

國立交通大學

機械工程學系
碩士論文

以有限元素法分析具預錐角之三維旋轉傾斜尤拉梁的

穩態變形與自由振動

Steady State and Free Vibration Analysis of a Three Dimensional Rotating
Inclined Euler Beam with Precone Angle by Finite Element Method

研究生：翁林甫

指導教授：蕭國模 博士

中華民國一百年八月

以有限元素法分析具預錐角之三維旋轉傾斜尤拉梁的
穩態變形與自由振動

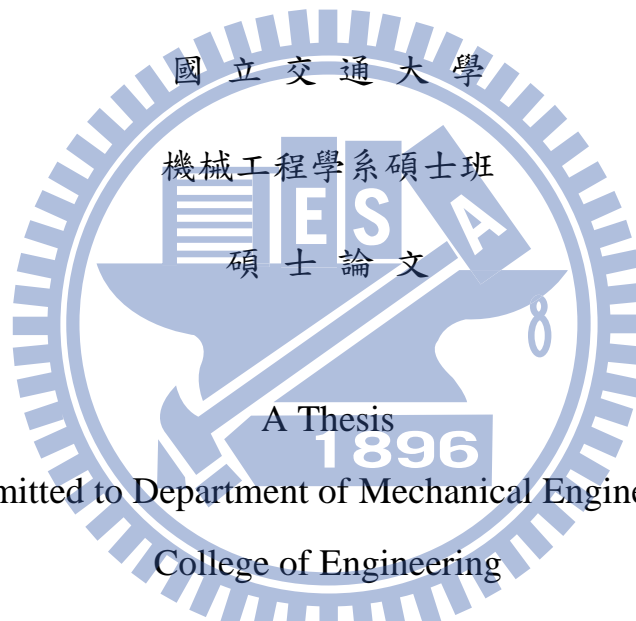
Steady State and Free Vibration Analysis of a Three Dimensional Rotating
Inclined Euler Beam with Precone Angle by Finite Element Method

研究生：翁林甫

Student： Weng-Lin Fu

指導教授：蕭國模 博士

Advisor： Dr. Kuo-Mo Hsiao



Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering
National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

August 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年八月

以有限元素法分析具預錐角之三維旋轉傾斜尤拉梁的

穩態變形與自由振動

Steady State and Free Vibration Analysis of a Three Dimensional Rotating
Inclined Euler Beam with Precone Angle by Finite Element Method

研究生：翁林甫

指導教授：蕭國模博士



國立交通大學機械工程學系碩士班

摘要

本研究主要利用共旋轉有限元素法結合浮動框架法(floating frame method)推導旋轉傾斜尤拉梁的運動方程式，探討具任意設定角、傾斜角與預錐角之等速旋轉傾斜尤拉梁的穩態變形及以該穩態變形為平衡點的自然振動頻率。

本文將旋轉梁的運動方程式建立在一個剛接在其轉軸的總體座標上，本文在梁元素當前的變形位置上建立元素座標，當前的元素座標與總體座標有相同的速度、加速度、角速度、角加速度。本文利用非線性梁理論的一致線性化、d'Alembert 原理和虛功原理在當前的元素座標上推導梁元素的節點變形力、節點慣性力。元素的剛度矩陣是由元素的節點變形力對節點參數的微分求得，元素的向心力剛度矩陣(centripetal stiffness matrix)、質量

矩陣(mass matrix)、陀螺矩陣(gyroscopic matrix) 是由元素的節點慣性力分別對節點參數的微分、節點參數對時間之二次微分的微分、節點參數對時間之一次微分的微分求得。為考慮軸向、扭轉及兩個撓曲變形間的耦合，元素的節點變形力中保留節點參數和其微分到二次項以及扭轉率的三次項，因本穩考慮之振動為微小的振動，元素的節點慣性力中僅保留節點參數和其對時間之微分到一次項。

將系統的非線性運動方程式中對時間的微分項去掉即為系統的穩態平衡方程式，將系統的運動方程式用泰勒級數在穩態變形的位置展開，取到一次項，即為旋轉梁微小振動的運動方程式。

本文利用基於牛頓法的增量迭代法求出軸向、扭轉及兩個側向位移的穩態解。旋轉傾斜梁的頻率方程式為一組代數齊次方程式，該組齊次方程式為一個二次特徵值問題，其係數形成之矩陣的行列式為零時的根，即為自然振動頻率，因該組方程式中存在陀螺矩陣，故其自然振動頻率所對應的振動模態為複變數。本文以二分法來求行列式為零時的根。

本研究以無因次化的數值例題，探討不同梁斷面、設定角、傾斜角、預錐角、無因次旋轉速度以及無因次轉軸半徑對旋轉尤拉梁之穩態變形、自然頻率及振態的影響。

Steady State and Free Vibration Analysis of a Three Dimensional Rotating
Inclined Euler Beam with Precone Angle by Finite Element Method

Student : Fu Weng-Lin

Advisor : Dr. Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

In this paper a co-rotational finite element formulation combined with the floating frame method is proposed to derive the equations of motion for a rotating Euler beam at constant angular velocity. The steady state deformation and natural frequency of the infinitesimal free vibration measured from the position of the corresponding steady state deformation are investigated for rotating Euler beams with setting angle, inclination angle and precone angle.

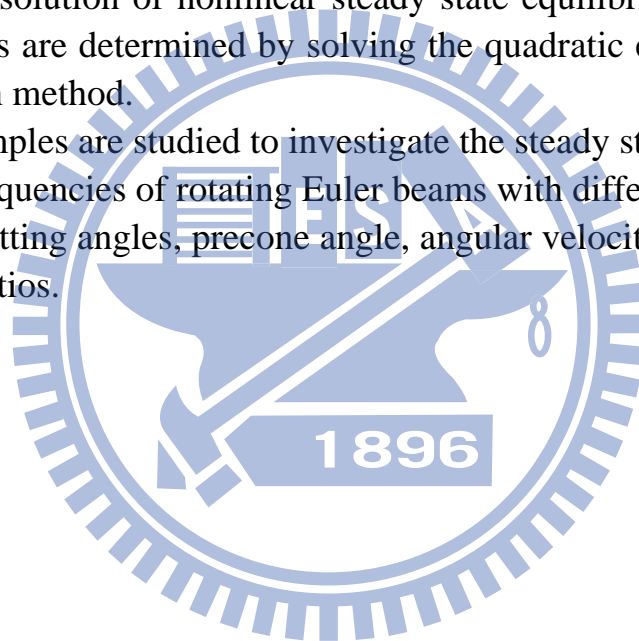
The equations of motion of the rotating beam are defined in an inertia global coordinates which are coincident with a global moving coordinates rigidly tied to the hub of the rotating beam. The inertia and moving element coordinates, constructed at the current configuration of the beam element, are coincident. The velocity, acceleration, angular velocity, and angular acceleration of the current moving element coordinates are set to be the same as those of the global coordinates of the rotating beam. The element deformation nodal forces and inertia nodal forces are systematically derived by consistent linearization of the fully geometrically non-linear beam theory using the d'Alembert principle and the virtual work principle in the current inertia element coordinates. The element stiffness matrix may be obtained by differentiating the element deformation nodal forces with respect to the element nodal parameters. The element centripetal stiffness matrix, mass matrix, and gyroscopic matrix may be obtained by differentiating the element inertia nodal forces with respect to the element nodal parameters, the second time derivative of the element nodal parameters and the first time derivative of the element nodal parameters, respectively. In order to include the nonlinear coupling among the bending, torsional, and stretching deformations, the terms up to the second order of deformation

parameters and their spatial derivatives, and the third order term of twist rate are retained in element deformation nodal forces. However, only infinitesimal free vibration is considered here; thus only the terms up to the first order of deformation parameters, and their spatial derivatives and time derivatives are retained in element inertia nodal forces.

The steady state equilibrium equations may be obtained by dropping the terms of the time derivatives in the equation of motion. The governing equations for linear vibration may be obtained by the first order power series expansion of the equation of motion at the position of the corresponding steady state deformation. The frequency equation for free vibration of rotating beam is a quadratic eigenvalue problem.

An incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method is employed for the solution of nonlinear steady state equilibrium equations. The natural frequencies are determined by solving the quadratic eigenvalue problem using the bisection method.

Numerical examples are studied to investigate the steady state deformations and the natural frequencies of rotating Euler beams with different cross sections, inclined angles, setting angles, precone angle, angular velocities, radiuses of hub, and slenderness ratios.



誌謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士在這兩年期間的指導與教誨，使本論文得以順利完成，蕭老師在研究上嚴謹的態度以及對日常生活上的關懷，使我受益良多，在此致上最高的敬意及謝意。也感謝蔡佳霖老師及尹慶中老師撥冗擔任口試委員並對本論文所提出的指正與建議，使本論文能夠更臻完善。

感謝蔡明旭學長在研究上的協助與照顧以及生活上的互相照應。感謝同學盧志群和黃楚璋在課業上的幫忙。最後再感謝學妹許彤羽在學業以及各方面的砥礪與成長。

感謝母親、在天上的父親、關心我的親人、女友及朋友對我的支持與鼓勵，僅以此成果與榮耀，獻給我親愛的父母、親人、女友以及所有關心我的人。



目錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	III
誌謝.....	V
目錄.....	VI
表目錄.....	VIII
圖目錄.....	XV
第一章 緒論.....	1
第二章 理論推導.....	9
2.1 問題描述.....	9
2.2 基本假設.....	9
2.3 座標系統描述.....	9
2.4 旋轉向量.....	12
2.5 Euler 梁的變形描述.....	12
2.6 Euler 梁的應變、速度、加速度.....	17
2.7 元素節點內力之推導.....	24
2.8 元素剛度矩陣及慣性矩陣之推導.....	30
2.9 系統的運動方程式.....	33
2.10 無因次化.....	38

第三章 數值方法及程序.....	46
3.1 穩態解.....	47
3.2 振動分析.....	49
第四章 數值例題.....	53
4.1 個案分析.....	55
第五章 結論與展望.....	63
參考文獻	65
附表.....	69
附圖.....	113
附錄 A.....	155
附錄 B.....	157
附錄 C.....	162



表目錄

表一 無因次轉軸半徑 r 、傾斜角 α 、設定角 β 、預錐角 γ 對穩態變形的影響	69
表二 不同斷面梁的細長比.....	69
表三 旋轉梁不同預錐角的收斂性及準確性分析 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $k = 0.005$).....	70
表四 旋轉梁不同預錐角的收斂性及準確性分析 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $k = 0.005$).....	71
表五 旋轉梁不同預錐角的收斂性及準確性分析 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $k = 0.005$).....	72
表六 旋轉梁不同設定角不同轉速的準確性分析 (矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 0.6667$, $\alpha = 0^\circ$, $\gamma = 0^\circ$)	73
表七 旋轉梁不同設定角不同轉速的收斂性及準確性分析 (矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 0.6587$, $\alpha = 0^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$).....	74
表八 旋轉梁不同設定角不同轉速的收斂性及準確性分析	

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 0.636$, $\alpha = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)	75
.....	
表九 旋轉梁不同預錐角不同轉速不同斷面的收斂性及準確性分析	
(矩形斷面 $L_T/b = 10$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$).....	76
表十 旋轉梁不同轉速的收斂性及準確性分析	
(矩形斷面 $a/b = 0.1$, $L_T/a = 100$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$,	
$\gamma = 15^\circ$).....	77
表十一 旋轉梁不同轉速的收斂分析	
(矩形斷面 $a/b = 0.1$, $L_T/a = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$,	
$\gamma = 15^\circ$).....	78
表十二 旋轉梁不同轉速的收斂性及準確性分析	
(矩形斷面 $a/b = 0.25$, $L_T/a = 40$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$,	
$\gamma = 45^\circ$).....	79
表十三 旋轉梁不同轉速的收斂分析	
(矩形斷面 $a/b = 0.25$, $L_T/a = 40$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$,	
$\gamma = 45^\circ$).....	80
表十四 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率	
(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$,	
$N = 50$).....	81
表十五 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率	

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$).....	82
--	----

表十六 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$).....	83
--	----

表十七 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$).....	84
--	----

表十八 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$).....	85
--	----

表十九 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$).....	86
---	----

表二十 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$).....	87
---	----

表二十一 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,	
--	--

$N = 50$)..... 88

表二十二 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$,
 $N = 50$)..... 89

表二十三 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$,
 $N = 50$)..... 90

表二十四 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $N = 50$)..... 91

表二十五 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $N = 50$)..... 92

表二十六 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$,
 $N = 50$)..... 93

表二十七 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$,
 $N = 50$)..... 94

表二十八 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $N = 50$)..... 95

表二十九 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $N = 50$)..... 96

表三十 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$,
 $N = 50$)..... 97

表三十一 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$,
 $N = 50$)..... 98

表三十二 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $N = 50$)..... 99

表三十三 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $N = 50$)..... 100

表三十四 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$,
 $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)..... 101

表三十五 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$,
 $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)..... 102

表三十六 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$,
 $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)..... 103

表三十七 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$,
 $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)..... 104

表三十八 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$,
 $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)..... 105

表三十九 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$,
 $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)..... 106

表四十 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$,

$\gamma = 45^\circ, N = 50$)..... 107

表四十一 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$,

$\gamma = 45^\circ, N = 50$)..... 108

表四十二 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$,

$\gamma = 22.5^\circ, N = 50$)..... 109

表四十三 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$,

$\gamma = 22.5^\circ, N = 50$)..... 110

表四十四 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$,

$\gamma = 45^\circ, N = 50$)..... 111

表四十五 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$,

$\gamma = 45^\circ, N = 50$)..... 112

圖目錄

圖一 無設定角、傾斜角和預錐角的旋轉梁結構.....	113
圖二 無設定角、傾斜角和預錐角之旋轉梁結構的三視圖.....	113
圖三 具設定角、傾斜角和預錐角的旋轉梁結構.....	114
圖四 具設定角、傾斜角和預錐角的旋轉梁結構示意圖.....	115
圖五 梁之位移以及座標系統關係圖.....	116
圖六 旋轉向量圖.....	116
圖七 梁的斷面圖.....	117
圖八 轉速 - 第一自然頻率圖 (橢圓斷面 $L_T/a = 50$, $a/b = 10$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$).....	118
圖九 轉速 - 第二自然頻率圖 (橢圓斷面 $L_T/a = 50$, $a/b = 10$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$).....	119
圖十 轉速 - 第一自然頻率圖 (橢圓斷面 $L_T/a = 50$, $a/b = 10$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$).....	120
圖十一 轉速 - 第二自然頻率圖 (橢圓斷面 $L_T/a = 50$, $a/b = 10$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$	

， $\alpha = 0^\circ$ ， $\beta = 45^\circ$)..... 121

圖十二 轉速 - 第一自然頻率圖

(橢圓斷面 $L_T / a = 50$ ， $a / b = 10$ ， $n_y = 1000$ ， $n_z = 100$ ， $r = 1$
， $\alpha = 0^\circ$ ， $\beta = 90^\circ$)..... 122

圖十三 轉速 - 第二自然頻率圖

(橢圓斷面 $L_T / a = 50$ ， $a / b = 10$ ， $n_y = 1000$ ， $n_z = 100$ ， $r = 1$
， $\alpha = 0^\circ$ ， $\beta = 90^\circ$)..... 123

圖十四 位移分布圖

(橢圓斷面 $L_T / a = 50$ ， $a / b = 10$ ， $n_y = 1000$ ， $n_z = 100$ ， $r = 1$
， $\alpha = 0^\circ$ ， $\beta = 0^\circ$)..... 124

圖十五 位移分布圖

(橢圓斷面 $L_T / a = 50$ ， $a / b = 10$ ， $n_y = 1000$ ， $n_z = 100$ ， $r = 1$
， $\alpha = 0^\circ$ ， $\beta = 45^\circ$)..... 125

圖十六 位移分布圖

(橢圓斷面 $L_T / a = 50$ ， $a / b = 10$ ， $n_y = 1000$ ， $n_z = 100$ ， $r = 1$
， $\alpha = 0^\circ$ ， $\beta = 90^\circ$)..... 126

圖十七 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態

(矩形斷面 $a / b = 0.05$ ， $L_T / a = 60$ ， $r = 0.636$ ， $\alpha = 0^\circ$ ， $\beta = 0^\circ$ ，
 $\gamma = 45^\circ$ ， $N = 20$)..... 127

圖十八 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態

(矩形斷面 $a/b=0.05$, $L_T/a=60$, $r=0.636$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$,
 $\gamma=45^\circ$, $N=20$)..... 128

圖十九 旋轉梁不同轉速下的第五振動模態

(矩形斷面 $a/b=0.05$, $L_T/a=60$, $r=0.636$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$,
 $\gamma=45^\circ$, $N=20$)..... 129

圖二十 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態

(矩形斷面 $a/b=0.05$, $L_T/a=60$, $r=1$, $\alpha=15^\circ$, $\beta=30^\circ$,
 $\gamma=22.5^\circ$, $N=50$)..... 130

圖二十一 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態

(矩形斷面 $a/b=0.05$, $L_T/a=60$, $r=1$, $\alpha=15^\circ$, $\beta=30^\circ$,
 $\gamma=22.5^\circ$, $N=50$)..... 131

圖二十二 旋轉梁不同轉速下的第五振動模態

(矩形斷面 $a/b=0.05$, $L_T/a=60$, $r=1$, $\alpha=15^\circ$, $\beta=30^\circ$,
 $\gamma=22.5^\circ$, $N=50$)..... 132

圖二十三 轉速 - 自然頻率圖

(矩形斷面 $a/b=0.06$, $L_T/a=166.67$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$,
 $\gamma=45^\circ$)..... 133

圖二十四 轉速 - 頂點位移圖

(矩形斷面 $a/b = 0.06$, $L_T/a = 166.67$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$,
 $\gamma = 45^\circ$)..... 134

圖二十五 轉速 - 第一自然頻率曲線

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)
 135

圖二十六 轉速 - 第二自然頻率曲線

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)
 136

圖二十七 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $N = 50$)..... 137

圖二十八 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $N = 50$)..... 138

圖二十九 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $N = 50$)..... 139

圖三十 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $N = 50$)..... 140

圖三十一 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$,

$\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)..... 141

圖三十二 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$,
 $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)..... 142

圖三十三 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 45^\circ$,
 $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)..... 143

圖三十四 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 45^\circ$,
 $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)..... 144

圖三十五 轉速 - 第一自然頻率曲線

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\gamma = 45^\circ$,
 $N = 50$)..... 145

圖三十六 轉速 - 第二自然頻率曲線

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\gamma = 45^\circ$,
 $N = 50$)..... 146

圖三十七 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$,
 $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)..... 147

圖三十八 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$,
 $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)..... 148

圖三十九 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$,
 $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)..... 149

圖四十 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$,
 $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)..... 150

圖四十一 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$,
 $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)..... 151

圖四十二 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$,
 $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)..... 152

圖四十三 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$,
 $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)..... 153

圖四十四 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態

(十字断面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$,

$\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)..... 154



第一章 緒論

旋轉梁結構在日常生活中有很多實際上的應用，像是吊扇、渦輪的葉片、直升機的旋轉翼、風力發電機的葉片、衛星的支臂、飛機的螺旋槳和機械手臂。振動分析在旋轉梁的設計與分析上扮演著很重要的角色，文獻上在這方面已經有很多的研究。

在文獻上旋轉梁結構主要包含繞其軸心旋轉之柱和剛接在其上的梁。如圖一、圖二所示，設一剛接在圓柱的右手參考座標系統，其原點取在旋轉梁斷面的形心軸與旋轉圓柱的交點(即 O 點)， X_1 軸與旋轉軸垂直且交於 A 點， X_2 軸與旋轉軸垂直、 X_3 軸與旋轉軸平行。但旋轉梁結構往往因為製造上的誤差或本身設計上的考量，梁斷面的主軸面不一定與旋轉軸平行或垂直，梁以 O 點為圓心繞 X_1 軸旋轉一個角度為設定角(setting angle) β ；梁軸之延長線不一定垂直旋轉軸，梁以 O 點為圓心繞 $-X_2$ 軸旋轉一個角度為預錐角(precone angle) γ ；梁軸之延長線不一定與旋轉軸相交，梁繞 X_3 軸旋轉一個角度為傾斜角(inclination angle) α ，如圖三所示。

旋轉梁結構在現實中通常會具有預錐角，文獻[1,2]分別回顧 1981 年前及 1984 年前關於旋轉梁結構的振動分析，發現很少有文獻會去探討預錐角對旋轉梁的影響，1984 年後的文獻也很少有探討預錐角的情形。文獻[3-7,9-17]考慮預錐角為 0° 時，不同傾斜角與設定角對旋轉梁的影響，其中文獻[3-7,9-11]只有考慮傾斜角為 0° 的情況；文獻[18,19,21-27]考慮不同預錐角的情形。當旋轉梁預錐角為 0° 且設定角為 0° 或 90° 時，若傾斜角為 0° ，穩態變形僅包含軸向變形[9-11]，若傾斜角不為 0° ，穩態變形包含軸向變形及一個側向位移[12,13]，但文獻[14]僅考慮軸向變形，文獻[9-14]只考慮旋轉梁的二維振動；當預錐角為 0° 且設定角不為 0° 或 90° 時，若傾斜角為 0° ，穩態變形僅包含軸向變形及軸向扭轉[15,16]，但文獻[4]僅考慮軸向變形，若傾斜角不為 0° ，穩態變形包含軸向、扭轉位移及兩個側向位移[18]，但文獻

[14]僅考慮軸向變形，文獻[15-17]考慮旋轉梁的三維振動。當旋轉梁預錐角不為 0° 時，若設定角為 0° 或 90° 且傾斜角為 0° ，穩態變形包含軸向變形及一個側向位移，若設定角為 0° 或 90° 且傾斜角不為 0° ，穩態變形包含軸向變形及兩個側向位移，若設定角不為 0° 或 90° ，穩態變形包含軸向、扭轉位移及兩個側向位移[18,19]，但文獻[18,19]僅考慮軸向變形，文獻[18,19,21-27]只考慮旋轉梁的二維振動。

文獻[3] Schilhansl 在考慮離心力，但忽略科氏力的情況下，導出了設定角不為 0° 之等速旋轉梁振動的微分方程式，並以迭代法去求解。文獻[4]Lee 與 Kuo 以級數解探討了設定角不為 0° 之旋轉尤拉梁，對其旋轉軸的中心半徑、設定角及轉速對旋轉梁彎矩振動自然頻率的影響。文獻[5]Yokoyama 分析不同設定角之旋轉 Timoshenko 梁，將旋轉慣量及剪變形、旋轉軸的中心半徑和設定角合併到有限元素的模式中，探討其對自然頻率的影響。文獻[6]Lee and Lin 用線性梁理論去推導不同設定角之旋轉 Timoshenko 梁的運動方程式，再以級數解求出旋轉梁的自然頻率，並探討旋轉速度和質量慣性矩(mass moment of inertia)的耦合效應、設定角和旋轉速度對彎矩自然頻率的影響。文獻[7]Eick and Mignolet 探討傾斜角為 0° 之旋轉梁在不同旋轉軸中心半徑與旋轉梁長度之比值下，其受軸向壓應力挫屈時之臨界轉速。文獻[3-7]均用線性梁理論推導旋轉梁的運動方程式，且在作其振動分析時都不考慮科氏力，但均無討論其適當性或影響，在文獻[8]Simo and Vu-Quoc 提到在分析旋轉結構需要用幾何非線性梁理論(至少取到二次項)才能適當的計算離心力對彎矩剛度的影響，若用線性梁理論(只取到一次項)將會產生虛假的彎矩剛度流失，所以文獻[3-7]中推導的旋轉梁之運動方程式及所求得之振動的自然頻率應是不正確。

文獻[9,10]利用非線性梁理論的一致線性化、虛功原理和 d'Alembert 原理在旋轉座標上推導設定角為 0° 或 90° 之旋轉 Timoshenko 梁正確的線性運

動方程式，文獻[9,10]在分析時考慮了軸向變形及科氏力。旋轉梁的自然振動是指以其穩態解為平衡點的微小振動，故須先求出其穩態解。文獻[9,10]提出旋轉梁之自然頻率的級數解法及計算其自然頻率的數值計算程序，並探討科氏力對旋轉梁之自然頻率的影響。文獻[10]洪以細長比很大的 Timoshenko 梁模擬尤拉梁探討科氏力對其的影響，發現在低轉速時，科氏力對細長比很大之旋轉梁的自然頻率影響不大，但文獻[9,10]中並無高轉速的結果，因在高轉速時，文獻[9,10]的數值方法對細長比很大的旋轉梁無法收斂。

文獻[11]周分析設定角為 0° 或 90° 的旋轉尤拉梁，利用虛功原理與 d'Alembert 原理，配合非線性梁理論的一致線性化，在旋轉座標上推導旋轉尤拉梁正確的線性運動方程式，文獻[11]周將旋轉梁分成數段，每段稱為一個元素，每個元素用一個級數解來表示其自由振動，文獻[11]周發現當細長比很大時，在高轉速下僅用一個元素無法求得正確的自然頻率，需將旋轉梁分成兩個以上的元素，才能求得精確的自然頻率，但文獻[11]周並未探討其原因。文獻[12]顏用級數解、虛功原理、d'Alembert 原理及幾何非線性梁理論的一致線性化，推導設定角為 0° 或 90° 與不同傾斜角之旋轉尤拉梁的二維運動方程式。當設定角為 90° 時，旋轉傾斜尤拉梁的側向穩態解為零；當設定角為 0° 時，旋轉傾斜尤拉梁之側向穩態變形不為零。旋轉梁所受離心力為與結構變形位置相關的外力(configuration dependent load)，但文獻[12]顏以旋轉梁變形前所受的離心力求其軸向及側向穩態變形，所以當旋轉梁的側向穩態變形不是很小時，必須考慮幾何非線性，才能得到可靠的側向穩態變形。文獻[12]顏在細長比很大、高轉速時，比較使用雙精度實數(double precision, 64 bits/per real)與四倍精度實數(quadruple precision, 64 bits/per real)計算行列式值的結果，結果發現當細長比很大時，在高轉速下僅用一個元素以雙精度實數無法求得較高的自然頻率及僅有一個元素使用四倍精度實

數與多個元素使用雙精度實數所計算出的自然頻率相同，所以使用多個元素可改善僅用一個元素之雙精度有效位數不夠的問題。

文獻[13]周以共旋轉有限元素法(Co-rotational finite element formulation)探討設定角為 0° 、不同傾斜角之旋轉傾斜梁的穩態變形及自然振動頻率，考慮旋轉梁所受的離心力為與結構變形位置相關的外力，文獻[13]周採用共旋轉有限元素法、d'Alembert 原理、虛功原理，配合幾何非線性梁理論的一致線性化，推導出非線性運動方程式。文獻[13]周發現旋轉梁的側向穩態位移隨傾斜角、無因次轉速及細長比增加而變大，且以穩態解為平衡點的振動都是軸向與側向耦合的振動，且其耦合的程度隨傾斜角、無因次轉速及細長比增加而增加。

文獻[14]視梁為單一元素以級數解探討不同設定角與傾斜角之旋轉梁自由振動。當設定角不為 0° 或 90° 時，旋轉梁之軸向、兩個側向位移與扭轉的穩態解都不為零，但文獻[14]僅考慮軸向位移的穩態解對自然頻率的影響，忽略了兩個側向位移及扭轉影響，故自然頻率可能不準確。

文獻[15]黃考慮傾斜角為 0° 及不同設定角且具軸對稱之三維旋轉 Timoshenko 梁，利用共旋轉有限元素法和虛功原理配合非線性梁理論的一致線性化，推導梁元素節點慣性力與節點變形力。具雙軸對稱之三維旋轉 Timoshenko 梁的穩態解包含軸向和扭轉變形，文獻[15]黃保留軸向和扭轉變形的穩態解到二次項及扭轉率到三次項。文獻[15]黃探討旋轉速度和設定角對三維旋轉 Timoshenko 梁之穩態變形及自然頻率的影響。文獻[16]何採用傾斜角為 0° 及不同設定角之尤拉梁取代文獻[15]黃之 Timoshenko 梁，以共旋轉有限元素法推導出三維旋轉尤拉梁運動方程式，其穩態解包含軸向和扭轉變形，探討旋轉速度和設定角對三維旋轉尤拉梁之穩態變形及自然頻率的影響。

文獻[17]蔡以共旋轉有限元素法探討具不同設定角與傾斜角之旋轉傾

斜梁的穩態變形及自然振動頻率，考慮旋轉梁所受的離心力為與結構變形位置相關的外力，文獻[17]蔡採用共旋轉有限元素法、d'Alembert 原理、虛功原理，配合幾何非線性梁理論的一致線性化，推導出非線性運動方程式。發現當預錐角為 0° 、設定角不為 0° 或 90° ，若傾斜角不為 0° 時，以穩態解為平衡點的振動是軸向、扭轉及兩個側向耦合的振動，且耦合的程度隨著傾斜角、無因次轉速和細長比的增加而增加，而當傾斜角為 0° 且設定角不為 0° 或 90° 時，穩態解僅有軸向、扭轉的變形，且這個扭轉變形會與軸向變形產生耦合作用。

文獻[18,19]視梁為單一元素以級數解探討不同設定角與預錐角之旋轉梁的自由振動與發散不穩定(divergence instability)產生的情形，文獻[18]使用的是 Bernoulli-Euler 梁，文獻[19]則使用的是 Timoshenko 梁，僅考慮軸向的穩態變形對自然頻率的影響，文獻[18]軸向的穩態變形沒考慮軸向拉伸變形，文獻[18,19]忽略了扭轉與側向位移之穩態解且沒考慮到科氏力的影響，故自然頻率與發散不穩定產生的情形都可能不正確。

