

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

利用一基於流體體積(VOF)之介面追蹤法
求解薄膜沸騰

Use of a VOF based interface tracking method for film
boiling flow calculations

研究生：賴胤男

指導教授：崔燕勇博士

中華民國一百年七月

利用一基於流體體積(VOF) 之介面追蹤法求解薄膜沸騰

Use of a VOF based interface tracking method for film
boiling flow calculations

研究生：賴胤男

Student : Yin-Nan Lai

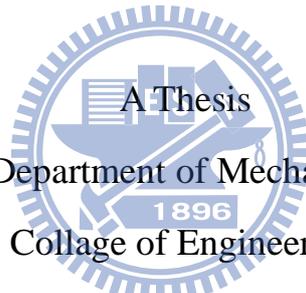
指導教授：崔燕勇

Advisor: Yeng-Yung Tsui

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文



Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the degree of

Master of Science

In

Mechanical Engineering

July 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年七月

利用一基於流體體積(VOF) 之介面追蹤法求解薄膜沸騰

研究生：賴胤男

指導教授：崔燕勇 博士

國立交通大學機械工程學系(研究所)碩士班

摘要

本研究使用單一流體模型搭配 CISIT 介面追蹤法求解雙相流之熱傳與質傳現象。其中所用的離散方法為有限體積法 (finite volume method)，而 CISIT 介面追蹤法則是利用求解流體體積分率的傳輸方程式來追蹤介面之位置。利用介面處的質量與能量跳越條件求出相變化所造成的質量變化，並將其加入連續方程式中的源項作為修正。將動量方程式與連續方程式進行耦合，所得速度場將滿足介面處的質量跳躍函數。為了驗證相變化模型的準確性先求解具有理論解之相變化問題，發現溫度場之準確性與介面溫度梯度之計算都會影響模擬相變化的準確性。最後模擬一薄膜沸騰的氣泡生成，可觀察到氣泡的生成與成長過程中對於熱傳及質傳變化的影響。

Use of a VOF based interface tracking method for film boiling flow calculations

Student : Yin-Nan Lai

Advisor : Dr. Yeng-Yung Tsui

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

ABSTRACT

A single-fluid model with a VOF based interface tracking method (CISIT) is used for simulation of two-fluid flows with heat and mass transfer in this study. The finite volume method is used as the discretization method. The motion of the interface is tracking by the solution of a transport equation for the volume fraction. By using the interface position obtained from the interface tracking method the heat flux which drives the phase change on interface can be calculated. The mass change across the phase boundary is computed by taking the mass and energy jump conditions at the interface. It is added as a source term in the continuity equation. This continuity equation is used in the pressure-velocity coupling algorithm. After the velocity field obtained from solving the momentum equation the jump condition for the continuity is satisfied. To assess the accuracy of this mode two test problems for which analytical solutions are available, are considered. It is shown that the precision of the temperature profile and the length used for calculating temperature gradients at the interface would affect the accuracy of simulation. Finally, a simulation of film boiling on a horizontal plate is presented. It shows that how the bubble growth affects the heat and mass transfer of the flow.

誌謝

在這兩年的碩士生活裡，首先要感謝崔燕勇教授的悉心指導，讓我學習如何去解決所遇到的問題與挑戰。並且崔老師在我遇到問題時適時給予指導，讓我有個解決問題的方向指引。再來最要感謝林仕文學長，學長不論在課業研究或日常生活方面都給予我許多教導與關心，多虧學長的熱心協助我才能完成現階段的研究進度。也要感謝胡育昌學長提供在 Fortran 語言的編寫經驗與技巧，幫我找出自己程式編寫的錯誤。

此外也感謝陳信宏學長、郭大慶學長讓我很快的融入 307 實驗室這個大家庭中。感謝林子翔與黃義政兩位同學在這兩年的陪伴與鼓勵，你們認真的研究態度是激勵我不至於放棄的最大動力，謝謝你們！也要感謝這兩年認識的同學與學弟妹們，與你們一起修課與玩樂是我難忘的回憶。

接著要感謝立丘小集的張義雄老師，感謝老師讓我在學校領域外學到許多寶貴且重要的處事觀念與態度。也要感謝李俊賦、陳二常、張維仁和謝易珊等大學同學們在這幾年間的相互鼓勵與打氣。最後感謝我的爸爸、媽媽與哥哥，謝謝你們一路的支持與鼓勵，讓我能得到這兩年寶貴的成長與學習經驗。

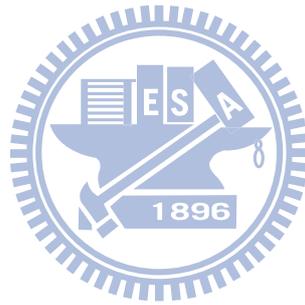
目錄

摘要	i
ABSTRACT.....	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
符號表	ix
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 文獻回顧	2
1.2.1 求解雙流體流之介面問題	2
1.2.1.1 Lagrangian 型式	2
1.2.1.2 Eulerian 型式	2
(a) Front tracking method	3
(b) Level set method	3
(c) Marker and cell method	3
(d) Volume-of-fluid method	3
1.2.2 伴隨熱傳及質傳現象之介面問題	4
1.2.2.1 僅考慮熱傳現象，無質傳(相變化)現象	4
1.2.2.2 考慮熱傳現象與質傳(相變化)現象	5
1.3 研究內容	8
第二章 數學模式	9
2.1 前言	9
2.2 通用傳輸方程式	9
2.3 質量及動量守恆方程式	10
2.4 能量守恆方程式	11
2.5 VOF 方程式	13
2.6 相變化模型	14
2.7 表面張力	16
2.8 邊界條件	17
第三章 數值方法	18
3.1 前言	18
3.2 VOF 方程式	18
3.2.1 介面重建	18

3.2.2 VOF 方程式之離散	19
3.2.3 VOF 修正	20
3.2.3.1 過度填充(Over filling, $\alpha_p > 1$)	20
3.2.3.2 過度枯竭(Over depleting, $\alpha_p < 0$)	21
3.2.3.3 填充不足(Under filling, $\alpha_p < 1$)	21
3.2.3.4 枯竭不足(Under depleting, $\alpha_p > 0$)	22
3.2.4 VOF 計算流程	22
3.3 動量方程式之離散化	23
3.3.1 非穩態項(unsteady term)	23
3.3.2 對流項(convection term)	23
3.3.3 擴散項(diffusion term)	24
3.3.4 源項(source term)	24
3.3.5 線性代數式之整理	25
3.4 連續及動量方程式耦合處理	26
3.5 求解動量方程式所用之流體性質	31
3.6 能量方程式之離散化	32
3.6.1 前言	32
3.6.2 單一均質模型	32
3.6.3 線性代數式之整理	33
3.6.4 介面處之網格溫度處理	33
3.7 介面處熱傳量之計算	33
3.8 解題流程	35
第四章 結果與討論	36
4.1 相變化測試(一), Stefan's 1st problem	36
4.2 相變化測試(二), Stefan's 2nd problem	39
4.3 薄膜沸騰(film boiling)	42
第五章 結論	46
參考文獻	47

表目錄

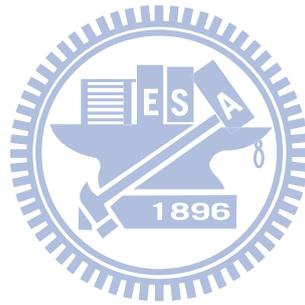
表一、一大氣壓之飽和純水之流體性質	50
表二、Stenfan 問題之計算結果比較表	50
表三、Sucking 問題之計算結果比較表	50
表四、薄膜沸騰測試所用之流體性質 ($P_{sat} = 1.0135 \times 10^5 Pa$)	51



圖目錄

圖 2.1 通用傳輸方程式示意圖	52
圖 2.2 流體分布及曲率符號之示意圖	52
圖 3.1 控制體積及其鄰格點之關係示意圖	53
圖 3.2 對計算主格點之體積通量守恆示意圖	53
圖 3.3 一介面前端跨越過一計算網格之示意圖	54
圖 3.4 一介面尾端跨越過一計算網格之示意圖	54
圖 3.5 計算主格點與鄰格點和計算面之示意圖	55
圖 3.6 介面處熱傳量計算之示意圖	56
圖 3.7 介面處熱傳量計算之示意圖	56
圖 4.1 Stefan 1st 問題之示意圖	57
圖 4.2 網格(50x5) 計算結果之介面位置圖	58
圖 4.3 網格(100x10) 計算結果之介面位置圖	58
圖 4.4 網格(200x20) 計算結果之介面位置圖	58
圖 4.5 網格(50x5) 計算時間 $t=10s$ 之溫度分佈圖	59
圖 4.6 網格(100x10) 計算時間 $t=10s$ 之溫度分佈圖	59
圖 4.7 網格(200x20) 計算時間 $t=10s$ 之溫度分佈圖	59
圖 4.8 Stefan 問題計算結果之介面位置圖	60
圖 4.9 Stefan 問題計算結果之介面速度對時間變化圖	60
圖 4.10 Stefan's 2nd 問題之示意圖	61
圖 4.11 網格(50x5) 使用不同混合熱傳係數計算結果之介面位置圖	62
圖 4.12 網格(100x10) 使用不同混合熱傳係數計算結果之介面位置圖	62
圖 4.13 網格(200x20) 使用不同混合熱傳係數計算結果之介面位置圖	62
圖 4.14 網格(50x5)不同混合熱傳係數計算時間 $t=2s$ 之溫度分佈圖	63
圖 4.15 網格(100x10)不同混合熱傳係數計算時間 $t=2s$ 之溫度分佈圖	63
圖 4.16 網格(200x20)不同混合熱傳係數計算時間 $t=2s$ 之溫度分佈圖	63
圖 4.17 Sucking 問題計算結果之介面位置圖	64
圖 4.18 Sucking 問題計算結果之介面速度對時間變化圖	64
圖 4.19 液相流體之熱傳係數搭配不同 Δn 計算結果之介面位置圖	65
圖 4.20 液相流體之熱傳係數搭配最佳 Δn 計算結果之介面位置圖	65
圖 4.21 液相流體之熱傳係數搭配最佳 Δn 計算結果之溫度分佈圖	66
圖 4.22 液相流體之熱傳係數搭配最佳 Δn 之介面速度對時間變化圖	66
圖 4.23 薄膜沸騰模擬所給的初始介面分佈圖	67
圖 4.24 薄膜沸騰模擬在不同網格之第一顆氣泡升起情況	67
圖 4.25 薄膜沸騰模擬在計算時間 $t=0.35s$ 不同網格之溫度分佈	68
圖 4.26 氣相體積對初始氣相體積之比值對時間之變化圖	68

圖 4.27 網格 16x48 之氣泡生成與速度場分佈圖	69
圖 4.28 網格 32x96 之氣泡生成與速度場分佈圖	70
圖 4.29 網格 64x192 之氣泡生成與速度場分佈圖	71
圖 4.30 不同網格在底部一定點之 Nu 隨時間變化圖	72



符號表

符號	定義
c_v	等容比熱
C_{f_i}	通過 f_i 面之體積通量
e	內能
F_C	面上的對流通量
F_D	面上的擴散通量
k	熱傳導係數
\dot{m}	質量流率
\dot{m}_f	介面上的質量流率
p	流體壓力
\bar{S}_f	面的法向量
\bar{S}_f^w	液體浸潤截面之法向量
t	時間
\bar{v}	流體速度
希臘符號	
α	流體體積分率
$\bar{\delta}_{Pnb}$	P 到 nb 距離向量
κ	曲率半徑
μ	黏滯係數
ρ	密度
$\bar{\tau}$	剪應力
σ	表面張力



第一章 緒論

1.1 前言

有關雙流體流的自由介面問題已經被廣泛研究，因為它不論是在於科學或工業應用方面都極為重要。例如對於生物科技、船舶工程或石化工業、鑄模工業等領域，如何準確預估自由介面的位置都是重要的研究議題。在生物科技方面希望能藉由探討自由介面的運動，研究血管內物質傳輸現象。而在氣液雙相流研究中，模擬沸騰氣泡的生成也是重要議題，首先必須準確預測氣液介面位置。在石化工業方面希望模擬自由表面的運動，來幫助設計出安全可靠的燃料載器。而鑄模工業希望以數值模擬作為開發新模具的先行設計，若能準確有效的預測液態金屬在模具中的注入情況，以降低過去試誤法所需較高的開模時間與模具成本。這些研究都希望獲得準確的介面分佈，並且同時保持介面的鮮明性。

此外雙流體流問題常伴隨著熱傳現象，例如在模擬鑄模過程時，若同時考慮熱傳現象，便可得知模具內的溫度變化，避免過高的局部溫度造成模具的破壞，也同時能掌握金屬固化情形。而在模擬沸騰(boiling)現象時，因氣液間溫度差造成的熱傳現象更是研究重點，因為若要準確的預測相變化的情況，必須先準確地掌握介面處的熱傳量及質傳量。接著介紹有關求解兩流體介面問題及伴隨熱傳、質傳現象的介面問題。

1.2 文獻回顧

1.2.1 求解雙流體流之介面問題

一般求解雙流體流的介面問題的數值方法可以分為 Lagrangian 型式 (重建網格) 及 Eulerian 型式(固定網格) 兩種類型。

1.2.1.1 Lagrangian 型式

此種方法是在每個時階都會根據新的介面位置重建新的網格，確保介面隨時都是準確預測並且保持其鮮明外型。而下個時階的介面位置是透過計算已知的速度場而得到。當得到下個時階的自由表面邊界(free surface boundary)時，便開始重建網格並且更新流體的性質分佈。因為其邊界條件是根據新時階之介面位置來設定，所以它能非常準確的預測介面移動。但是當流場變化太過複雜時，如劇烈的變形或翻騰後造成的破碎表面，都會降低其預測介面的準確性[1][2]。

1.2.1.2 Eulerian 型式

Eulerian 型式採用的是固定式的網格，所以不會有變形網格造成誤差，但是其最主要的缺點就是會有數值擴散現象。這個現象會造成界面擴散至數個網格上，如此介面不再明確。因此有許多學者提出不同方法希望降低此類數值擴散現象。

(a) Front tracking method

此種方法是在計算開始前，將很多不具質量的追蹤質點均勻分布在初始的介面上。而流體計算是在一 Eulerian 系統的進行，而追蹤質點相當位於一 Lagrangian 系統，要即時將 Eulerian 系統的資料傳送到 Lagrangian 系統是很複雜，而且當推廣到三維系統，追蹤質點的數量將會大增並造成計算量與所需記憶體急遽增加[3]。

(b) Level set method

Level set 方法是以依連續函數(level set function)定義計算格點至界面的最短距離，如此介面上的 level set function 值永遠都是零。然後經求解 level set 之傳輸方程式可以得到介面所在位置。此方法所求得介面為連續分佈，但是此方法並未能保持質量守恆，當介面有劇烈變形時，會因為質量不守恆而產生誤差[4][5]。

(c) Marker and cell method

MAC 方法是將許多不具質量的標記點均勻散佈在某一流體的區域，而這些質點隨著計算過程變化而標定出此流體的介面分布。此方法優點是能提供準確的介面定義，但隨著計算模型的複雜及計算時間的增加，而這些紀錄質點將會消耗大量計算時間及計算儲存量[6]。

(d) Volume-of-fluid method

VOF 方法是將某一流體的體積分率訂為 1 作為一指標函數(indicator function)，而另一流體的體積分率則為 0，體積分率則介於 1~0 的網格即代表介面所在位置。此方法的優點是僅需求解 VOF 之傳輸方程式便可得

到介面位置，並且 VOF 變化可滿足質量守恆。通常 VOF 方法可大致分作介面捕捉法及介面重建法兩大類。

所謂介面捕捉法是利用不同的離散法去直接描述介面處的不連續性，例如以一階上風法最為穩定但會造成數值擴散的現象使得介面不再明確；而下風法雖不穩定，但具有反擴散(anti-diffusion)的特性可保持介面的形狀。因此有許多學者提出了混合型式的介面捕捉法，結合高解析(易擴散)與壓縮性(較不穩定)的離散法來準確預測介面運動並將介面擴散情形保持在數個計算網格內[7]、[8]、[9]。

而介面重建法則是利用 VOF 的資訊在網格內重建介面的位置，如最早 Noh 及 Woodward 學者所提出的 SLIC[10]，他們預測的介面僅有水平或垂直兩種方向；之後 Young 學者提出 PLIC 能提供更為準確的介面位置，但也更為複雜[11]。本研究中計算 VOF 方程式便是屬於介面重建法，由崔燕勇及林仕文所提出的 CISIT (conservative interpolation scheme for interface tracking) [12]，將會在 3.2 節中介紹此方法。

1.2.2 伴隨熱傳及質傳現象之介面問題

1.2.2.1 僅考慮熱傳現象，無質傳(相變化)現象

1995 年，Pericleous et al.[13] 發展在一個部分為液體所填滿的空穴中，同時考慮熱傳現象以及重力影響的自由表面運動的數學模型。其假設空氣

及液體在空穴中所佔有的體積可以視為一在介面擁有極強烈不連續性的性質的單一流體，假設無相變化。經由求解一個具兩個值的 scalar advection equation 而得到兩個流體各自所佔有的體積。此研究應用 Van Leer TVD 差分方法在 scalar advection equation 上，同時在動量及焓方程式中應用通量修正。最後求解兩個問題，首先為一在封閉並具牆上熱傳的空穴中的液體柱的倒榻過程。第二個則是模擬液態鋁金屬填滿模具及瞬時的冷卻現象。

2002 年，Davidson and Rudman[14]發展一新的 VOF 方法計算一變動的兩流體介面處的熱傳或質傳現象。假設無相變化，並且假設此兩相介面無熱阻存在，所以介面上任一點皆可達熱平衡。在處理能量方程式時，是個別以單位體的熱(q)去描述兩相的能量方程式，並且以一熱源相表示經過兩相介面的熱傳量。求得兩相各自的 q 後再加總起來，進而求得溫度分佈。在數值方法方面，處理對流項時使用體積通量來校正，而在兩相介面上使用溫度及擴散熱通量的連續條件。此研究先測試一固定圓球體的熱擴散現象(無對流效應)，其計算結果符合解析解。再進行(a)一環狀氣泡的成長與其熱傳現象；(b)一成長的液滴(droplet)的質傳現象。

1.2.2.2 考慮熱傳現象與質傳(相變化)現象

2004 年，Esmaeli and Tryggvason [15]以前端追蹤法(front tracking) 及有限差分(finite difference) 技巧模擬具相變化的沸騰流(boiling flow)。利用單一流場(single field) 的假設，並且考慮介面處質量、動量及能量的跳躍

條件(jump conditions) 而將兩流體的質量、動量與能量方程式組合併成一組統御方程組。其中在介面處因為跳躍條件造成兩相間動量及能量方程式之差異，各增加一 delta function 形式之源項(source term)作為修正。此研究進行了一些具理論解或與可與其他數值結果比較之測試，最後成功模擬一水平平板上之薄膜沸騰(film boiling) 現象。

2007 年，Yang et al.[16]對於一 R141B 冷媒在盤管(coiled tube) 中的沸騰現象分別以數值模擬及實驗量測方式進行研究。在數值模擬方面，使用商業軟體 Fluent 6.0 中的 VOF 雙相流模型搭配蒸發模型的 UDF(user defined function)。並且使用 $k-\epsilon$ 模型作為紊流模型，而在求解動量方程式時使用 PISO(pressure-implicit with splitting of operators) 將速度及壓力場進行耦合，在離散動量及能量方程式時使用二階的上風法(upwind)。將數值模擬及實驗量測結果進行比較，由數值模擬預測之氣泡分布與實驗觀測相當接近，也發現到溫度分布受到相分布之影響，例如高溫區皆發生於氣相區。

2009 年，Sander and Weigand [17]使用 DNS(direct numerical simulation) 搭配 VOF 方法，模擬內含有液態冷卻金屬的引擎氣閥柱(hollow valve stem) 在引擎運轉的條件時，因受到加速度而產生的雙相熱傳現象。研究幾何形狀、加速度或者液態冷卻金屬的填充程度等影響因子對於冷卻效果的影響。模擬結果發現以閥內完全填滿液態冷卻金屬的冷卻效果最佳，但是過高或

過低的填充率在某些特定轉速時容易產生溫度急遽上升的 shaker-effect，易造成機件損壞，因此較佳填充率為 30~50%。由於此研究模型十分複雜，採用較多簡化模型，此研究結果僅作為定性分析較為適當。

