

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

三維挫屈梁之非線性分析

The nonlinear analysis of three dimensional buckled beam

研究生：黃楚璋

指導教授：蕭國模 博士

中華民國一百年七月

三維挫屈梁之非線性分析

The nonlinear analysis of three dimensional buckled beam

研究生：黃楚璋

Student：Chu-Chang Huang

指導教授：蕭國模 博士

Advisor：Dr. Kuo-Mo Hsiao

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文



Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

August 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國 一 百 年 八 月

三維挫屈梁之非線性分析

The nonlinear analysis of three dimensional buckled beam

研究生：黃楚璋

指導教授：蕭國模博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘要

本研究使用共旋轉全拉格蘭日有限元素法分析空間中一個兩端固定之細長梁，先在一端受固定的扭轉角，再施加端點軸向強制位移後的挫屈負荷及挫屈後行為。

本文採用由蕭國模博士與林文一博士所提出的一致性共旋轉全拉格蘭日有限元素法[18]來推導梁元素，應變採用以 Green strain 以及 Engineering strain 來進行分析，以完整非線性梁理論之二階一致線性化(consistent second order linearization)推導含撓曲、扭曲及軸向變形間耦合效應梁元素。

本文解非線性平衡方程式的數值計算方法是基於牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法配合弧長控制(arc length control)法的增量迭代法。以系統切線剛度矩陣之行列式值為零做為挫屈準則。

數值例題將探討空間中不同細長比之細長梁，在受到固定轉角及軸向壓縮之挫屈負荷及挫屈後的軸向反力，比較以 Green strain 以及 Engineering strain 來分析的差異，並考慮梁之自重以及梁之初始不完美的影響。

The nonlinear analysis of three dimensional buckled beam

Student : Chu-Chang Huang

Advisor : Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University , Hsinchu, Taiwan, R.O.C.

ABSTRACT

The buckling and postbuckling behavior of clamped spatial rods subjected to a prescribed end axial rotation first, and then under compressive axial displacements is investigated using the corotational finite element method.

The consistent co-rotational finite element formulation for three-dimensional Euler beam presented by Hsiao and Lin [18] is employed here. Both the Green strain and engineering strain are used for the measure of strain here. All coupling among bending, twisting, and stretching deformations for beam element is considered by consistent second-order linearization of the fully geometrically nonlinear beam theory.

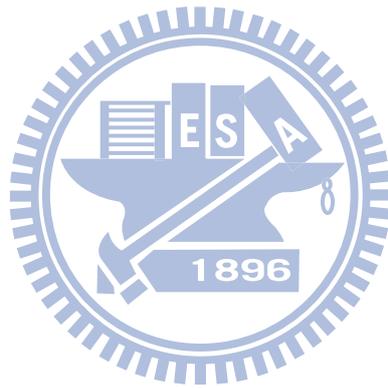
An incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method combined with constant arc length of incremental displacement vector is employed for the solution of nonlinear equilibrium equations. The zero value of the tangent stiffness matrix determinant of the structure is used as the criterion of the buckling state.

Numerical examples are presented to investigate the effect of the prescribed end axial rotation and slenderness ratio on the initial, buckling, and postbuckling end axial reaction force of spatial rods under end compressive axial displacements. The results obtained using the Green strain and the engineering strain, are compared. The effect of self-weight and initial imperfection is investigated also.

誌謝

兩年來感謝指導教授 蕭國模博士在學業上的指導以及生活上的照顧，使得本文能夠順利完成，在此致上由衷的謝意。同時也感謝尹慶中老師、鄭文雅老師擔任口試委員，對本文提出了寶貴的建議。感謝蔡明旭學長、林運融學長、蔡秉宏學長及林寬政學長在課業上的幫助，感謝盧志群同學、翁林甫同學與學妹許彤羽的朝夕相處以及課業上的相互討論，使我這兩年能順順利利的度過，在我的生活上亦幫助很多，十分感謝你們。

最後要感謝我的父母親與家人對我的鼓勵，使我能完成這段學業，在此以此成果獻給所有關心我的人。



目錄

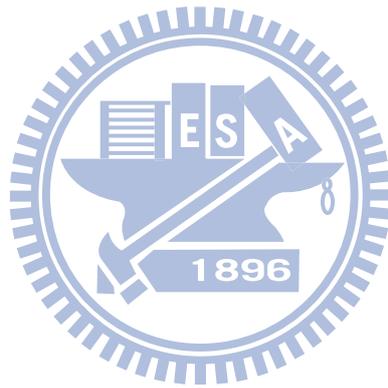
中文摘要	I
英文摘要	II
誌謝	III
目錄	IV
表目錄	VI
圖目錄	VII
第一章 緒言	1
第二章 理論推導	4
2.1 問題描述	4
2.2 基本假設	4
2.3 座標系統描述	4
2.4 旋轉向量	6
2.5 Euler 梁的變形描述	6
2.6 Euler 梁的應變及應變的變分	11
2.7 元素節點內力之推導	15
2.8 元素剛度矩陣之推導	18
2.9 系統平衡方程式與收斂準則	20
第三章 數值計算方法及程序	22
3.1 增量迭代法	22
3.2 二分法	24
3.3 N 循環迭代法	25
第四章 數值例題與結果	26
4.1 本文理論之準確性以及程式的正確性	26

4.2 分析文獻[1,2]實驗結果與理論結果之差異	27
第五章 結論與展望	34
參考文獻	36
附表	39
附圖	44



表目錄

表一	圓形斷面常數.....	39
表二	例題一之軸力與挫屈扭矩.....	40
表三	方形斷面常數.....	41
表四	例題三固端梁受端點扭角的反力及中點側向為移(考慮自重).....	42
表五	例題三固端梁受端點扭角的反力及中點側向為移(不考慮自重)..	43



圖目錄

圖一	細長梁的扭轉壓縮.....	44
圖二	元素座標與元素截面座標.....	45
圖三	旋轉向量圖.....	46
圖四	細長梁 B 端承受一扭矩與軸向壓力.....	47
圖五	例題一細長梁之挫屈扭矩與軸力曲線圖.....	48
圖六	細長梁 B 端承受一扭矩.....	49
圖七	例題二細長梁受扭矩之 $\Delta/L_T - M/M_{cr}$ 之曲線圖.....	50
圖八	例題二細長梁受扭矩之 $\Delta/L_T - \phi(\pi)$ 之曲線圖.....	51
圖九	例題二細長梁受扭矩之 $\phi(\pi) - M/M_{cr}$ 之曲線圖.....	52
圖十	細長梁受端點轉角與位移.....	53
圖十一	細長梁考慮自重 B 端承受一扭角.....	54
圖十二	例題三不考慮自重下 L_T 與 M/M_{cr} 之關係圖.....	55
圖十三	例題三考慮自重下 L_T 與 M/M_{cr} 之關係圖.....	56
圖十四	例題三 $L_T = 500\text{mm}$ 不考慮自重 $\phi(\pi) - P/P_{cr}$ 之關係圖.....	57
圖十五	例題三考慮自重 $\phi(\pi) - P/P_{cr}$ 之關係圖.....	58
圖十六	例題三考慮自重下 L_T 與 P/P_{cr} 之關係圖.....	59
圖十七	例題三考慮自重下 L_T 與 V_m 之關係圖.....	60
圖十八	細長梁考慮自重 B 端施加軸向轉角與軸向位移.....	61
圖十九	例題四之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 0$).....	62
圖二十	例題四之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = \pi$).....	63
圖二十一	例題四之 $M/M_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = \pi$).....	64
圖二十二	例題四之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 2\pi$).....	65
圖二十三	例題四之 $M/M_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 2\pi$).....	66

圖二十四	例題四之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 3\pi$)	67
圖二十五	例題四之 $M/M_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 3\pi$)	68
圖二十六	例題四之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 4\pi$)	69
圖二十七	例題四之 $M/M_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 4\pi$)	70
圖二十八	例題四之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 5\pi$)	71
圖二十九	例題四之 $M/M_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 5\pi$)	72
圖三十	例題四具初始不完美之非直梁 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 0$)	73
圖三十一	簡支梁兩端加彈簧限制側向轉角	74
圖三十二	簡支梁兩端加彈簧之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 0, L_T = 300$)	75



第一章 緒 言

電纜(cables)、纜繩(wire rope)在受到扭轉及軸向壓力/或低張力下會形成複雜的環狀和纏繞的現象，此現象稱為 hockles[2-5]，此外 DNA 的超螺旋(supercoils)也相當於纜繩的 hockles 現象[3,6]。當電纜、纜繩發生環狀和纏繞的現象時會導致機械的損毀或光纖電纜信號的衰減，文獻上有很多纜繩 hockles 現象的研究[1,2,4-7]。文獻上通常將纜繩視為撓曲剛度很小的細長梁[3-5,7,8,10]，並用梁受到扭轉及軸力時的側向挫屈來探討 hockles 發生的準則(criterion) [9]。

文獻[9]用解析解探討兩端固定長度 L_T 的細長梁(如圖一所示)，將其一端施加固定值的扭轉角 ϕ ，然後逐漸施加軸向位移 Δ ，當 Δ 超過某一固定值後，該梁會發生挫屈，若繼續增加 Δ ，則該梁會有複雜的挫屈後行為，文獻[9]稱上述的問題為先扭轉後壓縮問題(twist-shortening problem)。文獻[9]中考慮了軸向變形、剪變形、撓屈變形、及扭轉變形，並假設梁斷面有相同主撓曲剛度(即 $I_y = I_z = I$ ，其中 I_y 、 I_z 為斷面主軸的面積慣性矩)，應力應變皆在彈性範圍內，且無均佈載重，外加負荷只在梁的兩端點。當 $\phi = 0$ 時，梁挫屈時會先產生平面內(in plane)的側向位移，即所謂的側向挫屈，當 $\phi \neq 0$ 時，梁挫屈時會直接產生平面外(out of plane)的挫屈現象，如圖一所示。文獻[9]探討當 $\phi = 3\pi$ 時，細長梁的挫屈負荷及挫屈後軸向壓縮量和軸力的關係。相同的問題亦在文獻[1-3]中亦探討相同的問題，文獻[1-3]使用 Cosserat rod theory，假設細長梁不可伸縮、不考慮剪應變，所得的數值解與文獻[9]的理論解都相當吻合。文獻[1,2]中亦以實驗探討在 $\phi = 0\pi - 5\pi$ 時，細長梁的挫屈負荷及挫屈後行為，其實驗結果與理論解大致上有相同的趨勢，但在初始挫屈時，兩者有相當的差異，且 ϕ 越大，兩者的差異越大，文獻[2]認

為此差異可能是沒有考慮重力影響、沒有考慮摩擦力、沒有考慮剪變形、沒有考慮材料非線性、及實際的邊界條件與分析的邊界條件不一致等原因造成的。但文獻[2]中僅探討重力的影響，文獻[2]發現重力並無法解釋兩者的主要差異。文獻[2]使用的 Cosserat rod theory，假設梁不可伸縮，且不考慮扭轉與軸向變形間的非線性耦合[11]，但當扭轉率很大時，該耦合或許不能忽略。故本文認為文獻[1,2]之實驗結果與理論分析的差異可能與未考慮梁撓曲、扭曲及軸向應變間的耦合效應有關。因此本研究將考慮梁的撓曲、扭曲及軸向應變間的非線性耦合效應，探討文獻[1-3]中細長梁先扭轉後壓縮的問題，分析該梁的挫屈負荷及挫屈後行為。

文獻[12]中使用共旋轉全拉格蘭日 (Corotational Total Lagrangian Formulation) 有限元素法推導梁元素，以梁之正確的變形機制 (Kinematics) 及完整非線性梁理論之二階一致線性化 (consistent second order linearization) 推導含撓曲、扭曲及軸向變形間耦合效應之 12 個自由度的三維梁元素，由文獻[12]的數值例題中可以發現其梁元素應用在空間梁結構的幾何非線性分析及挫屈分析上有很精確的結果，文獻[11]中使用文獻[12]的梁元素探討一端為固定端，另一端限制了側向位移及側向轉角之細長梁，受端點軸力與扭矩作用下的挫屈負荷及挫屈後行為，其結果與文獻[1,13]的結果相當吻合。

文獻[14]使用與文獻[12]相同的方法，但考慮了扭轉的翹屈剛度推導一個 14 個自由度的三維梁元素，由文獻[11, 12, 14]的數值例題，可以發現其梁元素應用在空間梁結構的幾何非線性分析及挫屈分析上有很精確的結果，但在梁斷面之主慣性矩 I_y 、 I_z 相差很大時，需要使用很多的梁元素才可以收斂到精確的結果。文獻[15, 16]中發現隨元素的數目的增加，元素節點內力及剛度矩陣中含梁元素之長度、形心軸側向位移的一次微分、及扭

轉角之項會趨近於零，若去掉這些會趨近於零的項，可以在梁斷面之主慣性矩 I_y 、 I_z 相差很大時，用很少的元素得到精確的結果。

本研究將採用文獻[14]的三維梁元素，並去掉元素節點內力及剛度矩陣中含梁元素之長度、剪心軸側向位移的一次微分、及扭轉角之項，以增加收斂速率。本研究將以牛頓法及定弧長法的增量迭代法解非線性平衡方程式。本文將分析文獻[1,2]中細長梁先扭轉後壓縮的問題，探討該梁的挫屈負荷及挫屈後行為，並與文獻[1,2]的理論及實驗結果比較。本研究將考慮重力及結構之初始不完美(initial imperfection)的影響。當應變不是很小時，由工程應變及工程應力[17]與使用 Green strain 及 Second Piolla Kirchhoff stress [11, 14]推導出的梁之軸向力的二次項有些差異，此差異亦可能影響分析的結果，所以本研究亦將比較兩者分析的結果。



第二章 理論推導

2.1 問題描述

本文將探討如圖一所示之雙對稱的固端細長梁，受到軸向位移及扭轉的幾何非線性行為。本文將使用共旋轉有限元素法(co-rotational finite element formulation)探討該細長梁的挫屈負荷及挫屈後行為。

2.2 基本假設

本文對梁元素的推導，做如下的基本假設：

- (1) 梁為細長的等斷面、雙對稱梁，且Euler-Bernoulli 假說成立。
- (2) 梁元素的形心軸之單位長度伸長量(unit extension)為均勻的伸長。
- (3) 梁元素的變形與應變皆為小變形與小應變。
- (4) 梁元素斷面的翹曲為梁元素的軸向扭轉率與該梁的聖維南(Saint Venant)翹曲函數的乘積。



2.3 座標系統描述

本研究是使用共旋轉有限元素法(co-rotational finite element formulation)，將梁分割成若干個兩個節點的梁元素。為了描述系統的運動、元素的變形、邊界條件，本文中共定義了三套直角座標系統：

- (1) 固定總體座標系統(圖二)， $X_i^G (i=1, 2, 3)$

系統的節點座標及方位，其他座標系統之座標軸的方向餘弦，皆在此座標系統中定義。

- (2) 元素座標系統(圖二)， $x_i (i=1, 2, 3)$

此座標系統附屬在每一梁元素上，其原點位於該元素的節點1上， x_1 軸通過該元素的兩端節點(1, 2)， x_2 軸與 x_3 軸在元素變形前與斷面的主軸方向一致，而元素變形後的 x_2 軸與 x_3 軸，可由該元素未翹曲的兩端斷面的方位來決定，是分別將位於節點 1, 2 變形後的斷面繞一個與該斷面之法線及 x_1 軸垂直的旋轉軸旋轉一角度使斷面之法線方向與 x_1 軸方向一致(此時並不考慮斷面之翹曲變形，否則斷面的法線方向無法定義)，然後再以兩斷面主軸方向的角度平分線作為 x_2 軸及 x_3 軸的方向。梁元素的變形、節點內力、以及元素剛度矩陣，皆在此座標系統中建立。

(3) 元素斷面座標系統(圖二)， $x_i^S (i=1, 2, 3)$

此座標系統與元素的斷面一起平移和旋轉，其原點剛接於未翹曲斷面的剪力中心， x_1^S 軸為未翹曲斷面的法線方向， x_2^S 軸與 x_3^S 軸分別與未翹曲斷面的主軸重合。元素的變形是由斷面座標相對於元素座標的旋轉來決定。

本文中以符號 $\{ \}$ 代表行矩陣。總體座標系統 $\mathbf{X}^G = \{ X_1^G, X_2^G, X_3^G \}$ 與元素座標 $\mathbf{x} = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ ，元素斷面座標 $\mathbf{x}^S = \{ x_1^S, x_2^S, x_3^S \}$ 的關係可表示如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^G &= \mathbf{A}_{GE} \mathbf{x} \\ \mathbf{X}^G &= \mathbf{A}_{GS} \mathbf{x}^S \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

其中 \mathbf{A}_{GE} 、 \mathbf{A}_{GS} 分別代表元素座標、元素斷面座標對於固定總體座標系統的方向餘弦矩陣。

2.4 旋轉向量

本文中使用的旋轉向量來表示一個有限旋轉，如圖三所示，一向量 \mathbf{b} 受到一旋轉向量 $\phi\mathbf{a}$ 的作用而轉到一個新的位置 \mathbf{b}' ，向量 \mathbf{b}' 與 \mathbf{b} 之間的關係可表示成：

$$\mathbf{b}' = \cos\phi\mathbf{b} + (1 - \cos\phi)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + \sin\phi(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (2.4.1)$$

其中符號 \cdot 與 \times 分別代表向量的內積與外積， ϕ 表逆時鐘方向旋轉角， \mathbf{a} 表旋轉軸的單位向量。

2.5 Euler 梁的變形描述

本文在旋轉座標上描述梁元素的變形，由(2.2)節中的基本假設可知 Euler 梁元素的變形可以由其形心軸的位移、截面的翹曲(warping)及其截面的旋轉來描述。

本研究採用[23]中之梁的變型機制，如圖二中 Q 點為梁元素中的任意點，P 點為 Q 點在同一斷面之形心軸上的對應點。在旋轉座標上 Q 點的變形前後位置可以表示如下：

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (2.5.1)$$

$$\mathbf{r} = x_p\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3 + \theta_{1,s}\omega\mathbf{e}_1^S + y\mathbf{e}_2^S + z\mathbf{e}_3^S \quad (2.5.2)$$

其中 x 、 y 、 z 為變形前 Q 點在元素座標 x_i ($i=1,2,3$) 上的座標， x 亦為 P 點變形前 x_1 軸的座標， y 、 z 亦同時是 Q 點在 x_2^S 與 x_3^S 軸的座標。 $x_p(x)$ 、 $v(x)$ 以及 $w(x)$ 分別是變形後 P 點在元素座標 x_i ($i=1,2,3$) 上的座標， $v(x)$ 、 $w(x)$ 亦為 P 點在 x_2 及 x_3 軸方向的位移， $\theta_{1,s} = \frac{\partial\theta_1}{\partial s}$ 是梁斷面沿變形後形心軸的軸向扭轉率， $\theta_1(x)$ 為形心軸的扭轉角， s 為變形後形心軸的弧長， $\omega = \omega(y, z)$ 代表等斷面梁的聖維南翹曲函數， \mathbf{e}_i 及 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 分別為 x_i 與 x_i^S 軸的單位向

量，梁變形後形心軸的單位切線向量可表示為

$$\mathbf{t} = \{\cos\theta_n, \theta_3, -\theta_2\} \quad (2.5.3)$$

其中

$$\theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{w'}{1 + \varepsilon_0} \quad (2.5.4)$$

$$\theta_3 = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{v'}{1 + \varepsilon_0} \quad (2.5.5)$$

$$\cos\theta_n = \frac{\partial x_p}{\partial s} = (1 - \theta_2^2 - \theta_3^2)^{1/2} \quad (2.5.6)$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} = v_{,x}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (2.5.7)$$

ε_0 為形心軸的單位伸長量。

忽略扭轉翹曲的情況下，在方程式(2.5.4)至(2.5.7)中， s 為節點1至點P間的剪心軸在變形後的弧長，而 ε_0 為剪心軸的單位伸長量(unit extension)。由梁剪心軸上的認一點P在變形後的位置向量及方程式(2.5.6)與(2.5.7)，在小應變的假設情況下， $x_p(x)$ 可以表示如下

$$x_p(x) = u_1 + \int_0^x [(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2 - w_{,x}^2]^{1/2} dx \quad (2.5.8)$$

其中 $u_1(t)$ 為節點1在 x_1 方向上的位移，由元素座標系統的定義，其值為零。

由梁元素的變形為小變形的假設，利用近似式

$$[(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2 - w_{,x}^2]^{1/2} \approx (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2), \quad (2.5.8) \text{ 式可表示成}$$

$$x_p(x) = u_1 + \int_0^x (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2) dx \quad (2.5.9)$$

由座標系統的定義可知，在變形前 x_i 軸與 x_i^S ($i=1,2,3$) 軸的方向是一致的，即 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 的方向是一致的，而且變形後 \mathbf{e}_1^S 與(2.5.3)式的 \mathbf{t} 方向一樣。在本文中假設變形後的單位向量 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 的方向是由以下兩個

旋轉向量連續作用於單位向量 \mathbf{e}_i ($i=1, 2, 3$) 來決定[18]、[23]：

$$\boldsymbol{\theta}_n = \theta_n \mathbf{n}_\theta \quad (2.5.10)$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \theta_1 \mathbf{t} \quad (2.5.11)$$

$$\mathbf{n}_\theta = \{0, \theta_2 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}, \theta_3 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}\} = \{0, n_2, n_3\} \quad (2.5.12)$$

其中 \mathbf{n}_θ 為垂直於 \mathbf{e}_1 與 \mathbf{t} 之單位向量， θ_n 為 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{t} 的夾角， θ_1 為斷面繞 \mathbf{t} 的轉角。

將旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 作用在 \mathbf{e}_i 上，使其轉至一中繼位置 \mathbf{e}'_i ，如圖二所示，此時 \mathbf{e}'_i 與 \mathbf{t} 重合，再將 $\boldsymbol{\theta}_t$ 作用在 \mathbf{e}'_i ，將其轉到 \mathbf{e}_i^S 。若 \mathbf{e}_i 、 $\boldsymbol{\theta}_n$ 、以及 $\boldsymbol{\theta}_t$ 已知，則元素斷面座標 \mathbf{e}_i^S 就唯一決定；反之，若 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S 已知，則旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 與 $\boldsymbol{\theta}_t$ 亦唯一決定。

\mathbf{e}_i^S 與 \mathbf{e}_i 之關係可表示如下[18]、[23]

$$\mathbf{e}_i^S = [\mathbf{t}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2] \mathbf{e}_i = \mathbf{R} \mathbf{e}_i, \quad (2.5.13)$$

$$\mathbf{R}_1 = \cos \theta_1 \mathbf{r}_1 + \sin \theta_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{R}_2 = -\sin \theta_1 \mathbf{r}_1 + \cos \theta_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_1 = \{-\theta_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_2^2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3\}$$

$$\mathbf{r}_2 = \{\theta_2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_3^2\}$$

其中 \mathbf{R} 稱為旋轉矩陣。因 \mathbf{R} 為 θ_i ($i=1, 2, 3$) 的函數，所以本文中稱 θ_i 為旋轉參數。

當 θ_i ($i=1, 2, 3$) 分別有一微小變化 $\delta\theta_i$ 時，斷面座標會旋轉到一個新的位置，此一新的位置可由元素座標繞 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸分別作微小旋轉 $\delta\phi_i$ ($i=1, 2, 3$) 而得。

$\delta\boldsymbol{\theta} = \{\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3\}$ 與 $\delta\boldsymbol{\phi} = \{\delta\phi_1, \delta\phi_2, \delta\phi_3\}$ 之關係可表示如下[18]、[23]：

$$\delta\boldsymbol{\phi} = [\mathbf{t}, \mathbf{t}_1 + a\mathbf{t}, \mathbf{t}_2 + b\mathbf{t}] \delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{T} \delta\boldsymbol{\theta} \quad (2.5.14)$$

$$\mathbf{t}_1 = \left\{ -\theta_3, \frac{1-\theta_3^2}{\cos\theta_n}, \frac{\theta_2\theta_3}{\cos\theta_n} \right\}$$

$$\mathbf{t}_2 = \left\{ \theta_2, \frac{\theta_2\theta_3}{\cos\theta_n}, \frac{1-\theta_2^2}{\cos\theta_n} \right\}$$

$$a = \frac{\theta_3(1-\cos\theta_n)}{\theta_2^2 + \theta_3^2}$$

$$b = \frac{-\theta_2(1-\cos\theta_n)}{\theta_2^2 + \theta_3^2}$$

(2.5.14)式之反函數可表示如下:

$$\delta\theta = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -\theta_3 & \cos\theta_n & 0 \\ \theta_2 & 0 & \cos\theta_n \end{bmatrix} \delta\phi = \mathbf{T}^{-1} \delta\phi \quad (2.5.15)$$

當旋轉參數 θ_2 與 θ_3 很小時， \mathbf{T}^{-1} 矩陣可近似如下式

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\theta_3 & -\frac{1}{2}\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & 0 \\ \theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.16)$$

將(2.5.14)式代入(2.5.2)式，利用近似式 $\cos\theta_n \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2$ 、