文獻[21]探討預扭角、預錐角、設定角、科氏力與幾何非線性梁理論中的變形及其微分取到二次項對旋轉懸臂梁之穩態變形、自然頻率、與模態振型(mode shape)的影響，flap-lag-extensional 運動的統御耦合方程式包含有大預錐角的影響跟保持幾何非線性梁理論中的變形及其微分取到二次項，位移以非旋轉正規振態(nonrotating normal modes)表示，用 Galerkin 法去解非線性穩態方程式跟線性擾動方程式，利用各參數代入方程式中的結果與代入 MSC NASTRAN[20]所得到的結果做比對驗證幾何非線性梁理論的變形及其微分取到二次項的正確性，在小厚比(thickness ratio，葉片厚度與寬度的比)之葉片的預錐角高達 45° 及 $\Omega/\omega_1=1$ (Ω 為角速度， ω_1 為非旋轉梁在預扭角、預錐角、設定角等於 0° 時的第一自然頻率)時，各參數代入幾何非線性梁理論的變形及其微分取到二次項之 flap-lag-extensional 方程式與代入

MSC NASTRAN[20]得到的穩態變形跟最初幾個自然頻率很一致。文獻[21]發現科氏力的影響對於小厚比之葉片的分析可以被忽略，而對大厚比之葉片的分析要保留。文獻[22]探討預扭角、預錐角、設定角、細長比與科氏力對旋轉懸臂梁之振動和挫屈行為的影響，利用有限差分法和最小總位能原理去解振動問題，結果發現葉片在不同預扭角與預錐角的情況下，葉片的頻率會有不穩定性產生及科氏力對於大厚比之葉片的影響是很重要，而對小厚比之葉片是可以被忽略。文獻[23]推導具有預錐角、幾何非線性與科氏力之旋轉線性預扭葉片的 bending-bending-torsional 耦合動態運動方程式，再利用 Galerkin 法跟線性擾動法(linear perturbation technique)去求解。文獻[23]發現在預錐角小於 15° 跟厚比大於 0.1 時，方程式得到的自然頻率和穩態變形接近於 MSC NASTRAN[20]和實驗所得到的自然頻率和穩態變形，幾何非線性梁理論中的變形及其微分可以只取到二次項，但在這情況時方程式求出的頻率會有不穩定性產生，線性和非線性的科氏力對於小厚比葉片之耦合頻率的影響可以被忽略，而對大厚比葉片的影響要保留。文獻[24]探討幾何非線性梁理論中的變形及其微分取到三次項對於具有預錐角和預扭角之旋轉葉片的振動和穩定性特性的影響，其中葉片只考慮雙軸對稱，位移以非旋轉正規振態表示，用 Galerkin 法去解非線性穩態方程式和線性擾動方程式，方程式求出的結果跟 MSC NASTRAN[21]和實驗所得到的結果做比對得到幾何非線性梁理論中的變形及其微分取到二次項之小厚比旋轉葉片觀察到頻率的虛假不穩定性會因為取到三次項而消除，而使得實驗跟理論的相關性比較靠近。文獻[24]發現幾何非線性梁理論中的變形及其微分取到二次項之方程式對於具有大預錐角的葉片並不適用。文獻[21-24]在變形前的位置推導運動方程式，若用共旋轉有限元素法在變形後的位置推導運動方程式，則可除去梁元素的剛體旋轉，故幾何非線性梁理論中的變形及其微分只需要取到二次項。

文獻[25]是利用 Hamilton's principle 和 Newtonian method 去求出預扭非均勻旋轉葉片(twisted nonuniform rotor blades)的彈性彎曲和扭轉運動方程式，葉片具有預扭角及預錐角，對於細、直、長、均質和等向之梁的方程式中變形及其微分取到二次項是有效的，Hamilton's principle 推導出的方程式數值上比較精確，而靠 Newtonian method 則可以推導出有物理意義的邊界條件，這兩種方法有互補的效果。文獻[26]探討不同結構耦合(structural coupling)的均勻旋轉懸臂葉片之彈性彎曲和扭轉的穩定性，葉片具有預扭角及預錐角，文獻[26,27]都有基於準定常二維流翼型理論(quasi-steady two-dimensional airfoil theory)的截片理論(strip theory)所推導出的氣動力作用在葉片上。利用文獻[25]的運動方程式簡化成文獻[26]的運動方程式，方程式中的變形及其微分取到二次項，推導出梁的穩態變形與頻率，結果發現有預錐角會產生頻率的不穩定性。文獻[27]推導停懸飛行狀態(hovering flight condition)下的旋轉懸臂葉片(cantilever rotor blades)之非線性運動方程式，葉片具有預扭角、預錐角、垂角(drop)、掠角(sweep)、轉矩軸偏移量(torque offset)和葉片根部外伸量(blade root offset)，利用 Galerkin 法跟模態分析(modal analysis)去求葉片的穩態位移。推導出的根部(root)扭轉方程式會有兩種，一種是由根部(root)的邊界條件推導，另一種則是用動能推導，這兩種扭轉方程式的數值分析結果一致，証明了方程式的正確性。文獻[25-27]運動方程式會有頻率之不穩定性的產生，但沒探討不穩定性如何產生及如何去消除不穩定性。

在工程上，一般的旋轉結構體或是葉片(Blade)，往往因為製造上的誤差或是本身設計上的考量，預錐角、傾斜角及設定角並不為 0° 或 90° ，具傾斜角、預錐角、預扭角、及設定角不為 0° 或 90° 的旋轉梁之穩態變形是三維的變形，其自然振動是軸向、側向與扭轉耦合的三維振動，但由上面的文獻回顧可發現，文獻上仍缺乏考慮軸向、側向及扭轉穩態變形之具預錐角

傾斜旋轉梁的三維振動分析。所以本研究擬探討具有任意設定角、傾斜角與預錐角的旋轉尤拉梁之穩態變形及自由振動，但為了簡化問題，本研究並不考慮預扭角。

本研究考慮有設定角、傾斜角與預錐角的旋轉梁，擬採用共旋轉有限元素法求在一剛接在轉軸之旋轉總體座標上描述旋轉梁的位移、速度及加速度，本文利用文獻[28]之三維尤拉梁的變形機制推導梁元素，在梁元素當前的變形位置建立一個元素座標，該元素座標原點的速度及加速度與該原點重合且固定在旋轉總體座標之點的剛體速度與加速度，該元素座標與轉軸有相同的角速度。本文以 d'Alembert 原理、虛功原理、幾何非線性梁理論的一致線性化，推導出元素之節點慣性力、節點變形力、剛度矩陣、向心力剛度矩陣(centripetal stiffness matrix)、質量矩陣(mass matrix)、陀螺矩陣(gyroscopic matrix)。將系統的非線性運動方程式中對時間的微分的項去掉即為系統的穩態平衡方程式，將系統運動方程式用泰勒級數在穩態變形的位置展開，取到一次項，即為旋轉梁微小振動的運動方程式。在推導過程中保留穩態變形的節點參數和其微分到二次項以及扭轉率的三次項，而振動部分保留節點參數和其微分到一次項。本文利用基於牛頓法的增量迭代法求出軸向、扭轉及兩個側向位移的穩態解。旋轉傾斜梁的振動方程式中存在陀螺矩陣，所以其自然振動頻率對應的振動模態為複變數，其頻率方程式(frequency equations)為一組代數齊次方程式，該組齊次方程式為一個二次特徵值問題，其係數形成之矩陣的行列式值為零時的根，即為自然振動頻率。本文以二分法來求行列式值為零時的根。本研究擬探討設定角、傾斜角、預錐角、轉速、轉軸半徑及細長比對旋轉傾斜梁自然頻率的影響。

第二章 理論推導

2.1 問題描述

如圖三所示，本文考慮一長度為 L_T 具均勻斷面且雙軸對稱之尤拉梁，其支承端以設定角(setting angle) β 、傾斜角(inclination angle) α 與預錐角(precone angle) γ 剛接在一半徑為 R 剛性圓柱上，該圓柱以等角速率 Ω 繞其軸心旋轉。本文中所有梁的位移、變形和振動指的是在一個以等角速率 Ω 繞圓柱中心軸旋轉的旋轉座標上描述的位移、變形和振動。本文中考慮梁的軸向、扭轉位移、兩個側向位移及旋轉。設定角不為 0° 或 90° 且傾斜角或預錐角不為 0° 時，等角速率的旋轉梁存在一包含軸向位移、扭轉，兩個側向位移的穩態變形。本文中所有的振動都是指以該穩態變形為平衡點的振動。本文中考慮的振動是線性振動，所以由振動造成的位移、速度和加速度都視為是一微小量(infinitesimal quantity)。

2.2 基本假設

本文對梁元素的推導，做如下的假設：

- (1) 梁為細長的等斷面、雙對稱梁，且 Euler-Bernoulli 假說成立。
- (2) 梁元素的形心軸之單位長度伸長量(unit extension)為均勻的伸長。
- (3) 梁變形後，其斷面形狀不變，且斷面平面內的應變可以忽略。
- (4) 梁元素的變形與應變皆為小變形與小應變。
- (5) 梁元素斷面的翹曲為梁元素的軸向扭轉率與該梁的聖維南(Saint Venant)翹曲函數的乘積。

2.3 座標系統描述

本研究是使用共旋轉有限元素法(co-rotational finite element formulation)，將梁分割成若干個兩個節點的梁元素。為了描述旋轉梁系統

的運動，本文中使用的四個右手座標系統：

(1) 參考座標系統 X_i , ($i=1,2,3$)

參考座標系統是剛接在圓柱表面，如圖一所示，其原點取在旋轉梁斷面的形心軸與旋轉圓柱的交點(即 O 點)， X_1 軸與旋轉軸垂直且交於 A 點， X_2 軸與旋轉軸垂直、 X_3 軸與旋轉軸平行。此座標系統是用來定義旋轉梁的設定角 β 、預錐角 γ 、傾斜角 α 及描述旋轉梁變形前梁軸及梁斷面的方向。

(2) 總體座標系統 X_i^G , ($i=1,2,3$)

總體座標系統是剛接在圓柱表面旋轉，如圖四所示，其原點取在 O 點，其 X_1^G 軸為變形前之梁的斷面形心軸，其 X_2^G 和 X_3^G 軸是取變形前之旋轉梁的斷面主軸方向。 X_i^G 軸在 X_i 座標中的方向是用 α 、 β 、 γ 以下列的程序決定：先使 X_i^G 軸與 X_i 軸重合，再以 O 點為圓心，將 X_i^G 軸繞 X_1 軸轉 β 角，再繞 X_2 軸旋轉 γ 角，最後繞 X_3 軸旋轉 α 角，即為總體座標系統。本文中旋轉梁的節點座標、節點位移、節點速度角速度、節點加速度、角加速度及整個系統的運動方程式均在此座標系統中定義。

(3) 梁斷面座標系統 x_i^S , ($i=1,2,3$)

該座標系統的原點是剛接在梁斷面的形心上，其 x_1^S 軸取在未翹曲斷面的法線方向， x_2^S 、 x_3^S 軸取在未翹曲斷面的主軸方向。

(4) 元素座標系統 x_i , ($i=1,2,3$)

元素座標系統是建立在每個元素當前的位置上，且以一個等角速率 Ω 繞圓柱中心軸旋轉，如圖五所示，元素座標系統的原點是定義在元素節點 1(即 o 點)上，令 o 點當前的總體座標為 (X_0, Y_0, Z_0) ， x_1 軸的方向為梁元素兩節點連線的方向， x_2 與 x_3 軸在元素變形前與斷面的主軸方向一致，而元素變形後的 x_2 與 x_3 軸，可以由該元素未翹曲的兩端斷面的方位來決定[28]，本文是分別將位於節點 1、2 後的斷面繞一個與該斷面之法

線及與 x_1 軸垂直的旋轉軸旋轉一角度使斷面之法線方向與 x_1 軸方向一致 (此時不考慮斷面之翹曲變形，否則斷面的法線方向將無法定義)，然後再以兩斷面的主軸方向的角平分線作為 x_2 軸與 x_3 軸的方向。本文中梁元素的位移、變形、速度、加速度及運動方程式，均在此座標系統定義。

本文中以符號 $\{ \}$ 代表行矩陣。總體座標系統 $\mathbf{X}^G = \{ X_1^G, X_2^G, X_3^G \}$ 與參考座標 $\mathbf{X} = \{ X_1, X_2, X_3 \}$ ，元素座標 $\mathbf{x} = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ ，元素斷面座標 $\mathbf{x}^S = \{ x_1^S, x_2^S, x_3^S \}$ 的關係可表示如下：

$$\mathbf{X}^G = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

$$\mathbf{X}^G = \mathbf{A}_{GE}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{X}^G = \mathbf{A}_{GS}\mathbf{x}^S \quad (2.3.1)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

其中 \mathbf{A} 、 \mathbf{A}_{GE} 、 \mathbf{A}_{GS} 分別代表參考座標、元素座標、元素斷面座標對於固定總體座標系統的方向餘弦矩陣， α 為傾斜角、 β 為設定角、 γ 為預錐角。矩陣 \mathbf{A} 的推導過程詳見附錄 A

令 $\boldsymbol{\Omega}_G$ 為旋轉梁的角速度向量在總體座標上的表示式，可表示如下：

$$\boldsymbol{\Omega}_G = \Omega \{ \sin \gamma, \sin \beta \cos \gamma, \cos \beta \cos \gamma \} \quad (2.3.3)$$

其中 Ω 為角速率， β 為梁的設定角， γ 為梁的預錐角

令 $\boldsymbol{\Omega}$ 為旋轉梁的角速度向量在元素座標上的表示式，由 (2.3.1)、(2.3.3) 式可得：

$$\boldsymbol{\Omega} = \{ \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \} = \mathbf{A}_{GE}^t \boldsymbol{\Omega}_G = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{n} \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{n} = \{ n_1, n_2, n_3 \} \quad (2.3.5)$$

其中 \mathbf{n} 為旋轉軸的單位向量， n_i ($i=1, 2, 3$) 為其在元素座標軸 x_i 的分量。

2.4 旋轉向量

本文中使用的旋轉向量來表示一個有限旋轉，如圖六所示，一向量 \mathbf{b} 受到一旋轉向量 $\phi\mathbf{a}$ 的作用而轉到一個新的位置 \mathbf{b}' ，向量 \mathbf{b}' 與 \mathbf{b} 之間的關係可表示成：

$$\mathbf{b}' = \cos\phi\mathbf{b} + (1 - \cos\phi)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + \sin\phi(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (2.4.1)$$

其中符號 \cdot 與 \times 分別代表向量的內積與外積， ϕ 表逆時鐘方向旋轉角， \mathbf{a} 表旋轉軸的單位向量。

2.5 Euler 梁的變形描述

本文在旋轉座標上描述梁元素的變形，由(2.2)節中的基本假設可知 Euler 梁元素的變形可以由其形心軸的位移、截面的翹曲(warping)及其截面的旋轉來描述。

本研究採用[8]與[29]中之梁的變型機制，如圖五中 Q 點為梁元素中的任意點，P 點為 Q 點在同一斷面之形心軸上的對應點。在旋轉座標上 Q 點的變形前後位置可以表示如下[8]:

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (2.5.1)$$

$$\mathbf{r} = x_p\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3 + \theta_{1,s}\omega\mathbf{e}_1^S + y\mathbf{e}_2^S + z\mathbf{e}_3^S \quad (2.5.2)$$

其中 x 、 y 、 z 為變形前 Q 點在元素座標 x_i ($i=1,2,3$) 上的座標， x 亦為 P 點變形前 x_1 軸的座標， y 、 z 亦同時是 Q 點在 x_2^S 與 x_3^S 軸的座標。 $x_p(x, t)$ 、 $v(x, t)$ 以及 $w(x, t)$ 分別是變形後 P 點在元素座標 x_i ($i=1,2,3$) 上的座標， $v(x, t)$ 、 $w(x, t)$ 亦為 P 點在 x_2 及 x_3 軸方向的位移， $\theta_{1,s} = \frac{\partial\theta_1}{\partial s}$ 是梁斷面沿變形後形心

軸的軸向扭轉率， $\theta_1(x, t)$ 為形心軸的扭轉角， s 為變形後形心軸的弧長， $\omega = \omega(y, z)$ 代表等斷面梁的聖維南翹曲函數， \mathbf{e}_i 及 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 分別為 x_i 與 x_i^S 軸的單位向量，梁變形後形心軸的單位切線向量可表示為

$$\mathbf{t} = \{\cos\theta_n, \theta_3, -\theta_2\} \quad (2.5.3)$$

其中

$$\theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{w'}{1 + \varepsilon_0} \quad (2.5.4)$$

$$\theta_3 = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{v'}{1 + \varepsilon_0} \quad (2.5.5)$$

$$\cos\theta_n = \frac{\partial x_p}{\partial s} = (1 - \theta_2^2 - \theta_3^2)^{1/2} \quad (2.5.6)$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} = v_{,x}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (2.5.7)$$

ε_0 為形心軸的單位伸長量。

忽略扭轉翹曲的情況下，由方程式(2.5.4)至(2.5.7)式可得

$$x_p(x, t) = u_1(t) + \int_0^x [(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2 - w_{,x}^2]^{1/2} dx \quad (2.5.8)$$

其中 $u_1(t)$ 為節點1在 x_1 方向上的位移，由元素座標系統的定義，其值為零。

由梁元素的變形為小變形的假設，利用近似式 $[(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2 - w_{,x}^2]^{1/2} \approx (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2)$ ，(2.5.8)式可表示成

$$x_p(x, t) = u_1 + \int_0^x (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2) dx \quad (2.5.9)$$

由座標系統的定義可知，在變形前 x_i 軸與 x_i^S ($i=1,2,3$) 軸的方向是一致的，即 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 的方向是一致的，而且變形後 \mathbf{e}_i^S 與(2.5.3)式的 \mathbf{t} 方向一樣。在本文中假設變形後的單位向量 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 的方向是由以下兩個旋轉向量連續作用於單位向量 \mathbf{e}_i ($i=1,2,3$) 來決定[28]、[29]：

$$\boldsymbol{\theta}_n = \theta_n \mathbf{n}_\theta \quad (2.5.10)$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \theta_t \mathbf{t} \quad (2.5.11)$$

$$\mathbf{n}_\theta = \{0, \theta_2 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}, \theta_3 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}\} = \{0, n_2, n_3\} \quad (2.5.12)$$

其中 \mathbf{n}_θ 為垂直於 \mathbf{e}_1 與 \mathbf{t} 之單位向量， θ_n 為 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{t} 的夾角， θ_t 為斷面繞 \mathbf{t} 的轉角。

將旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 作用在 \mathbf{e}_i 上，使其轉至一中繼位置 \mathbf{e}'_i ，如圖六所示，此時 \mathbf{e}'_i 與 \mathbf{t} 重合，再將 $\boldsymbol{\theta}_t$ 作用在 \mathbf{e}'_i ，將其轉到 \mathbf{e}_i^S 。若 \mathbf{e}_i 、 $\boldsymbol{\theta}_n$ 、以及 $\boldsymbol{\theta}_t$ 已知，則元素斷面座標 \mathbf{e}_i^S 就唯一決定；反之，若 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S 已知，則旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 與 $\boldsymbol{\theta}_t$ 亦唯一決定。

\mathbf{e}_i^S 與 \mathbf{e}_i 之關係可表示如下[28]、[29]

$$\mathbf{e}_i^S = [\mathbf{t}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2] \mathbf{e}_i = \mathbf{R} \mathbf{e}_i, \quad (2.5.13)$$

$$\mathbf{R}_1 = \cos \theta_1 \mathbf{r}_1 + \sin \theta_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{R}_2 = -\sin \theta_1 \mathbf{r}_1 + \cos \theta_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_1 = \{-\theta_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_2^2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3\}$$

$$\mathbf{r}_2 = \{\theta_2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_3^2\}$$

其中 \mathbf{R} 稱為旋轉矩陣。因 \mathbf{R} 為 $\theta_i (i=1, 2, 3)$ 的函數，所以本文中稱 θ_i 為旋轉參數。

當 $\theta_i (i=1, 2, 3)$ 分別有一微小變化 $\delta\theta_i$ 時，斷面座標會旋轉到一個新的位置，此一新的位置可由元素座標繞 $x_i (i=1, 2, 3)$ 軸分別作微小旋轉 $\delta\phi_i (i=1, 2, 3)$ 而得。

$\delta\boldsymbol{\theta} = \{\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3\}$ 與 $\delta\boldsymbol{\phi} = \{\delta\phi_1, \delta\phi_2, \delta\phi_3\}$ 之關係可表示如下[28]、[29]：

$$\delta\boldsymbol{\phi} = [\mathbf{t}, \mathbf{t}_1 + a\mathbf{t}, \mathbf{t}_2 + b\mathbf{t}] \delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{T} \delta\boldsymbol{\theta} \quad (2.5.14)$$

$$\mathbf{t}_1 = \left\{ -\theta_3, \frac{1 - \theta_3^2}{\cos \theta_n}, \frac{\theta_2 \theta_3}{\cos \theta_n} \right\}$$

$$\mathbf{t}_2 = \left\{ \theta_2, \frac{\theta_2 \theta_3}{\cos \theta_n}, \frac{1 - \theta_2^2}{\cos \theta_n} \right\}$$

$$a = \frac{\theta_3(1 - \cos \theta_n)}{\theta_2^2 + \theta_3^2}$$

$$b = \frac{-\theta_2(1 - \cos \theta_n)}{\theta_2^2 + \theta_3^2}$$

(2.5.14)式之反函數可表示如下:

$$\delta \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -\theta_3 & \cos \theta_n & 0 \\ \theta_2 & 0 & \cos \theta_n \end{bmatrix} \delta \boldsymbol{\phi} = \mathbf{T}^{-1} \delta \boldsymbol{\phi} \quad (2.5.15)$$

當旋轉參數 θ_2 與 θ_3 很小時， \mathbf{T}^{-1} 矩陣可近似如下式

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\theta_3 & -\frac{1}{2}\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & 0 \\ \theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.16)$$

將(2.5.13)式代入(2.5.2)式，利用近似式 $\cos \theta_n \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2$ 、

$\sin \theta \approx \theta$ 、 $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ 並保留變形參數至二次項，則位置向量 \mathbf{r} 可以化簡成

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.5.17)$$

$$r_1 = x_p + y(\theta_2 \theta_1 - \theta_3) + z(\theta_2 + \theta_3 \theta_1) + \theta_{1,x} \omega$$

$$r_2 = v + y \left[1 - \frac{1}{2}(\theta_3^2 + \theta_1^2) \right] + z \left(\frac{1}{2} \theta_2 \theta_3 - \theta_1 \right) + \theta_{1,x} \theta_3 \omega$$

$$r_3 = w + y \left(\frac{1}{2} \theta_2 \theta_3 + \theta_1 \right) + z \left[1 - \frac{1}{2}(\theta_2^2 + \theta_1^2) \right] - \theta_{1,x} \theta_2 \omega$$

由梁之形心軸單位長度的伸長量為均勻的伸長量之假設及(2.5.9)式，可以得到形心軸單位長度伸長量 ε_0 可表示如下

$$\varepsilon_0 = \frac{l-L}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.5.18)$$

$$l = L + u_2 - u_1 \quad (2.5.19)$$

其中 L 為梁元素變形前的長度， l 為梁元素變形後之形心軸的弦長， u_1 、 u_2 分別為節點 1 與 2 在 x_1 方向的位移。

本文中假設梁元素形心軸的位移 v, w 與軸向扭轉角 θ_1 皆為 x 的三次 Hermitian 多項式，因此 v, w, θ_1 可表示成：

$$v(x, t) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{v_1, v_1', v_2, v_2'\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (2.5.20)$$

$$w(x, t) = \{N_1, -N_2, N_3, -N_4\}^t \{w_1, -w_1', w_2, -w_2'\} = \mathbf{N}_c^t \mathbf{u}_c \quad (2.5.21)$$

$$\theta_1(x, t) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{\theta_{11}, \beta_1, \theta_{12}, \beta_2\} = \mathbf{N}_d^t \mathbf{u}_d \quad (2.5.22)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \quad N_2 = \frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi), \quad (2.5.23)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \quad N_4 = \frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi),$$

$$\xi = -1 + \frac{2x}{L} \quad (2.5.24)$$

其中 v_j 與 w_j ($j=1, 2$) 分別是 v 與 w 在節點 j 的節點值， v_j' 與 w_j' ($j=1, 2$) 則分別是 $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$ 與 $w' = \frac{\partial w}{\partial x}$ 在節點 j 之節點值。 θ_{1j} ($j=1, 2$) 是 θ_1 在節點 j 的節點值， β_j ($j=1, 2$) 則是 $\theta_{1,x} = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}$ 在節點 j 的節點值。 N_i ($i=1-4$) 為形狀函數 (shape function)， \mathbf{u}_b 、 \mathbf{u}_c 、 \mathbf{u}_d 皆為時間的函數。

將(2.5.19)至(2.5.21)式代入(2.5.18)式整理可得

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{L} (\mathbf{G}_a^t \mathbf{u}_a + \frac{1}{2} \mathbf{G}_b^t \mathbf{u}_b + \frac{1}{2} \mathbf{G}_c^t \mathbf{u}_c) \quad (2.5.25)$$

$$\mathbf{G}_a = \{-1, 1\} \quad (2.5.26)$$

$$\mathbf{G}_b = \{G_{b1}, G_{b2}, G_{b3}, G_{b4}\} = \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx \quad (2.5.27)$$

$$\mathbf{G}_c = \{G_{c1}, G_{c2}, G_{c3}, G_{c4}\} = \int \mathbf{N}'_c w_{,x} dx \quad (2.5.28)$$

$$\mathbf{u}_a = \{u_1, u_2\} \quad (2.5.29)$$

將(2.5.25)代入(2.5.9)整理可得

$$x_p = \mathbf{N}_a^t \mathbf{u}_a + x + \frac{x}{2L} (\mathbf{G}_b^t \mathbf{u}_b + \mathbf{G}_c^t \mathbf{u}_c) - \frac{1}{2} \int_0^x (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.5.30)$$

$$\mathbf{N}_a = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\} \quad (2.5.31)$$

2.6 Euler 梁的應變、速度、加速度

為了推導上的方便，本節中我們將先推導出梁的應變、速度與加速度以及梁的位置向量變分、應變的變分。

2.6.1 梁的應變

假如將(2.5.1)式中的 x 、 y 、 z 視為拉格蘭日座標 (Lagrange coordinates)，則 Green strains ε_{11} 、 ε_{12} 、 ε_{13} 可以表示成[29]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_1 - 1), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_2, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_3 \quad (2.6.1)$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \quad (2.6.2)$$

將(2.5.9)、(2.5.17)帶回(2.6.2)，可得 \mathbf{g}_i 的分量 g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 如下

$$g_{11} = 1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2} (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) + y(\theta_1 \theta_{2,x} + \theta_2 \theta_{1,x} - \theta_{3,x}) \quad (2.6.3)$$

$$\begin{aligned}
& + z(\theta_1\theta_{3,x} + \theta_3\theta_{1,x} + \theta_{2,x}) + \theta_{1,xx}\omega \\
g_{12} & = (1 + \varepsilon_o)\theta_3 - y(\theta_1\theta_{1,x} + \theta_3\theta_{3,x}) \\
& + z\left(\frac{1}{2}\theta_2\theta_{3,x} + \frac{1}{2}\theta_3\theta_{2,x} - \theta_{1,x}\right) + \theta_{1,xx}\theta_3\omega + \theta_{1,x}\theta_{3,x}\omega \\
g_{13} & = -(1 + \varepsilon_o)\theta_2 + y\left(\frac{1}{2}\theta_2\theta_{3,x} + \frac{1}{2}\theta_3\theta_{2,x} + \theta_{1,x}\right) \\
& - z(\theta_1\theta_{1,x} + \theta_2\theta_{2,x}) - \theta_{1,xx}\theta_2\omega - \theta_{1,x}\theta_{2,x}\omega \\
g_{21} & = \theta_1\theta_2 - \theta_3 + \theta_{1,x}\omega_{,y} \\
g_{22} & = 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_3^2) + \theta_{1,x}\theta_3\omega_{,y} \\
g_{23} & = \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 - \theta_{1,x}\theta_2\omega_{,y} \\
g_{31} & = \theta_1\theta_3 + \theta_2 + \theta_{1,x}\omega_{,z} \\
g_{32} & = -\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 + \theta_{1,x}\theta_3\omega_{,z} \\
g_{33} & = 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \theta_{1,x}\theta_2\omega_{,z}
\end{aligned}$$

將(2.6.2)式及(2.6.3)式代回(2.6.1)式，保留變形參數及其微分到二次項

可得：

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^1 + \varepsilon_{11}^2 \quad (2.6.4-a)$$

$$\varepsilon_{11}^1 = \varepsilon_o - yv_{,xx} - zw_{,xx} + \omega\theta_{1,xx}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^2 & = \frac{1}{2}\varepsilon_o^2 + \varepsilon_{o,x}(yv_{,x} + zw_{,x}) + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\theta_{1,x}^2 - y\theta_1w_{,xx} + z\theta_1v_{,xx} + \frac{1}{2}y^2v_{,xx}^2 \\
& + yzv_{,xx}w_{,xx} + \frac{1}{2}z^2w_{,xx}^2 + \omega\varepsilon_o\theta_{1,xx} - \theta_{1,xx}\omega(yv_{,xx} + zw_{,xx}) + \frac{1}{2}\omega^2\theta_{1,xx}^2
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{12}^2 \quad (2.6.4-b)$$

$$\varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,y} - z)\theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12}^2 = & \frac{1}{2}[\omega_{,y}\varepsilon_o\theta_{1,x} + (\omega - y\omega_{,y})\theta_{1,x}v_{,xx} - z\omega_{,y}\theta_{1,x}w_{,xx} + \omega\omega_{,y}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4}z(v_{,x}w_{,xx} - w_{,x}v_{,xx})\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}^1 + \varepsilon_{13}^2 \quad (2.6.4-c)$$

$$\varepsilon_{13}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,z} + y)\theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13}^2 = & \frac{1}{2}[\omega_{,z}\varepsilon_o\theta_{1,x} + (\omega - z\omega_{,z})\theta_{1,x}w_{,xx} - y\omega_{,z}\theta_{1,x}v_{,xx} + \omega\omega_{,z}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4}y(w_{,x}v_{,xx} - v_{,x}w_{,xx})\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_{1j}^k (j=1,2,3, k=1,2)$ 代表 ε_{1j}^k 中之 k 次項。

