

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

發展一非結構性網格有限體積法對固體結構及流固

耦合計算分析

An Unstructured-Grid Finite Volume Method for Calculating
Structural Dynamics and Fluid-Structure Interaction

研究生：黃義政

指導教授：崔燕勇博士

中華民國一百年七月

發展一非結構性網格有限體積法對固體結構及流固耦合計算分析

An Unstructured-Grid Finite Volume Method for Calculating
Structural Dynamics and Fluid-Structure Interaction

研究生：黃義政

Student : Yi-Cheng Huang

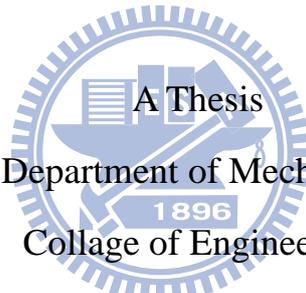
指導教授：崔燕勇

Advisor : Yeng-Yung Tsui

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文



Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the degree of

Master of Science

In

Mechanical Engineering

July 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年七月

發展一非結構性網格有限體積法對固體結構及流固耦合計算分析

研究生：黃義政

指導教授：崔燕勇 博士

國立交通大學機械工程學系(研究所)碩士班

摘要

本文研究主要為發展一個非結構性網格有限體積法，應用於計算結構力學及流體力學來探討流固耦合之問題。在結構力學計算中，透過有限體積法，將方程式離散後整理成一組聯立常微分方程式，求解方式分成直接解法與虛擬時間法兩類，再藉由龍格庫塔法或預測修正法求解。結果發現在虛擬時間法下的求解方式較佳，其中又以預測修正解法有較快之收斂速度和較大之時間步階。此方法能有效的運用在典型的二維懸臂樑和固定樑問題，且分析之結果與理論之位移、自然頻率非常相近。由於固體結構的振動，在流場計算中採用移動網格，透過空間守衡的概念來滿足移動網格的質量守衡。方程式的離散同樣採用有限體積法，其中對流項採用上風法和中央差分法混合的高階方法。在處理動量與連續方程式間的耦合，則是藉由先預測再修正的 PISO 法則處理。在耦合測試問題中，第一個探討的是流體流經一垂直彈性平板之管流，平板因受流場壓力與剪力的影響而產生擺動；第二個探討的是一位於矩形塊體後的水平彈性平板，由於受到此塊體不穩定渦流的影響，造成平板的振動。在此二測試問題中，闡述了結構與流場間相互影響的關係。

An Unstructured-Grid Finite Volume Method for Calculating Structural Dynamics and Fluid-Structure interaction

Student : Yi-Cheng Huang

Advisor : Dr. Yeng-Yung Tsui

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

ABSTRACT

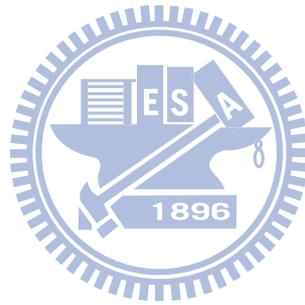
A new unstructured-grid finite-volume method is developed for the structural dynamics and fluid-structure interaction. In structural calculations, the governing equations are discretized using the finite-volume method to obtain a system of ordinary differential equations. These system of ODEs are solved by either a direct method or a virtual time method using Runge-Kutta or predictor-corrector methods. It is shown that the virtual time method is superior to the direct method. Incorporating the predictor-corrector scheme with the virtual time method, larger time steps and faster convergence rates are obtained. The methods are tested for cantilever and built-in beams. The results are in good agreement with theoretical analysis in terms of displacements and natural frequencies. Due to the vibration of the structure, moving grids are employed in flow calculations. By incorporating the space conservation concept, the mass is conserved in each cell with moving grids. The equations are discretized also using the finite-volume method. The convection term is approximated by a hybrid scheme which mixes the central and upwind differences. The coupling between the momentum and continuity equations is tackled using the predictor-corrector method of the PISO algorithm. In the tests of fluid-structure interaction, the first case considered is a vertical plate swinging in a channel flow. In the second case, a horizontal plate is placed behind a rectangular block. The vortices caused by the flow over the block result in vibration of the plate. The interaction between the vibration of the structure and the vortex flow of the fluid is clearly delineated.

誌謝

在這兩年來的日子中，非常感謝崔燕勇教授的指導，使我成長很多，不管是在學業方面還是在研究方面，都給予我很大的幫助，讓我從中學習到解決問題的態度及方法，再次感謝崔老師在論文研究上的教導，使我能完成此篇論文。

接下來是實驗室全體，感謝胡育昌、林仕文、陳信宏、郭大慶學長在研究上給予的協助，特別是林仕文學長在我遇到問題時，都會幫我解決困難並給予鼓勵，使我能克服重重困難。接著是感謝同窗的林子翔和賴胤男，一起渡過兩年來的時光。感謝學弟們吳奉起、黃裕堂、鄭凱鴻，使我們實驗室更加有活力。

最後要感謝的是我的家人，爸爸、媽媽、哥哥、弟弟，有你們的支持和鼓勵，才能使我順利完成學業。



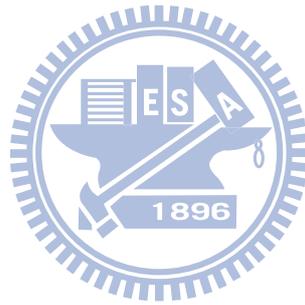
目錄

摘要	i
ABSTRACT	ii
誌謝	iii
目錄	iiiv
表目錄	vi
圖目錄	vii
符號表	x
第一章、緒論	1
1.1 前言	1
1.2 流固耦合介紹	1
1.3 文獻回顧	2
1.4 研究內容	5
第二章、數學模式	7
2.1 固體運動模式	7
2.2 流體運動模式	8
2.3 流固耦合	9
第三章、固體力學數值方法	11
3.1 有限體積法	11
3.2 內部梯度計算方式	12
3.3 邊界梯度計算方式	13
3.4 求解方法	13
3.4.1 直接解法	13
3.4.2 虛擬時間法	15
3.5 邊界上之計算	18

第四章、流體力學數值方法	19
4.1 空間守恆定理	19
4.2 有限體積法	20
4.3 PISO演算法	23
4.4 邊界條件	27
4.5 網格的移動	28
4.6 流固耦合演算流程	28
第五章、結果與討論	29
5.1 固力分析	29
5.1.1 求解方式分析	29
5.1.2 自然頻率和阻尼	31
5.1.3 網格測試	31
5.1.4 疊代次數和計算時間分析	33
5.2 與ANSYS分析比較	33
5.3 不同形式外力負載之懸臂樑	34
5.4 流固耦合分析	35
5.4.1 流經彈性平板之管流	35
5.4.2 渦流致動之彈性平板	37
第六章、結論	40
參考文獻	41

表目錄

表(一)結構體的材料性質和幾何尺寸【6】	44
表(二)不同阻尼比相對應之阻尼係數	44
表(三)在不同網格數下之位移和誤差百分比	44
表(四) 在不同時間步階下比較計算時間、步階次數和使用之虛擬時間步階	45
表(五) 流經彈性平板之管流的結構參數【14】	45
表(六) 流經彈性平板之管流的流體參數【14】	46
表(七) 在不同雷諾數和平板厚度下之位移結果	46
表(八) 渦流致動之彈性平板的結構參數【7】	46
表(九) 渦流致動之彈性平板的流體參數【7】	46



圖目錄

圖 3.1 以網格頂點為控制體積之示意圖	47
圖 3.2 位移梯度計算示意圖	48
圖 3.3 邊界位移梯度計算示意圖	48
圖 3.4 相鄰邊界的控制體積計算示意圖	49
圖 4.1 以網格中心為控制體積之示意圖	50
圖 4.2 利用各面新舊點位置來計算體積改變量	50
圖 4.3 兩個時階中的網格位置變化和各面掃過之體積	51
圖 4.4 主格點和鄰近格點之控制面示意圖	51
圖 4.5 流場網格分割區塊圖(一)	52
圖 4.6 流場網格分割區塊圖(二)	52
圖 4.7 流場網格變化示意圖	53
圖 4.8 流固耦合演算流程圖	54
圖 5.1 單點受力之懸臂梁示意圖	55
圖 5.2 均佈受力之兩端固定樑示意圖	55
圖 5.3 懸臂樑尾端頂點的位移反應	56
圖 5.4 懸臂樑尾端頂點在不同阻尼係數下的位移反應	56
圖 5.5 兩端固定樑中心位置的位移反應	57
圖 5.6 懸臂樑尾端頂點在阻尼係數 12000 下的位移反應	58
圖 5.7 兩端固定樑中心位置在阻尼係數 10000 下的位移反應	58
圖 5.8 懸臂樑尾端頂點的位移反應	59
圖 5.9 兩端固定樑中心位置的位移反應	59
圖 5.10 懸臂樑尾端頂點自由振動之位移反應	62
圖 5.11 兩端固定樑中心位置自由振動之位移反應	62
圖 5.12 懸臂樑尾端頂點在不同阻尼比之位移反應	63

圖 5.13 兩端固定樑中心位置在不同阻尼比之位移反應	63
圖 5.14 五種不同網格數(上到下分別是由疏到密)	60
圖 5.15 測試網格精準度之誤差分析	61
圖 5.16 在真實時間步階為 0.01 sec 每個時階下收斂之疊代次數	64
圖 5.17 在真實時間步階為 0.1 sec 每個時階下收斂之疊代次數	64
圖 5.18 單點受力之懸臂樑應力圖(分別為 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{xy})，其中左邊為 ANSYS 模擬、右邊為本文模擬	65
圖 5.19 均佈受力之兩端固定樑應力圖(分別為 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{xy})，其中左邊為 ANSYS 模擬、右邊為本文模擬	66
圖 5.20 不同形式分佈受力之懸臂梁示意圖	67
圖 5.21 不同型式受力之懸臂樑應力圖(a)均勻性的分佈力(b)線性遞減的分佈力(c) 二次曲線遞減的分佈力	68
圖 5.22 流經彈性平板之管流示意圖	69
圖 5.23 渦流致動之彈性平板示意圖	69
圖 5.24 彈性平板(厚度 0.2m)自由端頂點的位移反應(a)不同雷諾數下之比較(b)在 雷諾數 50 的局部放大圖(c) 在雷諾數 100 的局部放大圖(c) 在雷諾數 150 的局部放大圖	70
圖 5.25 彈性平板(厚度 0.1m)自由端頂點的位移反應(a)不同雷諾數下之比較(b)在 雷諾數 50 的局部放大圖(c) 在雷諾數 100 的局部放大圖(c) 在雷諾數 150 的局部放大圖	71
圖 5.26 彈性平板(厚度 0.2m)自由端頂點的位移反應(a)10 個週期(b)最後一個週期	72
圖 5.27 彈性平板(厚度 0.1m)自由端頂點的位移反應(a)10 個週期(b)最後一個週期	72
圖 5.28 平板厚度 0.2(m)，在不同週期下之流場流線和壓力圖	73

圖 5.29 平板厚度 0.1(m)，在不同週期下之流場流線和壓力圖.....	74
圖 5.30 在不同雷洛數下彈性平板尾端頂點的位移反應	75
圖 5.31 雷諾數 110，在時間 $t=20(s)$ 時流場流線和壓力圖.....	75
圖 5.32 雷諾數 204，彈性平板擺盪一個周期之流場壓力圖.....	76
圖 5.33 雷諾數 204，彈性平板擺盪一個周期之流場流線圖.....	77
圖 5.34 雷諾數 204，彈性平板隨時間之變化圖	78
圖 5.35 雷諾數 300，彈性平板擺盪一個周期之流場壓力圖.....	79
圖 5.36 雷諾數 300，彈性平板擺盪一個周期之流場流線圖.....	80
圖 5.37 雷諾數 300，彈性平板隨時間之變化圖	81



符號表

符號	定義
σ	應力
\vec{d}	位移向量
c	阻尼係數
E	楊氏係數
ν	蒲松比
ε	應變
F_f^C	面上的對流通量
F_f^D	面上的擴散通量
\dot{m}	質量流率
\dot{m}_f	面上的質量流率
\dot{m}_f^r	流體相對於面上的質量流率
P	流體壓力
\vec{S}_f	面的法向量
t	時間
τ	虛擬時間
\vec{V}	流體速度向量
\vec{V}_g	網格速度向量
$\vec{\delta}_{Pnb}$	P 到 nb 距離向量
ζ	阻尼比
μ	黏滯係數
ρ	密度
ω	自然角頻率
f	頻率
ΔV_f	一個面掃過的體積
I	面積慣性矩
上標	
n	現在時間的未知數
o	前一時間的已知數
(m)	疊代中的上一個疊代值
—	主格點與鄰近格點之內差
'	修正量
下標	



f	面上的值
nb	鄰近格點的值
P	主格點的值



第一章、緒論

1.1 前言

從 1950 年代開始，眾多不同的方法被發展出來，藉由這些方法來處理廣泛物理現象的微分方程式。其中有限元素法(Finite element method)最先發展出來應用於固體力學，而這項方法也延伸應用在熱傳、流體和電磁方面。而有限體積法(Finite volume method)是從較早的有限差分法演變發展而來，並且被廣泛的運用在計算流體力學(CFD)方面，如燃燒、自由表面流和多相流等…。儘管一開始有限體積法被限定在使用結構性網格，然而此方法廣泛應用於 CFD 是因為不管在局部或整體都能守恆其物理現象。最早使用非結構性網格於有限體積法起源於 1960 年代，在往後幾年也被證明有效的運用在流體、熱傳和相變化。不過在固體力學的問題方面，多年來一直在有限元素法中發展，也有不錯的成果出現，因此也陸續出現很多種分析固體力學的商業軟體。因此有限體積法應用到固體力學這方面一直沒有更進一步的突破。

直到最近幾年來，陸續有一些學者開始以有限體積法的觀點來處理計算固體力學(CSD)的問題，像是平板彎曲的分析、受不同負載的固力分析、彈性固體的應力分析、暫態固體力學的分析 and 流固耦合分析等…。透過這些學者的努力，證明 FV 方法在 CSD 中有很好的成效。在 FV 方法中對於 CSD 可分為兩大類型，一種是將控制體積取在網格頂點(cell-vertex)【1~7】，另一種是將控制體積取在網格中心(cell-centered)【8~11】。其中計算上在相同網格數時，使用 cell-vertex 方法比 cell-centered 方法減少較多的計算量和記憶空間。在另一方面，在對於比較不規則網格時以 cell-vertex 方法來計算應力較佳。因此一般而言，以有限體積法在處理固體力學問題時都以 cell-vertex 方法佔大多數。

1.2 流固耦合介紹

流體和固體之間的影響在一般的工程問題中扮演非常重要的角色，而這兩種物體之間影響稱之為流固耦合。而本文研究之流固耦合即是透過流體對固體施加

一作用力，讓固體產生擺動，同時受到固體擺動會使流場發生變化。這種現象在生活中到處可見，像是懸吊的橋、受風力影響的高樓和血液流經血管等問題。然而這些物體受到流體的影響是不可忽略的，因此不去考慮它將可能會產生嚴重的後果。

在許多科學的應用和日常生活中，都會碰到流固耦合(Fluid-Structure interaction, FSI)的問題。因此在這方面的研究上，學者們提出了一些解決方法來近似流固耦合。目前在處理流固耦合的問題可以分為兩種解法，分別是完全統一法(monolithic approaches)和分段法(partitioned approaches)。在完全統一法方面，是將流體力學之統御方程式和固體力學之統御方程式結合用同一套程式且同時進行求解。在分段法中，是將流體方程式和固體方程式分開進行求解，其中固力部分一般以有限元素法求解，不過少部分也有以有限體積法解之。另外在處理流固耦合問題時，流體部分的網格不是靜止的，因此不能再使用一般的 Eulerian 座標系統，而必須要以 ALE (arbitrary Lagrangian-Eulerian)座標系統之統御方程式並且搭配移動網格求解。此方法也已經被證明有效的運用在 FSI 的問題中。

1.3 文獻回顧

(A) 固力方面(FVM)

1995 年，Bailey and Cross 【2】以非結構有限體積法求解彈性力學方程式，其中結構體所受之負載分為溫度和力兩種形式。分別以有限元素法(FE)和有限體積法(FV)測試四種例子，並且與解析解比較。由模擬測試後發現利用 FE 和 FV 方法求解之結果非常接近。另外因為 FV 矩陣所使用的方法為 node by node 所建立，所以計算之時間將比 FE 方法多。

1999 年，Taylor et al. 【3】以有限體積法來計算固體力學(CSD)，並且使用不同形狀的網格做測試，分別為 linear tetrahedral(LT)、bilinear pentahedral(BLP)和 trilinear hexahedral(TLH)。其中發現到在使用 TLH 網格並在較粗網格下時，由結果觀察可知 FV 方法比 FE 方法的準確性更佳。然而這些方法中又以使用 LT 網格

時其結果最好。在使用 LT 網格時，FV 和 FE 的矩陣為對稱矩陣，所以以 conjugate gradient method(CGM)解之，而在使用 TLH 網格時 FV 為非對稱性矩陣，所以需以 bi-conjugate gradient method(Bi-CGM)解之。在計算時間方面，FV 方法所花費時間較 FE 多，其中在使用 TLH 網格時，FV 所花費時間幾乎是 FE 的兩倍之多。

2004 年，Fallah 【12】分別以 cell vertex 和 cell centred 有限體積法來分析平板彎曲的問題，由結果觀察出 FV 方法在網格數的收斂速度比 FE 方法快。在有限體積法中又以 cell centred 準確度比 cell vertex 好，另外在 Mindlin-Reissner 理論中使用有限元素法來分析薄平板問題會有 locking 現象發生，不過在使用有限體積法時卻沒觀察到此現象。

2007 年，Xia et al. 【4】以隱性非結構有限體積法來模擬分析 2D 和 3D 的固力學問題，此篇描述一個新的 cell-vertex FVM 方法適用在三角和四面體網格。在測試問題中，計算懸臂樑在尾端受一集中力的變形，其模擬結果與理論解比較非常相近。在另一個問題中(四邊形平板)，分別以 simply supported 和 fully clamped 固定，其模擬結果觀察到最大的彎曲應力發生位置不一樣，並且和理論解比較也都非常相近。因此可將此方法與計算流體力學(CFD)做結合，來模擬流固耦合(FSI)問題。

(B)流固耦合方面

2000 年，Souli et al. 【13】利用 Lagrangian 和 Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE)兩種方法來探討不同問題時，對於網格幾何的影響。在測試問題中，發現以 ALE 方式求解較不會導致網格被嚴重破壞，以至無法繼續計算，且在求解中使用的時間步階也不會受到網格變形的影響而可繼續進行計算。另外此篇對於較大變形量的計算時，提出了幾種不同的 smoothing 演算法來從新規劃計算區域的網格。在耦合方面，不同的 smoothing 演算法也有效的被運用到流固耦合的問題中。

2001年，Gluck et al. 【14】此篇以兩種code分別求解流力和固力，在流力方面 CFD code為FASTEST-3D，固力方面CSD code為ASE。再以MpCCI將兩種程式結

合在一起，藉此來模擬流固耦合問題。在網格方面，流體部分使Block-structured網格，固力部分使用非結構性網格。此種計算方法可以適用在紊流和非線性移動的暫態流固耦合問題。

2002年，Slone et al.【5】在處理流固耦合的問題時用FV-UM法來描述，其中使用了PHYSICA軟體來分析。在計算方面，將流體和固體結合用同一套程式求解。在流力部分，使用FVM來解N-S方程式，再利用壓力修正法來修正壓力、速度。固力部分，利用cell-vertex FVM和Newmark演算法來求解方程式。此篇分析的例子為在三維流場中置入懸臂樑，藉由流體的作用力，讓此物體產生擺動。透過分析之位移、壓力、應力和流場來探討流固耦合的問題。此外本篇最終目的是發展一個三維的計算流程來處理複雜DFSI問題，這項工作對於未來在DFSI的演算方面有更進一步的發展。

2004年，Hubner et al.【15】利用monolithic approach來處理流固耦合問題，在固力和流力部分都以有限元素法(space-time finite element)來離散並且加入耦合條件，再透過model equation將三個結合在一起，因此在求解過程是將流體和固體用一套程式一起求解。藉由此方法測試流固耦合問題中，發現在耦合情況下將會影響到流場而發生改變。另一方面耦合強度也是一個重要依據，它將會影響其耦合行為。

2007年，Lv et al.【6】在處理固力方程式中，發展了一個三維matrix-free非結構性交錯網格有限體積法，這項方法已有效運用在2維和3維懸臂樑的問題。在網格方面中，發現使用3-level多重網格法比單一網格的收斂速度快。流固耦合方面，結合處理流力的軟體(TETRAKE)和應用於FSI界面immersed membrane method(IMM)也被證實有非常好的成效。

2008年，Xia and Lin【7】以一個cell-vortex非結構有限體積法來解固力方程式，透過這個方法來模擬受到流體力影響的結構體。在計算方面為了使用較大的時間步階，將導入dual-time scheme適用於此解法中。運用此方法結合計算流體力學來測試耦合分析，其模擬結果與解析解和學者所發表之文獻做比較皆非常符

合。其中在分析的例子中，可發現到當擺動振幅越大週期也越長，另一個值得注意的是結構體厚度和慣性力也是影響耦合的關鍵。

2009 年，陳俊佑【16】研究壓電無閥式微幫浦流固耦合分析，利用 ANSYS 來計算壓電致動器之振動位移並與 CFD 程式結合，藉此來探討流固耦合之現象。在此模擬中，是將流體的壓力視為作用在壓電致動器之外力，以探討在不同操作頻率下微幫浦之特性。由結果得知，當負載頻率愈高，愈不可忽略流體壓力對壓電致動器之影響。

2010 年，陳信宏【17】研究雙壓電致動器幫浦之流固耦合分析，將 ANSYS 軟體與 CFD 程式結合，藉此來分析幫浦之特性。在耦合計算中，是將幫浦內流體之壓力和剪力視為雙壓電致動器之外力限制條件。透過模擬結果發現，幫浦之流量同時受到電壓、擺動振幅和振動頻率所影響。而欲增加流量最有效率的方法為增加電壓的大小。

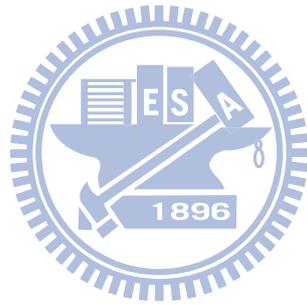
1.4 研究內容

本文研究內容是發展一非結構性網格有限體積法(Finite Volume Method)來計算固體力學，並與計算流體力學互相結合來探討流固耦合之問題。

在固體力學方面，我們採用非結構性網格，並利用有限體積法離散結構方程式，而控制體積中心則是取在網格頂點(cell-vertex)。另外在計算上本文將求解方式分成直接解法和虛擬時間法兩類，並且分別利用龍格庫塔(Runge-Kutta)法或預測修正法求解，進而比較不同方法結果的優缺點。除了探討結構位移之外，也將觀察結構的自然頻率和不同阻尼下的運動情形。

在流體力學方面，採用 ALE 座標系之統御方程式，利用有限體積法將方程式離散，再透過 PISO 修正法和空間守恆定理(Space Conservation Law)來滿足連續方程式，而控制體積中心則是取在網格中心(cell-centered)。因此即可透過計算流體力學方法，將流場計算之流體壓力和流體剪力施加於流體與固體的作用面上，並搭配計算固體力學來分析流固耦合之問題，而在耦合測試的例子中分別為流經

彈性平板之管流和渦流致動之彈性平板。因此將藉由上述之方法來探討流體和平板兩者之間的互相作用並觀察其平板的振動情形和流場變化。



第二章、數學模式

本章之數學模型分為固體運動模式和流體運動模式，因此在本章節分別描述此兩者之運動方程式，以及不同的邊界條件。

2.1 固體運動模式

固體假設

在本研究中，探討之問題為二維，假設為線性彈性應變(Linear elastic strains)

結構運動方程式

結構體運動之統御方程式為 Cauchy's equation:

$$\rho \frac{\partial^2 d_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \quad (2.1)$$

其中 σ_{ij} 代表應力、 d_i 代表位移、 ρ 代表結構密度、 b_i 代表物體力

應力和應變關係

由虎克定律(Hook's law)知應力(stress)和應變(strain)的關係，且對於等向性均質(isotropic homogeneous)結構而言關係式如下:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

其中 E 為楊氏系數(Young's Modulus)、 ν 為蒲松比(Poisson's ratio)。

而對於線性(linear)的應變和位移(displacement)的關係如下:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial d_x}{\partial x} \\ \frac{\partial d_y}{\partial y} \\ \frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

而 d_x 和 d_y 分別為 X 和 Y 方向之位移

結構體邊界條件

邊界條件可分為牽引力邊界和位移邊界

(1) 牽引力邊界(traction boundary): 在受力的邊界上須滿足力平衡之限制條件，如下所示

$$\bar{T} \cdot \bar{\sigma} = \bar{t}_p \quad (2.4)$$

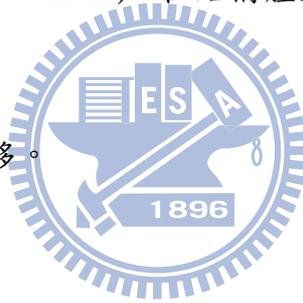
其中 t_p 為邊界上之牽引力(traction)裡面包含額外的力 f ， T 為邊界外之單位法向量，表示如下：

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

(2) 位移邊界(prescribed displacement): 在結構體上有已知位移限制條件，如下：

$$\bar{d} = \bar{d}_p \quad (2.6)$$

其中 \bar{d}_p 為受限制已知的位移。



2.2 流體運動模式

流體假設

在本研究中，探討之問題為二維，所假設之工作流體性如下：

- (1) 不可壓縮流(incompressible Flow): 工作流體之密度為定值。
- (2) 忽略重力項
- (3) 非穩態流場(unsteady)
- (4) 層流(laminar flow)

ALE 座標系之統御方程式

在本文研究中因邊界會移動，所以網格不是靜止不動，因此必須使用 ALE (arbitrary Lagrangian-Eulerian) 座標系來求解移動邊界問題。以下為 ALE 座標系之連續方程式和動量方程式：

- (1) 連續方程式(Continuity Equation)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\bar{V} - \bar{V}_g)] = 0 \quad (2.7)$$

(2) 動量方程式(Momentum Equation)

$$\frac{\partial(\rho\bar{V})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\bar{V} - \bar{V}_g)\bar{V}] = -\nabla P + \nabla \cdot (\mu\nabla\bar{V}) \quad (2.8)$$