$\sin\theta \approx \theta$ 、 $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ 並保留變形參數至二次項，則位置向量 \mathbf{r} 可以化簡

成

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.5.17)$$

$$r_1 = x_p + y(\theta_2\theta_1 - \theta_3) + z(\theta_2 + \theta_3\theta_1) + \theta_{1,x}\omega$$

$$r_2 = v + y\left[1 - \frac{1}{2}(\theta_3^2 + \theta_1^2)\right] + z\left(\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 - \theta_1\right) + \theta_{1,x}\theta_3\omega$$

$$r_3 = w + y\left(\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 + \theta_1\right) + z\left[1 - \frac{1}{2}(\theta_2^2 + \theta_1^2)\right] - \theta_{1,x}\theta_2\omega$$

由梁之形心軸單位長度的伸長量為均勻的伸長量之假設及(2.5.9)式，可以得到形心軸單位長度伸長量 ε_0 可表示如下

$$\varepsilon_0 = \frac{l-L}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.5.18)$$

$$l = L + u_2 - u_1 \quad (2.5.19)$$

其中 L 為梁元素變形前的長度， l 為梁元素變形後之形心軸的弦長， u_1 、 u_2 分別為節點1與2在 x_1 方向的位移。

本文中假設梁元素形心軸的位移 v ， w 與軸向扭轉角 θ_1 皆為 x 的三次Hermitian多項式，因此 v ， w ， θ_1 可表示成：

$$v(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}' \{v_1, v_1', v_2, v_2'\} = \mathbf{N}_b' \mathbf{u}_b \quad (2.5.20)$$

$$w(x) = \{N_1, -N_2, N_3, -N_4\}' \{w_1, -w_1', w_2, -w_2'\} = \mathbf{N}_c' \mathbf{u}_c \quad (2.5.21)$$

$$\theta_1(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}' \{\theta_{11}, \beta_1, \theta_{12}, \beta_2\} = \mathbf{N}_d' \mathbf{u}_d \quad (2.5.22)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \quad N_2 = \frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi), \quad (2.5.23)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \quad N_4 = \frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi),$$

$$\xi = -1 + \frac{2x}{L} \quad (2.5.24)$$

其中 v_j 與 w_j ($j=1, 2$)分別是 v 與 w 在節點 j 的節點值， v_j' 與 w_j' ($j=1, 2$)則

分別是 $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$ 與 $w' = \frac{\partial w}{\partial x}$ 在節點 j 之節點值。 θ_{1j} ($j=1, 2$)是 θ_1 在節點 j 的節

點值， β_j ($j=1, 2$)則是 $\theta_{1,x} = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}$ 在節點 j 的節點值。 N_i ($i=1-4$)為形狀函

數(shape function)。

將(2.5.19)至(2.5.21)式代入(2.5.18)式整理可得

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{L}(\mathbf{G}_a^t \mathbf{u}_a + \frac{1}{2} \mathbf{G}_b^t \mathbf{u}_b + \frac{1}{2} \mathbf{G}_c^t \mathbf{u}_c) \quad (2.5.25)$$

$$\mathbf{G}_a = \{-1, 1\} \quad (2.5.26)$$

$$\mathbf{G}_b = \{G_{b1}, G_{b2}, G_{b3}, G_{b4}\} = \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx \quad (2.5.27)$$

$$\mathbf{G}_c = \{G_{c1}, G_{c2}, G_{c3}, G_{c4}\} = \int \mathbf{N}'_c w_{,x} dx \quad (2.5.28)$$

$$\mathbf{u}_a = \{u_1, u_2\} \quad (2.5.29)$$

將(2.5.25)代入(2.5.9)整理可得

$$x_p = \mathbf{N}_a^t \mathbf{u}_a + x + \frac{x}{2L} (\mathbf{G}_b^t \mathbf{u}_b + \mathbf{G}_c^t \mathbf{u}_c) - \frac{1}{2} \int_0^x (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.5.30)$$

$$\mathbf{N}_a = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\} \quad (2.5.31)$$

2.6 Euler 梁的應變及應變的變分

為了推導上的方便，本節中我們將先推導出梁的應變以及應變的變分。本文中採用了 Green strain 及工程應變(Engineering strain)來描述梁的變形，但本章中的推導僅列出用 Green strain 的推導，工程應變的推導在[17]中有詳細的推導，兩種應變推導的節點內力中的軸力及扭矩有些微的差異，本章中僅列出其不同的部分。

2.6.1 梁的應變

假如將(2.5.1)式中的 x 、 y 、 z 視為拉格蘭日座標(Lagrange coordinates)，則 Green strains ε_{11} 、 ε_{12} 、 ε_{13} 可以表示成[23]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_1 - 1), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_2, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_3 \quad (2.6.1)$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \quad (2.6.2)$$

將(2.5.9)、(2.5.17)帶回(2.6.2), 可得 \mathbf{g}_i 的分量 g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$)如下

$$g_{11} = 1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2}(v_{,x}^2 + w_{,x}^2) + y(\theta_1\theta_{2,x} + \theta_2\theta_{1,x} - \theta_{3,x}) \quad (2.6.3)$$

$$+ z(\theta_1\theta_{3,x} + \theta_3\theta_{1,x} + \theta_{2,x}) + \theta_{1,xx}\omega$$

$$g_{12} = (1 + \varepsilon_o)\theta_3 - y(\theta_1\theta_{1,x} + \theta_3\theta_{3,x})$$

$$+ z\left(\frac{1}{2}\theta_2\theta_{3,x} + \frac{1}{2}\theta_3\theta_{2,x} - \theta_{1,x}\right) + \theta_{1,xx}\theta_3\omega + \theta_{1,x}\theta_{3,x}\omega$$

$$g_{13} = -(1 + \varepsilon_o)\theta_2 + y\left(\frac{1}{2}\theta_2\theta_{3,x} + \frac{1}{2}\theta_3\theta_{2,x} + \theta_{1,x}\right)$$

$$- z(\theta_1\theta_{1,x} + \theta_2\theta_{2,x}) - \theta_{1,xx}\theta_2\omega - \theta_{1,x}\theta_{2,x}\omega$$

$$g_{21} = \theta_1\theta_2 - \theta_3 + \theta_{1,x}\omega_{,y}$$

$$g_{22} = 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_3^2) + \theta_{1,x}\theta_3\omega_{,y}$$

$$g_{23} = \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 - \theta_{1,x}\theta_2\omega_{,y}$$

$$g_{31} = \theta_1\theta_3 + \theta_2 + \theta_{1,x}\omega_{,z}$$

$$g_{32} = -\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 + \theta_{1,x}\theta_3\omega_{,z}$$

$$g_{33} = 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \theta_{1,x}\theta_2\omega_{,z}$$

將(2.6.2)式及(2.6.3)式代回(2.6.1)式, 保留變形參數及其微分到二次項

可得:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^1 + \varepsilon_{11}^2 \quad (2.6.4-a)$$

$$\varepsilon_{11}^1 = \varepsilon_o - yv_{,xx} - zw_{,xx} + \omega\theta_{1,xx}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^2 = & \frac{1}{2}\varepsilon_o^2 + \varepsilon_{o,x}(yv_{,x} + zw_{,x}) + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\theta_{1,x}^2 - y\theta_1 w_{,xx} + z\theta_1 v_{,xx} + \frac{1}{2}y^2 v_{,xx}^2 \\ & + yz v_{,xx} w_{,xx} + \frac{1}{2}z^2 w_{,xx}^2 + \omega\varepsilon_o\theta_{1,xx} - \theta_{1,xx}\omega(yv_{,xx} + zw_{,xx}) + \frac{1}{2}\omega^2\theta_{1,xx}^2\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{12}^2 \quad (2.6.4-b)$$

$$\varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,y} - z)\theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12}^2 = & \frac{1}{2}[\omega_{,y}\varepsilon_o\theta_{1,x} + (\omega - y\omega_{,y})\theta_{1,x}v_{,xx} - z\omega_{,y}\theta_{1,x}w_{,xx} + \omega\omega_{,y}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4}z(v_{,x}w_{,xx} - w_{,x}v_{,xx})\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}^1 + \varepsilon_{13}^2 \quad (2.6.4-c)$$

$$\varepsilon_{13}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,z} + y)\theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13}^2 = & \frac{1}{2}[\omega_{,z}\varepsilon_o\theta_{1,x} + (\omega - z\omega_{,z})\theta_{1,x}w_{,xx} - y\omega_{,z}\theta_{1,x}v_{,xx} + \omega\omega_{,z}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4}y(w_{,x}v_{,xx} - v_{,x}w_{,xx})\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_{1j}^k (j=1,2,3, k=1,2)$ 代表 ε_{1j}^k 中之 k 次項。

2.6.3 梁的應變的變分:

本文利用虛功原理推導元素節點內力，所以需要應變的變分。

由(2.6.4)及(2.5.25)式可以得到應變的變分

$$\delta\varepsilon_{11} = \delta\varepsilon_{11}^0 + \delta\varepsilon_{11}^1 \quad (2.6.5-a)$$

$$\delta\varepsilon_{11}^0 = \delta\varepsilon_o - y\delta v_{,xx} - z\delta w_{,xx} + \delta\theta_{1,xx}\omega$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{11}^1 &= \delta\varepsilon_o(\varepsilon_o + \omega\theta_{1,xx}) + \delta v_{,x}(y\varepsilon_{o,x}) \\
&+ \delta v_{,xx}(y^2 v_{,xx} + yzw_{,xx} + z\theta_1 - y\omega\theta_{1,xx}) + \delta w_{,x}(z\varepsilon_{o,x}) \\
&+ \delta w_{,xx}(yzv_{,xx} + z^2 w_{,xx} - y\theta_1 - z\omega\theta_{1,xx}) \\
&+ \delta\theta_1(zv_{,xx} - yw_{,xx}) + \delta\theta_{1,x}(y^2 + z^2)\theta_{1,x} \\
&+ \delta\theta_{1,xx}(\omega\varepsilon_o - y\omega v_{,xx} - z\omega w_{,xx} + \omega^2\theta_{1,xx})
\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{12} = \delta\varepsilon_{12}^0 + \delta\varepsilon_{12}^1 \quad (2.6.5-b)$$

$$\delta\varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{2}\delta\theta_{1,x}(\omega_{,y} - z)$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{12}^1 &= \delta\varepsilon_o\left(\frac{1}{2}\omega_{,y}\theta_{1,x}\right) + \delta w_{,x}\left(-\frac{1}{4}zv_{,xx}\right) \\
&+ \delta w_{,xx}\left[\frac{1}{4}zv_{,x} - \frac{1}{2}\omega_{,y}z\theta_{1,x}\right] + \delta v_{,x}\left(\frac{1}{4}zw_{,xx}\right) \\
&+ \delta v_{,xx}\left[\frac{1}{2}(\omega - y\omega_{,y})\theta_{1,x} - \frac{1}{4}zw_{,x}\right] \\
&+ \delta\theta_{1,x}\left[\frac{1}{2}\omega_{,y}\varepsilon_c + \frac{1}{2}(\omega - y\omega_{,y})v_{,xx} - \frac{1}{2}z\omega_{,y}w_{,xx} + \frac{1}{2}\omega\omega_{,y}\theta_{1,xx}\right] \\
&+ \delta\theta_{1,xx}\left(\frac{1}{2}\omega\omega_{,y}\theta_{1,x}\right)
\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{13} = \delta\varepsilon_{13}^0 + \delta\varepsilon_{13}^1 \quad (2.6.5-c)$$

$$\delta\varepsilon_{13}^0 = \frac{1}{2}\delta\theta_{1,x}(\omega_{,z} + y)$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{13}^1 &= \delta\varepsilon_o\left(\frac{1}{2}\omega_{,z}\theta_{1,x}\right) + \delta w_{,x}\left(\frac{1}{4}yv_{,xx}\right) \\
&+ \delta w_{,xx}\left[-\frac{1}{4}yv_{,x} + \frac{1}{2}(\omega - z\omega_{,z})\theta_{1,x}\right] \\
&+ \delta v_{,x}\left(-\frac{1}{4}yw_{,xx}\right) + \delta v_{,xx}\left(-\frac{1}{2}y\omega_{,z}\theta_{1,x} + \frac{1}{4}yw_{,x}\right) \\
&+ \delta\theta_{1,x}\left[\frac{1}{2}\omega_{,z}\varepsilon_o + \frac{1}{2}(\omega - z\omega_{,z})w_{,xx} - \frac{1}{2}y\omega_{,z}v_{,xx} + \frac{1}{2}\omega\omega_{,z}\theta_{1,xx}\right] \\
&+ \delta\theta_{1,xx}\left(\frac{1}{2}\omega\omega_{,z}\theta_{1,x}\right) + \delta v_{,x}\left(-\frac{1}{4}yw_{,xx}\right)
\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_0 = \frac{1}{L}(\delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b + \delta\mathbf{u}_c^t \mathbf{G}_c) \quad (2.6.6)$$

2.7 元素節點內力之推導

本文將元素的節點內力 \mathbf{f} 視為作用元素節點的外力。本文利用虛功原理在元素座標上推導元素節點內力。若在元素當前的變形位置給元素節點 j ($j=1,2$) 一個虛位移 $\delta\boldsymbol{\phi}_j = \{\delta\phi_{1j}, \delta\phi_{2j}, \delta\phi_{3j}\}$ ， $\delta\mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}$ ， $\delta\boldsymbol{\beta} = \{\delta\beta_1, \delta\beta_2\}$ ，則由虛功原理可知

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \delta\mathbf{q}' \mathbf{f} \\ &= \delta W_{int} = \int_V (\sigma_{11} \delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta\varepsilon_{13}) dV \\ &= \delta\mathbf{q}'_{\theta} \mathbf{f}_{\theta} \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}, \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}, \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} \quad (2.7.2)$$

$$\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{B}\} \quad (2.7.3)$$

$$\mathbf{f}_{\theta} = \{\mathbf{f}_1^{\theta}, \mathbf{m}_1^{\theta}, \mathbf{f}_2^{\theta}, \mathbf{m}_2^{\theta}, \mathbf{B}\} \quad (2.7.4)$$

$$\delta\mathbf{q} = \{\delta\mathbf{u}_1, \delta\boldsymbol{\phi}_1, \delta\mathbf{u}_2, \delta\boldsymbol{\phi}_2, \delta\boldsymbol{\beta}\} \quad (2.7.5)$$

$$\delta\mathbf{q}_{\theta} = \{\delta\mathbf{u}_1, \delta\boldsymbol{\theta}_1^*, \delta\mathbf{u}_2, \delta\boldsymbol{\theta}_2^*, \delta\boldsymbol{\beta}\} \quad (2.7.6)$$

其中 δW_{ext} 為外力所作的虛功， δW_{int} 為內力所作的虛功， $\delta\boldsymbol{\theta}_j^* = \{\delta\theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$ ， $\delta\mathbf{q}_{\theta}$ 為元素節點變形參數 \mathbf{q}_{θ} 受虛位移 $\delta\mathbf{q}$ 作用引起的變量， $\mathbf{f}_j = \{f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}\}$ 、 $\mathbf{f}_j^{\theta} = \{f_{1j}^{\theta}, f_{2j}^{\theta}, f_{3j}^{\theta}\}$ 、 $\mathbf{m}_j = \{m_{1j}, m_{2j}, m_{3j}\}$ 、 $\mathbf{m}_j^{\theta} = \{m_{1j}^{\theta}, m_{2j}^{\theta}, m_{3j}^{\theta}\}$ ($j=1,2$)、 $\mathbf{B} = \{B_1, B_2\}$ ， f_{ij} 、 f_{ij}^{θ} 為作用在元素節點 j ， x_i 方向的內力， m_{ij} 為作用在元素節點 j ，繞 x_i 軸的力矩、 m_{ij}^{θ} 為作用在元素節點 j 的廣義力矩之 x_i 分量， B_j 為作用在元素節點 j 的雙力矩(Bimoment)。

\mathbf{f} 、 \mathbf{f}_{θ} 為梁元素對應於虛位移 $\delta\mathbf{q}$ 、 $\delta\mathbf{q}_{\theta}$ 的廣義元素節點內力 $\int_V (\sigma_{11} \delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta\varepsilon_{13}) dV$ 為應力所作的虛功， $\delta\varepsilon_{1j}$ ($j=1,2,3$) 為梁

元素對應於虛位移 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的虛應變， E 為楊氏係數， G 為剪力模數， V 為梁元素未變形前的體積。本文中梁元素的應變、位置向量都表示成節點變形參數 \mathbf{q}_θ 的函數，為了推導上的方便，本文中將內力所作的虛功先表示成等效節點力 \mathbf{f}_θ 對 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 所作的虛功，再由 $\delta \mathbf{q}$ 與 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的關係求得元素的節點內力 \mathbf{f} 與 \mathbf{f}_θ 的關係。

$\delta \mathbf{q}$ 與 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的關係可以表示如下

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta \mathbf{q} \quad (2.7.7)$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{T}_{b1} & \mathbf{T}_{a1} & -\mathbf{T}_{b1} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{T}_{b2} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{b2} & \mathbf{T}_{a2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.7.8)$$

$$\mathbf{T}_{bj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\theta_{2j}/L & 0 & 0 \\ -\theta_{3j}/L & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{aj} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_{3j}/2 & -\theta_{2j}/2 \\ -\theta_{3j} & 1 + \varepsilon_0 & 0 \\ \theta_{2j} & 0 & 1 + \varepsilon_0 \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2) \quad (2.7.9)$$

當元素較多時，(2.7.9)式中加底線的項會趨近於零，故可以忽略不計。

將(2.7.1)式代入(2.7.7)式可得

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta \quad (2.7.10)$$

由(2.7.1)及(2.7.2)式可以求得 \mathbf{f}_θ ，為了推導上的方便，本文將在下一節中用應力所作的虛功 $\int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV$ 推導等效元素節點變形內力 \mathbf{f}_θ 。

2.7.1 等效節點變形內力 \mathbf{f}_θ 的推導

由(2.7.1)、(2.7.2)、(2.7.6)、(2.5.20)–(2.5.23)式及(2.5.29)式可得

$$\delta \mathbf{q}'_\theta \mathbf{f}_\theta = \delta \mathbf{u}'_a \mathbf{f}_a + \delta \mathbf{u}'_b \mathbf{f}_b + \delta \mathbf{u}'_c \mathbf{f}_c + \delta \mathbf{u}'_d \mathbf{f}_d = \int_V (E \varepsilon_{11} \delta \varepsilon_{11} + 4G \varepsilon_{12} \delta \varepsilon_{12} + 4G \varepsilon_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV \quad (2.7.11)$$

$$\mathbf{f}_a = \{f_{11}^\theta, f_{12}^\theta\}, \quad \mathbf{f}_b = \{f_{21}^\theta, m_{31}^\theta, f_{22}^\theta, m_{32}^\theta\} \quad (2.7.12)$$

$$\mathbf{f}_c = \{f_{31}^\theta, m_{21}^\theta, f_{32}^\theta, m_{22}^\theta\}, \quad \mathbf{f}_d = \{m_{11}^\theta, B_1, m_{12}^\theta, B_2\}$$

其中 \mathbf{f}_i ($i = a, b, c, d$) 為對應於 $\delta \mathbf{u}_i$ ($i = a, b, c, d$) 的廣義節點變形力向量， $\delta \mathbf{u}_i$ 為 (2.5.20) – (2.5.23) 式及 (2.5.29) 式定義之 \mathbf{u}_i 的變分。 \mathbf{f}_θ 可以由 \mathbf{f}_i ($i = a, b, c, d$) 組合而成。

將(2.6.4-a)式之 ε_{1j} 及(2.6.22-a)式之 $\delta \varepsilon_{1j}$ ($j = 1, 2, 3$) 代入(2.7.12)式，即可以求得 \mathbf{f}_i ($i = a, b, c, d$)。因本文中 ε_{1j} 僅保留到變形參數到的二次項，所以 \mathbf{f}_i 亦僅保留到變形參數到的二次項，但文獻[18]提到 $\theta_{1,x}$ 的三次項不能忽略，所以本文中亦將其保留。因本文採用共旋轉有限元素法，所以隨著元素數目的增加， θ_i ($i = 1, 2, 3$) 都會趨近於零、 $\theta_{i,x}$ ($i = 1, 2, 3$) 都會趨近於一個常數，文獻[16]中由數值例題發現當元素數目較多時可以將含 θ_i ($i = 1, 2, 3$) 的項忽略，因此本文中將 \mathbf{f}_i 中含 θ_i ($i = 1, 2, 3$) 的項忽略。

廣義節點變形力向量 \mathbf{f}_i ($i = a, b, c, d$) 可表示如下

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a = & \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [AEL \varepsilon_o + \frac{3}{2} AEL \varepsilon_o^2 + \frac{1}{2} EI_p \int \theta_{1,x}^2 dx \\ & + \frac{1}{2} EI_y \int w_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2} EI_z \int v_{,xx}^2 dx + \frac{3}{2} EI_\omega \int \theta_{1,xx}^2 dx] \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

$$\mathbf{f}_b = EI_z(1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx + f_{12}^D \mathbf{G}_b + 3E\alpha_{oyz} \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx} w_{,xx} dx$$

$$\mathbf{f}_c = EI_y(1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_c'' w_{,xx} dx + f_{12}^D \mathbf{G}_c + 3E\alpha_{oyz} \int \mathbf{N}_c'' \theta_{1,xx} v_{,xx} dx$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_d &= (GJ + \underline{EI_p \varepsilon_o}) \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x} dx + EI_\omega(1 + 3\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx} dx \\ &\quad + 3E\alpha_{oyz} \int \mathbf{N}_d'' v_{,xx} w_{,xx} dx + \frac{1}{2} EK_I \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x}^3 dx \end{aligned}$$

$$I_y = \int z^2 dA, \quad I_z = \int y^2 dA \quad (2.7.14)$$

$$I_\omega = \int \omega^2 dA, \quad \alpha_{oyz} = \int \omega y z dA, \quad I_p = I_y + I_z$$

$$J = \int \{(-z + \omega_{,y})^2 + (y + \omega_{,z})^2\} dA$$

$$K_I = \int (y^2 + z^2)^2 dA$$

若採用工程應變，則(2.7.13)式中含單底線項 $\frac{1}{2} EI_p \int \theta_{1,x}^2 dx$ 要改成

$\frac{1}{2} (EI_p - 2GJ) \int \theta_{1,x}^2 dx$ ， $(GJ + \underline{EI_p \varepsilon_o}) \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x} dx$ 要改成 $(GJ + (EI_p - 2GJ)\varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x} dx$

含雙底線項要去掉。

2.8 元素剛度矩陣之推導

依元素切線剛度矩陣的定義 $d\mathbf{f} = \mathbf{k}d\mathbf{q}$ 及(2.7.13)式，元素切線剛度矩陣

\mathbf{k} 可以表示成[18, 23]

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}_\theta} \frac{\partial \mathbf{q}_\theta}{\partial \mathbf{q}} = [\mathbf{k}_\theta + (\mathbf{T}'_{\theta\phi} - \mathbf{I}_{14})\mathbf{k}_\theta^0 + \mathbf{H}_D] \mathbf{T}_{\theta\phi} \quad (2.8.1)$$

$$\mathbf{k}_\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_\theta}{\partial \mathbf{q}_\theta} \quad (2.8.2)$$

$$\mathbf{H}_D = \left. \frac{\partial (\mathbf{T}'_{\theta\phi} \mathbf{f}_\theta)}{\partial \mathbf{q}_\theta} \right|_{\mathbf{f}_\theta} \quad (2.8.3)$$

其中 \mathbf{k}_θ^0 為 \mathbf{k}_θ 的零次項， \mathbf{H}_D 為一非對稱矩陣，並可表示成

$$\mathbf{H}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{h}_{b1} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_{b2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{h}_{b1}^t & \mathbf{h}_{a1} & -\mathbf{h}_{b1}^t & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{h}_{b1} & \mathbf{0} & -\mathbf{h}_{b2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{h}_{b2}^t & \mathbf{0} & -\mathbf{h}_{b2}^t & \mathbf{h}_{a2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \quad (2.8.4)$$

$$\mathbf{h}_{bj} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L}m_{2j}^\theta & -\frac{1}{L}m_{3j}^\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{aj} = \begin{bmatrix} 0 & m_{3j}^\theta & -m_{2j}^\theta \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m_{1j}^\theta \\ 0 & -\frac{1}{2}m_{1j}^\theta & 0 \end{bmatrix}, \quad (j=1, 2) \quad (2.8.5)$$

其中 $\mathbf{0}_2$ 、 $\mathbf{0}$ 和 $\bar{\mathbf{0}}$ 為 2×2 、 3×3 及 3×2 的矩陣。

剛度矩陣 \mathbf{k}_θ 可以由以下的子矩陣 \mathbf{k}_{ij} ($i=a, b, c, d, j=a, b, c, d$) 用直接剛度法組合而成

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_j} \quad (2.8.6)$$

其中 \mathbf{f}_i ($i=a, b, c, d$) 已在(2.7.13)式定義， \mathbf{u}_j ($j=a, b, c, d$) 已在(2.5.20)–(2.5.23)式及(2.5.29)式定義。