2.6.2 梁的速度與加速度：

因梁的位置向量是在旋轉元素座標上描述，所以 Q 點的絕對速度在當前元素座標的分量可表示成

$$\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} \quad (2.6.5)$$

$$\mathbf{v}_o = \Omega\{v_{o1}, v_{o2}, v_{o3}\} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_o \quad (2.6.6)$$

$$\mathbf{r}_o = \{r_{o1}, r_{o2}, r_{o3}\} = \mathbf{A}_{GE}^t \mathbf{r}_{oG} \quad (2.6.7)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{oG} = & \{R \cos \alpha \cos \gamma + X_o, R(-\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta) + Y_o, \\ & R(-\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta) + Z_o\} \quad (2.6.8)\end{aligned}$$

其中 \mathbf{v}_o 為 o 點的絕對速度， $\dot{\mathbf{r}}$ 為 Q 點對元素座標原點 o 的速度， \mathbf{r}_{oG} 及 \mathbf{r}_o 為元素座標原點 o 在總體座標的位置向量分別以總體座標及當前元素座標的分量表示式， R 為旋轉圓柱的半徑。

將(2.3.3)、(2.6.7)式代入(2.6.6)式可得：

$$\mathbf{v}_o = \Omega\{v_{o1}, v_{o2}, v_{o3}\} \quad (2.6.9)$$

$$v_{o1} = n_2 r_{o3} - n_3 r_{o2}$$

$$v_{o2} = n_3 r_{o1} - n_1 r_{o3}$$

$$v_{o3} = n_1 r_{o2} - n_2 r_{o1}$$

將(2.5.17)式對時間 t 微分，Q點對元素座標原點 o 的速度可表示成

$$\dot{\mathbf{r}} = \{\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{r}_3\} \quad (2.6.10)$$

$$\dot{r}_1 = \dot{x}_p + y(\dot{\theta}_2 \theta_1 + \theta_2 \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3) + z(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \theta_1 + \theta_3 \dot{\theta}_1) + \dot{\theta}_{1,x} \omega$$

$$\dot{r}_2 = \dot{y} + y(-\theta_1 \dot{\theta}_1 - \theta_3 \dot{\theta}_3) + z\left(\frac{1}{2} \dot{\theta}_2 \theta_3 + \frac{1}{2} \theta_2 \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1\right) + \dot{\theta}_{1,x} \theta_3 \omega + \theta_{1,x} \dot{\theta}_3 \omega$$

$$\dot{r}_3 = \dot{w} + y\left(\frac{1}{2} \dot{\theta}_2 \theta_3 + \frac{1}{2} \theta_2 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1\right) + z(-\theta_1 \dot{\theta}_1 - \theta_2 \dot{\theta}_2) - \dot{\theta}_{1,x} \theta_2 \omega - \theta_{1,x} \dot{\theta}_2 \omega$$

由(2.3.3)、(2.5.17)式，(2.6.5)式中之 $\Omega \times \mathbf{r}$ 可得

$$\Omega \times \mathbf{r} = \Omega\{v_{p1}, v_{p2}, v_{p3}\} \quad (2.6.11)$$

$$v_{p1} = n_2 r_3 - n_3 r_2$$

$$v_{p2} = n_3 r_1 - n_1 r_3$$

$$v_{p3} = n_1 r_2 - n_2 r_1$$

將(2.6.9)至(2.6.11)式代入(2.6.5)式，Q點的絕對速度分量可表示成

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \Omega \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} = \{v_1, v_2, v_3\} \quad (2.6.12)$$

$$v_1 = \Omega(n_2 r_{o3} - n_3 r_{o2}) + \Omega(n_2 r_3 - n_3 r_2) + \dot{r}_1$$

$$v_2 = \Omega(n_3 r_{o1} - n_1 r_{o3}) + \Omega(n_3 r_1 - n_1 r_3) + \dot{r}_2$$

$$v_3 = \Omega(n_1 r_{o2} - n_2 r_{o1}) + \Omega(n_1 r_2 - n_2 r_1) + \dot{r}_3$$

因梁的位置向量是在旋轉元素座標上描述，所以Q點的絕對加速度在

元素座標的分量可表示成

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = \mathbf{a}_o + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.6.13)$$

$$\mathbf{a}_o = \Omega^2 \{a_{o1}, a_{o2}, a_{o3}\} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_o) \quad (2.6.14)$$

其中 \mathbf{a}_o 為 o 點的絕對加速度， $\ddot{\mathbf{r}}$ 為 P 點對元素座標原點 o 的加速度，因為本研究僅考慮等角速度的旋轉，所以 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ 為零。

將(2.3.3)、(2.6.7)式代入(2.6.13)式之 $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_o)$ 可得

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_o) = \Omega^2 \{a_{o1}, a_{o2}, a_{o3}\} \quad (2.6.15)$$

$$a_{o1} = n_1 n_2 r_{o2} - (n_2^2 + n_3^2) r_{o1} + n_1 n_3 r_{o3}$$

$$a_{o2} = n_2 n_3 r_{o3} - (n_1^2 + n_3^2) r_{o2} + n_1 n_2 r_{o1}$$

$$a_{o3} = n_1 n_3 r_{o1} - (n_1^2 + n_2^2) r_{o3} + n_2 n_3 r_{o2}$$

將(2.3.3)、(2.5.17)式代入(2.6.13)式之 $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ 可得

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \Omega^2 \{a_{p1}, a_{p2}, a_{p3}\} \quad (2.6.16)$$

$$a_{p1} = n_1 n_2 r_2 - (n_2^2 + n_3^2) r_1 + n_1 n_3 r_3$$

$$a_{p2} = n_2 n_3 r_3 - (n_1^2 + n_3^2) r_2 + n_1 n_2 r_1$$

$$a_{p3} = n_1 n_3 r_1 - (n_1^2 + n_2^2) r_3 + n_2 n_3 r_2$$

將(2.3.3)、(2.6.10)式代入(2.6.13)式之 $\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ 可得

$$\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \Omega \{n_2 \dot{r}_3 - n_3 \dot{r}_2, n_3 \dot{r}_1 - n_1 \dot{r}_3, n_1 \dot{r}_2 - n_2 \dot{r}_1\} \quad (2.6.17)$$

將(2.6.10)式對時間 t 微分， Q 點對元素座標原點 o 的加速度可表示成

$$\ddot{\mathbf{r}} = \{\ddot{r}_1, \ddot{r}_2, \ddot{r}_3\} \quad (2.6.18)$$

$$\ddot{r}_1 = \ddot{x}_p + y(\ddot{\theta}_2\theta_1 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + \theta_2\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_3) + z(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3\theta_1 + 2\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 + \theta_3\ddot{\theta}_1) + \dot{\theta}_{1,x}\omega$$

$$\ddot{r}_2 = \ddot{v} + y(-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 - \theta_1\ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3\dot{\theta}_3 - \theta_3\ddot{\theta}_3) + z\left(\frac{1}{2}\ddot{\theta}_2\theta_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \frac{1}{2}\theta_2\ddot{\theta}_3 - \ddot{\theta}_1\right) + \ddot{\theta}_{1,x}\theta_3\omega + 2\dot{\theta}_{1,x}\dot{\theta}_3\omega + \theta_{1,x}\ddot{\theta}_3\omega$$

$$\ddot{r}_3 = \ddot{w} + y\left(\frac{1}{2}\ddot{\theta}_2\theta_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \frac{1}{2}\theta_2\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_1\right) + z(-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 - \theta_1\ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 - \theta_2\ddot{\theta}_2) - \ddot{\theta}_{1,x}\theta_2\omega - 2\dot{\theta}_{1,x}\dot{\theta}_2\omega + \theta_{1,x}\ddot{\theta}_2\omega$$

將(2.6.14)至(2.6.18)式代入(2.6.13)式，Q點的絕對加速度分量可表示成

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_o + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} = \{a_1, a_2, a_3\} \quad (2.6.19)$$

$$a_1 = \Omega^2[n_1n_2r_{o2} - (n_2^2 + n_3^2)r_{o1} + n_1n_3r_{o3}] + \Omega^2[n_1n_2r_2 - (n_2^2 + n_3^2)r_1 + n_1n_3r_3] + 2\Omega(n_2\dot{r}_3 - n_3\dot{r}_2) + \ddot{r}_1$$

$$a_2 = \Omega^2[n_2n_3r_{o3} - (n_1^2 + n_3^2)r_{o2} + n_1n_2r_{o1}] + \Omega^2[n_2n_3r_3 - (n_1^2 + n_3^2)r_2 + n_1n_2r_1] + 2\Omega(n_3\dot{r}_1 - n_1\dot{r}_3) + \ddot{r}_2$$

$$a_3 = \Omega^2[n_1n_3r_{o1} - (n_1^2 + n_2^2)r_{o3} + n_2n_3r_{o2}] + \Omega^2[n_1n_3r_1 - (n_1^2 + n_2^2)r_3 + n_2n_3r_2] + 2\Omega(n_1\dot{r}_2 - n_2\dot{r}_1) + \ddot{r}_3$$

2.6.3 梁的位置向量與應變的變分：

本文利用虛功原理及d'Alembert原理推導運動方程式，所以需要位置向量及應變的變分。由(2.5.17)及(2.5.30)式可得

$$\delta \mathbf{r} = \{\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3\} \quad (2.6.20)$$

$$\delta r_1 = \delta x_p + \delta\theta_1(z\theta_3 + y\theta_2) + \delta\theta_2(z + y\theta_1) + \delta\theta_3(-y + z\theta_1)$$

$$\begin{aligned}
& + \delta\theta_{1,x} \left(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2\right)\omega \\
\delta r_2 &= \delta v + \delta\theta_1(-z - y\theta_1) + \delta\theta_2\left(\frac{1}{2}z\theta_3\right) + \delta\theta_3\left(-y\theta_3 + \frac{1}{2}z\theta_2 + \omega\theta_{1,x}\right) \\
& + \delta\theta_{1,x}(\omega\theta_3) \\
\delta r_3 &= \delta w + \delta\theta_1(y - z\theta_1) + \delta\theta_2\left(\frac{1}{2}y\theta_3 - z\theta_2 - \omega\theta_{1,x}\right) + \delta\theta_3\left(\frac{1}{2}y\theta_2\right) \\
& + \delta\theta_{1,x}(\omega\theta_2)
\end{aligned}$$

其中

$$\delta x_p = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a + \frac{x}{L} (\delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{G}_c) - \int_0^x (v_{,x} \delta v_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) dx \quad (2.6.21)$$

由(2.6.4)及(2.5.25)式可以得到應變的變分

$$\delta \varepsilon_{11} = \delta \varepsilon_{11}^0 + \delta \varepsilon_{11}^1 \quad (2.6.22-a)$$

$$\delta \varepsilon_{11}^0 = \delta \varepsilon_o - y \delta v_{,xx} - z \delta w_{,xx} + \delta \theta_{1,xx} \omega$$

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon_{11}^1 &= \delta \varepsilon_o (\varepsilon_o + \omega \theta_{1,xx}) + \delta v_{,x} (y \varepsilon_{o,x}) \\
& + \delta v_{,xx} (y^2 v_{,xx} + y z w_{,xx} + z \theta_1 - y \omega \theta_{1,xx}) + \delta w_{,x} (z \varepsilon_{o,x}) \\
& + \delta w_{,xx} (y z v_{,xx} + z^2 w_{,xx} - y \theta_1 - z \omega \theta_{1,xx}) \\
& + \delta \theta_1 (z v_{,xx} - y w_{,xx}) + \delta \theta_{1,x} (y^2 + z^2) \theta_{1,x} \\
& + \delta \theta_{1,xx} (\omega \varepsilon_o - y \omega v_{,xx} - z \omega w_{,xx} + \omega^2 \theta_{1,xx})
\end{aligned}$$

$$\delta \varepsilon_{12} = \delta \varepsilon_{12}^0 + \delta \varepsilon_{12}^1 \quad (2.6.22-b)$$

$$\delta \varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{2} \delta \theta_{1,x} (\omega_{,y} - z)$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{12}^1 &= \delta\varepsilon_o \left(\frac{1}{2} \omega_{,y} \theta_{1,x} \right) + \delta w_{,x} \left(-\frac{1}{4} z v_{,xx} \right) \\
&+ \delta w_{,xx} \left[\frac{1}{4} z v_{,x} - \frac{1}{2} \omega_{,y} z \theta_{1,x} \right] + \delta v_{,x} \left(\frac{1}{4} z w_{,xx} \right) \\
&+ \delta v_{,xx} \left[\frac{1}{2} (\omega - y \omega_{,y}) \theta_{1,x} - \frac{1}{4} z w_{,x} \right] \\
&+ \delta \theta_{1,x} \left[\frac{1}{2} \omega_{,y} \varepsilon_c + \frac{1}{2} (\omega - y \omega_{,y}) v_{,xx} - \frac{1}{2} z \omega_{,y} w_{,xx} + \frac{1}{2} \omega \omega_{,y} \theta_{1,xx} \right] \\
&+ \delta \theta_{1,xx} \left(\frac{1}{2} \omega \omega_{,y} \theta_{1,x} \right)
\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{13} = \delta\varepsilon_{13}^0 + \delta\varepsilon_{13}^1 \quad (2.6.22-c)$$

$$\delta\varepsilon_{13}^0 = \frac{1}{2} \delta \theta_{1,x} (\omega_{,z} + y)$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{13}^1 &= \delta\varepsilon_o \left(\frac{1}{2} \omega_{,z} \theta_{1,x} \right) + \delta w_{,x} \left(\frac{1}{4} y v_{,xx} \right) \\
&+ \delta w_{,xx} \left[-\frac{1}{4} y v_{,x} + \frac{1}{2} (\omega - z \omega_{,z}) \theta_{1,x} \right] \\
&+ \delta v_{,x} \left(-\frac{1}{4} y w_{,xx} \right) + \delta v_{,xx} \left(-\frac{1}{2} y \omega_{,z} \theta_{1,x} + \frac{1}{4} y w_{,x} \right) \\
&+ \delta \theta_{1,x} \left[\frac{1}{2} \omega_{,z} \varepsilon_o + \frac{1}{2} (\omega - z \omega_{,z}) w_{,xx} - \frac{1}{2} y \omega_{,z} v_{,xx} + \frac{1}{2} \omega \omega_{,z} \theta_{1,xx} \right] \\
&+ \delta \theta_{1,xx} \left(\frac{1}{2} \omega \omega_{,z} \theta_{1,x} \right) + \delta v_{,x} \left(-\frac{1}{4} y w_{,xx} \right)
\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_o = \frac{1}{L} (\delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{G}_c) \quad (2.6.23)$$

2.7 元素節點內力之推導

本文將元素的節點內力 \mathbf{f} 視為作用元素節點的外力。本文利用虛功原理及 d'Alembert 原理在旋轉元素座標上推導元素節點內力。若在元素當前的變形位置給元素節點 j ($j=1,2$) 一個虛位移 $\delta\boldsymbol{\phi}_j = \{\delta\phi_{1j}, \delta\phi_{2j}, \delta\phi_{3j}\}$,

$\delta\mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}$, $\delta\boldsymbol{\beta} = \{\delta\beta_1, \delta\beta_2\}$, 則由虛功原理可知

$$\begin{aligned}
\delta W_{ext} &= \delta \mathbf{q}^t \mathbf{f} \\
&= \delta W_{int} = \int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV + \int_V \rho \delta \mathbf{r}^t \mathbf{a} dV \\
&= \delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta
\end{aligned} \tag{2.7.1}$$

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}, \sigma_{12} = 2G \varepsilon_{12}, \sigma_{13} = 2G \varepsilon_{13} \tag{2.7.2}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^D + \mathbf{f}^I = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{B}\} \tag{2.7.3}$$

$$\mathbf{f}_\theta = \mathbf{f}_\theta^D + \mathbf{f}_\theta^I = \{\mathbf{f}_1^\theta, \mathbf{m}_1^\theta, \mathbf{f}_2^\theta, \mathbf{m}_2^\theta, \mathbf{B}\} \tag{2.7.4}$$

$$\delta \mathbf{q} = \{\delta \mathbf{u}_1, \delta \phi_1, \delta \mathbf{u}_2, \delta \phi_2, \delta \beta\} \tag{2.7.5}$$

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \{\delta \mathbf{u}_1, \delta \theta_1^*, \delta \mathbf{u}_2, \delta \theta_2^*, \delta \beta\} \tag{2.7.6}$$

其中 δW_{ext} 為外力所作的虛功， δW_{int} 為內力所作的虛功，

$\delta_j^* = \{\delta \theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$ ， $\delta \mathbf{q}_\theta$ 為元素節點變形參數 \mathbf{q}_θ 受虛位移 $\delta \mathbf{q}$ 作用引起的變量， $\mathbf{f}_j = \{f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}\}$ 、 $\mathbf{f}_j^\theta = \{f_{1j}^\theta, f_{2j}^\theta, f_{3j}^\theta\}$ 、 $\mathbf{m}_j = \{m_{1j}, m_{2j}, m_{3j}\}$ 、 $\mathbf{m}_j^\theta = \{m_{1j}^\theta, m_{2j}^\theta, m_{3j}^\theta\}$ ($j = 1, 2$)、 $\mathbf{B} = \{B_1, B_2\}$ ， f_{ij} 、 f_{ij}^θ 為作用在元素節點 j ， x_i 方向的內力， m_{ij} 為作用在元素節點 j ，繞 x_i 軸的力矩、 m_{ij}^θ 為作用在元素節點 j 的廣義力矩之 x_i 分量， B_j 為作用在元素節點 j 的雙力矩(Bimoment)。

\mathbf{f} 、 \mathbf{f}_θ 為梁元素對應於虛位移 $\delta \mathbf{q}$ 、 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的廣義元素節點內力， \mathbf{f}^D 、 \mathbf{f}^I 為對應於 \mathbf{f} 的元素節點變形內力及元素節點慣性力， \mathbf{f}_θ^D 、 \mathbf{f}_θ^I 為對應於 \mathbf{f}_θ 的元素節點變形內力及元素節點慣性力， $\int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV$ 為應力所作的虛功， $\int_V \rho \delta \mathbf{r}^t \mathbf{a} dV$ 為慣性力所作的虛功， $\delta \varepsilon_{1j}$ ($j = 1, 2, 3$) 為梁元素對應於虛位移 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的虛應變， E 為楊氏係數， G 為剪力模數， ρ 為梁的密度， V 為梁元素未變形前的體積， \mathbf{a} 為梁元素的絕對加速度。本文中梁元素的應變、位置向量、速度、加速度都表示成節點變形參數 \mathbf{q}_θ 的函數，為了推導上的方便，本文中將內力所作的虛功先表示成等效節點力 \mathbf{f}_θ 對 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 所作的虛功，再由 $\delta \mathbf{q}$ 與 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的關係求得元素的節點內力 \mathbf{f} 與 \mathbf{f}_θ 的關係。

$\delta\mathbf{q}$ 與 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 的關係可以表示如下

$$\delta\mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi}\delta\mathbf{q} \quad (2.7.7)$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{T}_{b1} & \mathbf{T}_{a1} & -\mathbf{T}_{b1} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{T}_{b2} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{b2} & \mathbf{T}_{a2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.7.8)$$

$$\mathbf{T}_{bj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\theta_{2j}/L & 0 & 0 \\ -\theta_{3j}/L & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{aj} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_{3j}/2 & -\theta_{2j}/2 \\ -\theta_{3j} & 1+\varepsilon_0 & 0 \\ \theta_{2j} & 0 & 1+\varepsilon_0 \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2) \quad (2.7.9)$$

當元素較多時，(2.7.9)式中加底線的項會趨近於零，故可以忽略不計。

將(2.7.1)式代入(2.7.7)式可得

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta \quad (2.7.10)$$

由(2.7.1)及(2.7.2)式可以求得 \mathbf{f}_θ ，為了推導上的方便，本文將在下兩節中分別用應力所作的虛功 $\int_V (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\delta\varepsilon_{13})dV$ 及慣性力所作的虛功 $\int_V \rho\delta\mathbf{r}^t \mathbf{a}dV$ 推導 \mathbf{f}_θ 中等效元素節點變形內力 \mathbf{f}_θ^D 及等效元素節點慣性力 \mathbf{f}_θ^I 。

2.7.1 等效節點變形內力 \mathbf{f}_θ^D 的推導

由(2.7.1)、(2.7.2)、(2.7.6)、(2.5.20)–(2.5.23)式及(2.5.29)式可得

$$\delta\mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta^D = \delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^D + \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^D + \delta\mathbf{u}_c^t \mathbf{f}_c^D + \delta\mathbf{u}_d^t \mathbf{f}_d^D = \int_V (E\varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{11} + 4G\varepsilon_{12}\delta\varepsilon_{12} + 4G\varepsilon_{13}\delta\varepsilon_{13})dV$$

(2.7.11)

$$\mathbf{f}_a^D = \{f_{11}^{\theta D}, f_{12}^{\theta D}\}, \mathbf{f}_b^D = \{f_{21}^{\theta D}, m_{31}^{\theta D}, f_{22}^{\theta D}, m_{32}^{\theta D}\} \quad (2.7.12)$$

$$\mathbf{f}_c^D = \{f_{31}^{\theta D}, m_{21}^{\theta D}, f_{32}^{\theta D}, m_{22}^{\theta D}\}, \mathbf{f}_d^D = \{m_{11}^{\theta D}, B_1, m_{12}^{\theta D}, B_2\}$$

其中 \mathbf{f}_i^D ($i = a, b, c, d$) 為對應於 $\delta \mathbf{u}_i$ ($i = a, b, c, d$) 的廣義節點變形力向量，

$\delta \mathbf{u}_i$ 為(2.5.20)–(2.5.23)式及(2.5.29)式定義之 \mathbf{u}_i 的變分。 \mathbf{f}_i^D 可以由 \mathbf{f}_i^D

($i = a, b, c, d$) 組合而成。

將(2.6.4-a)式之 ε_{1j} 及(2.6.22-a)式之 $\delta \varepsilon_{1j}$ ($j = 1, 2, 3$) 代入(2.7.12)式，即可以

求得 \mathbf{f}_i^D ($i = a, b, c, d$)。因本文中 ε_{1j} 僅保留到變形參數到的二次項，所以

\mathbf{f}_i^D 亦僅保留到變形參數到的二次項，但文獻[28]提到 $\theta_{1,x}$ 的三次項不能忽

略，所以本文中亦將其保留。因本文採用共旋轉有限元素法，所以隨著元

素數目的增加， θ_i ($i = 1, 2, 3$) 都會趨近於零、 $\theta_{i,x}$ ($i = 1, 2, 3$) 都會趨近於一個

常數，文獻[29]中由數值例題發現當元素數目較多時可以將含 θ_i ($i = 1, 2, 3$) 的

項忽略，因此本文中將 \mathbf{f}_i^D 中含 θ_i ($i = 1, 2, 3$) 的項忽略。

廣義節點變形力向量 \mathbf{f}_i^D ($i = a, b, c, d$) 可表示如下

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a^D = & \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [AEL\varepsilon_o + \frac{3}{2} AEL\varepsilon_o^2 + \frac{1}{2} EI_p \int \theta_{1,x}^2 dx \\ & + \frac{1}{2} EI_y \int w_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2} EI_z \int v_{,xx}^2 dx + \frac{3}{2} EI_\omega \int \theta_{1,xx}^2 dx] \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

$$\mathbf{f}_b^D = EI_z (1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx + f_{12}^D \mathbf{G}_b + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx} w_{,xx} dx$$

$$\mathbf{f}_c^D = EI_y (1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_c'' w_{,xx} dx + f_{12}^D \mathbf{G}_c + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_c'' \theta_{1,xx} v_{,xx} dx$$

$$\mathbf{f}_d^D = (GJ + EI_p \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x} dx + EI_\omega (1 + 3\varepsilon_o) \int \mathbf{N}''_b \theta_{1,xx} dx \\ + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}''_d v_{,xx} w_{,xx} dx + \frac{1}{2} EK_I \int \mathbf{N}'_d \theta_{1,x}^3 dx$$

$$I_y = \int z^2 dA, \quad I_z = \int y^2 dA \quad (2.7.14)$$

$$I_\omega = \int \omega^2 dA, \quad \alpha_{\omega yz} = \int \omega yz dA, \quad I_p = I_y + I_z$$

$$J = \int \{(-z + \omega_y)^2 + (y + \omega_z)^2\} dA$$

$$K_I = \int (y^2 + z^2)^2 dA$$

2.7.2 等效節點慣性力 \mathbf{f}_θ^I 的推導

由(2.7.1)、(2.7.4)、(2.7.6)、(2.5.20)–(2.5.23)式及(2.5.29)式可得

$$\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta^I = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^I + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^I + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{f}_c^I + \delta \mathbf{u}_d^t \mathbf{f}_d^I = \int_V \rho \delta \mathbf{r}^t \mathbf{a} dV \quad (2.7.15)$$

$$\mathbf{f}_a^I = \{f_{11}^{\theta I}, f_{12}^{\theta I}\}, \quad \mathbf{f}_b^I = \{f_{21}^{\theta I}, m_{31}^{\theta I}, f_{22}^{\theta I}, m_{32}^{\theta I}\} \quad (2.7.16)$$

$$\mathbf{f}_c^I = \{f_{31}^{\theta I}, m_{21}^{\theta I}, f_{32}^{\theta I}, m_{22}^{\theta I}\}, \quad \mathbf{f}_d^I = \{m_{11}^{\theta I}, B_1^I, m_{12}^{\theta I}, B_2^I\}$$

其中 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$) 為對應於 $\delta \mathbf{u}_i$ ($i = a, b, c, d$) 的廣義節點慣性力向量，

$\delta \mathbf{u}_i$ 為(2.5.20)–(2.5.23)式及(2.5.29)式定義之 \mathbf{u}_i 的變分。 \mathbf{f}_θ^I 可以由 \mathbf{f}_i^I

($i = a, b, c, d$) 組合而成。

將(2.6.19)及(2.6.20)式，代入(2.7.15)式，即可以求得 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$)。

因本文中 $\delta \mathbf{r}$ 僅保留到變形參數到的一次項，絕對加速度 \mathbf{a} 中保留變形參數

對時間的微分到二次項，所以 \mathbf{f}_i^I 中亦僅保留變形參數到的一次項、變形參

數對時間的微分到二次項。因本文採用共旋轉有限元素法，所以隨著元素

數目的增加， $\theta_i (i=1, 2, 3)$ 都會趨近於零， $\theta_{i,x} (i=1, 2, 3)$ 都會趨近於一個常數，本文中曾嘗試忽略 \mathbf{f}_i^I 中含 $\theta_i (i=1, 2, 3)$ 的項，但發現會減慢旋轉梁之穩態解精度的收斂速率，因此本文中將 \mathbf{f}_i^I 中含 $\theta_i (i=1, 2, 3)$ 的項保留。

廣義節點慣性力向量 $\mathbf{f}_i^I (i = a, b, c, d)$ 可表示如下

(2.7.17)

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_a^I &= \Omega^2 \rho A \int \mathbf{N}_a a_{A01} dx + \Omega^2 \rho A \int \mathbf{N}_a [-(n_2^2 + n_3^2) (\mathbf{N}_a^t \mathbf{u}_a + \underline{x}) + n_1 n_2 v + n_1 n_3 w] dx \\
&\quad + \Omega^2 \rho \int \mathbf{G}_a (n_1 n_2 \frac{1}{L} I_z v_{,x} + \frac{1}{L} n_1 n_3 I_y w_{,x}) dx + 2\Omega \rho A \int (n_2 \mathbf{N}_a \dot{w} - n_3 \mathbf{N}_a \dot{v}) dx \\
&\quad + \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a dx + \rho A \int \mathbf{N}_a [\frac{x}{L} (\dot{\mathbf{G}}_b^t \dot{\mathbf{u}}_b + \dot{\mathbf{G}}_c^t \dot{\mathbf{u}}_c) - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{w}_{,x}^2 dx] dx \\
\mathbf{f}_b^I &= \Omega^2 \rho A a_{A02} \int \mathbf{N}_b dx \\
&\quad + \Omega^2 \rho \int \{ \mathbf{N}_b A [n_1 n_2 (\mathbf{N}_a^t \mathbf{u}_a + \underline{x}) - (n_3^2 + n_1^2) v + n_3 n_2 w] \\
&\quad + \mathbf{N}_b' [-n_1 n_2 I_z (1 - \varepsilon_o) + (n_1^2 - n_2^2) I_z (1 - \varepsilon_o)^2 v_{,x} + n_1 n_3 (I_y - I_z) (1 - \varepsilon_o) \theta_1 \\
&\quad - \frac{1}{2} n_3 n_2 I_p (1 - \varepsilon_o)^2 w_{,x}] \} dx \\
&\quad + 2\Omega \rho \int [\mathbf{N}_b A (n_3 \mathbf{N}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a - n_1 \dot{w}) + \mathbf{N}_b' (1 - \varepsilon_o) (-n_2 I_z \dot{\theta}_1 + \underline{n_3 I_\omega \theta_{1,x} \dot{\theta}_{1,x}})] dx \\
&\quad + \rho \int \{ \mathbf{N}_b A \ddot{v} + \mathbf{N}_b' [(1 - \varepsilon_o)^2 I_z (2 \dot{w}_{,x} \dot{\theta}_1 + \ddot{v}_{,x}) - \underline{2(1 - \varepsilon_o) I_z \dot{\varepsilon}_o \dot{v}_{,x}}] \} dx \\
\mathbf{f}_c^I &= \Omega^2 \rho A a_{A03} \int \mathbf{N}_c dx \\
&\quad + \Omega^2 \rho \int \{ \mathbf{N}_c A [n_1 n_3 \cdot (\mathbf{N}_a^t \mathbf{u}_a + \underline{x}) + n_2 n_3 v - (n_1^2 + n_2^2) w] \\
&\quad + \mathbf{N}_c' [-n_1 n_3 I_y (1 - \varepsilon_o) + (n_1^2 - n_3^2) I_y (1 - \varepsilon_o)^2 w_{,x} + n_1 n_2 (I_y - I_z) (1 - \varepsilon_o) \theta_1 \\
&\quad - \frac{1}{2} n_2 n_3 I_p (1 - \varepsilon_o)^2 v_{,x}] \} dx \\
&\quad + 2\Omega \rho \int [\mathbf{N}_c A (n_1 \dot{v} - n_2 \mathbf{N}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a) - \mathbf{N}_c' (1 - \varepsilon_o) (n_3 I_y \dot{\theta}_1 + \underline{n_2 I_\omega \theta_{1,x} \dot{\theta}_{1,x}})] dx \\
&\quad + \rho \int \{ \mathbf{N}_c A \ddot{w} - \mathbf{N}_c' [(1 - \varepsilon_o)^2 I_y (2 \dot{v}_{,x} \dot{\theta}_1 - \ddot{w}_{,x}) + \underline{2(1 - \varepsilon_o) I_y \dot{\varepsilon}_o \dot{w}_{,x}}] \} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_d^I = & \Omega^2 \rho \int \{n_2 n_3 (I_z - I_y) + \mathbf{N}_d \{ [n_1 n_3 (I_y - I_z) (1 - \varepsilon_o) v_{,x} + n_1 n_2 (I_y - I_z) (1 - \varepsilon_o) w_{,x} \\
& + (n_3^2 - n_2^2) (I_z - I_y) \theta_1] - \mathbf{N}'_d I_\omega (n_2^2 + n_3^2) \theta_{1,x} \} dx \\
& + 2\Omega \int \{ \mathbf{N}_d [n_2 I_z (1 - \varepsilon_o) \dot{v}_{,x} + n_3 I_y (1 - \varepsilon_o) \dot{w}_{,x}] \\
& - \mathbf{N}'_d (1 - \varepsilon_o) (-I_\omega n_2 \theta_{1,x} \dot{w}_{,x} + I_\omega n_3 \theta_{1,x} \dot{v}_{,x}) \} dx \\
& + \rho \int \{ \mathbf{N}_d [I_p \ddot{\theta}_1 + \underline{(1 - \varepsilon_o)^2 (I_y - I_z) \dot{w}_{,x} \dot{v}_{,x}}] \\
& + \mathbf{N}'_d [I_\omega \ddot{\theta}_{1,x} - \underline{(1 - \varepsilon_o)^2 \theta_{1,x} I_\omega (\dot{w}_{,x}^2 + \dot{v}_{,x}^2)}] \} dx
\end{aligned}$$

