}$$

使用分離變數法和邊界條件 $v_x(0) = v_x(h) = 0$ ，解得速度分布 $v_x(y)$ 為：

$$v_x(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (hy - y^2)$$

積分求得平均速度：

$$v_{avg} = -\frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (hy - y^2) dy = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{dP}{dx}$$

2. 流動微分分析法：

參考圖3-11在殼層體積內力平衡為：

$$(dy P)_x - (dy P)_{x+dx} + (dx \tau)_y - (dx \tau)_{y+dy}$$

共除 $dx dy$:

$$\frac{P_{x+dx} - P_x}{dx} + \frac{\tau_{y+dy} - \tau_y}{dy} = 0$$

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{d\tau}{dy} \quad , \quad \tau = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad , \quad \frac{dP}{dx} = \mu \frac{d^2v_x}{dy^2}$$

同上方程式。

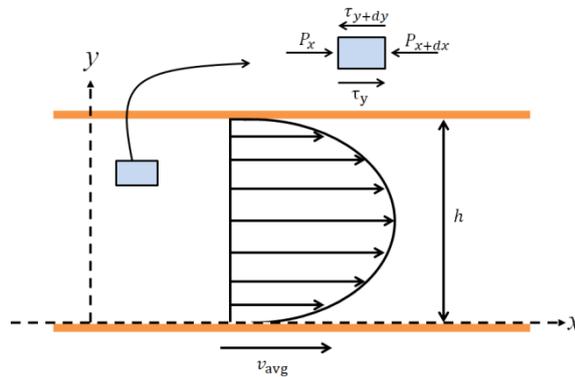


圖 3-11 平板穩定流動情況

由上可以發現一維流動的驅動壓力和流動成正比關係，且壓力皆為速度方向(單方向)變化，因此可將壓力變化量寫成壓力梯度 ∇P ，整理後可得圓管和平板壓差方程式：

$$\frac{dP}{dX_{\vec{v}}} = \nabla P$$

$$\text{一維圓管：} v_{avg} = -\frac{R^2}{8\mu} \nabla P$$

$$\text{一維平版：} v_{avg} = -\frac{h^2}{12\mu} \nabla P$$

進一步考慮平板徑向流動，這裡適合使用 *Navier-Stokes Equation* 分析，不適合用流動微分分析法，圓管流動則使用圓柱座標。穩態的層流如圖3-12所示，只有 r 軸方向有速度，為一個 r 和 z 的函數，且邊界速度為零，這裡先假定有一個固定流量 A (每單位時間可以擴大面積 A)，而因為穩態流動，所以所有變數對時間微分為零，若同時亦不考慮重力項【29】：

$$v_r = v_r(r, z) \quad , \quad v_\theta = v_z = g_r = g_\theta = g_z = 0$$

因為連續方程式，並利用平板一維流動的結果，令速度在厚度方向為一拋物線：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} = 0 \quad , \quad v_r(r, z) = \frac{f(z)}{r} \quad , \quad f(z) \propto (hz - z^2) \propto A$$

由上述假設可將圓柱座標 *Navier-Stokes Equation* 化簡剩下 r 分量：

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = -\frac{dP}{dr} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right]$$

化簡可得：

$$\mu r^2 \frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \rho (f(z))^2 = r^3 \frac{dP}{dr}$$

$$P(r) = \int \left(\frac{\rho(f(z))^2}{r^3} + \frac{\mu \frac{d^2 f(z)}{dz^2}}{r} \right) dr = -\frac{\rho(f(z))^2}{2r^2} + \mu \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \ln(r)$$

又假設為Stokes-Flow ($\mu \gg \nu$, $A \cong 0$) $\mu \approx 100$, $\nu \approx 0.1$

捨去慣性項 $-\frac{\rho(f(z))^2}{2r^2}$ (即動壓 $\frac{\rho v^2}{2}$) 後，以平板一維流動為例子，可以得到拋物線的平均速度關係：

$$f(z) = 6f_{avg} \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right), \quad P(r) = \mu \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \ln(r) = -\frac{12 \mu f_{avg}}{h^2} \ln(r)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{12 \mu f_{avg}}{h^2 r} = -\frac{12 \mu}{h^2} v_{avg}, \quad v_{avg} = -\frac{h^2}{12 \mu} \frac{dP}{dr} = -\frac{h^2}{12 \mu} \nabla P$$

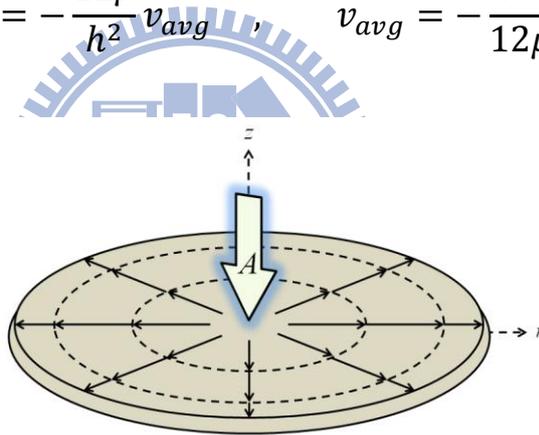


圖 3-12 徑向流動示意圖

經上述可以發現二維的流動和一維流動相同，並且也符合Hele Shaw Flow。

3-2-2 非牛頓流體在平板內的流動

現在進一步加入塑膠的黏度模型，由於塑膠為非牛頓流體，因此

Navier-Stokes Equation在此並不適用，如圖3-13所示，應改用流動微分分析法：

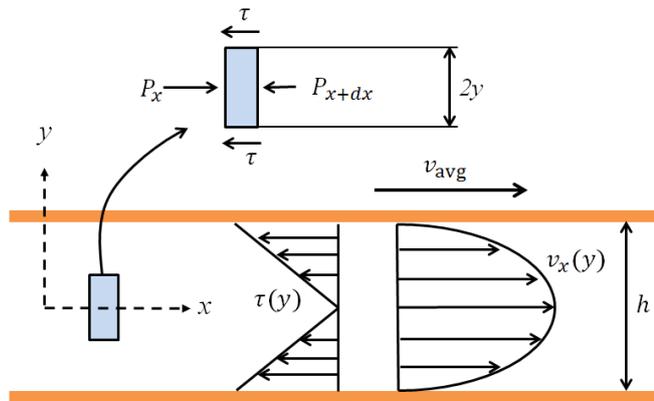


圖 3-13 平板穩態流動剪應力關係圖

$$2y(P_x - P_{x+dx}) = 2\tau dx, \quad \tau(y) = -y\nabla P, \quad \tau_{Max} = -\frac{h}{2}\nabla P$$

圖3-14和圖3-15顯示在考慮塑性流體時，剪應力和剪應變的關係是三段不連續的函數。在 I、III 區域內黏度為定值，剪應力和剪應變呈現線性的關係。

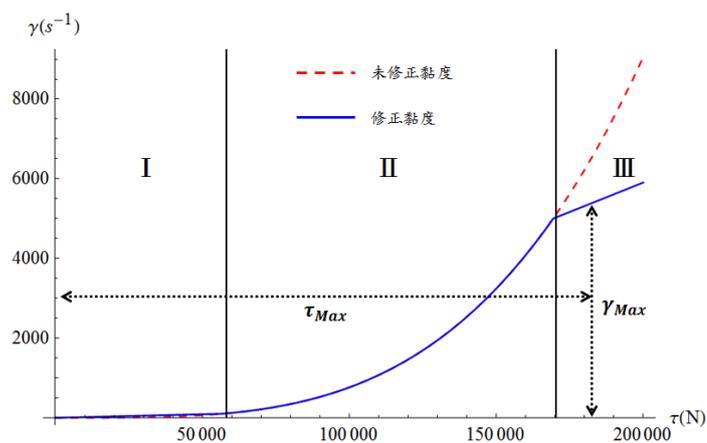


圖 3-14 剪應力和剪應變關係圖

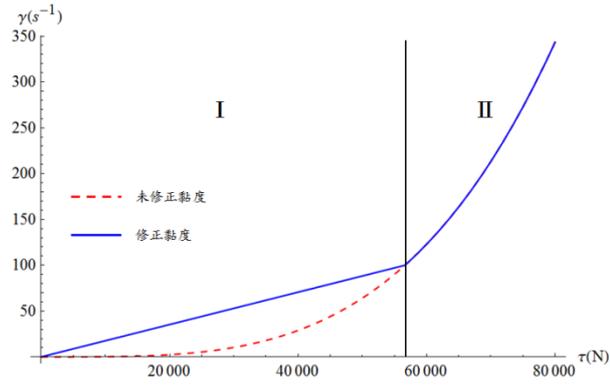


圖 3-15 剪應力和剪應變關係圖

因此，此時的計算完全取決於 τ_{Max} 落在 I、II、III 中的哪個區域，但可以預測的是，速度分布 $v_x(y)$ 不一定仍是拋物線，壓力梯度 ∇P 和平均速度 v_{avg} 也不是正比關係，此外，若黏度沒有做修正，當剪應變過小和過大時將會有嚴重的錯誤。所以此處將 $v_x(y)$ 剪應變改寫成 $-dv_x(y)/dy$ ，即可算出。

$$\tau(y) = \mu \gamma, \quad 189 \gamma = -\frac{dv_x(y)}{dy} = \frac{\tau(y)}{\mu}$$

$$v_x = -\int_0^y \frac{\tau(y)}{\mu} dy = \nabla P \int_0^y \frac{y}{\mu} dy, \quad v_x\left(\frac{h}{2}\right) = 0, \text{ and } v_x(y) = v_x(-y)$$

解開以上的微分方程後，即可求得 $v_x(y)$ ，這裡的積分範圍需要知道 τ_{Max} 的實際值，但 τ_{Max} 取決於 ∇P 和平板的厚度 h ，且函數不連續，使計算十分繁瑣複雜，在此只呈現計算成果(詳細計算的過程請見附錄二)。

圖3-16、3-17、3-18為當 $h = 5mm$ 時， τ_{Max} 分別在 I、II、III 三段不連續函數內的速度分布 $v_x(y)$ ， $-\nabla P$ 分別為：

$$-\nabla P = 2 \times 10^7 \quad , \quad -\nabla P = 5 \times 10^7 \quad , \quad -\nabla P = 8 \times 10^7$$

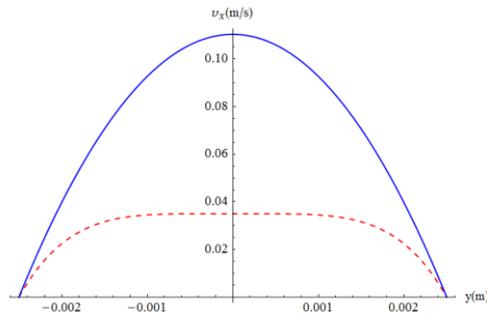


圖 3-16 τ_{Max} 在 I 區域速度分布圖

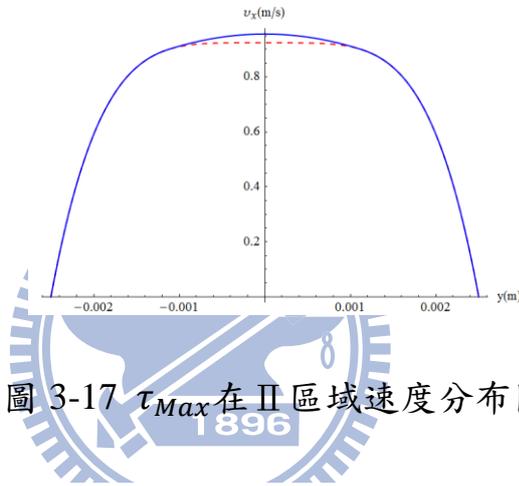


圖 3-17 τ_{Max} 在 II 區域速度分布圖

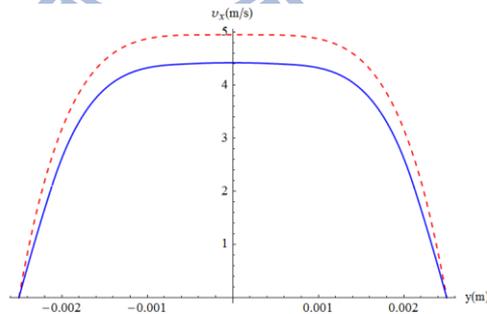


圖 3-18 τ_{Max} 在 III 區域速度分布圖

從上面三張圖可以發現，當 τ_{Max} 在 I 區域內，所有剪應力則在範圍 I 內。由於黏度為定值，所以速度分布 $v_x(y)$ 仍呈現與牛頓流體相同

的拋物線分布。而當 τ_{Max} 越來越大時，大部分的剪應力都將落在範圍 III 內，此時速度分布 $v_x(y)$ 會漸漸變成拋物線分布。當 τ_{Max} 分別落在 I、III 兩段區域時，未修正黏度所得的速度分布和牛頓流體的速度分布有明顯的不同；而當 τ_{Max} 在 II 區域內時，兩者則大致相同。

因此，只要把速度分布 $v_x(y)$ 積分起來求取平均速度就能得到壓力梯度 ∇P 和平均速度 v_{avg} 的關係：

$$v_{avg} = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} v_x(y) dy$$

圖3-19、3-20為當 $h = 5mm$ 時， v_{avg} 與 ∇P 的關係圖：

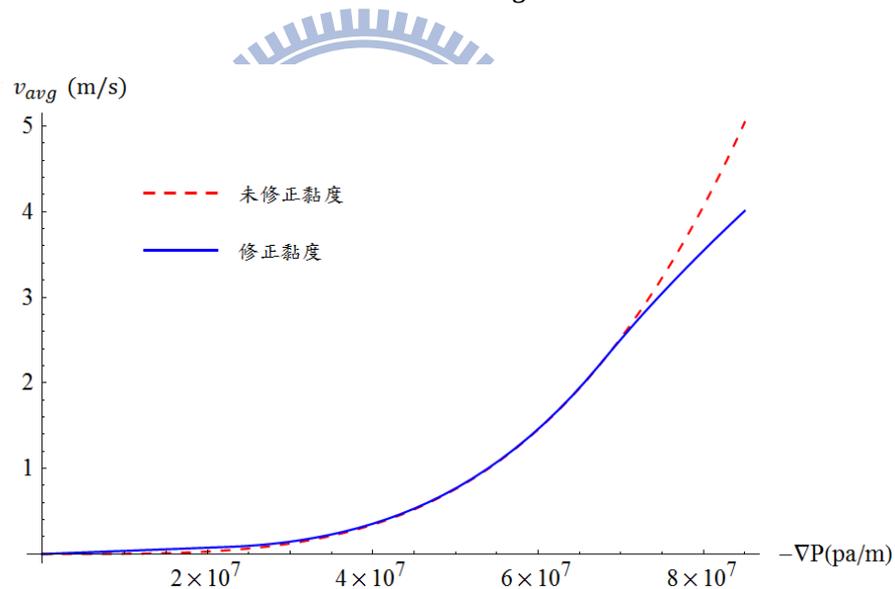


圖 3-19 平均速度和壓力梯度關係圖

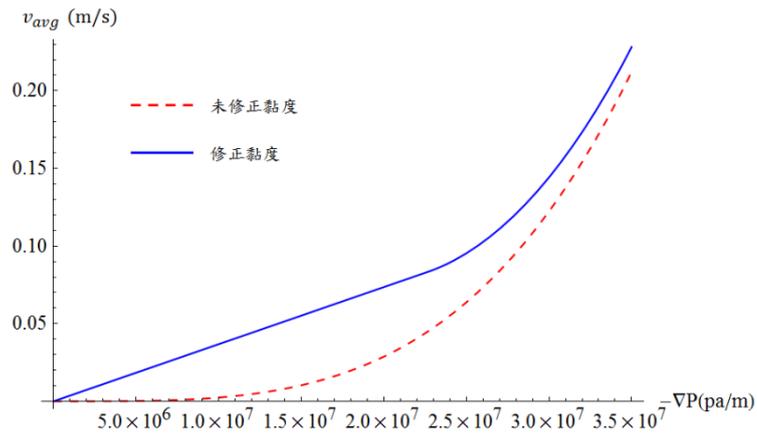


圖 3-20 平均速度和壓力梯度關係圖

經由最後的結果(圖3-19、3-20)可以發現，擬塑性流體的壓力梯度和流動速度的關係為一個不連續的多項式描述。模擬流動時需要視情況而定，之後的數值模擬將會驗證這個理論的正確性。