\mathbf{k}_{ij} 為一對稱矩陣，並可表示成

$$\mathbf{k}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a}{\partial \mathbf{u}_a} = \frac{AE}{L} \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t (1 + 3\varepsilon_o) \quad (2.8.7)$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a}{\partial \mathbf{u}_b} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [\underline{AE(1 + 3\varepsilon_o)} \mathbf{G}_b^t + EI_z \int \mathbf{N}_b^{''t} v_{,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a}{\partial \mathbf{u}_c} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a \left[\underline{AE(1+3\varepsilon_o)} \mathbf{G}_c^t + EI_y \int \mathbf{N}_c''^t w_{,xx} dx \right]$$

$$\mathbf{k}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a}{\partial \mathbf{u}_d} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a \left[EI_p \int \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,x} dx + 3EI_\omega \int \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,xx} dx \right]$$

$$\mathbf{k}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b}{\partial \mathbf{u}_b} = f_{12} \int \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b'' dx + EI_z (1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''' dx$$

$$\mathbf{k}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b}{\partial \mathbf{u}_c} = 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''' \theta_{1,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b}{\partial \mathbf{u}_d} = 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''' w_{,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c}{\partial \mathbf{u}_c} = f_{12} \int \mathbf{N}_c' \mathbf{N}_c'' dx + EI_y (1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c''' dx$$

$$\mathbf{k}_{cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c}{\partial \mathbf{u}_d} = 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d''' v_{,xx} dx$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \mathbf{u}_d} &= (GJ + EI_p \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d'' dx + EI_\omega (1 + 3\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_d'' \mathbf{N}_d''' dx \\ &+ \frac{3}{2} EK_l \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d'' \theta_{1,x}^2 dx \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{k}_{ji}^t$$

其中加底線之項在元素較多時，會趨近於零，故可忽略， $\theta_{1,x}$ 、 $\theta_{1,xx}$ 、 $v_{,xx}$ 、 $w_{,xx}$ 在元素較多時會趨近於一個常數，所以本文中將其保留。

2.9 系統平衡方程式與收斂準則

在固定總體座標系統中定義的非線性平衡方程式，可表為

$$\Psi(\mathbf{Q}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \lambda_d \mathbf{Q}_d) - \lambda_f \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2.9.1)$$

其中 Ψ 為系統的不平衡力， \mathbf{F} 為系統節點內力， \mathbf{Q} 為系統的節點位移， \mathbf{Q}_d 為參考位移負荷向量， \mathbf{P} 為參考力負荷向量， λ_f 為力負荷參數， λ_d 為位移負荷參數，其中 \mathbf{F} 可由(2.7.13)元素節點變形力求得。

本文以不平衡力向量 Ψ 的 weighted Euclidean norm 作為迭代時的誤差度量，而且收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{\sqrt{N} \|\mathbf{P}_r\|} \leq e_{tol} \quad (2.9.2)$$

其中 N 表離散系統的自由度數， \mathbf{P}_r 為端點反力， e_{tol} 是一給定的容許誤差值。



第三章 數值計算方法與程序

本文解非線性平衡方程式(2.9.1)式的數值計算方法是基於牛頓—拉福森(Newton-Raphson)法配合弧長控制法(arc length control)的增量迭代法[20]。本文中以系統切線剛度的行列式值為零當作挫屈的準則，為了求得挫屈負荷，本文採用二分法[21]，決定增量位移的長度，以求得系統切線剛度矩陣之行列式值為零的平衡位置。為了求得次要平衡路徑，本文中在平衡路徑的第一個挫屈負荷分歧點加入一個與第一挫屈模態向量方向一致的擾動位移。

3.1 增量迭代法

若第 I 個增量的平衡位置為已知，則在此位置的系統切線剛度矩陣 \mathbf{K}_T 可以求得，且第 $I+1$ 個增量的初始增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ ，可利用尤拉預測值(Euler predictor)求得

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda\mathbf{Q}_T, \quad (3.1)$$

其中 $\Delta\lambda$ 為初始增量負荷參數， $\mathbf{Q}_T = \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{P}_{ref}$ 為參考負荷向量 \mathbf{P}_{ref} 的切線解。 $\Delta\lambda$ 可利用下式求出[20]

$$\Delta\lambda = \pm \Delta\ell / (\mathbf{Q}_T^t \mathbf{Q}_T)^{1/2}, \quad (3.2)$$

其中正負符號之決定方法如下：若第 I 與 $I-1$ 個增量收斂時，系統切線剛度矩陣之行列式值同號，則 $\Delta\lambda$ 的正負符號和第 I 個增量時相同；若異號則符號相反。 $\Delta\ell$ 表第 $I+1$ 個增量的增量弧長，其值可以如下決定

$$\Delta\ell = (J_D/J_I)^{1/2} \Delta\ell_I, \quad (3.3)$$

其中 J_D 為給定的期望迭代次數， J_I 為第 I 個增量，迭代至平衡所使用的迭代次數， $\Delta\ell_I$ 為第 I 個增量的增量弧長。

本文中第一個增量的增量弧長 $\Delta\ell_1$ 是由下式決定

$$\Delta\ell_1 = \frac{R_{\max} \|\mathbf{R}_0\|}{I_{\max} |r_c|} \quad (3.4)$$

上式中 R_{\max} 為給定的參考自由度之最大位移量， $\|\mathbf{R}_0\|$ 為參考負荷向量 \mathbf{P}_{ref} 作用下的系統線性解 \mathbf{R}_0 的 Euclidean norm， I_{\max} 為給定之最大增量次數， $|r_c|$ 為 \mathbf{R}_0 在參考自由度的分量的絕對值。

在平衡迭代時增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ 及增量負荷 $\Delta\lambda$ 已知，由 $\Delta\mathbf{Q}$ 可求得梁結構新的變形位置。再利用 2.7 與 2.8 節的方法，求得元素座標上的節點內力及剛度矩陣。而對應此位置的負荷參數為 $\lambda = \lambda_I + \Delta\lambda$ ，其中 λ_I 為第 I 個增量達平衡時的負荷參數， $\Delta\lambda$ 即增量負荷參數。當系統內力及外力求得後，不平衡力量 Ψ 向量可由 (2.9.1) 式求得。若 (2.9.2) 式的收斂準則不能滿足，則利用定弧長控制法，求得一位移修正量 $\delta\mathbf{Q}$ 與負荷參數修正量 $\delta\lambda$ ，並加入前一次迭代的 $\Delta\mathbf{Q}$ 與 $\Delta\lambda$ 中，而得一新的增量位移向量與增量負荷參數，再進行下一次的迭代。 $\delta\mathbf{Q}$ 與 $\delta\lambda$ 可由下列二式決定

$$\delta\mathbf{Q} = \mathbf{K}_T^{-1}(-\psi + \delta\lambda\mathbf{P}) \quad (3.5)$$

$$\Delta\ell^2 = (\Delta\mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q})^t (\Delta\mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q}) \quad (3.6)$$

以上之迭代計算過程一直重覆至滿足 (2.9.2) 式的收斂準則為止。

3.2 二分法

利用3.1節的增量迭代法可以求得結構之主要平衡路徑。在每個增量的迭代收斂時，可以得到該增量在其平衡位置的負荷參數 λ 及結構切線剛度矩陣的行列式值 $D(\lambda)$ 。令 λ_I 及 $D(\lambda_I)$ 分別表示第 I 個增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 之值。 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 分別表示第 $I+1$ 的增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 之值。 $\Delta\ell_{I+1}$ 表示第 $I+1$ 個增量的增量位移向量之弧長。若 $D(\lambda_I)$ 大於零且 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零則可利用以下二分法求得挫屈負荷參數 λ_{NB} ：

- (1) 令 $\Delta\ell_L = 0$, $\Delta\ell_R = \Delta\ell_{I+1}$, $\lambda_L = \lambda_I$, $\lambda_R = \lambda_{I+1}$, 其中下標 L 及 R 表示左界及右界。
- (2) 取 $\Delta\ell_{I+1} = \frac{\Delta\ell_L + \Delta\ell_R}{2}$, 重作第 $I+1$ 個增量迭代，並求得新的 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 。
- (3) 若 $D(\lambda_{I+1})$ 大於零，則令 $\lambda_L = \lambda_{I+1}$, $\Delta\ell_L = \Delta\ell_{I+1}$
若 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零，則令 $\lambda_R = \lambda_{I+1}$, $\Delta\ell_R = \Delta\ell_{I+1}$
- (4) 若下列二式挫屈誤差準則同時滿足

$$\frac{|D(\lambda_{I+1})|}{|D(0)|} < e_D \quad (3.7)$$

$$\frac{|\lambda_R - \lambda_L|}{|\lambda_{I+1}|} < e_\lambda \quad (3.8)$$

其中 e_D 及 e_λ 為給定的容許誤差值

則 λ_{I+1} 即為系統挫屈負荷，否則回到步驟(2)，重新展開下一次二分法迭代。

經由二分法求得挫屈負荷 λ ，再利用系統切線剛度 $\mathbf{K}(\lambda)$ 計算挫屈模態，以下將說明挫屈模態的計算程序

- (1) 將 $\mathbf{K}(\lambda)$ 分解成一下三角矩陣 \mathbf{L} 及上三角矩陣 \mathbf{U} 使 $\mathbf{K} = \mathbf{LU}$ ，其中 \mathbf{L} 的對角線元素值皆為1。
- (2) 找出矩陣 \mathbf{U} 主對角線元素之絕對值有最小值的行令為第 I 行。

(3) 令模態第 I 個分量 $\Theta_I = 1$ ，再將 $\mathbf{K}\Theta = \mathbf{0}$ 改寫成下式

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,I-1} & 0 & K_{1,I+1} & \cdots & K_{1,N} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ K_{I-1,1} & & & 0 & & & K_{I-1,N} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{I+1,1} & & & 0 & & & K_{I+1,N} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ K_{N+1,1} & & & 0 & & & K_{N,N} \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_{I-1} \\ \Theta_I \\ \Theta_{I+1} \\ \vdots \\ \Theta_N \end{Bmatrix}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} -K_{1,I} \\ \vdots \\ -K_{I-1,I} \\ 1 \\ -K_{I+1,I} \\ \vdots \\ K_{N,I} \end{Bmatrix}_{N \times 1} \quad (3.9)$$

(4) 用高斯消去法求解(3.9)式得到模態 Θ

(5) 將 Θ 除以其分量中絕對值最大的分量 Θ_{\max} ，即

$$\bar{\Theta} = \frac{\Theta}{\Theta_{\max}} \quad (3.10)$$

3.3 N 循環迭代法

在計算元素的剛度矩陣及節點內力時，必須使用形心的正應變 ε_c 。對某些問題，最初幾次迭代之形心正應變會比其收斂值的階數(order)大很多，因此可能引起平衡迭代收斂困難或發散。為了改善收斂情況，本文採用了 N 循環迭代法[22]，並說明如下：

在第一次循環迭代中，(2.7.13)式及(2.8.7)式中，除了(2.7.13)式的 \mathbf{f}_a 及(2.8.7)式中的 \mathbf{k}_{aa} 使用目前變形的形心正應變外，其餘部份皆使用上一個增量收斂的形心正應變來計算元素的節點力與剛度矩陣。

在第 I 次 ($I > 1$) 循環迭代中，除了(2.7.13)式之 \mathbf{f}_a 及(2.8.7)式中的 \mathbf{k}_{aa} 使用目前形心正應變來計算外，其餘的節點力與元素剛度矩陣皆使用前一次循環迭代收斂的形心正應變來計算。此種循環迭代一直進行到相鄰兩循環中元素的收斂軸力之差異小於給定的容許誤差才停止。

第四章 數值例題與結果

本章中將在 4.1 節驗證理論之準確性以及程式的正確性，在 4.2 節為探討文獻[1,2]實驗，並與其實驗結果與理論結果比較。本章中 $P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_y}{L_T^2}$ 為

固端梁受軸向力的挫屈負荷， $M_{cr} = \frac{2.861\pi EI_y}{L_T}$ 為固端梁受軸向扭矩的挫屈扭矩。

4.1 本文理論之準確性以及程式的正確性

為了確定本文使用之理論的準確性以及程式是否正確，本節中分析了兩個例題並與文獻的結果比較。

例題一：固端梁受端點軸向力及扭矩的挫屈分析

如圖四所示，一長度為 L_T 的圓形斷面梁， A 端為固定端， B 端只允許軸向位移及轉角，本例題有兩階段的力負荷，第一階段：在 B 端施加一固定軸向外力 P ，第二階段：在 B 端不斷增加軸向扭矩 M ，此細長梁其楊氏係數 $E = 57 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ ，剪力係數 $G = 20 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ ，元素的數目使用 80 個元素， $L_T = 2000 \text{ mm}$ ，斷面半徑 $r = 0.5 \text{ mm}$ ，本例題圓形斷面之斷面性質列於表一，本例題(2.9.2)式之容許誤差 $e_{tol} = 1 \times 10^{-7}$ ，表二為在不同 P 下所對應的挫屈扭矩 M_{nb} ，圖五為挫屈扭矩-軸力關係圖，本文的結果和文獻[1]的結果幾乎重合，由圖五可看出在 $P = 0$ 時 M_{nb} 會近似於 M_{cr} ，而在 $P = P_{cr}$ 時 M 會約等於 0。

例題二：細長梁受端點軸向扭矩之次要平衡路徑

如圖六所示，一長度為 L_T 的方形斷面的梁， A 端為固定端， B 端只允許軸向位移及轉角，施加軸向扭轉力 M 使其發生挫屈後，再施加擾動位移使其進入次要平衡路徑，此細長梁其楊氏係數 $E = 2 \times 10^7 N/cm^2$ ，剪力係數 $G = 7.9 \times 10^6 N/cm^2$ ，元素的數目使用 160 個元素， $L_T = 720cm$ ，斷面邊長 $a = 1cm$ ，斷面性質列於表三，本例題(2.9.2)式之容許誤差 $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$ 。圖七為該梁受扭矩之 $M/M_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線圖，圖七中該梁在 $M/M_{cr} = 0.10013$ 、 $\Delta/L_T = 9.75 \times 10^6$ 時發生挫屈，挫屈後考慮其次要平衡路徑，本文細長梁挫屈後次要平衡路徑的結果和文獻[11]的分析結果幾乎重合，圖八為該梁受扭矩之 $\Delta/L_T - \phi(\pi)$ 曲線圖，由圖七、八中可以看出，在進入次要平衡路徑後，梁之軸向位移 Δ 會增加，而 $\phi(\pi)$ 與 M/M_{cr} 則會下降，圖八為該梁受扭矩之 $\phi(\pi) - M/M_{cr}$ 曲線圖，在圖九中細長梁在挫屈前會 $\phi(\pi) - M/M_{cr}$ 會呈線性關係，而在挫屈之後細長梁會發生平面外的扭轉挫屈現象。

4.2 分析文獻[1,2]實驗結果與理論結果之差異

在文獻[1,2]中分別以理論及實驗探討了如圖十之細長梁先扭轉後壓縮的問題，其中 ϕ 為軸向強制轉角， Δ 為軸向強制位移， P 及 M 為 B 端對梁之反力。文獻[1]理論使用 Cosserat rod theory，假設細長梁不可伸縮、不考慮剪應變，細長梁一端完全固定，一端只允許軸向轉角及軸向位移。文獻[2]中使用圓形斷面的細長梁來進行實驗，此細長梁材料為鎳鈦合金(nitinol alloys)，此細長梁其楊氏係數 $E = 57 \times 10^3 N/mm^2$ 、剪力係數 $G = 20 \times 10^3 N/mm^2$ 、線密度 $\rho = 0.0048kg/m$ 、半徑 $r = 0.5mm$ 、長度 $L_T = 300 - 2000mm$ ，為了使鎳鈦合金在扭轉壓縮的過程中皆處於彈性範圍

內，在軸向扭轉越大的時候，將使用越長的梁進行實驗，但大多數的梁都沒有超過 500mm。文獻[2]實驗首先以鑽機(drill)夾鑽頭的方式將細長梁兩端盡量保持軸方向的方式固定於 AB 兩端，在 B 端施加強制轉角 ϕ ，再施加軸向強制位移 Δ ，由兩端之感測器量測端點軸向力 P 與軸向扭矩 M 。而文獻[1,2]實驗的結果與文獻[1,2]理論的結果有所差異，文獻[2]認為此差異可能是沒有考慮重力影響、沒有考慮摩擦力、沒有考慮剪變形、沒有考慮材料非線性、及實際的邊界條件與分析的邊界條件不一致等原因造成的，此外當應變不是很小時，由工程應變(Engineering strain)及工程應力(Engineering stress) [17]與使用 Green strain 及 Second Piolla Kirchhoff stress [11, 14]推導出的梁之軸向力的二次項有些差異，此差異亦可能影響分析的結果，所以本章將分析梁之自重、實際的邊界條件與分析的邊界條件不一致、梁結構之初始不完美(initial imperfection)以及採用 Engineering strain 與 Green strain 對分析結果的差異。本章例題三將探討梁受重力以及採用 Engineering strain 與 Green strain 的差異。

例題三：固端梁受自重與端點扭角

如圖十一所示，一長度為 L_T 的圓形斷面梁，A、B 端皆為固定端，其中 P 及 M 為 B 端對梁之反力， ϕ 為端點強制扭角， V_m 為中點側向位移，本例題有兩階段的負荷，第一階段：考慮梁的自重，第二階段：在 B 端施加強制轉角 ϕ 。本例題分為四種狀況：不考慮自重採用 Engineering strain 分析、不考慮自重採用 Green strain 分析、考慮自重採用 Engineering strain 分析及考慮自重採用 Green strain 分析，梁的長度考慮 $L_T = 300、400、500、600、700 \text{ mm}$ 五種長度，斷面半徑 $r = 0.5 \text{ mm}$ ，此細長梁其楊氏係數 $E = 57 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ ，剪力係數 $G = 20 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ ，本例題細長梁斷面性

質與文獻[2] 使用之細長梁相同，其值列於表三，在考慮自重時將自重視為一個均佈負荷 $q = \rho g = 4.709 \times 10^{-5} \text{ N/mm}$ 作用於 X_2^G 的負方向，本例題皆使用 200 個元素，容許誤差 $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$ 。表四為考慮自重下採用 Engineering strain 分析及採用 Green strain 分析的兩種狀況在不同長度 L_T 及扭角 ϕ 下對應之 M/M_{cr} 、 P/P_{cr} 和 V_m/L_T ，表五為不考慮自重下採用 Engineering strain 分析及採用 Green strain 分析兩種狀況在不同長度 L_T 及扭角 ϕ 下對應之 M/M_{cr} 和 P/P_{cr} ，由表四與表五中可以發現不同的 L_T 在相同狀況下對 M/M_{cr} 的影響十分小，且在不考慮自重時 L_T 對 P/P_{cr} 沒有影響，因此在 $\phi-M/M_{cr}$ 之關係圖(圖十二、十三)及不考慮自重之 $\phi-P/P_{cr}$ (圖十四)中僅畫出 $L_T = 500\text{mm}$ 的結果，此外由表四與表五中亦可發現考慮自重與不考慮自重以及採用 Engineering strain 與 Green strain 對軸向扭矩影響十分的小。圖十二、十三分別為不考慮自重及考慮自重下 $L_T = 500\text{mm}$ 下 $\phi-M/M_{cr}$ 之關係圖，由圖十二、十三可發現不考慮自重及考慮自重的 ϕ 與 M/M_{cr} 為線性關係，圖十四為不考慮自重在不同 ϕ 下 $L_T = 500\text{mm}$ 下 $\phi-P/P_{cr}$ 之關係圖，由圖十四可看出當 ϕ 增加梁的軸力會隨之增加，而採用 Green strain 分析的軸力會比採用 Engineering strain 的軸力大，且當 ϕ 越大兩者間的差異也就越大，圖十五為考慮自重 $\phi(\pi)-P/P_{cr}$ 之關係圖，由圖中可看出當 L_T 越大則 P/P_{cr} 隨著轉角的增加量會越小，圖十六為在考慮自重下在不同 ϕ 之 L_T-P/P_{cr} 關係圖，由圖十六可看出在 $\phi=0$ 下採用 Green strain 分析與 Engineering strain 分析的軸力差異不大，在考慮自重下 L_T 越大，則 P/P_{cr} 會越大。圖十七為考慮自重在不同轉角 ϕ 下 L_T-V_m 之關係圖，因採用 Green strain 分析的軸力較大，因此以採用 Green strain 分析的中點軸向位移應較小，而圖十七也符合預期的結果。

因 Green strain 的物理意義不明確，而 Engineering strain 有明確的物理意義，所以本章中將以 Engineering strain 的結果與文獻的結果比較。

例題四：固端梁受自重，端點受扭角及軸向壓縮

如圖十八所示，一長度為 L_T 的圓形斷面細長梁，其中 P 及 M 為 B 端對梁之反力，此細長梁斷面性質與文獻[2]使用之細長梁相同，其值列於表三，本例題採用 Engineering strain 分析，考慮三階段的負荷作用，第一階段：兩端為固定端，考慮梁的自重，第二階段：允許 B 端的軸向轉角，在 B 端施加一固定軸向轉角 ϕ ，第三階段：限制 B 端軸向轉角，允許 B 端軸向位移，在 B 端施加軸向位移 Δ 。此細長梁其楊氏係數 $E = 57 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ ，剪力係數 $G = 20 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ ，在考慮自重時將自重視為一個均佈負荷 $q = \rho g = 4.709 \times 10^{-5} \text{ N/mm}$ 作用在 X_2^G 的負方向，考慮軸向轉角 $\phi = 0、1、2、3、4、5\pi$ 六種狀況，為了防止超出材料的彈性範圍，在扭轉角大時，將使用較大的 L_T ，由於本例題當 ϕ 越大時越不易收斂，且在考慮自重時，會更加不易收斂，因此隨著 ϕ 的增加，將增加元素數及加大(2.9.2)式中的容許誤差 e_{tol} 來進行分析。本例題在考慮自重 $L_T = 650\text{mm}$ ， $\phi = 5\pi$ ， $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$ ，元素數即使用到 600 個依然不易收斂，嘗試使用較大的容許誤差 e_{tol} ，而經過分析 $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$ 與 5×10^{-4} 所得的曲線幾乎完全重疊，因此在此狀況下容許誤差將使用 $e_{tol} = 5 \times 10^{-4}$ 。以下為在不同軸向轉角 ϕ 所使用的 L_T 、元素數及 e_{tol} ：

$$0\pi : L_T = 300\text{mm} , 100 \text{ 個元素} , e_{tol} = 5 \times 10^{-7}$$

$$1\pi : L_T = 400\text{mm} , 200 \text{ 個元素} , e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$$

$$2\pi : L_T = 400\text{mm} , 200 \text{ 個元素} , e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$$

$$3\pi : L_T = 500\text{mm} , 200 \text{ 個元素} , e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$$

$$4\pi : L_T = 500\text{mm} , 600 \text{ 個元素} , e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$$

$$5\pi : \text{不考慮自重下 } L_T = 650\text{mm} , 600 \text{ 個元素} , e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$$

$$5\pi : \text{考慮自重下 } L_T = 650\text{mm} , 600 \text{ 個元素} , e_{tol} = 5 \times 10^{-4}$$

圖十九-二十九分別為 $0-5\pi$ 之 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 曲線圖及 $M/M_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線圖，由各轉角之 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 圖中可以看出文獻[2]其理論之結果在受到一極微小的軸向強制位移後，軸向力會瞬間大幅下降，而使 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 曲線產生明顯的轉折處，而文獻[2]的實驗結果軸向力下降則較為緩慢，其 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 曲線相較文獻[2]之理論結果較為平滑，且文獻[2]實驗結果的軸向力皆小於文獻[1]的理論結果，且隨著 ϕ 的增加兩者間的差距也越大。

本例題在 $\phi=0$ 不考慮自重下所得的結果皆與文獻[1]的理論解幾乎重合，而在 $\phi \neq 0$ 不考慮自重所得的 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 曲線與文獻[1]的理論解幾乎平行但兩者間會有差距，文獻[2]的理論結果會比較大且隨著 ϕ 的增加兩者間的差距也越大。由各轉角之 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 曲線圖可看出，本例題在考慮自重後 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 的曲線會比沒有考慮自重時平滑，與文獻[2]實驗結果較為相似，而本例題考慮自重與不考慮自重主要差異在 Δ/L_T 不大的時後，當 Δ/L_T 增加後兩者會漸漸重合。