其中 ρ 為流體密度、 μ 為黏滯係數、 ∇P 為壓力梯度、 \bar{V} 為流體速度、 \bar{V}_g 為網格速度。

流場邊界條件

(1) 出入口邊界條件

入口： 給定入口邊界的流量。

出口： 在出口方面為流量邊界，而邊界的出口速度計算均採用對流邊界條件 (convective boundary condition)。

(2) 牆邊界條件

牆上均採用無滑移邊界條件(no-slip condition)，在彈性結構體之邊界也設為牆的邊界條件。



2.3 流固耦合

固體條件

在結構體和流體接觸面之邊界條件(即牽引力邊界條件)為受流體壓力和流體剪力之負載限制。

流體條件

計算流體力學中，在結構體和流體接觸面的速度等於結構體移動的速度。又結構體位置會隨時間改變，因此在結構體和流體之接觸面也必須隨時間而改變位置。而數學式表示如下：

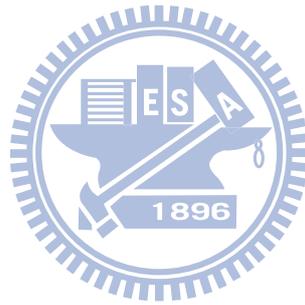
$$\bar{V} = \bar{V}_s \quad (2.9)$$

$$\bar{d} = \bar{d}_s \quad (2.10)$$

其中 \bar{V} 代表流體速度、 \bar{V}_s 代表結構體速度、 \bar{d} 代表結構體和流體接觸面之位移、

\bar{d}_s 代表結構體之位移。

因此可透過上面流體和固體之間互相作用的關係，來探討固體結構運動之情形和流場現象。



第三章、固體力學數值方法

在固力計算方面，本文將控制體積取在網格頂點(cell-vertex)上如(圖 3.1)所示，因此所算出位移和速度的值均儲存在頂點上。

3.1 有限體積法

將上一章的統御方程式(2.1)式忽略物體力(不考慮重力項)，另外加入一項阻尼(damping)力，對於一般黏滯阻尼的結構體而言，其假設阻尼和結構速度成正比關係，又阻尼運動方向和結構體運動方向相反，因此可將改寫成下列式子：

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{d}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma_{ij} - c\bar{V} \quad (3.1)$$

其中 c 表示阻尼係數，將上式取體積分後，可表式成如下之積分型式：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_V \rho \bar{d} dV = \iiint_V \nabla \cdot \sigma_{ij} dV - \iiint_V c\bar{V} dV \quad (3.2)$$

【一】 【二】 【三】

再透過高斯散度定理，將(3.2)式之【二】項由體積分轉成面積分，即可得到下式：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_V \rho \bar{d} dV = \oiint_S \sigma_{ij} \cdot d\bar{S} - \iiint_V c\bar{V} dV \quad (3.3)$$

離散化

【一】 項

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_V \rho \bar{d} dV = \rho \frac{\partial^2 \bar{d}}{\partial t^2} \Delta V \quad (3.4)$$

【二】 項

將(3.2)式之【二】項離散化後，表示如下：

$$\oiint_S \sigma_{ij} \cdot d\bar{S} = \sum_f (\sigma_{ij})_f \cdot d\bar{S}_f \quad (3.5)$$

其中 $i=1,2$ 、 $j=1,2$ 。因此可知 $\sigma_{11} = \sigma_{xx}$ ， $\sigma_{22} = \sigma_{yy}$ 稱為正應力(normal stress)；

$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{xy}$ 稱為剪應力(shear stress)。下標 f 代表面上的值。而以頂點取控制

體積時又分為內部點和邊界點。當為內部點時，面上的值是取面上兩頂點之平均值如圖 3.1(a)；當為邊界點時，需特別注意到部分面中心位於邊界上，所以面上的值則是取邊界上的值如圖 3.1(b)。

將(2.2)式展開後可分別得到 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{xy} ，如下所示

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda(1-\nu)\frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda\nu\frac{\partial d_y}{\partial y} \\ \sigma_{yy} = \lambda\nu\frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda(1-\nu)\frac{\partial d_y}{\partial y} \\ \sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x}\right) \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\text{其中 } \lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{、} \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

【三】項

$$-\iiint_{\Delta V} c\bar{V}d\Delta V = -c\bar{V}\Delta V \quad (3.7)$$

透過上述離散化後，將(3.3)式分成 X 和 Y 方向展開，即可得：

$$\begin{cases} \rho\frac{\partial^2 d_x}{\partial t^2}\Delta V = \sum_f \left\{ \left[\lambda(1-\nu)\frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda\nu\frac{\partial d_y}{\partial y} \right]_f \cdot \Delta S_x + \left[\mu\left(\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x}\right) \right]_f \cdot \Delta S_y \right\} - cu\Delta V \\ \rho\frac{\partial^2 d_y}{\partial t^2}\Delta V = \sum_f \left\{ \left[\mu\left(\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x}\right) \right]_f \cdot \Delta S_x + \left[\lambda\nu\frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda(1-\nu)\frac{\partial d_y}{\partial y} \right]_f \cdot \Delta S_y \right\} - cv\Delta V \end{cases} \quad (3.8)$$

3.2 內部梯度計算方式

以下將介紹位移梯度(displacement gradient)計算方式，在此方法中是將位移梯度的值儲存於網格中心上，與結構體之位移和速度儲存在網格頂點而有所不同。首先將梯度取體積分後，再透過高斯散度定理轉為面積分，如下所示：

$$\nabla\phi = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \nabla\phi d\Delta V = \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \phi d\vec{S} = \frac{1}{\Delta V} \sum_f \phi_f d\vec{S}_f \quad (3.9)$$

因本文探討之問題為二維，所以可將上式改寫如下：

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{\Delta A} \oiint_S \phi dy = \frac{1}{\Delta A} \sum_{j=1}^N \phi_j \Delta y_j \quad (3.10a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta A} \iint_S \phi dx = -\frac{1}{\Delta A} \sum_{j=1}^N \phi_j \Delta x_j \quad (3.10b)$$

其中 N 為網格面的個數如(圖 3.2)所示，而網格面上的 ϕ 值是將面的兩個頂點取平均值即 $\phi_f = \frac{1}{2}(\phi_{f_1} + \phi_{f_2})$ ， f_1 和 f_2 為 f 面上的兩個頂點。

3.3 邊界梯度計算方式

當網格頂點為邊界點時，在計算上將使用到邊界面上的位移梯度，因此需另外去計算。同樣的邊界位移梯度儲存的位置是在邊界面的中心，而計算方式如下：

$$\nabla \phi_b - \nabla \phi_P = \nabla(\nabla \phi) \cdot \bar{\delta}_{Pb} \quad (3.11)$$

其中下標 b 代表邊界、 $\bar{\delta}_{Pb}$ 代表 P 到 b 距離向量如(圖 3.3)。

將位移梯度的梯度項利用(3.9)式相同之方法離散，即可得：

$$\nabla(\nabla \phi) = \frac{1}{\nabla} \sum_f \nabla \phi_f \bar{S}_f = \frac{1}{\nabla} \left(\nabla \phi_b \bar{S}_b + \sum_{f \neq b} \nabla \phi_f \bar{S}_f \right) \quad (3.12)$$

其中 $f \neq b$ 代表不包含邊界的其餘各面。將(3.12)式代入(3.11)式可得邊界上之位移梯度：

$$\nabla \phi_b = \frac{\nabla \phi_P + \frac{1}{\nabla} \sum_{f \neq b} \nabla \phi_f \bar{S}_f \cdot \bar{\delta}_{Pb}}{1 - \frac{1}{\nabla} \bar{S}_b \cdot \bar{\delta}_{Pb}} \quad (3.13)$$

3.4 求解方法

本文在求解此方程式將分為兩大類方式，第一類為直接求解此方程式，第二類則將方程式加入一個虛擬時間概念去求解。以下將分別介紹：

3.4.1 直接解法

在(3.8)式中因位移對空間的梯度項已由前面提到之計算方式離散化，因此方程式即可視為一個二階常微分程式(ODE)，另外在計算上本文將多加兩條方程式，如下所示：

$$\begin{cases} \frac{\partial d_x}{\partial t} = u \\ \frac{\partial d_y}{\partial t} = v \end{cases} \quad (3.14)$$

其中 u 、 v 分別代表 X 和 Y 方向速度，並且將(3.14)關係式代入(3.8)式，改寫後再和(3.14)聯立。整理後可得：

$$\begin{cases} \frac{\partial d_x}{\partial t} = u \\ \frac{\partial d_y}{\partial t} = v \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot \Delta \nabla} \sum_f \left\{ \left[\lambda(1-\nu) \frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda \nu \frac{\partial d_y}{\partial y} \right]_f \cdot \Delta S_x + \left[\mu \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x} \right) \right]_f \cdot \Delta S_y \right\} - \frac{cu}{\rho} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot \Delta \nabla} \sum_f \left\{ \left[\mu \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x} \right) \right]_f \cdot \Delta S_x + \left[\lambda \nu \frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda(1-\nu) \frac{\partial d_y}{\partial y} \right]_f \cdot \Delta S_y \right\} - \frac{cv}{\rho} \end{cases} \quad (3.15)$$

在求解過程中，將四個變數 d_x 、 d_y 、 u 、 v 令為一個矩陣型式如下

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

因此可將(3.15)式看成一個聯立常微分方程組，表示成下式：

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \bar{F}(\bar{U}) \quad (3.17)$$

(3.17)式即是一個一階 ODE 型式，因此可使用一般常見的 ODE 數值方法求解。在此本文將使用兩種方法來求解，第一種為龍格-庫塔(Runge-Kutta)法、第二種為預測修正(predictor-corrector)法。但由於每一網格點的 ODE 必需與相鄰格點的 ODE 相互聯立在一起，因此需要利用疊代的方式將所有 ODE 耦合在一起。以下將分別介紹求解之方法：

Runge-Kutta Method

一般而言以四階 Runge-Kutta 【18】 最為廣泛使用。因此本文即使用此方法求解，過程步驟如下：

$$\text{令} \begin{cases} \bar{K}_1 = \bar{F}(\bar{U}^{n(m)}) \\ \bar{K}_2 = \bar{F}(\bar{U}^{n(m)} + \frac{\Delta t}{2} \bar{K}_1) \\ \bar{K}_3 = \bar{F}(\bar{U}^{n(m)} + \frac{\Delta t}{2} \bar{K}_2) \\ \bar{K}_4 = \bar{F}(\bar{U}^{n(m)} + \Delta t \bar{K}_3) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\bar{U}^{n(m+1)} = \bar{U}^o + \frac{\Delta t}{6} (\bar{K}_1 + 2\bar{K}_2 + 2\bar{K}_3 + \bar{K}_4)$$

其中 Δt 代表時間步階而上標 o 代表上一個時間的值、上標 n 代表現在時間的值，上標 (m) 及 $(m+1)$ 代表在現在時間步階 n 疊代的指標，利用舊的疊代值 $\bar{U}^{n(m)}$ 求得 $\bar{K}_1 \sim \bar{K}_4$ ，可得新的疊代值 $\bar{U}^{n(m+1)}$ ，如此疊代到收斂，便可往下個時階繼續計算。

Predictor-Corrector Method

在眾多預測修正解法當中，本文使用的是由 Hamming 所提出的方法【18】，此方法是一個被廣泛而有效的運用在求解 ODE 的問題。以下為求解之步驟：

$$\text{Predictor: } \bar{U}^{n(1)} = \bar{U}^{n-4} + \frac{4}{3} \Delta t (2\bar{F}^{n-1} - \bar{F}^{n-2} + 2\bar{F}^{n-3}) \quad (3.19)$$

$$\text{Corrector: } \bar{U}^{n(m+1)} = \frac{1}{8} (9\bar{U}^{n-1} - \bar{U}^{n-3}) + \frac{3}{8} \Delta t (\bar{F}^{n(m)} + 2\bar{F}^{n-1} - \bar{F}^{n-2}), \quad m \geq 1 \quad (3.20)$$

其中 Δt 代表時間步階，至於上標 n 代表現在時間的值， $n-1$ 、 $n-2$ 、 $n-3$ 、 $n-4$ 代表上一個、上二個、上三個、上四個時間值。上標 (m) 及 $(m+1)$ 代表在現在時間步階 n 疊代的指標，利用一次的預測值 $\bar{U}^{n(1)}$ 求得舊的疊代值 $\bar{F}^{n(m)}$ ，再經由修正步驟可得新的疊代值 $\bar{U}^{n(m+1)}$ ，如此在修正步驟中疊代到收斂，即往下個時階進行計算。此外，在預測修正解法中，前面三次的的計算必須使用龍格-庫塔法求得舊時間值，第四次後即可使用預測修正法進行求解。

3.4.2 虛擬時間法

將(3.15)式等號左邊的微分項利用向後差分法(backward scheme)將其離散並

移置等號右邊，另外在等號左邊加入一項虛擬時間的微分項 $\frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau}$ ，而此虛擬時間 (virtual time) 方法已被 Jameson 應用於求解機翼的超音速流場【19】，因此(3.15)式即可改寫成下式：

$$\begin{cases} \frac{\partial d_x^n}{\partial \tau} = -\left(\frac{d_x^n - d_x^o}{\Delta t}\right) + u^n \\ \frac{\partial d_y^n}{\partial \tau} = -\left(\frac{d_y^n - d_y^o}{\Delta t}\right) + v^n \\ \frac{\partial u^n}{\partial \tau} = -\left(\frac{u^n - u^o}{\Delta t}\right) + \frac{1}{\rho \cdot \Delta \nabla} \sum_f \left\{ \left[\lambda(1-\nu) \frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda\nu \frac{\partial d_y}{\partial y} \right]_f \cdot \Delta S_x + \left[\mu \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x} \right) \right]_f \cdot \Delta S_y \right\} - \frac{cu^n}{\rho} \\ \frac{\partial v^n}{\partial \tau} = -\left(\frac{v^n - v^o}{\Delta t}\right) + \frac{1}{\rho \cdot \Delta \nabla} \sum_f \left\{ \left[\mu \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x} \right) \right]_f \cdot \Delta S_x + \left[\lambda\nu \frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda(1-\nu) \frac{\partial d_y}{\partial y} \right]_f \cdot \Delta S_y \right\} - \frac{cv^n}{\rho} \end{cases} \quad (3.21)$$

同樣的也可將(3.21)式聯立常微分方程組，表示成下式：

$$\frac{d\bar{U}^n}{d\tau} = \bar{G}(\bar{U}^n) \quad (3.22)$$

因此(3.21)式同樣使用上面提到之求解 ODE 的方法求解，而(3.21)和(3.15)式的差異在於等號左邊項，一個是對真實時間微分、另一個是對虛擬時間微分。在求解此虛擬時間的 ODE 時，虛擬時間的步階即代表前述直接解法中的疊代次數。當在虛擬時間求解過程中到達穩態時，即代表達到收斂，也就是滿足 $\bar{G}(\bar{U}^n) = 0$ ，此時就是真實時間步階 n 的解。

由於對數值法穩定性的考慮，在直接解法中的時間步階通常受限於 CFL 條件，也就是計算的庫倫數(Courant number)需要小於 1，而在本文的計算經驗中，為有效求得穩定的解，此庫倫數通常需在 0.1 大小左右。而虛擬時間法的目的就在於“欺騙”數值求解的方法，由於過程中以虛擬時間步進，因此只需對虛擬時間步階做嚴格限制，使其庫倫數約 0.1，而實際步進項是吸收於虛擬時間 ODE 的源項內，因此實際時間步階可以取較大值，通常可以是虛擬時間步階的 1 至 2 個 order 以上的大小，如此實際的庫倫數必可以大為增加，此點可從下一章的結果與

討論中明確看出。

下面介紹應用 Runge-Kutta 法及預測修正法於虛擬時間的解法中：

Runge-Kutta Method

同樣以四階 Runge-Kutta 求解，步驟如下：

$$\text{令 } \begin{cases} \bar{K}_1 = \bar{G}(\bar{U}^{n(m)}) \\ \bar{K}_2 = \bar{G}(\bar{U}^{n(m)} + \frac{\Delta\tau}{2} \bar{K}_1) \\ \bar{K}_3 = \bar{G}(\bar{U}^{n(m)} + \frac{\Delta\tau}{2} \bar{K}_2) \\ \bar{K}_4 = \bar{G}(\bar{U}^{n(m)} + \Delta\tau \bar{K}_3) \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\bar{U}^{n(m+1)} = \bar{U}^{n(m)} + \frac{\Delta\tau}{6} (\bar{K}_1 + 2\bar{K}_2 + 2\bar{K}_3 + \bar{K}_4) \quad (3.24)$$

其中 $\Delta\tau$ 代表虛擬之時間步階而上標 n 代表現在時間、 (m) 代表在虛擬時間下的上一個時間值。因為在每個真實的時階下都必須要滿足 $\bar{G}(\bar{U}^n) = 0$ ，所以在求解過程中當 $\bar{G}^{n(m)}$ 趨近於零時，表示 $\bar{K}_1 \sim \bar{K}_4$ 也趨近零，因此即可求得 $\bar{U}^{n(m)}$ 值逼近 $\bar{U}^{n(m+1)}$ 值，即滿足 $\bar{G}(\bar{U}^n) = 0$ ，此時便可繼續往下一個真實時階計算。

Predictor-Corrector Method

同樣的將解法改成預測修正法時也須要在每個真實時階下解到滿足方程式 $\bar{G}(\bar{U}^n) = 0$ ，因此求解之步驟如下：

$$\text{Predictor: } \bar{U}_p^{n(m+1)} = \bar{U}^{n(m-3)} + \frac{4}{3} \Delta\tau (2\bar{G}^{n(m)} - \bar{G}^{n(m-1)} + 2\bar{G}^{n(m-2)}) \quad (3.25)$$

$$\text{Corrector: } \bar{U}_c^{n(m+1)} = \frac{1}{8} (9\bar{U}^{n(m)} - \bar{U}^{n(m-2)}) + \frac{3}{8} \Delta\tau (\bar{G}_p^{n(m+1)} + 2\bar{G}^{n(m)} - \bar{G}^{n(m-1)}) \quad (3.26)$$

其中 $\Delta\tau$ 代表虛擬之時間步階而上標 n 代表現在時間、 p 代表預測之值、 c 代表修正後之值，至於上標 (m) 代表在虛擬時間下的上一個時間值、 $(m-1)$ 代表在上二個時間值、 $(m-2)$ 代表在上三個時間值、 $(m-3)$ 代表在上四個時間值。在求解過程中，當 $\bar{U}^{n(m)}$ 趨近於 $\bar{U}^{n(m+1)}$ 值時，代表收斂即滿足 $\bar{G}(\bar{U}^n) = 0$ ，即可往下一個真實時階計算。

疊代收斂條件

在直接解法和虛擬時間法中都必須在每個時階下疊代至收斂，其收斂與否以位移來判斷，數學式表示如下：

$$\sum_{i=1}^N \frac{|\bar{d}^{n(m+1)} - \bar{d}^{n(m)}|}{\bar{d}^{n(m)}} \leq 10^{-6} \quad (3.27)$$

其中 N 代表網格頂點個數、n 代表現在時間、(m) 代表在疊代中的上一個疊代值。

3.5 邊界上之計算

在結構體中相鄰邊界的控制體積如(圖 3.4)所示，當此邊界有外力之限制條件時，此時處理方式跟內部點不一樣，因此必須額外處理。將邊界上控制體積的面分為邊界面 f_b 和非邊界面 f_i ，在 f_b 面上直接給定此面所負載之外力 \bar{F} ，而在 f_i 面上給定方式和內部點一樣為面上所需的值。又外力給定方式可分為分佈力和集中受力，因此在邊界上之計算可將(3.8)式改寫成兩種受力方式的式子。當外力負載為分佈力 w 時，可將(3.8)式改寫成下式：

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 d_x}{\partial t^2} \Delta \nabla = \sum_{f_{i \neq b}} \left\{ \left[\lambda(1-\nu) \frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda\nu \frac{\partial d_y}{\partial y} \right] \cdot \Delta S_x + \left[\mu \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x} \right) \right] \cdot \Delta S_y \right\} + [w \cdot (-\Delta S_x)]_{f_b} - cu \Delta \nabla \\ \rho \frac{\partial^2 d_y}{\partial t^2} \Delta \nabla = \sum_{f_{i \neq b}} \left\{ \left[\mu \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x} \right) \right] \cdot \Delta S_x + \left[\lambda\nu \frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda(1-\nu) \frac{\partial d_y}{\partial y} \right] \cdot \Delta S_y \right\} + [w \cdot (-\Delta S_y)]_{f_b} - cv \Delta \nabla \end{cases} \quad (3.28)$$

而當外力負載為集中受力 \bar{F} 時，即可將(3.8)式改寫如下：

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 d_x}{\partial t^2} \Delta \nabla = \sum_{f_{i \neq b}} \left\{ \left[\lambda(1-\nu) \frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda\nu \frac{\partial d_y}{\partial y} \right] \cdot \Delta S_x + \left[\mu \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x} \right) \right] \cdot \Delta S_y \right\} + F_x - cu \Delta \nabla \\ \rho \frac{\partial^2 d_y}{\partial t^2} \Delta \nabla = \sum_{f_{i \neq b}} \left\{ \left[\mu \left(\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x} \right) \right] \cdot \Delta S_x + \left[\lambda\nu \frac{\partial d_x}{\partial x} + \lambda(1-\nu) \frac{\partial d_y}{\partial y} \right] \cdot \Delta S_y \right\} + F_y - cv \Delta \nabla \end{cases} \quad (3.29)$$

第四章、流體力學數值方法

在流力計算方面，本文將控制體積取在網格中心(cell-centered)上如(圖 4.1)所示，因此所計算出速度和壓力的值均儲存在網格中心上。

4.1 空間守恆定理

空間守恆定理介紹

在探討移動網格的問題時，有一個定理專門用來判斷網格體積隨時間變化是否守恆，稱為空間守恆定理(Space Conservation Law)，數學表示如下：

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\forall} d\forall + \oiint_S \bar{V}_g \cdot d\bar{S} = 0 \quad (4.1)$$

而此定理在 Demirdzic and Peric 【20】發表的文獻中已被應用於有限體積法中。

另外在處理移動網格問題時，需用到每個時階下的網格體積改變量，因此在計算上本文直接用新舊網格各面的節點位置來做計算。如(圖 4.2)，藉由找出網格一個面移動前後的四個節點，利用這四個點來算出此面移動造成的體積改變量。

空間守恆定理

在每個時階中，新和舊體積的差值會等於在控制體積中各面所掃過的體積改變量相加，如下所示：

$$\frac{\forall - \forall^o}{\Delta t} = \frac{\sum_f \Delta \forall_f}{\Delta t} \quad (4.2)$$

其中 $\Delta \forall_f$ 為一個面掃過之體積， $f = e, w, n, s$ ，如(圖 4.3)所示。再透過(4.1)式可知網格移動的速度等於每個時階中體積改變量，因此對於每個面上之關係式可表示如下：

$$\left(\bar{V}_g \cdot \bar{S} \right)_f = \frac{\Delta \forall_f}{\Delta t} = \dot{\forall}_f \quad (4.3)$$

因此流過移動網格某一面的質量流率 \dot{m}_f^r 可寫成下式：

$$\dot{m}_f^r = \rho_f (\bar{V} - \bar{V}_s)_f \cdot \bar{S}_f = \rho_f \bar{V}_f \cdot \bar{S}_f - \rho_f \dot{V}_f \quad (4.4)$$

接著也必須讓連續方程式滿足空間守恆定理，將(2.7)式取體積後再將其離散後改寫成下式：

$$\rho \frac{\nabla - \nabla^o}{\Delta t} + \sum_f \dot{m}_f^r = 0 \quad (4.5)$$

將(4.4)式代入上式可得：

$$\sum_f \rho_f \bar{V}_f \cdot \bar{S}_f = 0 \quad (4.6)$$

而(4.6)式即下列不可壓縮流之連續方程式的差分式子：

$$\nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0 \quad (4.7)$$

因此本文 ALE 座標系的連續方程式(2.7)式，可簡化為和網格速度無關的(4.6)式，再配合(2.8)式的動量方程式即可描述本文的流體運動模式。

4.2 有限體積法

由第二章中的動量方程式(2.8 式)可以得到下列通式：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\bar{V} - \bar{V}_s)\phi] = \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) + q \quad (4.8)$$

將上式積分後，可表示如下之積分型式：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\forall} \rho \phi d\forall + \iiint_{\forall} \nabla \cdot [\rho(\bar{V} - \bar{V}_s)\phi] d\forall = \iiint_{\forall} \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) d\forall + \iiint_{\forall} q d\forall \quad (4.9)$$

等式左邊第一項為非穩態項(Unsteady term)，第二項為對流項(Convection term)；等式右邊第一項為擴散項(Diffusion term)，第二項為源項(Source term)。源項的來源是壓力項，故 $q = -\nabla P$ 。又上面所提到之 ϕ 為速度分量。

再透過高斯散度定理，將(4.9)式對流項和擴散項由體積分轉換成面積分，即可得到下式：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\forall} \rho \phi d\forall + \oiint_S \rho(\bar{V} - \bar{V}_s)\phi \cdot d\bar{S} = \oiint_S \mu \nabla \phi \cdot d\bar{S} + \iiint_{\forall} q d\forall \quad (4.10)$$

離散化

以下將介紹動量方程式各項的離散方法

非穩態項(Unsteady term)

對於有移動邊界的不可壓縮流，其網格的體積會隨時間而改變。

$$\iiint_{\forall} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall = \frac{\rho \cdot \Delta\forall}{\Delta t} (\phi - \phi^o) \quad (4.11)$$

ϕ 是這一個時間的值、 ϕ^o 是上一個時間的值，因此在計算上可將 ϕ^o 移進源項。

對流項(Convection term)

將(4.10)式的對流項，已由體積分轉為面積分後，再將其離散化，可得：

$$\oiint_s \rho(\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{V}}_g) \phi \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \sum_f (\rho_f (\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{V}}_g)_f \cdot \bar{\mathbf{S}}_f) \phi_f = \sum_f \dot{m}_f \phi_f = \sum_f F_f^C \quad (4.12)$$

其中 $\bar{\mathbf{S}}_f$ 代表面上之值、 \dot{m}_f 代表流經面上的質量流率、 F_f^C 代表面上的對流通量、下標 f 代表面上的值。而對於面上的值，可透過相鄰網格以線性內差的方式求得。流體相對於面上的質量流率定義如下：

$$\dot{m}_f^r = \rho_f (\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{V}}_g)_f \cdot \bar{\mathbf{S}}_f \quad (4.13)$$

在 ALE 座標系中，因動量方程式之對流項加進了網格速度的變化，網格移動的速度會直接影響面上的質量流率。所以在質量流率的計算上必須配合空間守恆定律，因此透過上小節推導可將質量流率改寫成如(4.4)式的計算方式，如下：

$$\dot{m}_f^r = \rho_f (\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{V}}_g)_f \cdot \bar{\mathbf{S}}_f = \rho_f \bar{\mathbf{V}}_f \cdot \bar{\mathbf{S}}_f - \rho_f \dot{\forall}_f \quad (4.14)$$