2010 年，Haelssig et al. [18]採用單一流體(single-fluid)模型以一組包含質量、動量、能量及物種方程式組來模擬一多流體組成之氣液流在介面處的質傳與熱傳現象。因為作者將物種與能量在氣液介面處的跳躍條件(jump condition) 都包含在統御方程式之源項(source term)，如此一來此方法便可適用於多相物質的相變化情況。此研究使用商業軟體 Fluent 6.3.26 搭配 PLIC(Piecewise Linear Interface Calculation) 求解 VOF 方程式。而動量方程式則以 PISO 求解。動量、能量及物種方程式採用二階的上風法進行離散。作者利用此方法首先模擬乙醇(液態)-水(氣態)兩項流體在長 30mm 高 6mm 之二維管道中的質傳及熱傳現象。模擬結果的兩相間質傳現象與實驗結果接近。

1.3 研究內容

本研究希望以有限體積法(Finite Volume Method) 搭配一新發展的 VOF (Volume of fluid) 型式的介面重建法求解雙流體流之熱傳與質傳現象。

在模擬雙流體流時，採用單一流體(Single fluid) 的模型進行模擬，也就是以一單流體代表原本的兩相異流體，此單一流體擁有連續的速度場及溫度場分佈，而此單一流體之流體性質則是以流體體積分率的方式進行混合。最後可用一組質量、動量及能量之統御方程式組描述此單一流體的模型。

兩流體間的質傳現象(相變化)，先利用介面重建法中所得到的介面位置計算出介面處的熱傳量，再利用介面處的質量與能量的跳躍條件(jump condition) 求出兩相間的質傳量。並且將相變化造成的質量變化量以一源項型式加入連續方程式中，在求解動量方程式時將同時滿足連續方程式，藉此模擬兩流體間的相變化情形。為了驗證相變化模型之準確性，本研究先測試兩個具有理論解之相變化問題，最後模擬一薄膜沸騰之氣泡生成過程。

第二章 數學模式

2.1 前言

本章將會描述計算模擬流場的數學模式。本研究中將兩個不相融的相異流體視為一均質、連續的流體進行計算，但此兩種流體仍具有各自的流體性質，在兩流體相接介面處保有不連續的流體性質。使用一步階函數型的體積分率表示兩流體的交接介面。此體積分率會影響流體性質分佈而且定義出兩流體的介面分佈。在描述此雙流體(two-fluid)系統的數學模式時使用以下基本假設：暫態、不可壓縮的黏性流、二維並且考慮重力影響及表面張力。



2.2 通用傳輸方程式

質量、動量與能量的守恆式可以用一具有物理性質 ϕ 的傳輸方程式表示。此控制體積的通用傳輸方程式示意圖如圖 2.1，其數學表示式：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\forall} \phi d\forall + \oint_s F_c \cdot d\bar{S} = \oint_s F_D \cdot d\bar{S} + \iiint_{\forall} Q_{\forall} d\forall + \oint_s Q_s \cdot d\bar{S} \quad (2.1)$$

其中 t 表示時間， \forall 是控制體積， S 是控制表面， $F_c = \rho \bar{V} \phi$ 表示進出邊界的對流通量， F_D 則為進出邊界的擴散通量， \bar{V} 為流體速度，而 Q_{\forall} 表示控制體積內的源項， Q_s 是邊界上的源項。然後藉由高斯散度定理，可將(2.1)改寫為：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\forall} \varphi d\forall + \iiint_{\forall} \nabla \cdot F_C d\forall = \iiint_{\forall} \nabla \cdot F_D d\forall + \iiint_{\forall} Q_v d\forall + \iiint_{\forall} \nabla \cdot Q_s d\forall \quad (2.2)$$

若考慮控制體積內一點，其微分型式的傳輸方程式可表示為：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot F_C = \nabla \cdot F_D + Q_v + \nabla \cdot Q_s \quad (2.3)$$

2.3 質量及動量守恆方程式

質量及動量守恆方程式，也可使用通用傳輸方程式表示。表示質量守恆方程式時，物理性質 $\varphi = \rho$ ，並且省略擴散項及源項。而動量守恆方程式中，物理性質 $\varphi = \vec{V}$ ，而系統為非穩態且不可壓縮流，在處理擴散項使用黏性牛頓流體假設，在源項考慮重力及表面張力。則質量和動量守恆方

程式可分別表示為：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \nabla P + \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{V}) + \rho g + f_\sigma \quad (2.5)$$

其中 ρ 為密度， \vec{V} 為速度， P 為壓力， μ 為黏滯係數， g 為重力加速度而 f_σ 為表面張力。

因為此雙流體系統之流體被視為一均質流體進行分析，此均質流體具有連續的速度分佈與溫度分佈。故系統的動量方程式可以用(2.5)式表之，其中密度及黏滯係數則以流體體積分率 α 進行混合如(2.6)和(2.7)式所示：

$$\rho = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2 \quad (2.6)$$

$$\mu = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2 \quad (2.7)$$

其中下標 1、2 分別代表兩個不同流體， α 是流體 1 所占的體積分率。在單一流體的區域使用流體本身的流體性質，而介面附近則是使用體積分率進行混合。所以整個計算範圍內所有性質是呈現片段連續(piecewise continuous)的分佈。

2.4 能量守恆方程式

考慮系統的能量方程式時，在低速流情況下，將忽略黏滯力所造成的能量消耗項，而能量方程式可用流體內能型式表示如式(2.8)。因吾人希望將兩相各自的能量方程式以類似處理動量方程式的方式進行合併。在擴散項部份因為變數不一致無法直接將混和之流體性質提出，因此做了一些化簡的動作。

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} e) = \nabla \cdot \left(\frac{k}{c_v} \nabla e \right) \quad (2.8)$$

內能型式之能量方程式

如式(2.8) 所示，以內能型式表達能量方程式中的擴散項，再將兩流體各自的能量方程式以體積分率進行混合：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\alpha \rho_1 e_1 + (1-\alpha) \rho_2 e_2] + \nabla \cdot \vec{V} [\alpha \rho_1 e_1 + (1-\alpha) \rho_2 e_2] \\ = \nabla \cdot \left[\alpha \frac{k_1}{c_{v_1}} \nabla e_1 + (1-\alpha) \frac{k_2}{c_{v_2}} \nabla e_2 \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

定義：

$$e = \frac{\alpha \rho_1 e_1 + (1-\alpha) \rho_2 e_2}{\alpha \rho_1 + (1-\alpha) \rho_2} \quad (2.10)$$

根據式(2.10) 整理式(2.9)，並且將擴散項化簡可得式(2.11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot \vec{V}(\rho e) \\ = \nabla \cdot \left[\alpha \frac{k_1}{c_{v_1}} \nabla e_1 + (1-\alpha) \frac{k_2}{c_{v_2}} \nabla e_2 \right] \\ \approx \nabla \cdot \left[\left(\alpha \frac{k_1}{c_{v_1}} + (1-\alpha) \frac{k_2}{c_{v_2}} \right) \nabla e \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

定義

$$\frac{k}{c_v} = \alpha \frac{k_1}{c_{v_1}} + (1-\alpha) \frac{k_2}{c_{v_2}} \quad (2.12)$$

而內能型式之能量方程式可改寫成：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot \vec{V}(\rho e) \approx \nabla \cdot \left[\left(\frac{k}{c_v} \right) \nabla e \right] \quad (2.13)$$

定義 e_1 及 e_2 如式(2.15), (2.16)

$$e_1 = c_{v_1} (T_1 - T_o) \quad (2.14)$$

$$e_2 = c_{v_2} (T_2 - T_o) \quad (2.15)$$

其中 T_o 為參考溫度，若將式(2.14)和(2.15) 代回式(2.10)，可得：

$$e = \frac{\alpha \rho_1 c_{v_1} (T_1 - T_o) + (1-\alpha) \rho_2 c_{v_2} (T_2 - T_o)}{\alpha \rho_1 + (1-\alpha) \rho_2} \quad (2.16)$$

因為本研究將雙流體系統視為一均質流體，故其溫度場為連續分佈，也就

是 $T = T_1 = T_2$ ，因此可將式(2.16) 之溫度提出如式(2.17)。

$$T = \frac{\rho e + T_o [\alpha \rho_1 c_{v1} + (1-\alpha) \rho_2 c_{v2}]}{\alpha \rho_1 c_{v1} + (1-\alpha) \rho_2 c_{v2}} \quad (2.17)$$

求得 e 後，根據式(2.17) 可求得溫度分佈。

2.5 VOF 方程式

在本研究中使用 VOF(volume-of-fluid)方法，其體積分率定義如式(2.18)

$$\alpha = \frac{\text{Volume of fluid 1}}{\text{Volume of control volume}} \quad (2.18)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{for fluid 1} \\ 0, & \text{for fluid 2} \\ 0 < \alpha < 1, & \text{for transition region} \end{cases} \quad (2.19)$$

從[19]可知對雙流體流而言，體積分率的物質微分(material derivative)為

零：

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \alpha = 0 \quad (2.20)$$

若將式 (2.20)在等號兩邊加上 $(\nabla \cdot \vec{V})\alpha$ ，則可整理得到式(2.21)：

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \alpha + (\nabla \cdot \vec{V})\alpha = (\nabla \cdot \vec{V})\alpha \quad (2.21)$$

若考慮系統為不可壓縮流，可將式(2.21)改寫成：

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha \vec{V} = 0 \quad (2.22)$$

2.6 相變化模型

在雙相流中考慮熱傳現象時，若兩相流體處於不同溫度時便會開始有熱傳現象產生，當其一相達到此時系統壓力的飽和溫度時，並且界面處的熱傳淨通量高於此時系統壓力的相變化潛熱時，便會在介面處開始產生相變化現象。

相變化代表有部分質量的流體轉換流體性質，此時原本在介面就存在的流體性質的不連續性需要進一步進行修正以滿足介面的跳躍條件 (jump conditions)，這些跳躍條件包括了質量、動量與能量，如式(2.23) 至 (2.25) [14]。

$$\rho_l (\vec{u}_l - \vec{u}_f) \cdot \vec{n} = \rho_v (\vec{u}_v - \vec{u}_f) \cdot \vec{n} = \dot{m}_f \quad (2.23)$$

$$\dot{m}_f (\vec{u}_v - \vec{u}_l) = (\tau_v - \tau_l) \cdot \vec{n} - (p_v - p_l) \mathbf{I} \cdot \vec{n} + \sigma \kappa \vec{n} \quad (2.24)$$

$$\dot{m}_f h_{fg} = \dot{q}_f = k_v \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_v - k_l \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_l \quad (2.25)$$

其中 \vec{u}_l 、 \vec{u}_v 、 \vec{u}_f 分別表示液相流體、氣相流體與介面速度， \dot{m}_f 為介面處相變化之質量流率，而 τ 、 p 、 σ 依序表示剪應力、壓力與表面張力項， \dot{q}_f 表示介面之淨熱傳通量。

在本研究中假設介面溫度為系統壓力的飽和溫度 $T_f = T_{sat}(P_\infty)$ ，此假設為一般液氣相變化之數值模擬所使用，適用於 macro scale 之沸騰問題 [20]。若是對於更小尺寸(如 micro scale)的沸騰問題，因為發現介面處存在

一壓力的不連續性，也就是 $P_v \neq P_l$ ，故兩相之飽和溫度也不相等

$T_{sat}(P_v) \neq T_{sat}(P_l)$ 。此時需要對於介面溫度作進一步修正。但本研究之模擬尺度屬於前者，因此採用介面溫度為系統壓力之飽和溫度之假設。

考慮質量的跳躍條件即式(2.23)，將式(2.25)代入式(2.23) 可將兩相間的速度不連續性表示成式(2.26)。

$$(\vec{u}_v - \vec{u}_l) \cdot \vec{n} = \frac{\dot{q}_f}{h_{fg}} \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right) \quad (2.26)$$

對一微小控制體積內的介面 F 上之微小截面面積進行積分，則介面處因相變化產生的速度的不連續性可改寫成式(2.27)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= \int_F \delta(\vec{x} - \vec{x}_f) (\vec{u}_v - \vec{u}_l) \cdot \vec{n} dA_f \\ &= \frac{1}{h_{fg}} \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right) \int_F \delta(\vec{x} - \vec{x}_f) \dot{q}_f dA_f \end{aligned} \quad (2.27)$$

其中 δ 為一 delta 函數， \vec{x}_f 代表位於介面上的一點，而 dA_f 為介面 F 上的微小面積。之後可將式(2.27) 加入原質量守恆方程式式(2.4) 作為修正，如式(2.28)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = \frac{1}{h_{fg}} \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right) \int_F \delta(\vec{x} - \vec{x}_f) \dot{q}_f dA_f \quad (2.28)$$

2.7 表面張力

本研究中使用 CSF(continuum surface force)的表面張力模型。在介面處因為表面張力的存而產生一壓力差可表示成式(2.29)

$$\Delta P = P_i - P_o = \sigma \kappa \quad (2.29)$$

其中 P_i 表凹面側的壓力， P_o 則為凸面側的壓力， σ 為表面張力係數， κ 為平均曲率半徑。當兩流體相接即存在一表面張力係數 σ ，若此兩流體互不相融， σ 為正值；若相融則為負值。若 κ 值為正值，表示流體 1 位於該介面區段的凸面側；而當 κ 值為負值，表示流體 2 位於該區段的凸面側，見圖 2.2。

一從流體 2 指向流體 1 的法線向量可用體積分率的梯度表示：

$$\vec{n} = \nabla \alpha \quad (2.30)$$

而平均曲率半徑 κ 可以改寫成單位法向量之散度：

$$\kappa = -\nabla \cdot \left(\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \quad (2.31)$$

我們可將式(2.29)及(2.31)代入動量守恆方程式式(2.5)中的表面張力，可得：

$$f_\sigma = -\sigma \nabla \cdot \left(\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right) \nabla \alpha \quad (2.32)$$

2.8 邊界條件

(1) 進出口邊界條件

本研究中進出口採用壓力邊界，利用給定進出口不同壓力值形成壓力差，此壓力差將會決定流量大小。而進出口速度計算採對流邊界條件，

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{V}_c \cdot \nabla \phi = 0, \text{ 其中 } \phi \text{ 為傳輸性質而 } \vec{V}_c \text{ 為對流速度。}$$

(2) 牆邊界條件

本研究中速度場的牆邊界條件採用無滑移(no-slip)邊界條件，即是($u=0$, $v=0$)。而溫度場部分：定溫條件($T=\text{constant}$)或絕熱條件($\frac{\partial T}{\partial n}=0$)



第三章 數值方法

3.1 前言

本章將對於第二章所敘述的數學模式進行離散，所使用的離散方法為有限體積法。首先介紹處理介面運動的 VOF 方程式，接著為動量方程式之離散、連續方程式與動量方程式之耦合處理。再來介紹能量方程式之離散以及介面溫度之處理，最後則為介面處熱傳量之計算以及解題流程。

3.2 VOF 方程式

本研究求解 VOF 方程式來預測介面的運動情況與位置分佈，使用由崔燕勇及林仕文所提出的 CISIT 介面追蹤法，此方法的解題程序主要可分為三步驟依序進行。首先為介面重建步驟，利用上一時階的 VOF 分佈計算出介面位置；接著求解離散後的 VOF 方程式得到新時階的 VOF 分佈；最後對於整個計算範圍的網格之 VOF 進行修正，避免因數值計算而造成的不符合物理現象情況。本節將依序大略介求解 VOF 步驟。

3.2.1 介面重建

在本研究中使用 $\alpha = 0.5$ 作為為介面所在處，首先將原本存在計算網格中心的 VOF 值，藉由式(3.1) 之線性權重關係式差分至網格節點上。

$$\alpha_v = \frac{\sum_i w_i \alpha_i}{\sum_i w_i} \quad (3.1)$$

其中 α_v 表示網格節點的 VOF 值，下標 i 表示網格節點周圍的網格，而 w_i 則表示節點周圍的網格所用的權重因子，此權重因子為計算網格體積之倒數。

藉由式(3.1) 可得到各網格節點的 VOF 值，若網格的某一邊上的兩節點之 VOF，一者大於 0.5 又另一者小於 0.5，則表示有介面通過此邊，便可利用線性內插差分出介面($\alpha = 0.5$)在邊上的位置，完成此網格的所有邊的計算後，以相同程序完成所有計算格點的計算，可以得到一連續、片段線性的介面分佈。

3.2.2 VOF 方程式之離散

將式(2.22) 對一控制體積進行體積分，再利用高斯散度將體積分化為面積分如式(3.2)。

$$\int_V \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV + \oint_S \alpha \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.2)$$

非穩態項(unsteady term)之離散：

$$\int_V \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV \approx \frac{\Delta V}{\Delta t} (\alpha_D^n - \alpha_D^o) \quad (3.3)$$

其中 ΔV 表示網格的體積， Δt 表示時間步階大小，上標 n 表示新時階的值，上標 o 則表示為前一時階的值。

對流項(convection term)之離散：

在使用介面重建法時，面上的通量為液體流體所浸潤的體積通量如式

(3.4) 所示：

$$\oint_S \alpha \vec{V} \cdot d\vec{S} \approx \sum_f \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f^w \quad (3.4)$$

其中下標 f 表示控制體積的表面處的性质， \vec{S}_f^w 則是表示面上被浸潤的區域的面向量，見圖 3.2。

經由式(3.3) 及式(3.4) 可將式(3.2) 改寫成下式(3.5)。

$$\frac{\Delta \nabla}{\Delta t} (\alpha_D^n - \alpha_D^o) + \sum_f \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f^w = 0 \quad (3.5)$$

3.2.3 VOF 修正

在理想情況中，當介面通過某網格後(介面不在此網格內)，此網格之 VOF 應該為 1 或 0，但實際上，某些情況下有些網格之 VOF 分佈並未符合以上的假設，因此必須針對這些網格之 VOF 進行修正。一般而言，可將這些情況整理為四種類型：

3.2.3.1 過度填充(Over filling, $\alpha_p > 1$)

參考圖 3.3，當一介面前端從主格點跨入下一個網格時，因為在上一時階(介面以實線表示之)在主格點右側的面(編號 2)上之 \vec{S}_f^w 為 0，故此面將不會有體積通量流出，如此可能造成主格點之 VOF 超過 1($\alpha_p > 1$)，此時稱這種情形為過度填充。故需將其修正至 1，修正的方法為依照體積通量的權重函數如式(3.6)將多出來的 VOF 值分配到其下游的格點，其下游

格點的 VOF 即是根據式(3.7) 進行修正，修正後使主格點的 VOF 為 1。

$$w_{Ni} = \frac{\max(C_{fi}, 0)}{\sum_j \max(C_{fj}, 0)} \quad (3.6)$$

$$\alpha_{Ni} = \alpha_{Ni} + w_{Ni} (\alpha_p - 1) \frac{\Delta v_p}{\Delta v_{Ni}} \quad (3.7)$$

其中 w_{Ni} 為下游格點之權重函數， $C_{fi} = \vec{V}_{fi} \cdot \vec{S}_{fi}$ 為通過 f_i 面之體積通量， α_{Ni} 為下游格點之 VOF， Δv_p 、 Δv_{Ni} 分別表主格點與下游網格體積。

3.2.3.2 過度枯竭(Over depleting, $\alpha_p < 0$)

參考圖 3.4，當介面尾端離開主格點 P 而進入下一格點時，若流出體積通量過大造成主格點之 VOF 小於 0 ($\alpha_p < 0$) 時，稱此種情況為過度枯竭，必須將主格點之 VOF 修正為 0。使用類似處理過度填充的方法，依照體積通量的權重函數將其下游格點之 VOF 往主格點補，直到主格點之 VOF 為 0。式(3.6) 為所用之權重函數，而式(3.8) 則為下游格點之 VOF 修正式。

$$\alpha_{Ni} = \alpha_{Ni} + w_{Ni} \alpha_p \frac{\Delta v_p}{\Delta v_{Ni}} \quad (3.8)$$

3.2.3.3 填充不足(Under filling, $\alpha_p < 1$)

在模擬 shear flow 時，因為在旋轉方向有極大的速度梯度，可能發生當介面前端離開主格點後(如圖 3.3) 主格點之 VOF 卻小 1 ($\alpha_p < 1$) 的情況，

稱之為填充不足。此時主格點四個節點之 VOF 都大於 0.5，代表介面已經通過主格點，但實際主格點的 VOF 卻小於 1。修正方法也是藉由權重函數將下游網格的 VOF 往主格點補直到主格點之 VOF 為 1，式(3.6)為所用的權重函數，並依照式(3.7)修正下游網格之 VOF。

3.2.3.4 枯竭不足(Under depleting, $\alpha_p > 0$)