本研究所得結果和文獻[2]的理論結果幾乎相同，都會與文獻[2]實驗結果有差距，本文推測可能是實驗儀器造成的誤差，而文獻[2]中並未將其實驗儀器介紹清楚，因此其誤差不知從何而來，本研究將曲線向下平移(即個轉角 ϕ 下 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 圖中之實線，其平移的值列於圖中)，當 ϕ 越大平移量也越大，由圖二十八可看出在 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 曲線平移後 $\phi=5\pi$ 可以幾乎重合，而 $\phi=4\pi$ 之曲線也相當穩合(圖二十六)，但當軸力為壓力時($\phi=0-3\pi$)，文獻[2]實驗解的線型與本題考慮自重的線型的差異隨著 ϕ 的減少而逐漸增加(圖十九、二十、二十二、二十四)，文獻[2]中提到實際的邊界條件與理論分析的邊界條件略有不同，本文推測此邊界條件上的差異可能是造成在 $\phi=0-3\pi$ 時線形不一致的原因，在當梁受到張力時影響較小，而對軸向力為壓力時影響較大，且當壓力越大，所造成的差異越大。

文獻[2]推測梁若並非完美的直梁，也會造成實驗與理論的差異，所以

本題在考慮自重及摩擦力後，亦考慮梁為非完美的直梁，本例題將梁之各節點在 X_2^G 方向的座標施加位移 $\frac{1}{2}V_0 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L_T}\right) \right]$ ，其中 V_0 為將本題分析之細長梁兩端固定受到自重時中點的側向位移 V_m ， x 為各節點在 X_1^G 方向的座標值，本題考慮 $\phi=0\pi$ ， $L_T=300\text{mm}$ ，100 個元素， $e_{tol}=5\times 10^{-7}$ ， $V_0=-0.3224\text{mm}$ ， $q=\rho g=4.709\times 10^{-5}\text{N/mm}$ ，圖三十為梁之 $P/P_{cr}-\Delta/L_T$ 曲線圖。由圖三十中可看出考慮非直梁的曲線會比將梁視為完美直梁的曲線更為平滑，在壓縮量 Δ/L_T 大時會與考慮自重及不考慮自重的曲線合在一起。

在文獻[2]中理論結果與實驗的結果其 $\Delta/L_T-P/P_{cr}$ 曲線的線型及相同軸向壓縮向下 P/P_{cr} 的值皆有很大的差異，由前述之結果可以看出，考慮自重與梁結構之初始不完美(initial imperfection)皆可使 $\Delta/L_T-P/P_{cr}$ 曲線較為平滑，得到與文獻[2]實驗結果較相似的線型，進而考慮摩擦力的因素，將曲線向下平移可發現在 $\phi=5\pi$ 時本例題考慮自重的結果會與文獻[2]之實驗結果幾乎重合，但當 ϕ 越小其 $\Delta/L_T-P/P_{cr}$ 曲線之線型與文獻[2]之實驗結果差異越大，即使考慮自重、梁結構之初始不完美(initial imperfection)及摩擦力依然無法得到相同之 $\Delta/L_T-P/P_{cr}$ 曲線。

文獻[2]提出實驗中實際的邊界條件與分析所使用的邊界條件不一至。因此本文將完全固定的邊界條件改為一簡支梁在梁兩端側向轉角的方向上加上彈簧，如圖三十一所示一長度為 L_T 之圓形斷面細長梁 A 端只允許側向轉角， B 端只允許側向轉角及軸向位移，在 AB 兩端側向轉角方向加上一剛度 $K=n\frac{EI}{L_T}$ 之彈簧，其中 EI 為該梁的撓曲剛度， L_T 為梁的長度， n 為一個常數，在 B 端施加一強制位移 Δ ，分析其挫屈負荷及挫屈後行為， $L_T=300\text{mm}$ ， $r=0.5\text{mm}$ ， $q=\rho g=4.709\times 10^{-5}\text{N/mm}$ ，此細長梁的楊氏係

數 $E = 57 \times 10^3 N/mm^2$ ，剪力係數 $G = 20 \times 10^3 N/mm^2$ ，圖三十三為 $n = 0, 40, 400$ 時的 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 曲線，由圖三十二中可見在 $n = 0$ 時，其 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 曲線形狀會較接近文獻[2]實驗所得結果，但文獻[2]實驗以鑽機(drill)夾鑽頭的邊界與簡支梁之邊界相差十分大，而在 $n = 40, 400$ 時曲線形狀皆無法得到與文獻[2]實驗接近的結果，由結果可知將兩端視為簡支梁並在兩端加入彈簧並不能解決在 $\phi = 0$ 線形相差甚大的問題，由於文獻[2]的實驗器材圖示並不清楚，因此文獻[2]實驗的實際邊界條件也無法得知。



第五章 結論與展望

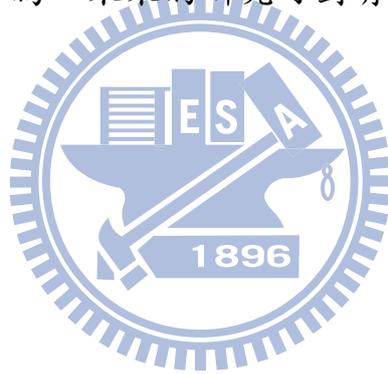
本研究將採用文獻[14]的三維梁元素，此梁元素以共旋轉全拉格蘭日 (Corotational Total Lagrangian Formulation) 有限元素法推導梁元素，以梁之正確的變形機制 (Kinematics) 及完整非線性梁理論之二階一致線性化 (Consistent second order linearization) 推導，並去掉元素節點內力及剛度矩陣中含梁元素之長度、剪心軸側向位移的一次微分、及扭轉角之項，以增加收斂速率，使用基於牛頓-拉福森 (Newton-Raphson) 法配合弧長控制法 (Arc length control) 的增量迭代法求解非線性平衡方程式。

採用工程應變及工程應力 [17] 與使用 Green strain 及 Second Piola Kirchhoff stress [11, 14] 推導出的梁之軸向力的二次項有些差異，在 4.2 節固端梁受自重與端點扭角的問題中，軸向扭矩所得結果的差異極小，但對軸向力採用 Green strain 所推導之軸向力則會明顯的大於 Engineering strain 所推導之軸向力，(2.7.13) 式中 Engineering strain 與 Green strain 所推導出的 f_a 之差異與扭轉率 $\theta_{1,x}$ 的二次方有關，因此當相同長度的細長梁扭轉角度越大時，其軸向力的差異也就越大。

從 4.2 節可看出在先扭轉後壓縮的問題中文獻[2]的理論結果與本研究不考慮自重的 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 的曲線在開始壓縮時皆有一明顯的轉折處，在考慮自重與結構的初始不完美後，可以得到相似於文獻[2]實驗結果的平滑曲線，而當軸向位移增加後考慮自重、不考慮自重及考慮結構的初始不完美的曲線皆會漸漸相合。本研究推測在文獻[2]中沒有考慮摩擦力是造成實驗

結果的 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 曲線皆會低於理論結果的原因，因此考慮摩擦力將軸向力平移一固定值，在細長梁端點轉角 $\phi = 5\pi$ 的時候，本研究考慮自重與摩擦力後， $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 曲線可以幾乎與文獻[2]實驗結果重合，但當 ϕ 越小其 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 曲線之線型與文獻[2]之實驗結果差異越大，即使考慮自重、梁結構之初始不完美(initial imperfection)、摩擦力以及實驗邊界條件與理論不一至等因素，依然無法得到相同之 $\Delta/L_T - P/P_{cr}$ 曲線。

本研究僅考慮細長梁之斷面有相同主撓曲剛度(即 $I_y = I_z = I$ ，其中 I_y 、 I_z 為斷面主軸的面積慣性矩)，很少有文獻在探討斷面 $I_y \neq I_z$ 的細長梁之挫屈負荷及挫屈後行為，未來的研究可對有不同主撓曲剛度之細長梁做進一步的探討。

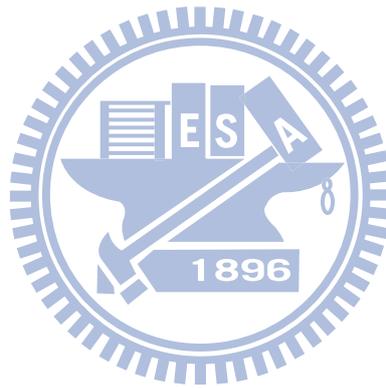


參 考 文 獻

- [1] G. H. M. van der Heijden, S. Neukirch, V. G. A. Goss, J. M. T. Thompson, “Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 45, pp. 161-196, 2003.
- [2] V. G. A. Goss, G. H. M. van der Heijden, J. M. T. Thompson, S. Neukirch, “Experiments on snap buckling, hysteresis and loop formation in twisted rods”, Experimental Mechanics, Vol. 45, No. 2, pp. 101-111, 2005.
- [3] S. Goyal, N. C. Perkins, C. L. Lee, “Nonlinear dynamics and loop formation in Kirchhoff rods with implications to the mechanics of DNA and cables”, Journal of Computational Physics, Vol. 209, pp. 371-389, 2005.
- [4] D. M. Stump, “The hocking of cables: a problem in shearable and extensible rods”, International Journal of Solids and Structures , Vol. 37, pp. 515-533 , 2000.
- [5] J. Coyne, “Analysis of the formation and elimination of loops in twisted cable”, IEEE Journal of Ocean Engineering , Vol. 15, pp. 72-83, 1990.
- [6] S. Goyal, N. C. Perkins, C. L. Lee, “Non-linear dynamic intertwining of rods with self-contact”, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 43, pp. 65-73, 2008
- [7] N. S. Ermolaeva, J. Regelink, M. P. M. Krutzen, “Hocking behaviour of single- and multiple-rope systems”, Engineering Failure Analysis, Vol. 15, pp. 142-153, 2008
- [8] D. M. Stump, G. H. M van der Heijden, “Birdcaging and the collapse of rods and cables in fixed-grip compression”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, pp. 4265-4278, 2001.
- [9] Y. Miyazaki, K. Kondo, “Analytical solution of spatial elastica and its application to kinking problem”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 34, pp. 3619-3636, 1997.

- [10] Z. Tan, J. A. Witz, "On the deflected configuration of a slender elastic rod subject to parallel terminal forces and moments", Mathematical and Physical Sciences, Vol. 449, No. 1936, pp. 337-349, 1995.
- [11] W. Y. Lin, K. M. Hsiao, "A Buckling and Postbuckling Analysis of Rods Under End Torque and Compressive Load", Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol. 4, No. 2, pp. 259-271, 2003.
- [12] K. M. Hsiao, W. Y. Lin, "A co-rotational finite element formulation for buckling and postbuckling analyses of spatial beams", Comput.Methods Appl.Mech.Engrg, Vol. 188, pp. 567-594, 2000.
- [13] Y. Goto, X. S. Li, T. Kasual, "Buckling analysis of elastic space rods under torsional moment", J. Engng. Mech. ASCE, Vol. 122, pp. 826-833, 1996.
- [14] 詹弼修, "三維梁元素非線性分析之改進研究", 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 1997.
- [15] 林文一, "薄壁開口梁之幾何非線性挫屈及挫屈後行為研究", 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 1999.
- [16] 陳弘虎, "不對稱開口薄壁梁元素之一致性共旋轉推導法即其在挫屈分析的應用", 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2002.
- [17] 陳致中, "梁在軸力及彎矩作用下之挫曲研究", 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2004.
- [18] W. Y. Lin, K. M. Hsiao, "Co-rotational formulation for geometric nonlinear analysis of doubly symmetric thin-walled beams", Comput.Methods Appl.Mech.Engrg, Vol. 190, pp. 6023-6052, 2001.
- [19] K. M. Hsiao, H. H. Chen, W. Y. Lin, "Co-rotational finite element formulation for thin-walled beams with eneric open section", Computer Methods in Applied Mechanics and Gingering, Vol. 195, pp. 2334-2370, 2006.
- [20] M. A. Crisfield, "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap Through," Computers and Structures, 13, pp. 55-62, 1981.

- [21] 賴文斌，三維梁非線性挫屈及挫屈後行為研究，交通大學機械工程學系碩士論文，臺灣，新竹，1994.
- [22] K. M. Hsiao, H. J. Horng , Y. R. Chen , “A Corotational Procedure That Handles Large Rotations of Spatial Beam Structures,” Computers and Structures, 27, No.6, pp. 769-781, 1987.
- [23] 遊敬義，“雙對稱開口薄壁梁元素之一致性共旋轉推導法及其在挫屈分的應用”，國立交通大學機械工程研究所碩士論文，臺灣，新竹，2001.



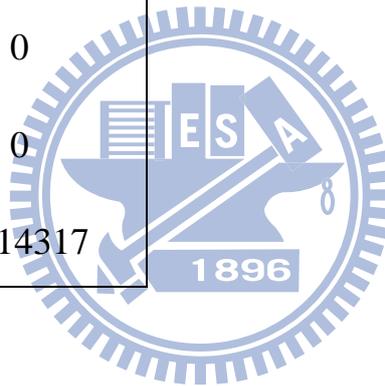
表一 圓形斷面常數

Section geometry of circle	
section	$r = 0.5mm$
$A(mm^2)$	0.78540
$I_y(mm^4)$	0.04909
$I_z(mm^4)$	0.04909
$J(mm^4)$	0.09817
$I_\omega(mm^6)$	0
$\alpha_{\omega yz}(mm^6)$	0
$K_I(mm^6)$	0.014317

$$I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{4}$$

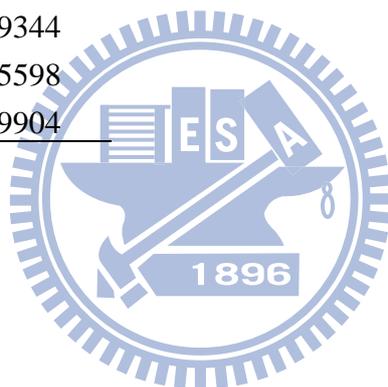
$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$I_4 = \frac{7\pi r^6}{24}$$



表二 例題一之軸力與挫屈扭矩

P/P_{cr}	T_{nb}/T_{cr}
-1	0.00070
-0.9	0.26312
-0.8	0.38230
-0.7	0.47999
-0.5	0.64776
-0.3	0.79661
0	1.00064
0.3	1.18990
0.5	1.31002
0.8	1.48274
1	1.59344
1.5	1.85598
2	2.09904



表三 方形斷面常數

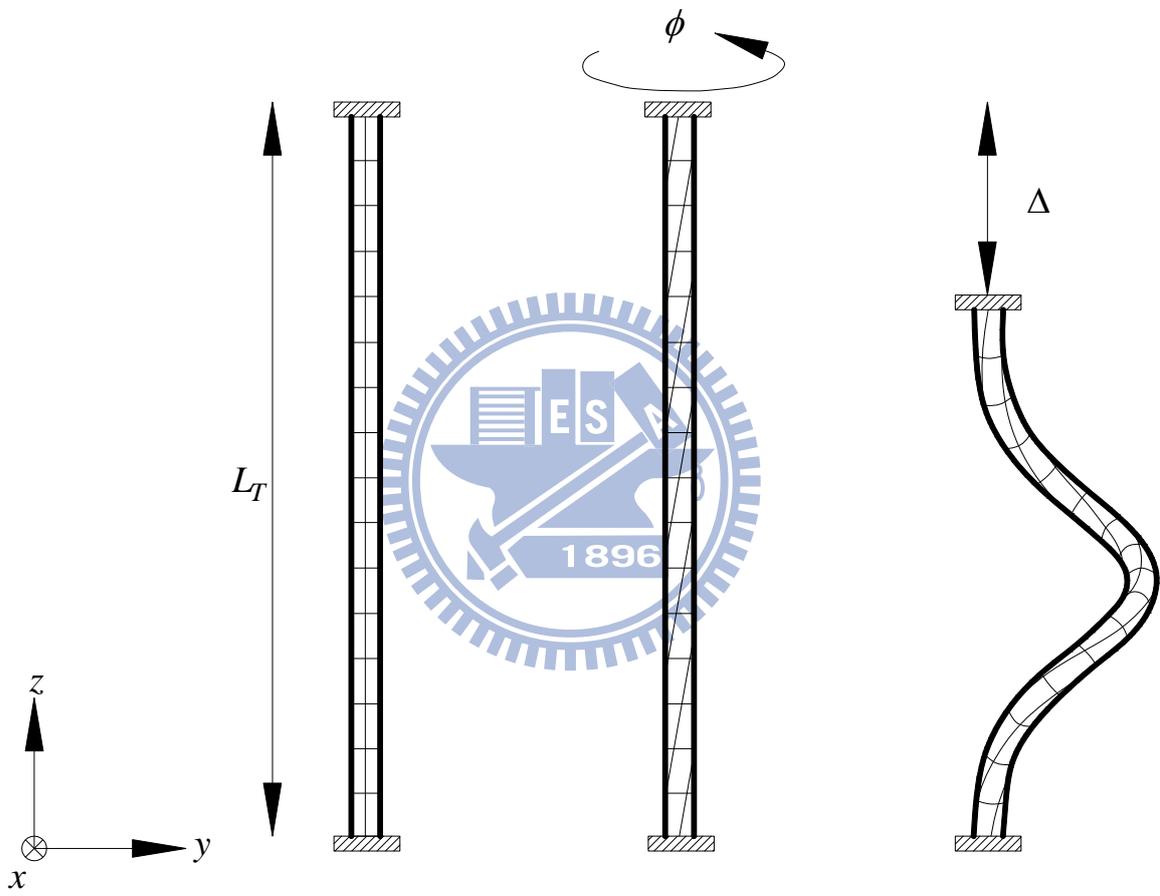
Section geometry of square section $a = 1cm$		
		$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$
$A(cm^2)$	1	$J = \int_A (y^2 + z^2 + y\omega_{,z} - z\omega_{,y})dA$
$I_y(cm^4)$	8.333×10^{-2}	$I_\omega = \int_A \omega^2 dA$
$I_z(cm^4)$	8.333×10^{-2}	$\alpha_{\omega yz} = \int \omega yz dA$
$J(cm^4)$	1.406×10^{-1}	$K_I = \frac{7a^6}{180}$
$I_\omega(cm^6)$	134.4×10^{-6}	其中
$\alpha_{\omega yz}(cm^6)$	0	$\omega = yz - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(K_n y) \sinh(K_n z)}{(2n+1)^3 \cosh(K_n \frac{a}{2})}$
$K_I(cm^6)$	0.388889	$K_n = \frac{(2n+1)\pi}{a}$

表四 例題三固端梁受端點扭角的反力及中點側向為移(考慮自重)

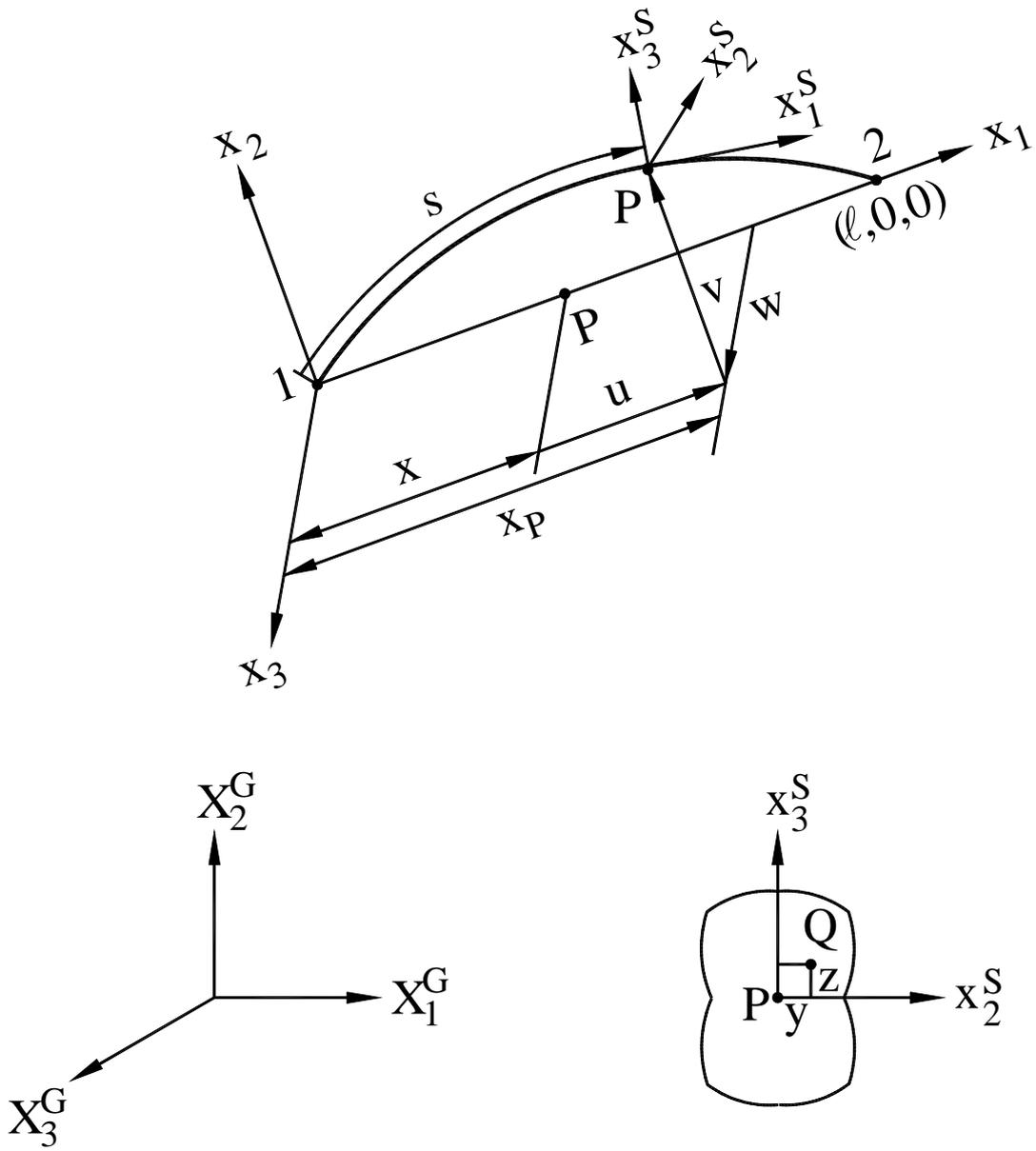
$L_T(mm)$	$M_{cr}(N \cdot mm)$	$P_{cr}(N)$	$\phi(\pi)$	Engineering strain			Green strain		
				M/M_{cr}	P/P_{cr}	$V_m/L_T(10^{-3})$	M/M_{cr}	P/P_{cr}	$V_m/L_T(10^{-3})$
300	83.8329	1.22740	0	0.00000	0.10268	-1.07453	0.00000	0.10269	-1.07453
			1	0.24526	0.17286	-1.04417	0.24527	0.32610	-0.91963
			2	0.49056	0.38313	-0.95433	0.49056	1.03503	-0.61904
			3	0.73593	0.73529	-0.81548	0.73593	2.26397	-0.38910
			4	0.98139	1.23553	-0.65520	0.98139	4.00601	-0.25425
			5	1.22699	1.88997	-0.50703	1.22699	6.25291	-0.17622
400	62.8747	0.69041	0	0.00000	0.53536	-1.83898	0.00000	0.53538	-1.83896
			1	0.24526	0.59493	-1.80516	0.24527	0.70463	-1.68755
			2	0.49054	0.77303	-1.70492	0.49055	1.27522	-1.30300
			3	0.73586	1.07107	-1.54325	0.73586	2.37946	-0.88883
			4	0.98124	1.49883	-1.33327	0.98124	4.05875	-0.59614
			5	1.22669	2.07607	-1.10153	1.22668	6.27886	-0.41618
500	50.2997	0.44186	0	0.00000	1.37012	-2.34791	0.00000	1.37014	-2.34789
			1	0.24526	1.41974	-2.32113	0.24527	1.50566	-2.24219
			2	0.49054	1.56868	-2.24157	0.49054	1.95283	-1.94208
			3	0.73583	1.81859	-2.11163	0.73584	2.83956	-1.51859
			4	0.98117	2.17609	-1.93586	0.98117	4.31592	-1.10614
			5	1.22655	2.65652	-1.72295	1.22655	6.41561	-0.79763
600	41.9164	0.30685	0	0.00000	2.61330	-2.69143	0.00000	2.61333	-2.69141
			1	0.24526	2.65581	-2.67162	0.24527	2.73123	-2.61881
			2	0.49053	2.78392	-2.61256	0.49055	3.10998	-2.40596
			3	0.73582	2.99985	-2.51537	0.73583	3.83315	-2.07391
			4	0.98113	3.30882	-2.38201	0.98114	5.04451	-1.67639
			5	1.22648	3.72094	-2.21578	1.22648	6.87973	-1.29628
700	35.9284	0.22544	0	0.00000	4.30445	-2.94719	0.00000	4.30449	-2.94717
			1	0.24526	4.34232	-2.93253	0.24527	4.41249	-2.89567
			2	0.49053	4.45663	-2.88872	0.49055	4.75301	-2.74296
			3	0.73581	4.64962	-2.81630	0.73583	5.38011	-2.49630
			4	0.98111	4.92563	-2.71621	0.98113	6.39402	-2.17458
			5	1.22643	5.29192	-2.58995	1.22645	7.93150	-1.81567

表五 例題三固端梁受端點扭角的反力及中點側向為移(不考慮自重)