本文在求解對流項所採用的方式為一階上風法(UD)和中央差分法(CD)的混合式，因此對流通量可整理如下：

$$F_f^C = F_f^{UD} + \gamma (F_f^{CD} - F_f^{UD}) \quad (4.15)$$

其中 γ 值介於 0~1 之間，當 $\gamma=0$ 時為一階上風法、 $\gamma=1$ 時為中央差分法。上式右手邊第二項為前一個時間的值，故將其移至源項。

在一階上風法中 ϕ_f 的值取決於上游，當 $\dot{m}_f > 0$ 時，則 $\phi_f = \phi_p$ ；當 $\dot{m}_f < 0$ ，則

$$\phi_f = \phi_{nb}。$$

在中央差分法裡， ϕ_f 的值為相鄰網格的內差，表示如下：

$$\phi_f = (1-w)\phi_p + w\phi_{nb} \quad (4.16)$$

其中 w 為權重係數，下標 P 代表主格點的值，下標 nb 代表鄰近格點的值。

故可將(4.15)式整理成下列型式：

$$\begin{aligned} F_f^C = & \max(\dot{m}_f, 0)\phi_p - \max(-\dot{m}_f, 0)\phi_{nb} \\ & + \gamma \left\{ \dot{m}_f \left[(1-w)\phi_p^o + w\phi_{nb}^o \right] - \max(\dot{m}_f, 0)\phi_p^o + \max(-\dot{m}_f, 0)\phi_{nb}^o \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

其中上標 o 代表上一個時間的已知數，因此在計算上將已知數移進源項。

擴散項(Diffusion term)

將(4.10)式的擴散項，已由體積分轉為面積分後，將其離散可得：

$$F_f^D = \oint_S \mu_f \nabla \phi \cdot d\bar{S} \approx \sum_f \mu_f (\nabla \phi_f) \cdot \bar{S}_f = \sum_f F_f^D \quad (4.18)$$

其中 μ_f 代表面上的黏滯係數、 F_f^D 代表面上的擴散通量。針對非結構性網格而言，在擴散項的部分則利用 Over-Relax 的方法來近似其原來的面法向量。首先將 \bar{S}_f 表示如下：

$$\bar{S}_f = \bar{d} + (\bar{S}_f - \bar{d}) \quad (4.19)$$

上式等號右手邊第一項為正交向量、第二項為非正交向量。而正交向量 \bar{d} 的定義如下：

$$\bar{d} = \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \bar{S}_f} \bar{\delta}_{Pnb} \quad (4.20)$$

其中 $\bar{\delta}_{Pnb}$ 定義如(圖 4.4)所示。將(4.19)式和(4.20)式代入(4.18)整理可得：

$$F_f^D = \frac{\mu_f |\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \bar{S}_f} (\phi_{nb} - \phi_p) + \mu_f \nabla \phi_f^o \cdot (\bar{S}_f - \bar{d}) \quad (4.21)$$

其中上標 o 代表上一個時間的已知數。且上式右手邊第一項為正交項、第二項為

非正交項，在計算上將已知數非正交項移進源項。

源項(Source term)

源項的體積分可表示為：

$$\iiint_{\forall} q d\forall = q \cdot \Delta\forall \quad (4.22)$$

而源項的來源是壓力項。

壓力項的面積分知化簡近似：

$$\oiint_S P \cdot d\vec{S} \approx \sum_f P \cdot d\vec{S}_f = \nabla P \cdot \Delta\forall \quad (4.23)$$

線性代數式的整理

透過前面的推導，可將非穩態項、對流項、擴散項和源項合併後，即可得到下列的線性代數式：

$$A_p \phi_p = \sum A_{nb} \phi_{nb} + Q \quad (4.24)$$

$$\text{其中 } A_p = \sum A_{nb} + \rho \frac{\Delta\forall}{\Delta t} \quad (4.25)$$

$$A_{nb} = \frac{\mu_f |\vec{S}_f|^2}{\delta_{Pnb} \cdot \vec{S}_f} + \max(-\dot{m}_f, 0) \quad (4.26)$$

$$Q = \sum_f \left\{ -\left[\gamma (F_f^{CD} - F_f^{UD}) \right]^o + \mu_f \nabla \phi_f^o (\vec{S}_f - \vec{d}) \right\} - \nabla P^o \cdot \Delta\forall + \rho \frac{\Delta\forall}{\Delta t} \phi^o \quad (4.27)$$

4.3 PISO 演算法

在前面介紹了動量方程式的求解方式，但是在物理上其實未滿足連續方程式。因此為了滿足連續方程式，必須透過壓力和速度的關係式來加以修正。到目前為止，已發展出幾種壓力和速度的耦合方式。因本文流場為非穩態，所以採用 PISO 演算法來修正動量方程式所得到的壓力和速度，如此一來即可滿足連續方程式。使用 PISO 演算法的好處是，此解法不需經由反覆的疊代，因此可以節省很多的計算時間。PISO 分為一個的預測步驟和兩次修正步驟。

預測步驟

將(4.24)式中 Q 裡的壓力項提出表式成下式：

$$A_p \bar{V}_p^* = \sum A_{nb} \bar{V}_{nb}^* + (S - \nabla P_p^* \Delta \nabla) \quad (4.28)$$

利用現有之壓力 P_p^* 即可得到速度 \bar{V}_p^* ，表示如下：

$$\bar{V}_p^* = \bar{H}_p^*(\bar{V}^*) - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p^* \quad (4.29)$$

其中 $\bar{H}_p^* = \frac{\sum A_{nb} \bar{V}_{nb}^* + S}{A_p}$ ， S 為不包含壓力項的 Q 。

類似的，控容面上之速度和壓力關係式可透過(4.29)式表式成：

$$\bar{V}_f^* = \bar{H}_f^* - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f^* \quad (4.30)$$

$$\text{其中 } \bar{H}_f^* = \bar{V}_f + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \bar{\nabla} P_f \quad (4.31)$$

將(4.31)式代入(4.30)式，因此控容面上的速度和壓力關係式如下：

$$\bar{V}_f^* = \bar{V}_f + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \bar{\nabla} P_f - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f^* \quad (4.32)$$

其中上標"—"表示主格點 p 和控容面 f 相鄰之格點 nb 內差所得，如下：

$$\bar{\nabla} P_f = w_p \nabla P_{nb} + (1 - w_p) \nabla P_p \quad (4.33)$$

$$\bar{V}_f = w_p \bar{V}_{nb} + (1 - w_p) \bar{V}_p \quad (4.34)$$

其中 w_p 為權重因子(weighting factor)

而 $\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f$ 的值為主格點和相鄰格點取平均，如下：

$$\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_{nb} \right] \quad (4.35)$$

由前面介紹的空間守恆定理知，可將 ALE 座標的連續方程式簡化為和網格速度無關之連續方程式，因此面上的質量流率可改寫為：

$$\begin{aligned}
\dot{m}_f^* &= \rho_f \bar{V}_f^* \cdot \bar{S}_f \\
&= \rho_f \bar{V}_f \cdot \bar{S}_f - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \left(\frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \bar{S}_f} \right) \left[(P_{nb} - P_p) - \nabla P_f \cdot \bar{\delta}_{Pnb} \right]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

第一次修正步驟

在前一個步驟已求得速度 \bar{V}_f^* 和壓力 P^* 仍然尚未滿足連續方程式，因此接下來必須做第一次的修正。在此假設第一次修正後的速度為 \bar{V}^{**} 、壓力為 P^{**} ，故第一次修正中，速度和壓力的關係如下：

$$\bar{V}_p^{**} = \bar{H}_p^*(\bar{V}^*) - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p^{**} \tag{4.37}$$

其中 $\bar{V}^{**} = \bar{V}^* + \bar{V}'$ ； $P^{**} = P^* + P'$ ，而上標“'”即為所要修正的修正量。

將(4.37)式與(4.29)式相減，可得到速度修正量和壓力修正量的關係式：

$$\bar{V}_p' = - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p' \tag{4.38}$$

上述的方程式是在主格點上推出，亦其可以使用在每個主控面上。

$$\bar{V}_f' = - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \tag{4.39}$$

因此第一次修正後的流量值可以表式成下列：

$$\begin{aligned}
\dot{m}_f^{**} &= \dot{m}_f^* + \dot{m}_f' = \dot{m}_f^* + \rho_f \bar{V}_f' \cdot \bar{S}_f \\
&= \dot{m}_f^* - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot \bar{d} - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot (\bar{S}_f - \bar{d}) \\
&= \dot{m}_f^* - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \bar{S}_f} (P_{nb}' - P_p') - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot (\bar{S}_f - \bar{d})
\end{aligned} \tag{4.40}$$

為了滿足質量守恆，因此對於所有面上流量的總和應該為 0，表示如下：

$$\sum_f \dot{m}_f^{**} = \sum_f \dot{m}_f^* + \sum_f \dot{m}_f' = 0 \tag{4.41}$$

最後將(4.40)式代入(4.41)式，可整理成線性代數式：

$$A_p P_p' = \sum_f A_{nb} P_{nb}' + S_{P1}^1 + S_{P2}^1 \quad (4.42)$$

其中上標”1”代表第一次修正，而其它定義如下所示：

$$A_{nb} = \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \bar{S}_f} \quad (4.43)$$

$$A_p = \sum_f A_{nb} \quad (4.44)$$

$$S_{P1}^1 = -\sum_f \dot{m}_f^* \quad (4.45)$$

$$S_{P2}^1 = \sum_f \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot (\bar{S}_f - \bar{d}) \quad (4.46)$$

第二次修正步驟

在第一次的修正步驟中，得到了第一次修正過後的速度 \bar{V}^{**} 和壓力 P^{**} 。在第二次修正步驟中，如同第一次修正步驟的方法，因此速度和壓力的關係式如下：

$$\bar{V}_p^{***} = \bar{H}_p^{**}(\bar{V}^{**}) - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p^{***} \quad (4.47)$$

將(4.47)與(4.37)相減，可得到速度修正量和壓力修正量的關係式：

$$\bar{V}_p'' = \bar{H}_p'(\bar{V}') - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p'' \quad (4.48)$$

其中 $\bar{V}'' = \bar{V}^{***} - \bar{V}^{**}$ 、 $\bar{V}' \equiv \bar{V}^{**} - \bar{V}^*$ 、 $\nabla P'' = \nabla P^{***} - \nabla P^{**}$ ，另外 $\bar{H}_p' = \bar{H}_p^{**} - \bar{H}_p^*$

又 $\dot{m}_f'' = \dot{m}_f^{***} - \dot{m}_f^{**}$ ，因此質量流率的修正量 \dot{m}_f'' 可表示如下：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f'' &= -\rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \cdot \bar{S}_f + \rho_f \frac{\sum_f A_{nb} \bar{V}_{nb}'}{A_p} \cdot \bar{S}_f \\ &= -\rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \bar{S}_f} (P_{nb}'' - P_p'') - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \cdot (\bar{S}_f - \bar{d}) + \rho_f \frac{\sum_f A_{nb} \bar{V}_{nb}'}{A_p} \cdot \bar{S}_f \end{aligned} \quad (4.49)$$

因為要滿足質量守恆，所以對於所有面上流量的總和應該為 0，表示如下：

$$\sum_f \dot{m}_f^{***} = \sum_f \dot{m}_f^{**} + \sum_f \dot{m}_f'' = \sum_f \dot{m}_f'' = 0 \quad (4.50)$$

將(4.49)式代入(4.50)式，整理後即可得到下列的線性代數式：

$$A_p P_p'' = \sum_f A_{nb} P_{nb}'' + S_{p1}^2 + S_{p2}^2 \quad (4.51)$$

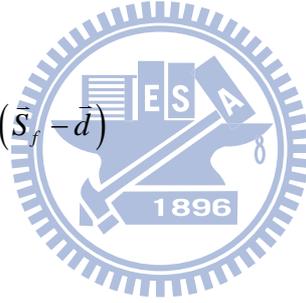
其中上標”2”代表第二次修正，而其它定義如下所示：

$$A_{nb} = \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{pnb} \cdot \bar{S}_f} \quad (4.52)$$

$$A_p = \sum_f A_{nb} \quad (4.53)$$

$$S_{p1}^2 = -\rho_f \left(\frac{\sum_f A_{nb} \bar{V}_{nb}'}{A_p} \right)_f \cdot \bar{S}_f \quad (4.54)$$

$$S_{p2}^2 = \sum_f \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \cdot (\bar{S}_f - \bar{d}) \quad (4.55)$$



4.4 邊界條件

出口流量邊界的速度計算

在計算壓力邊界上的速度則利用對流邊界條件(Convective Boundary Condition)求出，其數學式表示如下：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (4.56)$$

經由離散後可得下式：

$$\frac{\phi_b^n - \phi_b^o}{\Delta t} + u_c \frac{\phi_b^n - \phi_{nb}^n}{\Delta x} = 0 \quad (4.57)$$

其中上標 n 、 o 分別代表新跟舊的值，下標 b 、 nb 分別代表邊界跟相鄰的網格。

將(4.57)式整理如下：

$$\phi_b^n = \frac{\phi_b^o + C_n \phi_{nb}^n}{1 + C_n} \quad (4.58)$$

其中 $C_n = \frac{u_c \Delta t}{\Delta x}$ ， C_n 為 Courant number。

4.5 網格的移動

在移動網格中，網格的運動方式大致上可分為橢圓正交法、橢圓法、線性內差法【21】，而本文流場網格移動的方式即是根據線性內差法。在本文中分析之流固耦合例子為兩個，因此分別將兩種流場網格依不同情況需求而分割成數個區塊(見圖 4.5 和圖 4.6)。(圖 4.7)顯示出在流場邊界發生變化時，依據不同區塊定義出線性內差方式移動的網格示意圖。

4.6 流固耦合演算流程

透過前面介紹的結構及流場計算方式後，在此將針對流固耦合演算過程做說明：

步驟一：利用 CSD 程式求解受流體外力負載的結構體，並將計算的位移回傳到流體，進而更新流場網格。

步驟二：利用 CFD 程式求解流場之速度場、壓力、剪力，再將壓力和剪力給定於流體和固體的接觸面上。

重複步驟一和步驟二，到達給定的求解時間即可停止，演算流程可參考(圖 4.8)。

第五章、結果與討論

5.1 固力分析

本文在計算固體力學時將求解方式分成兩大類，此兩類解法都分別利用上一章所提到之求解 ODE 的方法來測試。因此在本節所要探討的是不同解法的比較、網格精準度分析和自然頻率與阻尼。透過以上之分析後，即可選用較佳之計算方法和計算流體力學做結合來探討流固耦合之問題。

5.1.1 求解方式分析

在此節主要針對不同解法的差異性做比較，藉由上一章節中介紹到本文使用之求解 ODE 的方法可分為龍格-庫塔法或預測修正法。測試的例子分為兩個，分別為單點受力之懸臂樑(圖 5.1)和均佈受力之兩端固定樑(圖 5.2)，至於結構體材料性質和幾何尺寸列於表(一)。在結構體之外力負載分為集中受力 F 為 200 牛頓(N)和均佈受力 w 為 100 N/m^2 ，在分析中將結構體切割成 40×4 、 80×8 兩種網格做測試，因此以下將介紹兩類解法使用不同方式求解。

直接解法

此類是將結構體控制方程式整理成一階聯立 ODE 之型式，即可直接使用龍格-庫塔法或預測修正法求解。首先利用此兩種解法去求解單點受力之懸臂樑問題，設定結構體之外力負載為 F 、結構阻尼係數 c 為 $2000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ，此時在這個條件下結構體尾端處即(圖 5.1)的 A 點可達穩態之最大位移。(圖 5.3)是在不同解法下懸臂樑 A 點隨時間變化之位移圖，由圖觀察得知，在使用龍格-庫塔法中，端點之位移隨時間慢慢的趨於一個定值即達穩態，而在預測修正解法中，可看出在時間 6 秒之後開始產生上下振盪，之後便迅速的發散導致無法繼續求解。因此為了能使用預測修正解法求解，必須將阻尼係數提高，經由測試發現到在 $12000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 阻尼下才不會導致在求解過程中發散如(圖 5.4)，另外在圖中比較可看出阻尼越大要達穩態的時間越久。

同樣的利用此兩種方法求解均佈受力之兩端固定樑，設定結構體之外力負載

為 w 、結構阻尼係數 c 為 $10000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ，此時在結構體的中心位置處即(圖 5.2) 的 A 點可得最大位移。由(圖 5.5)可知兩種解法完全吻合，不需像上一個測試例子中的預測修正解法只能在高阻尼下求解，另外在此所給定之阻尼係數和上一個分析例子不同，將會於後面小節詳細介紹。

經由以上兩個例子分析後，可知預測修正解法在直接求解的方式中較容易產生不穩定，另外透過網格測試發現，隨著網格數的增加不但不能改善預測修正解法的發散現象，相對的在粗網格時可達收斂之阻尼，隨著網格加密而產生發散(見圖 5.6 和圖 5.7)，如欲達收斂，必須要在更高之阻尼下才可行。相較之下，龍格-庫塔法能在任意阻尼、網格下為較合適之求解方式，此外以上所使用之時間步階為 0.001 sec 。

虛擬時間法

第二種求解方式是將結構體控制方程式加入一項對虛擬時間微分項即 $\frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau}$ ，而將原始方程式透過上一章方法整理到等號右邊，便可得到如同直接解法之聯立 ODE 後，再透過龍格-庫塔法或預測修正法求解。由於本文在計算固體力學中所使用的求解方式為顯性的龍格庫塔法和顯性與隱性並用的預測修正法，所以在計算上較受限於時間步階大小，因此在求解中將以虛擬時間步階替代真實時間步階，如此一來便可使用較大真實時間步階去計算。在以下測試的例子所設定之虛擬時間步階為 0.001 sec 而時間步階為 0.01 sec ，首先第一個例子為單點受力懸臂樑，當設定之外力負載為 F 和阻尼係數 c 為 $2000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 下，由(圖 5.8)可知此兩種解法完全重疊並不會產生無法收斂之情況。同樣的將測試之例子改成均佈受力之兩端固定樑，設定之外力負載為 w 和阻尼係數 c 為 $10000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 下，由(圖 5.9)得知在兩種解法下的位移變化也完全重疊。

經由上面之分析後，得知龍格-庫塔法和預測修正法皆可適用於此類解法中，不但可在任意阻尼和網格下計算，更重要的是可使用較大之真實時間步階。因時間步階會隨著網格大小而須作調整，因此當分析之結構體幾何尺寸越小所需要的

時間步階也須更小，這將會嚴重影響到計算所花費的時間，由此可證明加入對虛擬時間微分項的求解方式為較佳之計算方法。

5.1.2 網格測試

此節主要針對在不同網格密度下之精準度分析，藉由單點受力之懸臂樑來做測試，而此測試例子在自由端尾端的位移理論值【22】如下：

$$d_y = -\frac{FL^3}{3EI} \quad (5.1)$$

透過上式，將外力 F 為 200(N) 代入可得理論之位移 $d_y = -0.08$ m。以下將測試五種不同網格大小，由疏到密分別為 20x2、40x4、80x8、160x16 和 200x20(圖 5.10)。計算之位移和誤差列於表(三)，由(圖 5.11)可得知，在網格數為 80x8 時誤差在 1% 左右，已在可接受之範圍，將網格再加密時可看出最後兩組之誤差皆在 1% 以下且差距非常小。

5.1.3 自然頻率和阻尼

自然頻率

結構體處於自由振動情況下時，單位時間內往復的次數稱為自然頻率。在一般情況下對於最低的那個自然頻率最為重要，其中自然頻率又分為循環頻率即一般所稱之頻率 f Hz 和角頻率 ω rad/sec。而兩者之間的關係如下：

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.2)$$

對於一個均勻樑而言，可藉由 Bernoulli-Euler 樑理論分析，求得樑之自然頻率，而自然頻率會隨著樑的邊界條件不同而有差異性。因此在本文中分析之例子分為兩種：第一種為懸臂樑，其第一振動模態之自然角頻率【23】可由下式得知：

$$\omega = 3.516\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (5.3)$$

其中 m 代表單位長度的質量、 I 代表面積慣性矩。而 I 可表示如下：

$$I = \frac{db^3}{12} \quad (5.4)$$

第二種為固定樑，其第一振動模態之自然角頻率【23】如下：

$$\omega = 22.373 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (5.5)$$

透過(5.3)和(5.5)式即可得本文模擬之懸臂樑和固定樑的第一自然角頻率為 0.315 rad/sec 和 2 rad/sec，再藉由(5.2)式即可得到結構體之振動頻率和週期。首先探討懸臂樑之振動頻率和週期，而使用的網格數皆為 80x8。在測試中將懸臂樑前 100 秒時受限於外力負載而達穩態，之後將外力移去後並將阻尼係數設為零，即開始產生自由振動(圖 5.12)，由圖可得振動頻率和週期分別為 0.049 Hz 和 20.1 sec，比較理論之頻率和週期為 0.05 Hz 和 20 sec 可發現幾乎符合。再觀察兩端固定樑之例子，同樣的由(圖 5.13)可觀察出自由振動之頻率和週期為 0.3 Hz 和 3.3 sec，和理論之頻率和週期為 0.32 Hz 和 3.1 sec 比也很相近。

阻尼

在一般現實生活中之物體皆具有阻尼而結構阻尼是指結構內部造成之能量消耗，因此在計算中通常會加入阻尼項。一般常以阻尼比來探討其運動之形態，當阻尼比為 1 代表此系統之阻尼具臨界阻尼，此為評斷是否會發生振動現象之依據，所以當阻尼比大於 1 時即不會產生振動。因此以下將探討低阻尼和臨界阻尼系統之運動，而阻尼比定義如下：

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} \quad (5.6)$$

其中 c_c 代表臨界阻尼係數、 ω 代表自然角頻率。

在此將探討其阻尼比為 0.05、0.1、0.25、0.5、1 時之運動行為，由(5.6)式可得在不同阻尼比相對應之阻尼係數，列於表(二)。(圖 5.14)和(圖 5.15)分別為懸臂樑和兩端固定樑在不同阻尼下的運動方式，由圖很明顯可知當阻尼比越大時其振幅衰退越快而阻尼比達 0.5 之後振動較不明顯。另外在低阻尼結構系統下其自然角頻率將表示為：

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (5.7)$$

5.1.4 疊代次數和計算時間分析

前面已討論過不同解法之比較，在此將更進一步探討疊代收斂性。透過網格測試後，可知在網格 80x8 已達可接受之準確度，因此以下將以這組網格來做分析。由於在虛擬時間法中必須在每個時階下達收斂，當時間步階越大所需之疊代次數將越多。因此以下將比較龍格-庫塔法和預測修正法在每個時階下之疊代次數，在真實時間步階則分為 0.01、0.1 sec 而虛擬時間步階則皆為 0.001 sec。(圖 5.16)和(圖 5.17)即為懸臂樑在兩種時間步階下求解之疊代次數圖，在計算中最大疊代次數設定為 200 次，由觀察得知在時間步階為 0.01 sec 下龍格-庫塔法在尾端會產生些微震盪，因此相較於預測修正法，需較多的步進次數。當時間步階為 0.1 sec 時，龍格-庫塔法需使用更小之虛擬時間步階才可計算，顯然可知預測修正法為較佳之解法。另外需注意的是當虛擬時間步階和時間步階差距越大時，所設定之最大疊代次數將要越多，否則可能會導致在每個時階下未收斂之情形。(圖 5.17)可看出疊代次數幾乎一直維持在所設定之最大 200 次即屬於上面所提之情況，這將會影響到其中間過程的位移反應，對於穩態問題而言則需更多的步進次數達穩態解，不過若是為非穩態問題時將會嚴重影響到求解的值。此外在直接解法中也同樣需在每個時階下收斂又因為是在真實時間下疊代，所以需要的疊代次數相較於虛擬時間法中少很多，這表示在每一個時階下所花費之計算時間較少。以上之比較將列表於表(四)中，而 CPU time 的計算是在使用 Pentium(R) Dual-Core CPU E6500 2.93GHz 的處理器和 2G 記憶體下的電腦所分析之數據。

5.2 與 ANSYS 分析比較

ANSYS 為一套商業化的有限元素分析軟體，其應用範圍相當的廣泛，包含固體力學、流體力學、電磁學及跨領域的耦合場，因此在國內外的學界和工業界均有很高的普遍性。在本節中將重點擺在應力上，將利用 ANSYS 軟體模擬結果與本文計算之結果做比較，而在 ANSYS 分析上選用的固體元素為 PLANE42。因在應力分析上會隨網格大小的不同而差異較大，所以兩者皆選用 200x20 的相同

分割數來做比較。(圖 5.18)分別為 ANSYS 和本文計算所得到的單點受力之懸臂樑應力圖，由圖比較可發現應力分佈的趨勢大致上極為類似並可觀察到最大彎曲應力(即 σ_{xx})出現在上下表面，此現象完全符合其理論的分析。不過在 Y 方向應力圖(即 σ_{yy})相較於其他兩個應力圖的最大、最小值卻有較大的差異性，這是因為在 ANSYS 分析中，受集中力 F 的點會產生應力奇異性即表示在該點的應力會趨於無窮大，因此在該點的應力值會隨著分割的元素更密而越大。又(圖 5.19)分別為 ANSYS 和本文計算的均佈受力之兩端固定樑應力圖，由比較可觀察出為相似之結果，另外在中心位置之的位移理論值 【22】可由下式得知：

$$d_y = -\frac{wL^4}{384EI} \quad (5.8)$$

將 w 為 100 N/m^2 代入可得理論位移值 $d_y = -6.25 \times 10^{-3} \text{ m}$ ，而本文計算之位移為 $-6.853 \times 10^{-3} \text{ m}$ ，和理論解有 9.65% 的誤差。不過由(圖 5.19)中可得知 ANSYS 分析之最大位移量為 $6.852 \times 10^{-3} \text{ m}$ ，和本文之計算結果相吻合。

5.3 不同形式外力負載之懸臂樑

在流固耦合中流體對結構體作用的力為非均勻性之分佈，因此本節將針對三種不同型式負載的懸臂樑做測試，而在這三種分佈力中有均勻性和非均勻性如(圖 5.20)。對於此三種分佈力在懸臂樑尾端頂點 A 之位移理論值 【22】分別為：

$$d_y = -\frac{wL^4}{8EI} \quad (5.9)$$

$$d_y = -\frac{w_o L^4}{30EI} \quad (5.10)$$

$$d_y = -\frac{w_o L^4}{72EI} \quad (5.11)$$

其中(5.9)式為均勻分佈力如(圖 5.20 a)、(5.10)式為線性遞減的分佈力如(圖 5.20 b)、(5.11)式為二次曲線遞減的分佈力如(圖 5.20 c)。透過(5.9)、(5.10)、(5.11)可得理論位移值分別為 -0.3 m 、 $-8 \times 10^{-2} \text{ m}$ 、 $-3.333 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，而本文計算在達穩態之位移值分別為 -0.303 m 、 $-8.083 \times 10^{-2} \text{ m}$ 、 $-3.373 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，因此可得本文計算與理論值的