同樣在模擬 shear flow 時，如圖 3.4 介面尾端已經遠離主格點，理論上主格點之 VOF 應該為 0，但實際主格點的 VOF 卻大於 0，稱此種情形為枯竭不足。此時主格點之四個節點的 VOF 都小於 0.5，代表介面已經離開主格點，但主格點的 VOF 大於 0。故將主格點多餘的 VOF 依權重函數往下游網格分配，所用權重函數為式(3.6)而下游網格之 VOF 修正則如式(3.8)。

3.2.4 VOF 計算流程

本研究使用 CISIT 的介面追蹤法求解 VOF 的計算流程為：介面位置重建、求解 VOF 方程式 與進行 VOF 修正，其中每一時階將會進行兩次的 VOF 修正步驟以確保計算範圍內每一個網格之 VOF 不會有殘留過大或過小值。完成整個 VOF 計算流程後，除了介面所在的網格外，其餘網格之 VOF 皆為 1 或 0 的均勻分佈。

3.3 動量方程式之離散化

動量方程式可表示如式(3.9)

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi) = \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) + Q_\phi \quad (3.9)$$

其中 ϕ 表示速度， Q_ϕ 為動量方程式中的源項，若將此方程式進行體積分並且配合高斯散度定理可得到式(3.10)。

$$\iiint_V \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint_S (\rho \vec{V} \phi) \cdot d\vec{S} = \oint_S (\mu \nabla \phi) \cdot d\vec{S} + \iiint_V Q_\phi dV \quad (3.10)$$

3.3.1 非穩態項(unsteady term)

將式(3.10)中的非穩態項進行離散：

$$\iiint_V \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dV \approx \frac{\rho_P^o \Delta V}{\Delta t} (\phi_P^n - \phi_P^o) \quad (3.11)$$

其中下標 P 代表計算主格點，上標 n、o 各代表新時階及上一個時階的值。

3.3.2 對流項(convection term)

對於對流項的面積分可以表示如式(3.13)：

$$\oint_S (\rho \vec{V} \phi) \cdot d\vec{S} \approx \sum_f (\rho \vec{V} \phi)_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f F_f^C = \sum_f \dot{m}_f \phi_f \quad (3.12)$$

其中 \dot{m}_f 為通過計算面的質量通量。而對流通量 ϕ_f 則是以一通量限制方程式所決定如式(3.13)，其細節請參考 3.2 節。

$$\phi_f = \phi_D + \gamma(r) \left(\frac{\phi_A - \phi_D}{2} \right) \quad (3.13)$$

其中下標 D 表 donor 格點，A 則為 acceptor 格點。而對於對流通量的 donor, acceptor 計算如式(3.15) 所示。

$$\begin{cases} \phi_D = \phi_P, & \phi_A = \phi_{nb} & \text{for } \dot{m}_f > 0 \\ \phi_D = \phi_{nb}, & \phi_A = \phi_D & \text{for } \dot{m}_f < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

本研究之動量方程式採用的通量限制方程式為 Van Leer ，表示如式(3.15)

$$\gamma(r) = \frac{r + |r|}{r + 1} \quad (3.15)$$

3.3.3 擴散項(diffusion term)

擴散項的面積分可化簡如式(3.16)

$$\oint_S (\mu \nabla \phi) \cdot d\vec{S} \approx \sum_f (\mu^o \nabla \phi)_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f F_f^D \quad (3.16)$$

$$\text{令： } \vec{S}_f = \vec{d} + (\vec{S}_f - \vec{d})$$

其中 \vec{d} 表一從主控容中心指向鄰近控容中心之向量，可用式(3.17)表示。見

圖 3.7 。

$$\vec{d} = \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_d \cdot \vec{S}_f} \vec{\delta}_d \quad (3.17)$$

而擴散通量即可改寫成：

$$F_f^D = \frac{\mu_f^o |\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_d \cdot \vec{S}_f} (\phi_{nb}^o - \phi_P^o) + \mu_f^o \nabla \phi_f^o \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \quad (3.18)$$

3.3.4 源項(source term)

源項的體積分可表示為：

$$\iiint_{\forall} Q_{\phi} d\forall \approx (q_{\phi} \Delta\forall)_p \quad (3.19)$$

其中動量方程式中的源項包括壓力、重力以及表面張力，敘述如下。

壓力項

壓力項的面積分之化簡近似：

$$\oint_S P d\vec{S} \approx \sum_f P_f^o \vec{S}_f = \nabla P^o \Delta\forall \quad (3.20)$$

重力項

重力項的體積分之化簡近似：

$$\iiint_{\forall} \rho \vec{g} d\forall \approx \vec{g} \rho^o \Delta\forall \quad (3.21)$$

表面張力項

在處理表面張力項時，以式(3.22)表示主格點上體積分率之梯度，而計算面上的體積分率 α_f 則是由相鄰兩個格點的體積分率進行內插所得，最後表面張力項以式(3.23) 表示。

$$(\nabla \alpha)_p = \frac{1}{\Delta\forall} \sum_f \vec{S}_f \alpha_f \quad (3.22)$$

$$\iiint_{\forall} \sigma \kappa \nabla \alpha d\forall = \frac{-\sigma}{\Delta\forall} \sum_f \vec{S}_f \cdot \left[\frac{(\nabla \alpha)_f}{|\nabla \alpha|_f} \right] \sum_f \vec{S}_f \alpha_f \quad (3.23)$$

3.3.5 線性代數式之整理

將上述動量方程式之各項離散式整理為式(3.24) 的型式。

$$A_P \phi_P^n = \sum_{nb} A_{nb} \phi_{nb}^n + Q_{\phi} - \nabla P^o \Delta\forall \quad (3.24)$$

其中

$$A_p = \sum_{nb} A_{nb} + \rho_p \frac{\Delta \nabla}{\Delta t} \quad (3.25)$$

$$A_{nb} = \frac{\mu_f \left| \vec{S}_f \right|^2}{\vec{\delta}_d \cdot \vec{S}_f} + \max(-\dot{m}_f, 0) \quad (3.26)$$

$$Q_\phi = \sum_f \left[-\dot{m}_f \frac{\gamma(r)}{2} (\phi_A - \phi_D)^o + \mu_f^o \nabla \phi_f^o (\vec{S}_f - \vec{d}) \right] + \rho_p^o \phi_p^o \frac{\Delta \nabla}{\Delta t} + \rho_p^o \vec{g} \Delta \nabla + \sigma \kappa (\nabla \alpha_p^o) \Delta \nabla \quad (3.27)$$

3.4 連續及動量方程式耦合處理

若單純求解動量方程式，並無法確保求得之結果一定滿足連續方程式。

所以本研究將連續與動量方程式耦合處理，其主要包括一次壓力預測步驟以及兩次壓力修正步驟，最主要藉由兩次修正步驟可以使計算結果滿足連續方程式，而將連續方程式與速度場耦合在一起。此演算法計算程序介紹如下。

預測步驟

首先將式(3.24) 改寫為：

$$A_p \vec{V}_p^* = \sum_{nb} A_{nb} \vec{V}_{nb}^* + (S - \nabla P_p^o \Delta \nabla) \quad (3.28)$$

其中 \vec{V}_p^* 表未經修正的速度項並不滿足連續方程式，S 表源項。將上式同除

以 A_p ，並且

令

$$\vec{H}_p^* = \frac{\sum_{nb} A_{nb} \vec{V}_{nb}^* + S}{A_p} \quad (3.29)$$

可得：

$$\bar{V}_P^* = \frac{\sum_{nb} A_{nb} \bar{V}_{nb}^* + S}{A_P} - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_P} \right)_P \nabla P_P^o = \bar{H}_P^* - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_P} \right)_P \nabla P_P^o \quad (3.30)$$

其中式(3.30)中的上標“ $^-$ ”代表此值是根據一權重因子 ω_f 將主格點 P 與相鄰格點 C 進行內插所得。

第一次修正步驟

在進行第一次修正時，會考慮到質量守恆而得到一個更新的壓力，而在第一次修正的所得的新速度場以上標**表示，而新壓力場以上標*表之。

$$A_P \bar{V}_P^{**} = \sum_{nb} A_{nb} \bar{V}_{nb}^* + (S - \nabla P_P^* \Delta \nabla) \quad (3.31)$$

將式(3.31)同除以 A_P 並且使用式(3.29)改寫成：

$$\bar{V}_P^{**} = \frac{\sum_{nb} A_{nb} \bar{V}_{nb}^* + S}{A_P} - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_P} \right)_P \nabla P_P^* = \bar{H}_P^* - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_P} \right)_P \nabla P_P^* \quad (3.32)$$

而定義 $V' \equiv V^{**} - V^*$, $P' \equiv P^* - P^o$ 可以得到主格點的第一次速度修正方程式：

$$\bar{V}_P' = - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_P} \right)_P \nabla P_P' \quad (3.33)$$

而計算面上的速度修正方程式也以同樣方式可得：

$$\bar{V}_f' = - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_P} \right)_f \nabla P_f' \quad (3.34)$$

所以體積通量的修正方程式則表示成：

$$\dot{V}_f' = \bar{V}_f' \cdot \bar{S}_f = \left[- \left(\frac{\Delta \nabla}{A_P} \right)_f \nabla P_f' \right] \cdot \bar{S}_f \quad (3.35)$$

令 $\overline{S}_f = \overline{d} + (\overline{S}_f - \overline{d})$ 將式(3.35) 改寫成式(3.36)：

$$\dot{V}_f' = - \left[\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\overline{S}_f|^2}{\overline{\delta}_{Pnb} \cdot \overline{S}_f} (\nabla P_f' \cdot \overline{\delta}_{Pnb}) + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot (\overline{S}_f - \overline{d}) \right] \quad (3.36)$$

$$\text{其中 } \overline{d} = \frac{|\overline{S}_f|^2}{\overline{\delta}_{nb} \cdot \overline{S}_f} \overline{\delta}_{nb}$$

而式(3.36)中 $\nabla P_f' \cdot \overline{\delta}_{Pnb}$ 改寫成 $P_{nb}' - P_p'$ ，可得：

$$\dot{V}_f' = - \left[\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\overline{S}_f|^2}{\overline{\delta}_{Pnb} \cdot \overline{S}_f} (P_{nb}' - P_p') + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot (\overline{S}_f - \overline{d}) \right] \quad (3.37)$$

所以第一次體積通量修正方程式可表示如：

$$\dot{V}_f^{**} = \dot{V}_f^* - \left[\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\overline{S}_f|^2}{\overline{\delta}_{Pnb} \cdot \overline{S}_f} (P_{nb}' - P_p') + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot (\overline{S}_f - \overline{d}) \right] \quad (3.38)$$

其中的 \dot{V}_f^* 項可以從以下步驟得到，首先將 \overline{V}_f^* 以式(3.32)的型式表示：

$$\overline{V}_f^* = \overline{H}_f^* - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f^o \quad (3.39)$$

$$\text{其中 } \overline{H}_f^* = \overline{\overline{V}}_f^* + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \overline{\nabla P}_f^o \quad (3.40)$$

而 $\overline{\overline{V}}_f^*$ 與 $\overline{\nabla P}_f^o$ 則是以一權重因子 ω_f 對主格點及相鄰點差分所得，如：

$$\overline{\nabla P}_f^o = \omega_f \nabla P_{nb}^o + (1 - \omega_f) \nabla P_p^o \quad (3.41)$$

$$\overline{\overline{V}}_f^* = \omega_f \overline{V}_{nb}^* + (1 - \omega_f) \overline{V}_p^* \quad (3.42)$$

將式(3.40)代回式(3.39)可得：

$$\overline{V}_f^* = \left[\overline{\overline{V}}_f^* + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \overline{\nabla P}_f^o \right] - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f^o \quad (3.43)$$

其中 $\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f$ 是採主格點與相鄰格點的幾何平均：

$$\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_p + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_{nb} \right] \quad (3.44)$$

所以最後將計算面上的體積通量表示如下：

$$\begin{aligned} \dot{V}_f^* &= \overline{V}_f^* \cdot \overline{S}_f = \overline{\overline{V}_f^*} \cdot \overline{S}_f - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f (\nabla P_f^* - \overline{\nabla P_f^o}) \cdot \overline{S}_f \\ &\approx \overline{\overline{V}_f^*} \cdot \overline{S}_f - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f (\nabla P_f^* - \overline{\nabla P_f^o}) \cdot \overline{d} \end{aligned} \quad (3.45)$$

而根據離散後的連續方程式可知：

$$\sum_f \dot{V}_f^{**} = \sum_f \dot{V}_f^* + \sum_f \dot{V}_f' = 0 \quad (3.46)$$

若如 2.6 節考慮相變化現象時，連續方程式將修正為式(2.40)，此時離散後的連續方程式為式(3.47)

$$\sum_f \dot{V}_f^{**} = \sum_f \dot{V}_f^* + \sum_f \dot{V}_f' = \frac{\dot{q}_f \Delta A_f}{h_{fg}} \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right) \quad (3.47)$$

其中 \dot{q}_f 為介面處淨熱傳量， ΔA_f 為介面截面積

若將式(3.38)代入式(3.46)或(3.47)，再整理成如式(3.48)的線性代數式

$$A_p^P P_p' = \sum_f A_{nb}^P P_{nb}' - \sum_f \dot{V}_f^* + S_{P1}^1 + S_{P2}^1 \quad (3.48)$$

其中 S_{P1}^1 ， S_{P2}^1 表示第一次修正之源項，而各項為

$$A_p^P = \sum_f A_{nb}^P \quad (3.49)$$

$$A_{nb}^P = \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f \frac{|\overline{S}_f|^2}{\overline{\delta_{nb} \cdot S_f}} \quad (3.50)$$

$$S_{P1}^1 = -\sum_f \dot{V}_f^* + \left\{ \frac{\dot{q}_f \Delta A_f}{h_{fg}} \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right) \right\}_{\text{for phase change}} \quad (3.51)$$

$$S_{P2}^1 = \sum_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \quad (3.52)$$

第二次修正步驟

接下來進行第二次修正步驟，本次修正所得到的新速度場以上標“***”

表之，新壓力場則以上標“**”表之，而動量方程式可以表示如式(3.53)

$$A_p \vec{V}_p^{***} = \sum_{nb} A_{nb} \vec{V}_{nb}^{**} + (S - \nabla P_p^{**} \Delta \nabla) \quad (3.53)$$

以類似前一步驟的處理方式可將第二次速度修正方程式表示如：

$$\vec{V}_p'' = \left(\frac{\sum_f A_{nb} \vec{V}_{nb}'}{A_p} \right)_f - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \quad (3.54)$$

其中定義 $V'' \equiv V^{***} - V^{**}$, $V' \equiv V^{**} - V^*$, $P'' \equiv P^{**} - P^*$

之後得到新的體積通量修正方程式：

$$\dot{V}_f'' = \left[\left(\frac{\sum_f A_{nb} \vec{V}_{nb}'}{A_p} \right)_f - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \right] \cdot \vec{S}_f \quad (3.55)$$

根據連續方程式，可將式(3.53)整理為式(3.56)的線性代數式型式：

$$A_p^p P_p' = \sum_f A_{nb}^p P_{nb}' - \sum_f \dot{V}_f^* + S_{P1}^2 + S_{P2}^2 \quad (3.56)$$

其中 S_{P1}^2, S_{P2}^2 表示第二次修正的源項

$$A_p^p = \sum_f A_{nb}^p \quad (3.57)$$

$$A_{nb}^P = \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\overline{S}_f|^2}{\delta_{Pnb} \cdot \overline{S}_f} \quad (3.58)$$

$$S_{P1}^2 = - \left(\frac{\sum_f A_{nb} \overline{V}_{nb}'}{A_p} \right)_f \cdot \overline{S}_f \quad (3.59)$$

$$S_{P2}^2 = \sum_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \cdot (\overline{S}_f - \vec{d}) \quad (3.60)$$

3.5 求解動量方程式所用之流體性質

CISIT 的介面追蹤法可以將介面位置控制在一個計算網格內，但若直接使用 VOF 作為單一流體模型之混和係數計算時，在介面處會產生流體性質極大的不連續性(如質量)，如此易導致數值計算之不穩定。為了改善這樣的情況，本研究利用式(3.1)先將網格中心的 VOF 差分至網格節點上，再將各節點的 VOF 作平均後差分回網格中心。以上稱為一次平滑過程，經過平滑過程後介面將會散開而較為平滑，使得 VOF 不像原先類似步階函數分佈。

將平滑處理後的 VOF 代入式(2.6) 及式(2.7)進行質量與黏滯係數的計算，動量方程式將使用平滑後的質量與黏滯性質以改善介面處的性質不連續性及計算之不穩定性。

3.6 能量方程式之離散化

3.6.1 前言

關於雙流體流，原本不同流體各自遵守各自的能量方程式，而各自解出的溫度分佈在兩流體的介面處，必須滿足熱傳量的跳越條件(jump condition)。但本研究將兩流體混合後視為一均質流體，此均質流體的速度場及溫度場皆為連續分佈。整個雙流體流系統使用同一組動量及能量方程式求解，所用的流體性質係依照流體之體積分率混合兩相異流體的流體性質。

3.6.2 單一均質模型

如前言所提，本研究採用為單一均質流體進行計算，而在 2.4 節能量守恒方程式中，能量方程式可表示為內能型式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot \vec{V}(\rho e) \approx \nabla \cdot \left[\left(\frac{k}{c_v} \right) \nabla e \right] + Q_e \quad (3.61)$$

其中 e 表示質量平均內能，而各流體性質均在 2.4 節中已定義。， Q_e 為源項，若將式(3.61)進行體積分並且配合高斯散度定理可得式(3.62)

$$\iiint_{\forall} \rho \frac{\partial e}{\partial t} d\forall + \oint_S (\rho \vec{V} e) \cdot d\vec{S} = \oint_S \left[\left(\frac{k}{c_v} \right) \nabla e \right] \cdot d\vec{S} + \iiint_{\forall} Q_e d\forall \quad (3.62)$$

之後對式(3.62)進行離散步驟，此離散過程可參考 3.4 節的動量方程式之離散化，對流項之處理同樣採用一通量限制方程式搭配 donor-acceptor 方

法，最後整理為一線性代數式。

3.6.3 線性代數式之整理

將上述能量方程式之各項離散式整理為式(3.63)的線性代數型式。

$$A_p e_p^n = \sum_{nb} A_{nb} e_{nb}^n + Q_e \quad (3.63)$$

$$A_p = \sum_{nb} A_{nb} + \rho_p \frac{\Delta \nabla}{\Delta t} \quad (3.64)$$

$$A_{nb} = \max(-\dot{m}_f, 0) + \left(\frac{k}{c_v}\right)_f \frac{|\vec{s}_f|^2}{\delta_d \cdot s_f} \quad (3.65)$$

$$Q_e = \sum_f \left[-\dot{m}_f \frac{\gamma(r)}{2} (e_A^o - e_D^o) + \left(\frac{k}{c_v}\right)_f \nabla e_f^o \cdot (\vec{s}_f - \vec{d}) \right] + \rho_p e_p^o \frac{\Delta \nabla}{\Delta t} \quad (3.66)$$

3.6.4 介面處之網格溫度處理

如 2.6 節中所提本研究中假設介面溫度為系統壓力之飽和溫度，為了在數值計算時維持此假設，進行以下處理。當蒐集完全部計算網格之能量方程式各項係數後，若某一網格為介面所在之網格將會設定其 $A_p = 1. \times 10^{30}$ ，各 $A_{nb} = 0$ 及 $Q_e = 0$ ，藉由以上處理將介面所在網格之溫度維持於飽和溫度。

3.7 介面處熱傳量之計算

在 2.6 節中考慮相變化時，需要求得介面處的熱傳量

$$\dot{q}_f = k_v \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_v - k_l \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_l, \text{ 將其離散後可以表為 } \dot{q}_f = k_v \frac{T_{n2} - T_f}{\Delta n} - k_l \frac{T_f - T_{n1}}{\Delta n}, \text{ 其中 } T_f$$

為介面溫度、 T_{n1} 、 T_{n2} 各為位於兩相之溫度參考點， Δn 表某一定長。在本研究中 Δn 通常設定為一至二倍網格長度。

計算 VOF 方程式後可得到介面位置，在主計算網格內介面截線的中點上，往其法線方向各取一定長 Δn 得到位於介面兩側之兩相異點。接著各以此兩點為圓心， Δn 為半徑作圓，見圖 3.6。若相鄰網格中心位於此圓內，則選擇此網格作為計算此兩點溫度之參考網格。最後以相鄰網格中心至此兩點的距離之倒數作為權重函數，計算出此兩點的溫度 T_{n1} 及 T_{n2} ，以 T_{n1} 為例，如式(3.67)及圖 3.7 所示。

$$T_{n1} = \frac{\sum_i \frac{T_i}{l_i}}{\sum_i \frac{1}{l_i}} \quad (3.67)$$



其中下標 i 表示計算溫度參考點時所用的相鄰網格， l 表相鄰網格中心至參考點之距離。

在計算介面處的熱傳量後，可進一步求出介面產生相變化的體積流率

$$\dot{V}_v = \frac{\dot{q}_f \Delta A_f}{h_{fg}} \left(\frac{1}{\rho_v} \right),$$