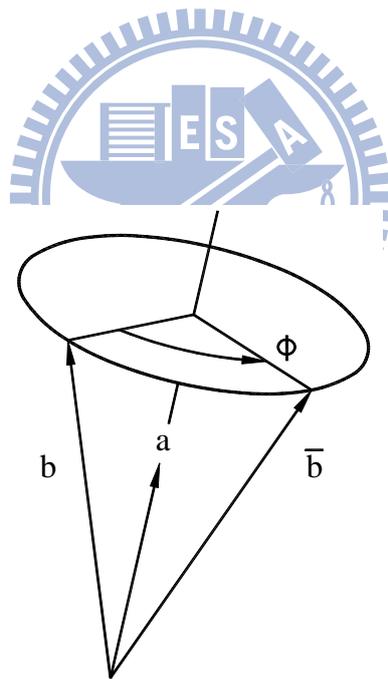
L_T (mm)	M_{cr} (N·mm)	P_{cr} (N)	ϕ (π)	Engineering strain		Green strain	
				M / M_{cr}	P / P_{cr}	M / M_{cr}	P / P_{cr}
300	83.8329	1.22740	0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
			1	0.24526	0.07458	0.24526	0.25000
			2	0.49056	0.29832	0.49056	1.00000
			3	0.73593	0.67121	0.73593	2.25000
			4	0.98139	1.19327	0.98139	4.00000
			5	1.22699	1.86448	1.22699	6.25000
400	62.8747	0.69041	0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
			1	0.24526	0.07458	0.24526	0.25000
			2	0.49054	0.29832	0.49054	1.00000
			3	0.73586	0.67121	0.73586	2.25000
			4	0.98123	1.19327	0.98123	4.00000
			5	1.22668	1.86448	1.22668	6.25000
500	50.2997	0.44186	0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
			1	0.24526	0.07458	0.24526	0.25000
			2	0.49053	0.29832	0.49053	1.00000
			3	0.73583	0.67121	0.73583	2.25000
			4	0.98116	1.19327	0.98116	4.00000
			5	1.22654	1.86448	1.22654	6.25000
600	41.9164	0.30685	0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
			1	0.24526	0.07458	0.24526	0.25000
			2	0.49053	0.29832	0.49053	1.00000
			3	0.73581	0.67121	0.73581	2.25000
			4	0.98112	1.19327	0.98112	4.00000
			5	1.22646	1.86448	1.22646	6.25000
700	35.9284	0.22544	0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
			1	0.24526	0.07450	0.24526	0.25000
			2	0.49052	0.29832	0.49052	1.00000
			3	0.73580	0.67121	0.73580	2.25000
			4	0.98110	1.19327	0.98110	4.00000
			5	1.22642	1.86448	1.22642	6.25000



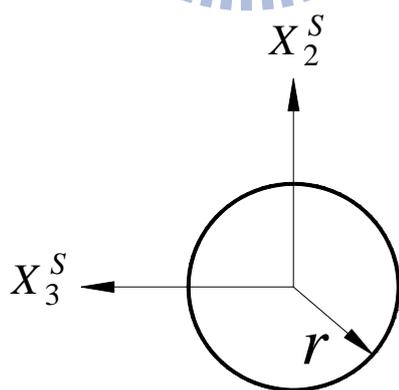
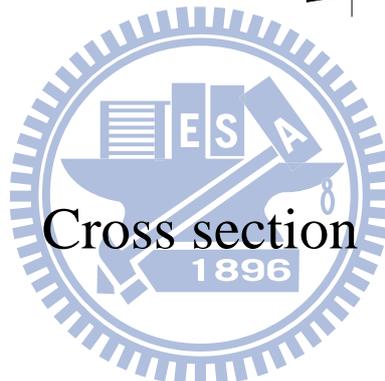
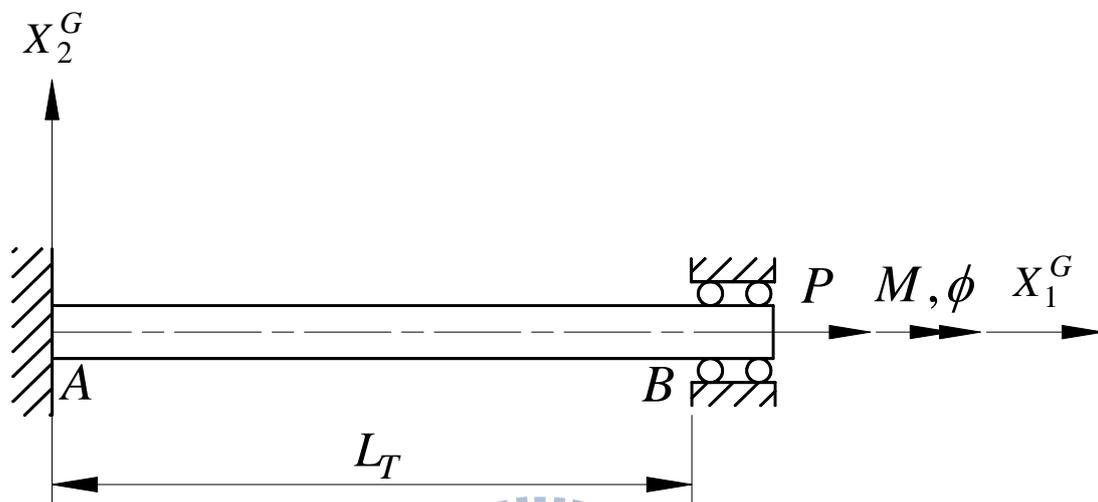
圖一 細長梁的扭轉壓縮



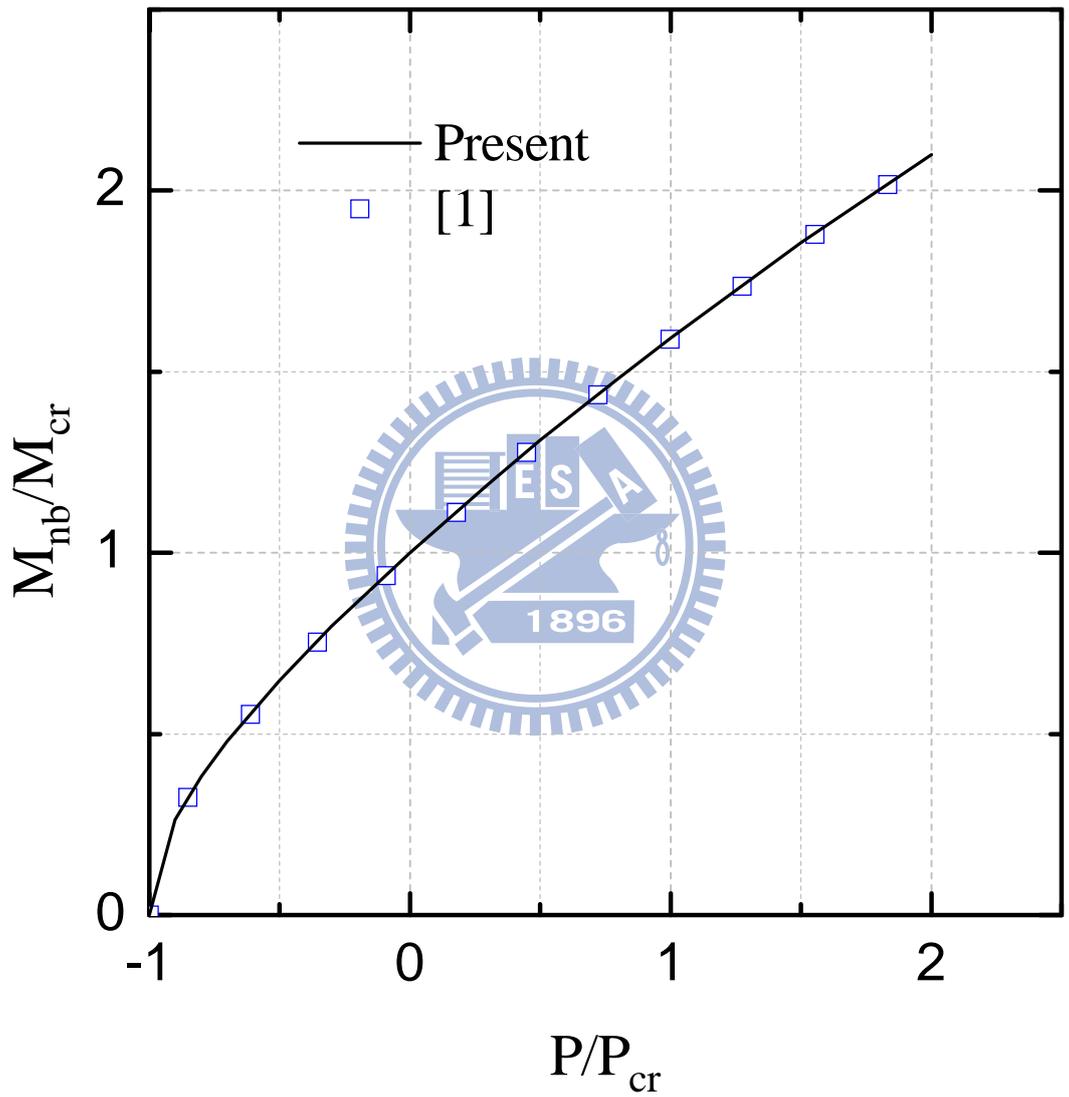
圖二 元素座標與元素截面座標



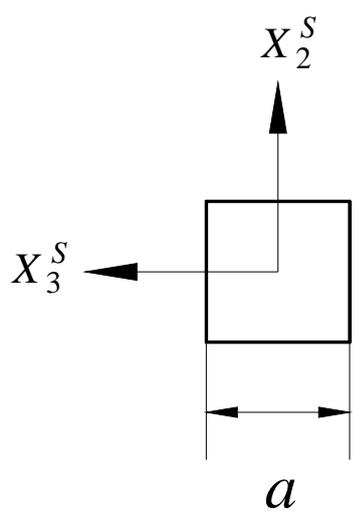
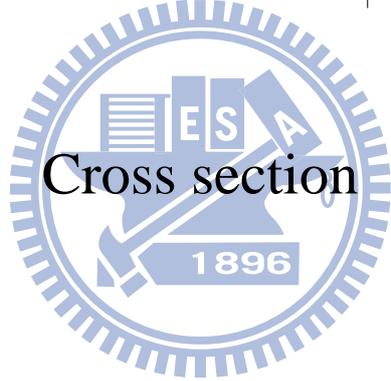
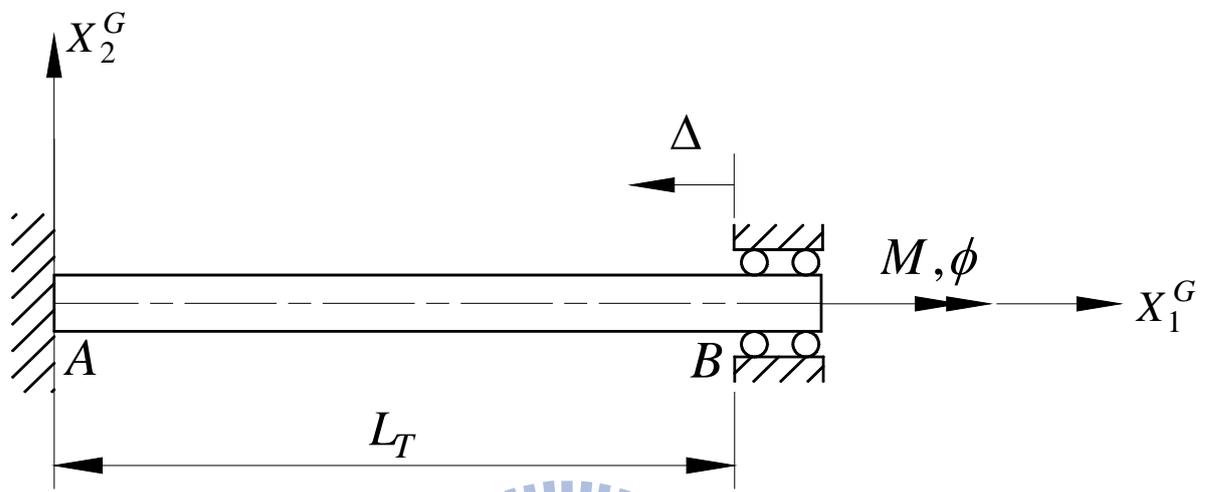
圖三 旋轉向量圖



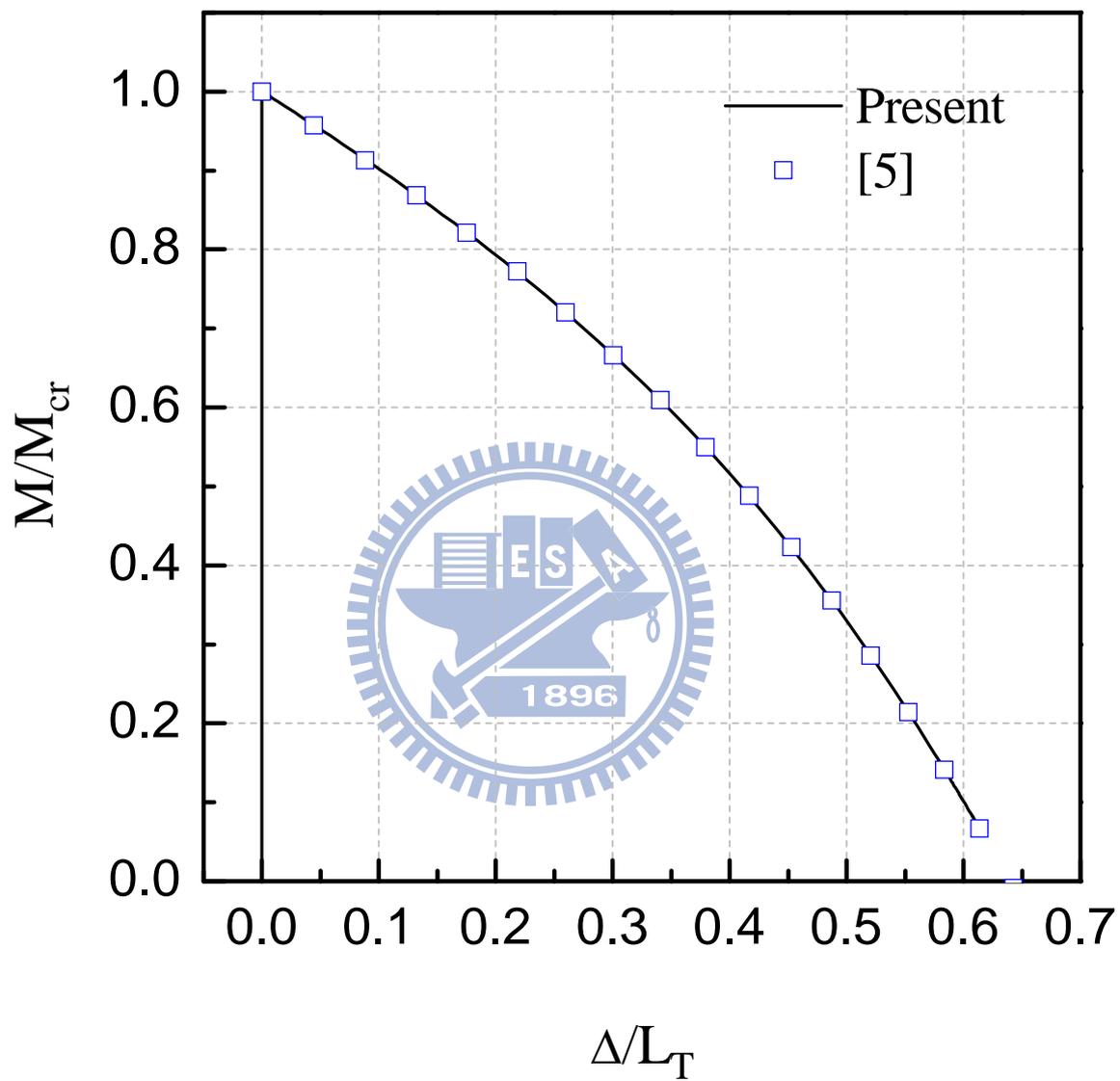
圖四 細長梁 B 端承受一扭矩與軸向壓力



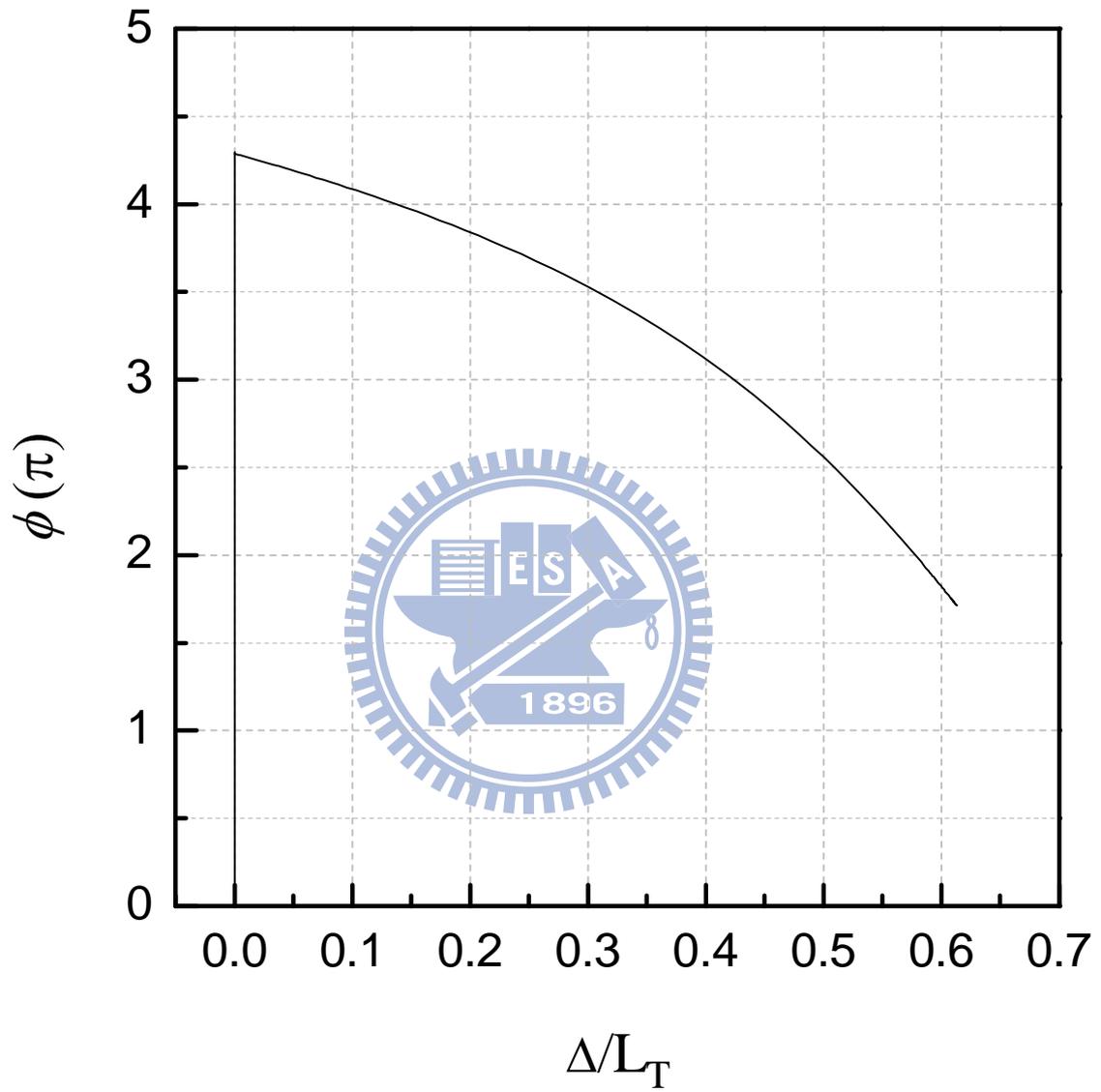
圖五 例題一細長梁之挫屈扭矩與軸力曲線圖



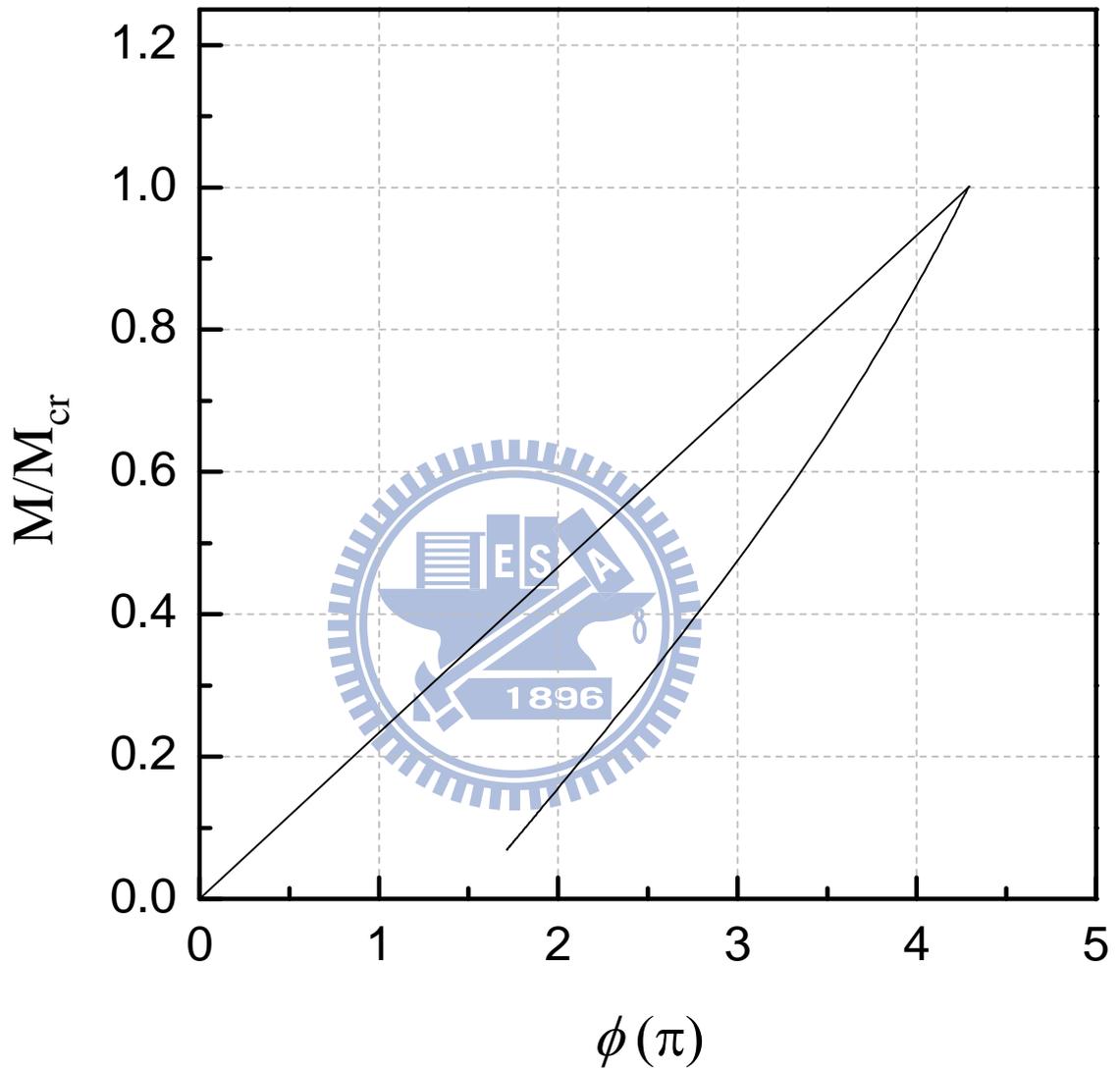
圖六 細長梁 B 端承受一扭矩



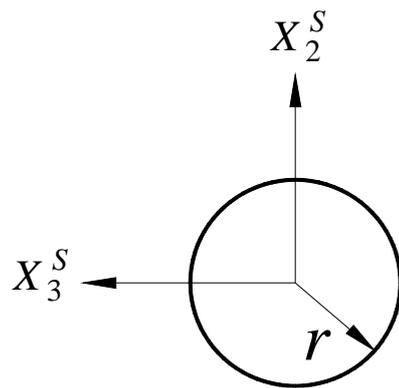
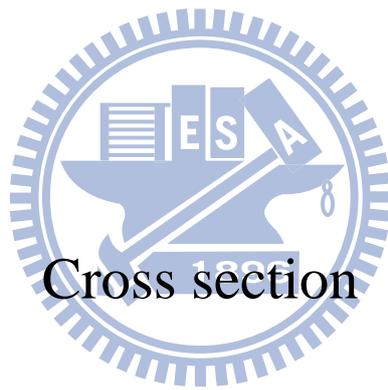
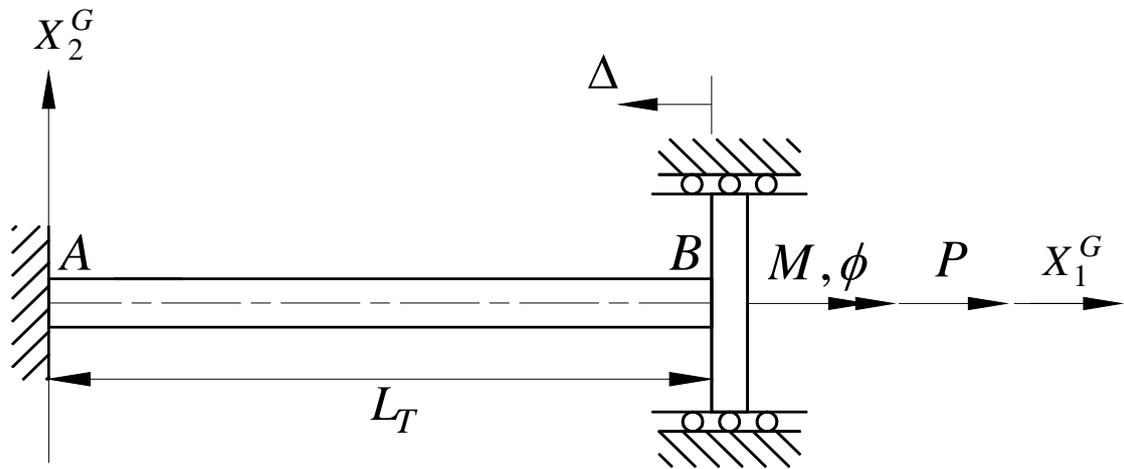
圖七 例題二細長梁受扭矩之 $\Delta/L_T - M/M_{cr}$ 之曲線圖