(2.7.17)式中加單底線的項為速度的耦合項，加雙底線的項為速度與變形的耦合項因本研究僅探討以旋轉梁之穩態變形為平衡點的線性振動，故速度的耦合項可以忽略不計，所以本研究在 \mathbf{f}_i^I 、 \mathbf{f}_θ^I 、 \mathbf{f}^I 中都僅保留變形參數及其對時間的微分到一次項，由(2.7.4)式、(2.7.8)-(2.7.10)式可以知道

$$\mathbf{f}^I \approx \mathbf{f}_\theta^I \quad (2.7.18)$$

本研究在以後的推導中都採用(2.7.18)式的近似式計算元素的慣性力。

2.8 元素剛度矩陣及慣性矩陣之推導

用基於牛頓法之增量迭代法求穩態解時，在平衡迭代過程中需要先求得梁元素切線剛度矩陣。

在求以穩態為平衡點的線性振動的自然頻率時，需先求得元素的慣性矩陣，在本節中將推導之元素的剛度矩陣及各種慣性矩陣。

依元素切線剛度矩陣的定義及(2.7.13)式，元素切線剛度矩陣 \mathbf{k} 可以表示成[28]、[29]

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}_\theta} \frac{\partial \mathbf{q}_\theta}{\partial \mathbf{q}} = [\mathbf{k}_\theta + (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{k}_\theta^0 + \mathbf{H}_D] \mathbf{T}_{\theta\phi} \quad (2.8.1)$$

$$\mathbf{k}_\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^D}{\partial \mathbf{q}_\theta} \quad (2.8.2)$$

$$\mathbf{H}_D = \left. \frac{\partial (\mathbf{T}_{\theta\theta}^t \mathbf{f}_\theta^D)}{\partial \mathbf{q}_\theta} \right|_{\mathbf{f}_\theta^p} \quad (2.8.3)$$

其中 \mathbf{k}_θ^0 為 \mathbf{k}_θ 的零次項， \mathbf{H}_D 為一非對稱矩陣，並可表示成

$$\mathbf{H}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{h}_{b1} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_{b2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{h}_{b1}^t & \mathbf{h}_{a1} & -\mathbf{h}_{b1}^t & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{h}_{b1} & \mathbf{0} & -\mathbf{h}_{b2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{h}_{b2}^t & \mathbf{0} & -\mathbf{h}_{b2}^t & \mathbf{h}_{a2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \quad (2.8.4)$$

$$\mathbf{h}_{bj} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} m_{2j}^{D\theta} & -\frac{1}{L} m_{3j}^{D\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{aj} = \begin{bmatrix} 0 & m_{3j}^{D\theta} & -m_{2j}^{D\theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m_{1j}^{D\theta} \\ 0 & -\frac{1}{2} m_{1j}^{D\theta} & 0 \end{bmatrix}, \quad (j=1, 2) \quad (2.8.5)$$

其中 $\mathbf{0}_2$ 、 $\mathbf{0}$ 和 $\bar{\mathbf{0}}$ 為 2×2 、 3×3 及 3×2 的矩陣。

由(2.8.1)-(2.8.5)式可知元素切線剛度矩陣 \mathbf{k} 為一非對稱矩陣，文獻[31]提到在平衡位置時， \mathbf{k} 為一對稱矩陣，但本研究由數值結果發現在平衡位置時，數值上， \mathbf{k} 仍稍微不對稱，本研究由數值結果發現這會影響其自然頻率的收斂，所以本文中取 $(\mathbf{k} + \mathbf{k}^t)/2$ 使其成為對稱矩陣。

剛度矩陣 \mathbf{k}_θ 可以由以下的子矩陣 \mathbf{k}_{ij} ($i = a, b, c, d, j = a, b, c, d$) 用直接剛度法組合而成

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_j} \quad (2.8.6)$$

其中 \mathbf{f}_i ($i = a, b, c, d$) 已在(2.7.13)式定義， \mathbf{u}_j ($j = a, b, c, d$) 已在(2.5.20)–(2.5.23)式及(2.5.29)式定義。

\mathbf{k}_{ij} 為一對稱矩陣，並可表示成

$$\mathbf{k}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^D}{\partial \mathbf{u}_a} = \frac{AE}{L} \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t (1 + 3\varepsilon_o) \quad (2.8.7)$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^D}{\partial \mathbf{u}_b} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [AE(1 + 3\varepsilon_o) \mathbf{G}_b^t + EI_z \int \mathbf{N}_b''^t v_{,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^D}{\partial \mathbf{u}_c} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [AE(1 + 3\varepsilon_o) \mathbf{G}_c^t + EI_y \int \mathbf{N}_c''^t w_{,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^D}{\partial \mathbf{u}_d} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [EI_p \int \mathbf{N}_d'^t \theta_{1,x} dx + 3EI_\omega \int \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^D}{\partial \mathbf{u}_b} = f_{12}^D \int \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b'^t dx + EI_z (1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t dx$$

$$\mathbf{k}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^D}{\partial \mathbf{u}_c} = 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t \theta_{1,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^D}{\partial \mathbf{u}_d} = 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^D}{\partial \mathbf{u}_c} = f_{12}^D \int \mathbf{N}_c' \mathbf{N}_c'^t dx + EI_y (1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c''^t dx$$

$$\mathbf{k}_{cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^D}{\partial \mathbf{u}_d} = 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d''^t v_{,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^D}{\partial \mathbf{u}_d} = (GJ + EI_p \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}'_d{}^t dx + EI_\omega (1 + 3\varepsilon_o) \int \mathbf{N}''_b \mathbf{N}''_b{}^t dx + \frac{3}{2} EK_I \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}'_d{}^t \theta_{1,x}^2 dx$$

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{k}_{ji}^t$$

其中加底線之項在元素較多時，會趨近於零，故可忽略， $\theta_{1,x}$ 、 $\theta_{1,xx}$ 、 $v_{,xx}$ 、 $w_{,xx}$ 在元素較多時會趨近於一個常數，所以本文中將其保留。

由(2.7.17)式可以知道元素慣性力 $\mathbf{f}^I \approx \mathbf{f}_\theta^I$ 與元素節點位移、速度及加速度有關，對應於 $\delta \mathbf{q}$ 、 $\delta \dot{\mathbf{q}}$ 及 $\delta \ddot{\mathbf{q}}$ 之慣性力的改變量 $\delta \mathbf{f}^I$ 可以表示成

$$\delta \mathbf{f}^I = \Omega^2 \mathbf{k}_\Omega \delta \mathbf{q} + \Omega \mathbf{c} \delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{m} \delta \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.8.8)$$

其中 \mathbf{k}_Ω 為元素向心力剛度矩陣(centripetal stiffness matrix)， \mathbf{m} 為元素質量矩陣(mass matrix)， \mathbf{c} 為元素陀螺矩陣(gyroscopic matrix)。

因本文中慣性力中僅保留到變形參數及其對時間微分的一次項，所以 \mathbf{k}_Ω 、 \mathbf{c} 、 \mathbf{m} 都僅保留到變形參數的零次項，故本文採用以下的近似式

$$\mathbf{k}_\Omega = \frac{\partial \mathbf{f}^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{q}} \approx \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{q}_\theta} \quad (2.8.9)$$

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{f}^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{q}}} \approx \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{q}}_\theta} \quad (2.8.10)$$

$$\mathbf{m} = \frac{\partial \mathbf{f}^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \approx \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\theta} \quad (2.8.11)$$

元素向心力剛度矩陣 \mathbf{k}_Ω 可以由子矩陣 $\mathbf{k}_{\Omega ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_j}$ ($i, j = a, b, c, d$) 組

合而成， $\mathbf{k}_{\Omega ij}$ 的顯式可表示如下

$$\mathbf{k}_{\Omega aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_a} = -(n_2^2 + n_3^2) \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \quad (2.8.12)$$

$$\mathbf{k}_{\Omega ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_b} = n_1 n_2 \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_b^t dx + n_1 n_2 \frac{1}{L} \rho I_z \int \mathbf{G}_a \mathbf{N}_b^{tt} dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_c} = n_1 n_3 \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_c^t dx + n_1 n_3 \frac{1}{L} \rho I_y \int \mathbf{G}_a \mathbf{N}_c^{tt} dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{k}_{\Omega bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_b} = -(n_3^2 + n_1^2) \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^t dx + (n_1^2 - n_2^2) \rho I_z (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_b{}^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_c} = n_3 n_2 \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_c^t dx - \frac{1}{2} n_3 n_2 \rho I_p (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_c{}^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_d} = n_1 n_3 \rho (I_y - I_z) (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_d{}^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_c} = -(n_1^2 + n_2^2) \rho A \int \mathbf{N}_c \mathbf{N}_c^t dx + (n_1^2 - n_3^2) \rho I_y (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}'_c{}^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_d} = n_1 n_2 \rho (I_y - I_z) (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}'_d{}^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_d} = (n_3^2 - n_2^2) \rho (I_z - I_y) \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_d^t dx - (n_2^2 + n_3^2) \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}'_d{}^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega ij} = \mathbf{k}_{\Omega ji}^t$$

元素陀螺矩陣 \mathbf{c} 可以由子矩陣 $\mathbf{c}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_j}$ ($i, j = a, b, c, d$) 組合而成， \mathbf{c}_{ij}

的顯式可表示如下

$$\mathbf{c}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_a} = \mathbf{0} \quad (2.8.13)$$

$$\mathbf{c}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_b} = -2n_3 \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_b^t dx$$

$$\mathbf{c}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_c} = 2n_2 \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_c^t dx$$

$$\mathbf{c}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_b} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_c} = -2n_1 \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_c^t dx$$

$$\mathbf{c}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_d} = -2n_2 \rho I_z (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_d{}^t dx + \underline{2n_3 \rho I_\omega (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_d{}^t \theta_{1,x} dx}$$

$$\mathbf{c}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_c} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_d} = -2n_3 \rho I_y (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}'_d{}^t dx - \underline{2n_2 \rho I_\omega (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}'_d{}^t \theta_{1,x} dx}$$

$$\mathbf{c}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{ij} = -\mathbf{c}_{ji}^t$$

(2.8.13)式中加單底線的項為變形的一次項，本文在計算時將其忽略不計。

元素質量矩陣 \mathbf{m} 可以由子矩陣 $\mathbf{m}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_j}$ ($i, j = a, b, c, d$) 組合而成， \mathbf{m}_{ij}

的顯式可表示如下

$$\mathbf{m}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_a} = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \quad (2.8.14)$$

$$\mathbf{m}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_c} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^t dx + \rho I_z (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_b{}^t dx$$

$$\mathbf{m}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_c} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_c} = \rho A \int \mathbf{N}_c \mathbf{N}_c^t dx + \rho I_y (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}'_c{}^t dx$$

$$\mathbf{m}_{cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \rho I_p \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_d^t dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}'_d{}^t dx$$

$$\mathbf{m}_{ij} = \mathbf{m}_{ji}^t$$

其中 \mathbf{f}_i^I ($i = a - d$) 已在(2.7.17)式中定義。

2.9 系統的運動方程式

旋轉梁系統的運動方程式可表示成

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{F}^D(\bar{\mathbf{Q}}) + \mathbf{F}^I(\Omega, \bar{\mathbf{Q}}, \dot{\bar{\mathbf{Q}}}, \ddot{\bar{\mathbf{Q}}}) = \mathbf{0} \quad (2.9.1)$$

其中 $\boldsymbol{\psi}$ 為系統不平衡力(unbalanced force)， \mathbf{F}^D 和 \mathbf{F}^I 為系統節點變形力及慣性力， Ω 為旋轉梁的轉速， $\bar{\mathbf{Q}}$ 、 $\dot{\bar{\mathbf{Q}}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t}$ 和 $\ddot{\bar{\mathbf{Q}}} = \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t^2}$ 為在時間為 t 時系統的節點位移、速度和加速度。 \mathbf{F}^D 和 \mathbf{F}^I 可以由(2.7.10)、(2.7.13)及(2.7.17)式求得元素的節點變形力 \mathbf{f}^D 及慣性力 \mathbf{f}^I ，再將其從當前的元素座標轉換到總體座標後組合而成。

令 \mathbf{Q}_s 表示旋轉梁在轉速為 Ω 時的穩態節點位移，因 $\dot{\mathbf{Q}}_s = \ddot{\mathbf{Q}}_s = 0$ ，所以由(2.9.1)式，旋轉梁系統的穩態平衡方程式可表示成

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{Q}_s) = \mathbf{F}_s^D + \Omega^2 \mathbf{F}_{sref}^I = \mathbf{0} \quad (2.9.2)$$

其中 $\mathbf{F}_s^D = \mathbf{F}^D(\mathbf{Q}_s)$ 為對應於穩態變形 \mathbf{Q}_s 的系統節點變形力，可以由(2.7.13)式之元素節點變形力從元素座標轉換到總體座標後組合而成， $\Omega^2 \mathbf{F}_{sref}^I = \mathbf{F}^I(\Omega, \mathbf{Q}_s, \dot{\mathbf{Q}}_s, \ddot{\mathbf{Q}}_s)$ 為對應於穩態變形 \mathbf{Q}_s 的系統節點慣性力，由(2.7.17)式去掉速度及加速度項可以求得對應於穩態變形 \mathbf{Q}_s 的元素節點慣性力 \mathbf{f}^I ，再將其從元素座標轉換到總體座標後組合而成。(2.9.2)式為一非線性方程式，本文以基於牛頓法的增量迭代法求出在不同轉速 Ω 下的穩態解，詳細的數值方法及程序將在第三章中說明。

令 $\mathbf{Q}_d = \mathbf{Q}_d(t)$ 表示以 \mathbf{Q}_s 為平衡點的微小振動，將 $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_d + \mathbf{Q}_s$ 代入(2.9.2)式，用泰勒級數在 $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_s$ 展開，取到一次項，則旋轉梁微小振動的運動方程式可表示成

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}}_d + \Omega\mathbf{C}\dot{\mathbf{Q}}_d + (\mathbf{K} + \Omega^2\mathbf{K}_\Omega)\mathbf{Q}_d = \mathbf{0} \quad (2.9.3)$$

其中 \mathbf{M} 為系統的質量矩陣， \mathbf{C} 為系統的陀螺矩陣 (gyroscopic matrix)， \mathbf{K}

和 \mathbf{K}_Ω 為系統的切線剛度矩陣及向心力剛度矩陣(centripetal stiffness matrix)。 \mathbf{K} 、 \mathbf{K}_Ω 、 \mathbf{C} 、及 \mathbf{M} 可以由(2.8.1)、(2.8.10)- (2.8.12)之 \mathbf{k} 、 \mathbf{k}_Ω 、 \mathbf{c} 、 \mathbf{m} 從元素座標轉換到總體座標後組合而成。

若振動方程式(2.9.3)式存在自然振動頻率，則其解的形式可以表示如下

$$\mathbf{Q}_d = (\mathbf{Q}_R + i\mathbf{Q}_I)e^{i\lambda t} \quad (2.9.4)$$

其中 i 為虛數 $\sqrt{-1}$ ， λ 為自然頻率， \mathbf{Q}_R 與 \mathbf{Q}_I 為對應於 λ 振態的實部與虛部。

將(2.9.4)式代入(2.9.3)式，並由實部和虛部分別為零，可得一個 λ 的二次特徵值問題

$$\mathbf{H}\Theta = \mathbf{0} \quad (2.9.5)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\lambda, \Omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \Omega^2\mathbf{K}_\Omega - \lambda^2\mathbf{M} & \lambda\Omega\mathbf{C}^t \\ \lambda\Omega\mathbf{C} & \mathbf{K} + \Omega^2\mathbf{K}_\Omega - \lambda^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (2.9.6)$$

$$\Theta = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_R \\ \mathbf{Q}_I \end{Bmatrix} \quad (2.9.7)$$

其中 \mathbf{H} 為一對稱矩陣。

因(2.9.5)式為一齊次方程式(homogeneous equation)，所以僅有當 \mathbf{H} 的行列式值 $\det|\mathbf{H}|=0$ ，才有非零解，在固定轉速 $\Omega \neq 0$ 時，本文採用二分法解出滿足 $\det|\mathbf{H}|=0$ 的 λ ，當轉速 $\Omega = 0$ 時，(2.9.5)式將退化成一廣義特徵值問題，本文採用子空間法(subspace method)求其特徵值 λ 及特徵向量 Θ ，詳細的數值方法及程序將在第三章中說明。

2.10 無因次化

為了計算及討論上的方便，我們將2.7節至2.9節中的元素節點內力、剛度矩陣、慣性矩陣、統御方程式及相關的方程式無因次化。

本文中採用以下的無因次變數：

$$X = x/L_T, \tau = \frac{1}{L_T} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t, k^2 = \frac{\rho \Omega^2 L_T^2}{E}, K^2 = \frac{\rho \lambda^2 L_T^2}{E} \quad (2.10.1)$$

$$r = R/L_T, \bar{L} = \frac{L}{L_T}, U = u/L_T, U' = \frac{dU}{dX} = \frac{du}{dx} = u',$$

$$U'' = \frac{d^2 U}{dX^2} = L_T \frac{d^2 u}{dx^2} = L_T u'', V = v/L_T, V' = \frac{dV}{dX} = \frac{dv}{dx} = v',$$

$$V'' = \frac{d^2 V}{dX^2} = L_T \frac{d^2 v}{dx^2} = L_T v'', W = w/L_T, W' = \frac{dW}{dX} = \frac{dw}{dx} = w',$$

$$W'' = \frac{d^2 W}{dX^2} = L_T \frac{d^2 w}{dx^2} = L_T w'', \Theta_1 = \theta_1, \Theta_1' = \frac{d\Theta_1}{dX} = L_T \frac{d\theta_1}{dx} = L_T \theta_1',$$

$$\dot{U} = \frac{dU}{d\tau} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \dot{u}, \ddot{U} = \frac{d^2 U}{d\tau^2} = L_T \frac{\rho}{E} \frac{d^2 u}{dt^2} = L_T \frac{\rho}{E} \ddot{u}$$

$$\dot{V} = \frac{dV}{d\tau} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \dot{v}, \ddot{V} = \frac{d^2 V}{d\tau^2} = L_T \frac{\rho}{E} \frac{d^2 v}{dt^2} = L_T \frac{\rho}{E} \ddot{v}$$

$$\dot{W} = \frac{dW}{d\tau} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{dw}{dt} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \dot{w}, \ddot{W} = \frac{d^2 W}{d\tau^2} = L_T \frac{\rho}{E} \frac{d^2 w}{dt^2} = L_T \frac{\rho}{E} \ddot{w}$$

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{d\Theta_1}{d\tau} = L_T \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{d\theta_1}{dt} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \dot{\theta}_1, \ddot{\Theta}_1 = \frac{d^2 \Theta_1}{d\tau^2} = L_T^2 \frac{\rho}{E} \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = L_T^2 \frac{\rho}{E} \ddot{\theta}_1$$

$$U_j = u_j/L_T, V_j = v_j/L_T, W_j = w_j/L_T, \Theta_{1j} = \theta_{1j}$$

$$U_j' = u_j', V_j' = v_j', W_j' = w_j', \Theta_{1j}' = L_T \theta_{1j}'$$

$$U_j'' = L_T u_j'', V_j'' = L_T v_j'', W_j'' = L_T w_j'', \Theta_{1j}'' = L_T^2 \theta_{1j}''$$

$$\bar{f}_{ij} = \frac{f_{ij}}{AE}, \bar{f}_{ij}^D = \frac{f_{ij}^D}{AE}, \bar{f}_{ij}^I = \frac{f_{ij}^I}{AE}, \bar{m}_{ij} = \frac{m_{ij}}{AEL_T}, \bar{m}_{ij}^D = \frac{m_{ij}^D}{AEL_T}, \bar{m}_{ij}^I = \frac{m_{ij}^I}{AEL_T},$$

$$\bar{G} = \frac{G}{E}, \quad \bar{B}_j = \frac{B_j}{AEL_T^2}, \quad \bar{B}_j^D = \frac{B_j^D}{AEL_T^2}, \quad \bar{B}_j^I = \frac{B_j^I}{AEL_T^2}$$

$$\bar{I}_y = \frac{I_y}{AL_T^2}, \quad \bar{I}_z = \frac{I_z}{AL_T^2}, \quad \bar{I}_p = \frac{I_p}{AL_T^2} = \frac{I_y}{AL_T^2} + \frac{I_z}{AL_T^2}, \quad \bar{J} = \frac{J}{AL_T^2}, \quad \bar{I}_\omega = \frac{I_\omega}{AL_T^4}$$

$$\bar{\alpha}_{\omega yz} = \frac{\alpha_{\omega yz}}{AL_T^4}, \quad \bar{K}_I = \frac{K_I}{AL_T^4}, \quad n_z^2 = \frac{1}{\bar{I}_y}, \quad n_y^2 = \frac{1}{\bar{I}_z}$$

其中 k 為無因次轉速， K 為無因次自然頻率， n_y 為梁在 x_1x_2 平面的細長比， n_z 為梁在 x_1x_3 平面的細長比。 $i=1,2,3$ 代表元素座標軸 x_i 的三個方向， $j=1,2$ 代表梁元素兩端的節點 j ， L_T 為梁的總長度。

若 $(\bar{\quad})$ 為對應於變數 (\quad) 之無因次化變數，本文採用 $(\quad)' = \frac{d}{dx}(\quad)$ 、

$$(\bar{\quad})' = \frac{d}{dx}(\bar{\quad}) = (\bar{\quad})_{,x}, \quad (\dot{\quad}) = \frac{d}{dt}(\quad), \quad (\ddot{\quad}) = \frac{d}{dt}(\dot{\quad})$$

將(2.10.1)式代入(2.7.13)、(2.7.17)式，去掉慣性力之非線性項後，可得元素無因次節點力

$$\bar{\mathbf{f}}_a = \bar{\mathbf{f}}_a^D + \bar{\mathbf{f}}_a^I$$

(2.10.2)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_a^D &= \begin{Bmatrix} \bar{f}_{11}^D \\ \bar{f}_{12}^D \end{Bmatrix} = \varepsilon_o \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{3}{2} \varepsilon_o^2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2L} \bar{I}_p \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int \Theta_{1,X}^2 dX \\ &\quad + \frac{1}{2L} \bar{I}_y \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int W_{1,XX}^2 dX + \frac{1}{2L} \bar{I}_z \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int V_{1,XX}^2 dX + \frac{3}{2L} \bar{I}_\omega \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int \Theta_{1,XX}^2 dX \\ \bar{\mathbf{f}}_a^I &= \frac{k^2}{L_T} a_{A01} \int \mathbf{N}_a dX + k^2 \int \mathbf{N}_a [-(n_2^2 + n_3^2)(\mathbf{N}_a^t \mathbf{U}_a + X) + n_1 n_2 V + n_1 n_3 W] dX \\ &\quad + n_1 n_2 \frac{1}{L} k^2 \bar{I}_z \mathbf{G}_a \int V_{,X} dX + n_1 n_3 \frac{1}{L} k^2 \bar{I}_y \mathbf{G}_a \int W_{,X} dX \\ &\quad + 2k \int (n_2 \mathbf{N}_a \dot{W} - n_3 \mathbf{N}_a \dot{V}) dX + \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{U}}_a dX \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_b = \bar{\mathbf{f}}_b^D + \bar{\mathbf{f}}_b^I$$

$$\bar{\mathbf{f}}_b^D = \bar{I}_z(1 + \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{b,XX} V_{,XX} dX + \bar{f}_{12}^D \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} V_{,X} dX + 3\bar{\alpha}_{\omega yz} \int \bar{\mathbf{N}}_{b,XX} W_{,XX} \Theta_{1,XX} dX$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_b^I &= \frac{k^2}{L_T} a_{A02} \int \bar{\mathbf{N}}_b dX + k^2 \int \bar{\mathbf{N}}_b [n_1 n_2 (\mathbf{N}_a^t \mathbf{U}_a + X) - (n_3^2 + n_1^2) V + n_3 n_2 W] dX \\ &+ k^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} [-n_1 n_2 \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o) + (n_1^2 - n_2^2) \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o)^2 V_{,X} \\ &+ n_1 n_3 (\bar{I}_y - \bar{I}_z) (1 - \varepsilon_o) \Theta_1 - \frac{1}{2} n_2 n_3 \bar{I}_p (1 - \varepsilon_o)^2 W_{,X}] dX \\ &+ 2k \int \bar{\mathbf{N}}_b (n_3 \mathbf{N}_a^t \dot{\mathbf{U}}_a - n_1 \dot{W}) dx - 2k \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o) n_2 \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \dot{\Theta}_1 dX \\ &+ \int \bar{\mathbf{N}}_b \ddot{V} dX + \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o)^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \ddot{V}_{,X} dX \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_c = \bar{\mathbf{f}}_c^D + \bar{\mathbf{f}}_c^I$$

$$\bar{\mathbf{f}}_c^D = \bar{I}_y(1 + \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{c,XX} W_{,XX} dX + \bar{f}_{12}^D \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} W_{,X} dX + 3\bar{\alpha}_{\omega yz} \int \bar{\mathbf{N}}_{c,XX} V_{,XX} \Theta_{1,XX} dX$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_c^I &= \frac{k^2}{L_T} a_{A03} \int \bar{\mathbf{N}}_c dX + k^2 \int \bar{\mathbf{N}}_c [n_1 n_3 (\mathbf{N}_a^t \mathbf{U}_a + X) + n_2 n_3 V - (n_1^2 + n_2^2) W] dX \\ &+ k^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} [-n_1 n_3 \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o) + (n_1^2 - n_3^2) \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o)^2 W_{,X} \\ &+ n_1 n_2 (\bar{I}_y - \bar{I}_z) (1 - \varepsilon_o) \Theta_1 - \frac{1}{2} n_2 n_3 \bar{I}_p (1 - \varepsilon_o)^2 V_{,X}] dX \\ &+ 2k \int \bar{\mathbf{N}}_c (n_1 \dot{V} - n_2 \mathbf{N}_a^t \dot{\mathbf{U}}_a) dx - 2k \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o) n_3 \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \dot{\Theta}_1 dX \\ &+ \int \bar{\mathbf{N}}_c \ddot{W} dX - \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o)^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \ddot{W}_{,X} dX \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_d = \bar{\mathbf{f}}_d^D + \bar{\mathbf{f}}_d^I$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_d^D &= (\bar{G}\bar{J} + \varepsilon_o \bar{I}_p) \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \Theta_{1,X} dX + \bar{I}_\omega (1 + 3\varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{d,XX} \Theta_{1,XX} dX \\ &+ 3\bar{\alpha}_{\omega yz} \int \bar{\mathbf{N}}_{d,XX} V_{,XX} W_{,XX} dX + \frac{1}{2} \bar{K}_I \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \Theta_{1,X}^3 dX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{f}}_d^I &= k^2 \int \bar{\mathbf{N}}_d [n_1 n_3 (\bar{I}_y - \bar{I}_z) (1 - \varepsilon_o) V_{,X} + n_1 n_2 (\bar{I}_y - \bar{I}_z) (1 - \varepsilon_o) W_{,X} \\
&\quad + (n_3^2 - n_2^2) (\bar{I}_z - \bar{I}_y) \theta_1 + n_2 n_3 (\bar{I}_z - \bar{I}_y)] dX \\
&\quad - k^2 (n_2^2 + n_3^2) \bar{I}_\omega \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \Theta_{1,X} dX \\
&\quad + 2k \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o) n_2 \int \bar{\mathbf{N}}_d \dot{V}_{,X} dX + 2k \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o) n_3 \int \bar{\mathbf{N}}_d \dot{W}_{,X} dX \\
&\quad + 2k \bar{I}_\omega (1 - \varepsilon_o) n_2 \int \bar{\mathbf{N}}'_{d,X} \Theta_{1,X} \dot{W}_{,X} dX - 2k \bar{I}_\omega (1 - \varepsilon_o) n_3 \int \bar{\mathbf{N}}'_{d,X} \Theta_{1,X} \dot{V}_{,X} dX \\
&\quad + \bar{I}_p \int \bar{\mathbf{N}}_d \ddot{\Theta}_1 dX + \bar{I}_\omega \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \ddot{\Theta}_{1,X} dX
\end{aligned}$$