其為因相變化現象造成的氣體體積增加量，因此需要依

此變化量對於此時階的 VOF 進行修正。

3.8 解題流程

在本章已經介紹 VOF 方程式、動量方程式與能量方程式之數值方法，而雙流體流系統的解題流程如下：

1. 給定所有變數的初始值
2. 利用上個時階的體積通量求解 VOF 方程式得到新的體積分率 α 與重建界面位置
3. 使用新的介面位置及上個時階所得溫度分佈求得界面處之熱傳量供相變化計算使用，並且根據相變化造成的氣體體積變化修正此時階的 VOF 值
4. 求解動量方程式並且進行壓力修正以滿足連續方程式
5. 利用步驟 4 所得新的速度分佈求解能量方程式
6. 利用新的能量分佈求得溫度場分佈
7. 重複步驟 2 至步驟 6 至設定總計算時階數

第四章 結果與討論

4.1 相變化測試(一)，Stefan's 1st problem

為了測試本研究所使用的相變化模型的準確性，將以兩個具有理論解的相變化作為測試。首先為由物理學家 Jožef Stefan 在 1890 年所提出的 Stefan 問題。圖 4.1 為其示意圖，考慮一維分佈情況的氣態及液態流體分別位於氣液介面左側與右側，左側氣相流體的左端為一定溫($T = T_{wall}$)的牆邊界條件；而其右端則為定溫($T_f = T_{sat}$)的氣液介面。由於氣相流體溫度高過此系統的飽和溫度，所以介面處會產生相變化，使得氣相流體增加，而介面開始向液相側移動。

在氣相流體區域，假設流體速度為零，並且溫度分佈須滿足一維熱擴散方程式如式(4.1)；而在液相區域，假設溫度保持飽和溫度。而式(4.2)與式(4.3)為此方程式的邊界條件，式(4.4)則為介面處的能量跳躍條件。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq \delta(t) \quad (4.1)$$

$$T(x = \delta(t), t) = T_{sat} \quad (4.2)$$

$$T(x = 0, t) = T_{wall} \quad (4.3)$$

$$\dot{q}_f = \rho_v u_f h_{fg} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\delta(t)} \quad (4.4)$$

其中 u_f 為介面移動速度

根據[21]，[22]此問題之 Neumann 解如式(4.5)及式(4.6)所示

$$\delta(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_v t} \quad (4.5)$$

$$T(x,t) = T_{wall} + \left(\frac{T_{sat} - T_{wall}}{\text{erf}(\lambda)} \right) \text{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_v t}} \right) \quad (4.6)$$

$$\lambda \exp(\lambda^2) \text{erf}(\lambda) = \frac{c_v (T_{wall} - T_{sat})}{h_{fg} \sqrt{\pi}} \quad (4.7)$$

其中 $\delta(t)$ 為介面位置， λ 為一滿足式(4.7)的根，erf 表 error function

本例子所用的流體為一大氣壓之飽和狀態純水，其流體性質列於表一。飽和溫度為 100°C 而牆溫度為 125°C ，由式(4.7)可解得 $\lambda=0.105612$ 。

本例子採二維之 $10\text{mm} \times 1\text{mm}$ 的均勻計算網格，共有 50×5 、 100×10 及 200×20 三組網格大小，所用的計算時間步階為 $2 \times 10^{-3} \text{ s}$ 。邊界條件設定在左側 $x=0\text{mm}$ 處為保持 125°C 的定溫條件；右側 $x=10\text{mm}$ 處則為 100°C 的定溫條件；至於 $y=0\text{mm}$ 及 $y=1\text{mm}$ 處則為絕熱邊界條件。初始的介面位置定在 $x=0.3\text{mm}$ 處，並且以此處作為介面移動原點。在計算過程中，介面所在格點以及液相格點之溫度均為飽和溫度。

本研究求解能量場使用的是內能型式能量方程式，此型式能量方程式的熱擴散係數為 $\frac{k}{c_v}$ 。在本例子使用了三種不同型式熱擴散混合係數進行計算，分別為調和平均(harmonic mean)、混合型式(mixed)及氣相熱擴散係數，依序以式(4.8)至式(4.10)表示，而介面熱傳計算所用 $\Delta n = \Delta x$ 。

$$\left(\frac{k}{c_v} \right)_{har.} = \frac{\left(\frac{k}{c_v} \right)_v \cdot \left(\frac{k}{c_v} \right)_l}{(1-\alpha) \left(\frac{k}{c_v} \right)_l + \alpha \left(\frac{k}{c_v} \right)_v} \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{k}{c_v}\right)_{mix} = \alpha \left(\frac{k}{c_v}\right)_l + (1-\alpha) \left(\frac{k}{c_v}\right)_v \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{k}{c_v}\right)_{vapor} = \left(\frac{k}{c_v}\right)_v \quad (4.10)$$

圖 4.2、圖 4.3 和圖 4.4 分別為 50x5、100x10 和 200x20 三組網格之計算結果。由圖中可知，在三組網格中皆以使用氣相熱傳係數求解的介面位置最為接近理論解的介面位置。若取 $y=0.5\text{mm}$ 這排計算網格的溫度分佈，如圖 4.5 至圖 4.7 所示。可以發現在每組網格中都以氣相熱擴散係數解得的溫度分佈最接近理論之溫度分佈。

若在介面處附近使用混合熱擴散係數：如調和平均或混合型式都會影響介面鄰近網格所得到的溫度解，進而影響介面熱傳量之計算。如混合型式的熱擴散所求得的介面鄰近點的溫度較理論解低，因此求得之熱傳量較低而連帶造成介面移動較慢，也可從圖 4.2 至圖 4.4 中發現此種情況。

根據 Neumann 解，時間為 10 秒時介面位置為 2.6905mm，將計算結果之介面位置整理為表二，可以發現以氣相熱擴散係數求解最為接近理論解，但隨著網格加密並未有更準確的情況，都維持在誤差 5% 左右。圖 4.8 為三組網格中以氣相熱擴散係數進行計算所得介面位置，也可發現隨著計算網格加密並未更接近理論解。由圖 4.9 之介面速度對時間變化圖來看，隨著計算時間增長，計算所求得的介面速度都漸漸接近理論解。而從圖 4.8 也可發現：使用氣相熱擴散係數求解之介面位置在計算時間 8 秒後漸

漸與理論解保持相近距離。

4.2 相變化測試(二)，Stefan's 2nd problem

接著進行另一個相變化測試，稱之為 Stefan's 2nd 問題。此問題之示意圖如圖 4.10 所示，與 Stefan's 1st 問題最大不同處在於：現在左側的氣相流體是維持在飽和溫度，而右側的液相流體初始溫度高於飽和溫度，因受較低溫的介面影響開始有熱傳現象產生使溫度降低，也會開始發生相變化造成介面往右側移動。

本問題也有理論解如下面式(4.11)至式(4.13) [21]。

$$\delta(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_l t} \quad (4.11)$$

$$T(x, t) = T_\infty + \left(\frac{T_{sat} - T_\infty}{erfc(\lambda)} \right) erfc \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}} \right) \quad (4.12)$$

本例子所用的流體性質同 Stefan 問題。飽和溫度為 $100^\circ C$ ，而液相流體的初始溫度則為 $105^\circ C$ 。由式(4.13) 所得 $\lambda = 0.005302$ 。本例子以二維之 $10\text{mm} \times 1\text{mm}$ 的均勻計算網格，共有 50×5 、 100×10 及 200×20 三組網格大小，所用的計算時間步階為 $2 \times 10^{-3} \text{ s}$ 。邊界條件設定： $x=0\text{mm}$ 與 $x=10\text{mm}$ 處分別 $100^\circ C$ 為與 $105^\circ C$ 之定溫條件；而在 $y=0\text{mm}$ 及 $y=1\text{mm}$ 處則為絕熱邊界條件。初始介面位置定為 0.5mm 處，並以此處為介面移動原點。

$$\lambda \exp(\lambda^2) erfc(\lambda) = \frac{c_l (T_\infty - T_{sat})}{h_{fg} \sqrt{\pi}} \quad (4.13)$$

其中 $\delta(t)$ 為介面位置， λ 為式(4.13)的根， α_l 為液相流體之熱傳係數，erfc 則為 complementary error function。

首先以類似求解 Stefan 的方法測試採用何種混合熱擴散係數較為準確，因此以三組網格進行三種熱擴散係數之測試，分別為調和平均、混合型與液相流體之熱擴散係數。計算介面熱傳量所用 $\Delta n = \Delta x$ ，計算所得結果如圖 4.11 至圖 4.13 所示。可以發現到三組網格中，都以使用液相流體之熱傳係數計算的結果最為接近理論解的介面位置。而從圖 4.14 至圖 4.16 之溫度分佈圖可以發現到使用液相流體之熱傳係數計算的溫度分佈最為接近理論解的溫度分佈，這是因為氣相之流體均維持在飽和溫度，若在單一流體模型中全部使用液相流體的熱傳性質可以改善在介面附近計算格點因使用混合後熱傳性質造成的溫度不連續性。因此在本例子之特殊情況下，完全使用液相流體的熱傳性質可以得到較接近理論解之溫度分佈。

而圖 4.17 與圖 4.18 分別為三組網格中使用液相流體熱傳性質的介面位置圖及介面速度對時間變化圖，可以發現以 200x20 這組網格的介面位置最為接近理論解。從介面速度變化圖中可發現網格越密越可以表現出在計算時間初期較高的介面速度。而隨著計算時間的增加，因溫度梯度的減小使得介面速度也逐漸下降，其中以 100x10 與 200x20 這兩組網格之結果較接近理論解。

在測試完熱擴散係數造成的影響後，吾人選定液相流體之熱擴散係數搭配不同的 Δn 進行測試，希望得知使用不同長度的 Δn 計算介面處的熱傳量對於相變化情形之影響。同樣使用了50x5、100x10及200x20三組網格分別搭配一至三倍網格長度之 Δn 進行計算。圖4.19為計算結果之介面位置，可以發現在三組網格中隨著之 Δn 增加介面位置移動變慢，其中三組網格中、分別以50x5搭配1.5倍網格長之 Δn 、100x10搭配1倍網格長的 Δn 與200x20搭配1倍網格長的 Δn 計算結果之介面位置最為接近理論解。將其畫於圖4.20。最後將計算結果整理於表三，其中以200x20使用液體熱傳性質與搭配一倍網格長之 Δn 計算結果的介面位置最為接近理論解，誤差為1.38%。

從圖4.19可以發現 Δn 並非取越長越好，因為從圖4.21的溫度分佈圖可以發現理論解之溫度分佈是往液相側擴散，若取過長的 Δn 會使得求出的溫度梯度較低進而減少相變化的質量，介面移動速度也就會較理論解慢。因此需要選擇適當的 Δn 避免影響計算相變化的準確性。之後研究將使用1至2倍網格長度作為 Δn 的長度。

圖4.22為三組網格各自搭配最佳之 Δn 介面速度對時間變化圖，其中可以發現到50x5這組較粗的網格在計算初期無法準確表現出較大的溫度梯度所以求得的介面速度較慢，也因此造成這組網格的介面位置始終落後其他兩組與理論解。而這三組網格隨著計算時間的增加所求得的介面速度

都逐漸趨近理論之介面速度。

4.3 薄膜沸騰(film boiling)

測試完相變化之計算後，希望能模擬一薄膜沸騰(film boiling) 的氣泡生成過程。根據文獻[23]若要產生薄膜沸騰除了需要在介面處的熱傳量足以克服相變化的潛熱外，還要給其一個初始的微小擾動以利沸騰現象產生，並且建議計算範圍接近其 most unstable Taylor 波長以便觀察氣泡生成，如式(4.14)所示。

$$\lambda_0 = 2\pi \left(\frac{3\sigma}{(\rho_l - \rho_v)g} \right)^{1/2} \quad (4.14)$$

其中 λ_0 為 most unstable Taylor 波長， σ 為表面張力設為 0.1 N/m，重力設定為 $9.8 m/s^2$ 。式(4.15) 為 Berenson 修正所提出的 Nu [23]，其假設通過介面之熱傳量全靠熱傳導型式進行。

$$Nu = 0.425 \left(\frac{\rho_g (\rho_l - \rho_g) g_y h_{fg}}{k_g \mu_g [T_{wall} - T_{sat}]} \right)^{1/4} (\lambda_0)^{3/4} \quad (4.15)$$

本例子所用流體性質將列於表四，所得到的 $\lambda_0 = 0.0787 m$ ，而本例子取 $\lambda_0 = 0.08 m$ ，代入式(4.15) 得 Berenson 修正 $Nu = 13.3667$ 。

為了簡化模擬的複雜程度並降低計算量，本例子設定垂直方向的邊界為對稱邊界條件，所以實際計算範圍 x 方向為 $\frac{\lambda_0}{2} = 0.04 m$ 而 y 方向為 $\frac{3\lambda_0}{2} = 0.12 m$ ，共使用了 16x48、32x96 及 64x192 三組網格進行計算，其中各組網格所用的時間步階為 16x48($5 \times 10^{-5} s$)；32x96($2 \times 10^{-5} s$)；

64x192(4×10^{-6} s)。邊界條件設定：左右兩側為對稱邊界條件，底部為定溫邊界條件而頂部則為壓力出口邊界條件，壓力設定為飽和壓力

$P_{sat} = 1.0135 \times 10^5$ Pa。初始條件設定：在 16x48 這組網格中設定初始介面位

於自底部算起的第三橫排網格中，並且根據 $\alpha = 0.875 - 0.1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_0}\right)$ 來給定

此排的 VOF，見圖 4.23。而其他網格的初始介面位置設定在相同位置。

氣體初始溫度分佈為一線性分佈：由底部的 510K 變化至介面處的 500K，

而液體部分皆為飽和溫度 500K，在計算過程假設介面溫度維持在飽和溫

度 500K。本例子在介面所在格點採用氣體之熱擴散係數作為計算使用，

使用 1 至 2 倍網格長作為 Δn 。其中 16x48 所用 Δn 為一倍網格長、32x96 與 64x192 之 Δn 皆為兩倍網格長。

圖 4.24 為計算時間自 0.35 秒至 0.37 秒不同網格計算結果之介面分佈情形，可以觀察到第一顆氣泡逐漸脫離底部的情況。其中較密網格之計算結果氣泡上升較快也較早脫離底部。

圖 4.25 為各組網格在計算時間為 0.35 秒時之溫度分佈，其中紅線表介面位置。從圖中可以發現：在液體區域(紅線右側)溫度為 500K；氣體區域(紅線左側)則是受到底部壁溫(510K) 影響具有較高溫度，而氣泡內部溫度分佈輪廓大致與氣泡外型類似從內部的較高溫往介面處降低，介面溫度則為飽和溫度 500K。

圖 4.26 為整個計算範圍內氣體體積與初始氣體體積的比值對時間之

變化圖，可以發現在計算時間 0.3 秒之前氣體體積的增加率較為趨緩，而在 0.3 秒前後各組網格的氣體體積都開始快速增加，對應到氣泡生成過程此時正是第一顆氣泡成形的時間。接著 64x192 這組網格約在 0.32 秒後氣體總量增加速度開始減緩，而 16x48 與 32x96 這兩組網格與則約在 0.35 秒左右開始減緩。若對照圖 4.27 至圖 4.29 各網格之氣泡生成與速度場圖，可以發現氣體總量體積開始減緩之時間點，都接近第一顆氣泡脫離底部的時刻。

第一顆脫離的氣泡在脫離後受到表面張力影響開始被壓成月彎形狀，而之後在其後面有第二顆小氣泡開始成型，慢慢的也會脫離底層。而在 32x96 這組網格可以發現到第二顆氣泡在脫離底部後，還會融入第一顆氣泡中而形成一顆更大的氣泡。

若觀察圖 4.27 至 4.29 可發現類似的氣泡生成過程，首先由一開始給定的微小擾動處開始有氣體增加，表示介面處存在一淨熱傳量足以克服相變化所需的潛熱而開始產生相變化。隨著計算時間的增加在計算範圍的左下角開始有越來越明顯的氣體生成現象並且造成速度場的變化，約在 0.20 至 0.25 秒間左下角開始有一明顯渦流產生，之後逐漸有一球型氣泡開始在左側形成，而隨著氣泡逐漸成型時底部的氣體也形成薄層分佈情況。當氣泡持續成長與上升時會形成一拉伸的氣柱。約在 0.35 至 0.40 秒間第一顆氣泡脫離獨立成形。之後也會有第二顆小氣泡成形、拉伸最後脫離。

圖 4.30 是取計算範圍內左下角網格中心的溫度與底部的壁溫 510

K 依式(4.16)求出此格點的 Nu 以表示底部之熱傳變化。

$$Nu = \frac{\lambda_0}{(T_{wall} - T_{sat})} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (4.16)$$

若將圖 4.30 與圖 4.27 至圖 4.29 對照來看，可以發現 Nu 的第一個極小值約發生在 0.3 秒左右(16x48 為 0.32 秒)，此時正為氣泡從薄膜中生成逐漸成形的時候，而隨著氣泡的上升 Nu 也隨著變大，約在 0.35 秒左右(16x48 為 0.38 秒)第一顆氣泡正要脫離時 Nu 也到達第一個極大值。而當氣泡脫離後 Nu 開始變小，以 32x96 這組網格為例，約在 0.45 秒時薄膜層又形成一氣泡，此時 Nu 也來到第二個極小值的位置。之後隨著第二顆氣泡開始上升同時 Nu 也開始上升，而 Nu 便在第二顆氣泡脫離前達到了第二個極大值的位置。從以上現象可以發現當有氣泡在薄膜區形成時， Nu 會處於相對極小值；而當氣泡正要脫離薄層時， Nu 會達到相對極大值。

第五章 結論

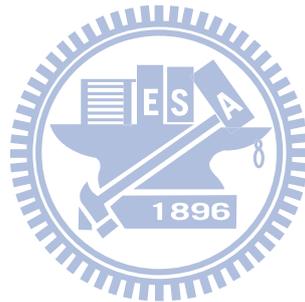
本研究利用一基於 VOF 的 CISIT 之介面追蹤法模擬一薄膜沸騰現象。使用單一流體模型以一組質量、動量與能量守恆方程式的統御方程組來描述此雙流體系統。由介面追蹤法所得之介面位置進一步求出介面處用以驅動相變化產生之熱傳通量，並將相變化造成之質量變化量加入連續方程式之源項，藉以滿足兩相間之跳躍條件。先以具理論解的相變化問題驗證相變化之處理，可以發現溫度分佈之準確性與計算熱傳通量時所用之定長 Δn 影響相變化結果甚鉅。若選擇適當長度作為 Δn 之設定，本研究之計算結果(介面位置、介面速度)接近理論解。最後模擬了一薄膜沸騰現象，除了可以觀察到氣泡的生成過程，此外同時計算底部某一定點的 Nu ，藉此研究氣泡的生成情形與氣相內的熱傳性質變化的變化關係。可以發現每當有氣泡在底部成形時，此時 Nu 會處於相對極小值；而當氣泡逐漸上升 Nu 也隨之變大，到了氣泡正要脫離氣體薄層時， Nu 將會達到相對極大值。因此得知也可從 Nu 的變化趨勢推測此時氣泡的成長情況。

參考文獻

- [1] Heyes, R. E., “Numerical simulation of mold filling in reaction injection molding”, Polym. Eng. Sci., v31, pp.842-848, 1991
- [2] Muzaferija, S., Peric, M., “Computation of free-surface flows using the finite-volume method and moving grids”, Numerical Heat Transfer, Part B, v32, p.p. 369-384, 1997
- [3] Trggvasson, G., “A front tracking method for the computations of multiphase flow”, J. Comput. Phys., v169, p.p. 708-759, 2001
- [4] Osher, S., Sethian, J. A., “Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton Jacobi formulations”, J. Comput. Phys., v79, p.p. 12-49, 1988
- [5] Li, X.L., “Study of three-dimensional Rayleigh-Taylor instability compressible fluids through level set method and parallel computation”, Phys. Fluids A, v5, p.p. 1904-1913, 1993
- [6] Peter, N. R., Briggs, D. G., “MAC scheme in boundary-fitted curvilinear coordinates”, Numerical Heat Transfer, v6, n4, p.p.383-394, 1983
- [7] Muzaferija, S., Peric, M., Sames, P., Schellin, T., “A two-fluid Navier-Stokes solver to simulate water entry, in: Proceeding of twenty-second symposium on naval hydrodynamics, Washington, D.C., p.p. 638-649, 1998
- [8] Ubbink, O., Issa, R.I., “A method for capturing sharp fluid interface on arbitrary meshes”, J. Comput. Phys., v153, p.p. 26-50, 1999
- [9] Tsui, Y. Y., Lin, S. W., Cheng, T. T., Wu, T. C., “Flux-blending schemes for interface capture in two-fluids flows”, Int. J. Heat and Mass Transfer, v52, p.p.5547-5556, 2009