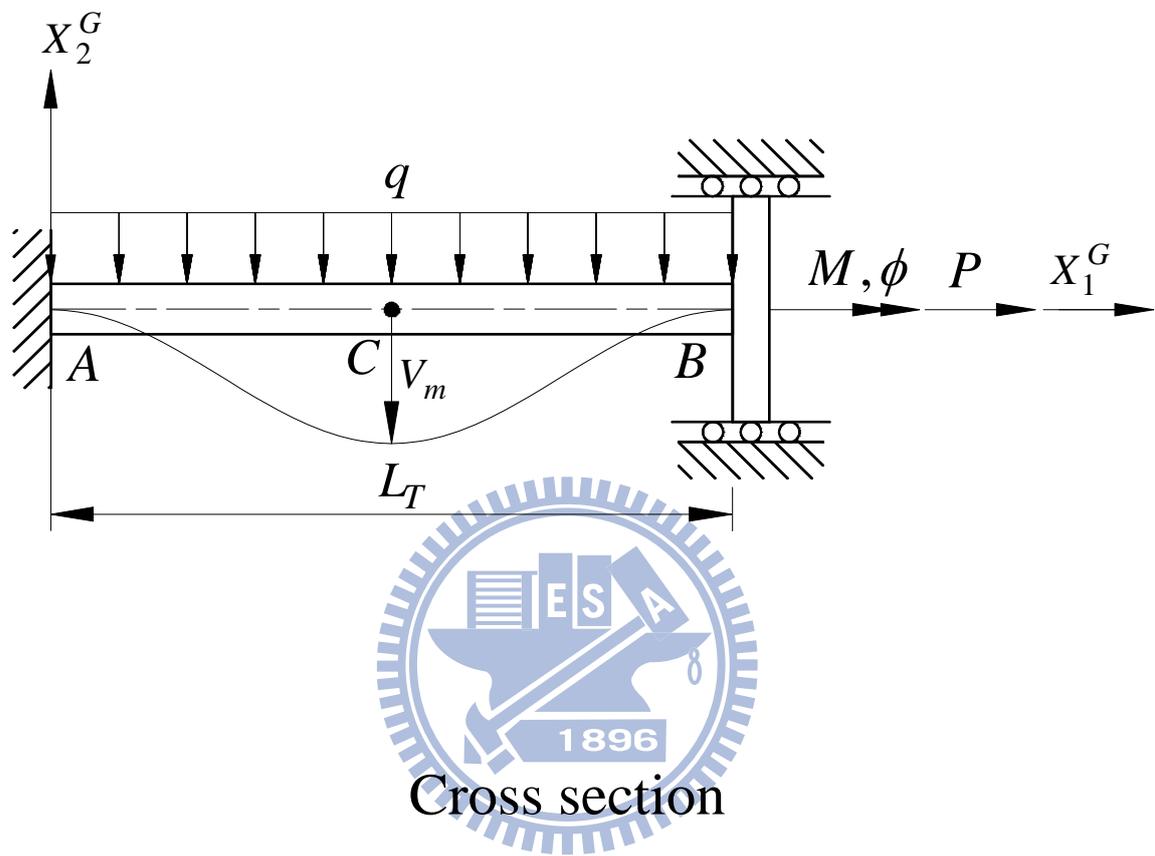
圖八 例題二細長梁受扭矩之 $\Delta/L_T - \phi(\pi)$ 之曲線圖



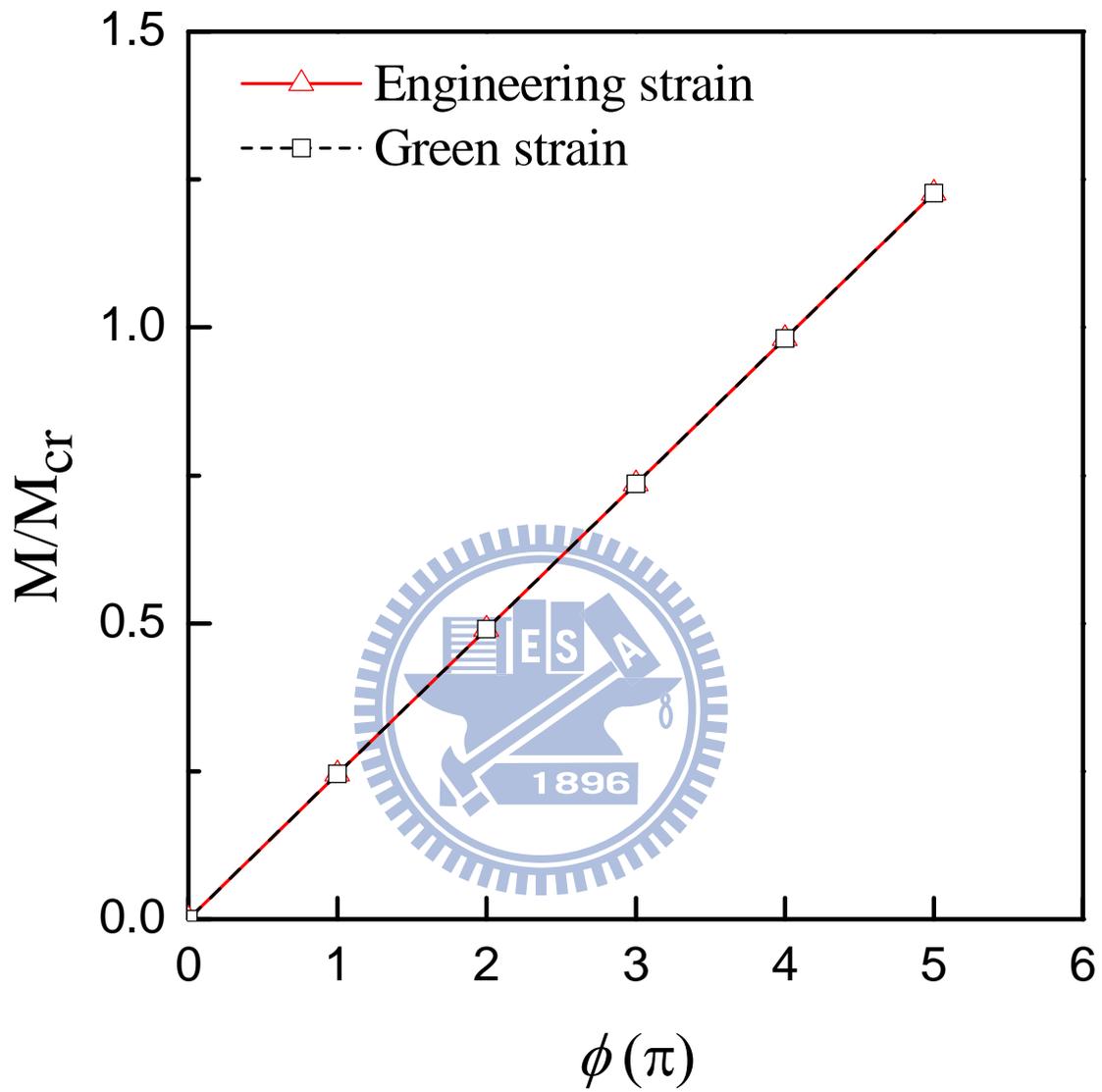
圖九 例題二細長梁受扭矩之 $\phi(\pi)$ - M/M_{cr} 之曲線圖



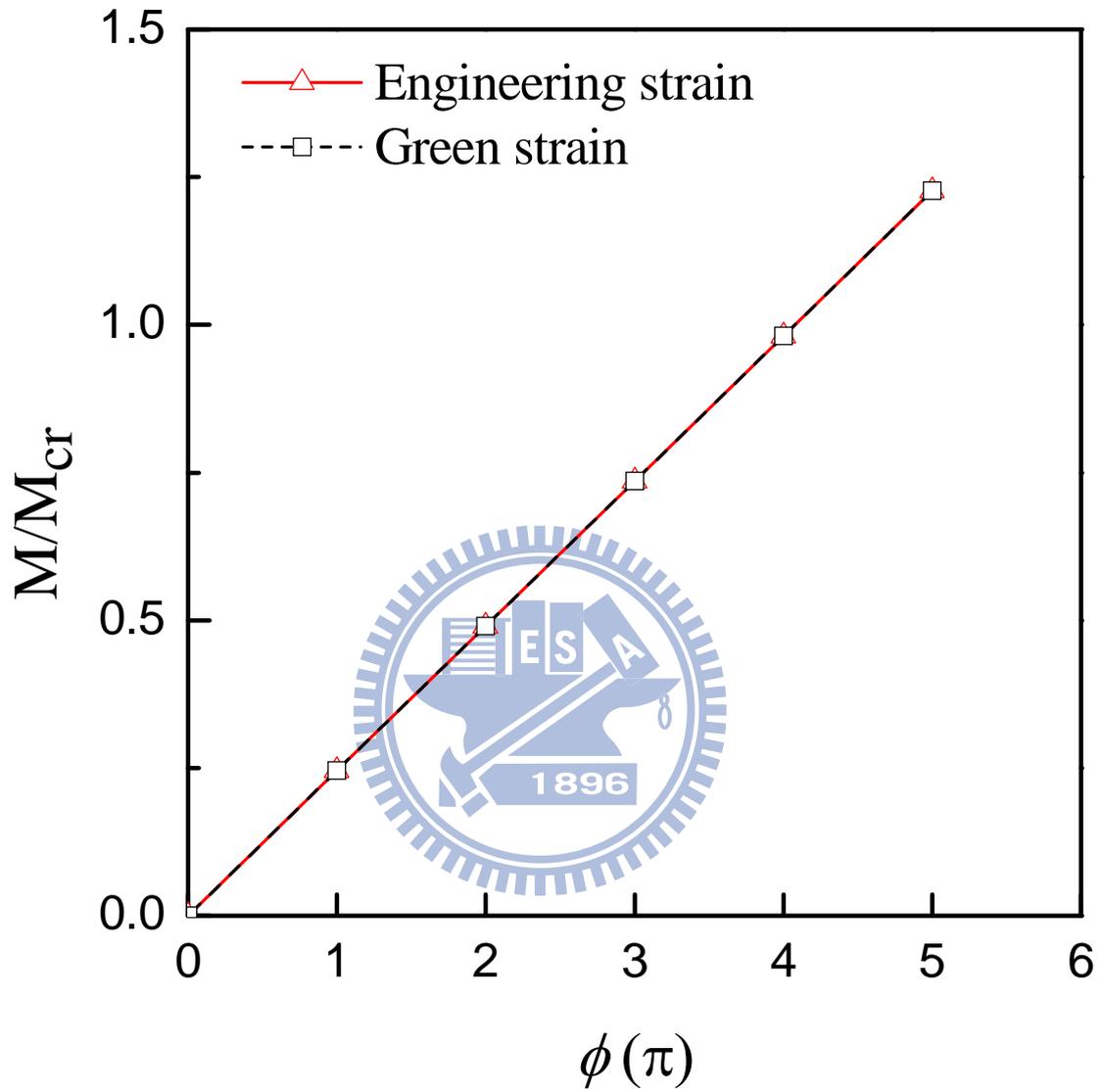
圖十 細長梁受端點轉角與位移



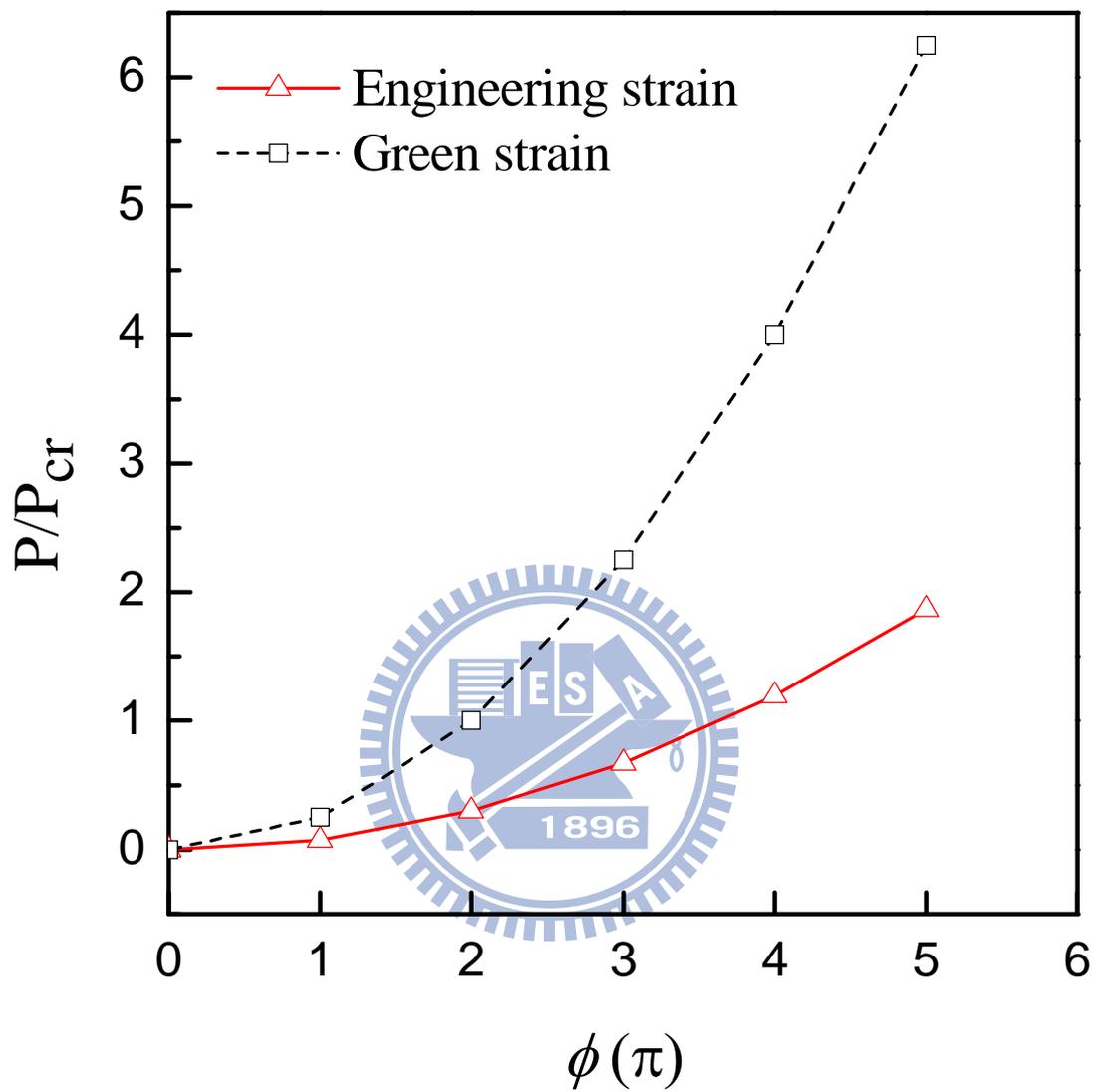
圖十一 細長梁考慮自重 B 端承受一扭角



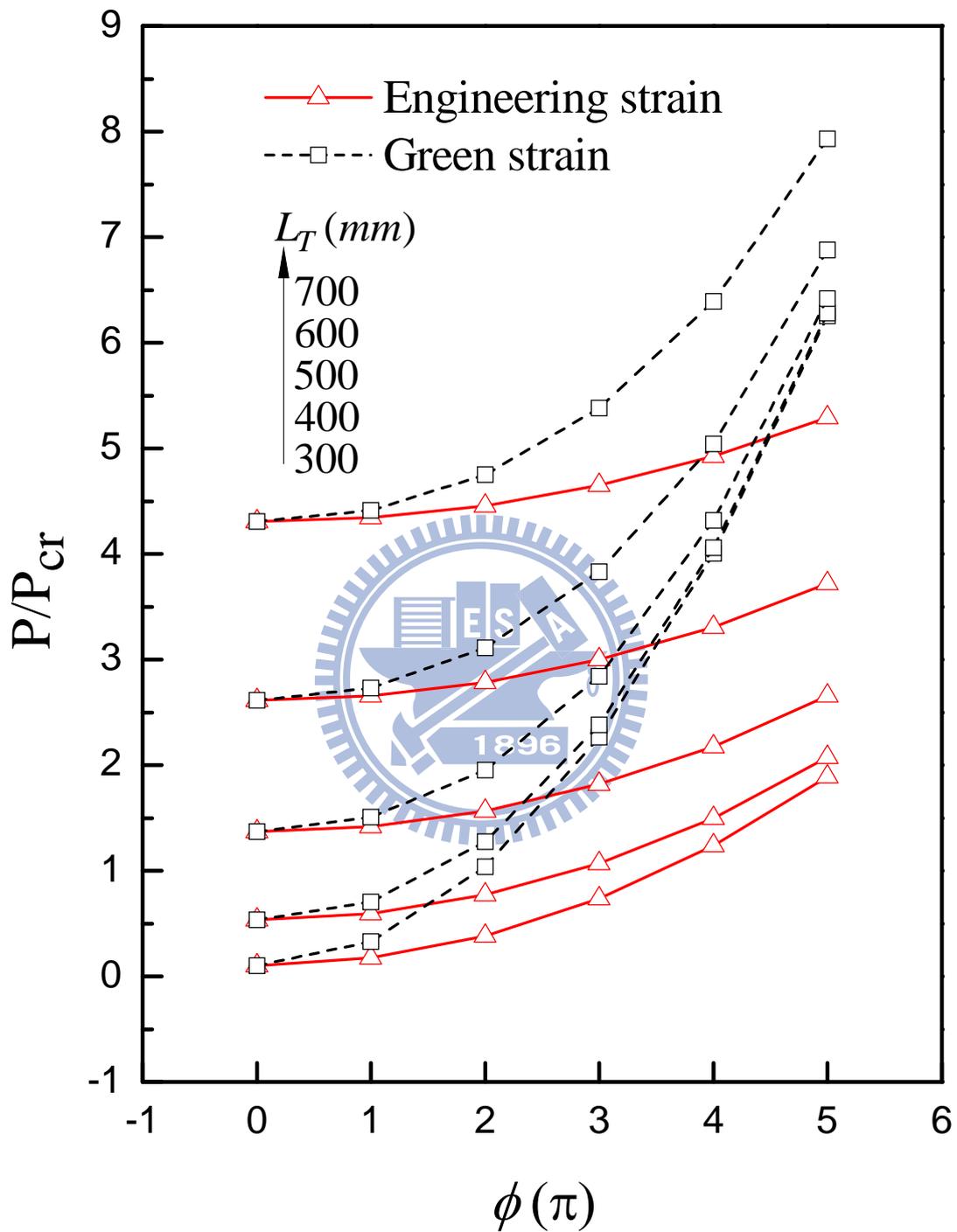
圖十二 例題三不考慮自重下 $\phi - M / M_{cr}$ 之關係圖 ($L_T = 500$)



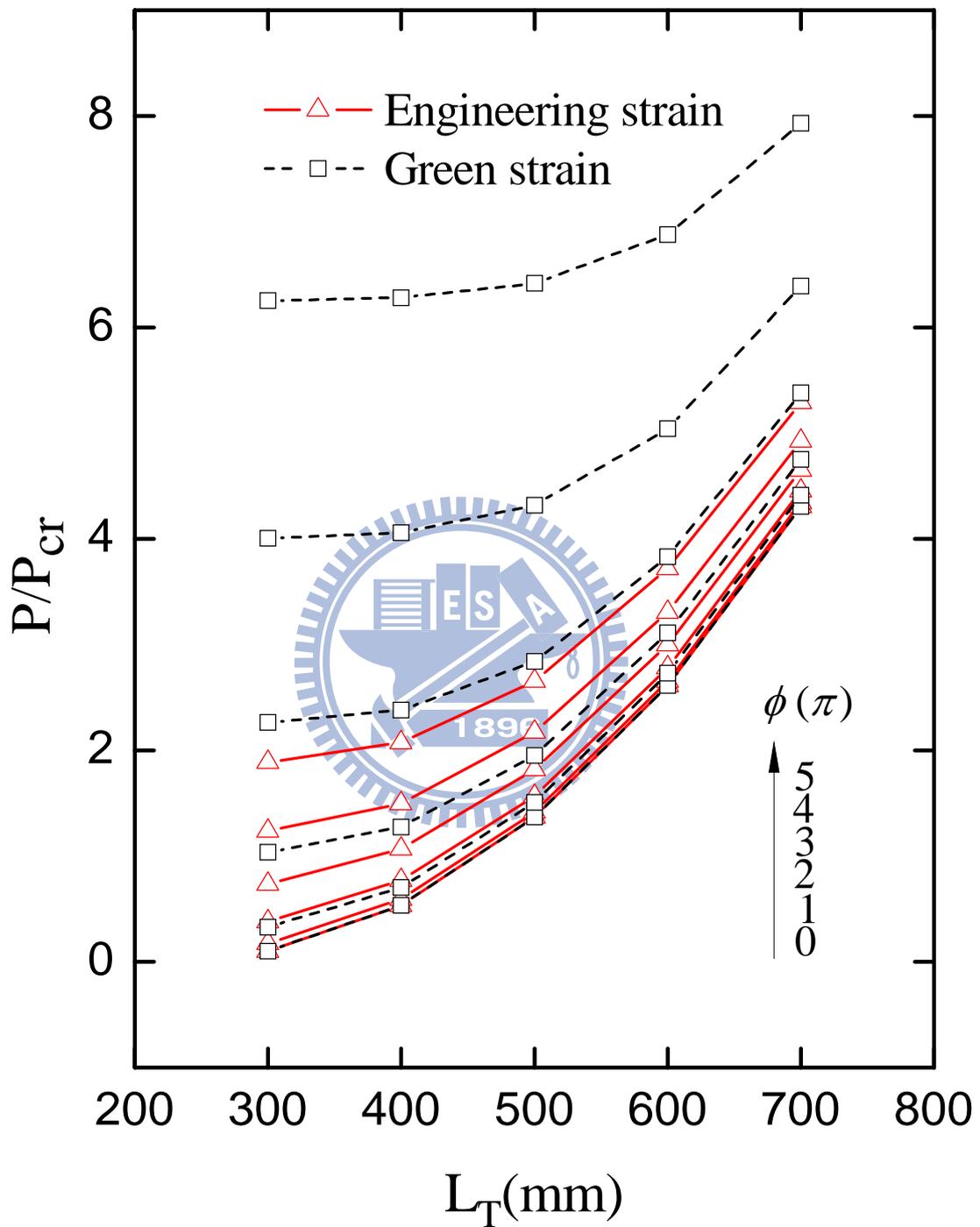
圖十三 例題三考慮自重下 $\phi - M / M_{cr}$ 之關係圖 ($L_T = 500$)