圓管的流動情況與此證明雷同，詳細的計算過程請參見附錄三。而二維的流動則可參考牛頓流體的情況，將二維流動定義與此一維的流動相同。

3-2-3 流動幾何邊界

在幾何邊界的流動如圖3-21所示。若將速度分成兩軸 x 和 y ， y 軸方向只受到上下兩邊模壁 A 和 C 的邊界不滑動條件影響，邊界模壁 B 則為移動限制邊界。

但 x 軸方向的流動不只受到上下兩邊模壁的邊界 A 和 C 不滑動條件影響，還受到邊界模壁 B 的影響，要描述這種情況，本研究導入非圓形管流常使用的因次：水力直徑 D_h 和范寧摩擦係數 f ，並將之定義為：

$$D_h = \frac{4A_c}{s}, \quad f = \frac{c}{Re}$$

其中 A_c 為流動截面積。 s 為潤濕周長(接觸周長)。 Re 為雷諾數。 c 則因管徑形狀而定，可由查表得知，表3-2附上一些簡單幾何的范寧摩擦係數。此情況可由流動水力直徑 D_h 和范寧摩擦係數 f 來描述：

$$D_h = \frac{4ha}{(2a+h)}, \quad \text{合理假設 } a = h, \quad D_h = \frac{4h}{3}$$

$$f = \frac{c}{Re}, \quad Re = \frac{\rho v_{avg} D_h}{\mu}, \quad f = \frac{\mu c}{\rho v_{avg} D_h}$$

同樣的壓差方程式可以寫為：

$$\nabla P = -f \frac{\rho v_{avg}^2}{2D_h} = -\frac{\mu c v_{avg}}{2D_h^2} c \text{查表為 } 62.2, \quad \nabla P \cong -17.5 \frac{\mu v_{avg}}{h^2}$$

$$v_{avg} = -\frac{h^2}{17.5\mu} \nabla P$$

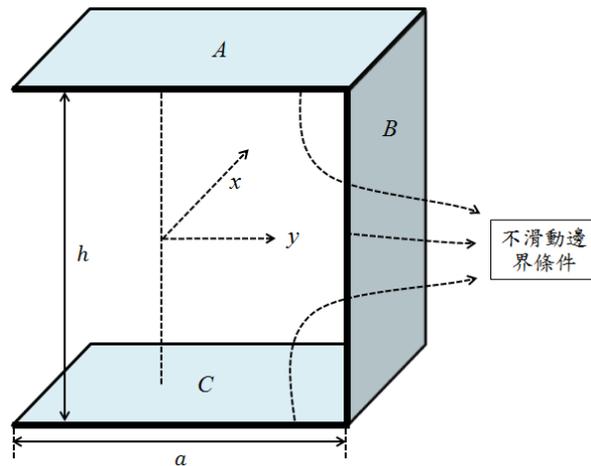


圖 3-21 邊界流動示意圖

而一維平板流動的情況如圖3-22所示，水力直徑 D_h 表示於：

$$a \cong \infty \quad , \quad D_h = \frac{4ab}{2(a+b)} = 2b = 2h$$

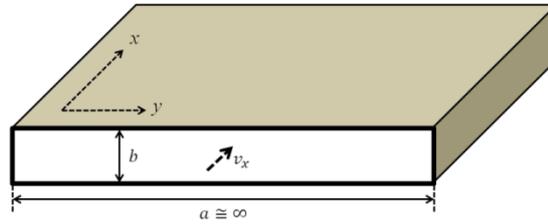


圖 3-22 邊界流動示意圖

而牛頓流體在 y 軸方向的壓差方程式仍只受到厚度的影響(同牛頓流體一維平板流動)，故可表示為：

$$\nabla P = -\frac{\mu c v_{avg}}{2D_h^2} \quad , \quad c \text{查表為} 96.00 \quad , \quad \nabla P \cong -12 \frac{\mu v_{avg}}{h^2}$$

$$v_{avg} = -\frac{h^2}{12\mu} \nabla P$$

比較後可以發現：在同樣的傳動速度下， x 和 y 兩軸所需的壓力差比例為17.5:12，比值大約是1.5，同樣假設在塑性流體(非牛頓流體)時壓力也有相同的比值，如圖3-23所示， $h = 5mm$ 。再利用數值模擬來比較是否假設妥當可行。

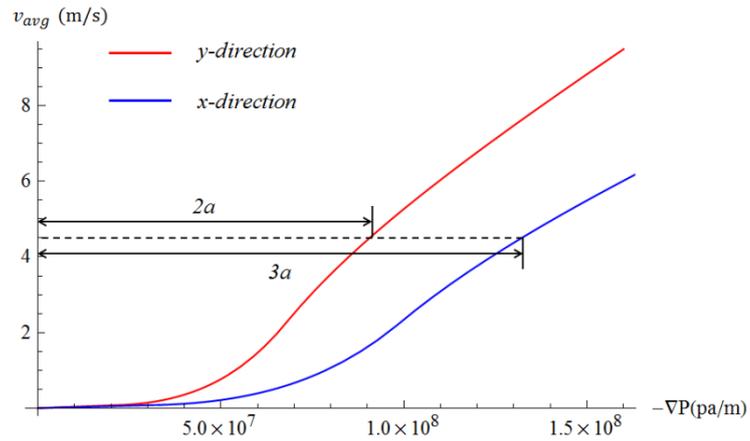


圖 3-23 邊界兩軸平均速度和壓力梯度關係比較圖

3-2-4 有明顯方向性的幾何變化

在有明顯方向性的幾何變化情況中，大致同樣可把速度分成兩軸方向，此模型如圖3-24所示， x 軸方向的流動類似於邊界流動(在凸字形管中流動)，因此可利用水力直徑和范寧摩擦係數來描述，但並非所有幾何形狀的管道都有公認的范寧摩擦係數，故仍需數值模擬的輔助。

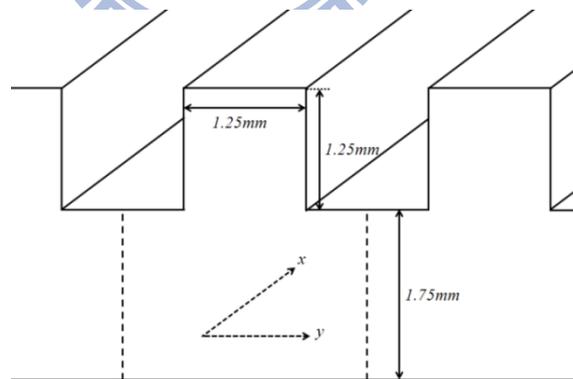


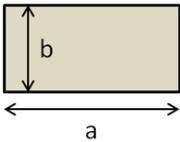
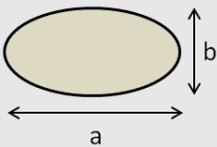
圖 3-24 方向性的幾何變化情況示意圖

y 軸方向的流動雖然只是不同厚度的變化，但是厚度變化迅速，不

能利用單純不同厚度的板子流動來假設，但由於有規則性，所以同樣需要利用數值模擬來輔助計算觀察趨勢。

理論的計算大致上到此結束，第四章會以數值模擬來比對理論的正確性和輔助理論不能敘述流動情況。

表3-2 簡單幾何的范寧摩擦係數

幾何造型	a/b	摩擦因數
	-	$64.00/Re$
	1	$56.92/Re$
	2	$62.20/Re$
	4	$72.92/Re$
	6	$78.80/Re$
	8	$82.32/Re$
	∞	$96.00/Re$
	1	$50.80/Re$
	2	$52.28/Re$
	4	$53.32/Re$
	8	$52.60/Re$
	16	$50.96/Re$

第四章 數值模擬

4-1 數值方法

早期結構工程和流體力學的研究發展主要以實驗觀察與理論分析為主，隨著數值演算方法的進步及電腦處理器計算速度的大幅提昇，人們開始試著以數值模擬搭配實驗取得的數據以求得最佳化結果。目前用來求解工程應用的方法有許多，如：有限體積法(Finite Volume Method)、有限元素法(Finite Element Method)和有限差分法(Finite Difference Method)等。

4-1-1 軟體簡介

本論文選用美國 ANSYS 公司的 FLUENT 軟體進行流體力學 (Computational Fluid Dynamics, CFD) 的數值計算和模擬，此軟體分為二個主要的部分：建模軟體 (GAMBIT) 和計算軟體 (FLUENT)。圖 4-1 表示了 FLUENT 軟體的分析流程。

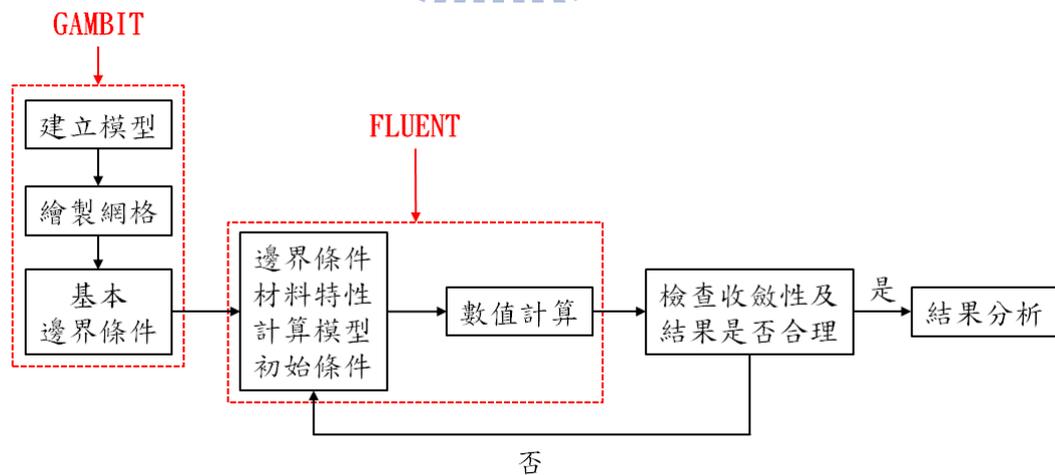


圖 4-1 數值分析模擬流程圖

建模軟體：GAMBIT

GAMBIT是由FLUENT公司所開發，用在分析物件的前處理器。首先，可利用其內建的CAD功能或是從別的CAD軟體中直接匯入的方式，建立需分析物件的模型，將簡單的邊界條件定義和命名後，則進行網格的劃分，此步驟是一個非常重要的關鍵，它關係到計算所需花費的時間。網格太疏太大計算所需時間雖較短，但會使計算結果不正確或是根本無法收斂；反觀，若網格太密太細則可能浪費許多不需要的計算時間。

計算軟體：FLUENT

FLUENT是一套由ANSYS公司所發展的三維計算流體力學軟體，是一套眾所皆知且發展較為成熟並擁有眾多功能的套裝數值分析軟體，此軟體已廣泛地被用在空氣動力學、工業工程、建築通風設計及多相流場等方面。FLUENT可讀取GAMBIT所匯出的網格資料，接著開始定義邊界條件與材料性質等計算參數，再利用有限體積的方式疊代求解，得出需分析的物理現象。選用FLUENT作為本研究的主要原因是FLUENT除了可以計算流體，同時也內建了熱傳導的模組，方便進一步再利用熱傳導的模組來模擬射出成形的充填情形。

4-1-1 FLUENT 求解程序

透過FLUENT進行求解，其求解程序如圖4-2所示，為：

Step 1：定義邊界條件並初始化；

Step 2：求解*Navier-Stokes Equation*，若有熱傳導現象則再加入能量方程式；

Step 3：計算座標 x 、 y 兩軸的速度和壓力等資料，更新為新的條件；

Step 4：判斷是否達到收斂標準，並計算下一時間步階。

求解時，FLUENT將會反覆的執行Step 2到Step 3，直到模擬結果收斂為止。其收斂之判定條件為：各方程式計算域中，所有網格內的最大殘差值(Maximum Residues)皆小於設定收斂值。

在FLUENT內，殘差值依照所使用的求解模型不同而有不同的項目，通常使用連續性(Continuity)、軸速度(x, y, z -velocity)和能量(Energy)四種條件作為收斂的標準。連續性和兩軸速度的收斂值通常取在 1×10^{-3} ，而能量則取在 1×10^{-6} ，本研究探討的流動速度較低，因此收斂值會依速度作調整，通常速度收斂值會取最大速度的三個級數倍以下。



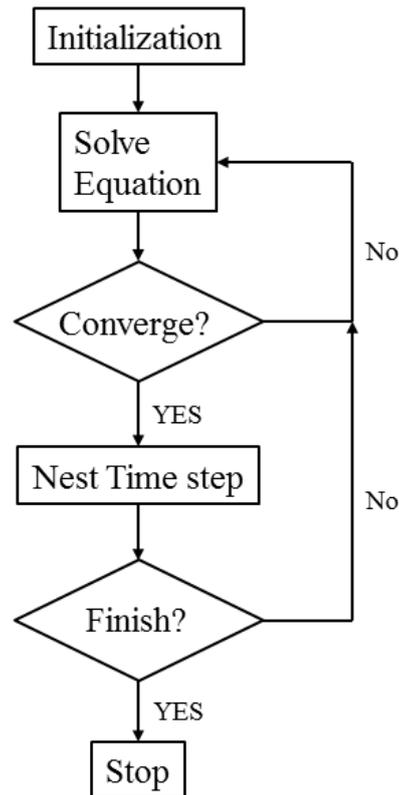


圖 4-2 FLUENT 求解程序圖

4-2 研究流程

本研究主要利用熱傳導的方式表現熔膠的流動方式，將三維的幾何模型化簡成不同材料的二維的模型，依照材料特性來模擬厚度和方向兩種幾何特性對流動的影響，但在轉化前需先得到合理的設定參數，因此，本研究首先針對熔膠在不同幾何模型內的流動模式，建立了不同幾何條件下，熱傳導模式中的材料特性。

本研究首先進行的模擬分析是探討熔膠在不同厚度平板中的流動情形，

從理論已知當熔膠在不同厚度的平板中傳導時，壓力梯度主要的變數是熔膠流動速度和平板厚度，在平板厚度為已知的情況，壓力梯度即單純為速度的變數。本研究將透過和數值模擬結果的比較，驗證理論推導的正確性。

第二部分是分析熔膠在邊界上的流動趨勢，熔膠在平板中的流動多受到邊界模壁的影響，理論上雖然可利用牛頓流體預測熔膠在此情況下的流動情形，但實際上熔膠並非牛頓流體，由於我們不能確定牛頓流體和非牛頓流體間是否可以直接轉換，所以本研究將利用數值模擬來進行比較；而由於平板間共有三片模壁，所以需建立一個三維的模型以進行準確的模擬。

第三部分是分析熔膠流動的方向性和其幾何流動趨勢，適用於有方性的幾何，這裡模擬第三章所示的幾何標準， x 和 y 兩軸需要分別討論， y 軸方向類似於第一個情況中，熔膠在平板內的流動情況，利用二維模型探討即可。 x 軸方向則類似第二個情況，需要使用到三維模型。