- [10] Noh, W.F., Woodward, P.R., "SLIC (Simple Line Interface Method)", Lecture Note in Physics, v59, p.p.330-340, 1976
- [11] Youngs, D. L., "Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion", in: K.W. Morton, M.J. Baines (Eds.), Numerical methods for fluid dynamics, Academic Press, New York, p.p.273-285, 1982
- [12] Tsui, Y. Y., Lin, S., "A VOF based conservative interpolation scheme for interface tracking (CISIT) in two-fluid flows", to appear, 2011
- [13] Pericleous, K.A., Chan, K. S., Cross, M., "Free surface flow and heat transfer in cavities: the SEA algorithm," Numerical Heat Transfer, Part B, v27, p.p. 487-507, 1995
- [14] Esmaeeli, A., Tryggvason, G., "Computations of film boiling. Part I: numerical method", Int. J. Heat and Mass Transfer, v47, p.p.54-51-5461, 2004
- [15] Yang, Z., Peng, X. F., Ye, P., "Numerical and experimental investigation of two phase flow during boiling in a coiled tube," Int. J. Heat and Mass Transfer, 2007
- [16] Haelssig, J. B., Tremblay, A. Y., Thibault, J., Etemad, S. G., "Direct numerical simulation of interphase heat and mass transfer in multicomponent vapor-liquid flows", Int. J. Heat and Mass Transfer, v53, p.p. 3947-3960, 2010
- [17] Davidson, M. R., Rudman, M., "Volume-of-fluid calculation of heat or mass transfer across deforming interfaces in two-fluid flow," Numerical Heat Transfer, Part B, v41, p.p.291-308, 2002
- [18] Sander, W., Weigand, B., "Shaker-based heat and mass transfer in liquid metal cooled engine valves", Int. J. Heat and Mass Transfer, v52, p.p.2552-2564, 2009
- [19] Hirt, C. W., Nichols, B. D., "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries", J. Comput. Phys., v39, p.p. 201-225, 1981
- [20] Juric, D., Tryggvason, G., "Computations of boiling flows", Int. J. Multiphase flow, v24, NO. 3, p.p.387-410, 1998

- [21] Alexiades, V., Solomon, A. D., Mathematical modeling of melting and freezing processes, New York: Hemisphere, p.p. 82-84, 1993
- [22] Naterer, G.F., Heat transfer in single and multiphase systems, CRC Press, United States of America, 2003
- [23] Welch, S.W.J., Wilson J., “A volume of fluid based method for fluid flows with phase change”, J. Comput. Phys., v160, p.p. 662-682, 2000



表一、一大氣壓之飽和純水之流體性質

	ρ (kg/m^3)	μ ($N \cdot s/m^2$)	c_v ($J/kg \cdot K$)	k ($W/m \cdot K$)	h_{fg} ($J/kg \cdot K$)
液相	957	2.79×10^{-4}	4179	0.613	2257000
氣相	0.596	1.2×10^{-5}	855	0.0667	

表二、Stefan 問題之計算結果比較表

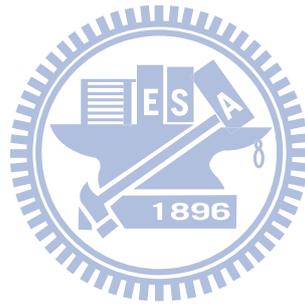
mesh	50x5 (t=10s)		100x10 (t=10s)		200x20 (t=10s)	
	界面位置 (mm)	error(%)	界面位置 (mm)	error(%)	界面位置 (mm)	error(%)
harmonic	2.382	11.47	2.3613	12.24	2.3446	12.86
mix	1.7158	36.23	1.6508	38.64	1.6204	39.77
vpor	2.8649	6.48	2.8408	5.59	2.8422	5.64

表三、Sucking 問題之計算結果比較表

mesh	50x5 (t=2s)		100x10 (t=2s)		200x20 (t=2s)	
	界面位置 (μm)	error(%)	界面位置 (μm)	error(%)	界面位置 (μm)	error(%)
harmonic	10.6890	73.63	9.1513	48.65	9.1514	48.66
mix	8.6089	39.84	8.2392	33.84	8.2765	34.44
liquid	7.4125	20.41	6.3543	3.22	6.2409	1.38
mesh	50x5 (t=2s)		100x10 (t=2s)		200x20 (t=2s)	
Liquid	界面位置 (μm)	error(%)	界面位置 (μm)	error(%)	界面位置 (μm)	error(%)
Δn						
1dx	7.4125	20.41	6.3543	3.22	6.2409	1.38
1.5dx	5.8668	4.70	5.2684	14.42	5.2843	14.16
2dx	5.7537	6.54	4.3052	30.07	4.2553	30.88

表四、薄膜沸騰測試所用之流體性質 ($P_{sat} = 1.0135 \times 10^5 Pa$)

	ρ (kg/m^3)	μ ($N \cdot s/m^2$)	c_v ($J/kg \cdot K$)	k ($W/m \cdot K$)	h_{fg} ($J/kg \cdot K$)
液體	200	0.1	400	400	10000
氣體	5	0.005	200	1	



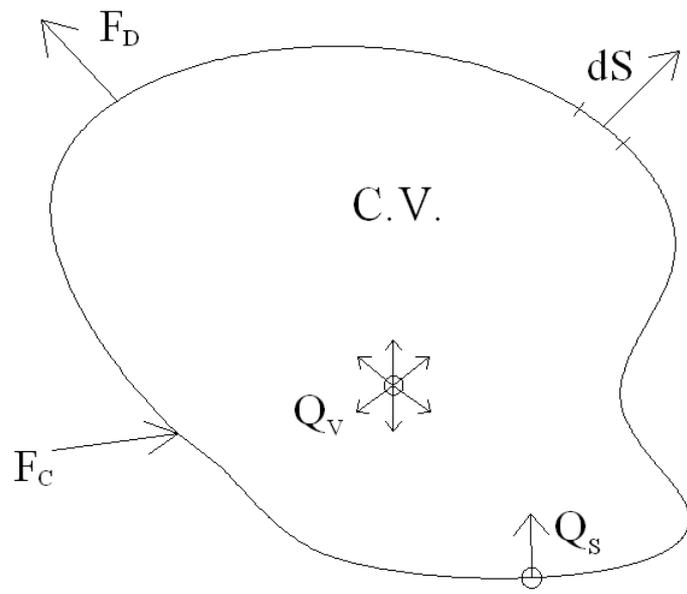


圖 2.1 通用傳輸方程式示意圖

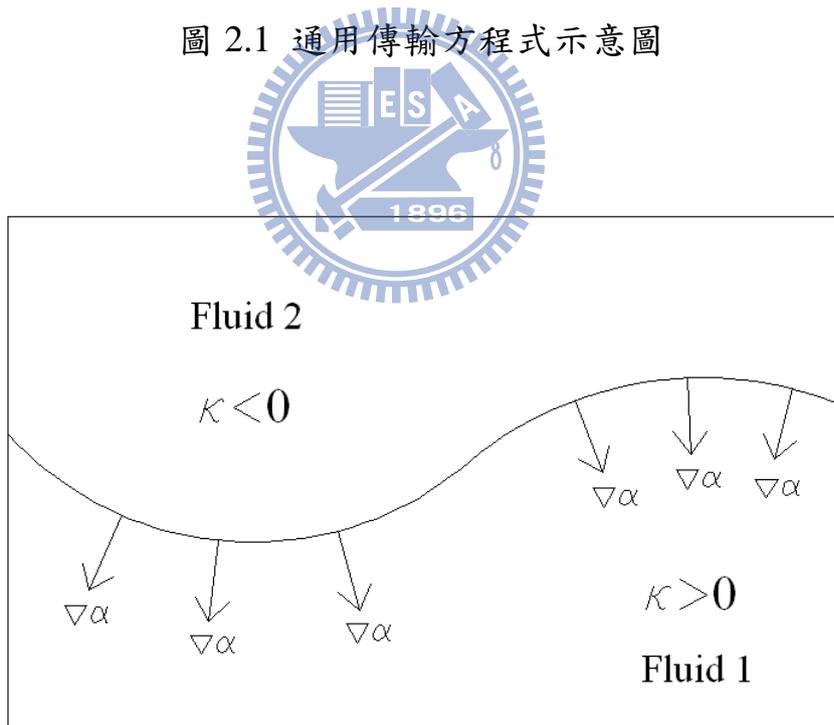


圖 2.2 流體分布及曲率符號之示意圖

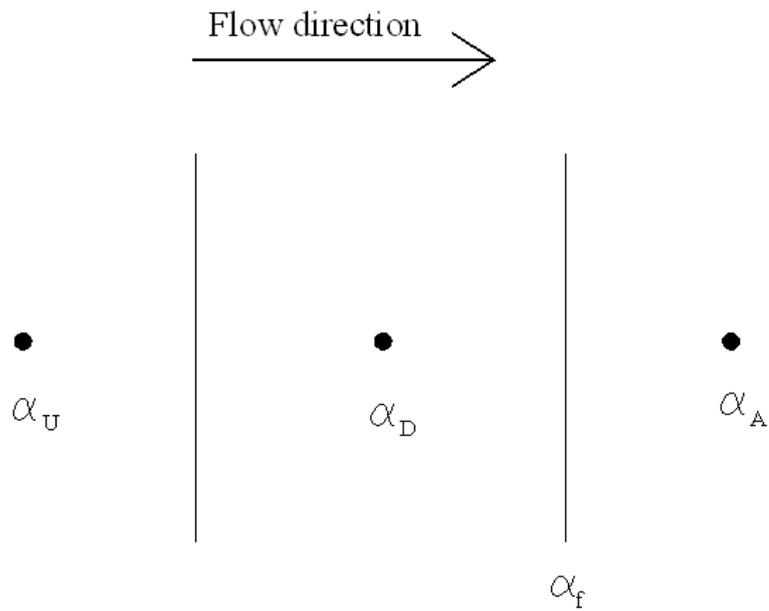


圖 3.1 控制體積及其鄰格點之關係示意圖

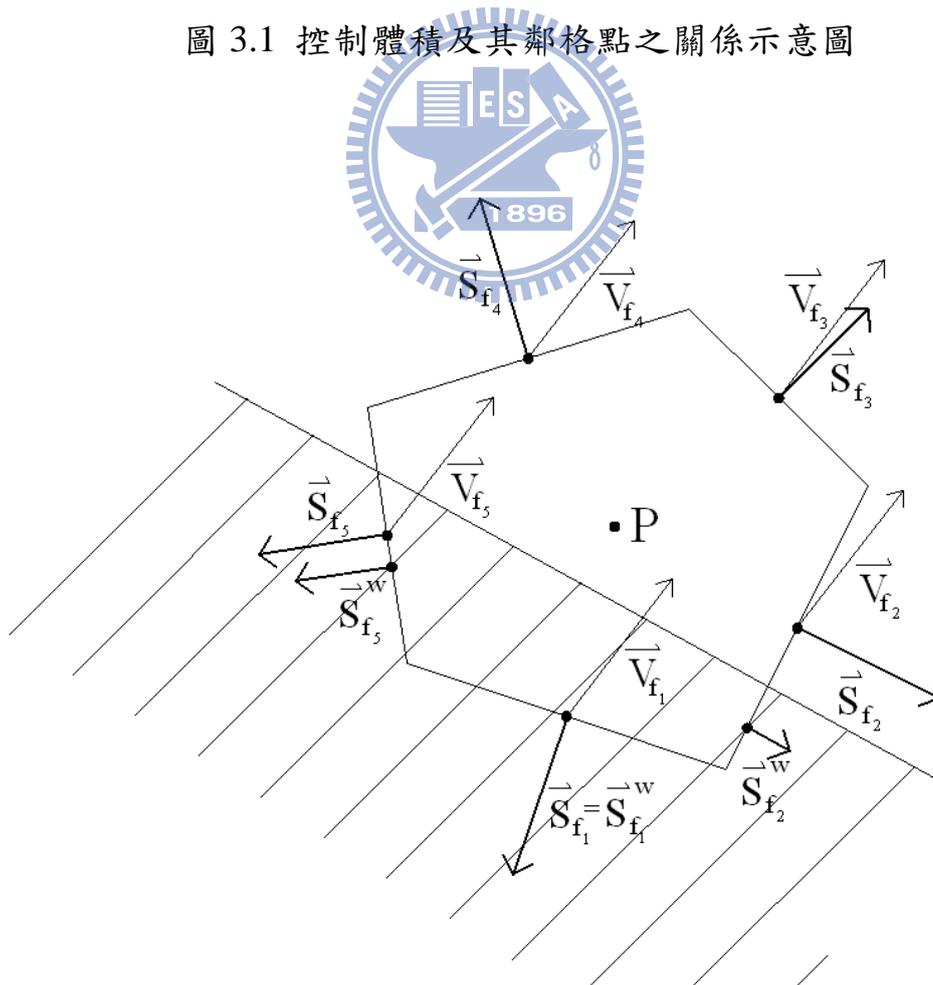


圖 3.2 對計算主格點之體積通量守恆示意圖

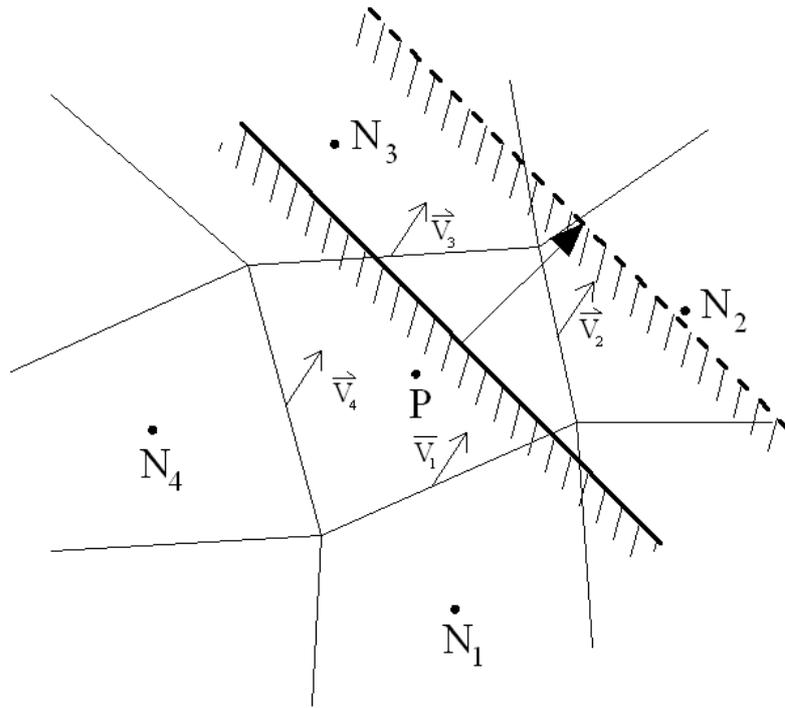


圖 3.3 一介面前端跨越過一計算網格之示意圖

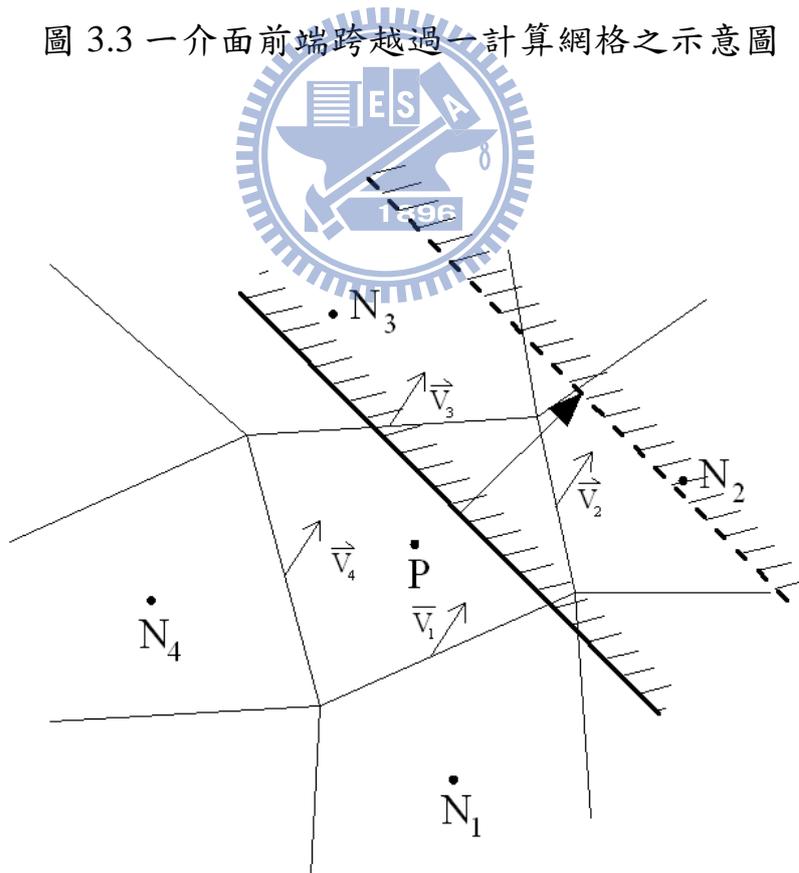


圖 3.4 一介面尾端跨越過一計算網格之示意圖

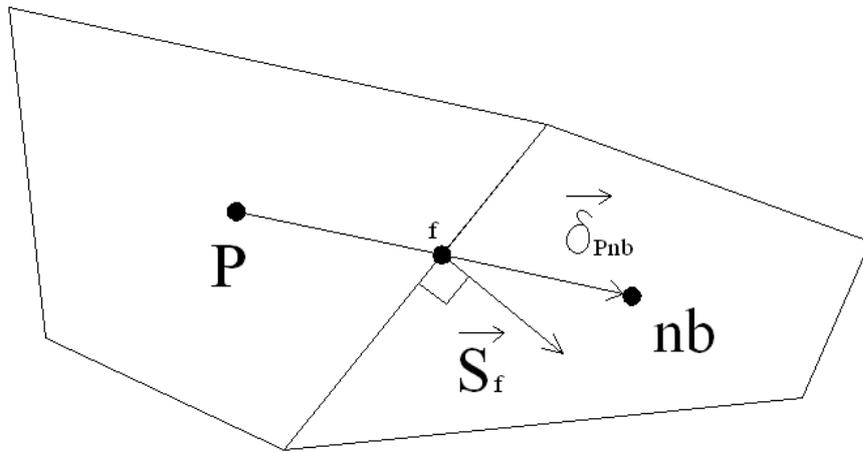
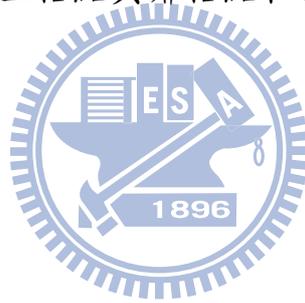