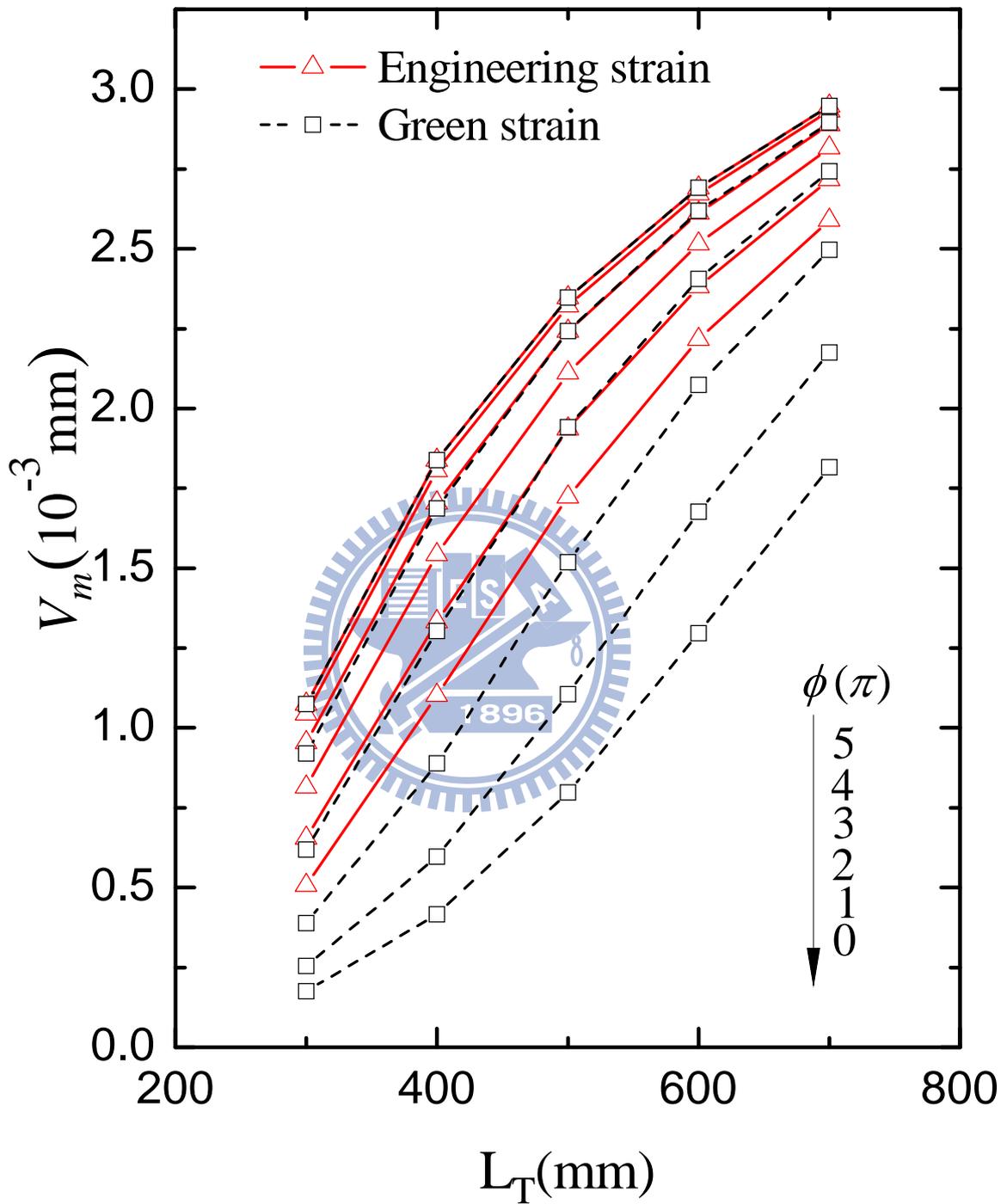
圖十四 例題三 $L_T = 500mm$ 不考慮自重 $\phi(\pi) - P/P_{cr}$ 之關係圖



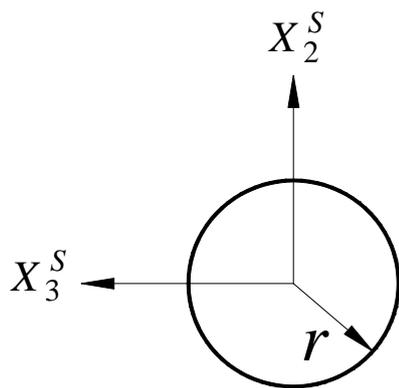
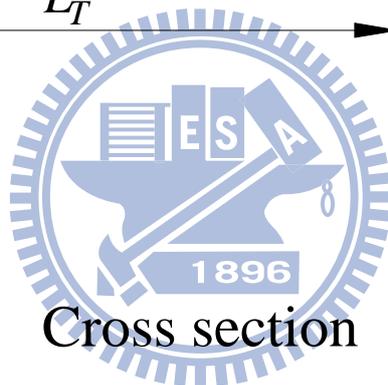
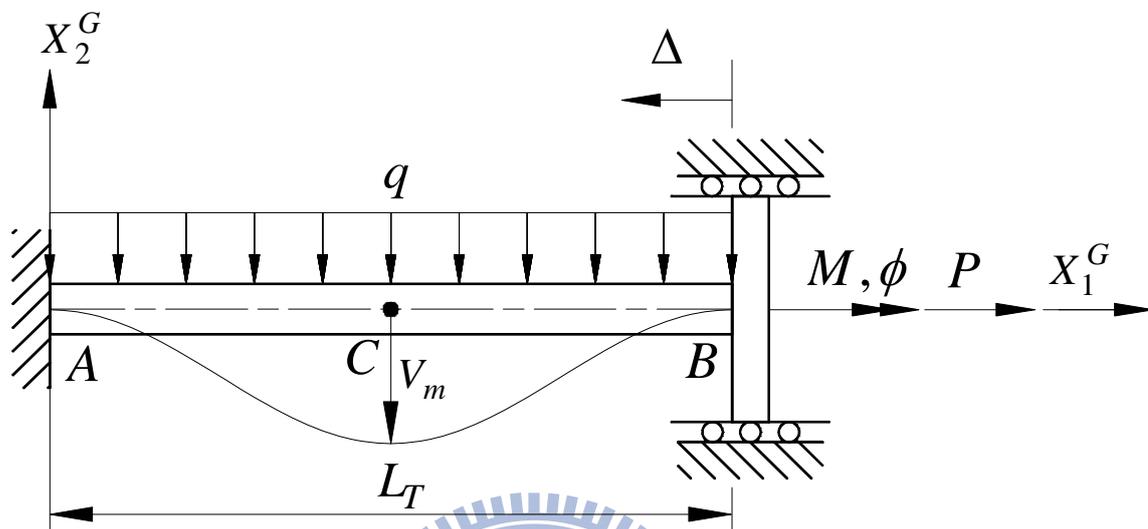
圖十五 例題三考慮自重 $\phi(\pi)$ - P/P_{cr} 之關係圖



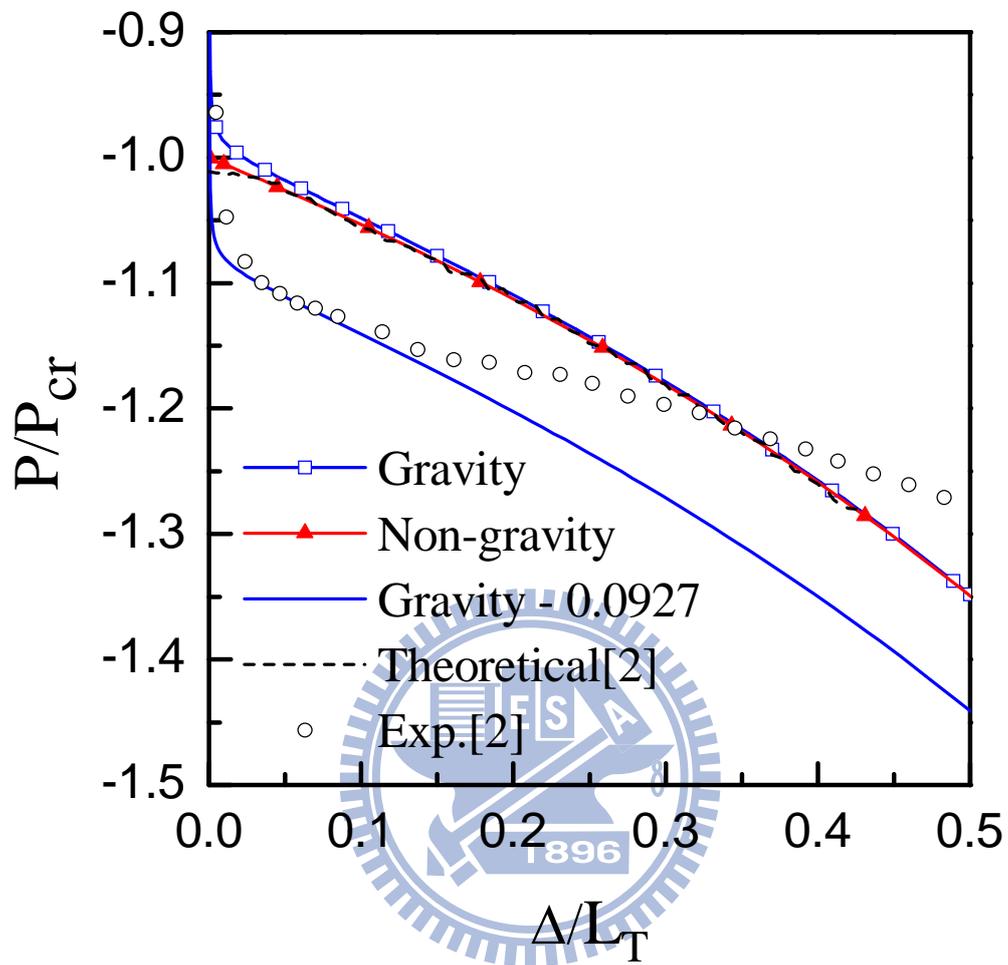
圖十六 例題三考慮自重下 L_T 與 P/P_{cr} 之關係圖



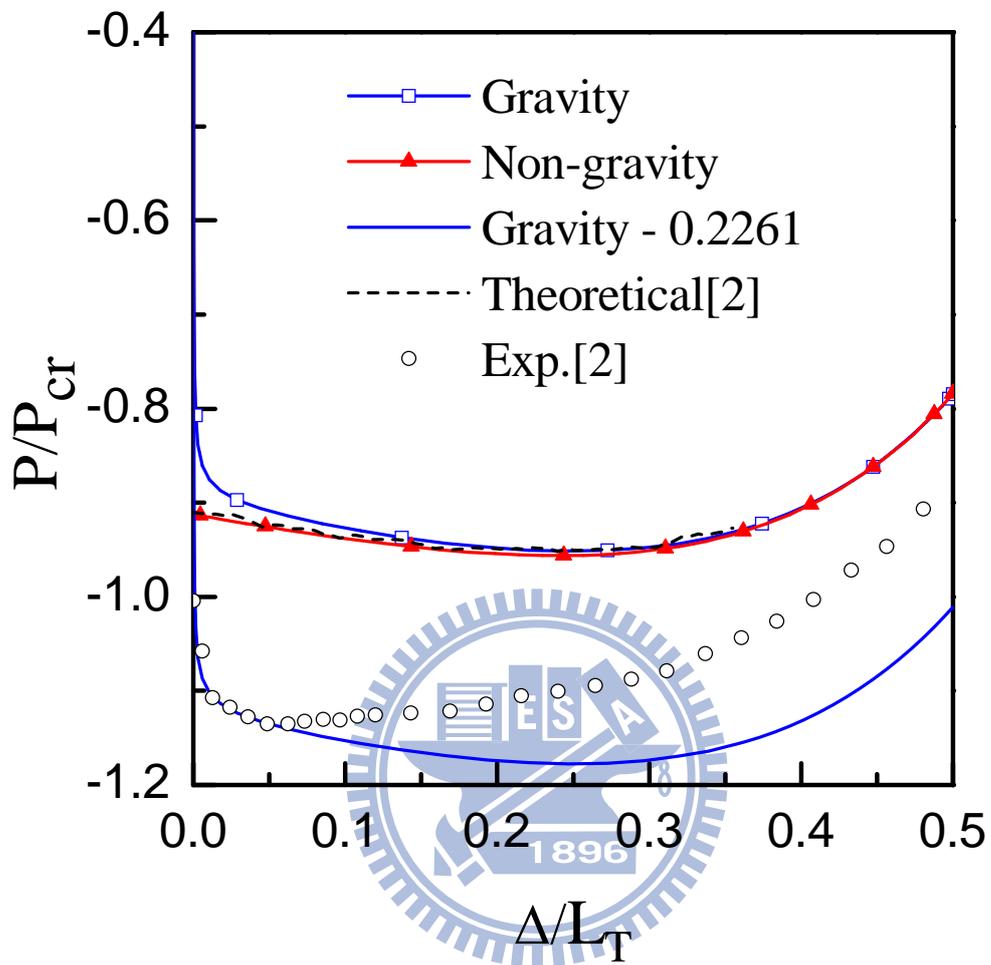
圖十七 例題三考慮自重下 L_T 與 V_m 之關係圖



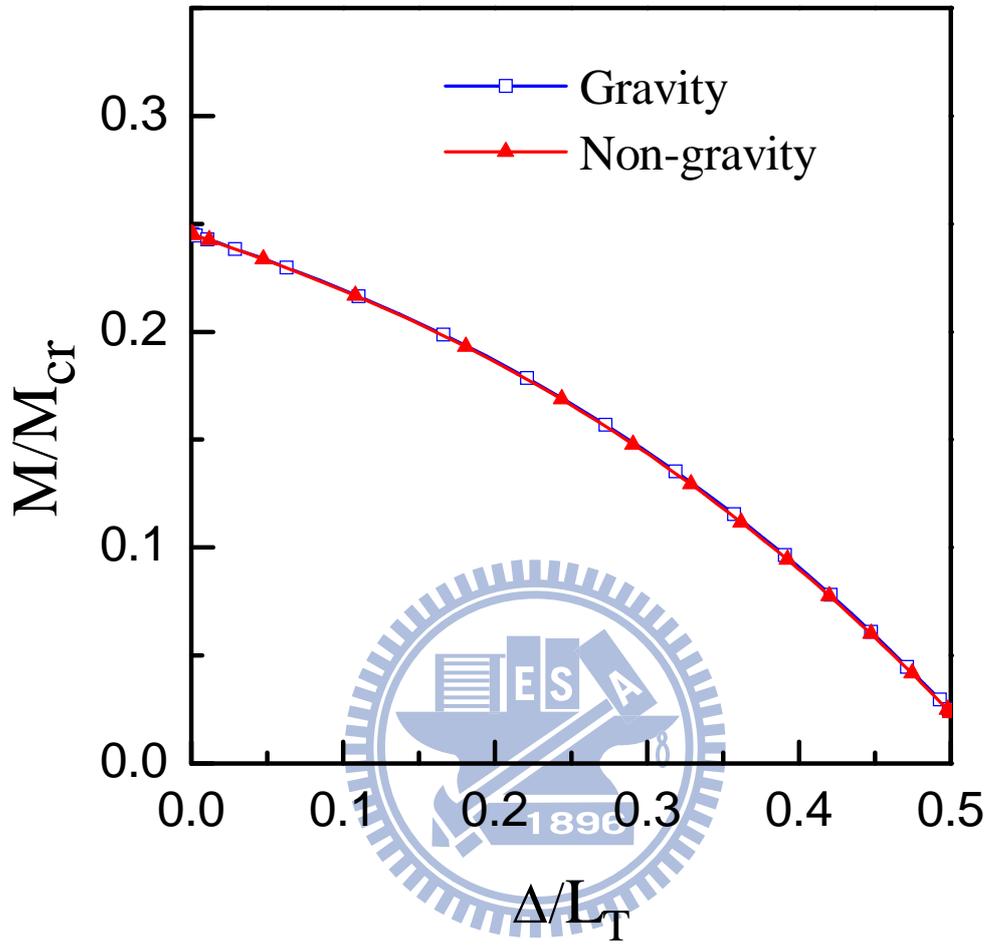
圖十八 細長梁考慮自重 B 端施加軸向轉角與軸向位移



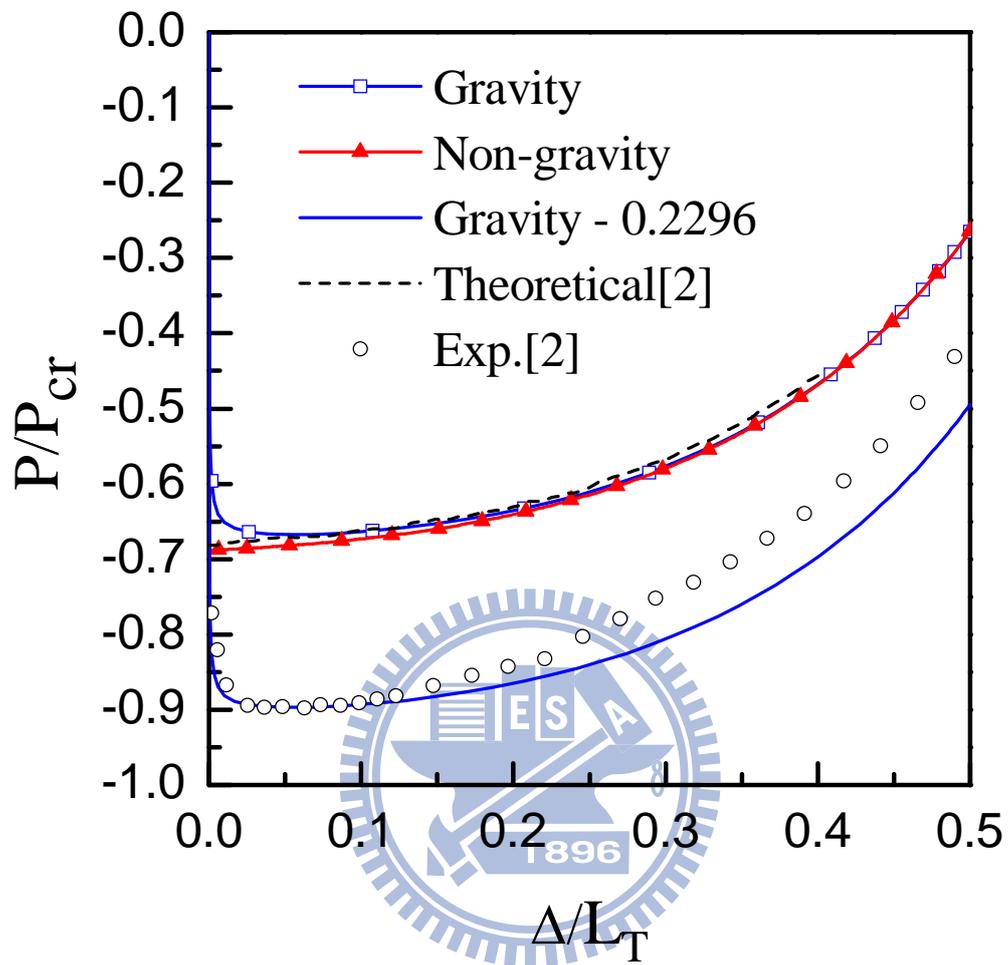
圖十九 例題四之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 0$)



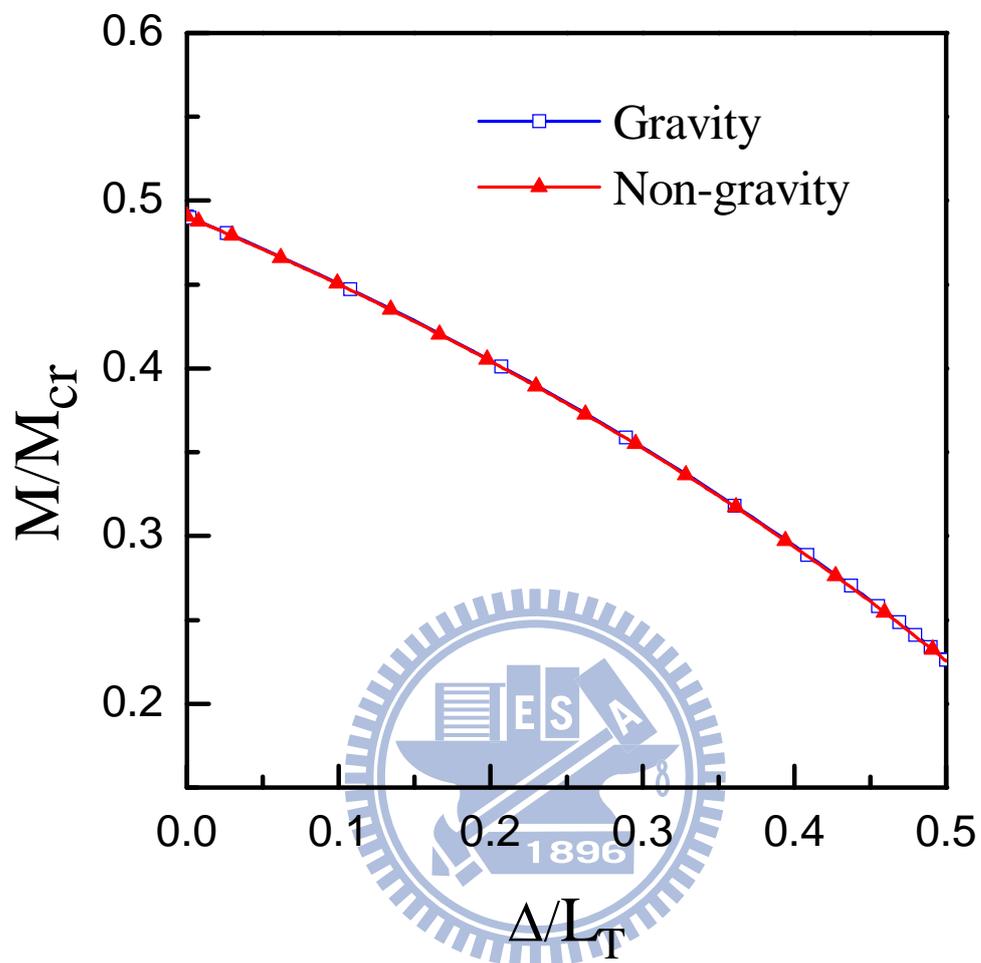
圖二十 例題四之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = \pi$)



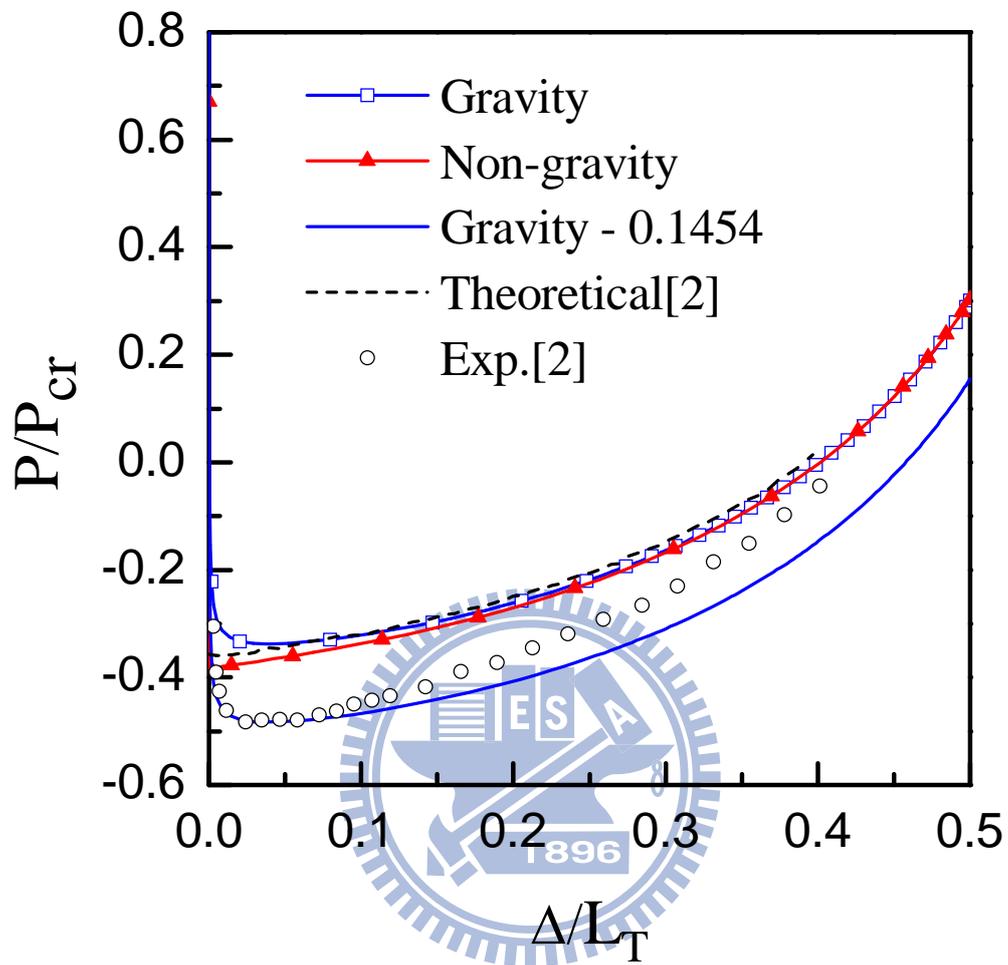
圖二十一例題四之 $M / M_{cr} - \Delta / L_T$ 曲線 ($\phi = \pi$)