其中 $\bar{\mathbf{N}}_i$ ($i = b, c, d$) 為無因次形狀函數，將(2.5.23)式之 \mathbf{N}_i 中的 L 用 \bar{L} 取代，即可得到 $\bar{\mathbf{N}}_i$ 。

將(2.10.1)式代入(2.8.7)、(2.8.12)至(2.8.14)式，即可得以下之元素無因次化剛度矩陣 $\bar{\mathbf{k}}_{ij}$ 、向心力矩陣 $\bar{\mathbf{k}}_{\Omega ij}$ 、陀螺矩陣 $\bar{\mathbf{c}}_{ij}$ 以及質量矩陣 $\bar{\mathbf{m}}_{ij}$ 。

元素無因次化剛度矩陣 $\bar{\mathbf{k}}_{ij}$ ($i, j = a, b, c, d$):

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{k}}_{aa} &= \frac{1}{\bar{L}} \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t (1 + 3\varepsilon_o) \\
\bar{\mathbf{k}}_{ab} &= \frac{1}{\bar{L}} \mathbf{G}_a [(1 + 3\varepsilon_o) \mathbf{G}_b^t + \bar{I}_z \int \bar{\mathbf{N}}'_{b,XX} V_{,XX} dX] \\
\bar{\mathbf{k}}_{ac} &= \frac{1}{\bar{L}} \mathbf{G}_a [(1 + 3\varepsilon_o) \mathbf{G}_c^t + \bar{I}_y \int \bar{\mathbf{N}}'_{c,XX} W_{,XX} dX] \\
\bar{\mathbf{k}}_{ad} &= \frac{1}{\bar{L}} \mathbf{G}_a [\bar{I}_p \int \bar{\mathbf{N}}'_{d,XX} \Theta_{1,X} dX + 3\bar{I}_\omega \int \bar{\mathbf{N}}'_{d,XX} \Theta_{1,XX} dX] \\
\bar{\mathbf{k}}_{bb} &= \bar{f}_{12}^D \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \bar{\mathbf{N}}_{b,X}^t dX + \bar{I}_z (1 + \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{b,XX} \bar{\mathbf{N}}_{b,XX}^t dX \\
\bar{\mathbf{k}}_{bc} &= 3\bar{\alpha}_{\omega yz} \int \Theta_{1,XX} \bar{\mathbf{N}}_{b,XX} \bar{\mathbf{N}}_{c,XX} dX \\
\bar{\mathbf{k}}_{bd} &= 3\bar{\alpha}_{\omega yz} \int W_{,XX} \bar{\mathbf{N}}_{b,XX} \bar{\mathbf{N}}_{d,XX} dX \\
\bar{\mathbf{k}}_{cc} &= \bar{I}_y (1 + \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{c,XX} \bar{\mathbf{N}}_{c,XX}^t dX + \bar{f}_{12}^D \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \bar{\mathbf{N}}_{c,X}^t dX \\
\bar{\mathbf{k}}_{cd} &= 3\bar{\alpha}_{\omega yz} \int V_{,XX} \bar{\mathbf{N}}_{c,XX} \bar{\mathbf{N}}_{d,XX}^t dX
\end{aligned} \tag{2.10.3}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{k}}_{dd} &= (\bar{G}\bar{J} + \varepsilon_o\bar{I}_p)\int \bar{\mathbf{N}}_{d,X}\bar{\mathbf{N}}_{d,X}^t dX + \bar{I}_\omega(1 + 3\varepsilon_o)\int \bar{\mathbf{N}}_{b,XX}\bar{\mathbf{N}}_{d,XX}^t dX \\ &\quad + \frac{3}{2}\bar{K}_I\int \bar{\mathbf{N}}_{d,X}\bar{\mathbf{N}}_{d,X}^t\Theta_{1,x}^2 dx\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{ij} = \bar{\mathbf{k}}_{ji}^t$$

元素無因次化向心力矩陣 $\bar{\mathbf{k}}_{\Omega ij}$ ($i, j = a, b, c, d$):

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega aa} = -(n_2^2 + n_3^2)\int \mathbf{N}_a\mathbf{N}_a^t dX \quad (2.10.4)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega ab} = n_1n_2\int \mathbf{N}_a\bar{\mathbf{N}}_b^t dX + n_1n_2\frac{1}{L}\bar{I}_z\int \mathbf{G}_a\bar{\mathbf{N}}_{b,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega ac} = n_1n_3\int \mathbf{N}_a\bar{\mathbf{N}}_c^t dX + n_1n_3\frac{1}{L}\bar{I}_y\int \mathbf{G}_a\bar{\mathbf{N}}_{c,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega ad} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega bb} = -(n_3^2 + n_1^2)\int \bar{\mathbf{N}}_b\bar{\mathbf{N}}_b^t dX + (n_1^2 - n_2^2)\bar{I}_z(1 - \varepsilon_o)^2\int \bar{\mathbf{N}}_{b,X}\bar{\mathbf{N}}_{b,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega bc} = n_3n_2\int \bar{\mathbf{N}}_b\bar{\mathbf{N}}_c^t dX - \frac{1}{2}n_3n_2\bar{I}_p(1 - \varepsilon_o)^2\int \bar{\mathbf{N}}_{b,X}\bar{\mathbf{N}}_{c,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega bd} = n_1n_3(\bar{I}_y - \bar{I}_z)(1 - \varepsilon_o)\int \bar{\mathbf{N}}_{b,X}\bar{\mathbf{N}}_d^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega cc} = -(n_1^2 + n_2^2)\int \bar{\mathbf{N}}_c\bar{\mathbf{N}}_c^t dX + (n_1^2 - n_3^2)\bar{I}_y(1 - \varepsilon_o)^2\int \bar{\mathbf{N}}_{c,X}\bar{\mathbf{N}}_{c,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega cd} = n_1n_2(\bar{I}_y - \bar{I}_z)(1 - \varepsilon_o)\int \bar{\mathbf{N}}_{c,X}\bar{\mathbf{N}}_d^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega dd} = (n_3^2 - n_2^2)(\bar{I}_z - \bar{I}_y)\int \bar{\mathbf{N}}_d\bar{\mathbf{N}}_d^t dX - (n_2^2 + n_3^2)\bar{I}_\omega\int \bar{\mathbf{N}}_{d,X}\bar{\mathbf{N}}_{d,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega ij} = \bar{\mathbf{k}}_{\Omega ji}^t$$

元素無因次化陀螺矩陣 $\bar{\mathbf{c}}_{ij}$ ($i, j = a, b, c, d$):

$$\bar{\mathbf{c}}_{aa} = \mathbf{0} \quad (2.10.5)$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{ab} = -2n_3\int \mathbf{N}_a\bar{\mathbf{N}}_b^t dX$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{ac} = 2n_2 \int \mathbf{N}_a \bar{\mathbf{N}}_c^t dX$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{ad} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{bb} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{bc} = -2n_1 \int \bar{\mathbf{N}}_b \bar{\mathbf{N}}_c^t dX$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{bd} = -2n_2 \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \bar{\mathbf{N}}_d^t dX + \underline{2n_3 \bar{I}_\omega (1 - \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \bar{\mathbf{N}}_{d,X}^t \Theta_{1,x} dX}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{cc} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{cd} = -2n_3 \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \bar{\mathbf{N}}_d^t dX - \underline{2n_2 \bar{I}_\omega (1 - \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \bar{\mathbf{N}}_{d,X}^t \Theta_{1,x} dX}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{dd} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{ij} = -\bar{\mathbf{c}}_{ji}^t$$

元素無因次化質量矩陣 $\bar{\mathbf{m}}_{ij}$ ($i, j = a, b, c, d$):

$$\bar{\mathbf{m}}_{aa} = \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dX$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{ab} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{ac} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{ad} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{bb} = \int \bar{\mathbf{N}}_b \bar{\mathbf{N}}_b^t dX + \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o)^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \bar{\mathbf{N}}_{b,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{bc} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{bd} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{cc} = \int \bar{\mathbf{N}}_c \bar{\mathbf{N}}_c^t dX + \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o)^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \bar{\mathbf{N}}_{c,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{cd} = \mathbf{0}$$

(2.10.6)



$$\bar{\mathbf{m}}_{dd} = \bar{I}_p \int \bar{\mathbf{N}}_d \bar{\mathbf{N}}_d^t dX + \bar{I}_\omega \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \bar{\mathbf{N}}_{d,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{ij} = \bar{\mathbf{m}}_{ji}^t$$

將無因次變數、元素節點內力、剛度矩陣、慣性矩陣帶入 2.9 節中的統御方程式及相關的方程式中即可將其無因次化。



第三章 數值方法及程序

本章將數值計算的方法及程序分作穩態解及振動頻率分析兩個部份，本章中考慮具有任意設定角 β 、傾斜角 α 與預錐角 γ 之旋轉尤拉梁。

旋轉梁一般在彈性範圍內使用，大部分的工程材料的降伏應變 $\varepsilon_y \ll 1$ 。因為當傾斜角 α 或預錐角 γ 不為零時，旋轉梁會產生側向的穩態位移，本文將限制旋轉梁的最大轉速，使其最大應變儘量不超過0.01。若不考慮側向變形對慣性力的影響，旋轉傾斜梁之穩態解造成的最大膜應變(membrane strain)及撓曲應變(flexural strain)都發生在旋轉梁的根部，並可表示成(詳細推導在附錄 C)

$$\varepsilon_{0\max} = k^2 \left(r \cos \alpha \cos \gamma + \frac{1}{2} \cos^2 \gamma \right) \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{b\max} = -\frac{n_y^2 k^2 c_2}{L_T} \left[\frac{1}{2} r (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta) + \frac{1}{3} \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma \right] \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{c\max} = -\frac{n_z^2 k^2 c_3}{L_T} \left[\frac{1}{2} r (\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta) + \frac{1}{3} \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma \right] \quad (3.3)$$

其中 c_2 、 c_3 為斷面上的點和 x_3^S 、 x_2^S 軸的最大距離，其它(3.1)至(3.3)中的無因次化的變數，均已在(2.10)節中定義。

旋轉傾斜梁之穩態解造成的最大應變為(3.1)、(3.2)與(3.3)式的和，故其最大應變與 k^2 成正比，由(3.1)至(3.3)式可以估算旋轉梁運轉時的最大允許轉速，但因(3.1)至(3.3)式為線性解，故分析時仍需要檢查非線性解的最大應變。

3.1 穩態解

為了簡潔，在不造成混淆的情況下，本節中將(2.9.2)式之下標 S 及上標 D 省略，再令 $\mathbf{P} = \Omega^2 \mathbf{F}_{sref}^I$ ，則旋轉梁系統的穩態平衡方程式可改寫成

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{F} + k^2 \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

其中 \mathbf{P} 稱為參考負荷， k 稱為負荷參數。

本文以基於牛頓法的增量迭代法解非線性代數方程式(3.1)式，求得在不同無因次轉速 k 下，旋轉梁的節點位移向量 \mathbf{Q} 。

3.1.1 增量迭代數值計算方法

本文中將選定之最大負荷參數，即最大無因次轉速 k_{max} 等分成數個增量負荷參數 Δk ，若第 I 個增量的平衡位置為已知，即其位移向量為 \mathbf{Q}_I 、負荷參數為 k_I 為已知，則對應於第 $I+1$ 個增量之負荷參數 $k = k_I + \Delta k$ 的初始增量位移向量 $\Delta \mathbf{Q}$ ，可利用尤拉預測值(Euler predictor)[31]求得

$$\Delta \mathbf{Q} = -(2k_I + \Delta k) \Delta k \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{K}_T = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_I} \quad (3.6)$$

其中 $\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \Omega^2 \mathbf{K}_\Omega$ 為第 I 個增量的平衡位置之系統切線剛度矩陣， \mathbf{K} 和 \mathbf{K}_Ω 為系統的剛度矩陣及向心力剛度矩陣。

由 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_I + \Delta \mathbf{Q}$ 可求得每個元素當前的元素座標及節點變形位移，將其代入(2.7.13)及(2.7.17)式，可算出元素的節點變形力及慣性力，將元素的節點力轉換到

總體座標，可組合得到(3.4)式之不平衡力 ϕ ，再依牛頓法，可得位移修正量如下：

$$\delta Q = -K_T^{-1} \phi \quad (3.7)$$

其中 ϕ 為不平衡力， K_T 為當前的系統切線剛度矩陣。

將求得的位移修正量 δQ ，加入上次迭代之 Q 中，可得新的節點位移向量，再進行下一次迭代，此過程一直重複至(3.4)式中的不平衡力滿足斂準則為止。本文以不平衡力 ϕ 的 weighted Euclidean norm 做為平衡迭代時的誤差度量，所使用的收斂準則為

$$e_\phi = \frac{\|\phi\|}{k^2 \sqrt{N} \|\mathbf{P}\|} \quad (3.8)$$

其中 $\|\cdot\|$ 為 \cdot 的歐幾里德範數(Euclidean norm)， N 為方程式的數目， e_ϕ 為一設定的容許誤差，本文中取 $e_\phi = 10^{-7}$ 。

3.1.2 數值程序

本文所使用的增量迭代法之數值之數值程序可以分成三個部分：

1. 輸入與計算開始分析所需要的資料
 - (a) 輸入結構資料及給定外力負荷參數的最大值。
 - (b) 給定增量數、最大迭代數及收斂時的容許誤差。
 - (c) 計算增量負荷參數、負荷參數、
 - (d) 用(3.6)式計算系統切線剛度 $K_T = K + \Omega^2 K_\Omega$ 、參考負荷 \mathbf{P} 。
2. 使用迭代法求在已知負荷參數的收斂解
 - (a) 利用(3.8)式求初始增量位移向量 ΔQ 。

- (b) 將前一個平衡位置的節點位移向量 \mathbf{Q}_I 加上 $\Delta\mathbf{Q}$ 得到 \mathbf{Q} 。
- (c) 由 \mathbf{Q} 中萃取元素之節點位移，計算出當前的元素座標及元素的節點力，再計算(3.7)式之不平衡力 ϕ 。
- (d) 檢查(3.11)式的收斂準則，若滿足則進行(e)；若不滿足，檢查迭代次數，若迭代次數小於給定之最大迭代次數，則利用(3.10)式求得位移修正向量 $\delta\mathbf{Q}$ ，將當前的節點位移向量 \mathbf{Q} 加上 $\delta\mathbf{Q}$ 得到一個新的 \mathbf{Q} ，再回 2(c)進行迭代；若迭代次數大於最大迭代次數則停止迭代並印出迭代相關資料。
- (e) 檢查增量次數是否大於最大增量次數，若滿足，則完成增量迭代步驟；若不滿足，則進行步驟 3。

3.計算下一次增量所需要的資料

- (a) 計算(3.9)式中的切線剛度及參考負荷。
- (b) 計算下一次增量的負荷參數。
- (c) 回到 2 執行迭代工作。

3.2 振動分析

本節將說明求旋轉梁自然頻率及振動模態的計算程序。本文先用本文採用子空間法(subspace method)[32]，求出當無因次轉速 $k=0$ 時的無因次自然頻率 K 及特徵向量 \mathbf{Q} ，將由 3.1 節之增量迭代法求得對應於無因次轉速 k 的穩態解代入(2.9.6)式中，再以二分法(bisection method)[33]解(2.9.5)式。

(2.9.5)式之 $\mathbf{H}(K)$ 可分解成 $\mathbf{H}(K)=\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^t$ ，其中 \mathbf{L} 為下三角矩陣， \mathbf{D} 為對角線矩陣。

令

$$D(K) = \det|\mathbf{H}(K)| = 0 \quad (3.9)$$

其中 $D(K)$ 為 $\mathbf{H}(K)$ 的行列式值，其值為 \mathbf{D} 矩陣之對角線元素的乘積。

若 K_B 滿足 $D(K_B) = 0$ ，則 K_B 為旋轉梁之一無因次自然頻率。由於 \mathbf{H} 的維數隨著元素數目的增加而變大，為了避免其行列式的數值過大，所以本文中將 $D(K)$ 做以下的標準化(normalization)處理：

$$\bar{D}(K) = \frac{D(K)}{D(K_0)} \quad (3.10)$$

其中 K_0 為一參考值。

若 $K_L < K_B < K_R$ ，其中 K_B 為一無因次自然振動頻率，則 $N_L < N_R$ ，其中 N_L 、 N_R 分別為 $\mathbf{D}(K_L)$ 、 $\mathbf{D}(K_R)$ 中負的對角線元素的個數。如已知 K_R 及 K_L ，則可由二分法求得 K_B 。

本文解(3.9)式所採用的計算程序如下：

設定需要的自然頻率的數目，先用子空間法(subspace method)求出當無因次轉速 $k = 0$ 時的無因次自然頻率 K 及特徵向量 \mathbf{Q} 。若第 I 個增量的穩態平衡位置已求出，即其位移向量為 \mathbf{Q}_I 、負荷參數 k_I 為已知，先以前一個無因次轉速 k_{I-1} 得到之無因次自然頻率為參考值，設定無因次自然頻率的起始值 K_0 及增量 ΔK ，計算 $\mathbf{D}(K_0)$ 中負的對角線元素的數目 N_0 。

(A)

(1) 令 $K_n = K_0 + (n-1)\Delta K$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)，由 K_n 、 k_I 、 K 及 \mathbf{Q}_I 計算 $\mathbf{D}(K_n)$ ，

一直到相鄰兩個 $\mathbf{D}(K_n)$ 中，負的對角線元素的數目不一樣。

(2) 令 $K_L = K_{n-1}$ ， $K_R = K_n$ ，其中下標 L 及 R 分別代表根的左邊極限及右邊極限。

(3) 以二分法取 $K_B = \frac{K_L + K_R}{2}$ ，並重新計算 $\mathbf{D}(K_B)$ ，及其負的對角線元素的數目 N_B 。

(4) 若 $N_B = N_0$ ，取 $K_L = K_B$ ；若 $N_B > N_0$ ，取 $K_R = K_B$ 。

(5) 若 $\frac{K_R - K_L}{K_B} < e_{tol}$ ，且 $\bar{D}(K_B) < e_{tol2}$ ，則取 K_B 為(3.12)式之解，繼續進行步驟(B)求振態，否則回到步驟(3)。

其中 e_1 、 e_2 為設定之容許誤差，本文中取 $e_1 = 10^{-9}$ ， $e_2 = 10^{-9}$ 。

(B)

(1) 將 $\mathbf{H}(K_B)$ 分解成 $\mathbf{H}(K_B) = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^t$ 。

(2) 找出對角線矩陣 \mathbf{D} 中元素之絕對值有最小值的行，令該行為第 k 行。

(3) 令振態之第 k 個分量的值為 1，再將(2.8.5)式改寫成

$$\begin{bmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{1,k-1} & 0 & H_{1,k+1} & \cdots & H_{1,2N} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ H_{k-1,1} & & & 0 & & & H_{k-1,2N} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ H_{k+1,1} & & & 0 & & & H_{k+1,2N} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ H_{2N,1} & & & 0 & & & H_{2N,2N} \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_{k-1} \\ \Theta_k \\ \Theta_{k+1} \\ \vdots \\ \Theta_{2N} \end{Bmatrix}_{2N \times 1} = \begin{Bmatrix} -H_{1,k} \\ \vdots \\ -H_{k-1,k} \\ 1 \\ -H_{k+1,k} \\ \vdots \\ -H_{N,k} \end{Bmatrix}_{2N \times 1} \quad (3.11)$$

(4) 利用高斯消去法求解(3.11)式得到振態 Θ 。

(5)將 Θ 除以其分量中絕對值最大的分量 Θ_{\max} ，即

$$\bar{\Theta} = \frac{\Theta}{\Theta_{\max}} \quad (3.12)$$

(6)以步驟(A)求得之 K_B 及前一個無因次轉速 k_{l-1} 得到之無因次自然頻率為參值，設定無因次自然頻率的起始值 K_0 及增量 ΔK ，回到步驟(A)繼續求下一個自然頻率及振動模態。



第四章 數值例題之結果與討論

本章將分析不同斷面、細長比、無因次轉軸半徑 r 、傾斜角 α 、設定角 β 及預錐角 γ 的三維尤拉梁在不同的無因次轉速 k 下之穩態解、無因次自然頻率 K 及振態。本章中並將比較本文的結果與文獻上的結果以說明本文方法的正確性與有效性。本文的結果皆考慮抑制翹曲(Warping restraint)對自然頻率的影響。本章所考慮的斷面如圖七所示之橢圓斷面、矩形斷面、I 型斷面及十字斷面，各種斷面之斷面常數列於附錄 B 中。梁的長度 L_T 與斷面高度比，在橢圓斷面及矩形斷面指的是 L_T/a ；I 型斷面上指的是 L_T/d_{nom} ，其中 d_{nom} 為 I 型斷面的名義上的(nominal)高度，如 $W10 \times 100$ 的 d_{nom} 為 10 in ；十字斷面 $d \times b \times t$ 中指的是 L_T/d ，其中 d 為真正的高度 d 。在橢圓斷面及矩形斷面中 a/b 為梁斷面的高度與寬度比。

本章的參數中， $n_y = \sqrt{AL^2/I_z}$ 為附錄 A 中斷面主軸 y 方向的細長比， $n_z = \sqrt{AL^2/I_y}$ 為 z 方向的細長比，因本文中總體座標系統 X_i^G 、梁斷面座標系統 x_i^S 及元素座標系統 x_i ($i=1,2,3$) 的座標軸方向，在梁未變形時，都是相同的， y 方向為 X_2^G 的座標軸方向， z 方向為 X_3^G 的座標軸方向，所以 n_y 及 n_z 分別為梁在 $X_1^G - X_2^G$ 及 $X_1^G - X_3^G$ 平面的細長比。 K_i ($i=1,2,3\dots$) 為第 i 個無因次自然頻率， U 為在 X_1^G 方向之無因次軸向位移， V 、 W 為在 X_2^G 及 X_3^G 方向之無因次側向位移， Θ_1 為 X_1^G 方向之軸向扭轉角((2.10.1)式)。當無因次轉速 $k=0$ 時，無因次振動頻率 K 僅與梁斷面以及細長比有關且其軸向和側向及扭轉的振態不互相耦合；當 $k \neq 0$ 時由(2.3.3)-(2.3.6)、(2.6.7)、(2.6.8)、(2.6.15)、(2.7.17)式可知旋轉梁之穩態變形的形態會受無因次轉軸半徑 r 、傾斜角 α 、設定角 β 及預錐角 γ 的影響，本章中將對應於不同 r 、 α 、 β 、 γ 的穩態解型態列於表一中，由表一可以發現當 $r=0$ 時， α 對穩態變形沒有影響；當 $\beta \neq 0^\circ$ 或 90°

及 $\gamma \neq 0^\circ$ 時，各種型態的穩態解都存在。

本章中將旋轉梁的自然頻率依其在轉速為零時的振態分為(I=1, 2, 3, 4)四類：

I=1 - 轉速為零時，軸向振動

I=2 - 轉速為零時，在斷面主軸 $y(X_2^G)$ 方向的側向振動

I=3 - 轉速為零時，在斷面主軸 $z(X_3^G)$ 方向的側向振動

I=4 - 轉速為零時，扭轉振動

當轉速不為零時，各種振動會耦合在一起，I (I=1, 2, 3, 4) 代表該振動中第 I 類的振動有最大的分量。本文中的振動模態圖皆以轉速為零時的振態 I=1, 2, 3, 4 表示。

本文中假設穩態解的應變 $\varepsilon \ll 1$ ，為確保梁的應變在合理範圍內，本文中將穩態解的允許最大應變定為 10^{-2} 。本文將限制旋轉梁的最大無因次轉速 k ，使其最大膜應變(membrane strain) $\varepsilon_{0\max}$ 及兩個側方向的最大撓曲應變(flexural strain) $\varepsilon_{b\max}$ 、 $\varepsilon_{c\max}$ 的和儘量不超過 10^{-2} 。由附錄 C 可知旋轉梁的最大膜應變和最大撓曲應變為 k 、 α 、 β 、 γ 、 r 、 \bar{I}_y 、 \bar{I}_z 的函數，所以具不同 α 、 β 、 γ 、 r 以及斷面的旋轉梁有不同的最大無因次轉速 k 。

為了探討穩態變形對旋轉梁之自然頻率的影響，並與[19]的結果比較，本章中考慮了以下 3 種情況：

A：考慮穩態變形及保留了(2.7.17)式中所有的項。

B：不考慮穩態變形，穩態分析時僅考慮(2.7.17)式含 虛底線之項。

C：穩態分析時除了將 B 中第一個含虛底線項 $\Omega^2 \rho A \int \mathbf{N}_a a_{A01} dx$ 改成 $\Omega^2 \rho A \times \cos \gamma \int \mathbf{N}_a a_{A01} dx$ 外與 B 相同。振動分析時不考慮對應於科氏力的陀螺矩陣((2.8.13)式)。

因[19]沒有考慮科氏力且使用了錯誤的軸向離心力，即使用了相當於 C 中的軸向離心力。為了與[19]的結果比較，所以本章中考慮了情況 C。本章中 AN、BN、CN 分別表示情況 A、B、C，使用 N 個元素的結果。

4.1 個案分析

本節中將探討具不同無因次轉軸半徑 r 、傾斜角 α 、設定角 β 、預錐角 γ 之三維旋轉尤拉梁在不同斷面、不同無因次轉速 k 之下的穩態解、無因次振動頻率 K 及振態。

本節中首先分析文獻[19]的例題，本文的分析使用橢圓斷面；接著本文分析文獻[23,24]的例題，其斷面為矩形斷面。本節中將使用的各種斷面梁的細長比列於表二。

4.1.1 橢圓斷面旋轉梁的穩態變形及自然頻率

表三至表五為橢圓斷面 $a/b=10$ 、 $L_T/a=50$ 、 $r=1$ 、 $k=0.005$ 、設定角 $\beta=0^\circ$ 、 45° 、 90° 、預錐角 $\gamma=0^\circ$ 、 30° 、 60° 及不同元素數目 N 的穩態解及自然頻率，表中 ε_0 為穩態解之最大膜應變， ε_b 及 ε_c 為 y 及 z 兩方向之最大撓曲應變， U_{tip} 為在 X_1^G 方向之無因次端點軸向位移， V_{tip} 、 W_{tip} 為在 X_2^G 及 X_3^G 方向之無因次端點側向位移， $\Theta_1(1)$ 為梁自由端上的扭轉角， $\Theta_1'(0.1)$ 為梁在 0.1 個長度位置的扭轉率， $K_i (i=1\sim 7)$ 為前七個無因次自然頻率。由表三至表五中可以發現 C10 的結果與文獻[19]的結果非常接近，這是可預期的，因情況 C 與文獻[19]用了相同錯誤的離心力。在 $\gamma=0^\circ$ 時，A20、A50、B10 及 C10 的自然頻率很接近，這也是可預期的，因 $\gamma=0^\circ$ 時，穩態解僅有軸向變形，各種情況的離心力幾乎相同。而當 γ 增加時，各種情況之穩態解跟 $I=2, 3$ 之自然頻率的差距也增加，這應是離心力的影響。表三至表四中 A20 及 A50 之結果的差距在 γ 增加時也跟著增加，當 $\beta=90^\circ$ 、 $\gamma=60^\circ$ 時，A20 無法收斂，故表五中使用 A50 及 A80，由表五中可發現兩者的答案接近。由表三可知在 $\beta=0^\circ$ 、 $\gamma=60^\circ$ 時，A20 及 A50 都發生了發散不穩定(divergence instability)的情形，而 B10 及 C10 都還沒發生，這可能是因為 B10 及 C10 沒有考慮側向位移及軸向的拉伸變形。

圖八至圖十三為橢圓斷面 $a/b=10$ 、 $L_T/a=50$ 、 $r=1$ ，分別在設定角

$\beta = 0^\circ$ 、 45° 、 90° 及不同預錐角不同轉速下的第一自然頻率曲線圖與第二自然頻率曲線圖，圖中可發現 $\beta = 0^\circ$ 、 45° 、 90° 之曲線在 $k = 0$ 時有共同的起點。由圖八可知在 $\beta = 0^\circ$ 、 $\gamma = 0^\circ$ 時， K_1 隨著轉速增加而增加；在 $\gamma = 30^\circ$ 時，頻率 K_1 曲線變得平緩；在 $\gamma = 45^\circ$ 時，轉速增加到 $k = 0.004785$ 時 $K_1 \approx 0$ ；在 $\gamma = 60^\circ$ 時，轉速增加到 $k = 0.00389$ 時 $K_1 \approx 0$ 。由圖九可知在 $\beta = 0^\circ$ 、 $\gamma = 0^\circ$ 時， K_2 隨著轉速增加而增加；在 $\gamma = 30^\circ$ 時，自然頻率 K_2 曲線變得平緩；在 $\gamma = 45^\circ$ 時，自然頻率 K_2 曲線變得有下滑的傾向。從圖九可以發現在 $\beta = 0^\circ$ 時，當 γ 越大，曲線的斜率就越小。由圖十與圖十二得知在 $\beta = 45^\circ$ 、 90° 時， K_1 都隨著轉速增加而增加，且當同一轉速下， γ 越大則 K_1 越小。從圖十一可以發現在 $\beta = 45^\circ$ 時，當 γ 越大， K_2 就越快從 $I = 2$ 轉為 $I = 4$ ，且當同一轉速下， γ 越大則 K_2 越小。由圖十三可知在 $\beta = 90^\circ$ 、 $\gamma = 0^\circ$ 時， K_2 隨著轉速增加而增加；在 $\gamma = 30^\circ$ 時， K_2 隨著轉速增加到 $k = 0.00225$ 而增加，但轉速再增加， K_2 會從 $I = 2$ 轉為 $I = 4$ ，且隨著轉速增加而減少；在 $\gamma = 45^\circ$ 時， K_2 隨著轉速增加到 $k = 0.00175$ 而增加，但轉速再增加， K_2 會從 $I = 2$ 轉為 $I = 4$ ，且隨著轉速增加而減少；在 $\gamma = 60^\circ$ 時， K_2 隨著轉速增加到 $k = 0.0015$ 而增加，但轉速再增加， K_2 會從 $I = 2$ 轉為 $I = 4$ ，且隨著轉速增加而減少。從圖十三可以發現在 $\beta = 90^\circ$ 時，當 γ 越大， K_2 就越快從 $I = 2$ 轉為 $I = 4$ ，且當同一轉速下， γ 越大則 K_2 越小。