圖 3.5 計算主格點與鄰格點和計算面之示意圖



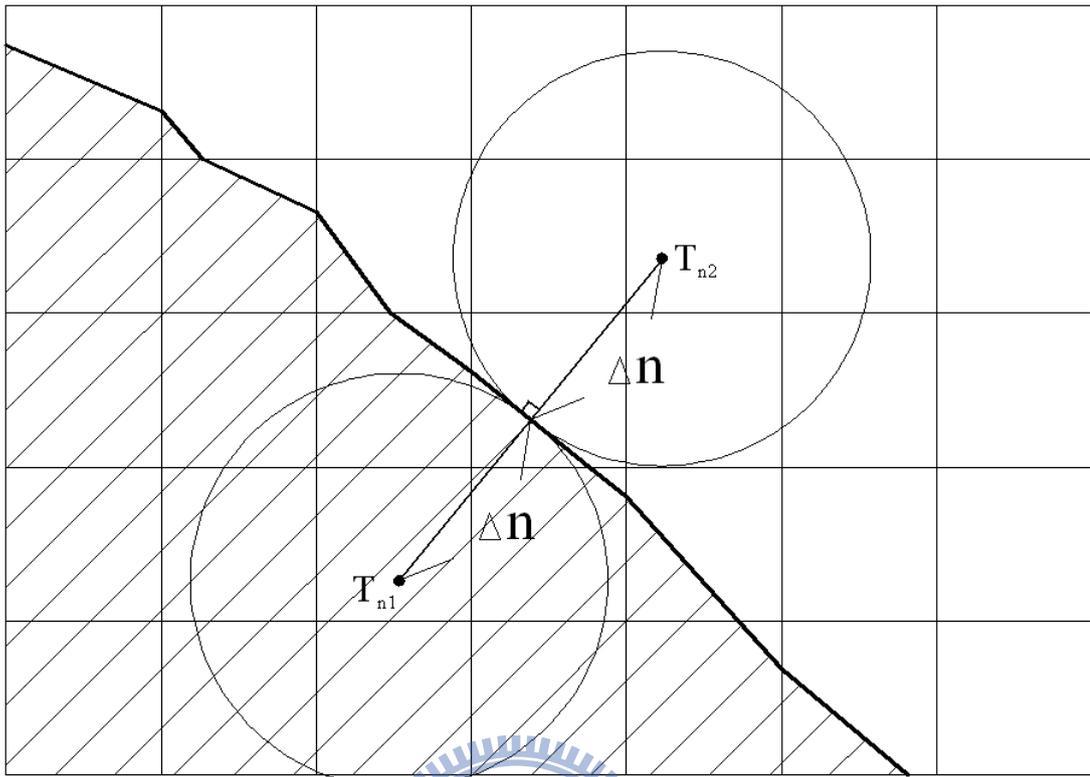


圖 3.6 介面處熱傳量計算之示意圖

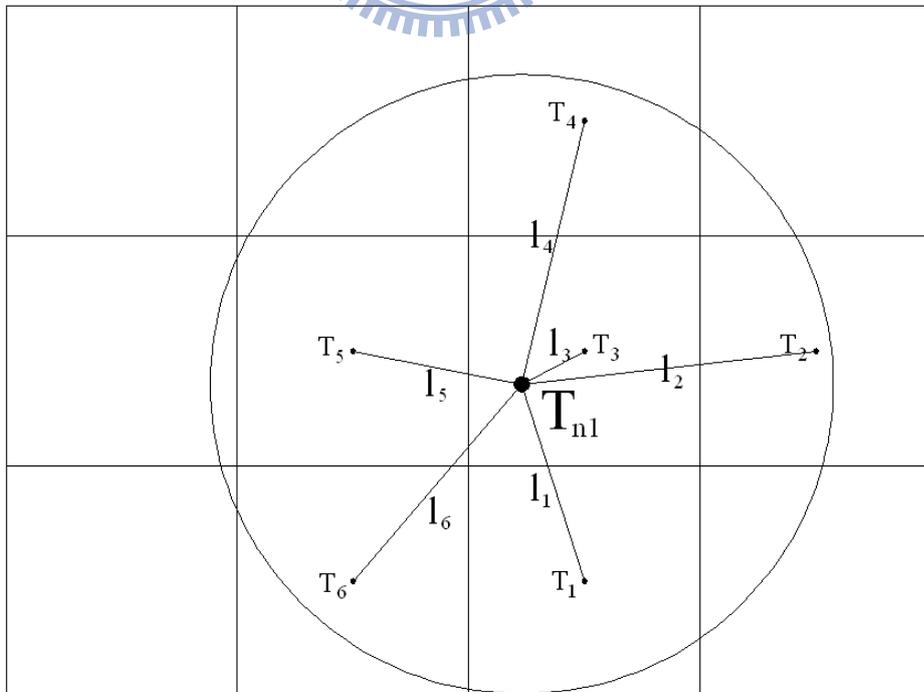


圖 3.7 介面處熱傳量計算之示意圖

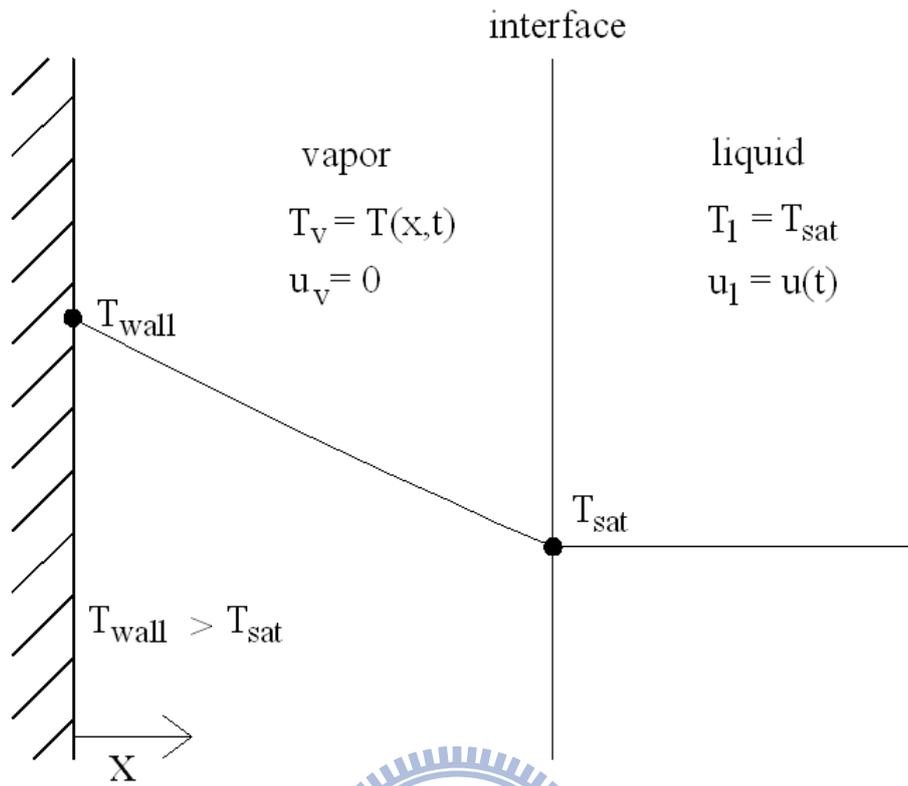


圖 4.1 Stefan 1st 問題之示意圖



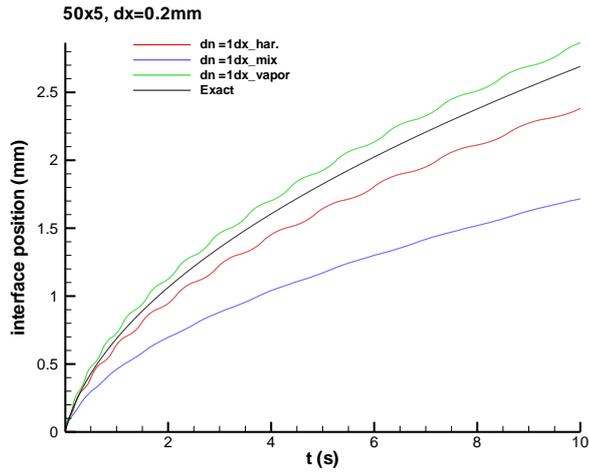


圖 4.2 網格(50x5) 計算結果之介面位置圖

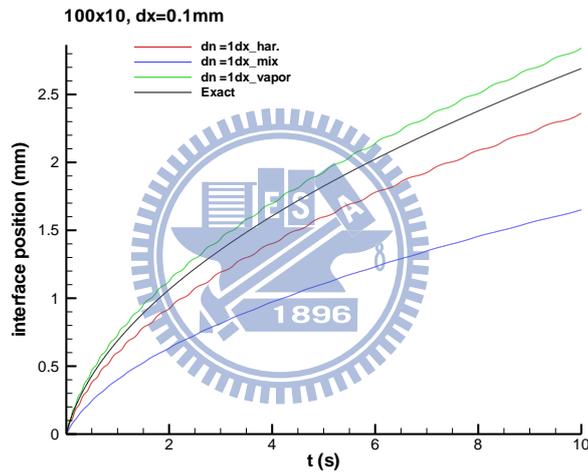


圖 4.3 網格(100x10) 計算結果之介面位置圖

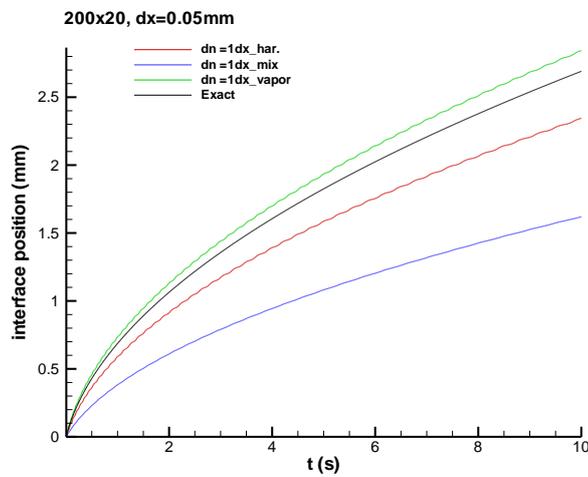


圖 4.4 網格(200x20) 計算結果之介面位置圖

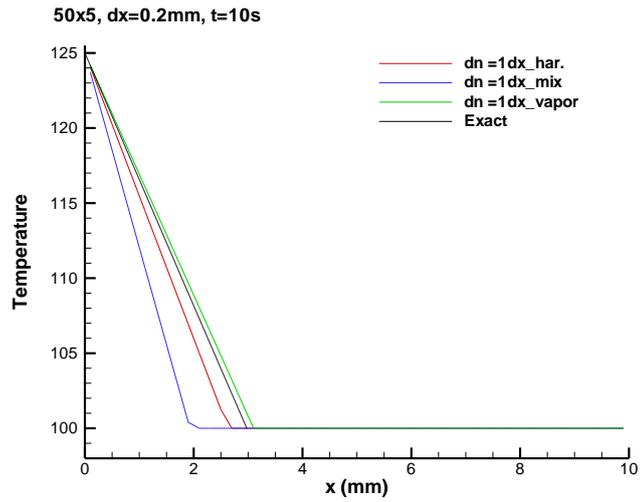


圖 4.5 網格(50x5) 計算時間 t=10s 之溫度分佈圖

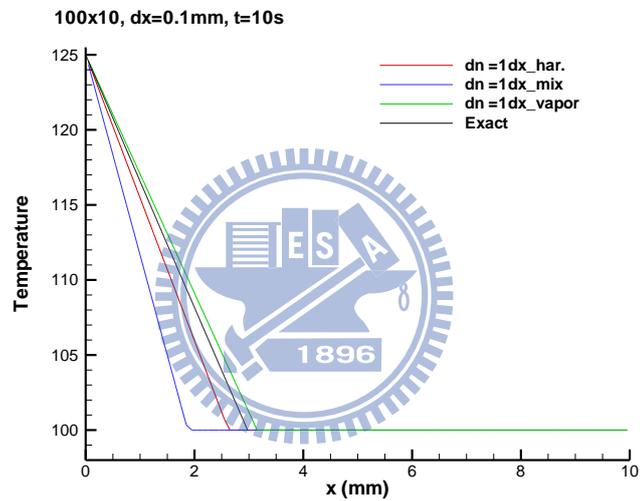


圖 4.6 網格(100x10) 計算時間 t=10s 之溫度分佈圖

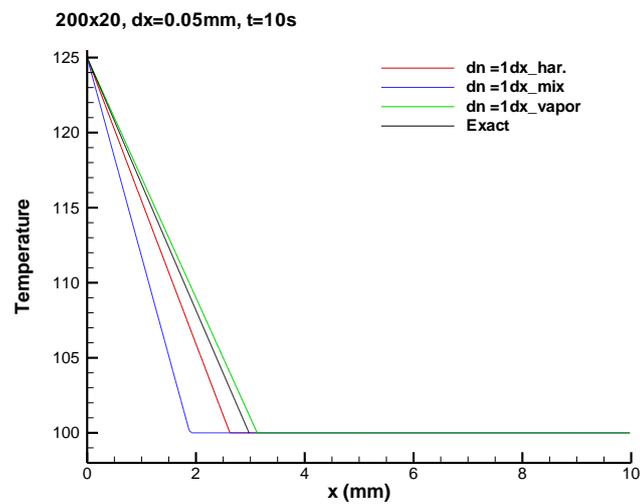


圖 4.7 網格(200x20) 計算時間 t=10s 之溫度分佈圖

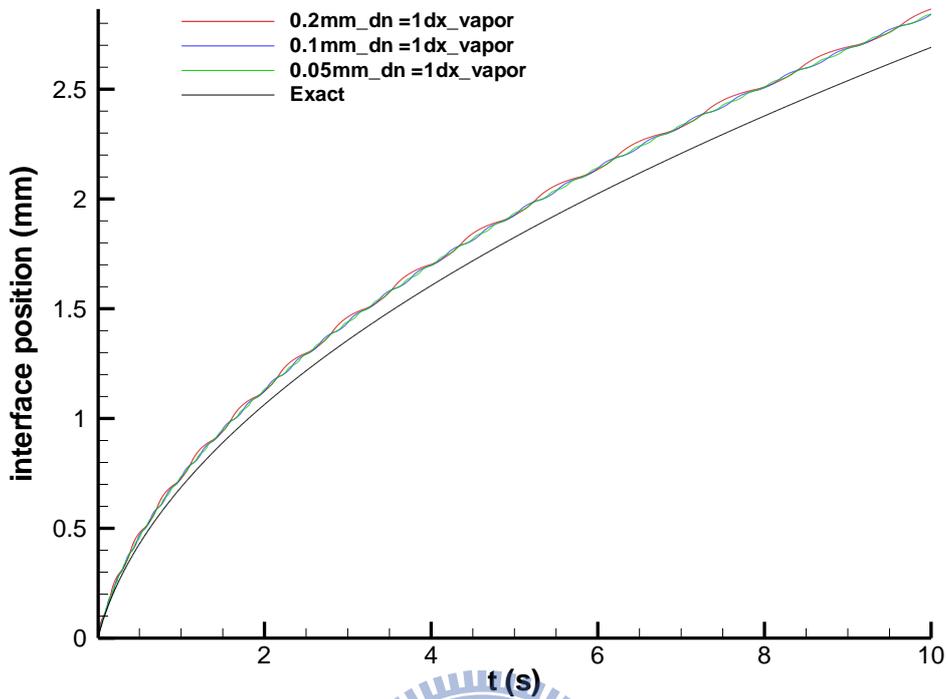


圖 4.8 Stefan 問題計算結果之介面位置圖

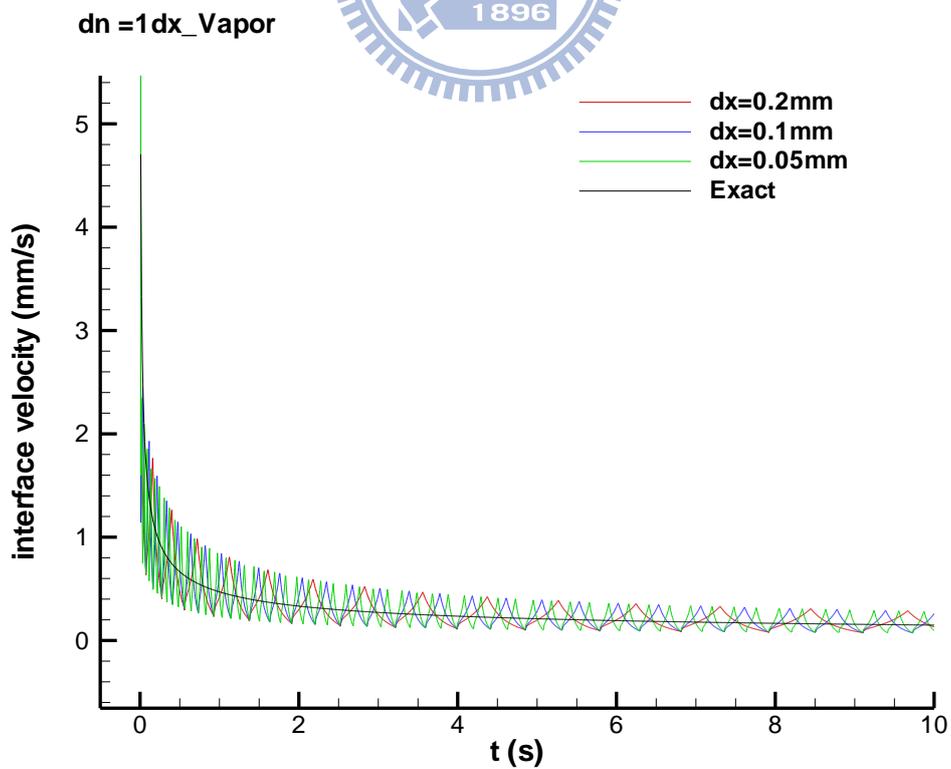


圖 4.9 Stefan 問題計算結果之介面速度對時間變化圖