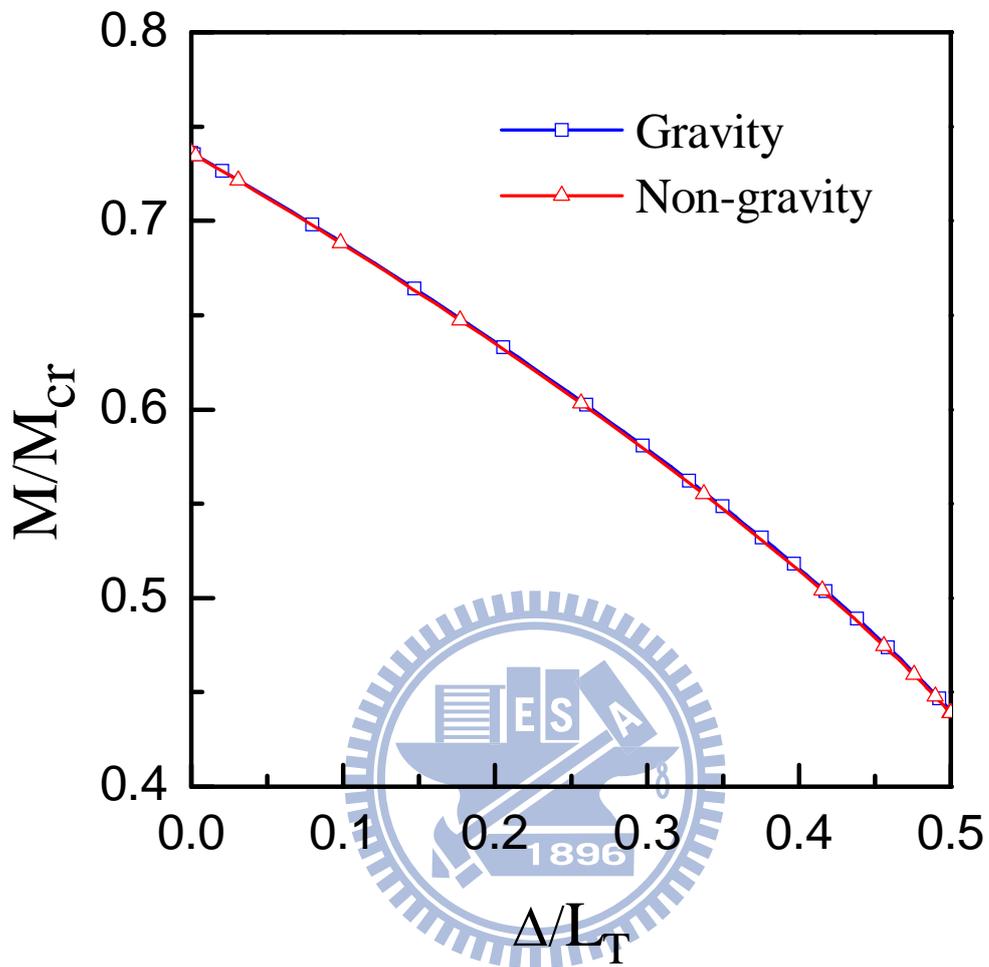
圖二十二 例題四之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 2\pi$)



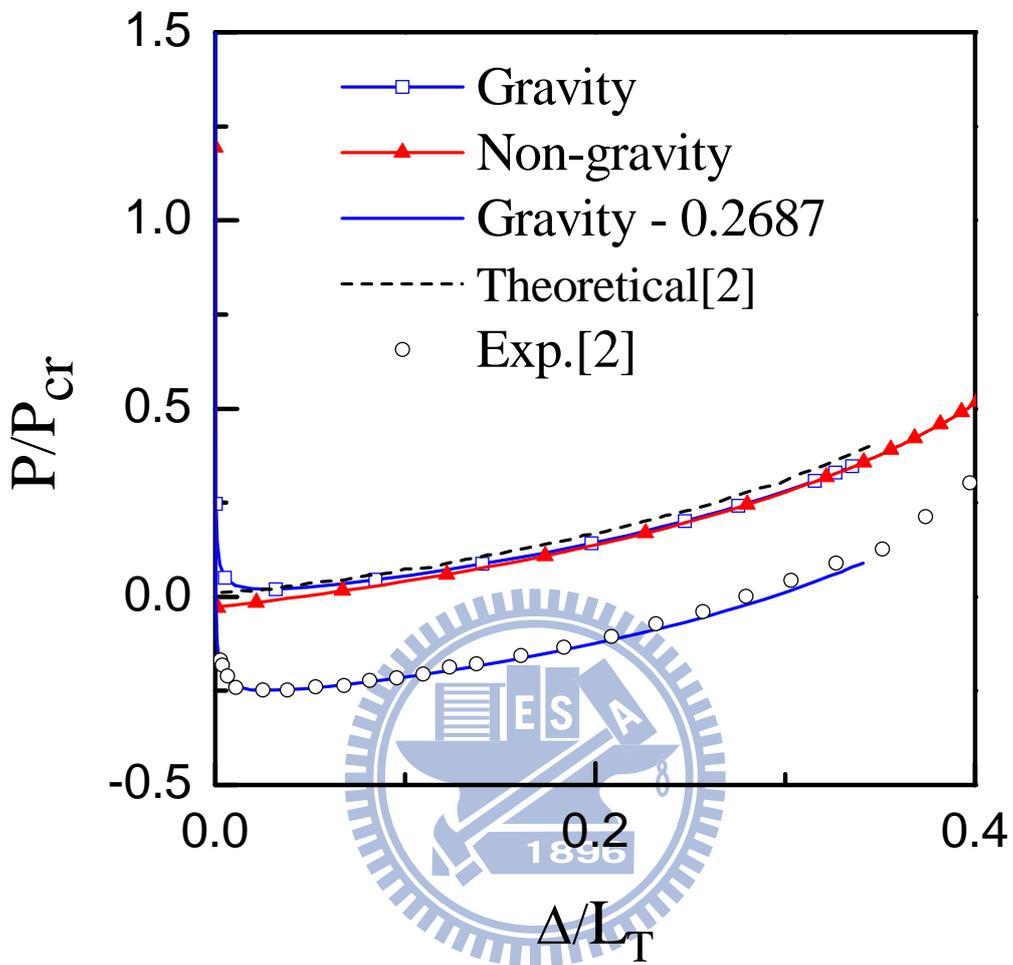
圖二十三 例題四之 $M / M_{cr} - \Delta / L_T$ 曲線 ($\phi = 2\pi$)



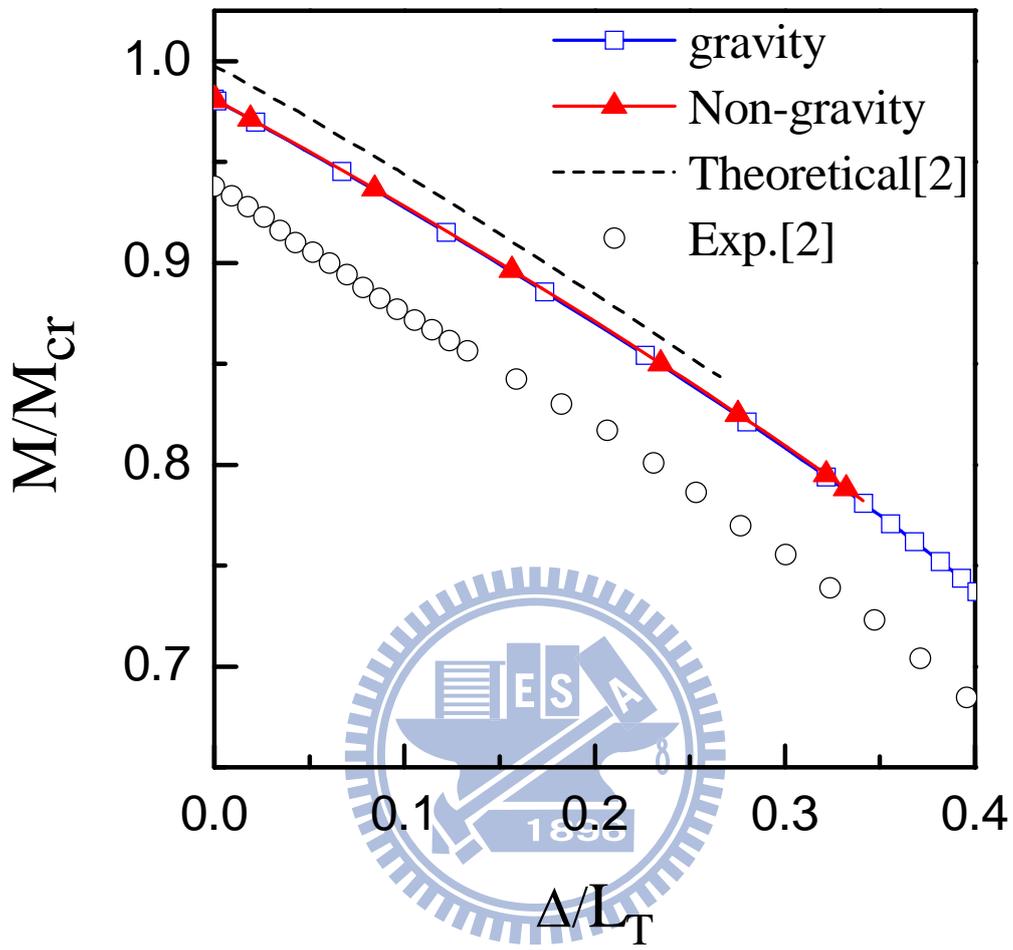
圖二十四 例題四之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 3\pi$)



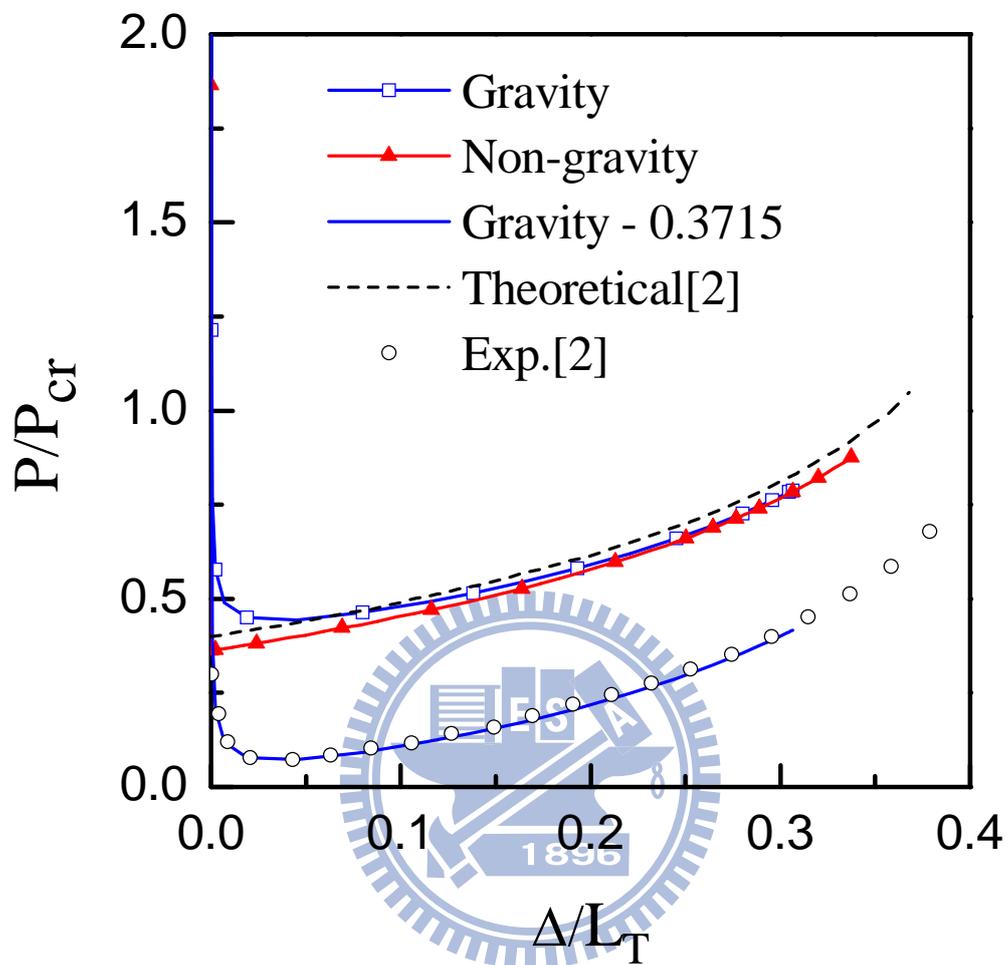
圖二十五 例題四之 $M / M_{cr} - \Delta / L_T$ 曲線 ($\phi = 3\pi$)



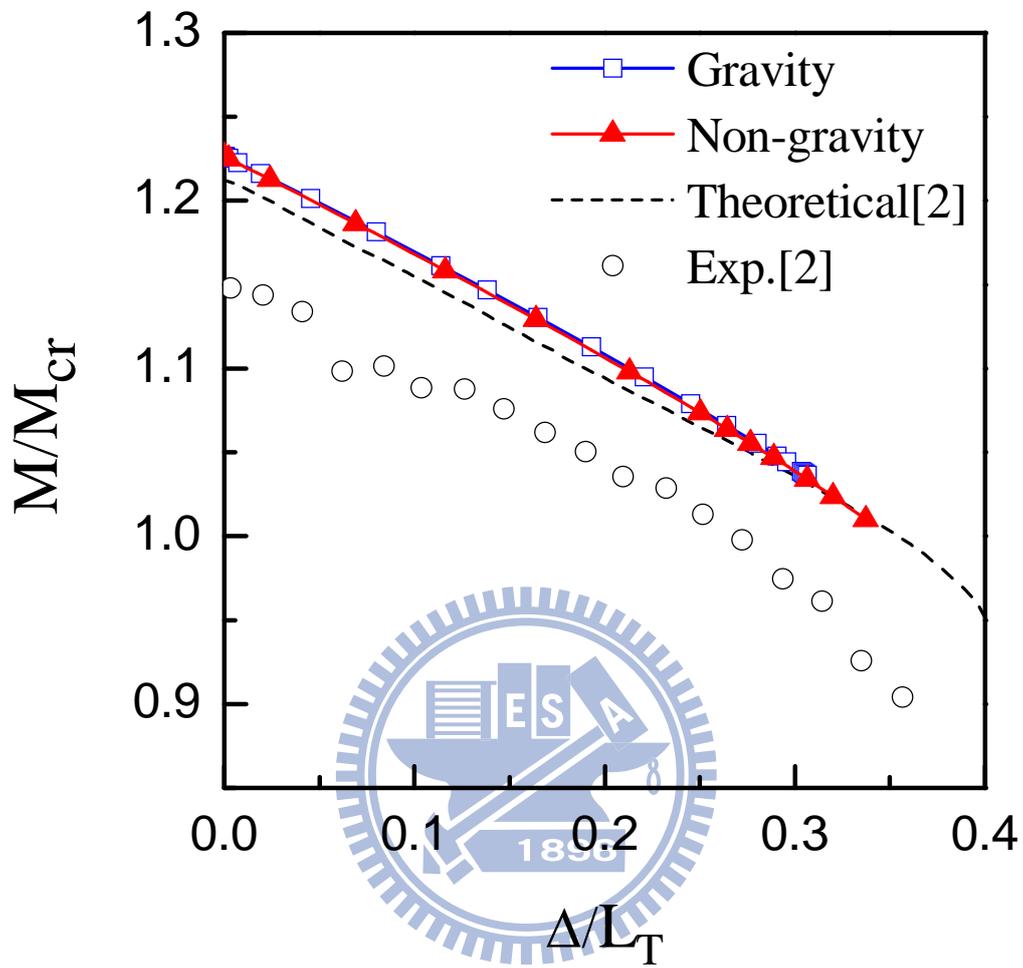
圖二十六 例題四之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 4\pi$)



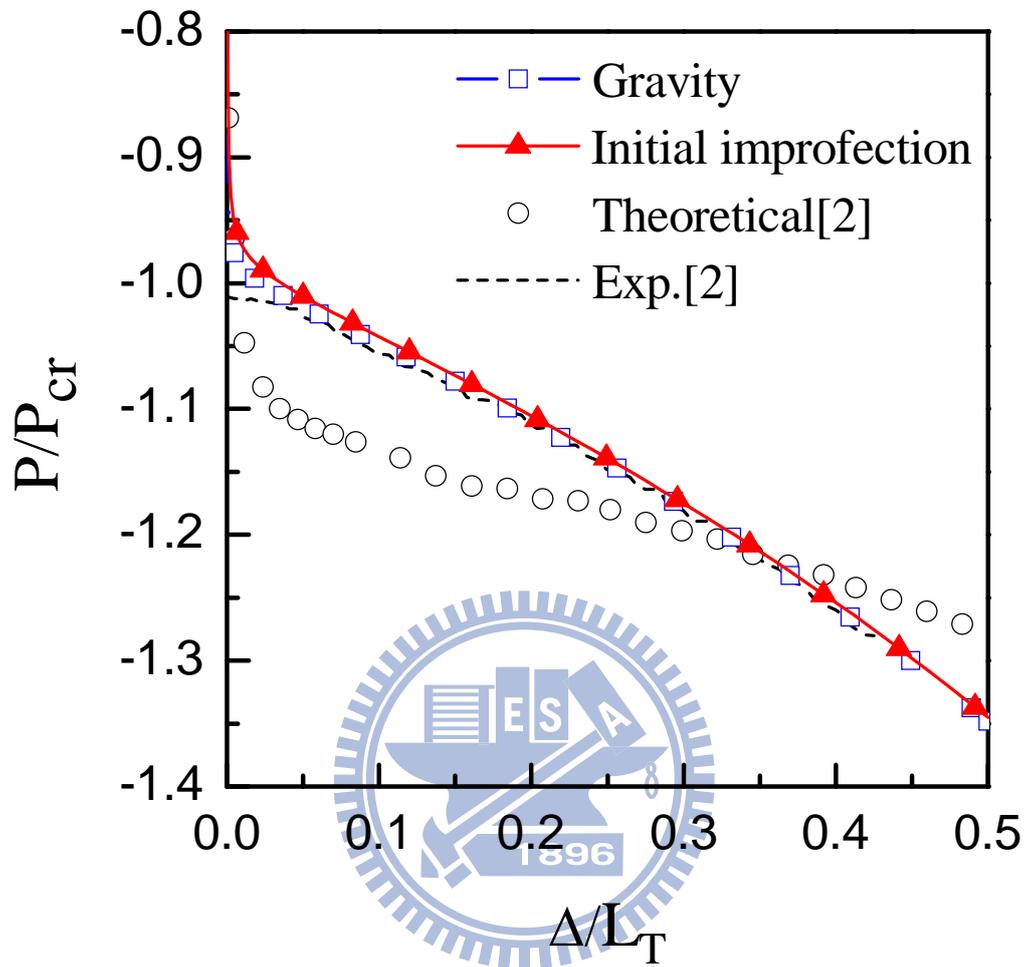
圖二十七 例題四之 $M / M_{cr} - \Delta / L_T$ 曲線 ($\phi = 4\pi$)



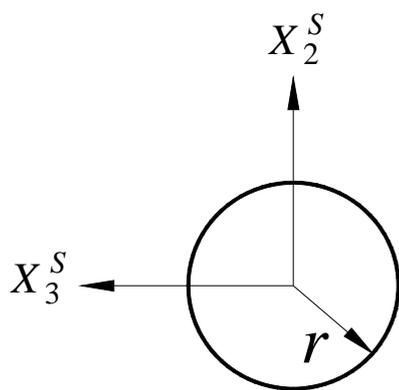
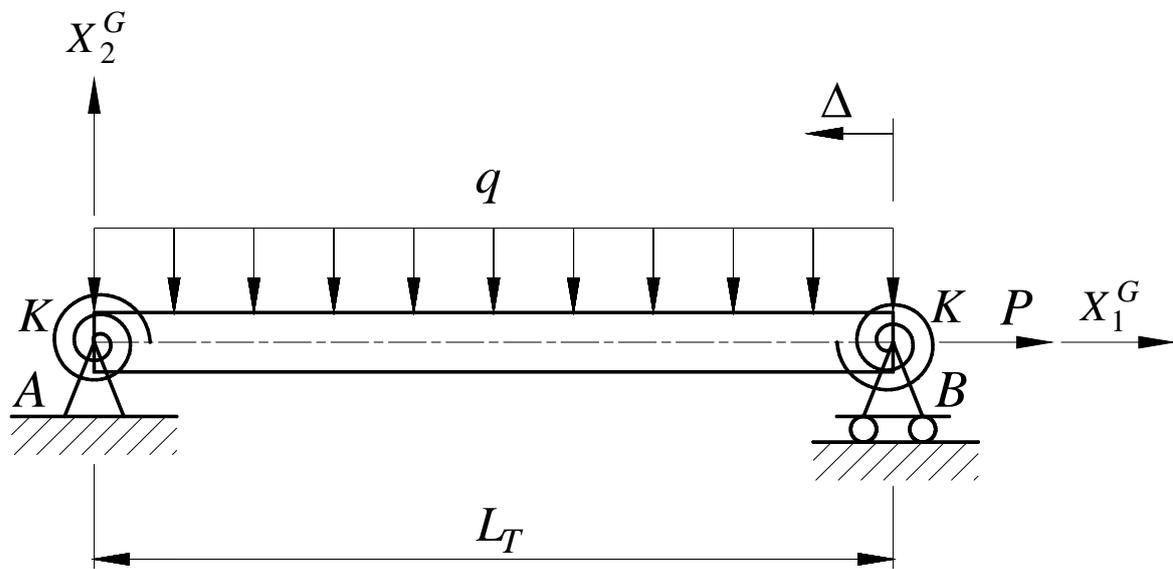
圖二十八 例題四之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 5\pi$)



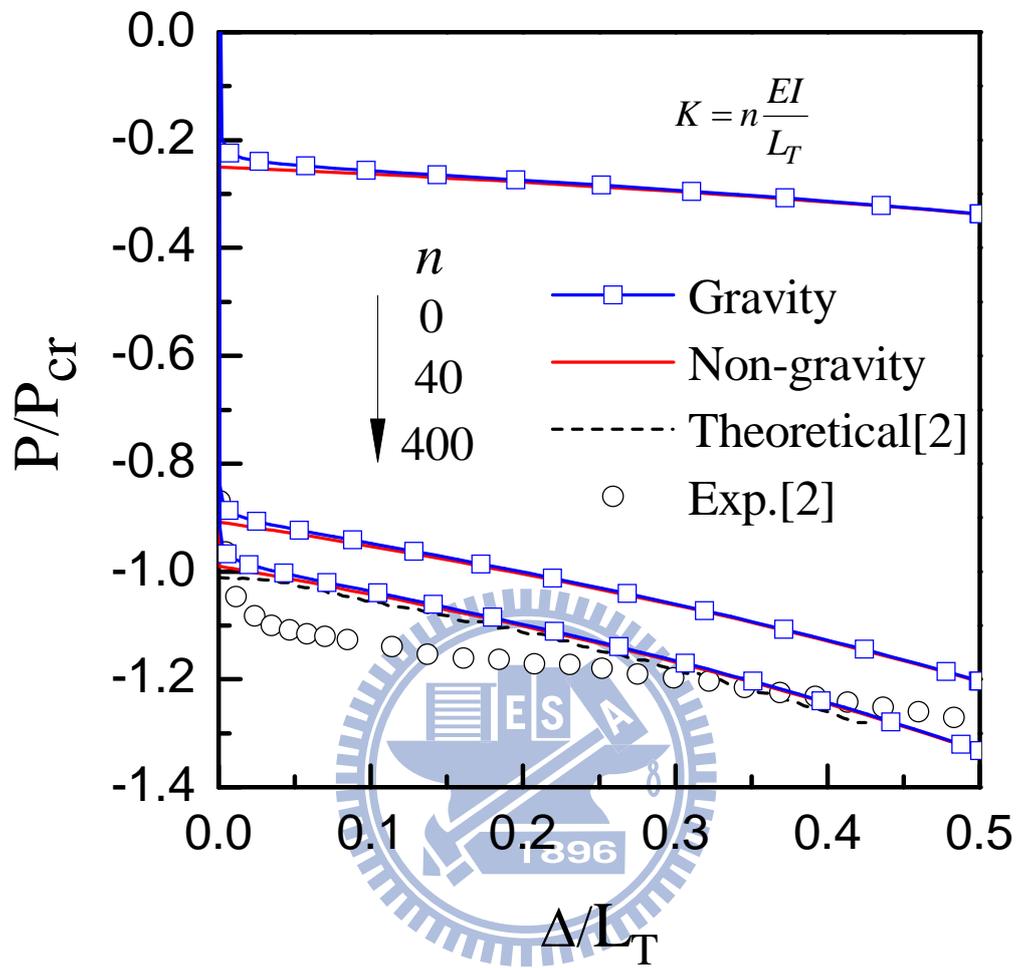
圖二十九 例題四之 $M / M_{cr} - \Delta / L_T$ 曲線 ($\phi = 5\pi$)



圖三十 例題四具初始不完美之非直梁 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 0$)



圖三十一 簡支梁兩端加彈簧限制側向轉角



圖三十二 簡支梁兩端加彈簧之 $P/P_{cr} - \Delta/L_T$ 曲線 ($\phi = 0, L_T = 300$)