誤差皆在 1% 左右。(圖 5.21) 為此三種受力方式之懸臂樑在達穩態時的應力圖，由觀察可發現在 Y 方向應力圖中因作用在樑表面的力改變，其受力較集中的地方將會出現更大的壓應力，另外最大彎曲應力也隨著受力不同而改變。

5.4 流固耦合分析

在本節將探討結構體和流體互相作用的現象，透過流體的壓力和剪力作用在結構體表面，進而觀察其結構系統隨時間變化的反應。另外在流體方面會隨著結構之位移造成的流場幾何形狀改變，因而使流場和壓力場發生變化。透過前面之分析，本文在流固耦合中的固力方面，將使用虛擬時間法並搭配預測修正法求解，以達到固力和流力計算皆在相同時階下耦合。在流固耦合分析上，將分別探討兩個例子，第一個是流經彈性平板之管流(圖 5.22)、第二個是渦流致動之彈性平板(圖 5.23)。此外，根據 CFL 穩定性收斂條件，在計算固力中所使用的庫倫數可以定義如下：

$$C_n = \frac{c\Delta\tau}{\Delta x} \quad (5.12)$$

其中 $c = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$ 為波傳速度、 Δx 為網格的特徵長度。將波傳速度關係式代

入上式，即可得下式：

$$C_n = \frac{\sqrt{E/\rho(1-\nu^2)} \cdot \Delta\tau}{\Delta x} \quad (5.13)$$

在耦合計算中將設定之時間步階為 10^{-4} sec、虛擬時間步階為 10^{-6} sec，再透過(5.13)式，可得到以虛擬時間步階為準的庫倫數約為 0.1，但是在實際的時間步階時庫倫數則為 10。另外，在此分析中將不考慮結構阻尼，即表示結構阻尼係數 c 為零。

5.4.1 流經彈性平板之管流

在這問題中，彈性平板置於管道中間處且一端被固定住，透過管道入口流體流經平板而使平板產生振動，進而觀察其位移之變化。而平板之尺寸、性質和流體性質分別列於表(五)和表(六)，其中平板之厚度將分為兩種做測試。在網格方

面，流場網格數因平板厚度的不同分成 16160 和 16080 兩種，而結構體網格數則皆為 512，其中在結構厚度則切割成 8 格，另外在入口流速將分為固定流速和非固定周期性 sine 函數流速，以下將探討此兩種流速：

固定流速

在此本文將測試流速為 5、10、15 m/s 時平板自由端頂點隨時間變化之位移，若將流道高度設為特徵長度即可得此三種流速之雷諾數分別為 50、100、150。(圖 5.24 a)為平板厚度 0.2 m 時在不同雷諾數下的位移反應，由圖可知隨著流體的流動使平板產生左右振盪，當雷諾數越大時所振盪的幅度也越大，而振幅將會隨時間慢慢的衰退而停止擺動，其中又以雷諾數越大振幅衰退的速度越快。另外由 (5.2)、(5.3) 式可得平板之振動頻率為 21.55 Hz，觀察(圖 5.24 b~圖 5.24 d)可發現平板的振動頻率約為 21.83 Hz 與理論頻率有相似之結果。若將平板厚度改為 0.1(m)時即可得到相同之運動情形如(圖 5.25)，與(圖 5.24)比較可發現到隨著平板厚度的改變其振動頻率也跟著改變，其振動頻率約為 10.25 Hz 而理論頻率為 10.78 Hz，除此之外很明顯可看出隨著厚度減少其位移越大，而收斂之位移值將分別列於表(七)。由表(七)可知位移並未隨著雷諾數的增加而成比例增加，這是因為在作用在平板的壓差並不是和雷諾數的增加成比例關係。不過在相同雷諾數下，可發現位移隨平板厚度減少而增加的比例皆很相近。

周期性 sine 函數流速

另一個測試是將入口改成非固定周期性流速即 $U_{in} = 20\sin(2\pi t)$ ，在此流速之頻率 $f=1$ Hz，而兩種不同平板厚度的頻率分別為 21.55、10.78 Hz，且在最大流速為 20 m/s 時的雷諾數為 200。在非固定流速下，彈性平板因所受之流體力並非固定，而是非穩定週期性之外力，因此平板將隨著外力而呈現週期性擺盪。(圖 5.26 和圖 5.27)即分別為在平板厚度 0.2、0.1 m 時自由端頂點的位移反應，由圖可看出位移隨時間的變化而產生類似正弦波的週期性擺動，而在一個週期下又可發現因結構本身的振動頻率而產生的小振動，這是由於外力的作用頻率較結構本身的頻率小且又在無阻尼下所造成之現象，因此在這問題中的位移反應是由無阻尼結構

系統本身的自由振動反應，加上受外力引起的強迫振動反應所造成。觀察(圖 5.26 b 和圖 5.27 b)比較可知當平板厚度較小時其擺動的振幅也越大，而在每個週期下的振動次數也和理論頻率相似。在此入口速度的平板運動(不考慮結構本身的振動下)可由流場來分析，當入口為流進時表示此時平板左側處於高壓，將使平板向右擺動；當入口為流出時表示平板右側處於高壓，將使平板向左擺動，因此藉由此現象將造成平板週期性的往復運動。以上之情形可由(圖 5.28)和(圖 5.29)的壓力圖中觀察得到，另外觀察(圖 5.28)和(圖 5.29)的流線圖，可發現沿流動方向在平板背風面區會出現較多迴流。在這個例子中由於平板的擺動幅度皆很小，因此平板對於流體的影響非常有限，所以在流場方面較不易觀察出有變化發生。

5.4.2 渦流致動之彈性平板

在此測試例子中，將一彈性平板固定於一正方阻塊後方，當流體流經此正方阻塊產生的渦流逸散(vortex shedding)，此逸散為一非穩態現象，即渦流自阻塊後部上壁面及下壁面呈週期性的脫離，此即 Karman vortex street，因而使平板上下產生週期性壓差，造成平板的擺盪。彈性平板性質和流體性質分別列於表(八)和表(九)，而使用的流體網格數和結構體網格數分別為 62376 和 384，其中在結構厚度切割成 6 格。在入口流速則分為 17、31.5、46.3 cm/s 來測試，若將阻塊厚度當作特徵長度即可得相對應之雷諾數為 110、204、300。(圖 5.30)即為在不同雷諾數下平板尾端頂點的位移反應圖，由圖比較得知在不同雷諾數下的位移反應有很大的差異，而擺動的頻率也不同。

首先在雷諾數為 110 時，觀察(圖 5.31)可發現在阻塊後面呈現一個完全封閉的尾流區，而上下平板出現對稱之渦流，因此平板上下幾乎沒有壓差產生。這表示此雷諾數太低而未達渦流非對稱現象之條件，因此平板的位移非常的微小且幾乎看不出有變化發生。一般而言渦流逸散開始於雷諾數約 50，此處雷諾數已達 110，而仍未有渦流逸散現象產生，這可能是由於其尾部平板的影響，另外可能是管道流中管壁的影響，抑制了渦流逸散的發生，此抑制的現象需要進一步加以

探討而非本研究的主題。

當雷諾數為 204，在平板上下出現不對稱之渦流，因此平板受到上下的壓差而產生變形。觀察(圖 5.30 b)可看出，一開始平板擺幅很小幾乎呈水平線，之後開始出現週期性的上下擺盪，其頻率約為 3.76 Hz(見圖 5.30 c)並且隨時間慢慢趨於擺幅較穩定之擺動。平板前兩組頻率分別為 0.61、3.8 Hz，其中第一共振頻率可由(5.3)式得到，又第二共振頻率可由下式知【23】：

$$w = 22.035 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (5.14)$$

因此可知在此雷諾數下造成的平板擺動頻率與平板本身的第二頻率很接近。又平板之運動將造成流場內部的壓力發生改變，(圖 5.32 a~ 圖 5.32 e)為一個週期下之壓力圖，當平板往下擺動時，可看出在平板的下方壓力大、上方壓力較小，而當平板往上擺動時，此時平板上方壓力大、下方壓力較小。而平板向上、向下擺動所造成的高低壓可由迎風面和背風面的物理現象來解釋，迎風面壓力大而背風面壓力小。另外觀察(圖 5.33)可知當平板有較大擺動幅度時，平板上下方所產生的渦流較大。(圖 5.34)列出在雷諾數 204 時，一個週期下平板隨時間變化而擺動的方式圖，由圖看出其擺動方式類似於第二模態之振動方式，之所以會造成這原因可能是由於平板擺動頻率與平板第二自然頻率相近。

在雷諾數為 300 時，觀察(圖 5.30 d)可發現在此雷諾數下較無固定之擺動頻率，而振幅隨時間越擺越大且呈現不規律擺盪。隨著擺動幅度越大，其對流場的影響將越大，(圖 5.35)為平板擺盪一週期之壓力圖，觀察(圖 5.35 b 和圖 5.35 d)為擺動幅度較大之情況，同樣可明顯觀察到在平板擺動之迎風面為高壓區、背風面為低壓區。再由(圖 5.36)可發現在擺動幅度大時，在平板背風面易產生較大的渦流(見圖 5.36 b 和圖 5.36 d)。(圖 5.37)為雷諾數 300 時平板隨時間變化之運動方式，與(圖 5.34)比較可看出為兩種不同的振動模態方式。

另外再觀察(圖 5.30)可發現，在耦合過程中平板的擺動將使流場發生改變，擺動越大造成的影響也越大。此現象可由平板的位移反應看出，位移會隨著時間

而越大，這表示流體受到平板影響下將使流體作用在平板的力比未耦合時還大。



第六章、結論

在本文研究中可將結果歸納成以下幾點:

- 發展一非結構性網格有限體積法應用於結構力學中，且已能有效運用於典型的二維懸臂樑和固定樑的問題。
- 本文在計算固力時，將求解方式分成直接解法和虛擬時間法兩類，經由測試後可發現在直接解法中藉由預測修正法求解時只能在高阻尼下進行，並且隨著網格加密而需越大之阻尼。相較之下，虛擬時間法能完全適用於龍格庫塔法和預測修正法，且不受限於阻尼和網格大小，為較佳之計算方式。
- 在虛擬時間法中當使用之虛擬時間步階和真實時間步階差距越大時，要達收斂條件所需的疊代次數將更多。另外在虛擬時間方法中比較龍格庫塔法和預測修正法求解時，預測修正法能較快的達收斂並且相較於龍格庫塔法可使用較大之虛擬時間步階。
- 本文研究之數值方法所分析結果在位移、自然頻率與理論解非常接近，因此可顯示出此計算方法具相當程度的準確性。另外也與 ANSYS 比較，在應力分析中可得相似之趨勢分佈。
- 在流固耦合計算中，固力使用的時間步階受限於結構體的幾何和性質，如以直接解法來耦合，將造成兩者在計算時間上在無法一致，因此為了改善此現象，可藉由虛擬時間法方式求解，便可使流體和固體在相同時階下做耦合分析。
- 在耦合分析中，渦流致動之彈性平板問題為較大變形的位移，因此在分析上應考慮以非線性應變來分析，以提高計算之準確性。

參考文獻

- 【1】 Onate, E., Gevera, M., Zienkiewicz, O.C., “An finite volume method format for structural mechanics”, International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 37, 181-201, 1994.
- 【2】 Bailey, C., Cross, M., “A finite volume procedure to solve elastic solid mechanics problems in three dimensions on an unstructured mesh”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 38, 1757-1776, 1995.
- 【3】 Taylor, G.A., Bailey, C., Cross, M., “Computational solid mechanics using a vertex-based finite volume method”, In F. Benkhaldoun R.Vilsmeier and D. Hanel, editors, Finite Volumes for Complex Applications II: Problems and Perspectives, page 507-515, 1999.
- 【4】 Xia, G.H., Zhao, Y., Yeo, J.H., Lv, X., “A 3D implicit unstructured-grid finite volume method for structural dynamics”, Computational Mechanics, 40, 299-312, 2007.
- 【5】 Slone, A.K., Pericleous, K., Bailey, C., Cross, M., “Dynamic fluid–structure interaction using finite volume unstructured mesh procedures”, Computers and Structures, 80, 371-390, 2002.
- 【6】 Lv, X., Zhao, Y., Huang, X.Y., Xia, G.H., Su, X.H., “A matrix-free implicit unstructured multigrid finite volume method for simulating structural dynamics and fluid–structure interaction”, Journal of Computational Physics, 225, 120-144, 2007.
- 【7】 Xia, G., Lin, C.L., “An unstructured finite volume approach for structural dynamics in response to fluid motions”, Computers and Structures,

86,684-701,2008.

- 【 8 】 Demirdzic, I., Muzaferija, S., Peric, M., “Benchmark solutions of some structural analysis problems using finite volume method and multigrid acceleration”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, 1893-1908, 1997.
- 【 9 】 Wheel, M.A., “A finite volume method for analysing the bending deformation of thick and thin plates ”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 147, 199-208, 1997.
- 【 10 】 Demirdzic, I., Muzaferija, S., “Finite volume method for stress analysis in complex domains.”, International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 37, 3751-3766, 1994.
- 【 11 】 Wheel, M.A., “A geometrically versatile finite volume formulation for plane strain elastostatic stress analysis ”, The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 31, 111-116, 1996.
- 【 12 】 Fallah, N., “A cell vertex and cell centred finite volume method for plate bending analysis”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193, 3457-3470, 2004.
- 【 13 】 Souli, M., Ouahsine, A., Lewin, L. “ALE formulation for fluid-structure interaction problems”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, 659-675, 2000.
- 【 14 】 Gluck, M., Breuer, M., Durst, F., Halfmann, A., Rank, E., “Computation of fluid–structure interaction on lightweight structures”, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 89, 1351-1368, 2001.

- 【15】 Hubner, B., Walhorn, E., Dinkler, D., “A monolithic approach to fluid–structure interaction using space–time finite elements”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193, 2087-2104, 2004.
- 【16】 陳俊佑，“壓電無閥式微幫浦流固耦合分析”，國立交通大學機械工程所，碩士論文，民國 98 年。
- 【17】 陳信宏，“雙壓電致動器幫浦之流固耦合分析”，國立交通大學機械工程所，碩士論文，民國 99 年。
- 【18】 Hornbeck, R. W., Numerical of Methods , Quantum, New York, 1975.
- 【19】 Jameson, A., “Time dependent calculations using multigrid, with applications tounsteady flows past airfoils and wings”, AIAA Paper, 91-1596, 1991.
- 【20】 Demirdzic, I., Peric, M., “Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow”, International Journal for Numerical Method in Fluids, Vol. 8, 1037-1050, 1988.
- 【21】 Sternel, D.C., Schafer, M., Heck, M., Yigit, S., “Efficiency and accuracy of fluid-structure interaction simulations using an implicit partitioned approach”, Computational Mechanics, 43, 103-113, 2008.
- 【22】 Fenner, Roger T., Mechanics of Solids , Blackwell Scientific, Boston, 1989.
- 【23】 劉晉奇，褚晴暉，有限元素分析與 ANSYS 的應用工程，滄海書局，台中，民國九十五年。

表(一)結構體的材料性質和幾何尺寸【6】

楊氏係數 Young's modulus (MPa)	蒲松比 Poisson's ratio	密度(kg/m^3)
E	ν	ρ
10	0	2600

長度(m)	厚度(m)	深度(m)
L	b	d
20	2	1

表(二)不同阻尼比相對應之阻尼係數

阻尼比	懸臂樑 阻尼係數($N \cdot s/m$)	兩端固定樑 阻尼係數($N \cdot s/m$)
0.05	163.7	1041.4
0.1	327.3	2082.8
0.25	818.3	5207
0.5	1636.5	10414
1	3273	20828

表(三)在不同網格數下之位移和誤差百分比

網格數	位移(m)	誤差(%)
20x2	-5.359×10^{-2}	33.01
40x4	-7.809×10^{-2}	2.39
80x8	-8.081×10^{-2}	1.01
160x16	-8.063×10^{-2}	0.79
200x20	-8.057×10^{-2}	0.71

表(四) 在不同時間步階下比較計算時間、步階次數和使用之虛擬時間步階

時間步階(sec)		Runge-Kutta Method	Predictor-Corrector Method
0.001 (直接解法)	CPU time	3 分 59 秒	X
	步階次數	48349	
	虛擬時間步階	無	
0.01 (虛擬時間法)	CPU time	5 分 04 秒	5 分 01 秒
	步階次數	6062	5016
	虛擬時間步階	0.001	0.001
0.1 (虛擬時間法)	CPU time	10 分 01 秒	2 分 15 秒
	步階次數	2117	597
	虛擬時間步階	0.0001	0.001

表(五) 流經彈性平板之管流的結構參數【14】

楊氏係數 Young's modulus (MPa)	蒲松比 Poisson's ratio	密度(kg/m^3)
E	ν	ρ
3500	0.32	1200

長度(m)	厚度(m)	深度(m)
L	b	d
1.6	0.2 和 0.1	1

表(六) 流經彈性平板之管流的流體參數【14】

黏滯係數 viscosity($kg/m\cdot s$)	密度(kg/m^3)
μ	ρ
0.2	1

表(七) 在不同雷諾數和平板厚度下之位移結果

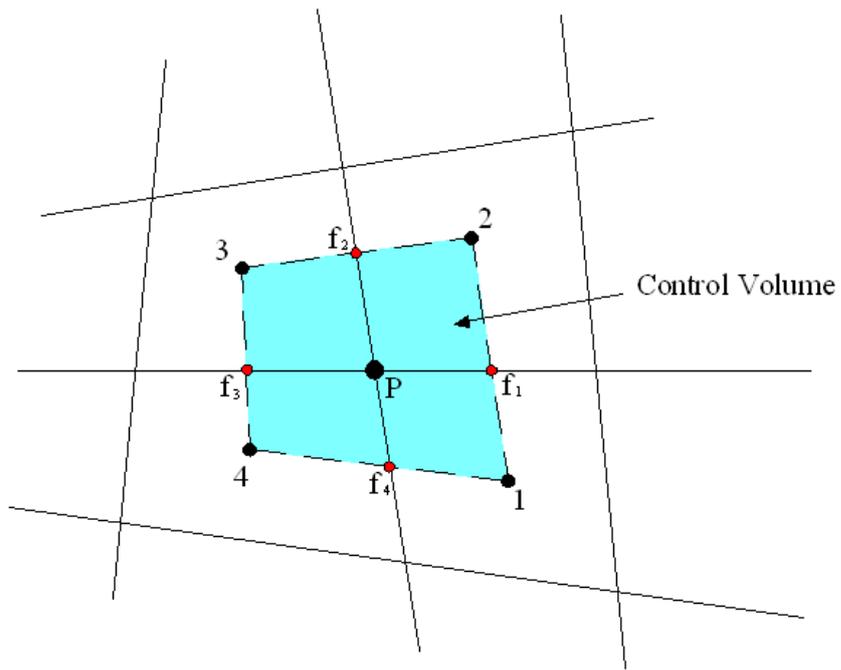
雷諾數(Re)	平板厚度 0.2m	平板厚度 0.1m
	位移(m)	位移(m)
50	2.406×10^{-4}	1.617×10^{-3}
100	8.645×10^{-4}	5.766×10^{-3}
150	1.856×10^{-3}	1.287×10^{-2}

表(八) 渦流致動之彈性平板的結構參數【7】

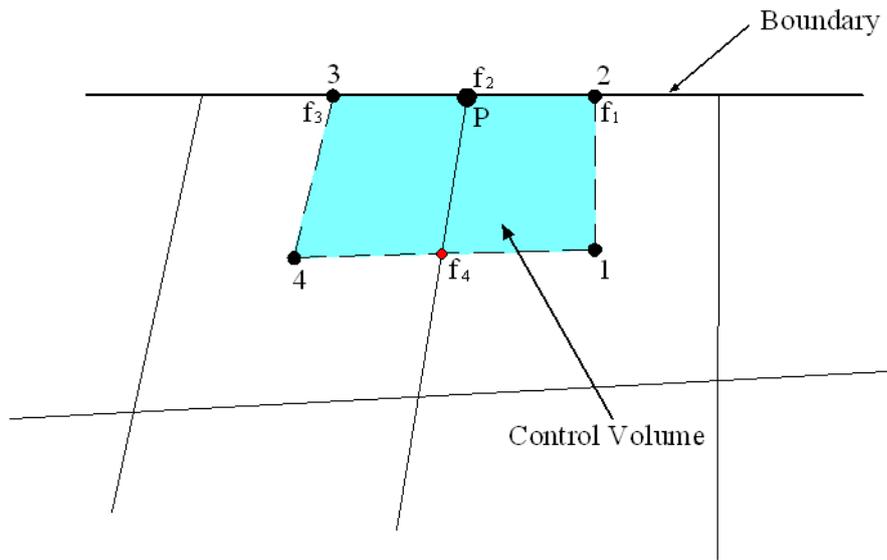
楊氏係數 Young's modulus ($g/cm\cdot s^2$)	蒲松比 Poisson's ratio	密度(g/cm^3)
E	ν	ρ
2×10^6	0.35	2

表(九) 渦流致動之彈性平板的流體參數【7】

黏滯係數 viscosity($g/cm\cdot s$)	密度(g/cm^3)
μ	ρ
1.82×10^{-4}	1.18×10^{-3}



(a) 內部點



(b) 邊界點

圖 3.1 以網格頂點為控制體積之示意圖

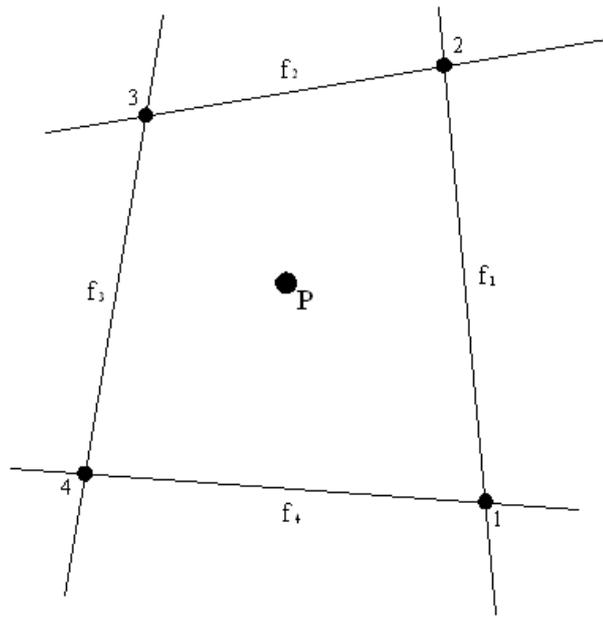


圖 3.2 位移梯度計算示意圖

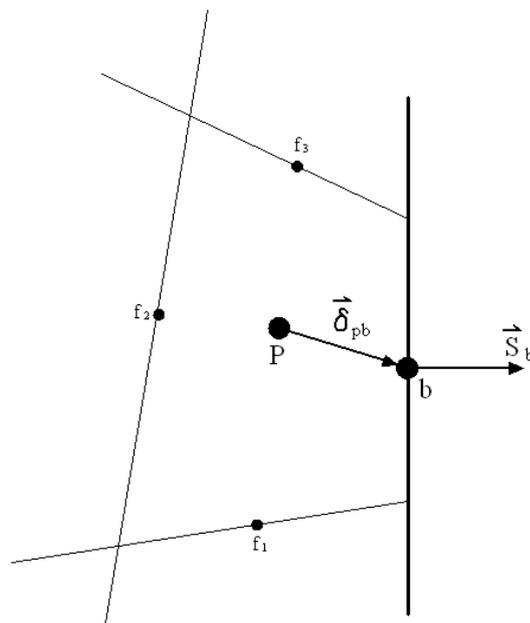


圖 3.3 邊界位移梯度計算示意圖

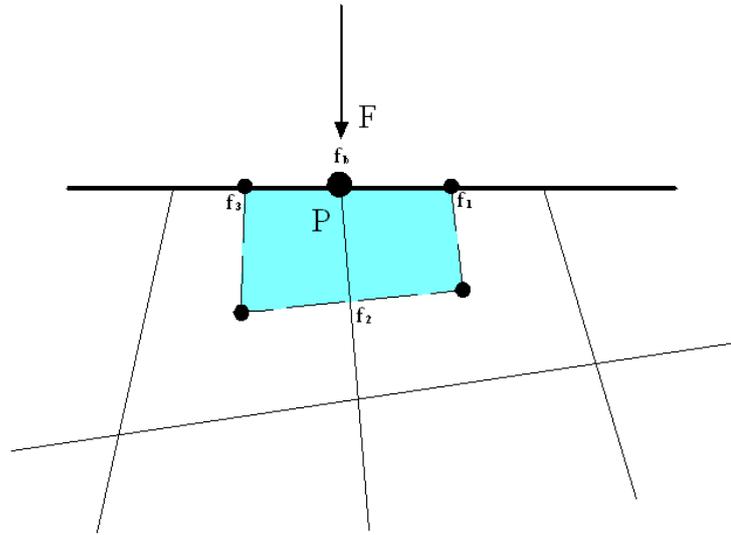
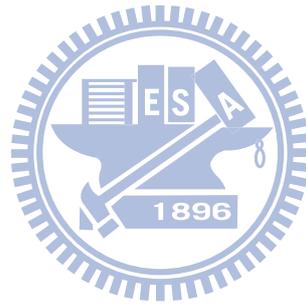