圖十四至圖十六為橢圓斷面 $a/b = 10$ 、 $L_T/a = 50$ 、 $r = 1$ ，在不同預錐角不同轉速下的位移分布圖。由圖十四可知在 $\beta = 0^\circ$ 時，旋轉梁僅有一個側向位移 W ，從圖十四可以發現位移隨著轉速及 γ 增加而增加。由圖十五可知在 $\beta = 45^\circ$ 時，旋轉梁有兩個側向位移，從圖十五可以發現位移隨著 γ 增加而增加及大細長比產生的側向位移 V 大於小細長比產生的側向位移 W 。由圖十六可知在 $\beta = 90^\circ$ 時，旋轉梁僅有一個側向位移 V ，從圖十六可以發現位移隨著轉速及 γ 增加而增加。

4.1.2 矩形斷面旋轉梁的穩態變形及自然頻率

表六至表八為考慮矩形斷面 $a/b = 0.05$ 、 $L_T/a = 60$ ，在不同無因次轉速、不同設定角、不同預錐角及不同元素數目 N 的穩態解及自然頻率，其中文獻[23,24]的結果分為 a、b、c 三種情況，a 為幾何非線性取到二次項，b 為幾何非線性取到三次項，c 為實驗結果。在文獻[23,24]中當 $\gamma = 0^\circ$ 、 22.5° 、 45° 時，分別使用無因次轉軸半徑 $r = 0.6667$ 、 0.6587 、 0.636 。由表六可得知當 $k = 0$ 、 $\beta = 0^\circ$ 、 $\gamma = 0^\circ$ 時，本文的結果 A20 中 $I = 3$ 的頻率與 a、b 的結果相近， $I = 4$ 的頻率則稍微大於 a、b 的結果；當 $\beta = 30^\circ$ 、 $\gamma = 0^\circ$ 時，在不同轉速下 A20 的自然頻率都與 a、b、c 的結果相近，其中與 b、c 的結果更為相近。表六可以發現當轉速增加時，自然頻率也跟著增加。表七可得知當 $\beta = 60^\circ$ 、 $\gamma = 22.5^\circ$ ，轉速較低時 A10 及 A20 中的自然頻率與 a、b、c 的自然頻率相近，而當轉速增加時，A10 及 A20 中的 K_1 和 K_3 比 b 的結果更接近 c，A10、A20、a、b 的 K_4 都有減少的情況發生，但 a、b 減少的幅度較不大。A10 及 A20 的穩態變形及自然頻率都很接近。當 $\beta = 90^\circ$ 、 $\gamma = 22.5^\circ$ 時，不同轉速下的自然頻率都比 a、b 的結果更接近 c，其中可以發現除了 K_2 ，其他的自然頻率都隨著轉速增加而增加。表八可得知 $\beta = 0^\circ$ 、 $\gamma = 45^\circ$ 時，A10 及 A20 中轉速較低的自然頻率與 a、b、c 相近，而當轉速增加時，A10、A20、a、b 的 K_5 都有減少的情況產生，但 A10 及 A20 減少的幅度較大。當 $\beta = 90^\circ$ 、 $\gamma = 45^\circ$ 時，不同轉速下的自然頻率都比 a 的結果更接近 c。

圖十七至圖十九為對應於表八 $\alpha = 0^\circ$ ， $\beta = 0^\circ$ ， $\gamma = 45^\circ$ 時自然頻率對應的模態圖，在 $\gamma = 45^\circ$ 時，第一個振態為 X_3^G 軸方向的振態 $I = 3$ ，在 $k \neq 0$ 時會產生軸向或扭轉的分量，第二及第五個振態為扭轉方向的振態 $I = 4$ ，由圖十七可見各轉速的第二振態都很接近，由圖十九可見第五個振動模態在 $k \neq 0$ 時 X_2^G 軸方向的分量不可忽略。由圖十七至圖十九可知在表八的情況下，對應於第四及第五個振態的自然頻率會有交叉的情形產生。

表九為考慮矩形斷面 $a/b = 0.05$ 、 $L_T/a = 200$ 及 $\gamma = 15^\circ$ 和矩形斷面 $a/b = 0.06$ 、 $L_T/a = 166.67$ 及 $\gamma = 45^\circ$ ，在 $r = 0$ 、 $\beta = 0^\circ$ 、不同無因次轉速及不同元素數目 N 的穩態解及自然頻率，由於這些情況下幾何非線性取到二次項會產生不穩定的情形，所以僅列三次項的結果，文獻[24]的結果分為 a、b 兩種情況，a 為幾何非線性取到三次項，b 為 MSC NASTRAN 的結果。由表九可得知上述兩種情況的自然頻率，A50 的結果比 a 的結果更接近 b。表九可以發現當 $a/b = 0.05$ 、 $L_T/a = 200$ 及 $\gamma = 15^\circ$ 時，除了 K_3 和 K_5 ，其他的自然頻率都隨著轉速增加而增加，其中 K_5 是隨著轉速增加先增加再減少；當 $a/b = 0.06$ 、 $L_T/a = 166.67$ 及 $\gamma = 45^\circ$ 時， K_1 和 K_5 隨著轉速增加而增加， K_2 和 K_4 隨著轉速增加先增加再減少， K_3 隨著轉速增加而減少。本文中使用共旋轉有限元素法結合浮動框架法推導運動方程式僅須保留到二次項，元素夠多即有正確的結果。

表十至表十三為考慮矩形斷面 $a/b = 0.1$ 、 $L_T/a = 100$ 及 $\gamma = 15^\circ$ 和矩形斷面 $a/b = 0.25$ 、 $L_T/a = 40$ 及 $\gamma = 45^\circ$ ，在 $r = 0$ 或 1 、 $\beta = 0^\circ$ 、不同無因次轉速及不同元素數目 N 的穩態解及自然頻率，其中文獻[23,24]的結果分為 a、b 兩種情況，a 為幾何非線性取到三次項，b 為 MSC NASTRAN 的結果。由表十可得知當 $a/b = 0.1$ 、 $L_T/a = 100$ 、 $\beta = 0^\circ$ 、 $\gamma = 15^\circ$ 、 $r = 0$ 及 $k = 0.02030$ 時，側向的最大撓曲應變已超過 0.01，A50 的結果跟 b 的結果比較接近。除了 K_3 ，其他的自然頻率都隨著轉速增加而增加。由表十一可得知當 $r = 1$ 時，跟 $r = 0$ 時自然頻率的趨勢相似。由表十二可得知當 $a/b = 0.25$ 、 $L_T/a = 40$ 、 $\beta = 0^\circ$ 、 $\gamma = 45^\circ$ 、 $r = 0$ 及 $k = 0.02537$ 時，側向的最大撓曲應變已超過 0.01，A50 的結果跟 b 的結果比較接近。除了 K_2 和 K_4 ，其他的自然頻率都隨著轉速增加而增加。由表十三可得知當 $r = 1$ 時，除了 K_2 和 K_4 ，其他的自然頻率都隨著轉速增加而增加，其中 K_4 是隨著轉速增加先增加再減少。

表十四至表二十一為考慮矩形斷面 $a/b = 0.05$ 、 $L_T/a = 60$ 、 $r = 1$ 、

$\alpha = 15^\circ$ 、 30° 、 $\beta = 0^\circ$ 、 30° 、 60° 、 90° 、 $\gamma = 22.5^\circ$ 、 45° ，在不同無因次轉速下的穩態解及自然頻率。當 $r \neq 0$ 、 $k \neq 0$ 、 $\alpha \neq 0^\circ$ 、 $\beta = 0^\circ$ 或 90° 、 $\gamma \neq 0^\circ$ 時，旋轉梁的穩態解有軸向和兩個側向變形；當 $r \neq 0$ 、 $k \neq 0$ 、 $\beta \neq 0^\circ$ 或 90° 、 $\gamma \neq 0^\circ$ 時，旋轉梁的穩態解有軸向、扭轉及兩個側向變形。

圖二十至圖二十二為對應於表十五 $\alpha = 15^\circ$ ， $\beta = 30^\circ$ ， $\gamma = 22.5^\circ$ 時自然頻率對應的模態圖，在 $\alpha = 15^\circ$ 時，任何方向的振態裡面皆有所有方向的分量，其中扭轉分量 $I = 4$ 造成的影響最為明顯。由圖二十至圖二十二可知在表十五情況下，對應於第四及第五個振態的自然頻率會有交叉的情形產生。

圖二十三和圖二十四分別為矩形斷面 $a/b = 0.06$ 、 $L_T/a = 166.67$ 、 $r = 0$ 、 $\alpha = 0^\circ$ 、 $\beta = 0^\circ$ 、 $\gamma = 45^\circ$ ，在不同轉速下的自然頻率曲線圖和端點位移曲線圖。由圖二十三可以發現 K_1 、 K_2 及 K_4 不隨著轉速增加而有明顯變化， K_3 隨著轉速增加而減少， K_5 隨著轉速增加而增加。當 $k \neq 0$ 、 $\alpha = 0^\circ$ 、 $\beta = 0^\circ$ 或 90° 、 $\gamma \neq 0^\circ$ 時，在梁未變形時慣性力有軸向和單一側向分量，故旋轉梁的穩態解有軸向和單一側向變形。由圖二十四可以發現端點位移隨著轉速增加而增加及端點的側向變形比軸向變形更大。

4.1.3 I 形斷面旋轉梁的穩態變形及自然頻率

表二十二到表三十三為 I 形斷面 $W10 \times 30$ ，總長與斷面高度比為 $L_T/d_{nom} = 25$ ， $r = 1$ 在不同傾斜角、不同設定角、不同預錐角及不同轉速下的穩態解及振動頻率。在 $\alpha = 0^\circ$ 、 5° 、 15° 、 30° 、 $\beta = 0^\circ$ 、 $\gamma = 22.5^\circ$ 、 45° 的情況之下，從表二十二到表二十四可得知自然頻率 K_4 、 K_7 及 K_8 都會隨著轉速增加而增加及在 $\alpha \neq 0^\circ$ 時各種振態的自然頻率隨著轉速增加而轉為 $I = 4$ 。由表二十四可以發現在 $\alpha = 0^\circ$ 時與橢圓斷面相似，會有發散不穩定產生的情形。

表二十六到表二十九為 $\alpha = 0^\circ$ 、 5° 、 15° 、 30° 、 $\beta = 45^\circ$ 、 $\gamma = 22.5^\circ$ 、

45°的情況，表中可發現除了自然頻率 K_2 及 K_6 ，其中 K_2 隨著轉速增加而減少，其他則會隨著轉速增加而增加。

由表二十七可知在 $\alpha = 30^\circ$ 及 $\gamma = 22.5^\circ$ 的情況下， K_4 的振態不隨著轉速增加而改變，而其他各種振態的自然頻率也都會隨著轉速增加而轉為 $I=4$ 。

表三十到表三十三為 $\alpha = 0^\circ、5^\circ、15^\circ、30^\circ、\beta = 90^\circ、\gamma = 22.5^\circ、45^\circ$ 的情況，表中可發現自然頻率隨著轉速改變的情形與設定角 $\beta = 45^\circ$ 的情況類似。由表三十及表三十二可知在 $\alpha = 0^\circ、5^\circ、\gamma = 22.5^\circ$ 及 $\alpha = 0^\circ、\gamma = 45^\circ$ 的情況下， K_4 或 K_6 的振態不隨著轉速增加而改變，而其他各種振態的自然頻率也都會隨著轉速增加而轉為 $I=4$ 。

圖二十五與圖二十六為分別在 $\alpha = 0^\circ、5^\circ、30^\circ、\beta = 0^\circ、45^\circ、\gamma = 45^\circ$ ，在不同轉速下的第一自然頻率曲線圖與第二自然頻率曲線圖，圖中可發現曲線在 $k=0$ 時有共同的起點。由圖二十五可知當 $\beta = 0^\circ$ 時，其中在 $\alpha = 0^\circ$ ，轉速增加到 $k = 0.009025$ 時 $K_1 \approx 0$ ，而當 $\alpha \neq 0^\circ$ ， K_1 隨著轉速增加而先減少再增加；當 $\beta = 45^\circ$ 時， K_1 都隨著轉速增加而增加；當同一轉速下，若 β 相同時， α 越大則 K_1 越大，若 α 相同時， β 越大則 K_1 越大。由圖二十六可以發現 K_2 都有減少的趨勢及當同一轉速下，若 β 相同時， α 越大則 K_2 越小。

圖二十七到圖三十四為對應於表二十四 $\alpha = 0^\circ、5^\circ、\beta = 0^\circ、\gamma = 45^\circ$ 與表二十八 $\alpha = 0^\circ、5^\circ、\beta = 45^\circ、\gamma = 45^\circ$ 時自然頻率對應的模態圖，在 $\alpha = 0^\circ$ 及 $\beta = 0^\circ$ 時，側向的振態 $I=2、3$ 都會產生扭轉方向的分量 $I=4$ ，扭轉的振態 $I=4$ 會產生 X_3^G 軸方向的分量 $I=3$ ；在 $\alpha = 5^\circ$ 及 $\beta = 0^\circ$ 時，側向的振態 $I=2、3$ 都會產生扭轉方向的分量 $I=4$ ；在 $\beta = 45^\circ$ 時，任何方向的振態裡面皆有所有方向的分量，其中扭轉分量 $I=4$ 造成的影響最為明顯。

4.1.4 十字斷面旋轉梁的穩態變形及自然頻率

表三十四到表四十五為十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$ (in)，總長與斷面高度比為 $L_T/d = 10$ ， $r = 1$ 在不同傾斜角、不同設定角、不同預錐角及不同轉速下的穩態解及振動頻率。在設定角 $\beta = 0^\circ$ 的情況之下，從表三十四到表三十七可得知自然頻率 K_3 及 K_5 都會隨著轉速增加而增加及在 $\alpha \neq 0^\circ$ 時各種振態的自然頻率隨著轉速增加而轉為 $I = 4$ 。

表三十八到表四十一為設定角 $\beta = 45^\circ$ 的情況，表中可發現除了自然頻率 K_2 及 K_8 會隨轉速增加而先增加再減少，其他則會隨著轉速增加而增加。由表三十九可知在 $\alpha = 30^\circ$ 及 $\gamma = 22.5^\circ$ 的情況下，對應於第四及第五個振態的自然頻率會有交叉的情形產生，且第五個振態不隨著轉速增加而改變，而其他各種振態的自然頻率也都會隨著轉速增加而轉為 $I = 4$ 。

表四十二到表四十五為設定角 $\beta = 90^\circ$ 的情況，表中可發現自然頻率隨著轉速改變的情形與設定角 $\beta = 45^\circ$ 的情況類似。各種振態的自然頻率也都會隨著轉速增加而轉為 $I = 4$ 。

圖三十五與圖三十六為分別在 $\alpha = 0^\circ, 5^\circ, 30^\circ$ 、 $\beta = 0^\circ, 45^\circ$ 、 $\gamma = 45^\circ$ ，在不同轉速下的第一自然頻率曲線圖與第二自然頻率曲線圖，圖中可發現曲線在 $k = 0$ 時有共同的起點。由圖三十五可知當 $\beta = 0^\circ$ 時，其中在 $\alpha = 0^\circ$ ， K_1 隨著轉速增加而減少，而當 $\alpha \neq 0^\circ$ ， K_1 隨著轉速增加而先減少再增加；當 $\beta = 45^\circ$ 時， K_1 都隨著轉速增加而些微增加；當同一轉速下，若 β 相同時， α 越大則 K_1 越大，若 α 相同時， β 越大則 K_1 越大。由圖三十六可以發現除了 $\alpha = 0^\circ$ 及 $\beta = 0^\circ$ 時， K_2 隨著轉速增加而先減少再增加，其他情況下的 K_2 都有減少的趨勢；當同一轉速下，當 $\beta = 45^\circ$ 時， α 越大則 K_2 越小。

圖三十七到圖四十四為對應於表三十六 $\alpha = 0^\circ, 5^\circ$ 、 $\beta = 0^\circ$ 、 $\gamma = 45^\circ$ 與表四十 $\alpha = 0^\circ, 5^\circ$ 、 $\beta = 45^\circ$ 、 $\gamma = 45^\circ$ 時自然頻率對應的模態圖，在 $\beta = 0^\circ$ 時， X_2^G 方向的振態 $I = 2$ 會產生扭轉方向的分量 $I = 4$ ， X_3^G 側向的振態 $I = 3$ 會產

生 X_2^G 方向及扭轉方向的分量 $I=2、4$ ；在 $\beta = 45^\circ$ 時，任何方向的振態裡面皆有所有方向的分量，其中扭轉分量 $I=4$ 造成的影響最為明顯，但在第四個振態時， X_2^G 軸方向的分量 $I=2$ 所造成的影響也很明顯。



第五章 結論與展望

5.1 結論

本研究採用共旋轉有限元素法探討不同設定角、傾斜角和預錐角之等速旋轉的三維傾斜尤拉梁的穩態變形及以該穩態變形為平衡點的微小振動之自然振動頻率。本文中考慮梁的軸向、兩個側向位移及扭轉之三維運動，本研究採用 d'Alembert 原理、虛功原理、幾何非線性梁理論的一致線性化，在梁元素當前之元素座標上推導節點慣性力和節點變形力，再將元素的節點力轉到總體座標後組合成系統的非線性運動方程式。本研究將旋轉梁的運動方程式中含時間函數的項去掉，求得系統穩態平衡方程式，再用基於牛頓法的增量迭代法求出所有位移以及扭轉的穩態解，將運動方程式在穩態平衡位置用泰勒級數展開，取到一次項，求得旋轉傾斜梁的振動方程式，再假設自然振動頻率存在，可求得一組代數齊次方程式，該組齊次方程式係數形成之矩陣的行列式為零時，即可求得旋轉梁以穩態解為平衡點的自然振動的頻率及其對應的振態。

由本研究的數值例題可以得到以下的結論：

1. 當設定角 $\beta \neq 0^\circ$ 或 90° ，若傾斜角 $\alpha \neq 0^\circ$ 或預錐角 $\gamma \neq 0^\circ$ 時，三維旋轉梁結構的穩態解包含著軸向、扭轉以及兩個側方向位移，此時以穩態解為平衡點的振動是軸向、扭轉及兩個側向耦合的振動。
2. 當設定角 $\beta = 0^\circ$ 或 90° ，若傾斜角 α 及預錐角 γ 其中之一為零時，旋轉梁的穩態解僅有軸向及一個側方向的位移；若傾斜角 $\alpha \neq 0^\circ$ 及預錐角 $\gamma \neq 0^\circ$ 時，旋轉梁的穩態解包含著軸向以及兩個側方向位移。
3. 傾斜角 $\alpha = 0^\circ$ 、預錐角 $\gamma = 0^\circ$ 且設定角 $\beta \neq 0^\circ$ 或 90° 時，穩態解僅有軸向、扭轉的變形，且這個扭轉變形會與軸向變形產生耦合作用。當 I_y 和 I_z 的差距越大，穩態解的扭轉變形也越大。因科式力的關係，其側向與扭轉變形

4. 具有任意設定角、傾斜角和預錐角的旋轉梁結構之最大無因次轉速可以由穩態解時之最大膜應變分別和兩個側向最大撓曲應變知何來決定，當傾斜角 $\alpha = 0^\circ$ 及預錐角 $\gamma = 0^\circ$ 時，因無側向變形，故不會產生撓曲應變，所以當無因次轉速半徑 $r = 0$ 時之最大無因次轉速 k 可設為 0.1；在傾斜角 $\alpha \neq 0^\circ$ 或預錐角 $\gamma \neq 0^\circ$ 時，因須考慮最大撓曲應變，其中細長比較大時最大無因次轉速 k 約為 0.005，細長比較小時最大無因次轉速 k 約為 0.01。
5. 在無因次轉速半徑 $r = 1$ 、設定角 $\beta = 0^\circ$ 時，若傾斜角 $\alpha = 0^\circ$ ，當預錐角 γ 越大，隨著轉速增加，第一個無因次振動頻率 K_1 就越快產生發散不穩定 (divergence instability) 的情形及當同一轉速下，預錐角 γ 越大則頻率 K_1 越小；若預錐角 γ 固定，當同一轉速下，傾斜角 α 越大則頻率 K_1 越大。在設定角 $\beta \neq 0^\circ$ 時，頻率 K_1 都隨著轉速增加而增加，且當同一轉速下，若傾斜角 $\alpha = 0^\circ$ ，預錐角 γ 越大則頻率 K_1 越小；若預錐角 γ 固定，傾斜角 α 越大則頻率 K_1 越大。
6. 使用共旋轉有限元素法結合浮動框架法推導旋轉傾斜尤拉梁的運動方程式僅須保留到二次項即可有正確的結果。

5.2 未來展望

1. 本研究僅探討傾斜角、設定角和預錐角對旋轉梁的所造成影響，但旋轉梁另外還有預扭角 (Pretwisted angle)，這些都會影響旋轉梁的穩態解及自然振動頻率，在將來亦非常值得探討。
2. 因旋轉梁的自由端常加掛配重，藉此來改善旋轉梁結構之機能性。例如增加渦輪風扇的氣流，增加撓性旋轉葉片的撓度，或是改善旋轉梁結構之自然振動頻率等，故將來擬推導旋轉梁的運動方程式時應將配重考慮進去。

參考文獻

- [1] A. Leissa, “Vibrational aspects of rotating turbomachinery blades”, ASME Applied Mechanics Reviews, Vol. 34, pp. 629-635, 1981.
- [2] V. Ramamurti, P. Balasubramanian, “Analysis of turbomachinery blades : A review”, The Shock and Vibration Digest, Vol. 16, pp. 13-28, 1984.
- [3] M. J. Schilhansl, “Bending frequency of a rotating cantilever beam”, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, pp. 28-30, 1958
- [4] S. Y. Lee, Y. H. Kuo, “Bending frequency of a rotating beam with an elastically restrained root”, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 209-214, 1991.
- [5] T. Yokoyama, “Free vibration characteristics of rotating Timoshenko beam”, International Journal of Mechanical Science, Vol. 30, No. 10, pp. 743-755, 1988.
- [6] S. Y. Lee, S. M. Lin, “Bending vibration of rotating nonuniform Timoshenko beams with an elastically restrained root”, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 61, pp. 949-955, 1994.
- [7] C. D. Eick, M. P. Mignolet, “Vibration and buckling of flexible rotating beams”, AIAA Journal, Vol. 33, No. 3, pp. 526-538, 1995.
- [8] J. C. Simo, L. Vu-Quoc, “The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 119, pp. 487-508, 1987.
- [9] S. C. Lin, K. M. Hsiao, “Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 240(2), pp. 303-322, 2001.
- [10] 洪船島, “旋轉梁結構之振動分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 1997.

- [11] 周志芳, “旋轉梁之自由振動的級數解法”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 1998.
- [12] 顏宏儒, “旋轉傾斜梁之穩態及自由振動分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2008.
- [13] 周裕淳, “以有限元素法分析旋轉傾斜尤拉梁的穩態變形與自由振動”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2009.
- [14] S. Y. Lee, J. J. Sheu, “Free vibrations of a rotating inclined beam”, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 74, pp. 406-414, 2007.
- [15] 黃志傑, “旋轉三維 Timoshenko 梁之振動分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2001.
- [16] 何其昌, “旋轉三維 Euler 梁之振動分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2002.
- [17] 蔡秉宏, “以有限元素法分析三維旋轉傾斜尤拉梁的穩態變形與自由振動”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2010.
- [18] S. Y. Lee, S. M. Lin, Y. S. Lin, “Modeling and bending vibration of the blade of a horizontal-axis wind power turbine”, Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol. 23, no. 3, pp. 175-186, 2008.
- [19] S. Y. Lee, S. M. Lin, Y. S. Lin, “Instability and vibration of a rotating Timoshenko beam with precone”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 51, pp. 114-121, 2009.
- [20] R. H. MacNeal, C. W. McCormick, “The NASTRAN computer program for structural analysis”, Computers and Structures, Vol. 1, Issue 3, pp.

389-412, 1971.

- [21] K. B. Subrahmanyam, K. R. V. Kaza, “Non-linear flap-lag-extensional vibrations of rotating, pretwisted, preconed beams including coriolis effects”, NASA-TM-87102, 1985.
- [22] K. B. Subrahmanyam, K. R. V. Kaza, “Vibration and buckling of rotating, pretwisted, preconed beams including coriolis effects”, NASA-TM-8704, 1985.
- [23] K. B. Subrahmanyam, K. R. V. Kaza, “Nonlinear bending-torsional vibration and stability of rotating, pretwisted, preconed blades including coriolis effects”, NASA-TM-87207, 1986.
- [24] K. B. Subrahmanyam, K. R. V. Kaza, “Influence of third-degree geometric nonlinearities on the vibration and stability of pretwisted, preconed, rotating blades”, NASA-TM-87307, 1986.
- [25] D. H. Hodges, E. H. Dowell, “Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades”, NASA-TN-D-7818, 1974.
- [26] D. H. Hodges, R. A. Ormiston, “Stability of elastic bending and torsion of uniform cantilever rotor blades in hover with variable structural coupling”, NASA-TN-D-8192, 1976.
- [27] D. H. Hodges, “Nonlinear equations of motion for cantilever rotor blades in hover with pitch link flexibility, twist, preconed, droop, sweep, torque offset, and blade root offset”, NASA-TM-X-73112, 1976.
- [28] K. M. Hsiao, W. Y. Lin, “Co-rotational formulation for geometric nonlinear analysis of doubly symmetric thin-walled beams”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, pp. 6023-6052, 2001.

- [29] 遊敬義, “雙對稱開口薄壁梁元素之一致性共旋轉推導法及其在挫屈分析的應用”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2001.
- [30] K. M. Hsiao, H. H. Chen, W. Y. Lin, “Co-rotational finite element formulation for thin-walled beams with generic open section”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, pp. 2334–2370, 2006.
- [31] M. A. Crisfield, “A constant co-rotational formulation for non-linear three-dimensional beam elements”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 81, pp. 131-150, 1990.
- [32] A. J. Sommese, C. W. Wampler, “The numerical solution of systems of polynomials arising in engineering and science”, World Scientific Pub Co Inc, Singapore, 2005.
- [33] K. J. Bathe, “Finite element procedure, Prentice-Hall”, John Wiley & Sons Inc, New Jersey, 1996.
- [34] S. S. Rao, “Engineering optimization: theory and practice”, 3th Edition, John Wiley & Sons Inc, New Jersey, 2000.