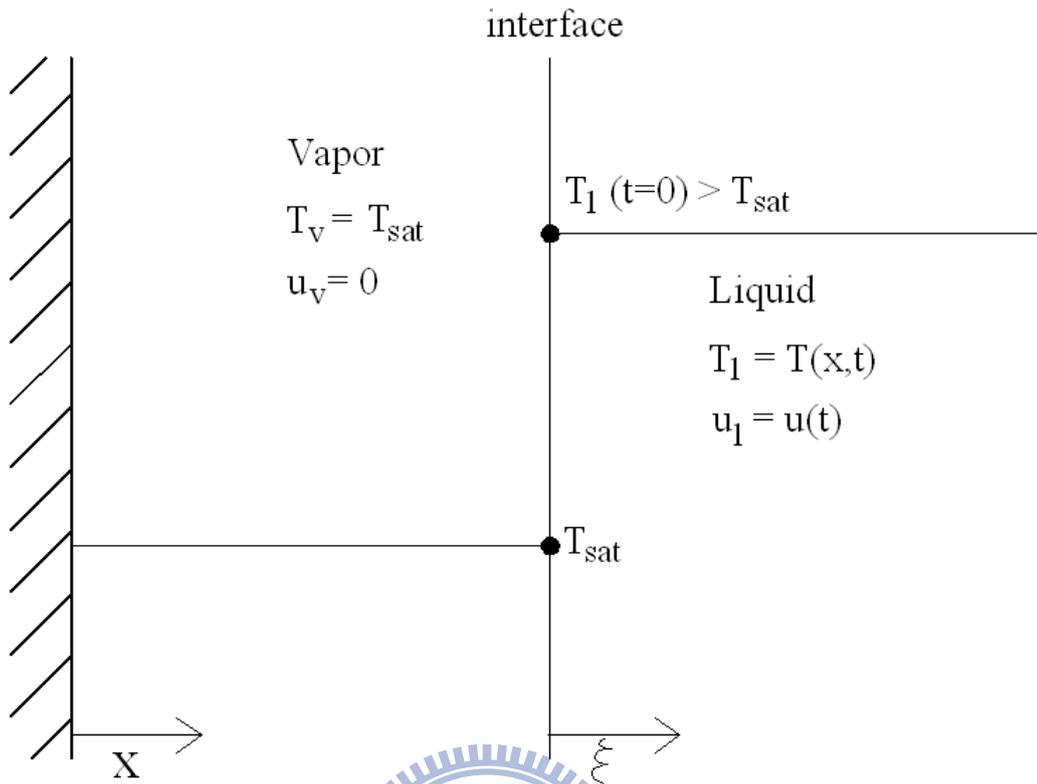


圖 4.10 Stefan's 2nd 問題之示意圖



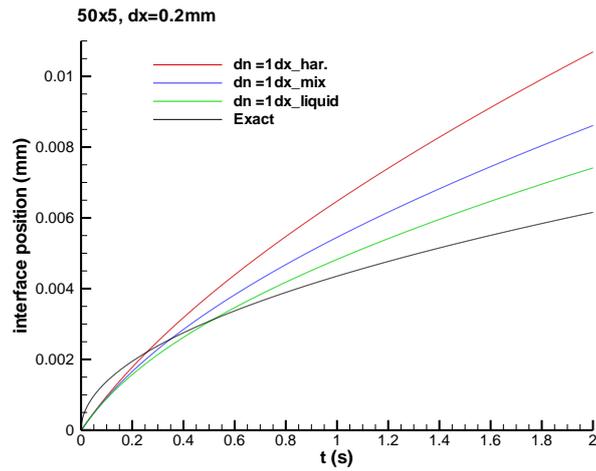


圖 4.11 網格(50x5) 使用不同混合熱傳係數計算結果之介面位置圖

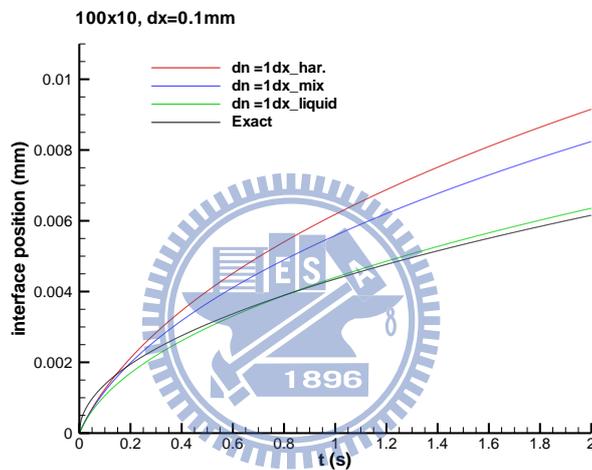


圖 4.12 網格(100x10) 使用不同混合熱傳係數計算結果之介面位置圖

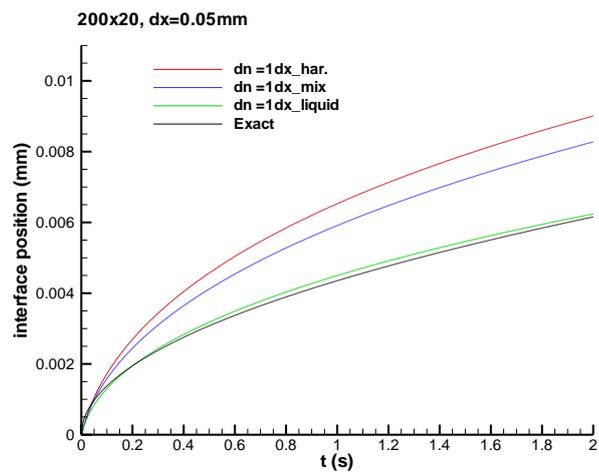


圖 4.13 網格(200x20) 使用不同混合熱傳係數計算結果之介面位置圖

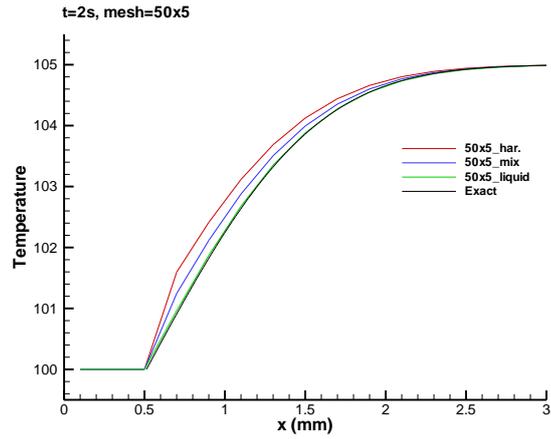


圖 4.14 網格(50x5)不同混合熱傳係數計算時間 $t=2s$ 之溫度分佈圖

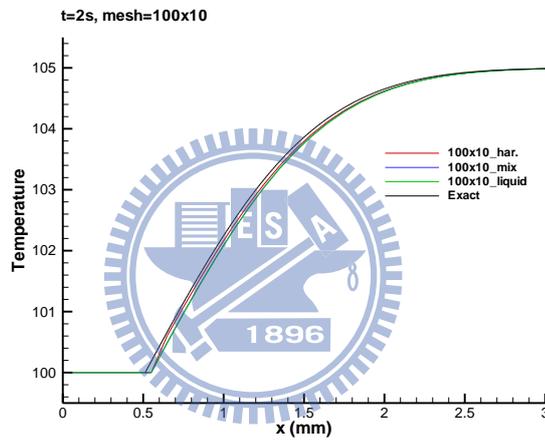


圖 4.15 網格(100x10)不同混合熱傳係數計算時間 $t=2s$ 之溫度分佈圖

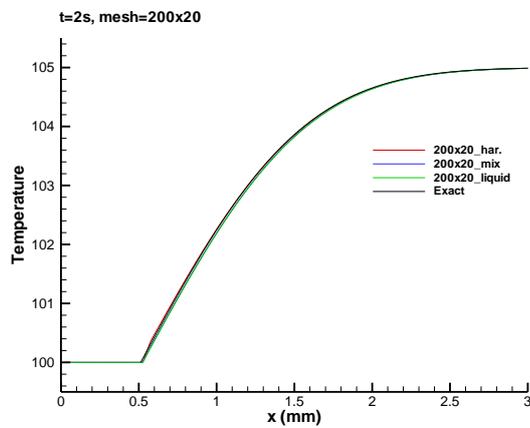


圖 4.16 網格(200x20)不同混合熱傳係數計算時間 $t=2s$ 之溫度分佈圖

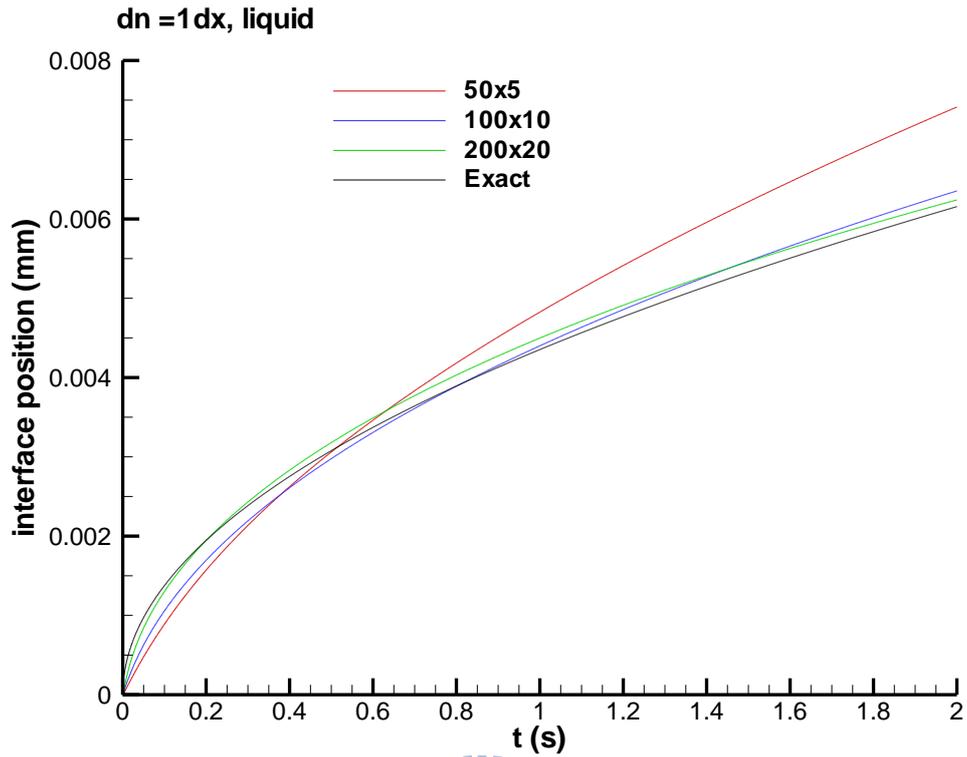


圖 4.17 Sucking 問題計算結果之介面位置圖

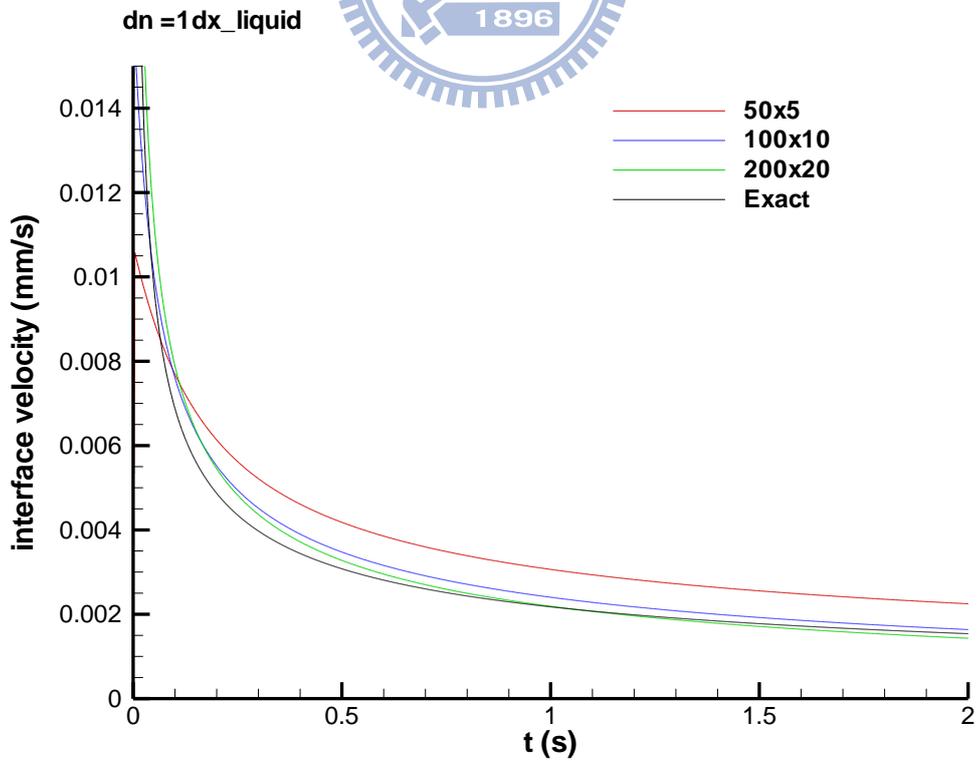


圖 4.18 Sucking 問題計算結果之介面速度對時間變化圖

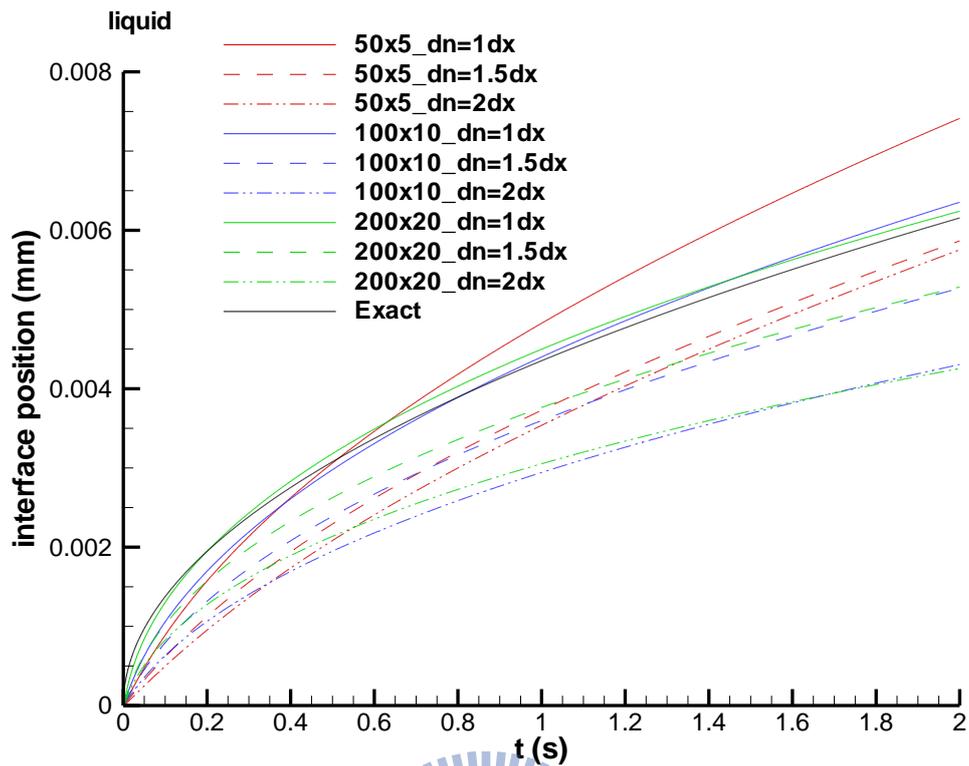


圖 4.19 液相流體之熱傳係數搭配不同 Δn 計算結果之介面位置圖