研究流程如圖4-3所示

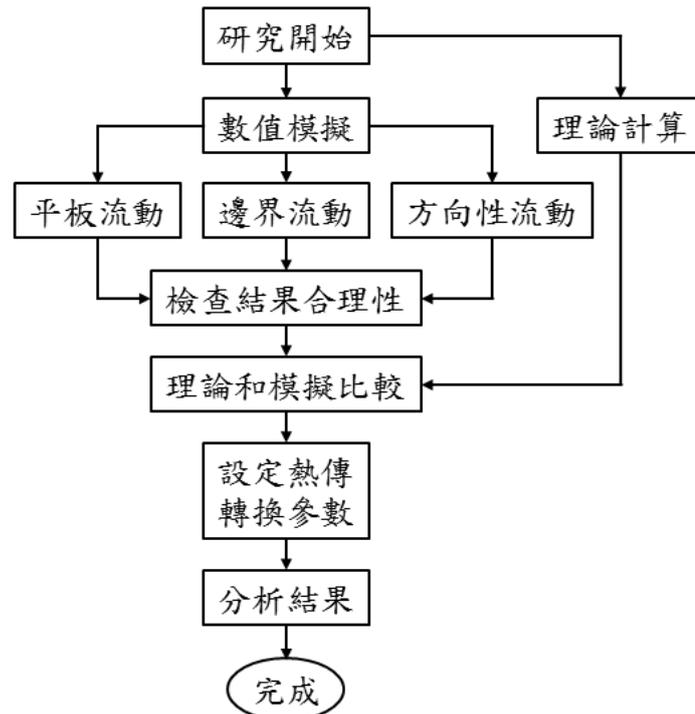


圖 4-3 研究流程圖

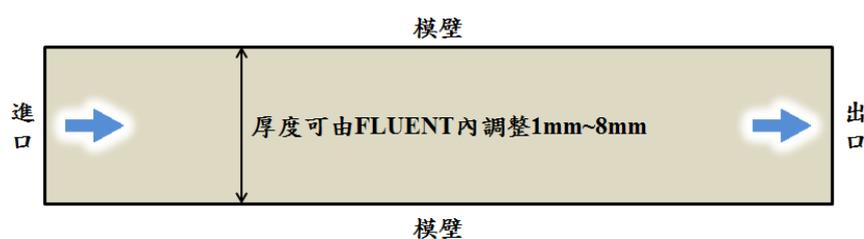
4-3 熔膠在不同厚度平板中的流動趨勢

首先定義模擬的厚度範圍，過厚的零件，雷諾數將不符合層流情況，且重力影響效應更大，若忽略對計算誤差影響大；而過薄的零件，其剪應力過大，遠超過一般加工時的情況。為避免在未知情況受其他未知效應的影響，本研究以已知常用的範圍為主，設定厚度由1 mm到8 mm，以1 mm為一間距，共八個厚度模型。

4-3-1 模型建立

在理論部分，平板中熔膠的一維流動趨勢和二維流動(皆為徑向流動)趨勢大致相同，因此，用較簡單的2D模型來模擬一維的平板流動將較有效

率，圖4-4表示了平板一維流動的模型。本研究首先利用建模軟體GAMBIT
建出長寬比5：1的長方形(由於塑膠為高黏度材料，流動趨勢很快就達到穩
態，所以沒有用很高的長寬比來表現，經過多次嘗試後，發現5：1的長寬
比已足夠表現熔膠的流動情形)，接著如圖4-5所示在四邊設定邊界條件。
GAMBIT內的邊界條件設定，主要是標示出邊界條件，以便在後續使用
FLUENT軟體時可以抓取標示好的邊界條件。在網格的設定方面，由理論可
知，熔膠在平板內流動的方向性單一，因此使用結構性方形網格將較適合，
並透過在模壁附近流動速度變化量大的地方使用較密的網格，可提高計算
的準確性(圖4-6)。



1896
圖 4-4 平板流動模型示意圖



圖 4-5 建模和邊界條件設定示意圖

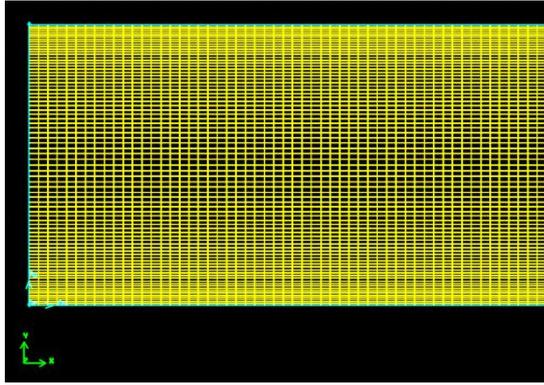


圖 4-6 網格設定示意圖

4-3-2 邊界條件

進口條件可使用：

1. 壓力入口(pressure-inlet): 在邊界上定義總壓。總壓包含靜壓和動壓，在高黏度的塑性流體裡，靜壓值遠大於動壓值，所以可以將靜壓值當作在邊界定義的總壓。但由於塑料具高黏度，且因其流動速度只受壓力差驅動而變化緩慢，若沒有搭配適當的初始速度，需要非常久的時間才能達到收斂，也常有已達到收斂值卻不合理的情況。但好處是只需要量測流通量就能計算出平均速度，再搭配出口和入口邊界的壓力差，就可以求得不同速度壓力梯度。雖然進口條件使用壓力入口，比較符合本研究的情況，但由於初始值和收斂值難以抓取，將導致較大的誤差。

2. 速度入口(velocity-inlet): 定義流體在邊界以法向量方向指定速度流入。此種邊界條件由於進口強制以一定速度進入，初始值通常設定為同入口速度。此種邊界條件可以快速達到收斂值且較準確，流動平均速度即是邊界條件設定值。但在入口部分大約前1/5長的部分因為端口效應(Entrance

effects)，屬於不成熟層流現象，由於量測壓力點必須放在穩流部分，因此量測壓力差值必須多設定量測點(見圖4-7)。本研究選用此做為邊界條件，因為收斂速度快且準確合理，雖然有非穩態的流動，但高黏度的流體可以很快速地達到穩態流動，並不影響其準確性。

3. 質量入口(mass-flow-inlet)：定義邊界的流通量(質量)。若是不可壓縮流體，質量入口條件幾乎同等於速度入口條件，熔膠流動平均速度利用密度和邊界條件即可算出，同樣的，在入口處也有端口效應，需要特別設定量測點來量測壓力差。質量入口適用於射出成形機，單位時間進料量為定質的設定。

出口條件使用：

壓力出口(pressure-outlet)：在出口邊界定義壓力為零。以出口當作壓力零位面，不影響流動的方向，也不會有回流現象

模壁條件使用：

牆(wall)：邊界不滑動設定(No Slip)。邊界上速度為零，沒有熱量流通傳導。

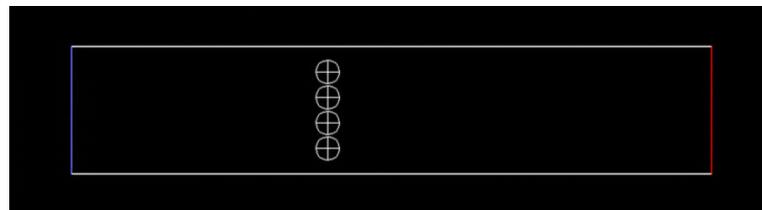


圖 4-7 設定量測點示意圖

4-3-3 材料性質

研究選用聚苯乙烯當作模擬流體，一般性質設定常用的聚苯乙烯材料性質如表4-1，而影響流動最大的黏度，在FLUENT裡有幾種仿非牛頓流體黏度的模型，即第二章提到的幾種模型，分別是幂律模型、Carreau模型、Cross模型和Herschel-Bulkley模型，適用塑膠流體的模型為前三種，而理論計算選用的是幂律模型，數值模擬則沿用幂律模型。

FLUENT裡幂律模型定義：

$$\mu = k\gamma^{n-1}e^{\frac{T_0}{T}}, \quad \mu_{MAX} > \mu > \mu_{min}$$

T_0 為參考溫度，但此處不考慮到溫度影響，故將 T_0 設定為0，其餘參數則參考表3-1設定。 μ_{MAX} 和 μ_{min} 則如第二章中的適用範圍來設定。同時將設定好的材料儲存，以便在其他的模擬中使用。

表4-1 聚苯乙烯材料性質表

密度	1050 kg/m ³
熔點	240°C
熱膨脹係數	8*10 ⁻⁵ /K
熱容	1.3 kJ(kg·K)
玻璃轉化溫度	95°C
電導率	10 ⁻¹⁶ S/m
熱導率	0.08 W/m·K

4-3-4 計算模型和初始條件

計算模型：

使用層流模型。

初始條件：

空間內速度同進口邊界條件設定之速度。

4-3-5 模擬結果

將1 mm ~ 8 mm共八組不同厚度的平板模型分別依不同的入口邊界條件進行數值計算，並於不同的速度下觀察速度分布的變化和壓力梯度的關係，可以發現在八組不同厚度的平板中，儘管厚度不同，但熔膠的流動大致上有相同的趨勢，皆可以得到和理論計算十分相似的結果。

以下以5 mm厚度的平板當作例子表現模擬結果，圖4-8, 9, 10分別為將入口邊界條件的速度設為0.05 m/s、0.5 m/s及5 m/s之速度圖，流動由左往右，隨著速度越來越快，速度分布從拋物線慢慢產生變化，最大剪應力分別分布在三段黏度不連續區段。利用FLUENT將邊界入口和出口的網格速度值繪製成速度分布圖並和理論計算做比較(見圖4-11, 12, 13)，可以發現相當高的再現性。

熔膠流動時的壓力圖如圖4-14, 15, 16，除了端口效應在入口附近的影響外，壓力值大致上平穩的往左穩定耗損。圖4-17呈現了端口效應在入口處速度往中間集中的現象，顯示高黏度流體的端口效應影響的距離很短，大約