表一 無因次轉軸半徑 r 、傾斜角 α 、設定角 β 、預錐角 γ 對穩態變形的影響

r	α	β	γ	U	V	W	Θ_1
0	—	0°	0°	○	×	×	×
	—	90°	0°	○	×	×	×
	—	≠ 0°, 90°	0°	○	×	×	○
	—	0°	≠ 0°	○	×	○	×
	—	90°	≠ 0°	○	○	×	×
	—	≠ 0°, 90°	≠ 0°	○	○	○	○
≠ 0	0°	0°	0°	○	×	×	×
	≠ 0°	0°	0°	○	○	×	×
	0°	90°	0°	○	×	×	×
	≠ 0°	90°	0°	○	×	○	×
	0°	≠ 0°, 90°	0°	○	×	×	○
	≠ 0°	≠ 0°, 90°	0°	○	○	○	○
	0°	0°	≠ 0°	○	×	○	×
	≠ 0°	0°	≠ 0°	○	○	○	×
	0°	90°	≠ 0°	○	○	×	×
	≠ 0°	90°	≠ 0°	○	○	○	×
	—	≠ 0°, 90°	≠ 0°	○	○	○	○

○：有
×：無

表二 不同斷面梁的細長比

	a/b	L_T/a	n_y	n_z
橢圓斷面	10	50	1000	100
矩形斷面	0.05	60	10.39	207.85
	0.05	200	34.64	692.82
	0.06	166.67	34.64	577.35
	0.1	100	34.64	346.4
	0.25	40	34.64	138.56
I 型斷面			181.129	57.0563
W10×30				
十字斷面			118.707	42.0644
$d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$ (in)				

表三 旋轉梁不同預錐角的收斂性及準確性分析
 (橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=50$, $n_y=1000$, $n_z=100$, $r=1$, $\beta=0^\circ$, $k=0.005$)

		A50	A20	B10	C10	[19]
$\gamma=0^\circ$	ε_0	3.7247E-5	3.6863E-5	3.6207E-5	3.6207E-5	—
	U_{tip}	2.0833E-5	2.0833E-5	2.0833E-5	2.0833E-5	—
	$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	K_1	7.4118E-3(2)	7.4143E-3(2)	7.4235E-3(2)	7.4235E-3(2)	7.4115E-3
	K_2	2.8926E-2(2)	2.8939E-2(2)	2.8986E-2(2)	2.8986E-2(2)	2.89238E-2
	K_3	3.6122E-2(3)	3.6122E-2(3)	3.6133E-2(3)	3.6133E-2(3)	—
	K_4	6.9582E-2(2)	6.9597E-2(2)	6.9666E-2(2)	6.9666E-2(2)	6.95813E-2
	K_5	1.2948E-1(2)	1.2950E-1(2)	1.2967E-1(2)	1.2967E-1(2)	1.29484E-1
	K_6	1.9433E-1(4)	1.9468E-1(4)	1.9562E-1(4)	1.9562E-1(4)	—
K_7	2.0883E-1(2)	2.0888E-1(2)	2.0941E-1(2)	2.0941E-1(2)	—	
$\gamma=30^\circ$	ε_0	2.9609E-5	2.9374E-5	2.9911E-5	2.7155E-5	—
	ε_b	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	ε_c	-1.9104E-3	-1.9098E-3	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	U_{tip}	-3.2767E-4	-3.2766E-4	1.7075E-5	1.5625E-5	—
	V_{tip}	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	W_{tip}	-2.4516E-2	-2.4516E-2	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	K_1	5.3467E-3(4)	5.3752E-3(4)	6.5460E-3(2)	6.1958E-3(2)	6.1847E-3
	K_2	2.3980E-2(4)	2.4071E-2(4)	2.7760E-2(2)	2.7306E-2(2)	2.72575E-2
	K_3	3.6208E-2(3)	3.6207E-2(3)	3.5869E-2(3)	3.5805E-2(3)	—
	K_4	6.4159E-2(4)	6.4391E-2(4)	6.8260E-2(2)	6.7731E-2(2)	6.76638E-2
	K_5	1.2367E-1(4)	1.2409E-1(4)	1.2813E-1(2)	1.2754E-1(2)	1.27378E-1
	K_6	1.9345E-1(4)	1.9392E-1(4)	1.9560E-1(4)	1.9559E-1(4)	—
K_7	2.0362E-1(4)	2.0403E-1(4)	2.0779E-1(2)	2.0718E-1(2)	—	
$\gamma=60^\circ$	ε_0	1.2713E-5	1.2744E-5	1.4989E-5	9.0520E-6	—
	ε_b	0.0000E+00	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	ε_c	-2.8734E-3	-2.8725E-3	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	U_{tip}	-7.6266E-4	-7.6264E-4	8.3332E-6	5.2083E-6	—
	V_{tip}	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	W_{tip}	-3.6671E-2	-3.6671E-2	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—
	K_1	*—	*—	3.7804E-3(2)	2.1358E-3(2)	2.1239E-3
	K_2	1.3089E-2(4)	1.3449E-2(4)	2.4699E-2(2)	2.3575E-2(2)	2.35570E-2
	K_3	3.6298E-2(4)	3.6300E-2(4)	3.5280E-2(3)	3.5140E-2(3)	—
	K_4	5.4349E-2(4)	5.5008E-2(4)	6.4876E-2(2)	6.3661E-2(2)	6.36274E-2
	K_5	1.1394E-1(4)	1.1498E-1(4)	1.2447E-1(2)	1.2317E-1(2)	1.23038E-1
	K_6	1.8959E-1(4)	1.9100E-1(4)	1.9556E-1(4)	1.9553E-1(4)	—
K_7	1.9753E-1(4)	1.9774E-1(4)	2.0398E-1(2)	2.0262E-1(2)	—	

*: 發散不穩定(divergence instability)

表四 旋轉梁不同預錐角的收斂性及準確性分析
 (橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=50$, $n_y=1000$, $n_z=100$, $r=1$, $\beta=45^\circ$, $k=0.005$)

		A50	A20	B10	C10	[19]	
$\gamma = 0^\circ$	ε_0	3.7247E-5	3.6863E-5	3.6207E-5	3.6207E-5	—	
	U_{tip}	2.0833E-5	2.0833E-5	2.0833E-5	2.0833E-5	—	
	$\Theta_1(1)$	4.0011E-4	3.9867E-4	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	$\Theta'_1(0.1)$	7.2952E-4	7.2386E-4	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	K_1	8.2043E-3(2)	8.2066E(2)	8.2147E-3(2)	8.2147E-3(2)	8.2116E-3	
	K_2	2.9141E-2(2)	2.9154E(2)	2.9200E-2(2)	2.9200E-2(2)	2.91391E-2	
	K_3	3.5950E-2(3)	3.5951E(3)	3.5962E-2(3)	3.5962E-2(3)	—	
	K_4	6.9672E-2(2)	6.9687E(2)	6.9755E-2(2)	6.9755E-2(2)	6.96711E-2	
	K_5	1.2953E-1(2)	1.2955E(2)	1.2971E-1(2)	1.2971E-1(2)	1.29532E-1	
	K_6	1.9439E-1(4)	1.9474E(4)	1.9568E-1(4)	1.9568E-1(4)	—	
	K_7	2.0886E-1(2)	2.0891E(2)	2.0944E-1(2)	2.0944E-1(2)	—	
	$\gamma = 30^\circ$	ε_0	-8.8508E-7	-4.3688E-6	2.9911E-5	2.7155E-5	—
		ε_b	-4.6424E-3	-4.7343E-3	0.0000E+0	0.0000E+0	—
		ε_c	-9.9710E-4	-1.0018E-3	0.0000E+0	0.0000E+0	—
U_{tip}		-7.6942E-2	-7.6804E-2	1.7075E-5	1.5625E-5	—	
V_{tip}		-3.6469E-1	-3.6449E-1	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
W_{tip}		-3.8462E-2	-3.8009E-2	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
$\Theta_1(1)$		1.3120E-1	1.2901E-1	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
$\Theta'_1(0.1)$		5.0744E-1	5.0028E-1	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
K_1		8.0926E-3(4)	7.9713E-3(2)	7.2217E-3(2)	6.9059E-3(2)	6.9011E-3	
K_2		2.0015E-2(4)	1.9993E-2(4)	2.7929E-2(2)	2.7477E-2(2)	2.74289E-2	
K_3		2.9373E-2(4)	2.9068E-2(4)	3.5739E-2(3)	3.5675E-2(3)	—	
K_4		6.7800E-2(4)	6.6820E-2(2)	6.8328E-2(2)	6.7800E-2(2)	6.77331E-2	
K_5		1.2464E-1(4)	1.2307E-1(4)	1.2816E-1(2)	1.2758E-1(2)	1.27415E-1	
K_6		1.7752E-1(4)	1.7860E-1(4)	1.9565E-1(4)	1.9564E-1(4)	—	
K_7	2.0708E-1(4)	2.0465E-1(4)	2.0782E-1(2)	2.0720E-1(2)	—		
$\gamma = 60^\circ$	ε_0	-1.7189E-4	-2.0149E-4	1.4989E-5	9.0520E-6	—	
	ε_b	-8.7425E-3	-9.0663E-3	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	ε_c	-1.1539E-3	-1.1751E-3	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	U_{tip}	-3.3690E-1	-3.3645E-1	8.3332E-6	5.2083E-6	—	
	V_{tip}	-6.8510E-1	-6.8547E-1	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	W_{tip}	-1.5689E-1	-1.5463E-1	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	$\Theta_1(1)$	3.3898E-1	3.3596E-1	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	$\Theta'_1(0.1)$	1.3666E+0	1.3550E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	K_1	7.9756E-3(4)	7.2931E-3(4)	4.1724E-3(2)	2.7711E-3(2)	2.7633E-3	
	K_2	1.2427E-2(4)	1.2068E-2(4)	2.4763E-2(2)	2.3641E-2(2)	2.36232E-2	
	K_3	2.7911E-2(4)	2.6040E-2(4)	3.5236E-2(3)	3.5096E-2(3)	—	
	K_4	6.1241E-2(4)	5.5405E-2(4)	6.4900E-2(2)	6.3685E-2(2)	6.36520E-2	
	K_5	1.0787E-1(4)	1.0125E-1(4)	1.2449E-1(2)	1.2318E-1(2)	1.23051E-1	
	K_6	1.3968E-1(4)	1.3943E-1(4)	1.9558E-1(4)	1.9555E-1(4)	—	
K_7	1.9761E-1(4)	1.8485E-1(4)	2.0399E-1(2)	2.0263E-1(2)	—		

表五 旋轉梁不同預錐角的收斂性及準確性分析
 (橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=50$, $n_y=1000$, $n_z=100$, $r=1$, $\beta=90^\circ$, $k=0.005$)

		A80	A50	B10	C10	[19]	
$\gamma = 0^\circ$	ε_0	3.7341E-5	3.7247E-5	3.6207E-5	3.6207E-5	—	
	U_{tip}	2.0833E-5	2.0833E-5	2.0833E-5	2.0833E-5	—	
	$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	K_1	8.9405E-3(2)	8.9407E-3(2)	8.9503E-3(2)	8.9503E-3(2)	8.9404E-3	
	K_2	2.9353E-2(2)	2.9355E-2(2)	2.9414E-2(2)	2.9414E-2(2)	2.93528E-2	
	K_3	3.5774E-2(3)	3.5774E-2(3)	3.5786E-2(3)	3.5786E-2(3)	—	
	K_4	6.9760E-2(2)	6.9761E-2(2)	6.9845E-2(2)	6.9845E-2(2)	6.97607E-2	
	K_5	1.2957E-1(2)	1.2958E-1(2)	1.2976E-1(2)	1.2976E-1(2)	1.29580E-1	
	K_6	1.9443E-1(4)	1.9446E-1(4)	1.9575E-1(4)	1.9575E-1(4)	—	
	K_7	2.0889E-1(2)	2.0889E-1(2)	2.0947E-1(2)	2.0947E-1(2)	—	
	$\gamma = 30^\circ$	ε_0	1.9488E-5	2.0151E-5	2.9911E-5	2.7155E-5	—
		ε_b	-6.0991E-3	-6.0944E-3	0.0000E+0	0.0000E+0	—
		ε_c	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—
U_{tip}		-9.4370E-2	-9.4368E-2	1.7075E-5	1.5625E-5	—	
V_{tip}		-4.0707E-1	-4.0707E-1	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
W_{tip}		0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
$\Theta_1(1)$		0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
$\Theta'_1(0.1)$		0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
K_1		8.9063E-3(2)	8.9078E-3(2)	7.8486E-3(2)	7.5590E-3(2)	7.5498E-3	
K_2		2.0900E-2(4)	2.0888E-2(4)	2.8096E-2(2)	2.7647E-2(2)	2.75993E-2	
K_3		2.9070E-2(2)	2.9060E-2(2)	3.5607E-2(3)	3.5542E-2(3)	—	
K_4		6.7739E-2(2)	6.7707E-2(2)	6.8397E-2(2)	6.7870E-2(2)	6.78022E-2	
K_5		1.2565E-1(2)	1.2559E-1(2)	1.2820E-1(2)	1.2762E-1(2)	1.27452E-1	
K_6		1.8296E-1(4)	1.8302E-1(4)	1.9570E-1(4)	1.9569E-1(4)	—	
K_7	2.0335E-1(2)	2.0326E-1(2)	2.0784E-1(2)	2.0722E-1(2)	—		
$\gamma = 60^\circ$	ε_0	-2.8147E-5	-2.5714E-5	1.4989E-5	9.0520E-6	—	
	ε_b	-1.1621E-2	-1.1614E-2	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	ε_c	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	U_{tip}	-3.5320E-1	-3.5320E-1	8.3332E-6	5.2083E-6	—	
	V_{tip}	-7.2507E-1	-7.2508E-1	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	W_{tip}	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	—	
	K_1	8.7244E-3(4)	8.7308E-3(4)	4.5323E-3(2)	3.2881E-3(2)	3.2804E-3	
	K_2	1.3811E-2(4)	1.3804E-2(4)	2.4826E-2(2)	2.3707E-2(2)	2.36893E-2	
	K_3	2.8069E-2(2)	2.8024E-2(2)	3.5192E-2(3)	3.5051E-2(3)	—	
	K_4	6.2526E-2(2)	6.2378E-2(2)	6.4924E-2(2)	6.3710E-2(2)	6.36765E-2	
	K_5	1.1760E-1(2)	1.1736E-1(2)	1.2450E-1(2)	1.2320E-1(2)	1.23063E-1	
	K_6	1.4141E-1(4)	1.4147E-1(4)	1.9559E-1(4)	1.9556E-1(4)	—	
K_7	1.9381E-1(2)	1.9346E-1(2)	2.0400E-1(2)	2.0264E-1(2)	—		

表六 旋轉梁不同設定角不同轉速的準確性分析
 (矩形斷面 $a/b=0.05$, $L_T/a=60$, $r=0.6667$, $\alpha=0^\circ$, $\gamma=0^\circ$)

			A20	a[23,24]	b[23,24]	c[23,24]
$\beta=0^\circ$	$k=0$	K_1	1.6916E-2(3)	1.6917E-2	—	1.6917E-2
		K_2	1.0453E-1(4)	1.0303E-1	—	1.0273E-1
		K_3	1.0597E-1(3)	1.0596E-1	—	1.0524E-1
		K_4	2.9658E-1(3)	2.9668E-1	—	2.9722E-1
		K_5	3.2831E-1(4)	3.2506E-1	—	3.2236E-1
		K_6	3.3126E-1(2)	—	—	—
		K_7	5.8077E-1(3)	—	—	—
$\beta=30^\circ$	$k=1.078E-2$	K_1	2.2718E-2(3)	2.2700E-2	2.2718E-2	2.3167E-2
		K_2	1.0603E-1(4)	1.0456E-1	1.0348E-1	1.0237E-1
		K_3	1.1236E-1(3)	1.1205E-1	1.1237E-1	1.1314E-1
		K_4	3.0320E-1(3)	3.0232E-1	3.0338E-1	3.0315E-1
		K_5	3.3092E-1(4)	3.2789E-1	3.2560E-1	3.2452E-1
		K_6	3.3159E-1(4)	—	—	—
		K_7	5.8774E-1(3)	—	—	—
	$k=1.437E-2$	K_1	2.6331E-2(3)	2.6310E-2	2.6328E-2	2.6220E-2
		K_2	1.0720E-1(4)	1.0572E-1	1.0387E-1	1.0452E-1
		K_3	1.1708E-1(3)	1.1619E-1	1.1707E-1	1.1943E-1
		K_4	3.0821E-1(3)	3.0537E-1	3.0835E-1	3.0818E-1
		K_5	3.3178E-1(4)	3.2998E-1	3.2610E-1	3.2631E-1
		K_6	3.3305E-1(4)	—	—	—
		K_7	5.9309E-1(3)	—	—	—
	$k=1.796E-2$	K_1	3.0323E-2(3)	3.0279E-2	3.0333E-2	2.9812E-2
		K_2	1.0870E-1(4)	1.0721E-1	1.0443E-1	1.0542E-1
		K_3	1.2286E-1(3)	1.2094E-1	1.2284E-1	1.2679E-1
		K_4	3.1445E-1(3)	3.0783E-1	3.1451E-1	—
		K_5	3.3221E-1(4)	3.3283E-1	3.2683E-1	—
		K_6	3.3568E-1(4)	—	—	—
		K_7	5.9989E-1(3)	—	—	—
		ε_0	3.7018E-4	—	—	—
		U_{tip}	2.1369E-4	—	—	—
		$\Theta_1(1)$	-1.4837E-2	—	—	—
		$\Theta'_1(0.1)$	-2.4202E-2	—	—	—

- a: 二次項幾何非線性分析結果
 b: 三次項幾何非線性分析結果
 c: 實驗結果

表七 旋轉梁不同設定角不同轉速的收斂性及準確性分析
 (矩形斷面 $a/b=0.05$, $L_T/a=60$, $r=0.6587$, $\alpha=0^\circ$, $\gamma=22.5^\circ$)

		A10	A20	a[24]	b[24]	c[24]	
$\beta = 60^\circ$							
$k = 3.592E-3$	K_1	1.7369E-2(3)	1.7368E-2(3)	1.7330E-2	1.7330E-2	1.7420E-2	
	K_2	1.0453E-1(4)	1.0452E-1(4)	1.0281E-1	1.0296E-1	1.0308E-1	
	K_3	1.0665E-1(3)	1.0664E-1(3)	1.0657E-1	1.0660E-1	—	
	K_4	2.9727E-1(3)	2.9720E-1(3)	2.9727E-1	2.9744E-1	—	
	K_5	3.2012E-1(4)	3.2026E-1(4)	3.2260E-1	3.2258E-1	3.2290E-1	
$k = 1.078E-2$	K_1	2.0820E-2(3)	2.0832E-2(3)	2.0024E-2	2.0545E-2	2.2341E-2	
	K_2	1.0287E-1(4)	1.0289E-1(4)	8.7981E-2	1.0125E-1	1.0075E-1	
	K_3	1.1230E-1(3)	1.1239E-1(3)	1.1228E-1	1.1187E-1	1.1242E-1	
	K_4	2.7467E-1(4)	2.7547E-1(4)	2.8178E-1	2.9196E-1	—	
	K_5	3.0212E-1(3)	3.0233E-1(3)	3.0252E-1	3.0471E-1	—	
	ε_0	1.0982E-4	1.1180E-4	—	—	—	
	ε_b	-8.2093E-4	-8.2214E-4	—	—	—	
	ε_c	-7.6792E-3	-7.7020E-3	—	—	—	
	U_{tip}	-6.3999E-3	-6.4048E-3	—	—	—	
	V_{tip}	-1.0789E-3	-1.0691E-3	—	—	—	
	W_{tip}	-1.0654E-1	-1.0658E-1	—	—	—	
	$\Theta_1(1)$	-1.1639E-2	-1.1681E-2	—	—	—	
	$\Theta_1'(0.1)$	-2.6173E-2	-1.1681E-2	—	—	—	
	$\beta = 90^\circ$						
	$k = 7.184E-3$	K_1	1.8324E-2(3)	1.8318E-2(3)	1.8210E-2	1.8228E-2	1.8300E-2
K_2		1.0416E-1(4)	1.0412E-1(4)	1.0314E-1	1.0310E-1	1.0262E-1	
K_3		1.0897E-1(3)	1.0898E-1(3)	1.0838E-1	1.0842E-1	1.0827E-1	
K_4		2.9908E-1(3)	2.9897E-1(3)	2.9909E-1	2.9920E-1	2.9884E-1	
K_5		3.2940E-1(4)	3.2937E-1(4)	3.2610E-1	3.2601E-1	3.2308E-1	
$k = 1.437E-2$	K_1	2.1797E-2(3)	2.1784E-2(3)	2.1569E-2	2.1551E-2	2.1766E-2	
	K_2	1.0228E-1(4)	1.0212E-1(4)	1.0296E-1	1.0294E-1	1.0093E-1	
	K_3	1.1804E-1(4)	1.1808E-1(4)	1.1569E-1	1.1573E-1	1.1745E-1	
	K_4	3.0442E-1(4)	3.0397E-1(4)	3.0541E-1	3.0552E-1	3.0243E-1	
	K_5	3.3201E-1(4)	3.3201E-1(4)	3.2974E-1	3.2967E-1	3.2793E-1	
$k = 1.796E-2$	K_1	2.3912E-2(3)	2.3900E-2(3)	2.3670E-2	2.3652E-2	2.4155E-2	
	K_2	1.0081E-1(4)	1.0056E-1(4)	1.0278E-1	1.0276E-1	9.9313E-1	
	K_3	1.2435E-1(4)	1.2441E-1(4)	1.2092E-1	1.2094E-1	1.2356E-1	
	K_4	3.0670E-1(4)	3.0584E-1(4)	3.0923E-1	3.0934E-1	3.0440E-1	
	K_5	3.3250E-1(4)	3.3250E-1(4)	3.3316E-1	3.3308E-1	3.3296E-1	

a: 二次項幾何非線性分析結果

b: 三次項幾何非線性分析結果

c: 實驗結果

表八 旋轉梁不同設定角不同轉速的收斂性及準確性分析
 (矩形斷面 $a/b=0.05$, $L_T/a=60$, $r=0.636$, $\alpha=0^\circ$, $\gamma=45^\circ$)

		A10	A20	a[23,24]	b[23,24]	c[23,24]
$\beta=0^\circ$						
$k=2.604E-3$	K_1	1.7093E-2(3)	1.7094E-2(3)	1.7025E-2	1.7043E-2	1.7223E-2
	K_2	1.0447E-1(4)	1.0447E-1(4)	1.0240E-1	1.0303E-1	1.0308E-1
	K_3	1.0618E-1(3)	1.0618E-1(3)	1.0614E-1	1.0619E-1	1.0560E-1
	K_4	2.9680E-1(3)	2.9674E-1(3)	2.9688E-1	2.9702E-1	2.9722E-1
	K_5	3.1300E-1(4)	3.1325E-1(4)	3.1976E-1	3.2032E-1	3.2308E-1
$k=3.606E-3$	K_1	1.7284E-2(3)	1.7289E-2(3)	—	—	—
	K_2	1.0421E-1(4)	1.0423E-1(4)	—	—	—
	K_3	1.0635E-1(3)	1.0636E-1(3)	—	—	—
	K_4	2.9681E-1(3)	2.9678E-1(3)	—	—	—
	K_5	2.9892E-1(4)	2.9937E-1(4)	—	—	—
$k=4.508E-3$	K_1	1.7537E-2(3)	1.7549E-2(3)	1.7294E-2	1.7330E-2	1.7707E-2
	K_2	1.0371E-1(4)	1.0376E-1(4)	9.7158E-1	1.0285E-1	1.0219E-1
	K_3	1.0653E-1(3)	1.0656E-1(3)	1.0650E-1	1.0664E-1	1.0578E-1
	K_4	2.8404E-1(4)	2.8467E-1(4)	2.9722E-1	2.9763E-1	2.9848E-1
	K_5	2.9671E-1(3)	2.9673E-1(3)	3.0081E-1	3.0473E-1	3.2380E-1
	ε_c	-5.4612E-3	-5.4680E-3	—	—	—
	W_{tip}	-8.3804E-2	-8.3811E-2	—	—	—
$\beta=90^\circ$						
$k=5.388E-3$	K_1	1.7156E-2(3)	1.7154E-2(3)	1.6989E-2	—	1.7151E-2
	K_2	1.0390E-1(4)	1.0386E-1(4)	1.0298E-1	—	1.0255E-1
	K_3	1.0755E-1(4)	1.0756E-1(4)	1.0678E-1	—	1.0757E-1
	K_4	2.9748E-1(3)	2.9739E-1(3)	2.9744E-1	—	2.9758E-1
	K_5	3.2881E-1(4)	3.2877E-1(4)	3.3818E-1	—	3.2290E-1
$k=1.257E-2$	K_1	1.7828E-2(3)	1.7826E-2(3)	1.7187E-2	—	1.7959E-2
	K_2	9.9162E-2(4)	9.8938E-2(4)	1.0152E-1	—	9.7876E-2
	K_3	1.1570E-1(4)	1.1582E-1(4)	1.1140E-1	—	1.1494E-1
	K_4	2.9853E-1(4)	2.9799E-1(4)	2.9986E-1	—	2.9632E-1
	K_5	3.3190E-1(4)	3.3191E-1(4)	3.2764E-1	—	3.2739E-1
$k=1.616E-2$	K_1	1.7945E-2(3)	1.7952E-2(3)	1.7205E-2	—	1.7959E-2
	K_2	9.5056E-2(4)	9.4660E-2(4)	1.0009E-1	—	9.3746E-2
	K_3	1.2178E-1(4)	1.2196E-1(4)	1.1513E-1	—	1.2122E-1
	K_4	2.9695E-1(4)	2.9583E-1(4)	3.0085E-1	—	2.9489E-1
	K_5	3.3238E-1(4)	3.3238E-1(2)	3.3019E-1	—	3.3296E-1
	ε_b	-3.6295E-3	-3.6323E-3	—	—	—
	V_{tip}	-2.8298E-3	-2.8298E-3	—	—	—

- a: 二次項幾何非線性分析結果
 b: 三次項幾何非線性分析結果
 c: 實驗結果

表九 旋轉梁不同預錐角不同轉速不同斷面的收斂性及準確性分析
(矩形斷面 $L_T/b=10$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$)

		A10	A20	A50	a[24]	b[24]
$\gamma=15^\circ$ $a/b=0.05$						
$k=0$	K_1	5.0749E-3(3)	5.0749E-3(3)	5.0749E-3(3)	—	—
	K_2	3.1804E-2(3)	3.1803E-2(3)	3.1803E-2(3)	—	—
	K_3	8.9068E-2(3)	8.9046E-2(3)	8.9045E-2(3)	—	—
	K_4	9.8303E-2(4)	9.8142E-2(4)	9.8120E-2(4)	—	—
	K_5	1.0130E-1(2)	1.0130E-1(2)	1.0130E-1(2)	—	—
$k=5.075E-3$	K_1	7.3443E-3(3)	7.4387E-3(3)	7.4444E-3(3)	7.4423E-3	7.4739E-3
	K_2	3.3800E-2(3)	3.4159E-2(3)	3.4181E-2(3)	3.4530E-2	3.4342E-2
	K_3	6.2673E-2(4)	6.3179E-2(4)	6.3391E-2(4)	6.1479E-2	6.3871E-2
	K_4	9.0285E-2(3)	9.1070E-2(3)	9.1126E-2(3)	9.2377E-2	9.1521E-2
	K_5	1.2868E-1(4)	1.2767E-1(4)	1.2741E-1(4)	1.3044E-1	1.2734E-1
$k=1.015E-2$	K_1	1.1669E-2(3)	1.1976E-2(3)	1.1995E-2(3)	1.1908E-2	1.2036E-2
	K_2	3.9516E-2(3)	4.0669E-2(3)	4.0738E-2(3)	4.1642E-2	4.0912E-2
	K_3	5.4287E-2(4)	5.5369E-2(4)	5.5811E-2(4)	5.3530E-2	5.6365E-2
	K_4	9.5355E-2(3)	9.7791E-2(3)	9.7966E-2(3)	1.0033E-1	9.8277E-2
	K_5	1.2773E-1(4)	1.2646E-1(4)	1.2617E-1(4)	1.2981E-1	1.2644E-1
$\gamma=45^\circ$ $a/b=0.06$						
$k=0$	K_1	6.0899E-3(3)	6.0899E-3(3)	6.0899E-3(3)	—	—
	K_2	3.8164E-2(3)	3.8163E-2(3)	3.8163E-2(3)	—	—
	K_3	1.0130E-1(2)	1.0130E-1(2)	1.0130E-1(2)	—	—
	K_4	1.0688E-1(3)	1.0685E-1(3)	1.0685E-1(3)	—	—
	K_5	1.1752E-1(4)	1.1732E-1(4)	1.1730E-1(4)	—	—
$k=3.045E-3$	K_1	6.3081E-3(3)	6.3955E-3(3)	6.4013E-3(3)	6.4298E-3	6.4180E-3
	K_2	3.8179E-2(3)	3.8463E-2(3)	3.8483E-2(3)	3.8968E-2	3.8593E-2
	K_3	6.8856E-2(4)	6.9228E-2(4)	6.9390E-2(4)	6.7808E-2	7.0659E-2
	K_4	1.0613E-1(3)	1.0674E-1(3)	1.0679E-1(3)	1.0838E-1	1.0701E-1
	K_5	1.4756E-1(4)	1.4650E-1(4)	1.4620E-1(4)	1.5008E-1	1.4806E-1
$k=6.090E-3$	K_1	7.5191E-3(3)	8.3016E-3(3)	8.3465E-3(3)	8.3627E-3	8.3429E-3
	K_2	3.5690E-2(4)	3.7019E-2(4)	3.7207E-2(4)	3.5757E-2	3.8502E-2
	K_3	3.8078E-2(4)	4.0091E-2(4)	4.0262E-2(4)	4.3077E-2	3.9867E-2
	K_4	9.9017E-2(3)	1.0521E-1(3)	1.0562E-1(3)	1.1722E-1	1.0595E-1
	K_5	1.6227E-1(4)	1.6053E-1(4)	1.6013E-1(4)	1.6449E-1	1.6355E-1

a: 三次項幾何非線性分析結果

b: MSC NASTRAN 結果

表十 旋轉梁不同轉速的收斂性及準確性分析
(矩形斷面 $a/b=0.1$, $L_T/a=100$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$, $\gamma=15^\circ$)

		A10	A20	A50	a[24]	b[24]	
$k=0$	K_1	1.0150E-2(3)	1.0150E-2(3)	1.0150E-2(3)	—	—	
	K_2	6.3602E-2(3)	6.3600E-2(3)	6.3599E-2(3)	—	—	
	K_3	1.0130E-1(2)	1.0130E-1(2)	1.0130E-1(2)	—	—	
	K_4	1.7809E-1(3)	1.7805E-1(3)	1.7805E-1(3)	—	—	
	K_5	1.9266E-1(4)	1.9235E-1(4)	1.9230E-1(4)	—	—	
$k=6.090E-3$	K_1	1.2007E-2(3)	1.2020E-2(3)	1.2020E-2(3)	—	—	
	K_2	6.5280E-2(3)	6.5321E-2(3)	6.5322E-2(3)	—	—	
	K_3	9.6089E-2(4)	9.6217E-2(4)	9.6271E-2(4)	—	—	
	K_4	1.7949E-1(3)	1.7956E-1(3)	1.7956E-1(3)	—	—	
	K_5	1.9958E-1(4)	1.9896E-1(4)	1.9882E-1(4)	—	—	
	ε_0	1.6692E-5	1.6620E-5	1.6557E-5	—	—	
	ε_c	-2.8625E-3	-2.8667E-3	-2.8679E-3	—	—	
	W_{tip}	-7.2949E-2	-7.2963E-2	-7.2966E-2	—	—	
	$k=1.218E-2$	K_1	1.6502E-2(3)	1.6563E-2(3)	1.6566E-2(3)	—	—
		K_2	7.0120E-2(3)	7.0344E-2(3)	7.0354E-2(3)	—	—
K_3		8.5152E-2(4)	8.5617E-2(4)	8.5809E-2(4)	—	—	
K_4		1.8361E-1(3)	1.8410E-1(3)	1.8414E-1(3)	—	—	
K_5		2.1352E-1(4)	2.1215E-1(4)	2.1176E-1(4)	—	—	
ε_0		6.6210E-5	6.5346E-5	6.4666E-5	—	—	
ε_c		-7.2870E-3	-7.3246E-3	-7.3357E-3	—	—	
W_{tip}		-1.5408E-1	-1.5413E-1	-1.5414E-1	—	—	
$k=2.030E-2$		K_1	2.3845E-2(3)	2.3978E-2(3)	2.3986E-2(3)	2.3815E-2	2.4054E-2
		K_2	7.9346E-2(4)	8.0031E-2(4)	8.0192E-2(4)	8.0310E-2	8.1777E-2
	K_3	8.2994E-2(4)	8.3691E-2(4)	8.3924E-2(4)	8.2505E-1	8.3084E-1	
	K_4	1.9480E-1(3)	1.9581E-1(3)	1.9588E-1(3)	2.0067E-1	1.9644E-1	
	K_5	2.1718E-1(4)	2.1525E-1(4)	2.1470E-1(4)	2.2432E-1	2.1852E-1	
	ε_0	1.8661E-4	1.8292E-4	1.7982E-4	—	—	
	ε_c	-1.2559E-2	-1.2721E-2	-1.2771E-2	—	—	
	W_{tip}	-2.0095E-1	-2.0100E-1	-2.0102E-1	—	—	

a: 三次項幾何非線性分析結果

b: MSC NASTRAN 結果

表十一 旋轉梁不同轉速的收斂分析
 (矩形斷面 $a/b=0.1$, $L_T/a=100$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$, $\gamma=15^\circ$)