圖 3.4 相鄰邊界的控制體積計算示意圖



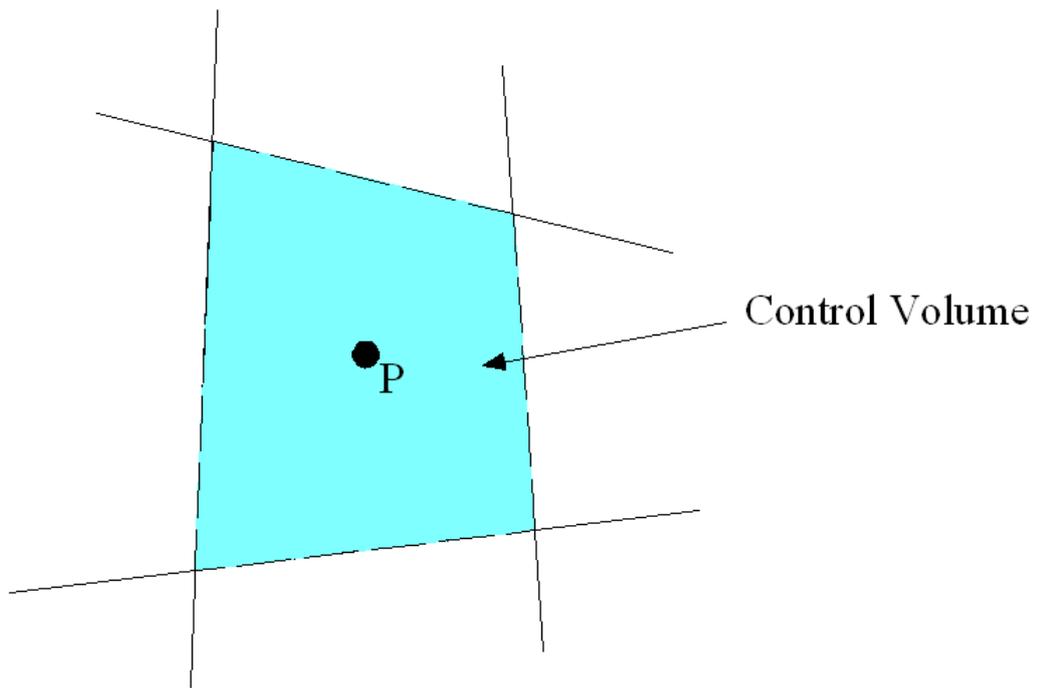


圖 4.1 以網格中心為控制體積之示意圖

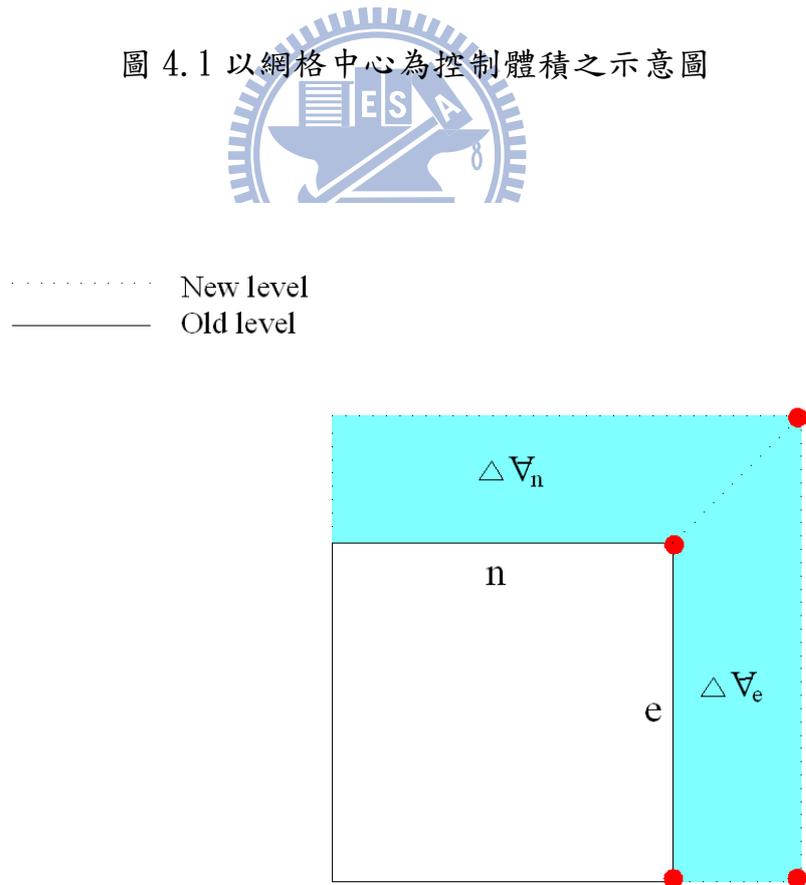


圖 4.2 利用各面新舊點位置來計算體積改變量

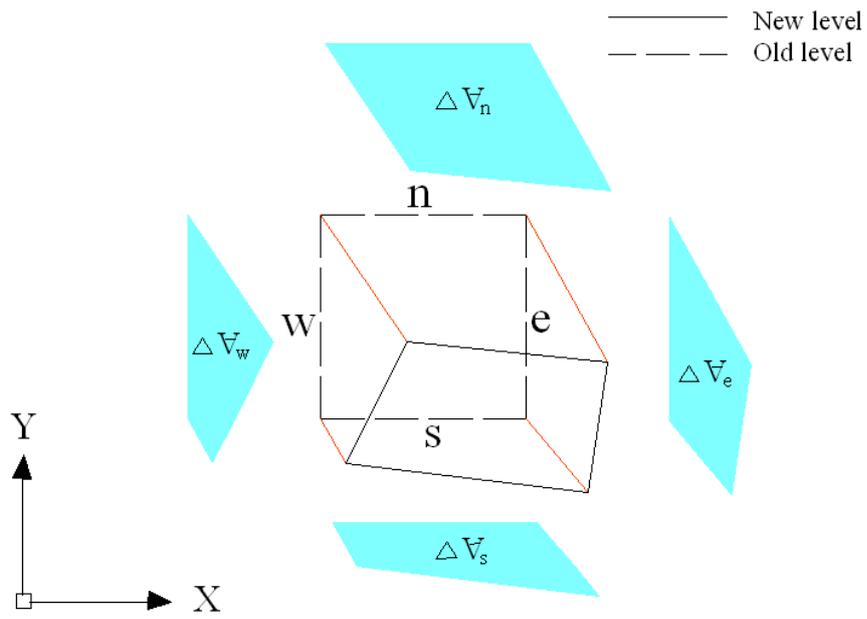


圖 4.3 兩個時階中的網格位置變化和各面掃過之體積

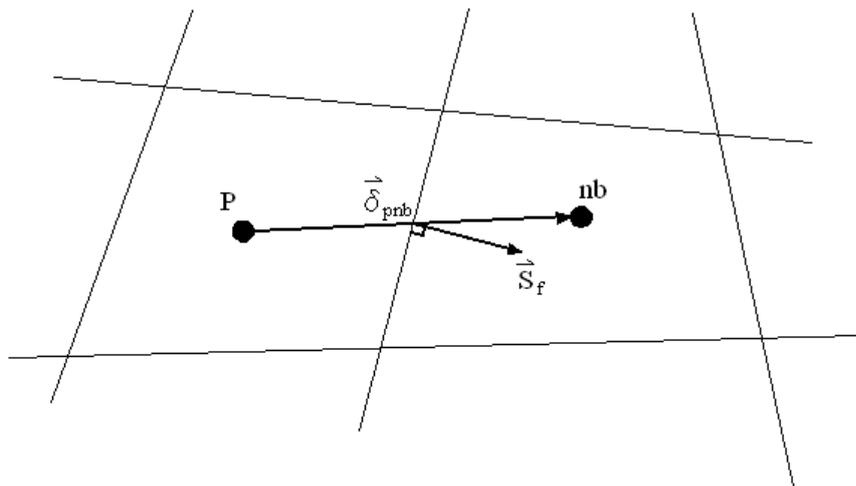


圖 4.4 主格點和鄰近格點之控制面示意圖

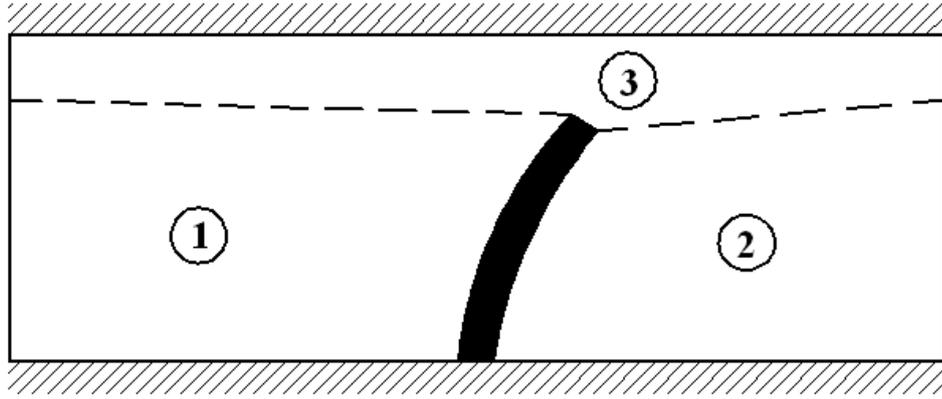


圖 4.5 流場網格分割區塊圖(一)

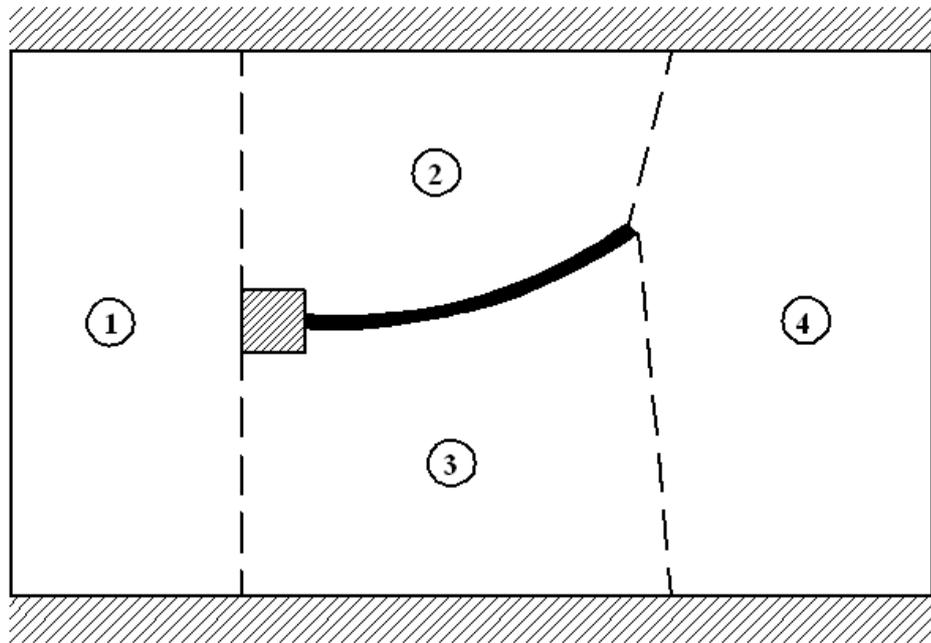
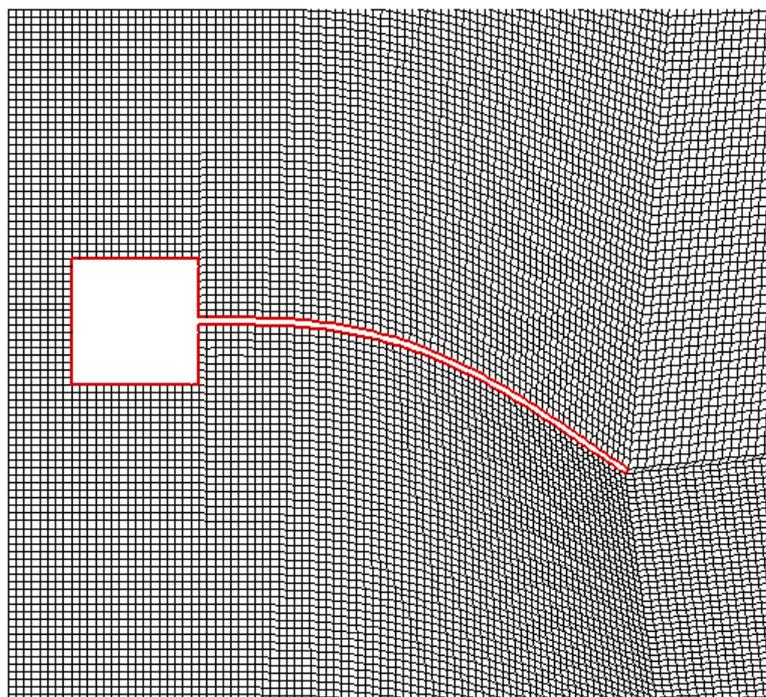
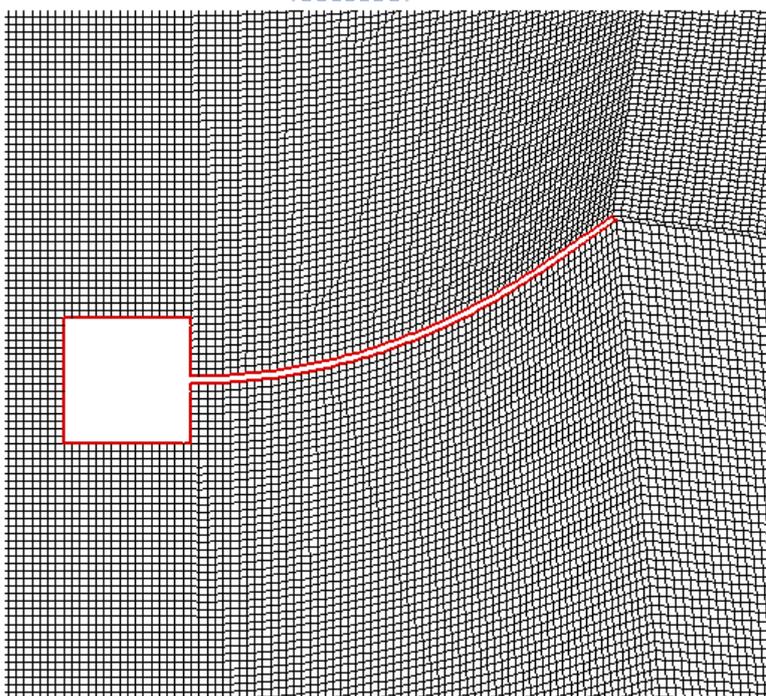


圖 4.6 流場網格分割區塊圖(二)



(a)



(b)