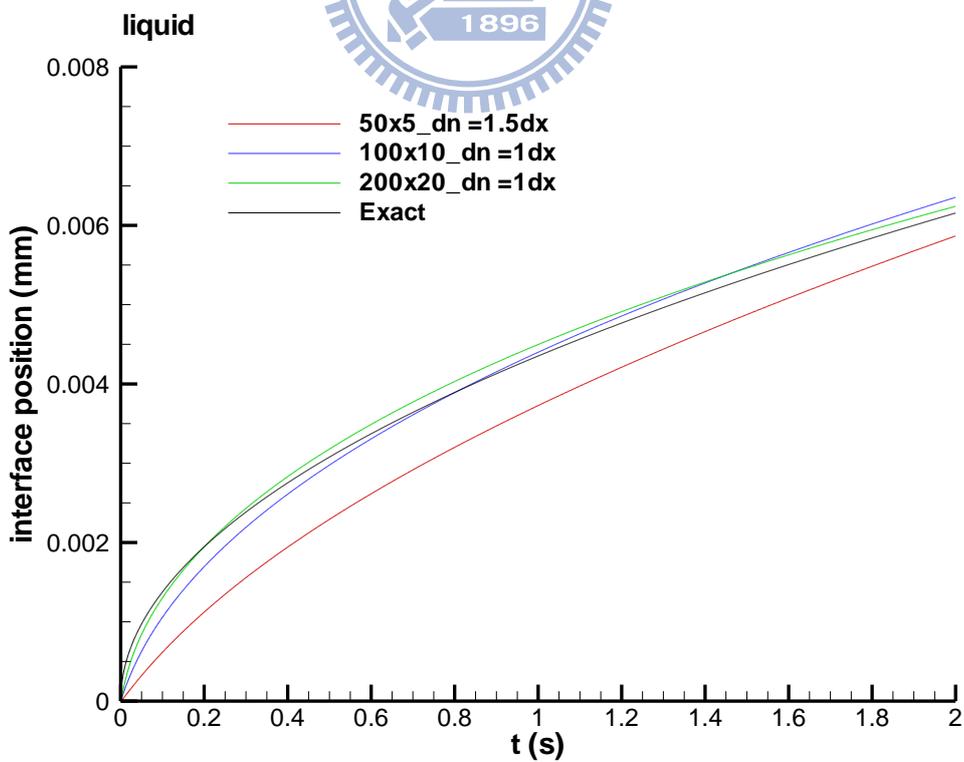


圖 4.20 液相流體之熱傳係數搭配最佳 Δn 計算結果之介面位置圖

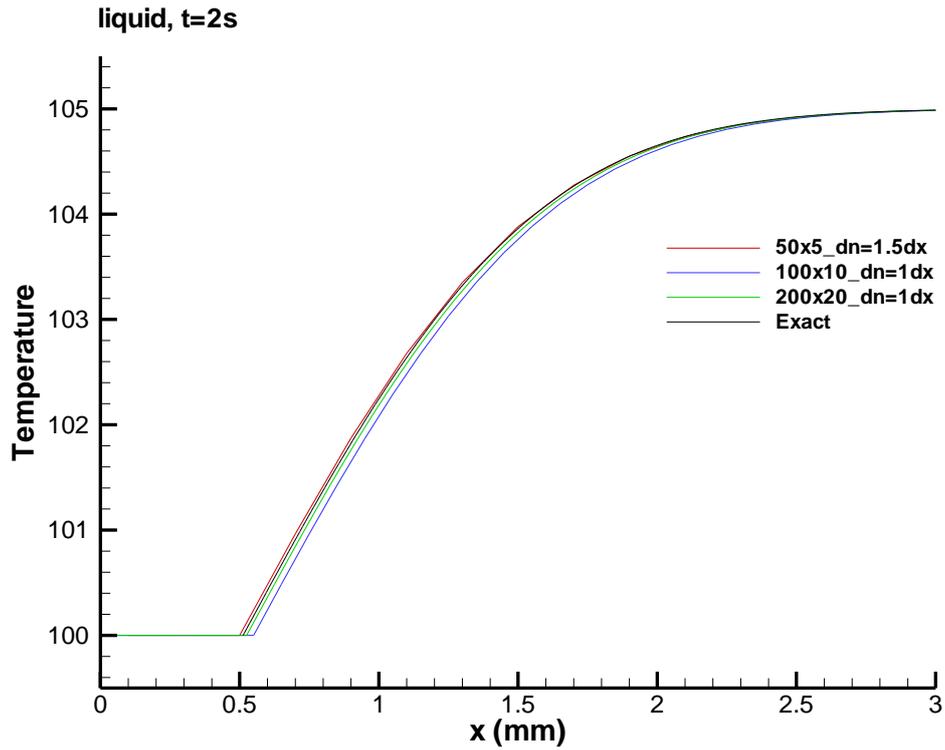


圖 4.21 液相流體之熱傳係數搭配最佳 Δn 計算結果之溫度分佈圖

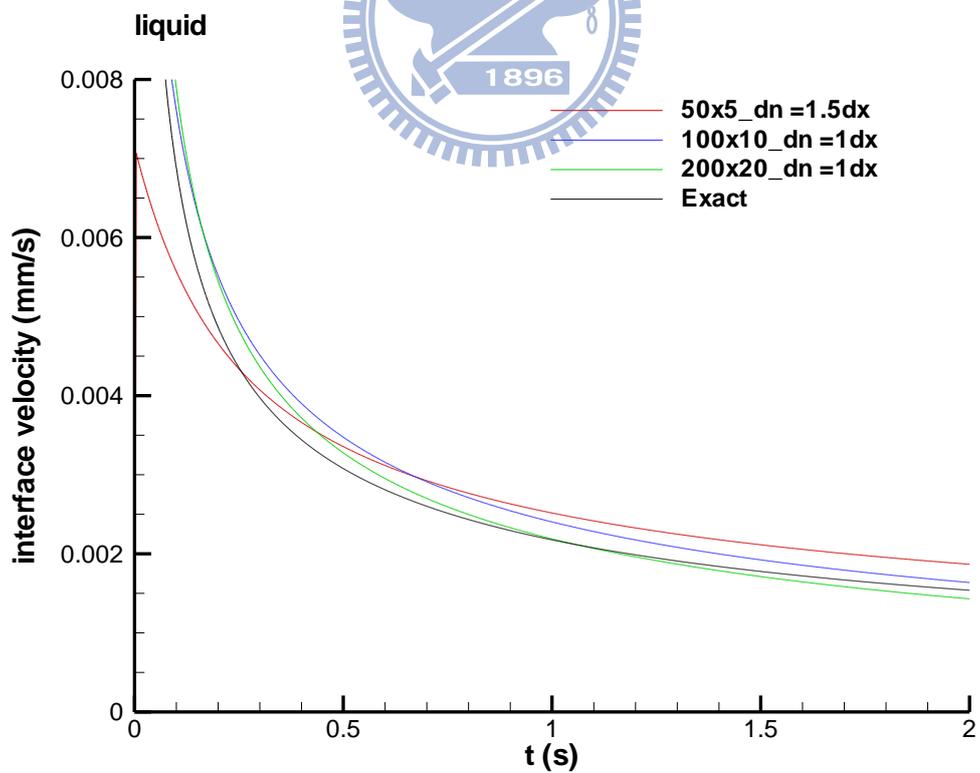


圖 4.22 液相流體之熱傳係數搭配最佳 Δn 之介面速度對時間變化圖



圖 4.23 薄膜沸騰模擬所給的初始介面分佈圖

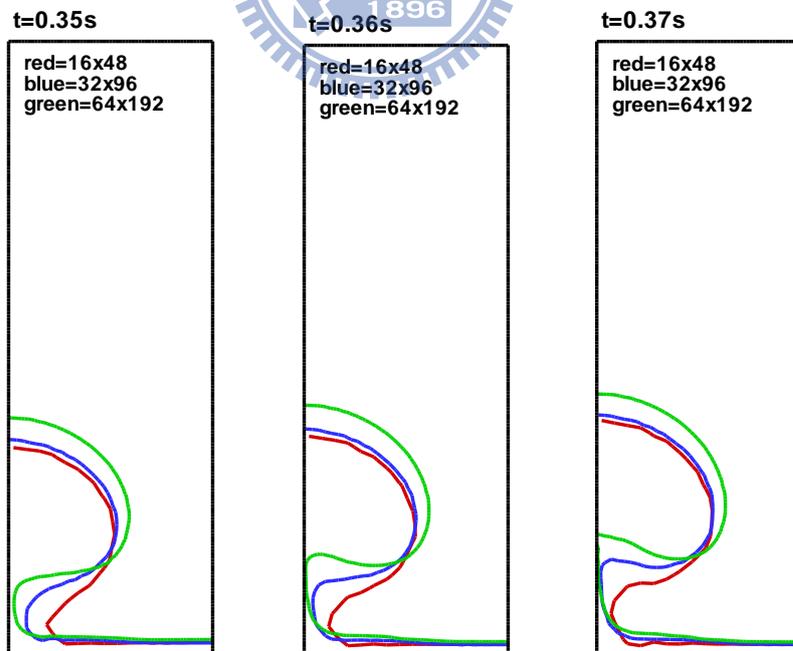


圖 4.24 薄膜沸騰模擬在不同網格之第一顆氣泡升起情況

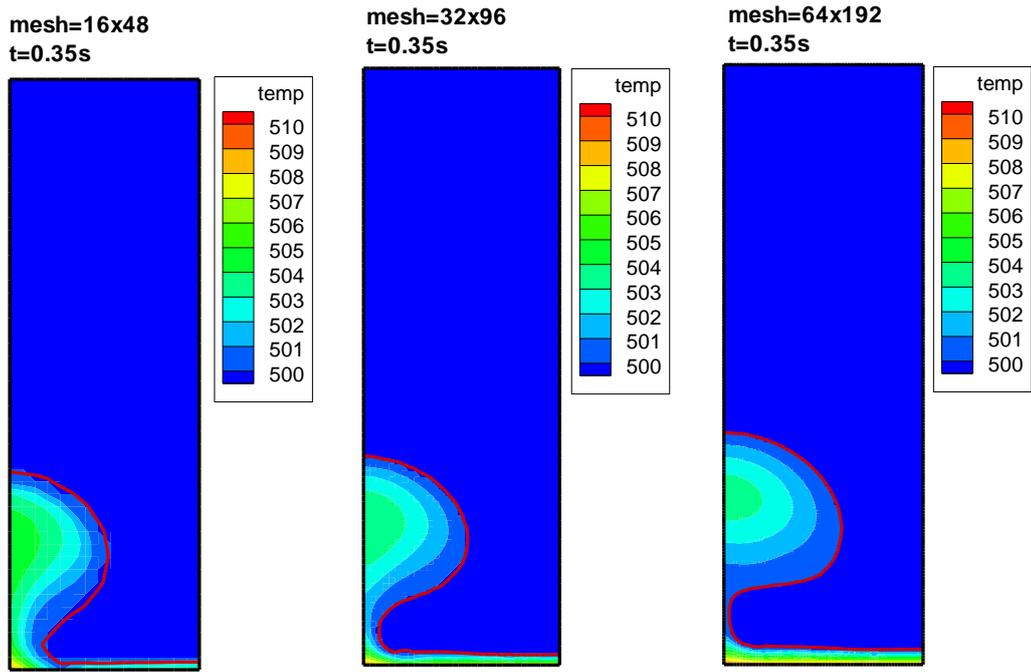


圖 4.25 薄膜沸騰模擬在計算時間 $t=0.35\text{s}$ 不同網格之溫度分佈

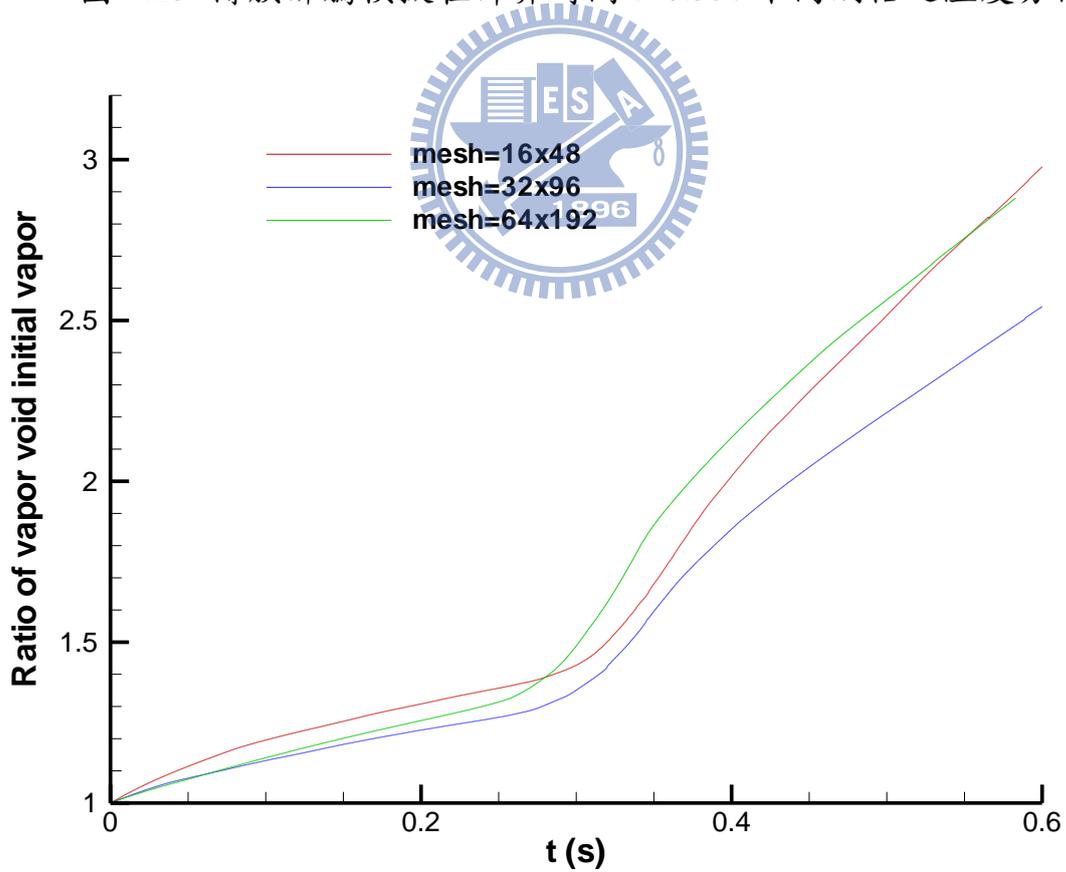


圖 4.26 氣相體積對初始氣相體積之比值對時間之變化圖

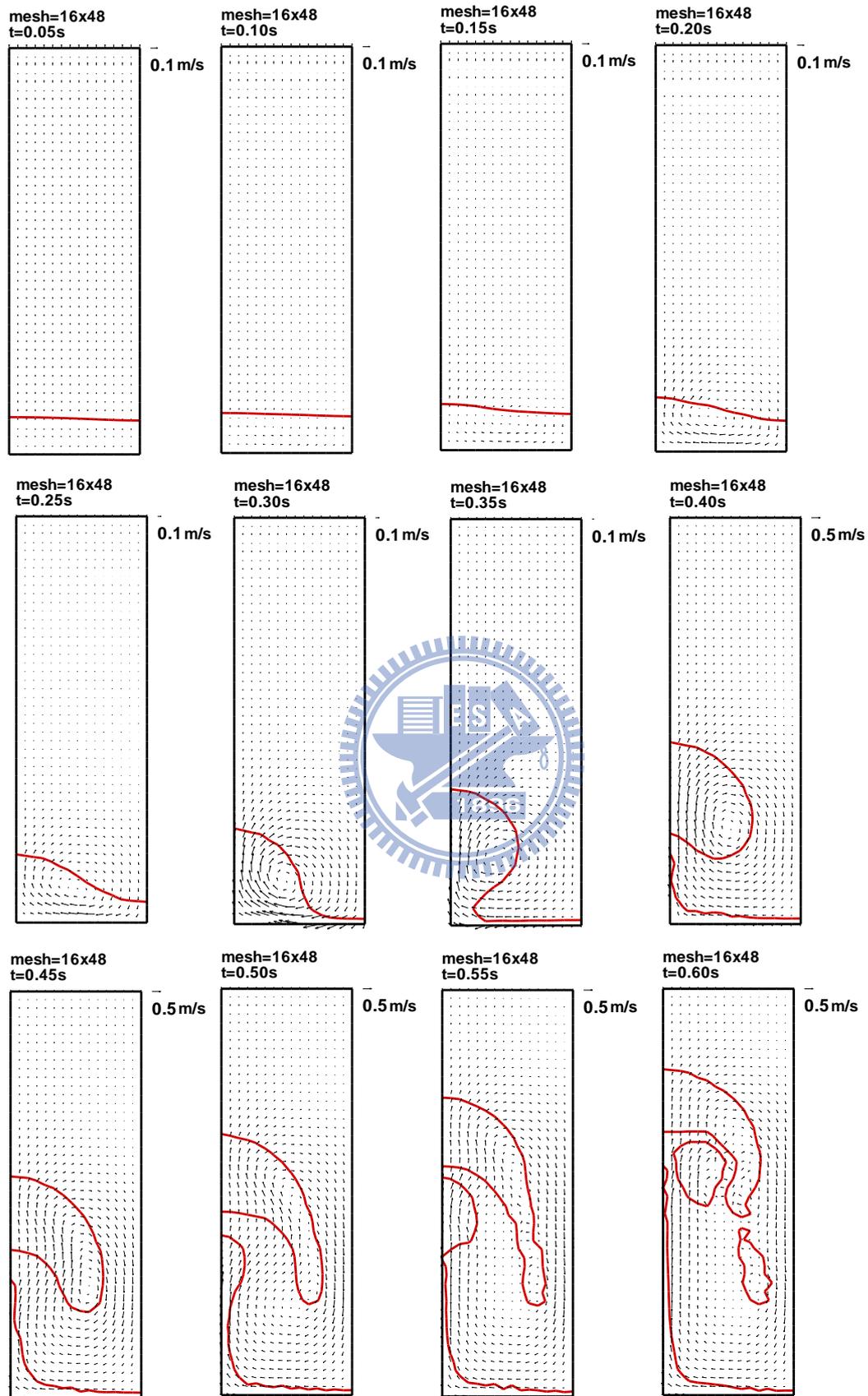


圖 4.27 網格 16x48 之氣泡生成與速度場分佈圖

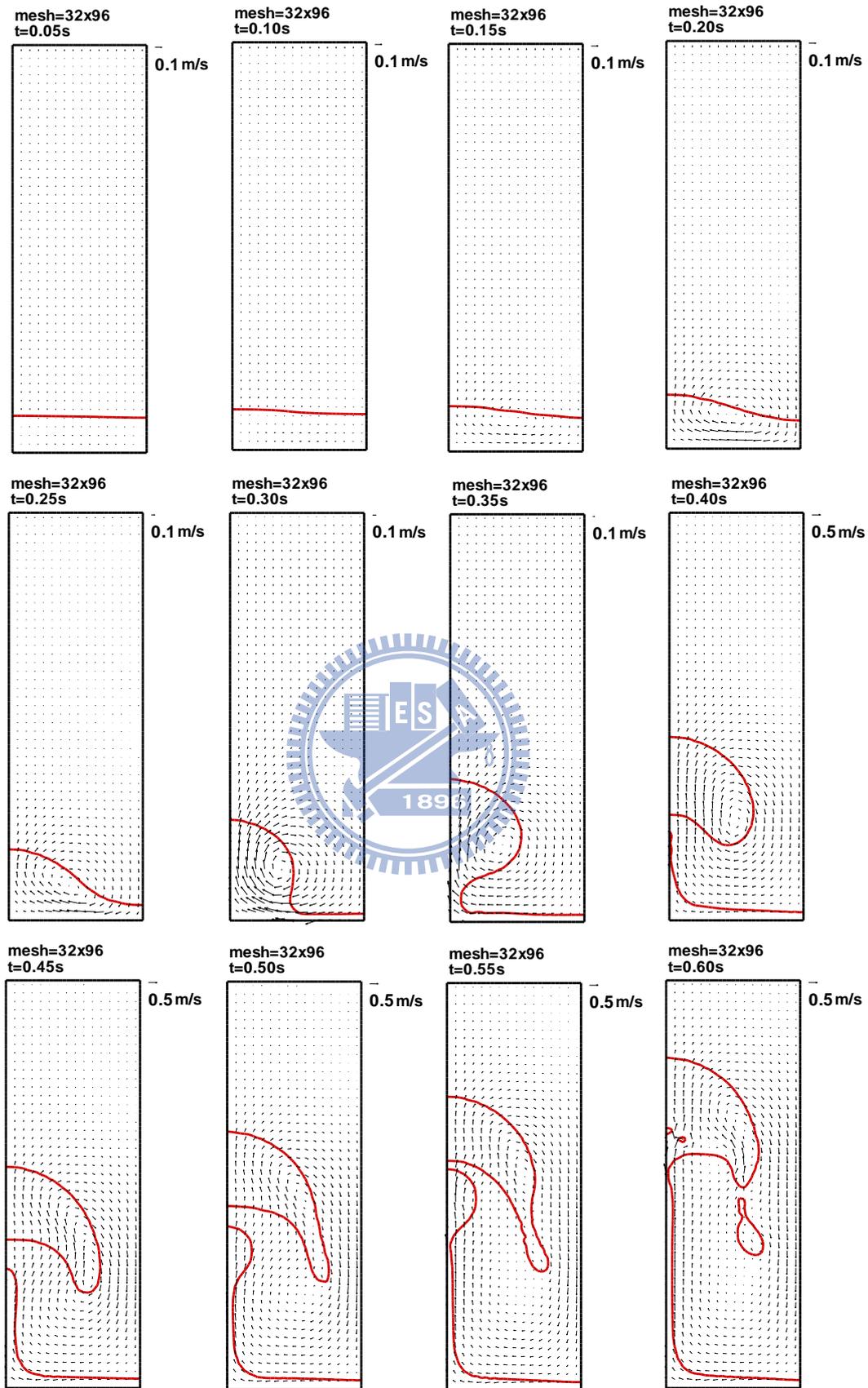


圖 4.28 網格 32x96 之氣泡生成與速度場分佈圖

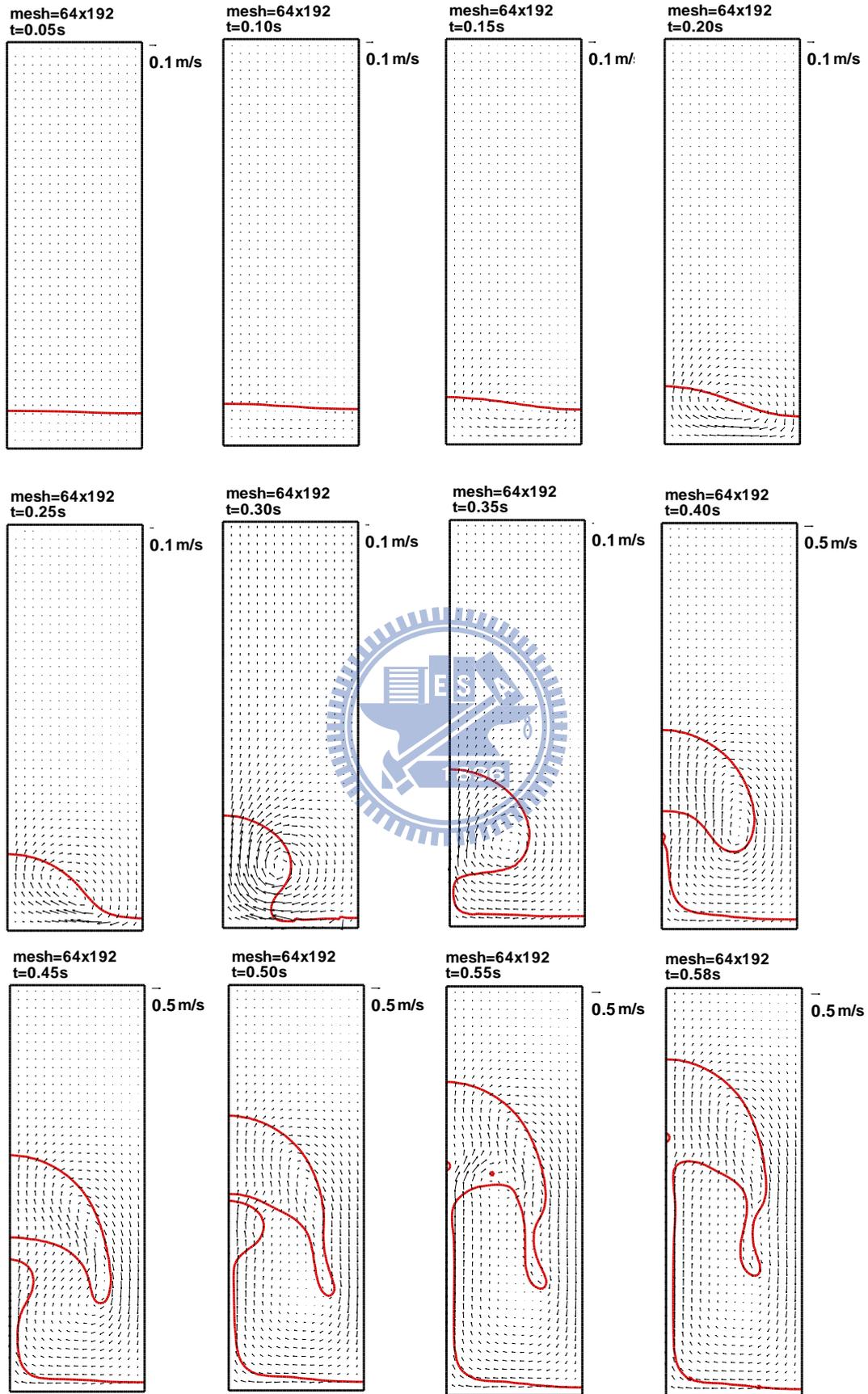


圖 4.29 網格 64x192 之氣泡生成與速度場分佈圖

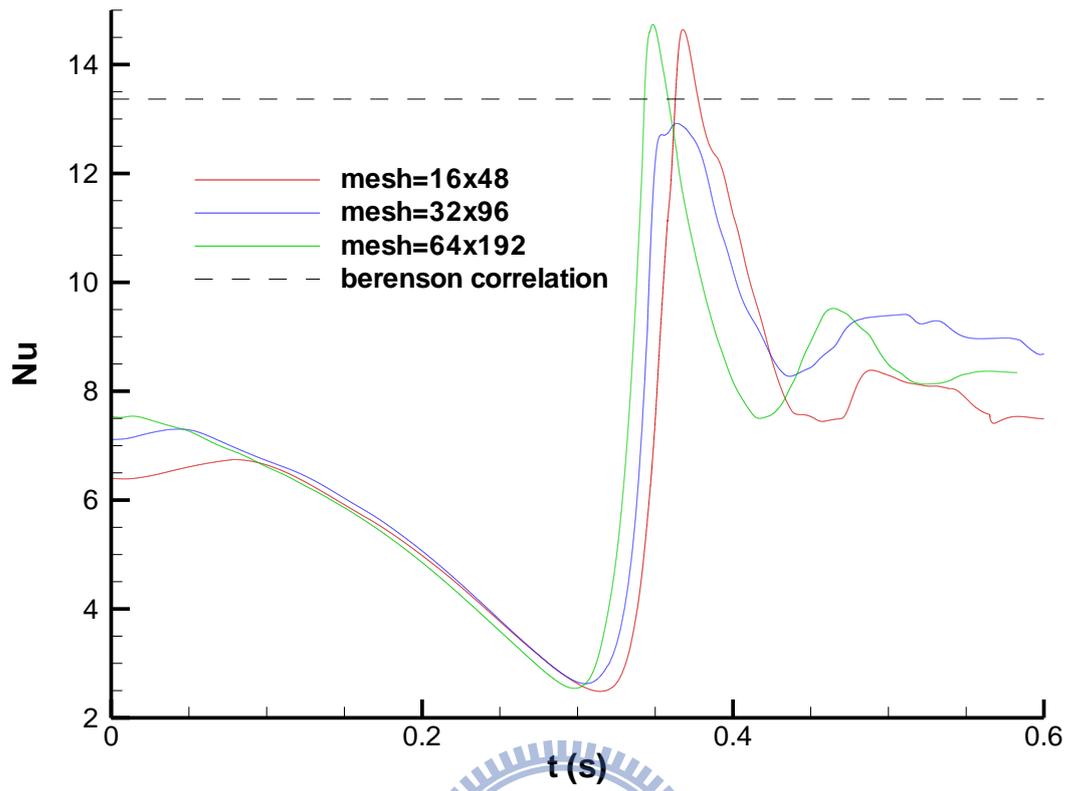


圖 4.30 不同網格在底部一定點之 Nu 隨時間變化圖