是一個厚度的距離，之後幾乎即是成熟的層流，為了維持模擬計算的準確性，本研究將壓力量測點定在入口後兩個厚度的距離。

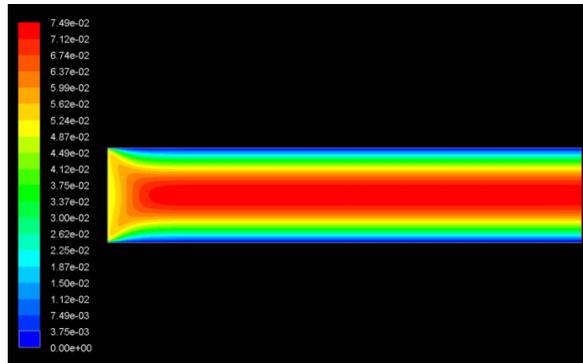


圖 4-8 邊界速度 0.05 m/s 速度圖

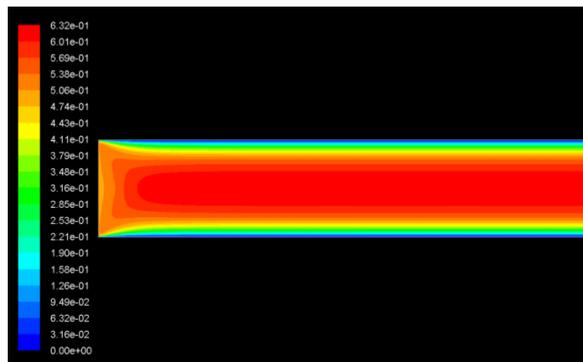


圖 4-9 邊界速度 0.5 m/s 速度圖

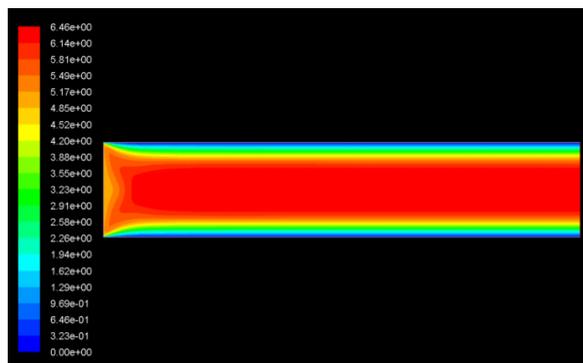


圖 4-10 邊界速度 5 m/s 速度圖

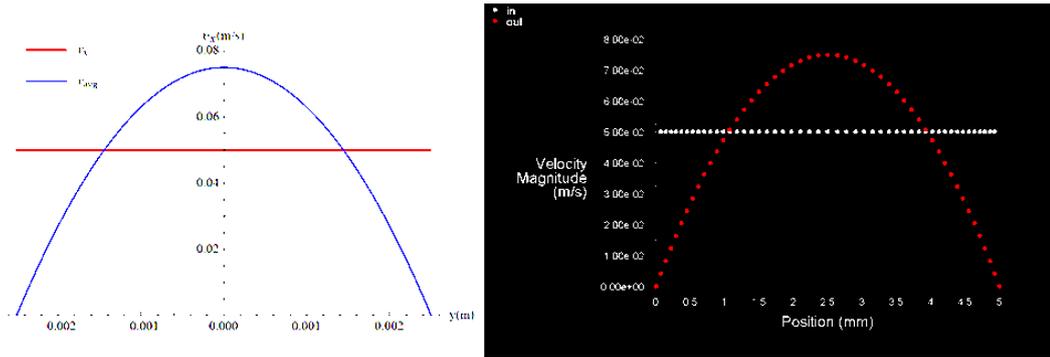


圖 4-11 邊界速度 0.05 m/s 速度分布和理論計算比較圖

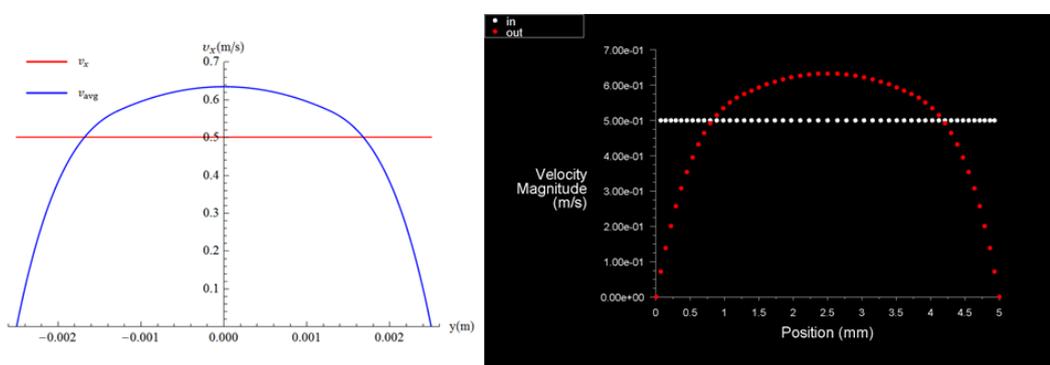


圖 4-12 邊界速度 0.5 m/s 速度分布和理論計算比較圖

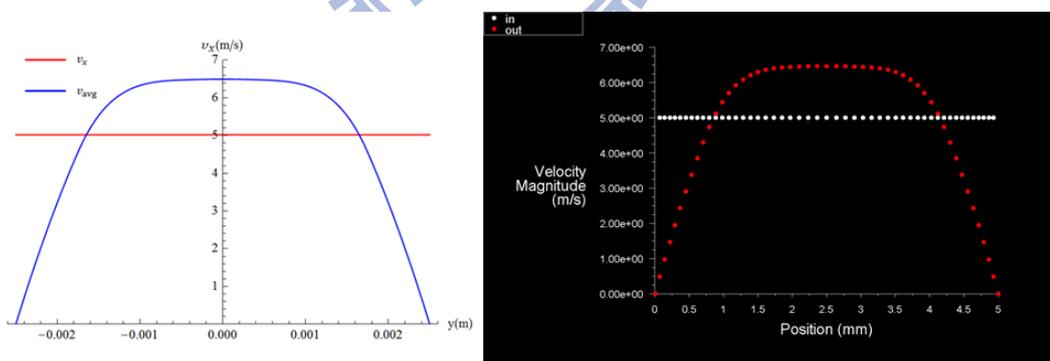


圖 4-13 邊界速度 5 m/s 速度分布和理論計算比較圖

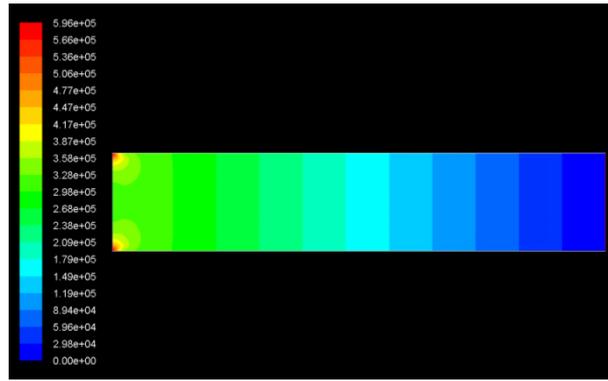


圖 4-14 邊界速度 0.05 m/s 壓力圖

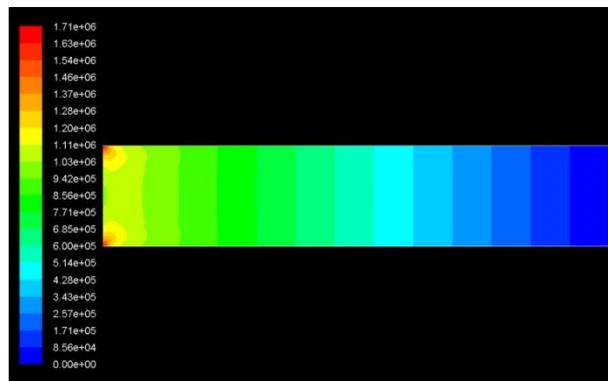


圖 4-15 邊界速度 0.5 m/s 壓力圖

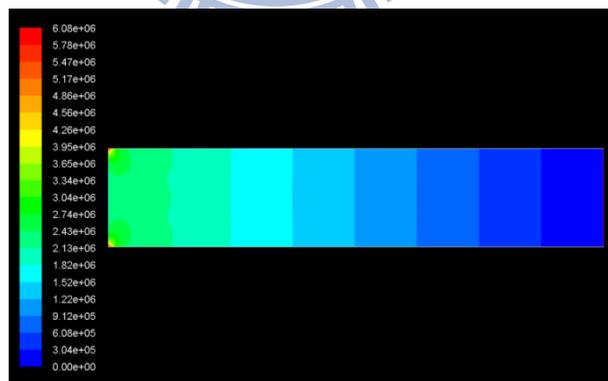


圖 4-16 邊界速度 5 m/s 壓力圖

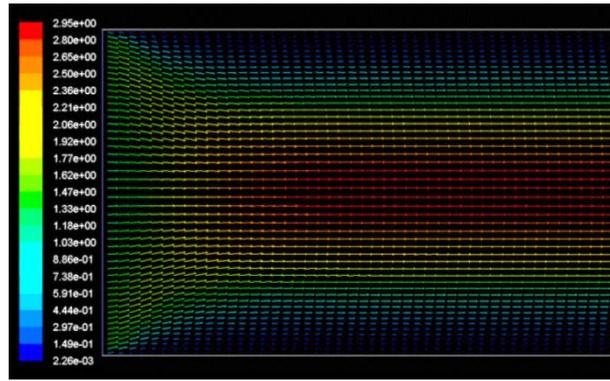


圖 4-17 端口效應圖

把模擬得到的速度和壓力梯度點資料和理論計算的圖形做比較(見圖 4-18)，兩者所得到的圖形非常雷同。若比較其餘厚度幾乎也可以得到雷同的兩個圖形，可證明理論的正確性。其餘的圖形見附錄四。

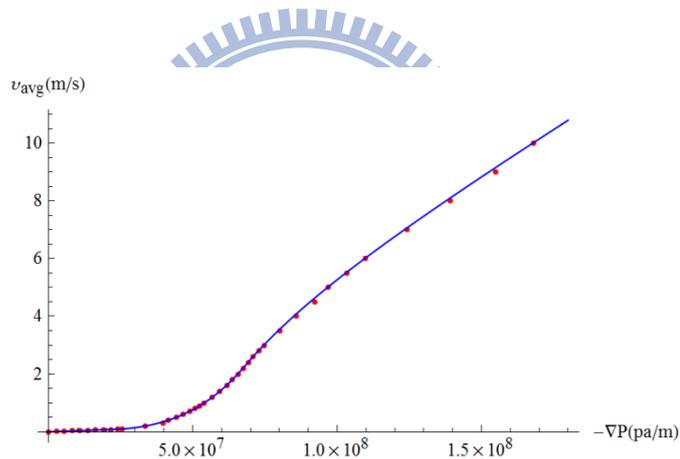


圖 4-18 模擬和理論計算比較圖(5 mm)

4-4 邊界上的流動趨勢

此流動趨勢的模擬，主要是透過與4-3節中相同厚度平板內熔膠的流動情形做比較，試圖了解當多了一個邊界模壁的影響，熔膠的流動是否和牛頓流體一樣。

4-4-1 模型建立

本模型使用了4-3節中5 mm平板的尺寸來建立三維模型(見圖4-19)，而以非圓形管流當作模擬的基礎。

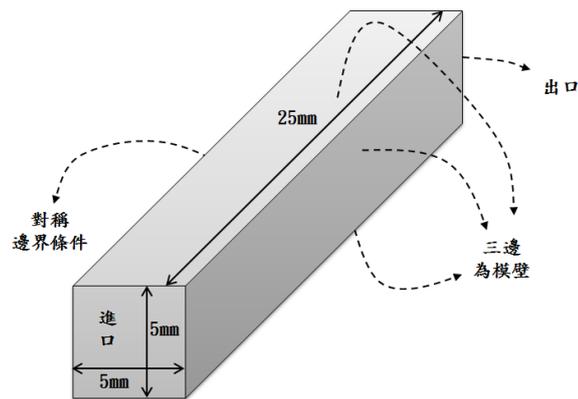


圖 4-19 邊界流動模型

首先在建模軟體GAMBIT建出長寬高各為5 mm、5 mm和25 mm的長方體，並在六個面設定邊界條件(見圖4-20)。接著設定網格，同樣把四周邊界上的網格設的較密，以求精確(見圖4-21)。

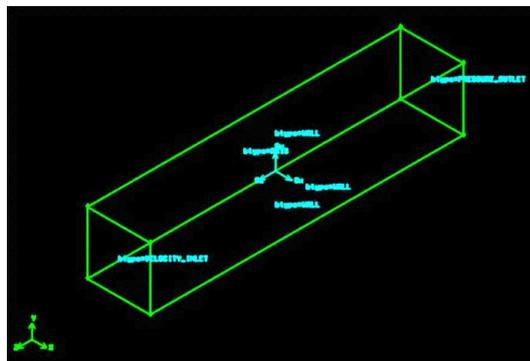


圖 4-20 建模和邊界條件設定示意圖

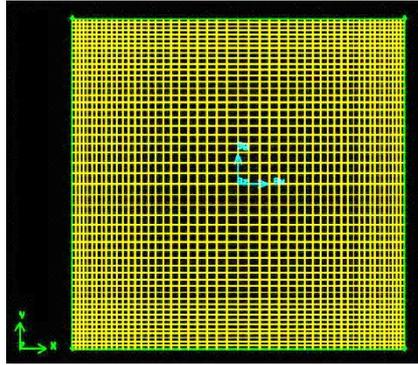


圖 4-21 入口網格設定示意圖

4-4-2 邊界條件

進口條件使用速度入口(velocity-inlet)，並設置量測壓力點(見圖4-21)

出口條件使用壓力出口(pressure-outlet)

三面模壁邊界使用牆(Wall)，並選用邊界不滑動效應(No Slip)

非模壁邊界可使用：

1. 牆(Wall)，並設定邊界對流體沒有任何剪力，通時也無流體通過此邊界。
2. 對稱(Axis)，此設定會自動將此面變成一個對稱面。

雖然兩者的結果幾乎相同(大約只有 3%的差距)，但還是選用理論時的物理假設，設定此邊為對稱(axis)邊界條件。

4-4-3 模擬設定條件

材料性質：

使用設定的聚苯乙烯紊流模型。

計算模型：

使用層流模型。

初始條件：

空間內速度同進口邊界條件設定之速度。

壓力量測點：

由於進口邊界條件選用速度入口，需要在模型內多設定量測壓力(圖 4-22)。

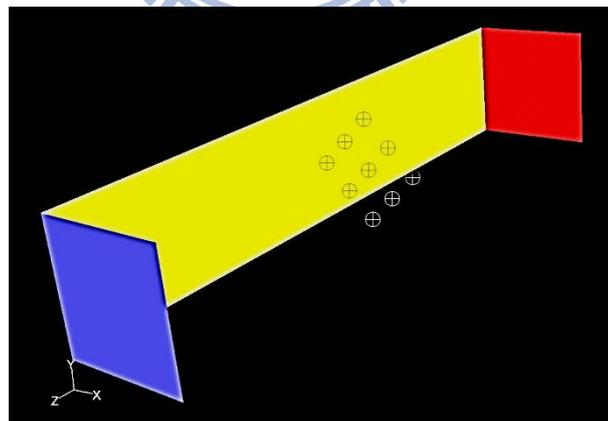


圖 4-22 壓力量測點示意圖

4-4-3 模擬結果

圖4-23, 24, 25顯示了入口邊界條件分別是速度為0.05 m/s、0.5 m/s及5 m/s的速度圖，在出口部份可以看到成熟的層流速度分布，在邊界的速度為零。且和熔膠於平板內的趨勢相同，速度越高則邊界模壁影響的厚度越小。圖4-26, 27, 28顯示入口邊界條件分別是速度為0.05 m/s、0.5 m/s及5 m/s的壓力圖，壓力損失仍呈線性，進口有端口效應，將壓力量測點放置模型中間部分量取成熟的層流壓力(圖4.22)。

將模擬得到的速度和壓力梯度點資料和套用牛頓流體非圓管理論計算的圖形做比較(見圖4-29, 30)，可發現在低速時與理論完全符合，但在速度約為0.07 m/s時圖形由線性開始變形，而理論在速度大約0.085 m/s時才開始變形。在速度超過大約2 m/s圖形又開始和理論漸漸符合，本研究最高速度模擬致15 m/s，速度越高吻合性越高，而中間的誤差在5% ~ 10%左右。雖然理論不能完美的解釋，但是可以利用數值模擬得到的數據來建立熱傳導模擬的材料性質。

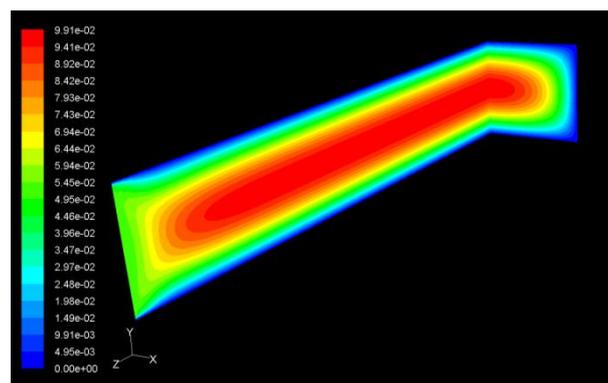


圖 4-23 邊界速度 0.05 m/s 速度圖

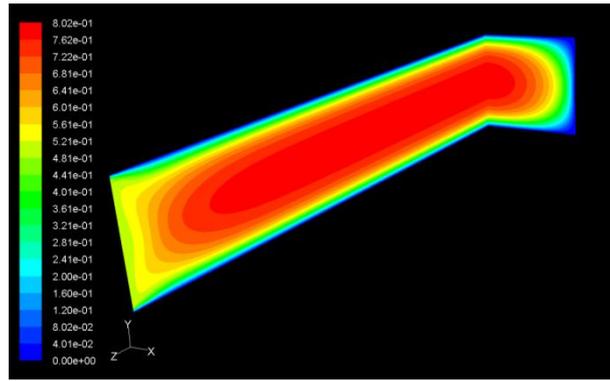


圖 4-24 邊界速度 0.5 m/s 速度圖

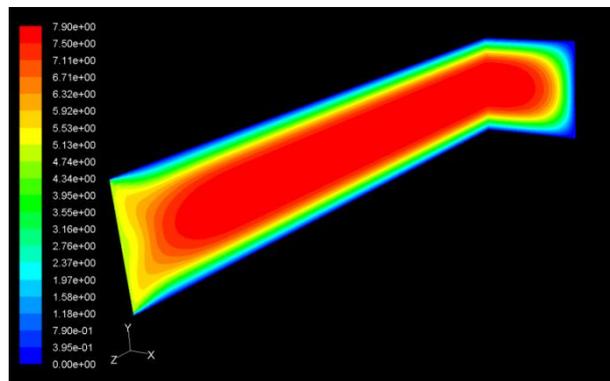


圖 4-25 邊界速度 5 m/s 速度圖

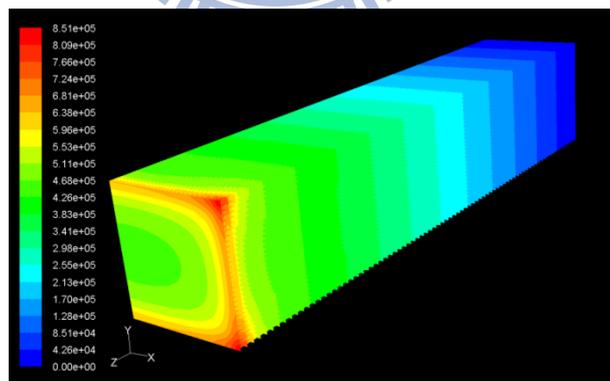


圖 4-26 邊界速度 0.05 m/s 壓力圖

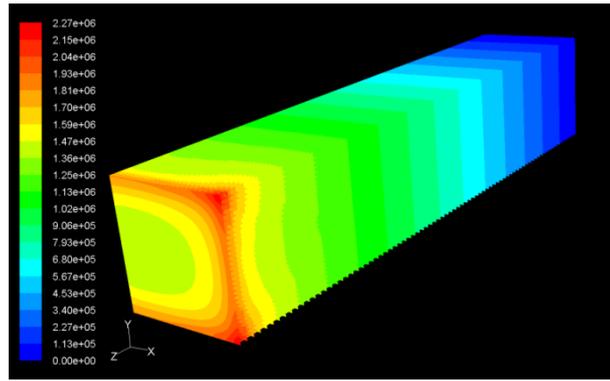


圖 4-27 邊界速度 0.5 m/壓力圖

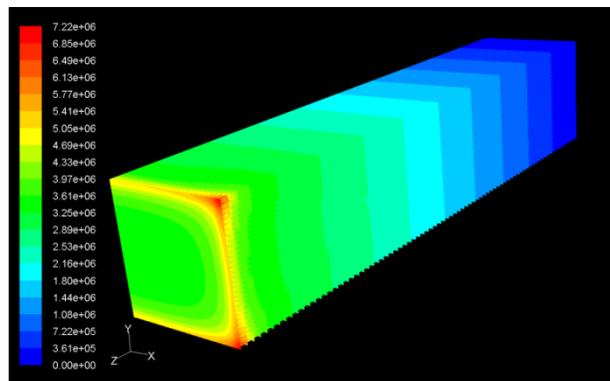


圖 4-28 邊界速度 5 m/s 壓力圖

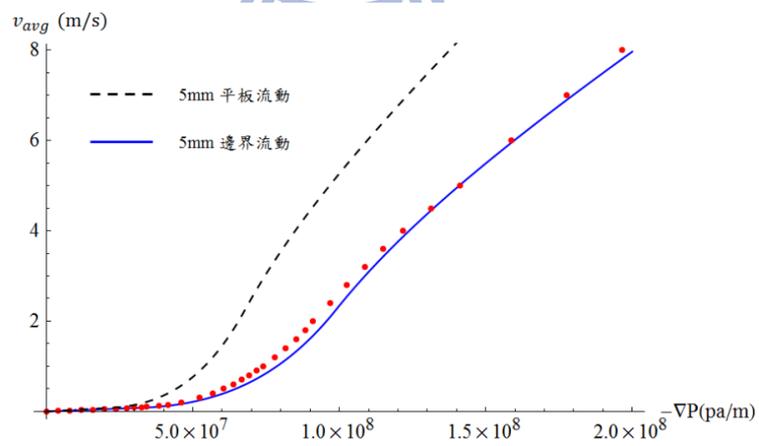


圖 4-29 邊界模擬和理論計算比較圖(5 mm)