圖 4.7 流場網格變化示意圖

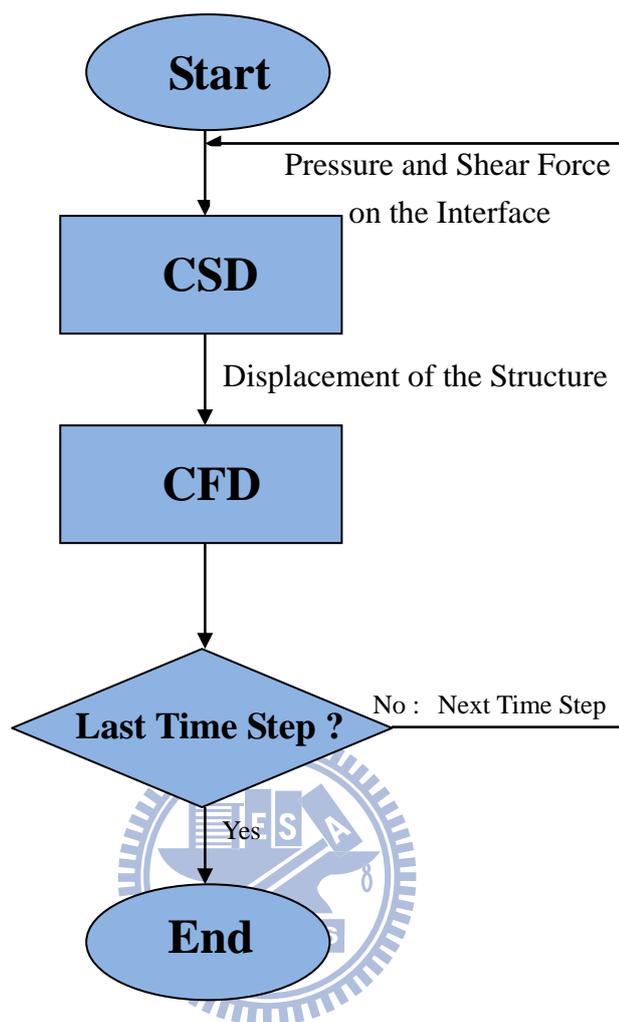


圖 4.8 流固耦合演算流程圖

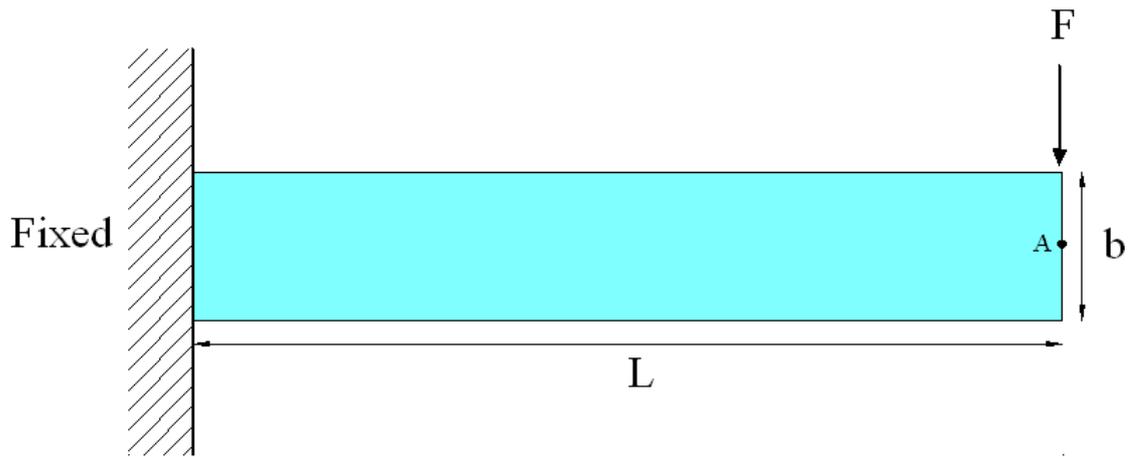


圖 5.1 單點受力之懸臂梁示意圖

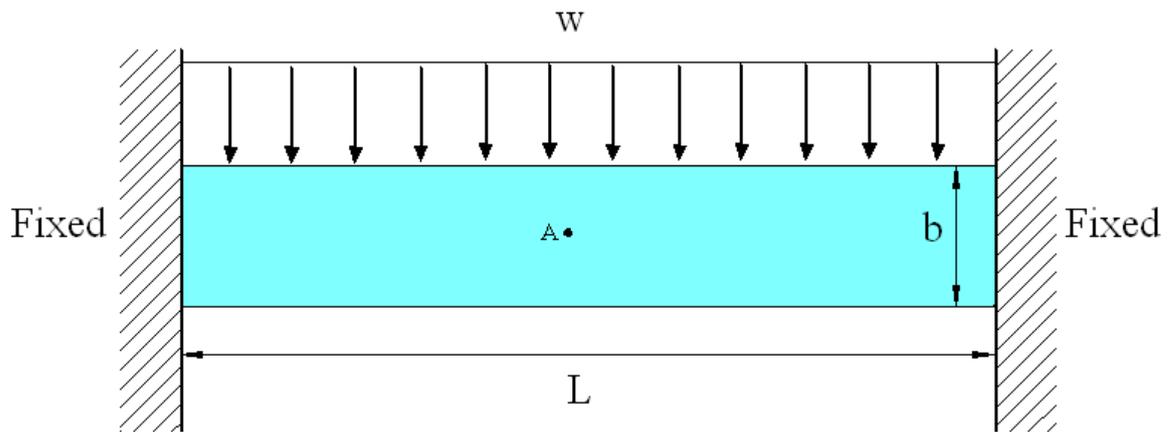


圖 5.2 均佈受力之兩端固定樑示意圖

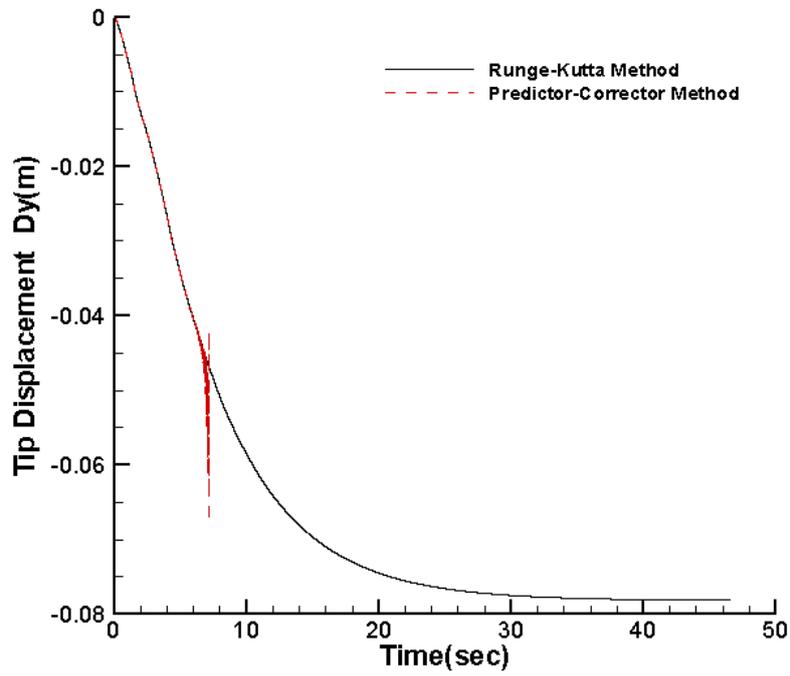


圖 5.3 懸臂樑尾端頂點的位移反應

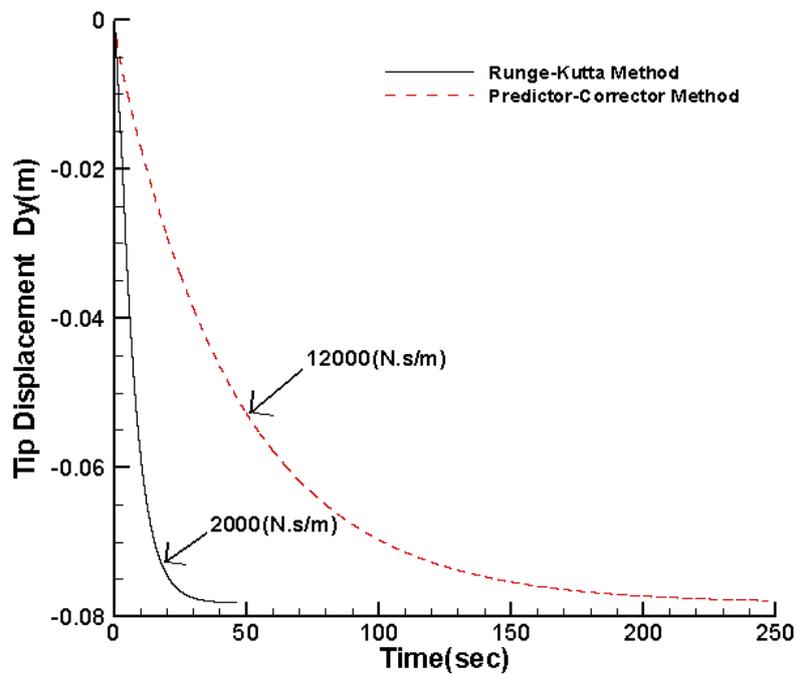


圖 5.4 懸臂樑尾端頂點在不同阻尼係數下的位移反應

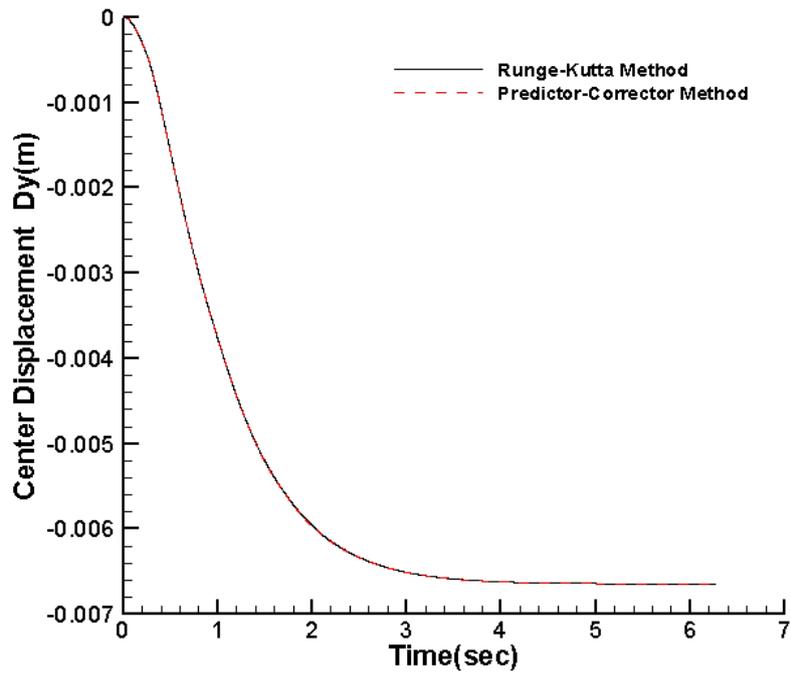


圖 5.5 兩端固定樑中心位置的位移反應



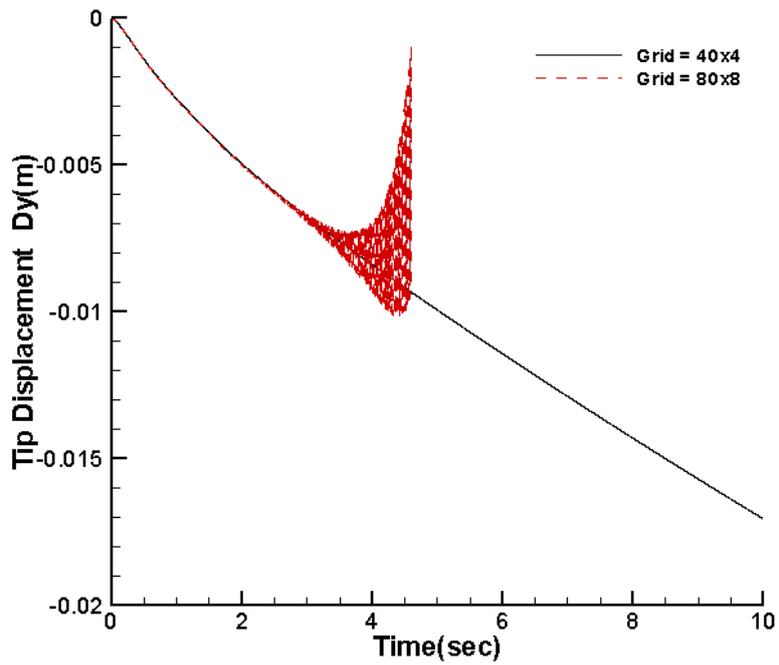


圖 5.6 懸臂樑尾端頂點在阻尼係數 12000 下的位移反應

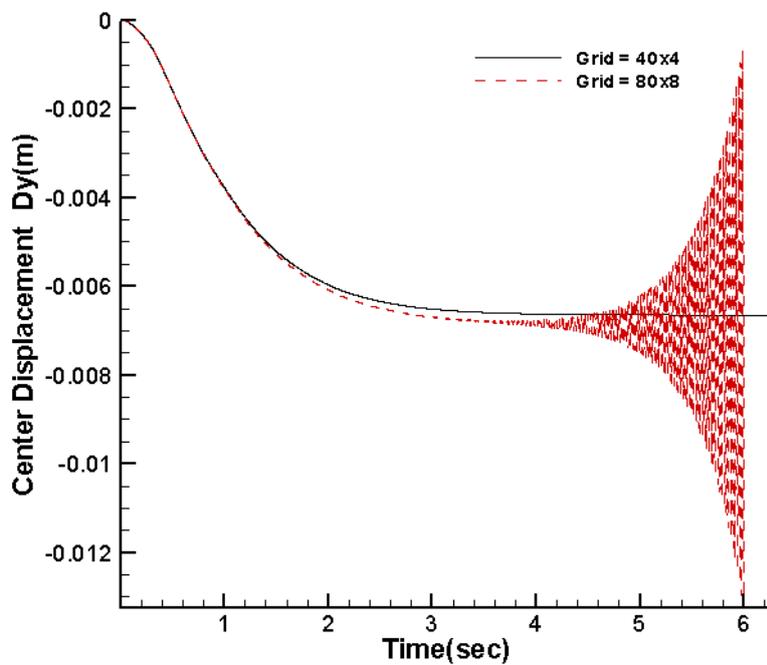


圖 5.7 兩端固定樑中心位置在阻尼係數 10000 下的位移反應

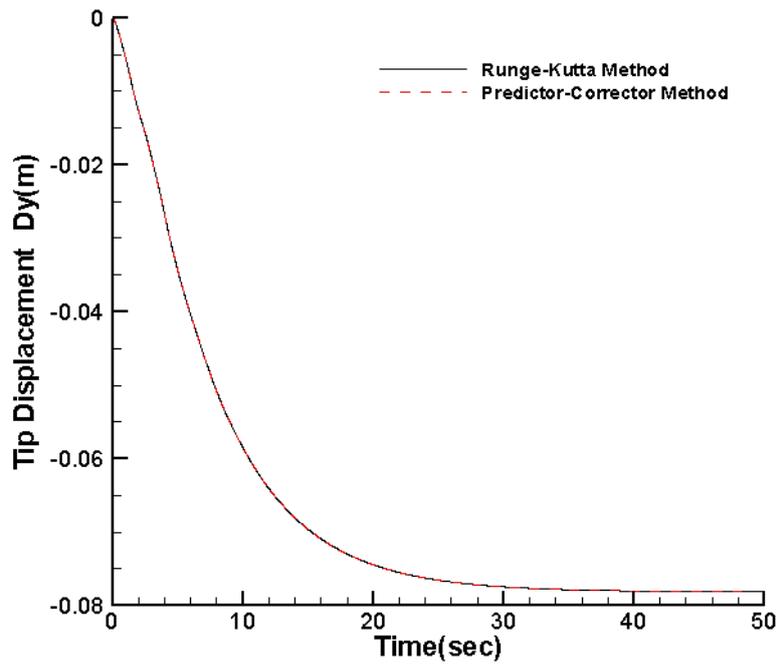


圖 5.8 懸臂樑尾端頂點的位移反應

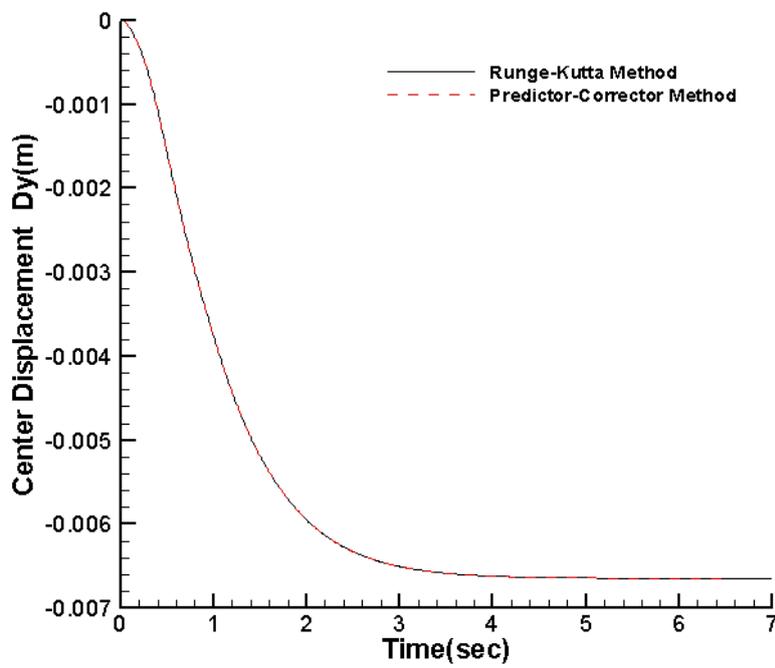
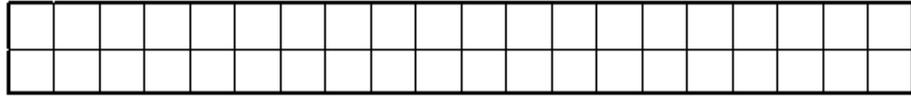
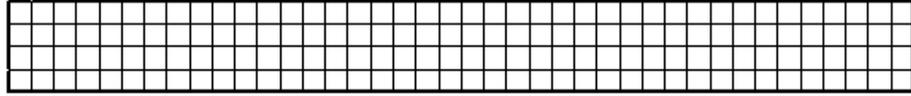


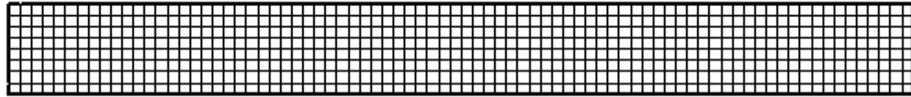
圖 5.9 兩端固定樑中心位置的位移反應



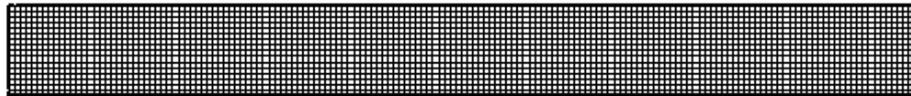
Grid = 20x2



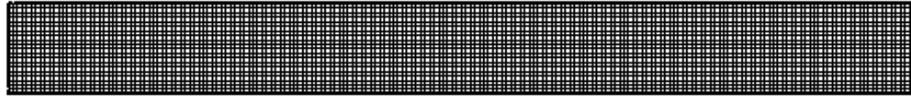
Grid = 40x4



Grid = 80x8



Grid = 160x16



Grid = 200x20

圖 5.10 五種不同網格數(上到下分別是由疏到密)

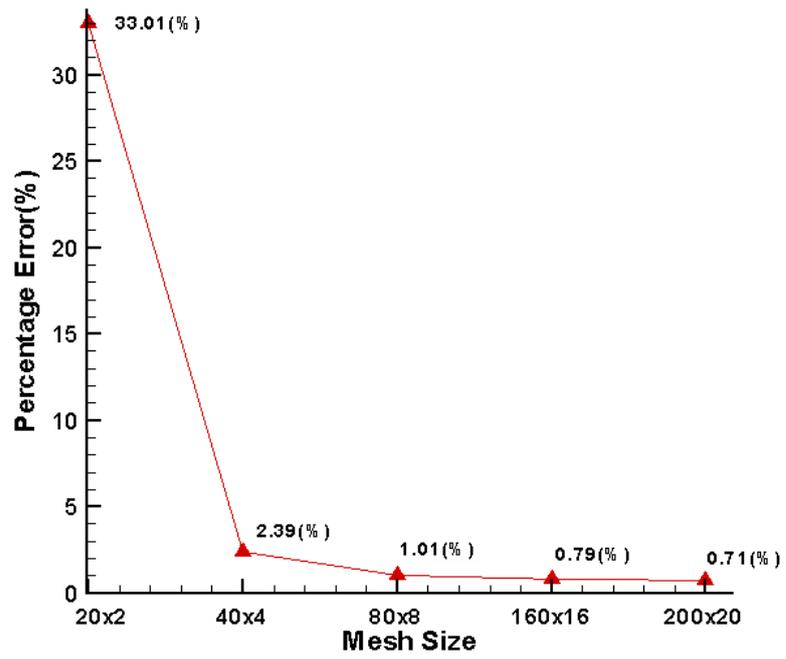


圖 5.11 測試網格精準度之誤差分析



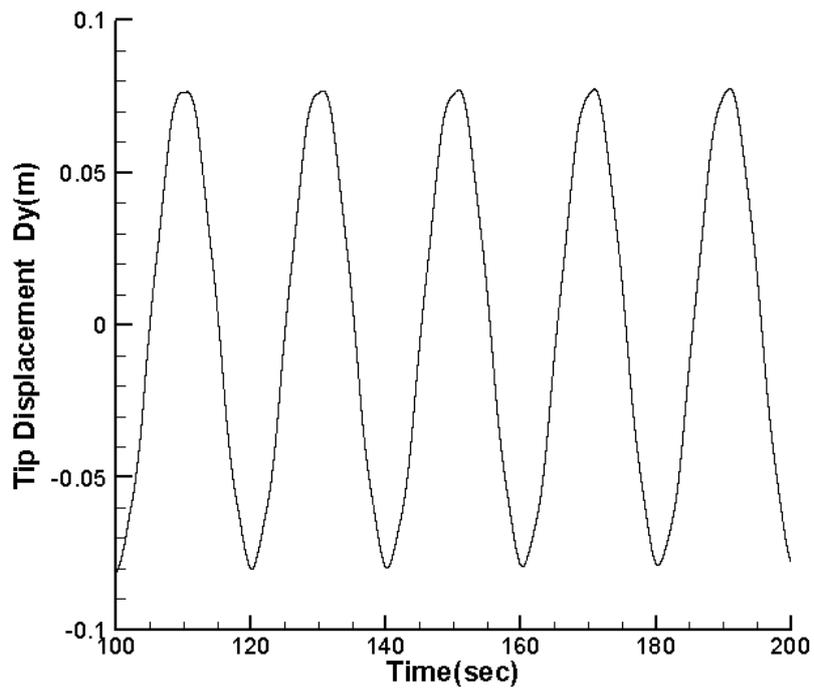


圖 5.12 懸臂樑尾端頂點自由振動之位移反應

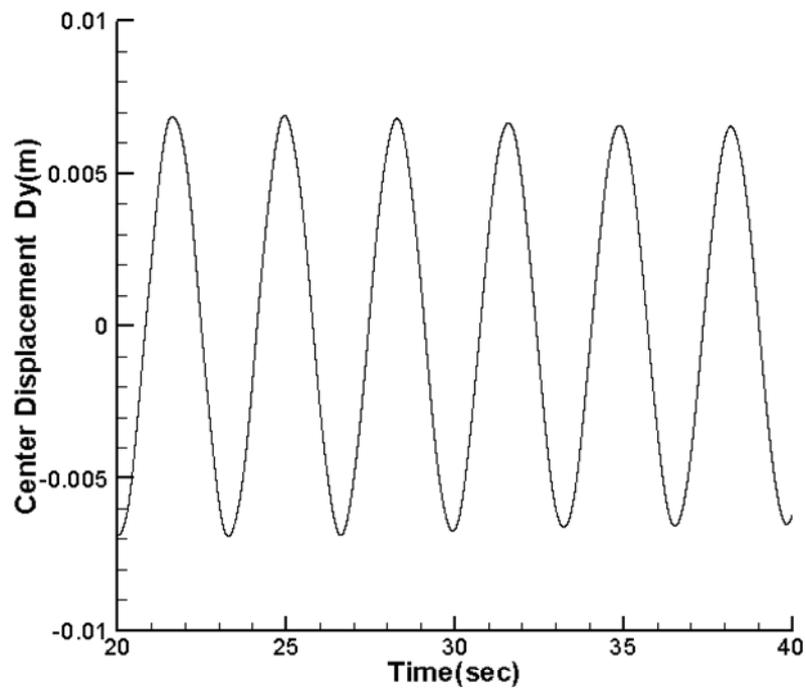


圖 5.13 兩端固定樑中心位置自由振動之位移反應

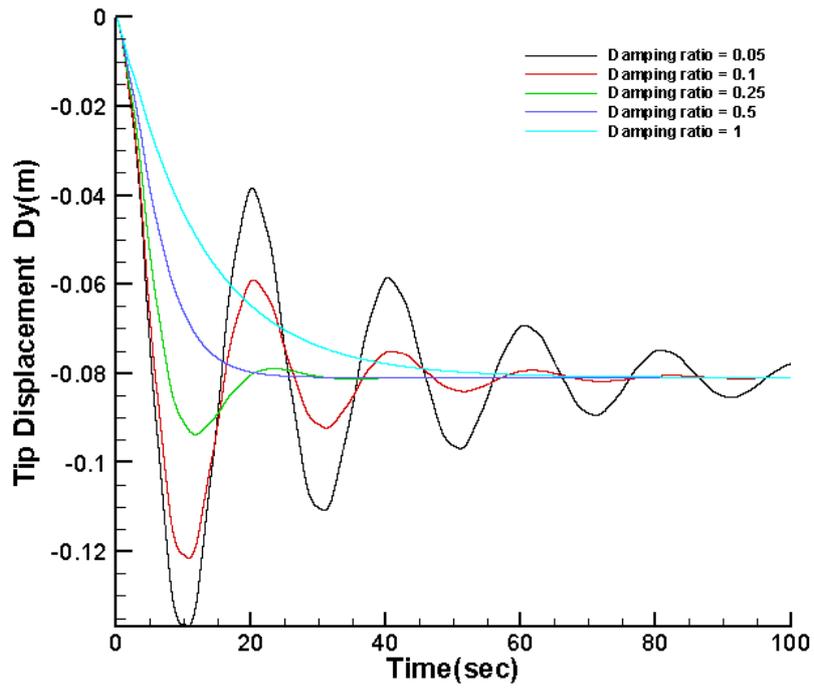


圖 5.14 懸臂樑尾端頂點在不同阻尼比之位移反應

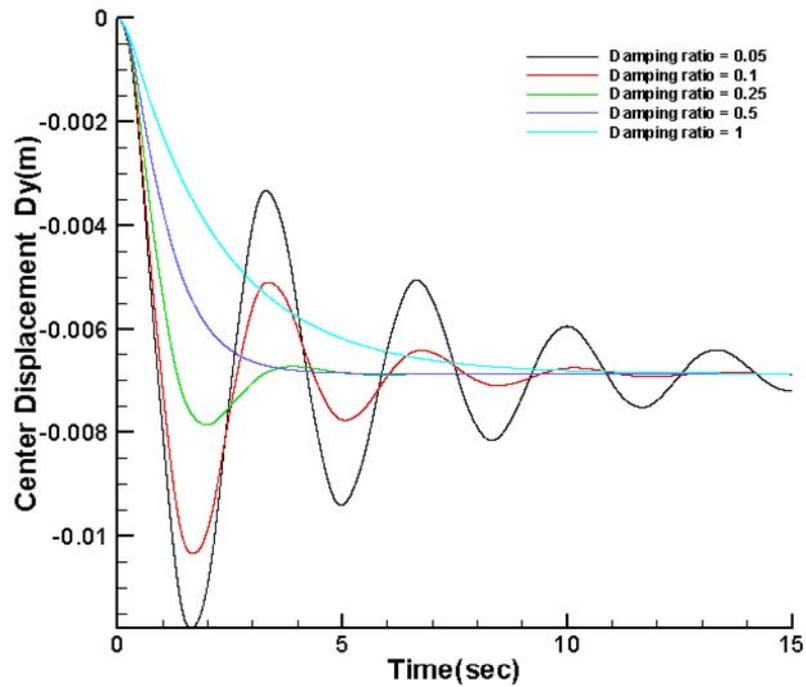
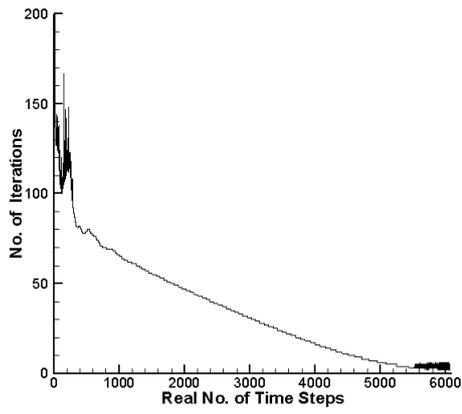
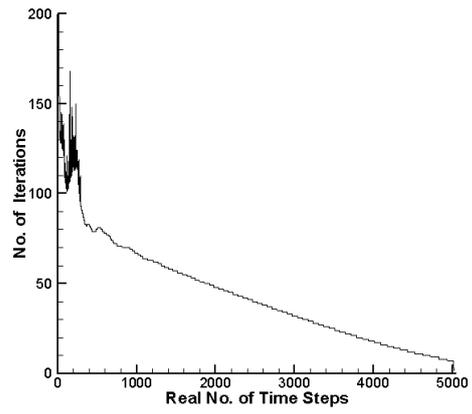


圖 5.15 兩端固定樑中心位置在不同阻尼比之位移反應

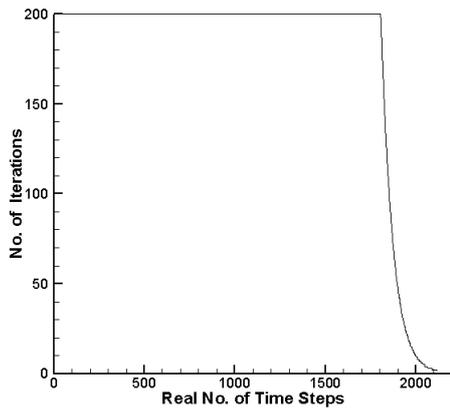


(a) Runge-Kutta Method

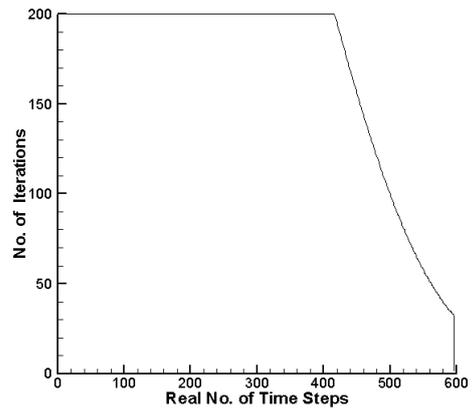


(b) Predictor-Corrector Method

圖 5.16 在真實時間步階為 0.01 sec 每個時階下收斂之疊代次數



(a) Runge-Kutta Method



(b) Predictor-Corrector Method

圖 5.17 在真實時間步階為 0.1 sec 每個時階下收斂之疊代次數

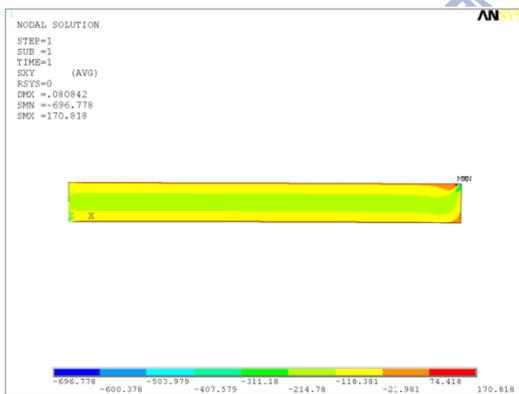
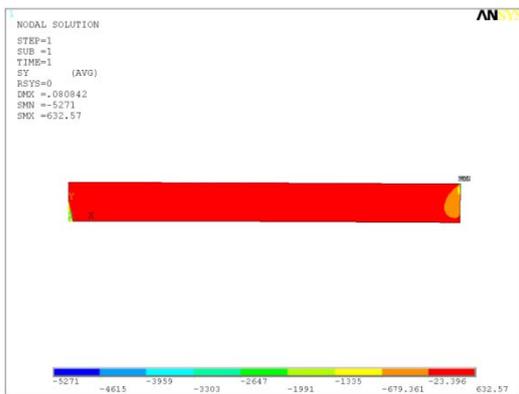
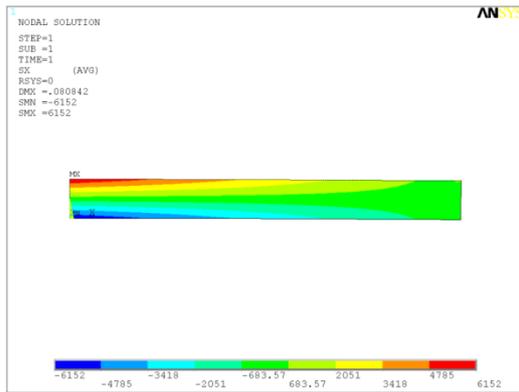


圖 5.18 單點受力之懸臂樑應力圖(分別為 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{xy})，其中左邊為 ANSYS 模擬、右邊為本文模擬

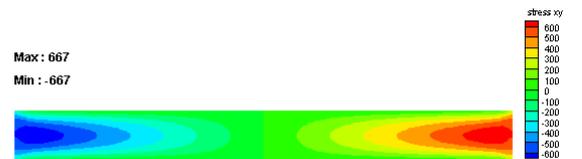
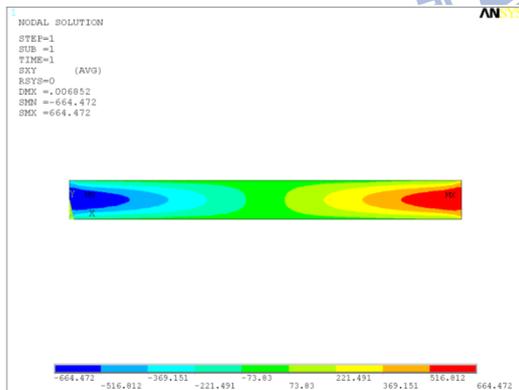
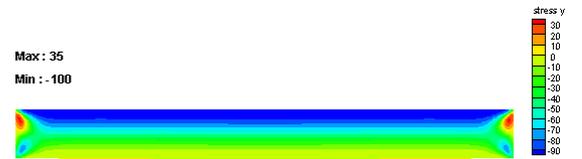
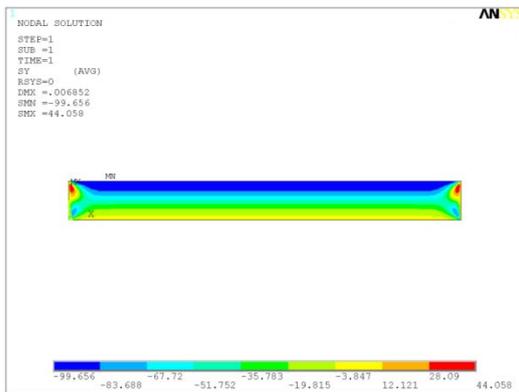
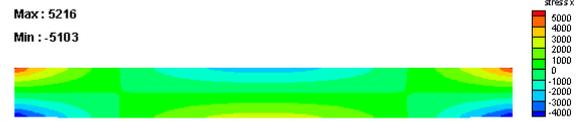
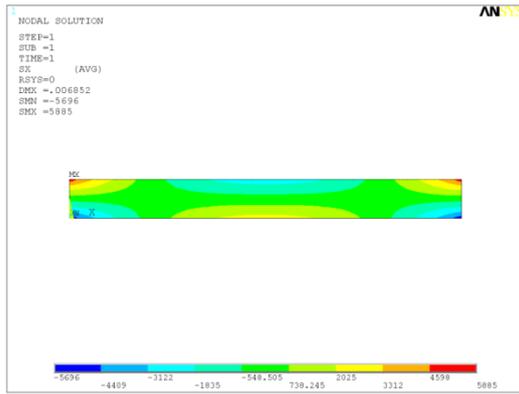
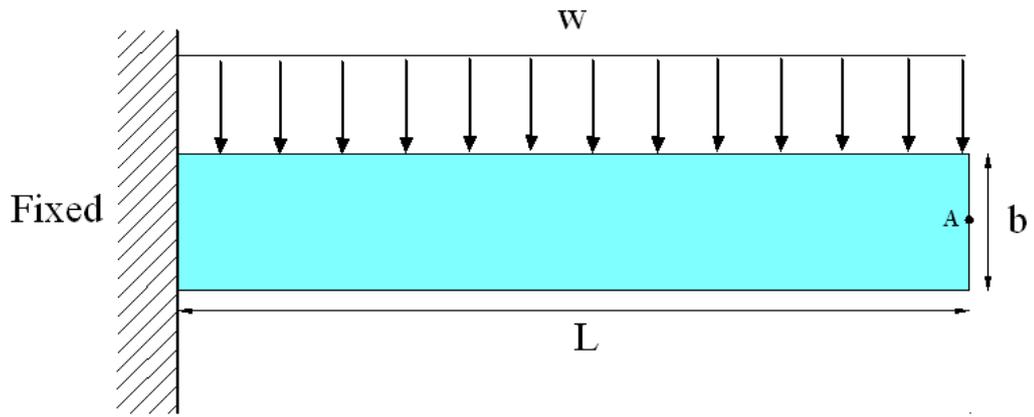
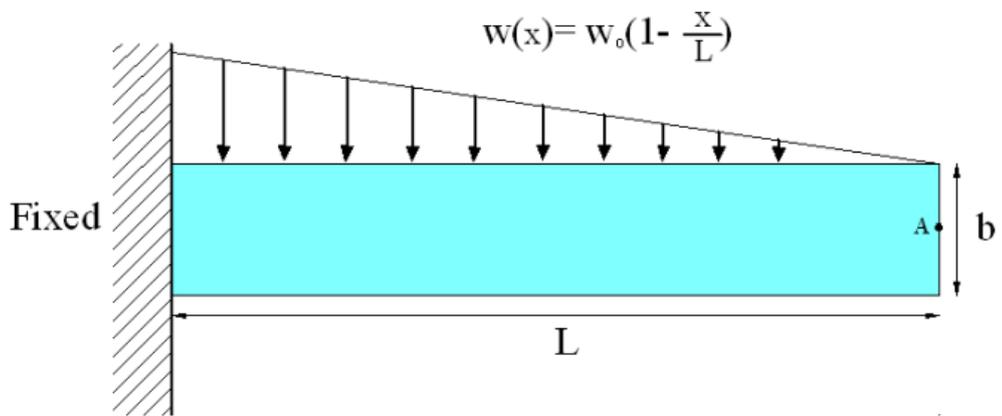