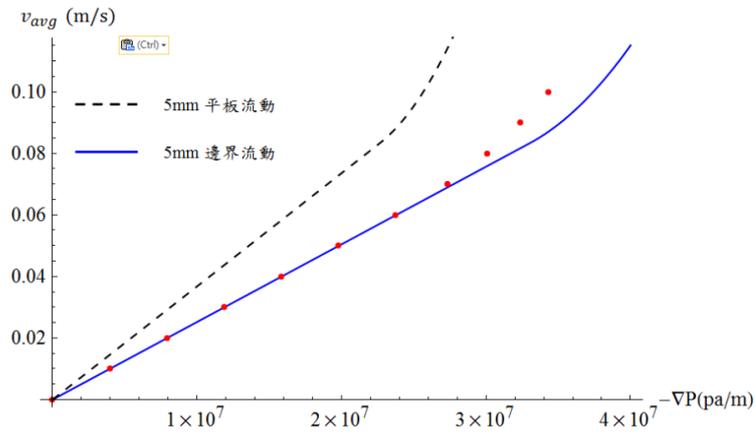


圖 4-30 邊界模擬和理論計算比較圖(5 mm)

4-5 方向性的流動趨勢

方向性的流動趨勢分成兩個方向來模擬。

4-5-1 y軸方向模擬

模型建立如圖4-31所示。由於無法預測流動模式，故網格的設定使用非結構性三角網格(圖4-32)，模擬後發現，若將得到的數據變化大且梯度高的位置之網格加密，可求得更精確的數值，這是模擬常用的技巧之一，圖4-32表示局部加密後的網格。

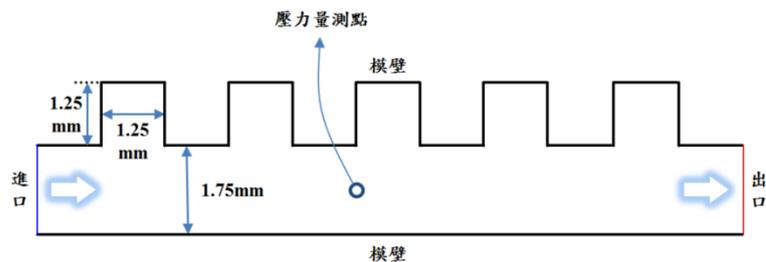


圖 4-31 方向性y軸模型

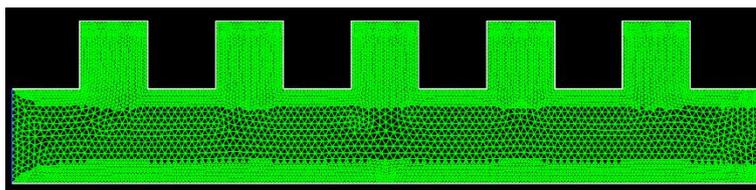


圖 4-32 網格局部加密示意圖

此處的邊界條件、材料特性、計算模型和初始條件設定皆和4-3相同。

圖4-33, 34, 35為入口邊界條件分別是速度為0.02 m/s、0.2 m/s及2 m/s的速度圖，可以看到雖然幾何模型不同於平板，但大致上熔膠的運動方式和在平板中的流動一樣，高黏度的熔膠流入上方的空間後，幾乎不再移動而形成如同模壁一般的效果。圖4-36, 37, 38為入口邊界條件分別是速度為0.02 m/s、0.2 m/s及2 m/s的壓力圖，上方不移動的熔膠空間影響壓力，讓壓力呈現非線性的變化，但壓力基本上仍依照速度方向耗損。

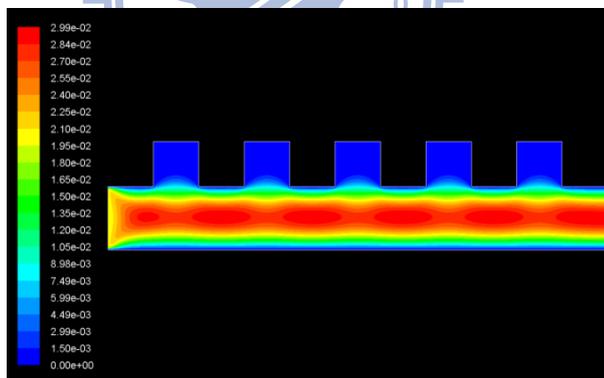


圖 4-33 y軸方向 0.02 m/s 速度圖

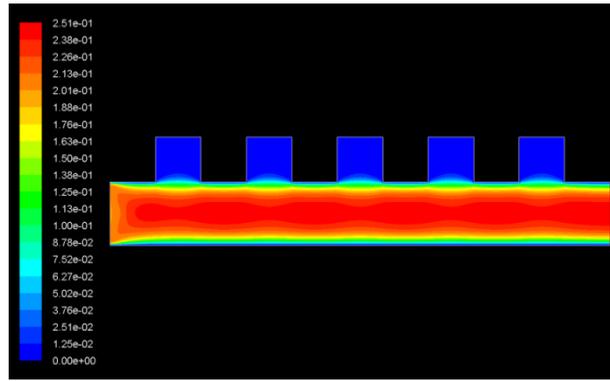


圖 4-34 y軸方向 0.2 m/s 速度圖

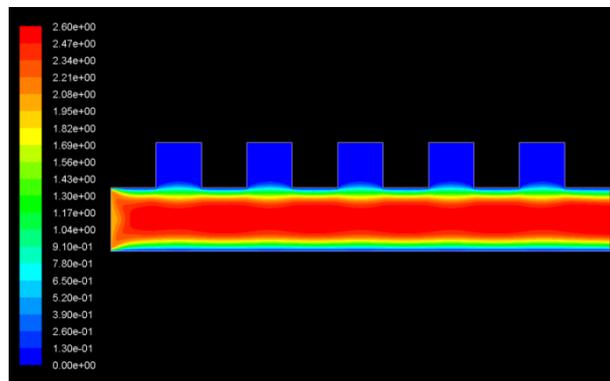


圖 4-35 y軸方向 2 m/s 速度圖

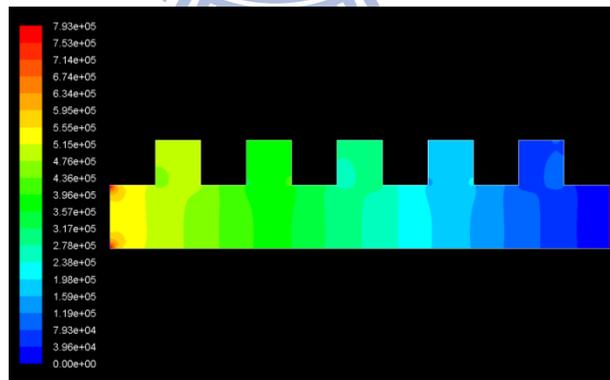


圖 4-36 y軸方向 0.02 m/s 壓力圖

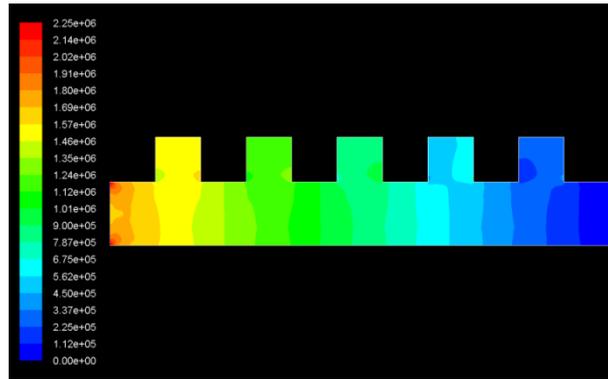


圖 4-37 y軸方向 0.2 m/s 壓力圖

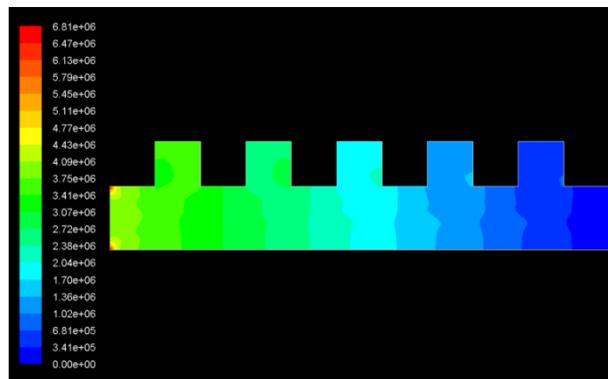


圖 4-38 y軸方向 2 m/s 壓力圖

把模擬得到的速度和壓力梯度點資料和厚度為1.75mm的平板理論計算圖形做比較(圖4-39)，可發現在速度越高時誤差越大，但大致上仍能部分表現出當所需的傳輸壓力比平板流動還小時的情況，代表上方空間不移動的熔膠對流動的熔膠來說，並非只是單純形成一個模壁邊界，在放大的速度圖中可以看到，熔膠移動深入上方空間(圖4-40)，讓傳導厚度超過1.75 mm，同樣在放大的壓力圖中也可以看到在有上方處，空間的壓力傳輸較小(見圖4-41)，間距間格較大。

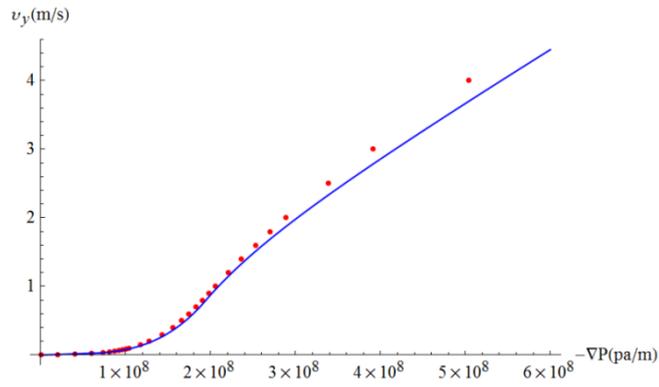


圖 4-39 y 軸方向和 1.75 mm 平板理論計算比較圖

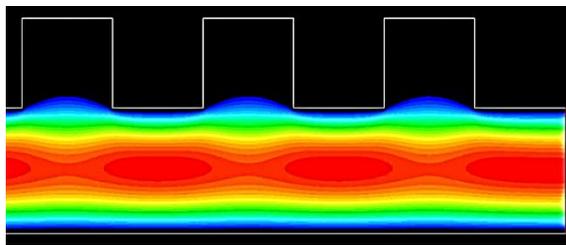


圖 4-40 放大速度圖

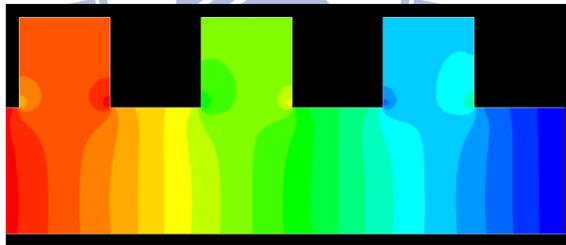


圖 4-41 放大壓力圖

4-5-2 x 軸方向模擬

x 軸方向的模型類似於非圓形管流，由圖4-31的截面平均取下4種截面(圖4-42)，並以這四種截面建立非圓形管，邊界條件在沒有模具切割的截邊界使用wall (No Shear)無剪應力條件模擬彼此平行的速度只有正向交互作用

力(壓力)。截面1和截面3由於為對稱模型，也可使用對稱條件(Axis)。而模壁的部分則用wall (No Slip) 邊界不滑動條件，進口出口則在兩端。將四種截面所得到的壓力速度質平均，以求得較正確傳導壓力，由圖中可以預測截面2和截面4結果將會相同，將會忽略其中一種不進行模擬。

網格方面由於流動方向性單一，故使用六方體網格，並利用網格局部加密的技巧將邊界部分的網格加密以提高準確性。材料特性、計算模型和初始條件都和4-3相同。

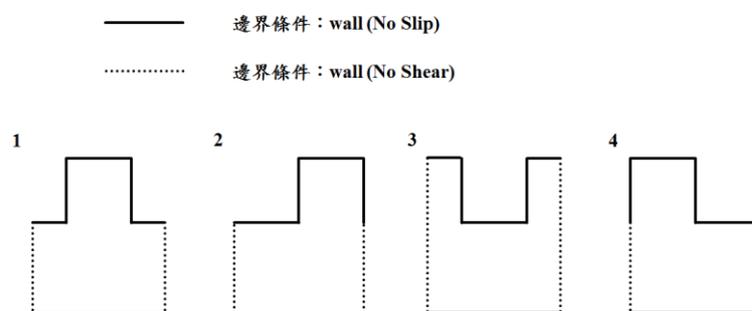


圖 4-42 x 軸方向的四種截面非原管管流

首先圖4-43呈現截面1, 2, 3在進口速度0.02 m/s的出口邊界之速度分布，可以看到截面1, 3在兩個切割截面是有連續性的，而截面2的兩個切割截面為不連續面，在壓力和速度數據的關係圖中可以更明顯的發現截面2和截面1, 3的差距；截面1, 3的圖形有很高的再現性(圖4.44)，故在求取平均值時，截面2和4將不被採用。

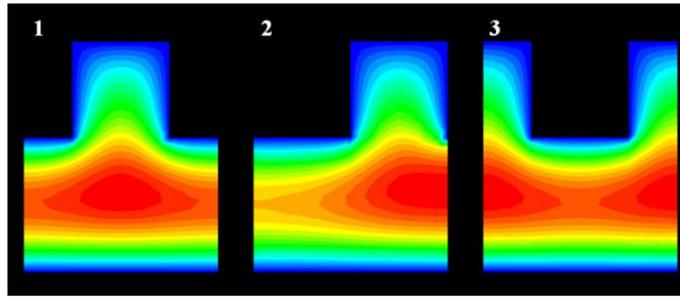


圖 4-43 截面 1, 2, 3 在 0.02 m/s 出口速度分布圖

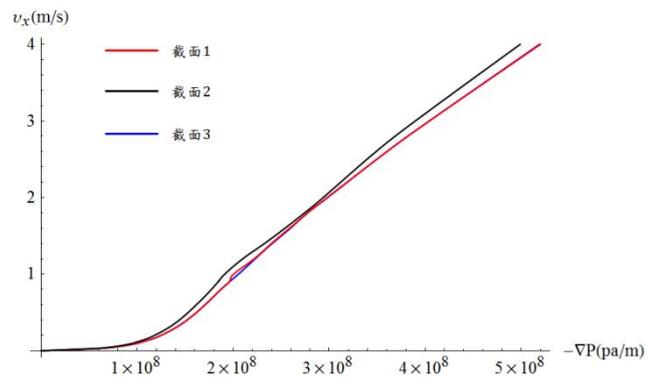


圖 4-44 截面 1, 2, 3 出口速度分布圖

圖4-45, 46表示截面1, 3在速度0.02 m/s、0.2 m/s和2 m/s的速度分布圖，如同先前的模擬，熔膠流動速度越快時，邊界的影響越小，但若速度快過一個極限，邊界的影響又逐漸提高，但在實際的製程內，通常都達不到這種速度。