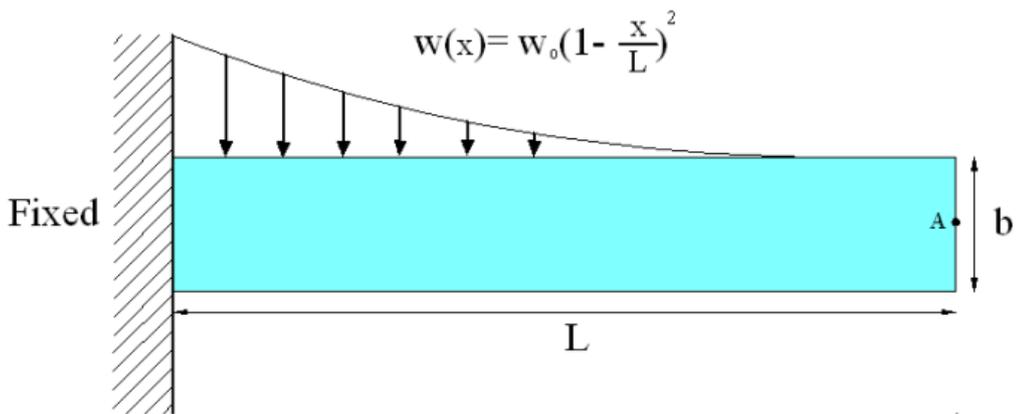
圖 5.19 均佈受力之兩端固定樑應力圖(分別為 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{xy})，其中左邊為 ANSYS 模擬、右邊為本文模擬



(a)



(b)



(c)

圖 5.20 不同形式分佈受力之懸臂梁示意圖

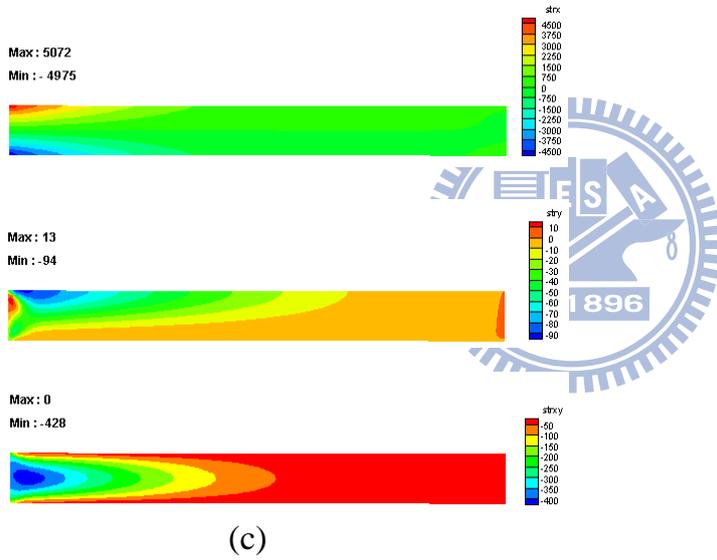
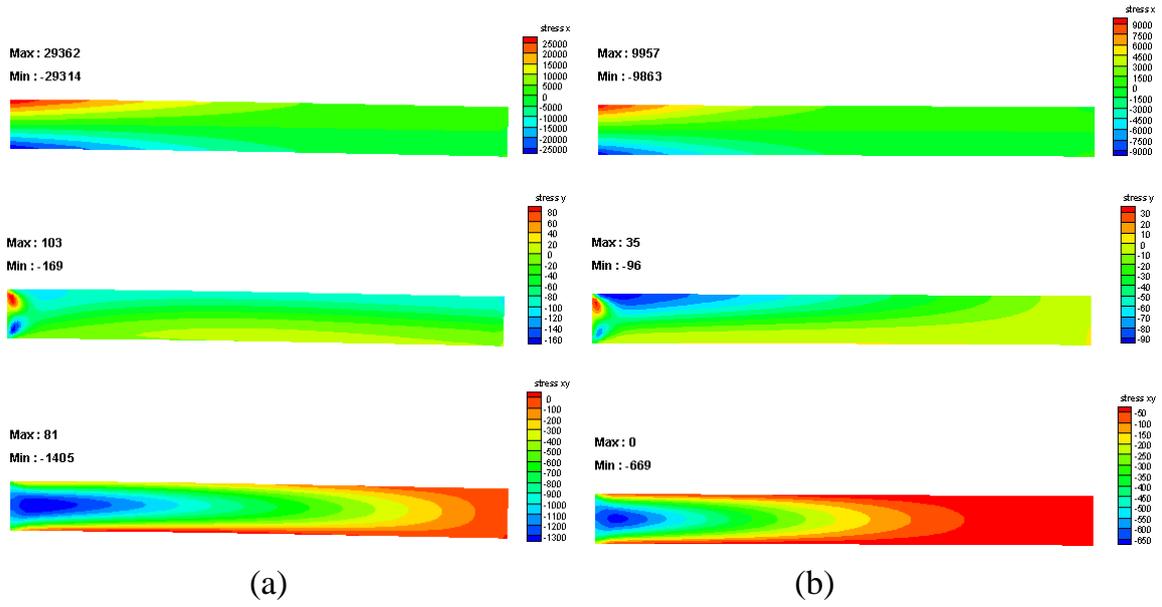


圖 5.21 不同型式受力之懸臂樑應力圖(a)均勻性的分佈力(b)線性遞減的分佈力
(c)二次曲線遞減的分佈力

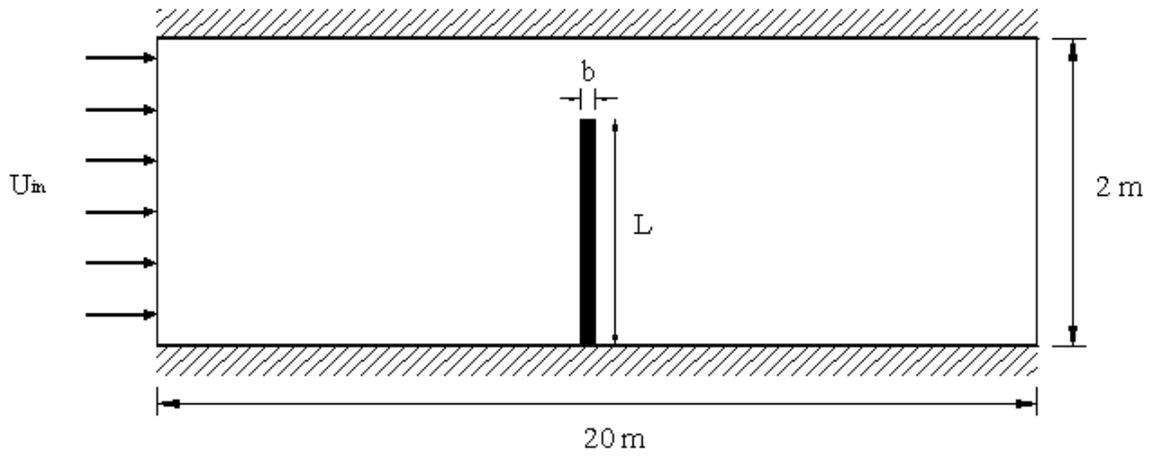


圖 5.22 流經彈性平板之管流示意圖

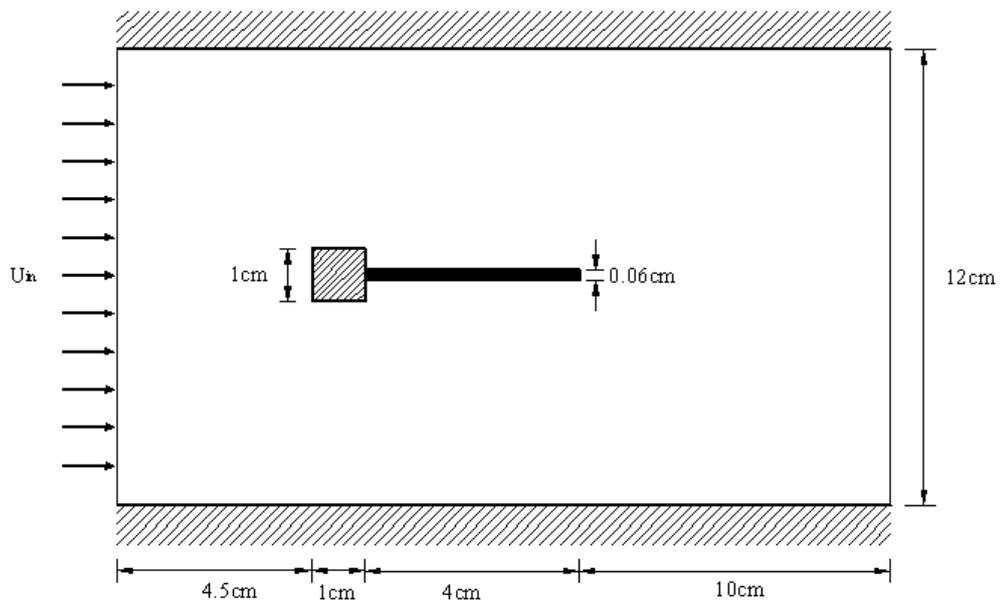
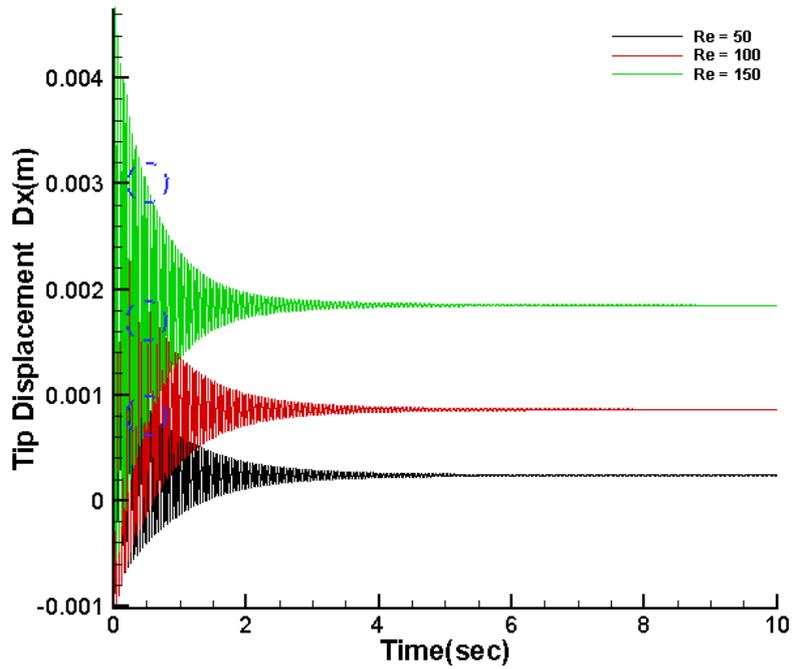
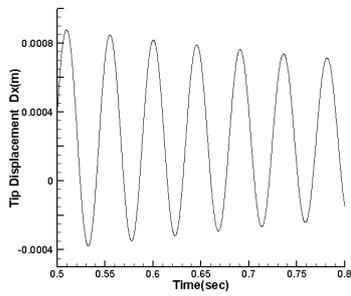


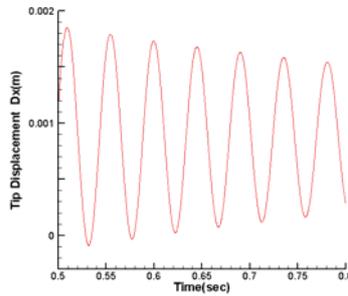
圖 5.23 渦流致動之彈性平板示意圖



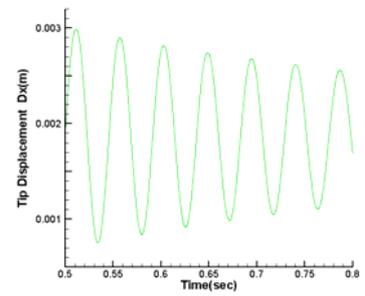
(a)



(b)

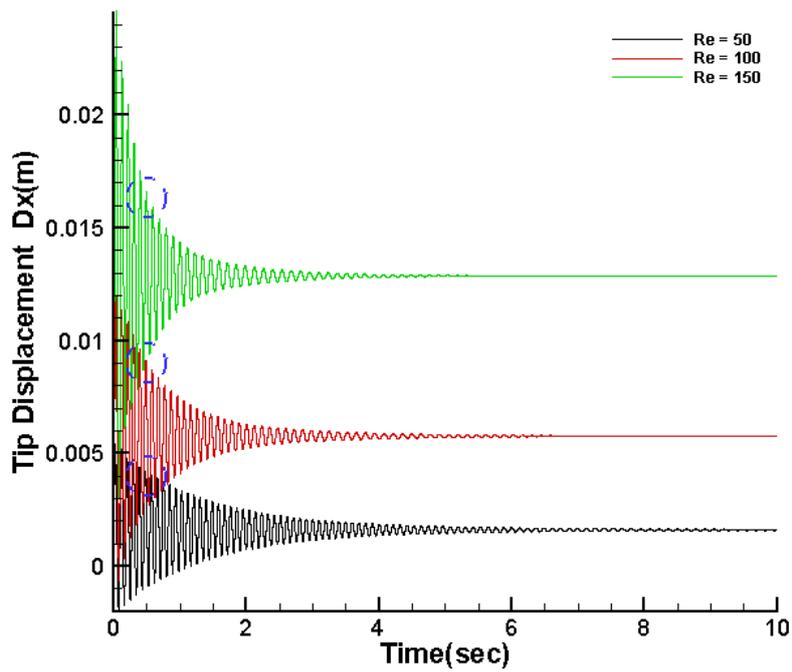


(c)

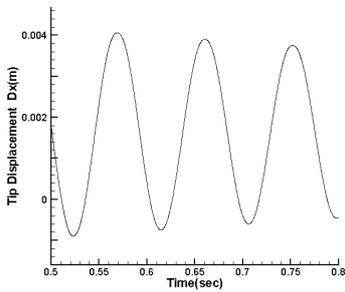


(d)

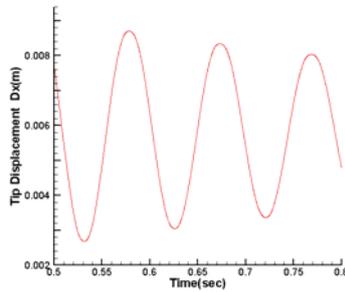
圖 5.24 彈性平板(厚度 0.2m)自由端頂點的位移反應(a)不同雷諾數下之比較(b)在雷諾數 50 的局部放大圖(c) 在雷諾數 100 的局部放大圖(d) 在雷諾數 150 的局部放大圖



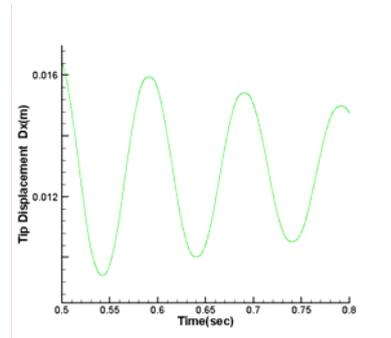
(a)



(b)

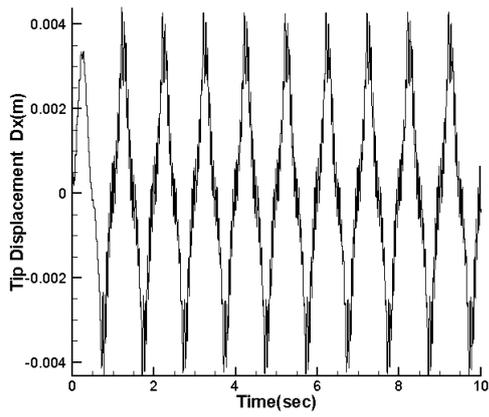


(c)

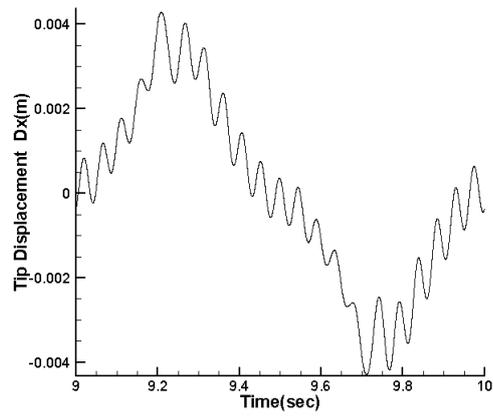


(d)

圖 5.25 彈性平板(厚度 0.1m)自由端頂點的位移反應(a)不同雷諾數下之比較(b)在雷諾數 50 的局部放大圖(c) 在雷諾數 100 的局部放大圖(c) 在雷諾數 150 的局部放大圖

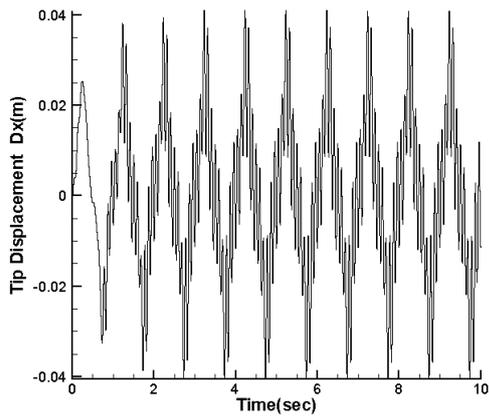


(a)

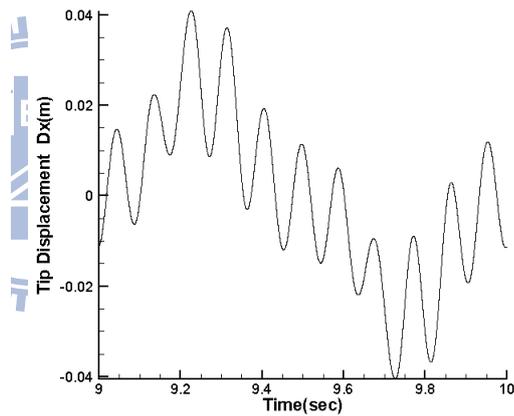


(b)

圖 5.26 彈性平板(厚度 0.2m)自由端頂點的位移反應(a)10 個週期(b)最後一個週期



(a)



(b)

圖 5.27 彈性平板(厚度 0.1m)自由端頂點的位移反應(a)10 個週期(b)最後一個週期

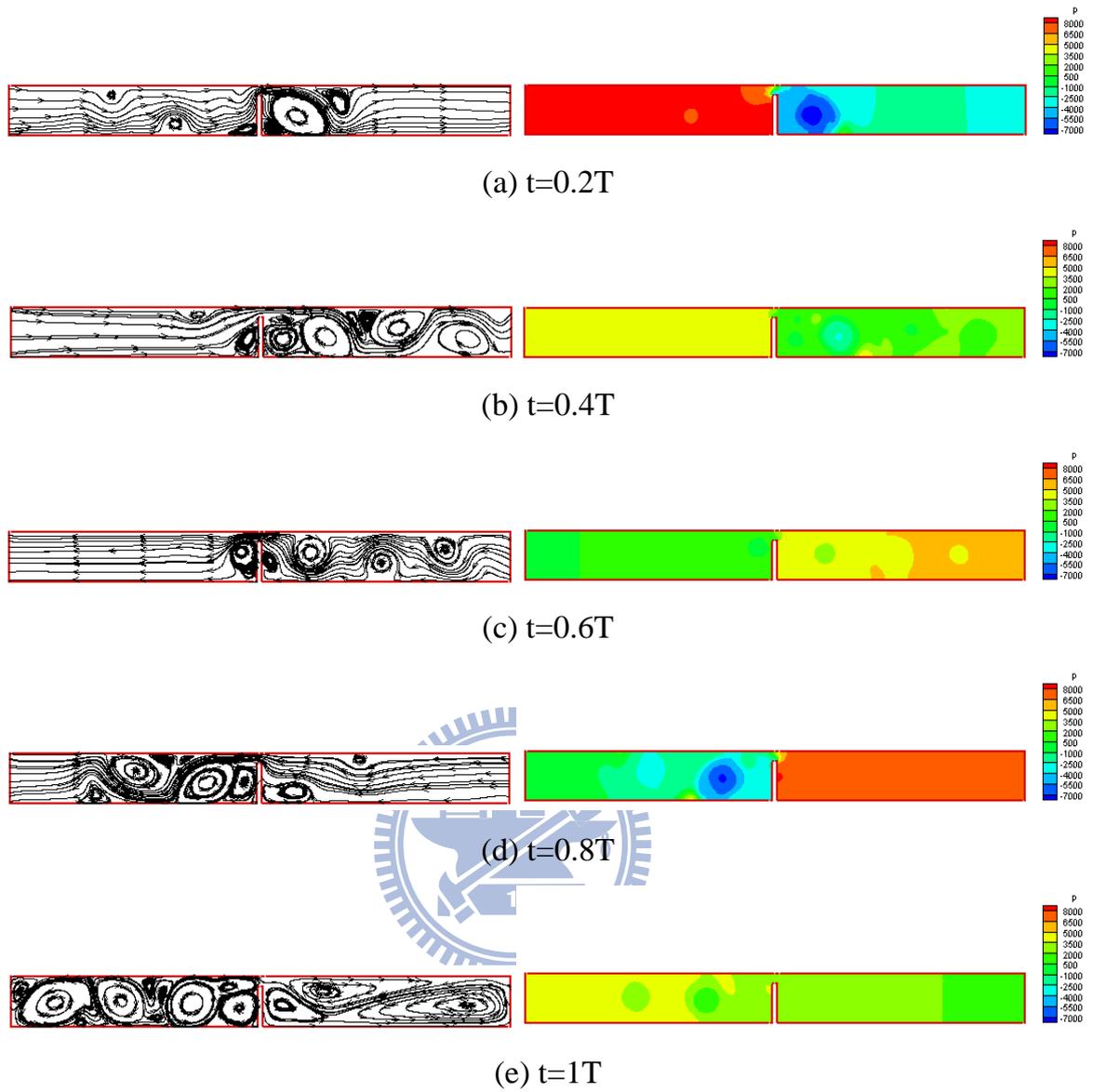


圖 5.28 平板厚度 0.2(m)，在不同週期下之流場流線和壓力圖

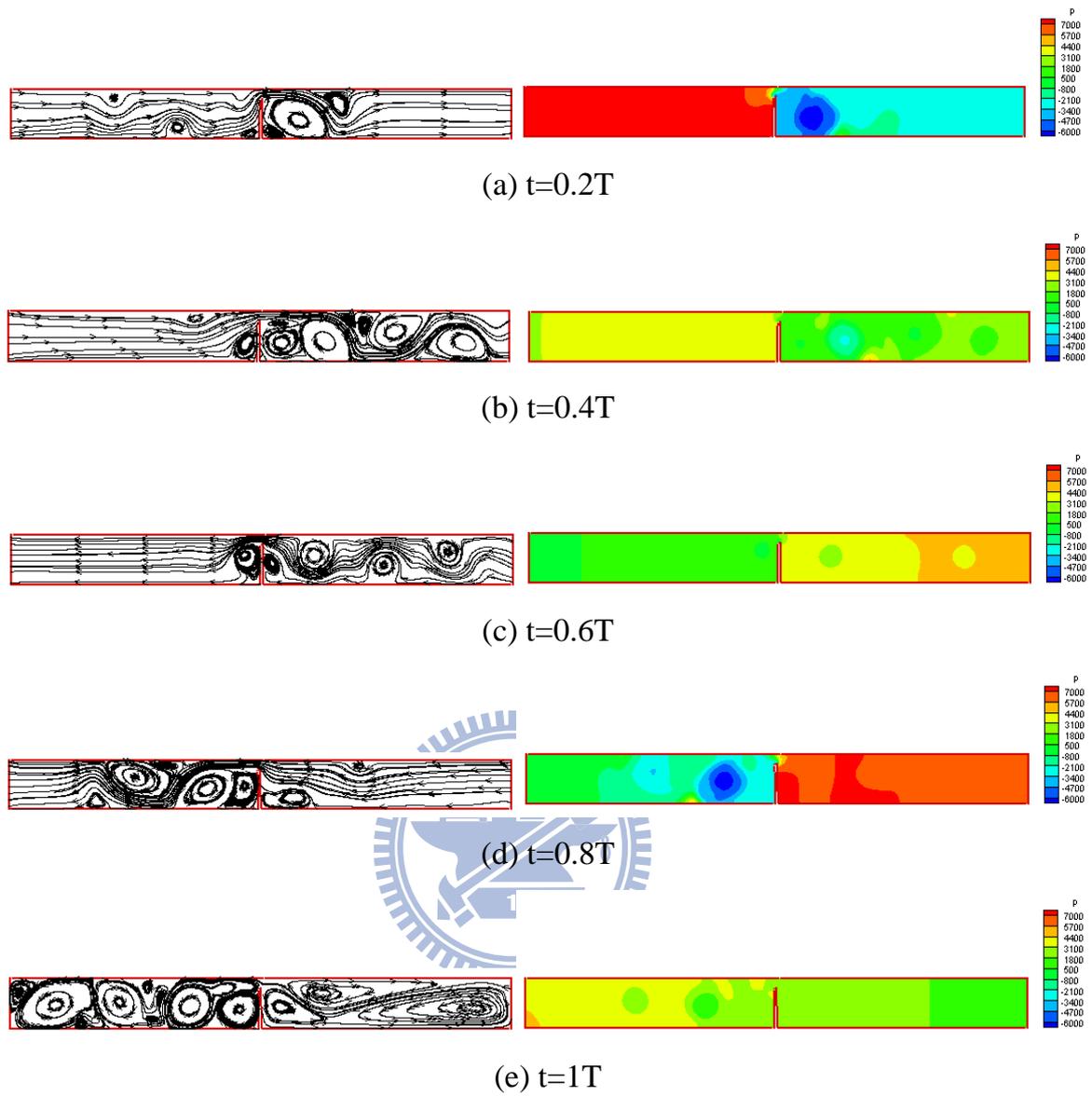
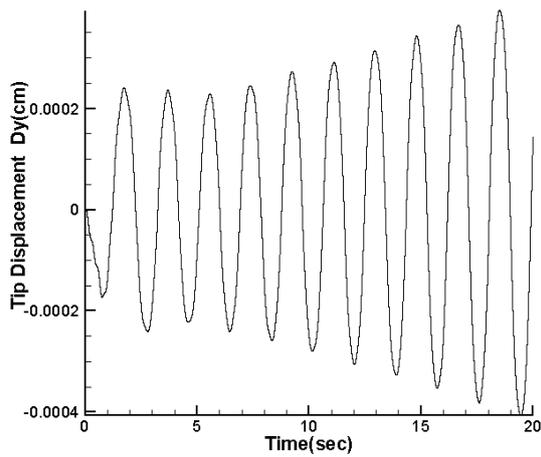
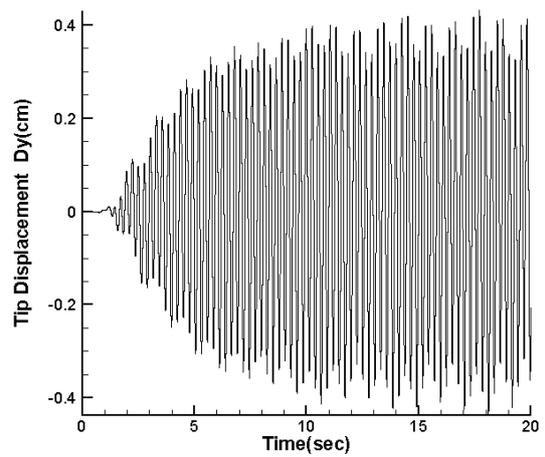