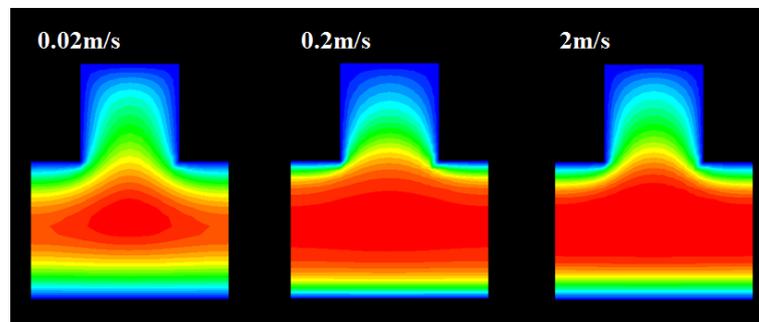


圖 4-45 截面 1 在三個速度出口速度分布圖

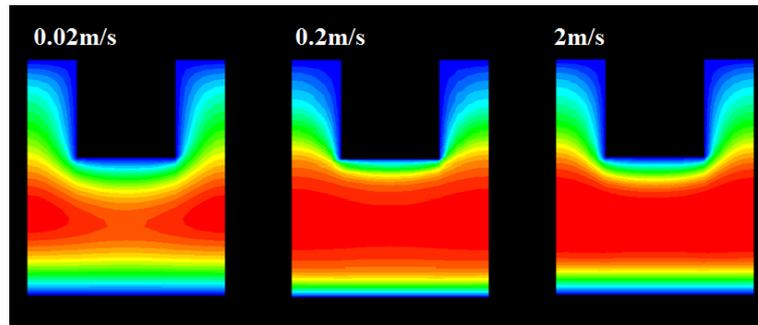


圖 4-46 截面 3 在三個速度出口速度分布圖

4-6 非牛頓流體於非圓形管的理論修正

在上述的案例中，可以發現所有壓力梯度和速度的關係皆十分相似；但除了在圓管和平板內的流動，其餘的幾何形狀中皆無法單純使用理論計算來得出兩者間關係，若根據牛頓流體非圓形管流理論做修正，得到的結果仍和模擬的結果有一定的誤差，主要的問題來自非牛頓流體在非圓形管流中無法準確地預測出最大剪應力落在三段不連續函數中的哪個範圍。為了得到準確的數值模擬趨勢線，則必須調整理論計算圖形，由附錄四的計算中可以看到決定最大剪應力的參數為壓力梯度 c 和厚度 h ，適當的調整兩個參數可以得到幾乎相同於數值模擬的圖形，調整的方式類似於非圓形管流中使用水力直徑 D_h 和范寧摩擦係數 f 來作為參數，水力直徑 D_h 是幾何大小影響流動的指標，范寧摩擦係數 f 則是幾何形狀影響流動的指標。修正的方法建議將 h 值設定為 $D_h/2$ ，而 c 則改寫成 c/a ，調整 a 值以趨近模擬數值。圖4-47顯示截面1, 3平均點資料和調整過的關係圖的比較，兩者再現性極高。同樣在邊界流動上也可利用調整得到相當符合圖形(見圖4-48)，利用這種方法可以明確的得到數據的趨勢線，以便在熱傳導的轉化下有公式可以使

用。

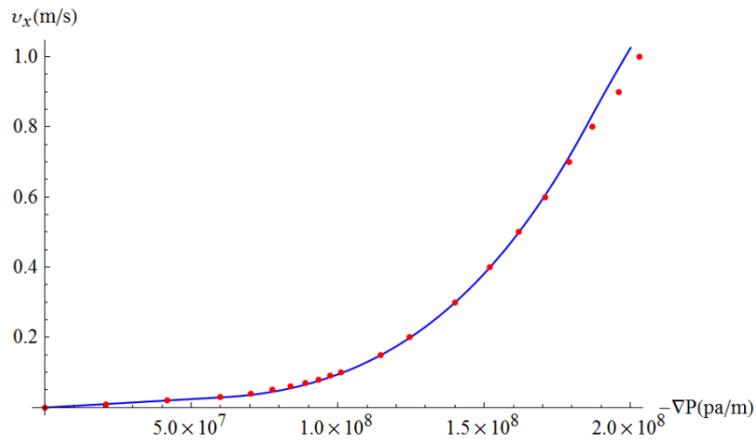


圖 4-47 截面 1.3 平均數據趨勢線

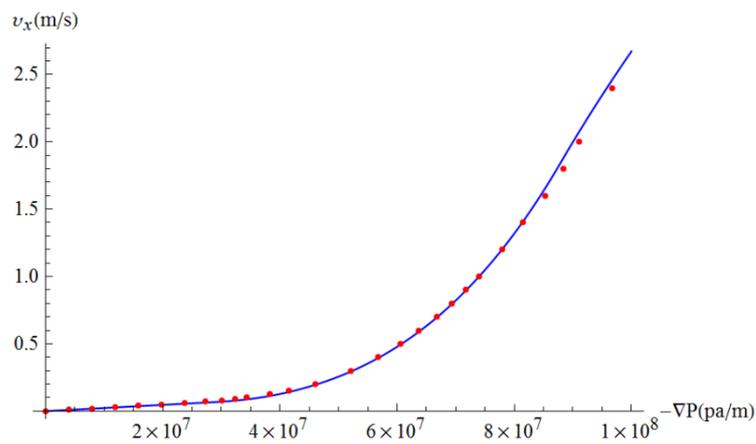


圖 4-48 邊界厚度 5mm 數據趨勢線

4-7 利用熱傳導表現充填時流動

在薄件射出成形中，熔膠流動的方式為勢流，勢流的特性公式為：

$$v_{avg} = -D\nabla P \quad , \quad D \text{ 為熔膠傳導係數}$$

在第二章提到，此種傳導的特性和許多的物理傳導性質雷同，例如熱傳導和流動公式：

$$q_H = -\kappa \nabla T \quad , \quad q_H \text{ 為熱通量、}\kappa \text{ 為熱傳導係數、}T \text{ 為溫度。}$$

4-7-1 模型與假設

由於本研究試圖將三維幾何內的流動轉化成二維的流動，但沒有純二維並以勢流計算的模擬軟體，本研究利用 2.5D 模流分析技術的概念和 FLUENT 軟體中的熱傳導模型來表現出充填的情形。由以上的模擬可以清楚明白熔膠傳導係數 D ，受制於模型的幾何，包括了厚度、是否為流動邊界和明顯的幾何方向性，將這些不同的幾何特性依照以上的模擬設定成固體材料的熱傳導性質來模擬熔膠傳導係數，熔膠傳導係數 D 可由已知的壓力梯度 ∇P 和熔膠平均速度 v_{avg} 關係圖得知，圖 4-49 顯示熔膠在厚度 5mm 的平板中流動的熔膠傳導係數。

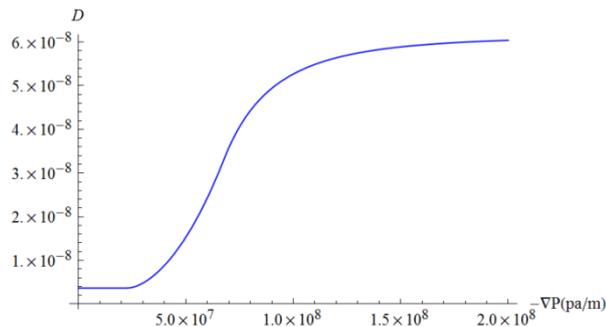


圖 4-49 傳導係數與壓力的關係

而推動熔膠流動的壓力值則以溫度值來代替，熔膠的流動速度則用熱通量來表示。以圖 4-50 中的模型為例(80mm×70mm×3mm)，轉換的平面二

維熱傳導模型如圖 4-51，將平板依照不同的幾何切割成不同的平面，其中將分成 5 種不同熱傳導係數的平面，以熱量從入口定量進入模型來模擬熔膠等量進入模穴的情形。

熱傳導公式和熔膠流動公式兩者雖然極為像相似，但本質上仍有差異，需要加入其他的假設，計算模型的使用才能符合熔膠的情形，例如熱量在流動時，並非像熔膠一般沒有耗損，熱量會以能量的方式提高物體的溫度，除非是在穩態傳導沒有溫度變化的情況，但這不符合所需要的模擬，且溫度也是推動熱量流動的動力。為了減少升溫導致熱通量耗損造成不連續的熱通量，這裡第一個假設為：材料的熱容趨近於零，讓熱量的傳遞不會大量耗損在提高溫度上，同樣也利用高的熱傳導係數，讓高熱通量不需要極大的溫度梯度。

熔膠在流動時，波前位置的熔膠持續填滿空間，但熱量的流動則沒有充填的概念。因此第二個假設為材料熱容在初始溫度到指定溫度的空間設定一個指定熱容，而指定熱容的大小值則由模穴區域厚度空間和充填速度而定。

同樣的情況，熔膠在流動時波前的壓力為零，熔膠的壓力需將模穴空間填滿才能傳遞，但熱量沒有填滿再傳導的概念，若將溫度零位面視為流動的波前，溫度零位面會快速的發散移動，明顯不符合熔膠彼此推擠移動的情況。因此第三個假設是需要一個高於初始溫度的指定溫度，以指定溫度的等位面來當作熔膠的波前。基於以上假設，熱容量的設定如圖 4-52。而理想的假設為指定溫度趨近於零、指定熱容為無限大，而高於指定溫度的熱容趨近於零。

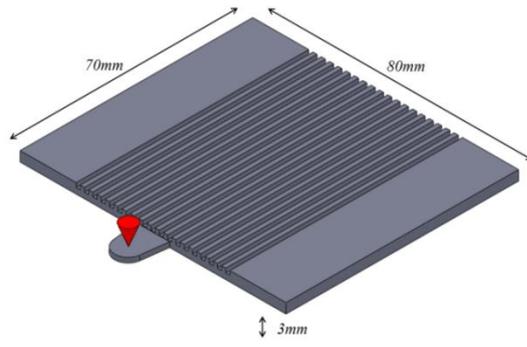


圖 4-50 三維幾何模型

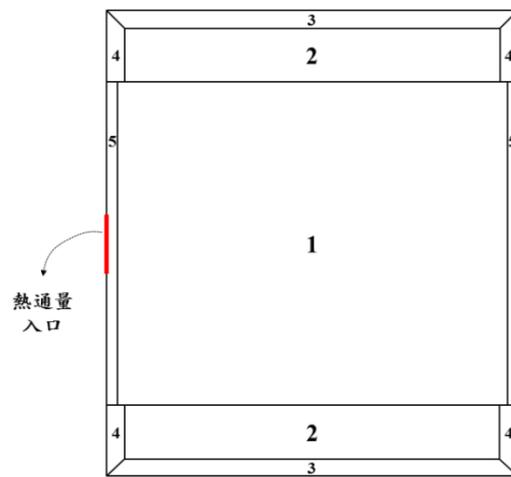


圖 4-51 二維熱傳導平面模型

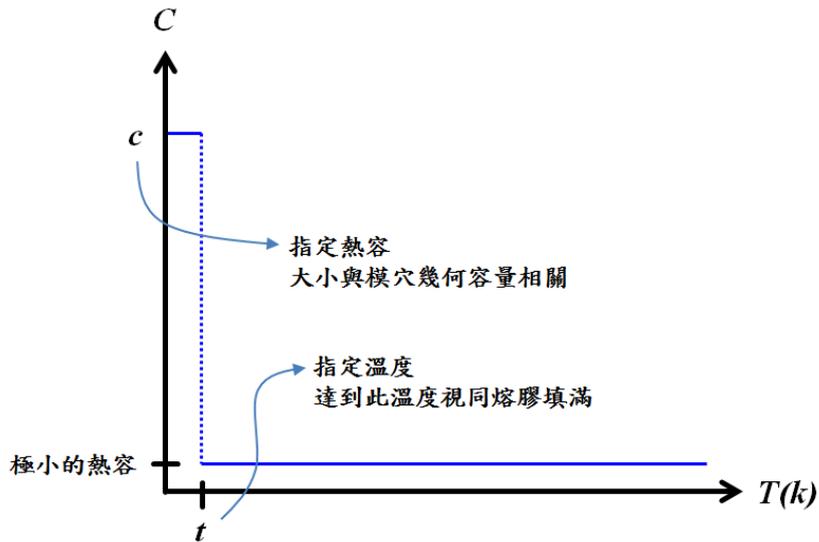


圖 4-52 材料熱容假設圖

4-7-2 模擬設定條件

邊界條件：

如圖 4-51，模型四周除了熱通量入口其餘皆設定為牆(wall)，並設定無任何熱量交換。熱通量入口同樣設定為牆(wall)，但設定有熱通量(w/m^2)。其餘切成 5 種不同區域固體(solid)，並設定不同的材料性質。

計算模型：

1. 使用分離非耦合計算方式。
2. 開啟能量計算。
3. 使用雙精度求解器。
4. 求解暫態設定。

初始條件：

空間內溫度為 0k。

材料特性：

在熱傳導的模擬中，所需要的材料特性為密度、熱容及熱傳導係數，五種材料的密度皆相同且為定值。高於指定溫度的熱容如設定為很小的值。而材料的指定熱容則依照模穴平均厚度的比例來設定。材料 2, 3, 4 為 3 單位熱容量，材料 1, 5 為 2.375 單位熱容量。

熱傳導係數在 FLUENT 則依照各別的幾何做設定，有雙方向性導熱係數的材料可採用各向異性導熱係數(Anisotropic Conductivity)，分別設定兩軸的熱傳導係數，並利用分段線性(piecewise liner)描繪熱傳導係數的圖形。

材料 1：以 4-5 所得到結果做設定。

材料 2：以 3 mm 厚度的平板理論作設定。

材料 3：以 3 mm 厚度的幾何邊界作為 x 軸方向，y 軸同材料 2。

材料 4：以 3mm 厚度的幾何邊界作為 y 軸方向，x 軸同材料 2。

材料 5：x 軸同材料 1，y 軸為 x 軸 0.6 倍。

4-7-3 模擬結果與比較

本研究將熱傳導模擬結果與模流軟體 Moldex3D eXplorer 的模擬做比較，條件的選用上，內建材料為聚苯乙烯(PS)，射出溫度設定為 225°C，模具溫

度由於軟體上的限制而無法與假設相同沒有溫度變化，故盡量將模溫調高至 95°C ，以減少誤差的產生。圖 4-53 是利用熱傳導模擬的熔膠流動情形，圖 4-54 是由 Moldex3D eXplorer 所模擬得到的結果，兩者有相當程度的相似性，特別是在幾何變化的邊界上有相同的變化趨勢，雖然模型只是簡單幾何的薄件，但也展現出完全化簡成二維的可能性。