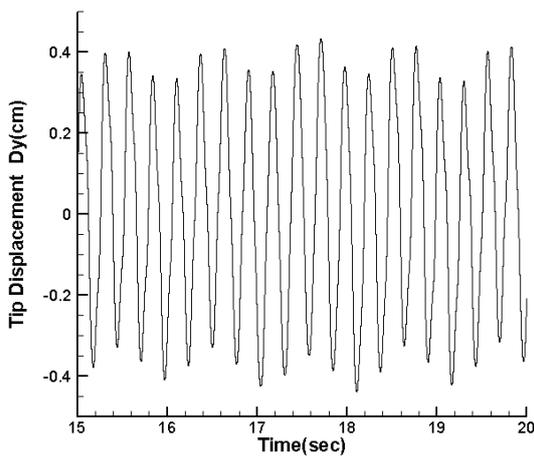
圖 5.29 平板厚度 0.1(m)，在不同週期下之流場流線和壓力圖



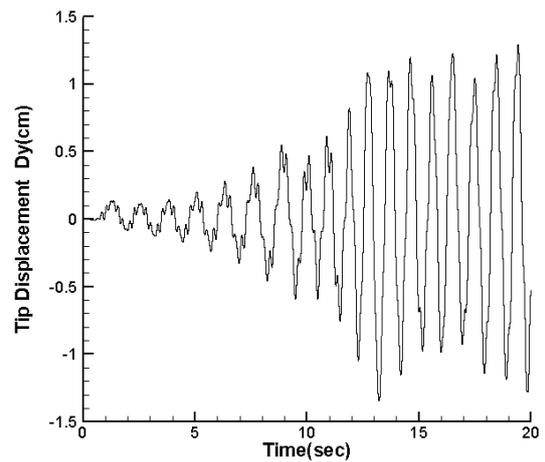
(a) $Re=110$



(b) $Re=204$



(c) $Re=204$ 之局部放大圖



(d) $Re=300$

圖 5.30 在不同雷洛數下彈性平板尾端頂點的位移反應

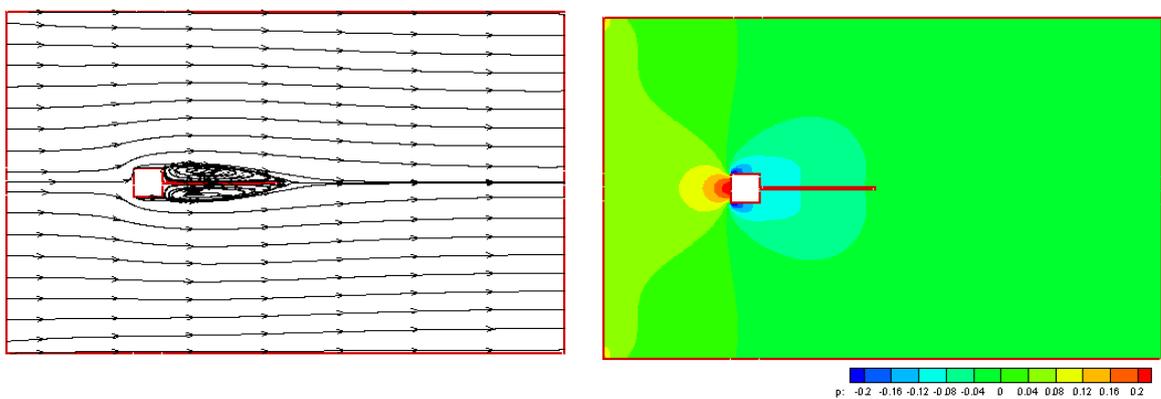


圖 5.31 雷諾數 110，在時間 $t=20(s)$ 時流場流線和壓力圖

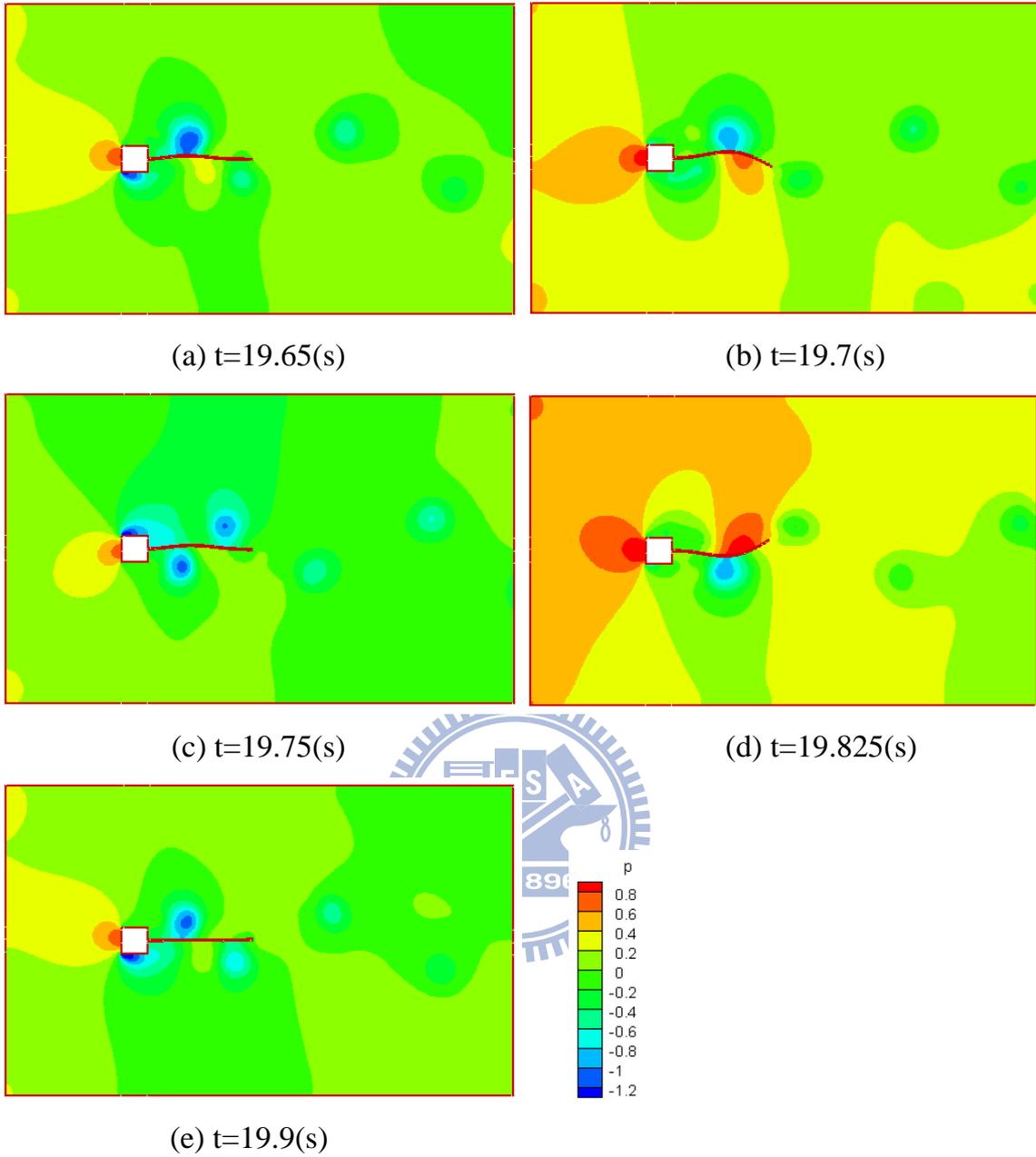


圖 5.32 雷諾數 204，彈性平板擺盪一個周期之流場壓力圖

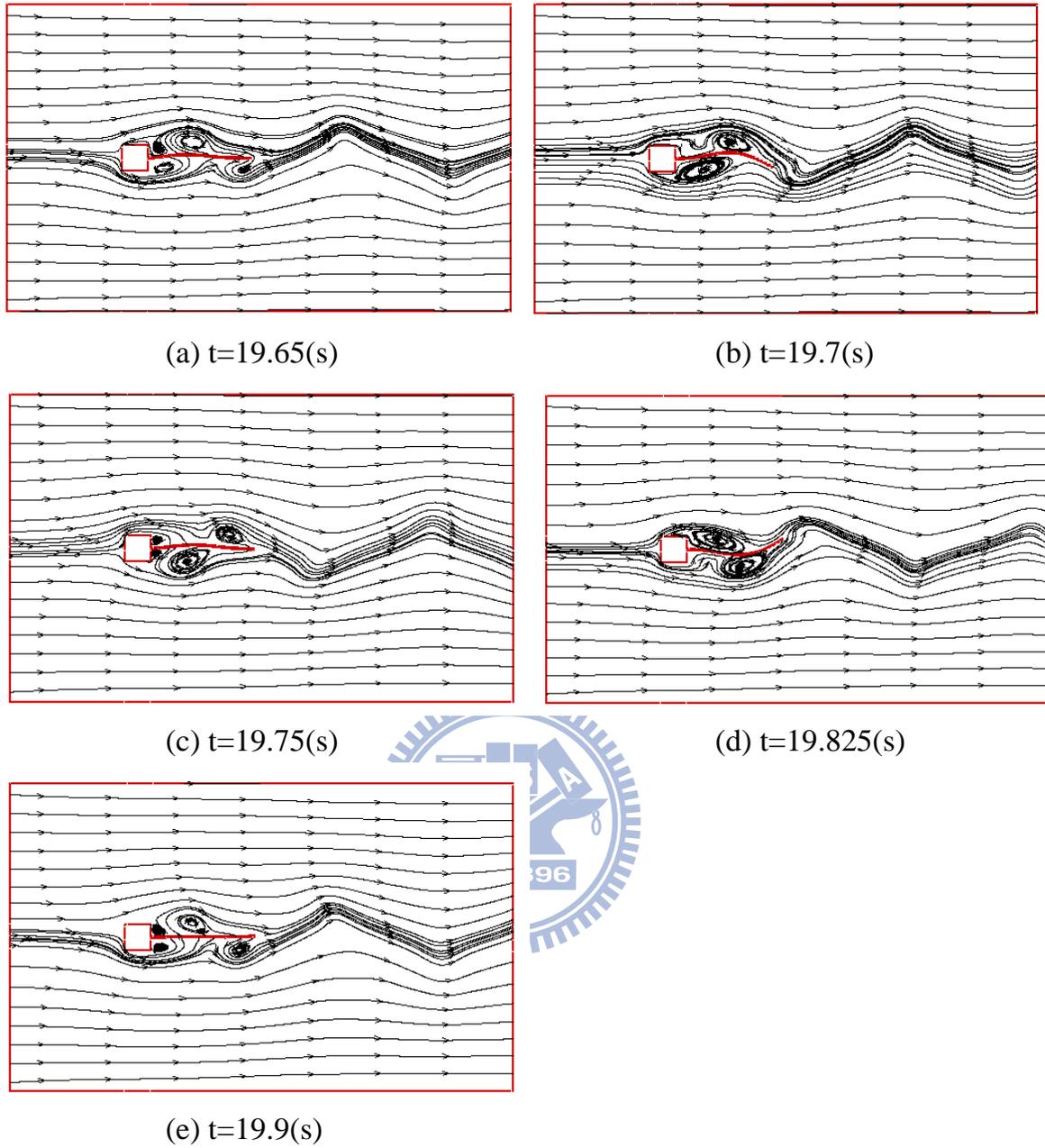


圖 5.33 雷諾數 204，彈性平板擺盪一個周期之流場流線圖

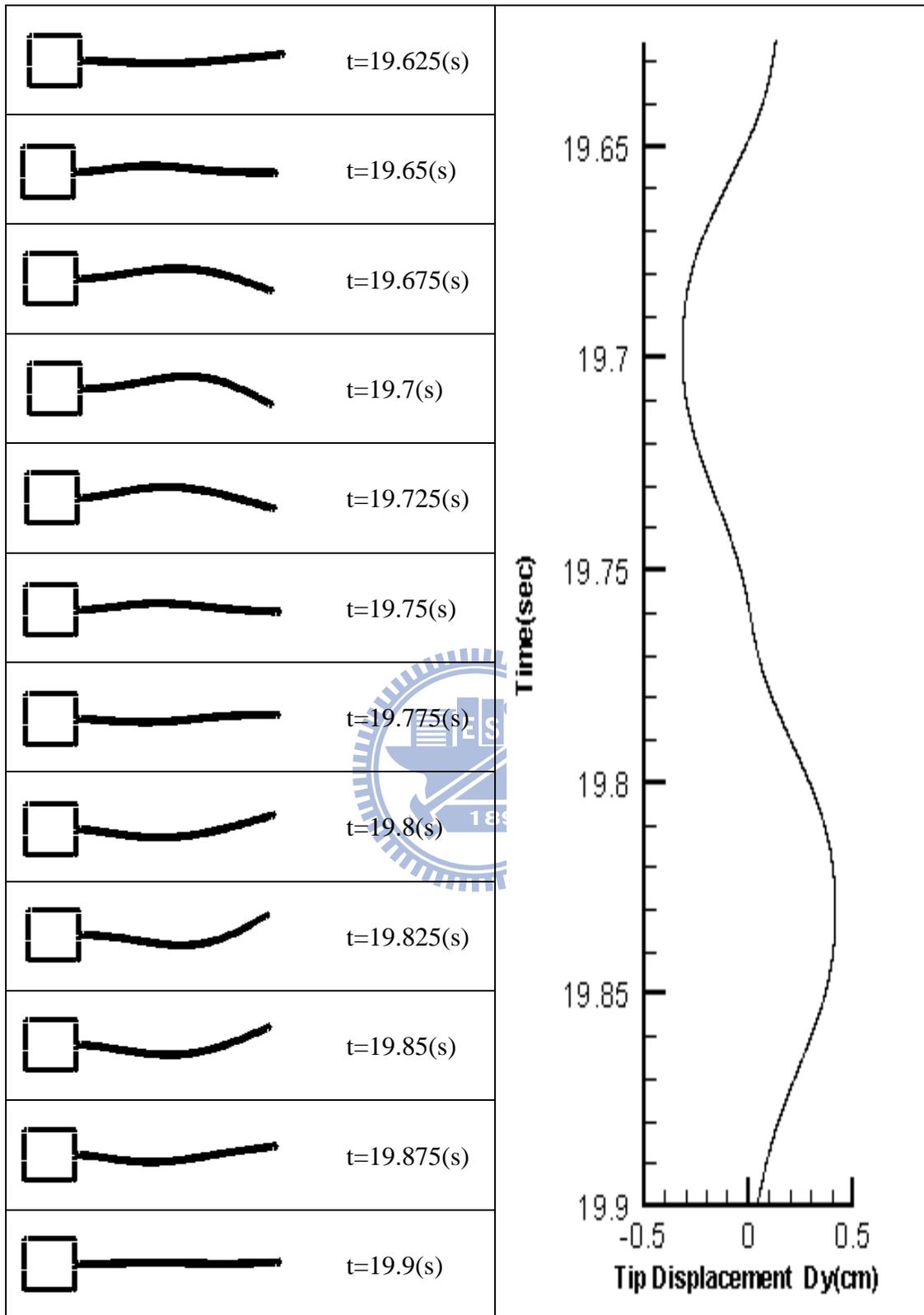


圖 5.34 雷諾數 204，彈性平板隨時間之變化圖

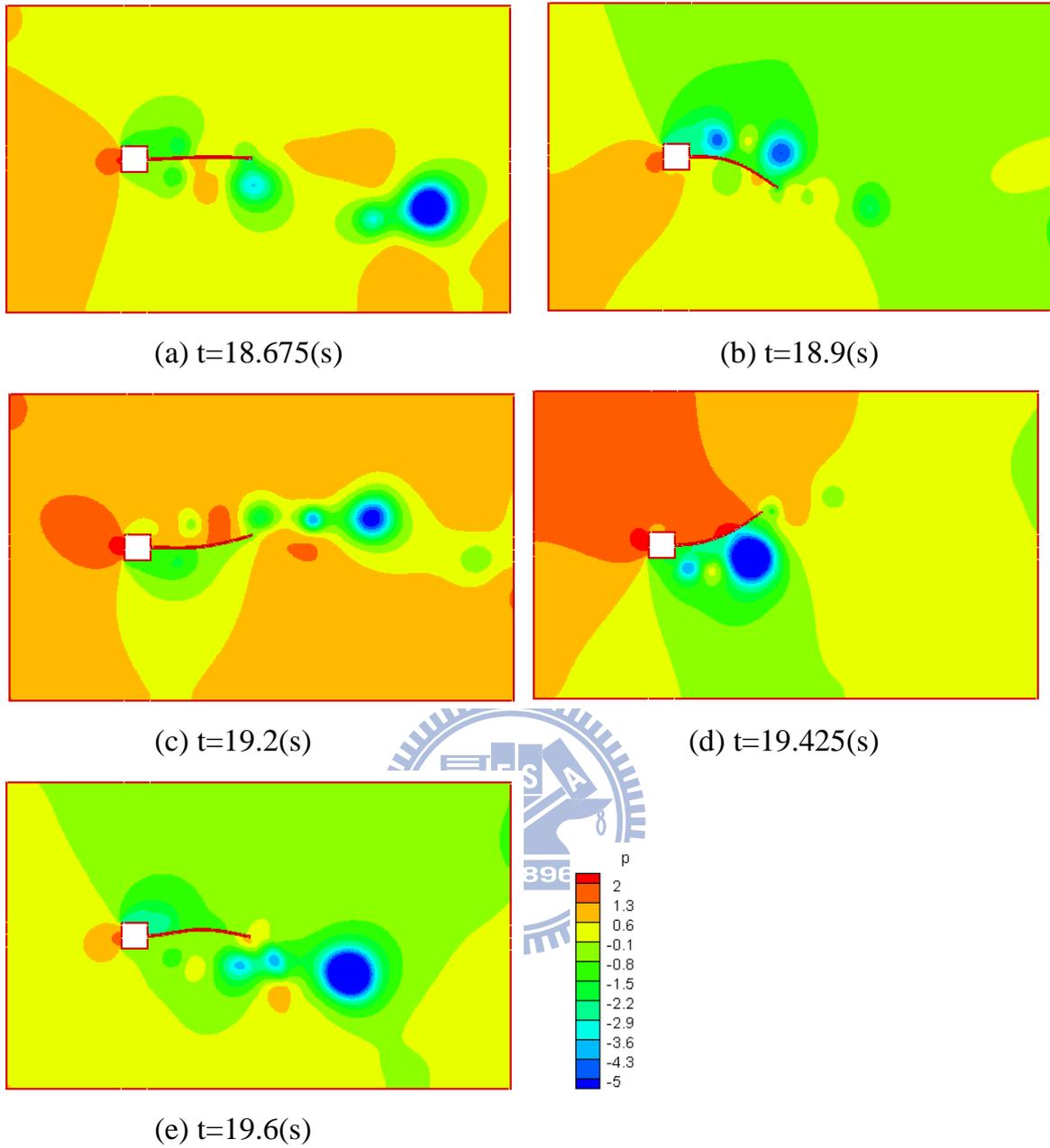


圖 5.35 雷諾數 300，彈性平板擺盪一個周期之流場壓力圖

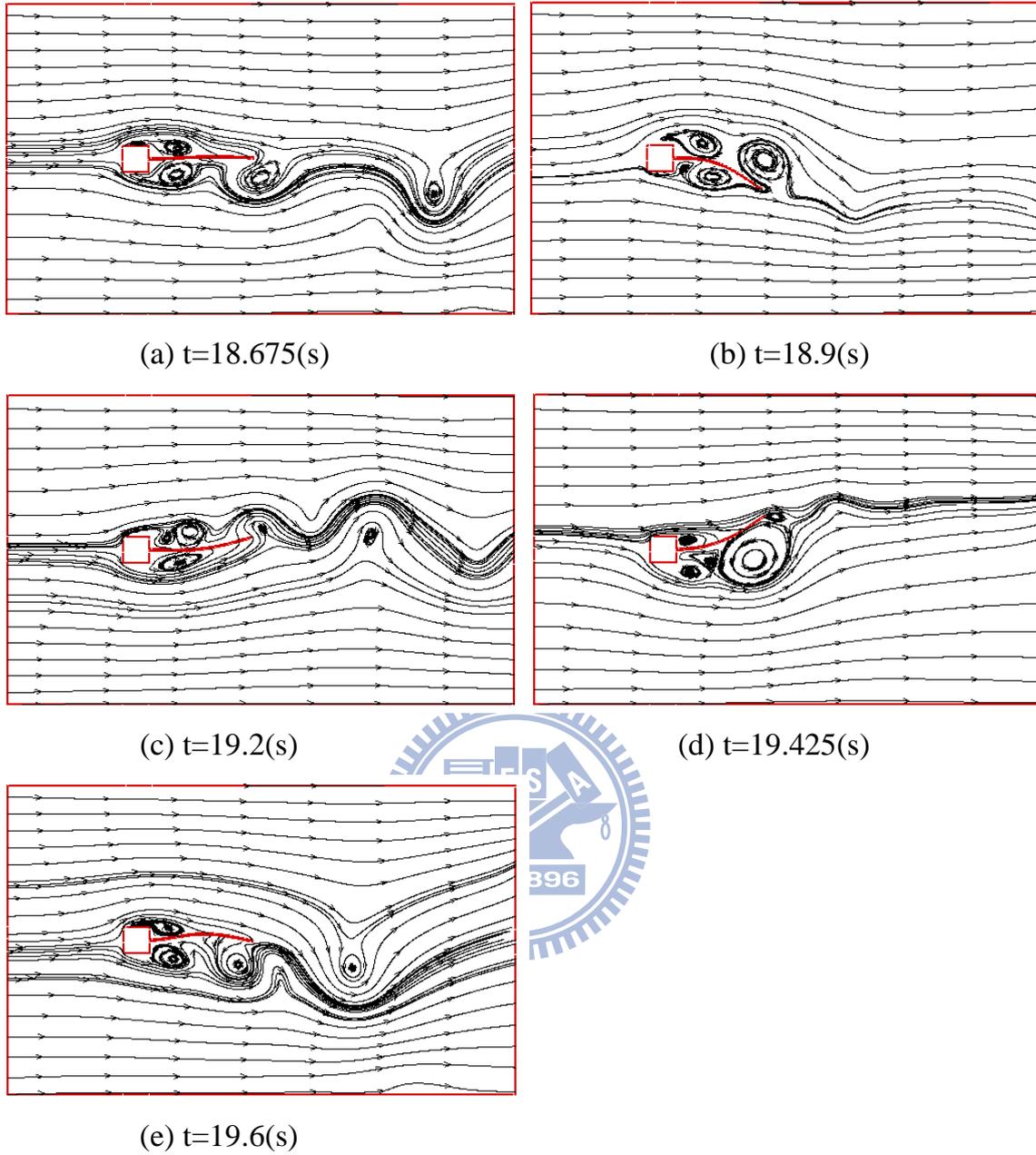


圖 5.36 雷諾數 300，彈性平板擺盪一個周期之流場流線圖

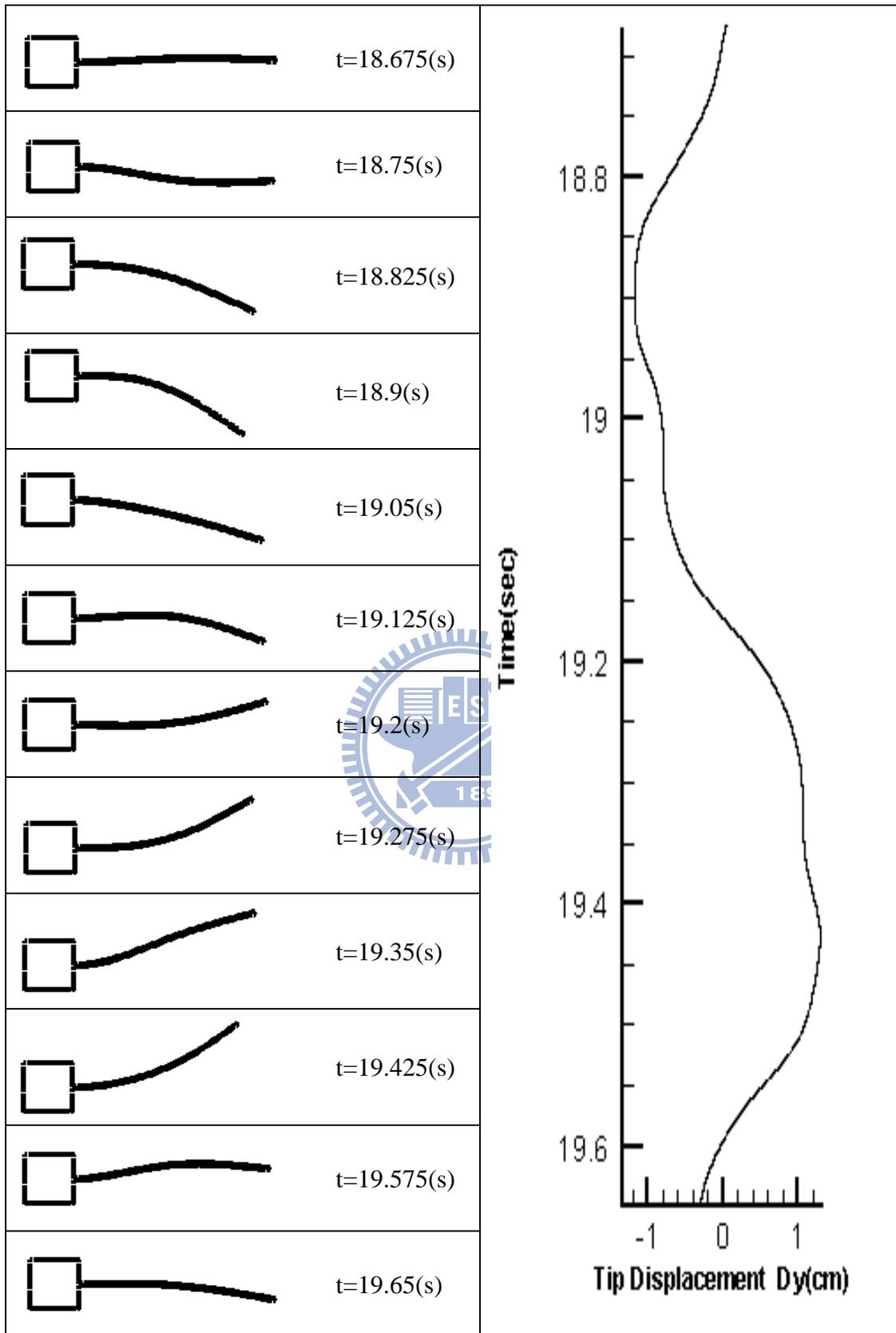


圖 5.37 雷諾數 300，彈性平板隨時間之變化圖