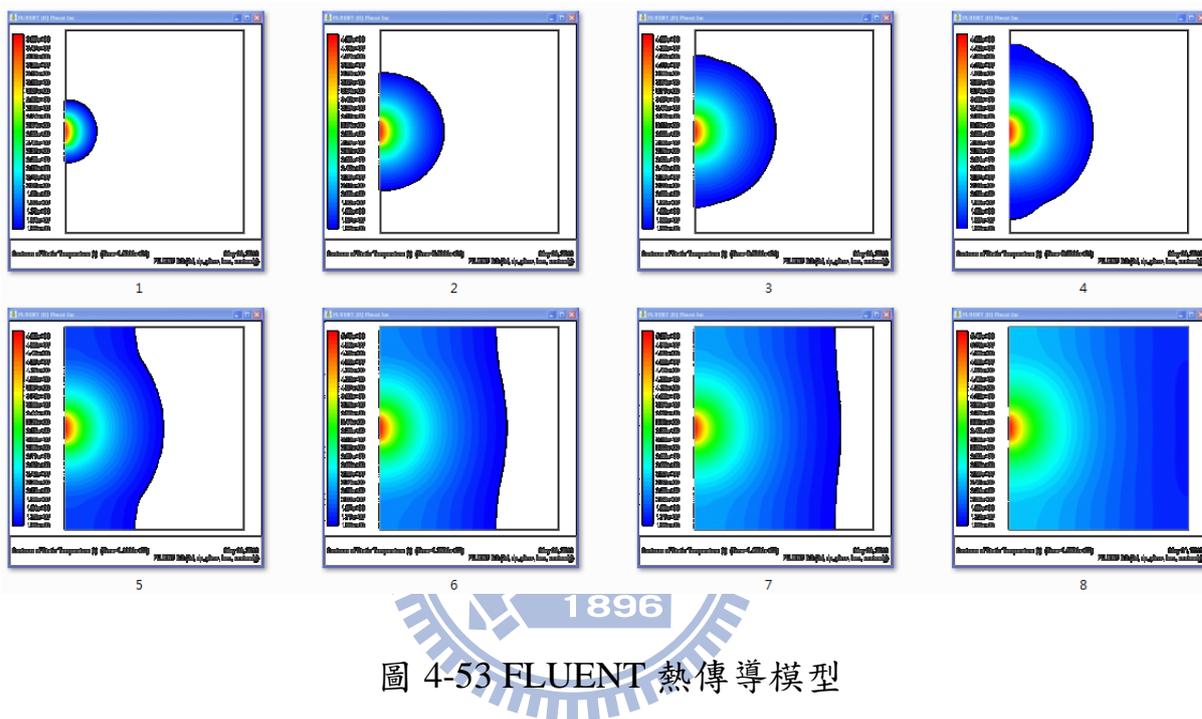


圖 4-53 FLUENT 熱傳導模型

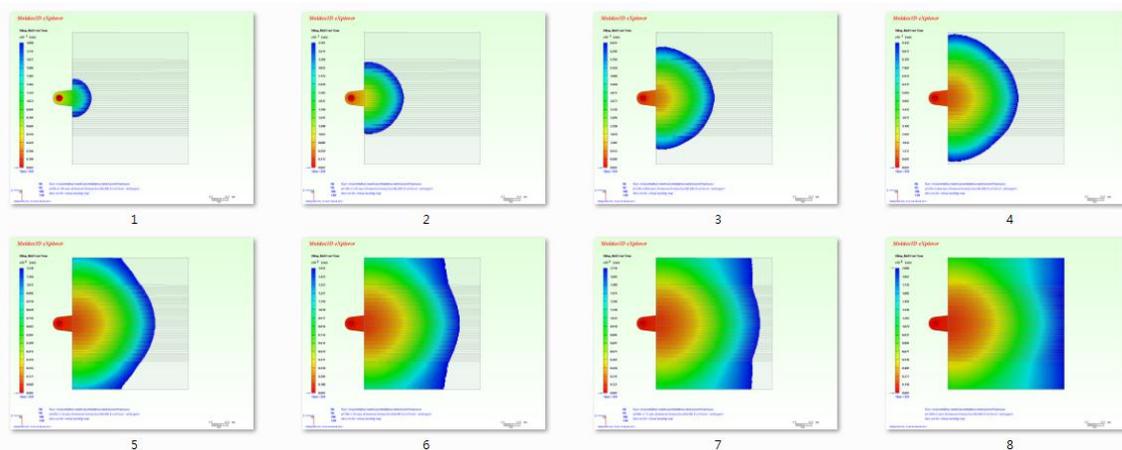


圖 4-54 Moldex3D eXplorer 模流分析軟體

第五章 結論和建議

5-1 結論

基於近年來消費性電子、光電產品、汽機車零組件的蓬勃發展，產品的開發週期相對縮短，CAE 模流分析技術的應用也變得越來越普遍。雖然 3D 的模流軟體已問世，可以準確地預測流動的情形，但相對的耗時費工。

2.5D 模流技術因其方便準確的優點，目前仍廣泛的在工業界被使用。對於大型件或流動長度遠大於厚度的塑件，2.5D 分析技術具有分析快速、設計變更簡便、準確性高的優點。雖然可能會因為模型的過度化簡，導致流動預測失真，但由於計算快速的優點，仍可做為 3D 模擬前的參考及繪製網格的依據。

本研究嘗試利用 2.5D 模流技術的概念，結合液體在管件內、平板內及其他幾何形狀內傳輸的理論，利用熱傳導與液體傳輸相似的物理模型，使用熱傳導模型來呈現並模擬其流動，與 3D 的模流軟體 Moldex3D eXplorer 做比較後，發現期能成功的模擬出流動的趨勢。

5-2 建議

綜合以上各項模擬分析和理論計算的結果，可歸納出以下的建議：

1. 黏度模型需要做修正，若無修正在速度的極大值和極小值都

會有嚴重的誤差。若可以使用量測的黏度值可以得到更精確的結果。

2. 由於本研究軟體上的限制，忽略了溫度對流動的影響，若可再混合有限差分法(Finite difference method)進行模擬計算。這種數學模型可完整地導入塑料流動的非牛頓黏度特性、黏滯升溫、比容變化、非等溫材料性質、模溫變化...等

3. 非牛頓流體在非圓形管中傳導所需的壓力和流動速度的關係建議使用修正值來近似。

4. 由於 2.5D 模流技術模擬流動，累積更多的幾何形狀流動趨勢，更能更準確的模擬複雜形狀的流動。

5. 利用類似物理模型作為模擬的基礎時，需要重新思考兩種的異同點，並提出新的假設來契合兩個模型。



參考資料

- 【1】 Tadmor, Z. and C. G. Gogos, “Principles of Polymer Processing” , John Wiley and Sons, New York(1979)
- 【2】 W. H. Darnell and E. A. J. Mol, “Solds Conveying in Extrudates” ,SPEJ., 12,20~86, (1956).
- 【3】 Ballman, R. L. and H. L. Toor, “Orientation in Injection Molding” , Modern Plastics, Vol. 38, No. 2, pp. 113-120(1960).
- 【4】 D. M. Walker, “An Approximate Theory for Pressure and Arching in Hoppers” ,Chem.eng.Sci., 21, 975~997, (1966).
- 【5】 Z. Tadmor, “Fundamentals of Plasticating Extrusion- A theoretical moldel for melting” , Polymer Engineering and Science, Vol.6, 185~190, (1966).
- 【6】 Harry, D. and R. G. Parrott, “Numerical Simulation of Injection Mold Filling” , Polymer Engineering and Science, Vol.10, No. 1, pp.209-214(1970).
- 【7】 Kamal, R. and S. Kenig, “The Injection Molding of Thermo-Plastics Part 1 : The Theoretical Model. and Part 2 : Experimental Test of the Model” , Polymer Engineering and Science, Vol. 12,No. 1, pp. 294-301(1972).
- 【8】 Thienel, P. and G. Menges, “Mathematical and Experimental Determination of Temperature, Velocity and Pressure Fields in Flat Molds During the Filling Process in Injection Molding of Thermoplastics” , Polymer Engineering and Science, Vol. 18, No. 1, pp.314-320(1978).
- 【9】 W. L. Krueger and Z. Tadmor, “Injection Molding into a Rectangular Cavity with Inserts” , Polymer Engineering and

- Science, Vol.20, 426~431, (1980).
- 【10】 Chiang, H. H., “Numerical Simulation of Post-Filling Stage in Injection Molding with a Two-Phase Model”, Polymer Engineering and Science, Vol. 34, No. 4, pp. 835-846(1994).
- 【11】 S.M. Richardson, “Hele-Shaw Flow with a Free Surface Produced by the Injection of Fluid into a Narrow Channel”, J. Fluid Mech., 56,609~618, (1972)
- 【12】 Gilmore ,G. D. and R. S. Spencer, “Role of Pressure, Temperature, and Time in the Injection Molding Process”, Modern Plastics, Vol.27,No.4,pp.143-151, (1950).
- 【13】 G. D. Gilmore and R. S. Spencer, Mod. Plastic, 27, Dec 97, (1950).
- 【14】 R. S. Spencer and G. D. Gilmore, “Some Floe Phenomena in the Injection Molding of Polystyrene”, J. Colloid Sci., 6, 118~132, (1951).
- 【15】 S. Richardson, ”Hele Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel”, J . Fluid Mech , vol. 56, part 4, p p . 609-618(1972)
- 【16】 C. W. Park and G. M. Homsy, ” Two-phase displacement in Hele-Shaw cells:theory”, J . Fluid Mech, vol. 139, p p . 291-308, (1984)
- 【17】 S. D. Howison, “Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems” Euro. Jnl of Applied Mathematics, vol. 3, pp. 209-224 ,(1992)
- 【18】 李繼強，塑膠概論，三民圖書有限公司，(1987)。
- 【19】 洪瑞庭，塑膠加工技術與工程，高立圖書有限公司，(1989)。

- 【20】 S.Middleman, “Fundamentals of Polymer Processing”, McGrawHill, New York,(1977)
- 【21】 E.C.Bernhardt,ed.,CAE,”Computer Aided Engineering for Injection Molding”, Hanser,Munich,(1983)
- 【22】 J.R.A.Pearson,Mechanics of Polymer Processing, Elsevier, London, (1985)
- 【23】 Manzione, L. T., “Application of Computer Aided Engineering in Injection Molding”, Hanser Publishers, New York, pp.18-121,(1987).
- 【24】 Kenndy, P. , “Flow Analysis of Injection Molds”, Hanser Publishers, New York, pp.20-37,(1995).
- 【25】 B.Gustafsson, A.Vasil’ev, “Conformal and potential analysis in Hele-Shaw cells”, Birkhäuser Verlag, (2006).
- 【26】 Mary P. Anderson, “Introducing groundwater physics”, Physics Today, May, (2007),pp.42-47
- 【27】 科盛科技股份有限公司, “Moldex 3D 使用手冊”, 科盛科技股份有限公司, (2002)
- 【28】 Kirk T. McDonald, “Radial Viscous Flow between Two Parallel Annular Plates”, Princeton University, Princeton, NJ 08544(June 25, 2000; updated July 30, 2008)
- 【29】 Jordi Armengol, Josep Calbó “Bernoulli correction to viscous losses: Radial flow between two parallel discs”, American Association of Physics Teachers, February, (2008)

附錄一

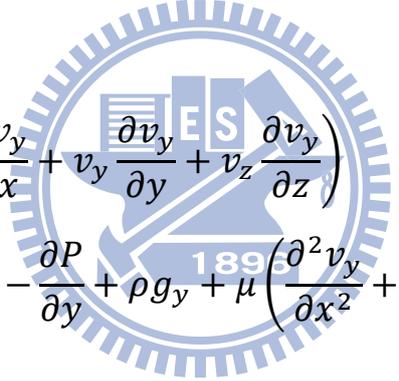
Navier-Stokes Equation

笛卡爾座標 Navier-Stokes Equation :

x 分量 :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

y 分量 :


$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

z 分量 :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

圓柱座標 Navier-Stokes Equation :

r 分量 :

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r \\ &+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

θ 分量 :

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta \\ &+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

z 分量 :

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

附錄二

非牛頓流體在平板內的流動計算

$$2y(P_x - P_{x+dx}) = 2\tau dx \quad , \quad \tau(y) = -y\nabla P \quad , \quad \tau_{Max} = -\frac{h}{2}\nabla P$$

$$\tau = \begin{bmatrix} k\gamma 100^{n-1}, & \gamma \leq 100 \\ k\gamma^n, & 100 \leq \gamma \leq 5000 \\ k\gamma 5000^{n-1}, & \gamma \geq 5000 \end{bmatrix} = -y\nabla P$$

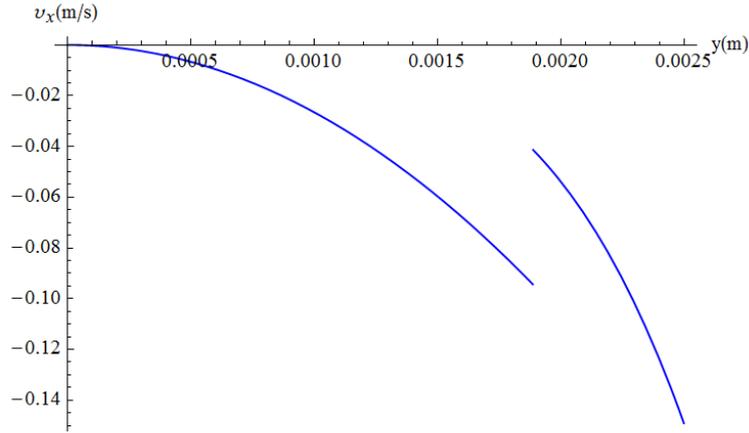
$$\tau(y) = \mu\gamma \quad , \quad \gamma = -\frac{dv_x(y)}{dy} = \frac{\tau(y)}{\mu} \quad , \quad \text{為了方便以 } c \text{ 表示 } -\nabla P$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \frac{\tau}{k100^{n-1}}, & \frac{\tau}{k100^{n-1}} \leq 100 \\ \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}}, & 100 \leq \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 5000 \\ \frac{\tau}{k5000^{n-1}}, & \frac{\tau}{k5000^{n-1}} \geq 5000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{yc}{k100^{n-1}}, & \frac{yc}{k100^{n-1}} \leq 100 \\ \left(\frac{yc}{k}\right)^{\frac{1}{n}}, & 100 \leq \left(\frac{yc}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 5000 \\ \frac{yc}{k5000^{n-1}}, & \frac{yc}{k5000^{n-1}} \geq 5000 \end{bmatrix}$$

$$v_x = -\int_0^y \frac{\tau(y)}{\mu} dy = \nabla P \int_0^y \frac{y}{\mu} dy \quad , \quad v_x\left(\frac{h}{2}\right) = 0 \quad , \quad \text{and } v_x(y) = v_x(-y)$$

$$v_x = -\int_0^y \frac{\tau(y)}{\mu} dy = - \begin{bmatrix} \frac{2^{1-2n}25^{1-n}cy^2}{k}, & \frac{yc}{k100^{n-1}} \leq 100 \\ \frac{yn\left(\frac{yc}{k}\right)^{\frac{1}{n}}}{1+n}, & 100 \leq \left(\frac{yc}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 5000 \\ \frac{2^{2-3n}625^{1-n}\nabla P y^2}{k}, & \frac{yc}{k5000^{n-1}} \geq 5000 \end{bmatrix} + C$$

v_x 現在如下圖所示在不連續點數值不同，要調整成同數值，並且帶入邊界條件：



$$v_x = \left[\begin{aligned} & \frac{2^{1-2n} 25^{1-n} c y^2}{k}, \quad \frac{y c}{k 100^{n-1}} \leq 100 \\ & \frac{z \left(\frac{c y}{k}\right)^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{2^{1+2n} 25^{1+n} k}{c} - \frac{(100^n)^{1+\frac{1}{n}} k}{c(1 + \frac{1}{n})}, \quad 100 \leq \left(\frac{y c}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 5000 \\ & \frac{2^{2-3n} 625^{1-n} c y^2}{k} + \frac{2^{1+2n} 25^{1+n} k}{c} - \frac{(100^n)^{1+\frac{1}{n}} k}{c(1 + \frac{1}{n})} - \frac{2^{2+3n} 625^{1+n} k}{c} + \frac{(5000^n)^{1+\frac{1}{n}} k}{c(1 + \frac{1}{n})}, \quad \frac{y c}{k 5000^{n-1}} \geq 5000 \end{aligned} \right]$$

$$+ \left[\begin{aligned} & \frac{2^{1-2n} 25^{1-n} c \left(\frac{h}{2}\right)^2}{k}, \quad \frac{\frac{h}{2} c}{k 100^{n-1}} \leq 100 \\ & \frac{\frac{h}{2} c \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{2^{1+2n} 25^{1+n} k}{c} - \frac{(100^n)^{1+\frac{1}{n}} k}{c(1 + \frac{1}{n})}, \quad 100 \leq \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 5000 \\ & \frac{2^{2-3n} 625^{1-n} c \left(\frac{h}{2}\right)^2}{k} + \frac{2^{1+2n} 25^{1+n} k}{c} - \frac{(100^n)^{1+\frac{1}{n}} k}{c(1 + \frac{1}{n})} - \frac{2^{2+3n} 625^{1+n} k}{c} + \frac{(5000^n)^{1+\frac{1}{n}} k}{c(1 + \frac{1}{n})}, \quad \frac{\frac{h}{2} c}{k 5000^{n-1}} \geq 5000 \end{aligned} \right]$$

$v_{avg} = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} v_x(y) dy$ ，在經過整理調整成連續值：

$$v_{avg} = \left[\begin{aligned} & \frac{4^{-n} 25^{1-n} c h^2}{3k}, \quad \frac{\frac{h}{2} c}{k 100^{n-1}} \leq 100 \\ & \frac{2^{-\frac{1+n}{n}} (3ch \left(\frac{ch}{k}\right)^{\frac{1}{n}} kn(1+n) + 4^{1+2n} 625^n k^2 (3(2^{1+2n} 25^n)^{\frac{1}{n}} (-1+n)n + 2^{\frac{1}{n}} (-3(100^n)^{\frac{1}{n}} n^2 + 50(1+n)(1+2n))))}{3c^2 h(1+n)(1+2n)}, \quad 100 \leq \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 5000 \\ & \frac{2^{1-3n} 625^{-n} (625c^3 h^3 (1+2n) + 25^{4n} 128^n k^3 (-100(-1+50^{1+2n}) + (-3(100^n)^{\frac{1}{n}} + 32500^n (5000^n)^{\frac{1}{n}} - 200(-1+50^{1+2n}))n))}{3c^2 h k(1+2n)}, \quad \frac{\frac{h}{2} c}{k 5000^{n-1}} \geq 5000 \end{aligned} \right]$$

附錄三

非牛頓流體在圓管內的流動計算結果

$$-\pi r^2 dP = 2\pi r \tau dx \quad , \quad -r \nabla P = 2\tau \quad , \quad \tau = \frac{rc}{2}$$

$$\gamma = \left[\begin{array}{cc} \frac{\tau}{k100^{n-1}}, & \frac{\tau}{k100^{n-1}} \leq 100 \\ \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}}, & 100 \leq \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 5000 \\ \frac{\tau}{k5000^{n-1}}, & \frac{\tau}{k5000^{n-1}} \geq 5000 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{rc}{2k100^{n-1}}, & \frac{rc}{2k100^{n-1}} \leq 100 \\ \left(\frac{rc}{2k}\right)^{\frac{1}{n}}, & 100 \leq \left(\frac{rc}{2k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 5000 \\ \frac{rc}{2k5000^{n-1}}, & \frac{rc}{2k5000^{n-1}} \geq 5000 \end{array} \right]$$

$$v_z = - \int_0^r \frac{\tau(r)}{\mu} dr = \nabla P \int_0^r \frac{r}{\mu} dr \quad , \quad v_z(R) = 0 \quad , \quad \text{and } v_z(r) = v_z(-r)$$

計算後並調整使含數值連續：

$$v_z = \left[\begin{array}{c} \frac{2^{-2n} 25^{1-n} cr^2}{k}, \quad \frac{rc}{2k100^{n-1}} \leq 100 \\ \frac{2^{-1/n} r \left(\frac{cr}{k}\right)^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{2^{2+2n} 25^{1+n} k}{c} - \frac{2^{1-\frac{1}{n}+2n} 25^n (2^{1+2n} 25^n)^{\frac{1}{n}} k}{c(1 + \frac{1}{n})}, \quad 100 \leq \left(\frac{rc}{2k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 5000 \\ \frac{2^{1-3n} 625^{1-n} cr^2}{k} + \frac{2^{2+2n} 25^{1+n} k}{c} - \frac{2^{1-\frac{1}{n}+2n} 25^n (2^{1+2n} 25^n)^{\frac{1}{n}} k}{c(1 + \frac{1}{n})} + \frac{2^{1-\frac{1}{n}+3n} 625^n (2^{1+3n} 625^n)^{\frac{1}{n}} k}{c(1 + \frac{1}{n})} - \frac{2^{3+3n} 625^{1+n} k}{c}, \quad \frac{rc}{2k5000^{n-1}} \geq 5000 \end{array} \right]$$

$$+ \left[\begin{array}{c} \frac{2^{-2n} 25^{1-n} cR^2}{k}, \quad \frac{Rc}{2k100^{n-1}} \leq 100 \\ \frac{2^{-1/n} R \left(\frac{cR}{k}\right)^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{2^{2+2n} 25^{1+n} k}{c} - \frac{2^{1-\frac{1}{n}+2n} 25^n (2^{1+2n} 25^n)^{\frac{1}{n}} k}{c(1 + \frac{1}{n})}, \quad 100 \leq \left(\frac{Rc}{2k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 5000 \\ \frac{2^{1-3n} 625^{1-n} cR^2}{k} + \frac{2^{2+2n} 25^{1+n} k}{c} - \frac{2^{1-\frac{1}{n}+2n} 25^n (2^{1+2n} 25^n)^{\frac{1}{n}} k}{c(1 + \frac{1}{n})} + \frac{2^{1-\frac{1}{n}+3n} 625^n (2^{1+3n} 625^n)^{\frac{1}{n}} k}{c(1 + \frac{1}{n})} - \frac{2^{3+3n} 625^{1+n} k}{c}, \quad \frac{Rc}{2k5000^{n-1}} \geq 5000 \end{array} \right]$$

圓管和平版的速度分布相同，只是求取平均速度時的積分範圍不同，求取平均速度的公式如下：

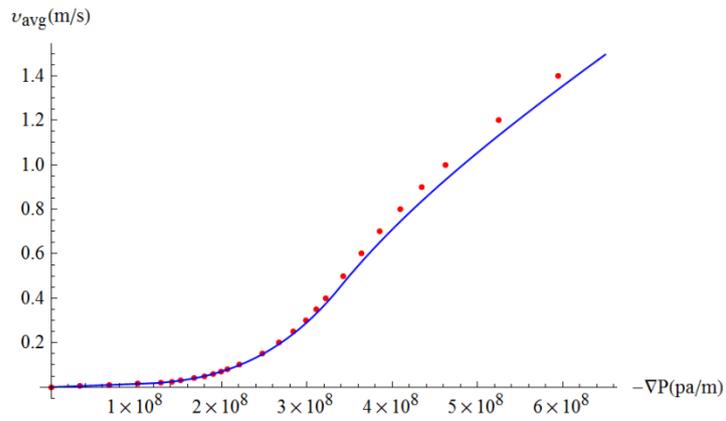
$$v_{avg} = \frac{2}{R^2} \int_0^R r v_z(r) dr$$

計算且調整為連續函數後，平均速度如下：

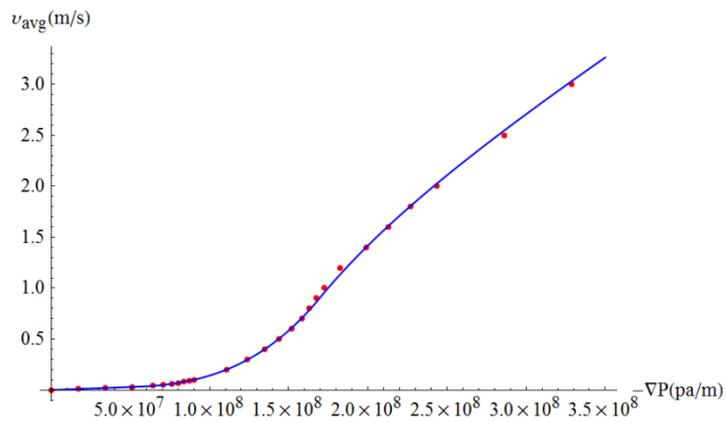
$$v_{avg} = \left[\begin{array}{l} \frac{2^{-1-2n} 25^{1-n} c R^2}{k}, \quad \frac{Rc}{2k100^{n-1}} \leq 100 \\ \frac{2^{-1/n} (8^{1+2n} 25^{3n} k^3 (-2^{1+2n} 25^n)^{\frac{1}{n}} n + 252^{\frac{1}{n}} (1+3n)) + c^3 n R^3 (\frac{cR}{k})^{\frac{1}{n}}}{c^3 (1+3n) R^2}, \quad 100 \leq \left(\frac{Rc}{2k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 5000 \\ \frac{5000^{-n} (8^{1+3n} 25^{5n} k^4 (-25(-1+50^{1+3n})) + (75 - 32^{1+3n} 25^{2+3n} - (100^n)^{\frac{1}{n}} + 25^n (5000^n)^{1+\frac{1}{n}}) n) + 625c^4 (1+3n) R^4}{c^3 (k + 3kn) R^2}, \quad \frac{Rc}{2k5000^{n-1}} \geq 5000 \end{array} \right]$$



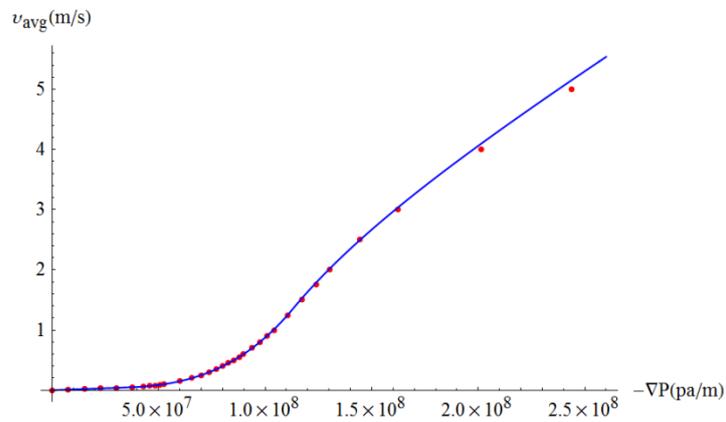
附錄四



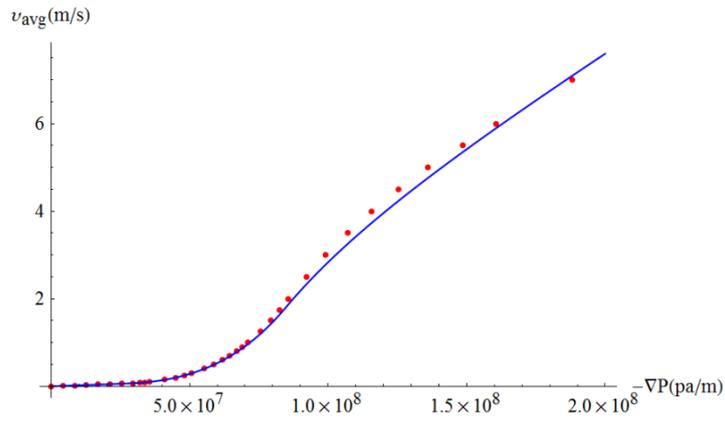
模擬和理論計算比較圖(1mm)



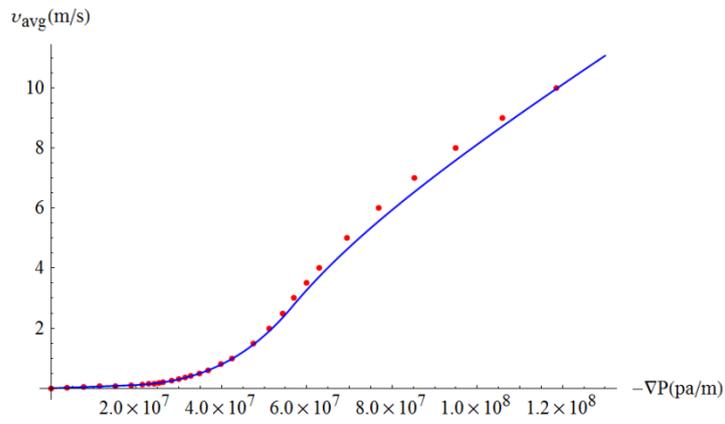
模擬和理論計算比較圖(2mm)



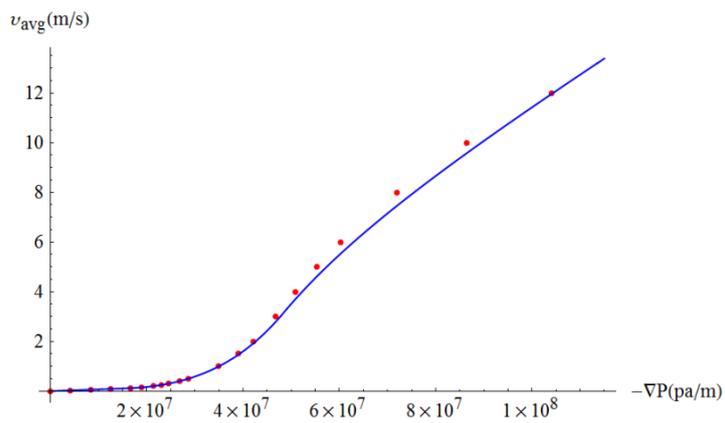
模擬和理論計算比較圖(3mm)



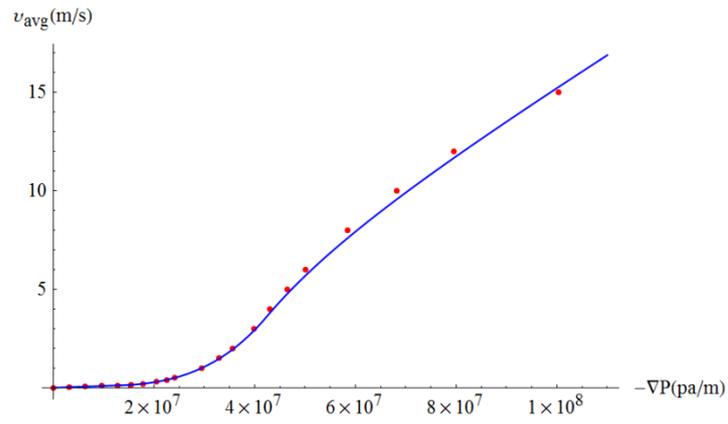
模擬和理論計算比較圖(4mm)



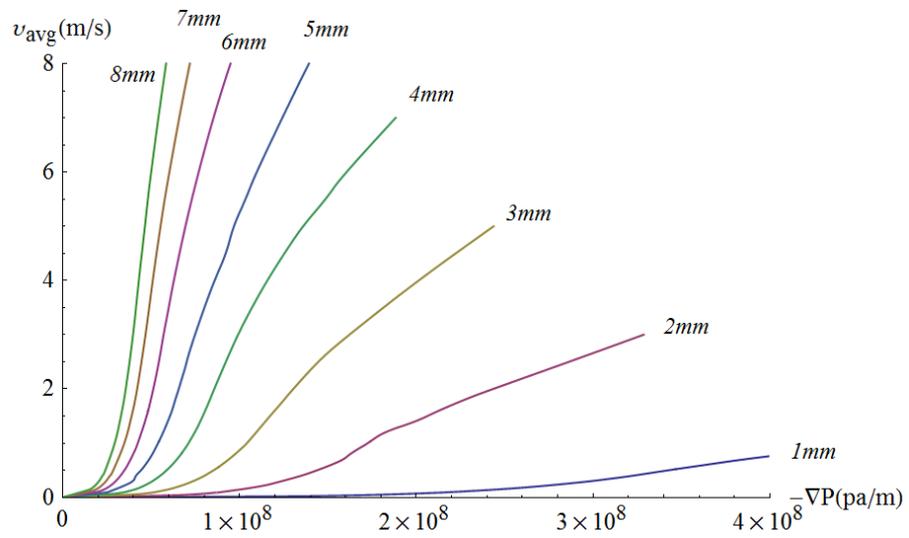
模擬和理論計算比較圖(6mm)



模擬和理論計算比較圖(7mm)



模擬和理論計算比較圖(8mm)



數據圖(1mm~8mm)