		A10	A20	A50
$k=0$	K_1	1.0150E-2(3)	1.0150E-2(3)	1.0150E-2(3)
	K_2	6.3602E-2(3)	6.3600E-2(3)	6.3599E-2(3)
	K_3	1.0130E-1(2)	1.0130E-1(2)	1.0130E-1(2)
	K_4	1.7809E-1(3)	1.7805E-1(3)	1.7805E-1(3)
	K_5	1.9266E-1(4)	1.9235E-1(4)	1.9230E-1(4)
$k=0.001$	K_1	1.0276E-2(3)	1.0276E-2(3)	1.0276E-2(3)
	K_2	6.3714E-2(3)	6.3712E-2(3)	6.3712E-2(3)
	K_3	1.0127E-1(2)	1.0127E-1(2)	1.0127E-1(2)
	K_4	1.7820E-1(3)	1.7816E-1(3)	1.7816E-1(3)
	K_5	1.9273E-1(4)	1.9241E-1(4)	1.9237E-1(4)
	ε_0	1.3771E-6	1.4016E-6	1.4159E-6
	ε_c	-2.5005E-4	-2.5029E-4	-2.5035E-4
	W_{tip}	-6.4687E-3	-6.4688E-3	-6.4689E-3
$k=0.005$	K_1	1.3024E-2(3)	1.3047E-2(3)	1.3048E-2(3)
	K_2	6.6251E-2(3)	6.6339E-2(3)	6.6342E-2(3)
	K_3	9.2846E-2(4)	9.3089E-2(4)	9.3190E-2(4)
	K_4	1.8030E-1(3)	1.8048E-1(3)	1.8049E-1(3)
	K_5	2.0378E-1(4)	2.0292E-1(4)	2.0270E-1(4)
	ε_0	3.3079E-5	3.3381E-5	3.3525E-5
	ε_c	-4.3695E-3	-4.3865E-3	-4.3915E-3
	W_{tip}	-1.0032E-1	-1.0036E-1	-1.0037E-1
$k=0.01$	K_1	1.9270E-2(3)	1.9354E-2(3)	1.9357E-2(3)
	K_2	7.3788E-2(3)	7.4140E-2(3)	7.4157E-2(3)
	K_3	8.3593E-2(4)	8.4315E-2(4)	8.4608E-2(4)
	K_4	1.8742E-1(3)	1.8819E-1(3)	1.8825E-1(3)
	K_5	2.1523E-1(4)	2.1352E-1(4)	2.1303E-1(4)
	ε_0	1.3198E-4	1.3193E-4	1.3145E-4
	ε_c	-1.0262E-2	-1.0379E-2	-1.0415E-2
	W_{tip}	-1.8068E-1	-1.8077E-1	-1.8080E-1

表十二 旋轉梁不同轉速的收斂性及準確性分析
 (矩形斷面 $a/b=0.25$, $L_T/a=40$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$, $\gamma=45^\circ$)

		A10	A20	A50	a[24]	b[24]
$k=0$	K_1	2.5372E-2(3)	2.5372E-2(3)	2.5372E-2(3)	—	—
	K_2	1.0130E-1(2)	1.0130E-1(2)	1.0130E-1(2)	—	—
	K_3	1.5889E-1(3)	1.5889E-1(3)	1.5889E-1(3)	—	—
	K_4	4.4448E-1(3)	4.4396E-1(4)	4.4384E-1(4)	—	—
	K_5	4.4475E-1(4)	4.4438E-1(3)	4.4437E-1(3)	—	—
$k=1.015E-2$	K_1	2.5774E-2(3)	2.5783E-2(3)	2.5784E-2(3)	—	—
	K_2	1.0098E-1(4)	1.0101E-1(4)	1.0102E-1(4)	—	—
	K_3	1.5969E-1(3)	1.5971E-1(3)	1.5971E-1(3)	—	—
	K_4	4.4451E-1(3)	4.4447E-1(3)	4.4446E-1(3)	—	—
	K_5	4.4657E-1(4)	4.4548E-1(4)	4.4527E-1(4)	—	—
	ε_0	2.0771E-5	2.0030E-5	1.9536E-5	—	—
	ε_c	-4.0653E-3	-4.0672E-3	-4.0676E-3	—	—
	W_{tip}	-8.7615E-2	-8.7621E-2	-8.7622E-2	—	—
$k=1.523E-2$	K_1	2.7265E-2(3)	2.7308E-2(3)	2.7312E-2(3)	—	—
	K_2	9.8390E-2(4)	9.8496E-2(4)	9.8542E-2(4)	—	—
	K_3	1.6067E-1(3)	1.6080E-1(3)	1.6081E-1(3)	—	—
	K_4	4.4272E-1(3)	4.4294E-1(3)	4.4297E-1(3)	—	—
	K_5	4.5177E-1(4)	4.4975E-1(4)	4.4923E-1(4)	—	—
	ε_0	3.5447E-5	3.1556E-5	2.8999E-5	—	—
	ε_c	-8.7473E-3	-8.7561E-3	-8.7585E-3	—	—
	W_{tip}	-1.8198E-1	-1.8200E-1	-1.8201E-1	—	—
$k=2.537E-2$	K_1	3.3904E-2(3)	3.4086E-2(3)	3.4106E-2(3)	3.4845E-2	3.4729E-2
	K_2	8.9777E-2(4)	9.0130E-2(4)	9.0281E-2(4)	8.8163E-2	8.8829E-2
	K_3	1.6510E-1(3)	1.6573E-1(3)	1.6578E-1(3)	1.7949E-1	1.6617E-1
	K_4	4.3669E-1(3)	4.3797E-1(3)	4.3811E-1(3)	4.8843E-1	4.4087E-1
	K_5	4.6610E-1(4)	4.6150E-1(4)	4.6019E-1(4)	4.9632E-1	4.8460E-1
	ε_0	5.5604E-5	3.0022E-5	1.2731E-5	—	—
	ε_c	-1.9881E-2	-1.9938E-2	-1.9954E-2	—	—
	W_{tip}	-3.6386E-1	-3.6390E-1	-3.6391E-1	—	—

a: 三次項幾何非線性分析結果

b: MSC NASTRAN 結果

表十三 旋轉梁不同轉速的收斂分析
 (矩形斷面 $a/b=0.25$, $L_T/a=40$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$, $\gamma=45^\circ$)

		A10	A20	A50	
$k=0$	K_1	2.5372E-2(3)	2.5372E-2(3)	2.5372E-2(3)	
	K_2	1.0130E-1(2)	1.0130E-1(2)	1.0130E-1(2)	
	K_3	1.5889E-1(3)	1.5889E-1(3)	1.5889E-1(3)	
	K_4	4.4448E-1(3)	4.4396E-1(4)	4.4384E-1(4)	
	K_5	4.4475E-1(4)	4.4438E-1(3)	4.4437E-1(3)	
$k=0.001$	K_1	2.5393E-2(3)	2.5393E-2(3)	2.5393E-2(3)	
	K_2	1.0132E-1(2)	1.0132E-1(2)	1.0132E-1(2)	
	K_3	1.5892E-1(3)	1.5891E-1(3)	1.5891E-1(3)	
	K_4	4.4451E-1(3)	4.4396E-1(4)	4.4385E-1(4)	
	K_5	4.4475E-1(4)	4.4440E-1(3)	4.4440E-1(3)	
	ε_0	9.1540E-7	9.3287E-7	9.4312E-7	
	ε_c	-1.2452E-4	-1.2464E-4	-1.2467E-4	
	W_{tip}	-2.5720E-3	-2.5720E-3	-2.5720E-3	
	$k=0.005$	K_1	2.6009E-2(3)	2.6012E-2(3)	2.6012E-2(3)
		K_2	1.0114E-1(4)	1.0115E-1(4)	1.0116E-1(4)
K_3		1.5952E-1(3)	1.5953E-1(3)	1.5953E-1(3)	
K_4		4.4474E-1(3)	4.4465E-1(4)	4.4458E-1(4)	
K_5		4.4570E-1(4)	4.4478E-1(4)	4.4468E-1(4)	
ε_0		1.9849E-5	1.9806E-5	1.9749E-5	
ε_c		-3.0032E-3	-3.0069E-3	-3.0080E-3	
W_{tip}		-6.1197E-2	-6.1201E-2	-6.1202E-2	
$k=0.01$		K_1	2.8700E-2(3)	2.8752E-2(3)	2.8757E-2(3)
		K_2	9.7445E-2(4)	9.7590E-2(4)	9.7652E-2(4)
	K_3	1.6113E-1(3)	1.6130E-1(3)	1.6132E-1(3)	
	K_4	4.4229E-1(3)	4.4262E-1(3)	4.4266E-1(3)	
	K_5	4.5385E-1(4)	4.5155E-1(4)	4.5094E-1(4)	
	ε_0	5.3907E-5	4.8758E-5	4.5189E-5	
	ε_c	-1.0625E-2	-1.0650E-2	-1.0657E-2	
	W_{tip}	-2.0494E-1	-2.0497E-1	-2.0498E-1	

表十四 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3051E-6	3.0350E-5	1.1090E-4	1.2143E-6	2.8328E-5	1.0314E-4
ε_b	0.0000E+0	-4.6584E-6	-1.1651E-4	-4.6792E-4	-8.9993E-6	-2.2507E-4	-9.0365E-4
ε_c	0.0000E+0	-2.1655E-4	-4.7148E-3	-1.3772E-2	-2.0296E-4	-4.4539E-3	-1.3154E-2
U_{tip}	0.0000E+0	-5.7844E-6	-2.8042E-3	-1.8537E-2	-5.0703E-6	-2.5317E-3	-1.7492E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-3.4957E-6	-1.0546E-4	-7.7116E-4	-6.7529E-6	-2.0050E-4	-1.4560E-3
W_{tip}	0.0000E+0	-3.3689E-3	-7.0217E-2	-1.8062E-1	-3.1657E-3	-6.6712E-2	-1.7535E-1
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	-1.1499E-6	-5.8196E-4	-5.4511E-3	-2.0907E-6	-1.0718E-3	-1.0337E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	-3.7998E-6	-1.9404E-3	-1.8732E-2	-6.9038E-6	-3.5695E-3	-3.5396E-2
K_1	1.6916E-2(3)	1.6983E-2(3)	1.8623E-2(3)	2.3349E-2(3)	1.6979E-2(3)	1.8515E-2(3)	2.2974E-2(3)
K_2	1.0453E-1(4)	1.0454E-1(4)	1.0424E-1(4)	1.0224E-1(4)	1.0454E-1(4)	1.0415E-1(4)	1.0161E-1(4)
K_3	1.0597E-1(3)	1.0604E-1(3)	1.0753E-1(3)	1.1223E-1(3)	1.0603E-1(3)	1.0756E-1(3)	1.1251E-1(3)
K_4	2.9658E-1(3)	2.9664E-1(3)	2.9219E-1(4)	2.4627E-1(4)	2.9663E-1(3)	2.9370E-1(4)	2.4755E-1(4)
K_5	3.2831E-1(4)	3.2739E-1(4)	2.9785E-1(3)	3.0088E-1(3)	3.2748E-1(4)	2.9798E-1(3)	3.0094E-1(3)
K_6	3.3126E-1(2)	3.3221E-1(4)	3.6926E-1(4)	4.1523E-1(4)	3.3212E-1(4)	3.6744E-1(4)	4.1413E-1(4)
K_7	5.8073E-1(3)	5.8080E-1(3)	5.8186E-1(3)	5.8396E-1(3)	5.8079E-1(3)	5.8176E-1(3)	5.8365E-1(3)
K_8	5.9305E-1(4)	5.9311E-1(4)	6.0112E-1(4)	6.4253E-1(4)	5.9310E-1(4)	6.0041E-1(4)	6.4023E-1(4)

表十五 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3081E-6	3.1723E-5	1.2165E-4	1.2181E-6	3.0103E-5	1.1831E-4
ε_b	0.0000E+0	-9.4149E-6	-2.3112E-4	-8.9400E-4	-1.2833E-5	-3.1809E-4	-1.2515E-3
ε_c	0.0000E+0	-1.4133E-4	-3.1206E-3	-9.3481E-3	-8.6340E-5	-1.9175E-3	-5.7884E-3
U_{tip}	0.0000E+0	-2.1181E-6	-1.2631E-3	-9.1508E-3	-4.5111E-7	-5.0714E-4	-3.9667E-3
V_{tip}	0.0000E+0	-7.2313E-6	-2.0649E-4	-1.2362E-3	-9.7860E-6	-2.6015E-4	-1.3149E-3
W_{tip}	0.0000E+0	-2.2260E-3	-4.7282E-2	-1.2722E-1	-1.4028E-3	-3.0181E-2	-8.3949E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	-4.3980E-5	-1.8882E-3	-1.2105E-2	-4.3747E-5	-1.7922E-3	-1.1744E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	-7.0984E-5	-4.3425E-3	-3.2887E-2	-7.0230E-5	-4.0224E-3	-3.1378E-2
K_1	1.6916E-2(3)	1.6976E-2(3)	1.8426E-2(3)	2.2567E-2(3)	1.6972E-2(3)	1.8299E-2(3)	2.2020E-2(3)
K_2	1.0453E-1(4)	1.0454E-1(4)	1.0436E-1(4)	1.0292E-1(4)	1.0454E-1(4)	1.0432E-1(4)	1.0276E-1(4)
K_3	1.0597E-1(3)	1.0604E-1(3)	1.0768E-1(3)	1.1295E-1(3)	1.0603E-1(3)	1.0778E-1(3)	1.1356E-1(4)
K_4	2.9658E-1(3)	2.9664E-1(3)	2.9779E-1(3)	2.6689E-1(4)	2.9663E-1(3)	2.9784E-1(3)	2.8451E-1(4)
K_5	3.2831E-1(4)	3.2786E-1(4)	3.0424E-1(4)	3.0244E-1(3)	3.2812E-1(4)	3.1319E-1(4)	3.0406E-1(4)
K_6	3.3126E-1(2)	3.3174E-1(4)	3.5689E-1(4)	3.9633E-1(4)	3.2812E-1(4)	3.4750E-1(4)	3.7724E-1(4)
K_7	5.8073E-1(3)	5.8080E-1(3)	5.8205E-1(3)	5.8525E-1(3)	5.8079E-1(3)	5.8197E-1(3)	5.8454E-1(4)
K_8	5.9305E-1(4)	5.9310E-1(4)	5.9725E-1(4)	6.2021E-1(4)	5.9309E-1(4)	5.9539E-1(4)	6.0802E-1(4)

表十六 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3101E-6	3.2712E-5	1.3051E-4	1.2184E-6	3.0246E-5	1.1924E-4
ε_b	0.0000E+0	-1.1661E-5	-2.9048E-4	-1.1529E-3	-1.3240E-5	-3.3239E-4	-1.3410E-3
ε_c	0.0000E+0	-2.8139E-5	-6.3524E-4	-1.9794E-3	5.3618E-5	1.2432E-3	4.1505E-3
U_{tip}	0.0000E+0	5.9403E-7	-4.7834E-5	-4.9304E-4	3.7519E-7	-1.3475E-4	-1.2752E-3
V_{tip}	0.0000E+0	-9.0019E-6	-2.2832E-4	-9.6317E-4	-1.0174E-5	-2.5436E-4	-1.0728E-3
W_{tip}	0.0000E+0	-4.8486E-4	-1.0673E-2	-3.1287E-2	7.3954E-4	1.6422E-2	4.9110E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	-4.2810E-5	-1.3131E-3	-7.0723E-3	-4.1609E-5	-6.6313E-4	1.7754E-4
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	-6.7172E-5	-2.4452E-3	-1.5576E-2	-6.3283E-5	-3.2734E-4	8.4404E-3
K_1	1.6916E-2(3)	1.6964E-2(3)	1.8079E-2(3)	2.1148E-2(3)	1.6959E-2(3)	1.7965E-2(3)	2.0648E-2(3)
K_2	1.0453E-1(4)	1.0453E-1(4)	1.0438E-1(4)	1.0327E-1(4)	1.0453E-1(4)	1.0425E-1(4)	1.0248E-1(4)
K_3	1.0597E-1(3)	1.0603E-1(3)	1.0779E-1(3)	1.1358E-1(4)	1.0603E-1(3)	1.0779E-1(3)	1.1371E-1(4)
K_4	2.9658E-1(3)	2.9664E-1(3)	2.9804E-1(3)	3.0056E-1(4)	2.9663E-1(3)	2.9791E-1(3)	2.9826E-1(4)
K_5	3.2831E-1(4)	3.2831E-1(4)	3.2386E-1(4)	3.1536E-1(4)	3.2828E-1(4)	3.2133E-1(4)	3.0974E-1(4)
K_6	3.3126E-1(2)	3.3129E-1(4)	3.3651E-1(4)	5.8439E-1(4)	3.3131E-1(4)	3.3898E-1(4)	3.5580E-1(4)
K_7	5.8073E-1(3)	5.8080E-1(3)	5.8215E-1(3)	5.8439E-1(4)	5.8079E-1(3)	5.8197E-1(3)	5.8351E-1(4)
K_8	5.9305E-1(4)	5.9309E-1(4)	5.9428E-1(4)	6.0051E-1(4)	5.9309E-1(4)	5.9452E-1(4)	6.0266E-1(4)

表十七 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3092E-6	3.2195E-5	1.2461E-4	1.2150E-6	2.8376E-5	9.7645E-5
ε_b	0.0000E+0	-1.0778E-5	-2.6933E-4	-1.0758E-3	-1.0090E-5	-2.5211E-4	-1.0062E-3
ε_c	0.0000E+0	9.2853E-5	2.1515E-3	7.1324E-3	1.7945E-4	4.1887E-3	1.4017E-2
U_{tip}	0.0000E+0	-3.7426E-7	-5.3025E-4	-4.8386E-3	-3.4434E-6	-2.0705E-3	-1.8973E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-8.3730E-6	-2.1778E-4	-1.1146E-3	-7.8588E-6	-2.2707E-4	-1.7934E-3
W_{tip}	0.0000E+0	1.3906E-3	3.1037E-2	9.3198E-2	2.6878E-3	6.0516E-2	1.8274E-1
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	1.2041E-6	6.5705E-4	7.3998E-3	2.1949E-6	1.2089E-3	1.3598E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	3.8531E-6	2.1128E-3	2.4112E-2	7.0055E-6	3.8770E-3	4.4275E-2
K_1	1.6916E-2(3)	1.6957E-2(3)	1.7935E-2(3)	2.0674E-2(3)	1.6953E-2(3)	1.7862E-2(3)	2.0606E-2(3)
K_2	1.0453E-1(4)	1.0453E-1(4)	1.0427E-1(4)	1.0254E-1(4)	1.0453E-1(4)	1.0397E-1(4)	1.0021E-1(4)
K_3	1.0597E-1(3)	1.0603E-1(3)	1.0771E-1(3)	1.1318E-1(4)	1.0603E-1(3)	1.0755E-1(3)	1.1234E-1(3)
K_4	2.9658E-1(3)	2.9664E-1(3)	2.9794E-1(3)	2.8218E-1(4)	2.9663E-1(3)	2.9644E-1(4)	2.4490E-1(4)
K_5	3.2831E-1(4)	3.2814E-1(4)	3.1317E-1(4)	3.0343E-1(3)	3.2769E-1(4)	2.9878E-1(4)	3.0065E-1(3)
K_6	3.3126E-1(2)	3.3146E-1(4)	3.4739E-1(4)	3.7923E-1(4)	3.3190E-1(4)	3.6348E-1(4)	4.1529E-1(4)
K_7	5.8073E-1(3)	5.8080E-1(3)	5.8209E-1(3)	5.8510E-1(4)	5.8079E-1(3)	5.8176E-1(3)	5.8306E-1(3)
K_8	5.9305E-1(4)	5.9309E-1(4)	5.9547E-1(4)	6.1003E-1(4)	5.9310E-1(4)	5.9929E-1(4)	6.4355E-1(4)

表十八 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.1144E-7	1.5367E-5	1.8519E-5	8.4353E-7	1.4573E-5	1.7256E-5
ε_b	0.0000E+0	-4.6584E-6	-1.1670E-4	-4.7497E-4	-8.9994E-6	-2.2540E-4	-9.1603E-4
ε_c	0.0000E+0	-3.6475E-4	-8.4093E-3	-2.6110E-2	-3.3950E-4	-7.8865E-3	-2.4843E-2
U_{tip}	0.0000E+0	-1.7770E-5	-9.0848E-3	-6.8932E-2	-1.5445E-5	-8.0785E-3	-6.4581E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-3.4989E-6	-1.4609E-4	-1.9190E-3	-6.7582E-6	-2.7015E-4	-3.5604E-3
W_{tip}	0.0000E+0	-5.6445E-3	-1.2579E-1	-3.4228E-1	-5.2667E-3	-1.1862E-1	-3.3141E-1
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	-1.9210E-6	-1.0478E-3	-1.0440E-2	-3.4675E-6	-1.9150E-3	-1.9738E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	-6.3562E-6	-3.4919E-3	-3.6000E-2	-1.1467E-5	-6.3741E-3	-6.7747E-2
K_1	1.6916E-2(3)	1.6951E-2(3)	1.8075E-2(3)	2.2636E-2(3)	1.6947E-2(3)	1.7968E-2(3)	2.2227E-2(3)
K_2	1.0453E-1(4)	1.0453E-1(4)	1.0271E-1(4)	9.2678E-2(4)	1.0453E-1(4)	1.0280E-1(4)	9.2750E-2(4)
K_3	1.0597E-1(3)	1.0601E-1(3)	1.0693E-1(3)	1.1002E-1(3)	1.0601E-1(3)	1.0697E-1(3)	1.1019E-1(3)
K_4	2.9658E-1(3)	2.9662E-1(3)	2.6546E-1(4)	2.0006E-1(4)	2.9661E-1(3)	2.6856E-1(4)	2.0195E-1(4)
K_5	3.2831E-1(4)	3.2628E-1(4)	2.9652E-1(3)	2.9351E-1(3)	3.2647E-1(4)	2.9660E-1(3)	2.9387E-1(3)
K_6	3.3126E-1(2)	3.3332E-1(4)	3.9735E-1(4)	4.4751E-1(4)	3.3313E-1(4)	3.9415E-1(4)	4.4727E-1(4)
K_7	5.8073E-1(3)	5.8077E-1(3)	5.8026E-1(3)	5.7418E-1(3)	5.8077E-1(3)	5.8034E-1(3)	5.7465E-1(3)
K_8	5.9305E-1(4)	5.9313E-1(4)	6.1699E-1(4)	7.2542E-1(4)	5.9312E-1(4)	6.1437E-1(4)	7.2166E-1(4)

表十九 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.1820E-7	1.8806E-5	4.5564E-5	8.5176E-7	1.8914E-5	5.5993E-5
ε_b	0.0000E+0	-1.3088E-5	-3.2229E-4	-1.2520E-3	-1.6214E-5	-4.0155E-4	-1.5759E-3
ε_c	0.0000E+0	-2.6954E-4	-6.2959E-3	-2.0294E-2	-2.0435E-4	-4.8142E-3	-1.5910E-2
U_{tip}	0.0000E+0	-9.5911E-6	-5.1954E-3	-4.4964E-2	-5.4795E-6	-3.1378E-3	-2.9918E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-1.0055E-5	-3.5919E-4	-4.0437E-3	-1.2391E-5	-3.9190E-4	-3.8829E-3
W_{tip}	0.0000E+0	-4.1943E-3	-9.5228E-2	-2.7784E-1	-3.2177E-3	-7.4028E-2	-2.2719E-1
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	-2.9102E-5	-2.9693E-3	-2.6817E-2	-2.8864E-5	-2.8927E-3	-2.8100E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	-5.2347E-5	-8.5868E-3	-8.4888E-2	-5.1603E-5	-8.3399E-3	-8.8516E-2
K_1	1.6916E-2(3)	1.6947E-2(3)	1.7860E-2(3)	2.1534E-2(3)	1.6943E-2(3)	1.7716E-2(3)	2.0759E-2(3)
K_2	1.0453E-1(4)	1.0453E-1(4)	1.0321E-1(4)	9.5202E-2(4)	1.0453E-1(4)	1.0342E-1(4)	9.6625E-2(4)
K_3	1.0597E-1(3)	1.0602E-1(3)	1.0728E-1(3)	1.1128E-1(3)	1.0601E-1(3)	1.0745E-1(4)	1.1209E-1(4)
K_4	2.9658E-1(3)	2.9662E-1(3)	2.7938E-1(4)	2.1411E-1(4)	2.9661E-1(3)	2.8937E-1(4)	2.2754E-1(4)
K_5	3.2831E-1(4)	3.2700E-1(4)	2.9714E-1(3)	2.9658E-1(3)	3.2744E-1(4)	2.9764E-1(3)	2.9847E-1(3)
K_6	3.3126E-1(2)	3.3260E-1(4)	3.8271E-1(4)	4.4151E-1(4)	3.3215E-1(4)	3.7181E-1(4)	4.3308E-1(4)
K_7	5.8073E-1(3)	5.8077E-1(3)	5.8086E-1(3)	5.7799E-1(3)	5.8077E-1(3)	5.8104E-1(3)	5.8003E-1(3)
K_8	5.9305E-1(4)	5.9310E-1(4)	6.0702E-1(4)	6.9572E-1(4)	5.9309E-1(4)	6.0176E-1(4)	6.6843E-1(4)

表二十 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.2503E-7	2.2504E-5	8.3473E-5	8.5618E-7	2.1381E-5	8.5173E-5
ε_b	0.0000E+0	-1.8024E-5	-4.4853E-4	-1.7734E-3	-1.9096E-5	-4.7695E-4	-1.9028E-3
ε_c	0.0000E+0	-1.0205E-4	-2.4399E-3	-8.5280E-3	-1.4313E-5	-3.4144E-4	-1.1909E-3
U_{tip}	0.0000E+0	-1.0005E-6	-8.1371E-4	-9.1764E-3	4.1761E-7	-1.9273E-5	-3.4285E-4
V_{tip}	0.0000E+0	-1.3884E-5	-3.7360E-4	-2.3900E-3	-1.4679E-5	-3.6898E-4	-1.5363E-3
W_{tip}	0.0000E+0	-1.6191E-3	-3.7920E-2	-1.2657E-1	-3.0434E-4	-7.2188E-3	-2.5504E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	-2.7151E-5	-1.9719E-3	-1.9716E-2	-2.5330E-5	-9.3222E-4	-6.8797E-3
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	-4.5977E-5	-5.2863E-3	-5.9307E-2	-4.0084E-5	-1.9088E-3	-1.7128E-2
K_1	1.6916E-2(3)	1.6939E-2(3)	1.7513E-2(3)	1.9383E-2(3)	1.6936E-2(3)	1.7395E-2(3)	1.8602E-2(3)
K_2	1.0453E-1(4)	1.0453E-1(4)	1.0368E-1(4)	9.9090E-2(4)	1.0453E-1(4)	1.0372E-1(4)	9.9902E-2(4)
K_3	1.0597E-1(3)	1.0602E-1(3)	1.0773E-1(4)	1.1354E-1(4)	1.0601E-1(3)	1.0779E-1(4)	1.1410E-1(4)
K_4	2.9658E-1(3)	2.9662E-1(3)	2.9718E-1(3)	2.6358E-1(4)	2.9661E-1(3)	2.9737E-1(3)	2.9654E-1(4)
K_5	3.2831E-1(4)	3.2806E-1(4)	3.0914E-1(4)	3.0223E-1(3)	3.2831E-1(4)	3.2549E-1(4)	3.1820E-1(4)
K_6	3.3126E-1(2)	3.3153E-1(4)	3.5178E-1(4)	3.9876E-1(4)	3.3127E-1(4)	3.3476E-1(4)	3.4734E-1(4)
K_7	5.8073E-1(3)	5.8077E-1(3)	5.8132E-1(3)	5.8206E-1(4)	5.8077E-1(3)	5.8124E-1(4)	5.7885E-1(4)
K_8	5.9305E-1(4)	5.9308E-1(4)	5.9609E-1(4)	6.2043E-1(4)	5.9308E-1(4)	5.9419E-1(4)	6.0178E-1(4)

表二十一 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.2509E-7	2.2524E-5	8.3240E-5	8.5235E-7	1.9098E-5	5.1747E-5
ε_b	0.0000E+0	-1.8127E-5	-4.5307E-4	-1.8111E-3	-1.6855E-5	-4.2128E-4	-1.6831E-3
ε_c	0.0000E+0	9.3039E-5	2.2514E-3	8.1906E-3	1.7979E-4	4.3754E-3	1.5968E-2
U_{tip}	0.0000E+0	-6.0284E-7	-6.0963E-4	-7.4942E-3	-3.6764E-6	-2.3439E-3	-2.8237E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-1.4005E-5	-3.6643E-4	-2.1627E-3	-1.3054E-5	-3.8430E-4	-3.9220E-3
W_{tip}	0.0000E+0	1.3943E-3	3.3026E-2	1.1492E-1	2.6947E-3	6.4223E-2	2.2125E-1
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	1.9963E-6	1.1673E-3	1.5781E-2	3.6127E-6	2.1256E-3	2.8037E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	6.4271E-6	3.7668E-3	5.1106E-2	1.1602E-5	6.8428E-3	9.0888E-2
K_1	1.6916E-2(3)	1.6935E-2(3)	1.7393E-2(3)	1.8682E-2(3)	1.6932E-2(3)	1.7348E-2(3)	1.8902E-2(3)
K_2	1.0453E-1(4)	1.0453E-1(4)	1.0367E-1(4)	9.9075E-2(4)	1.0453E-1(4)	1.0341E-1(4)	9.6102E-2(4)
K_3	1.0597E-1(3)	1.0602E-1(3)	1.0775E-1(4)	1.1367E-1(4)	1.0601E-1(3)	1.0752E-1(4)	1.1226E-1(4)
K_4	2.9658E-1(3)	2.9662E-1(3)	2.9726E-1(3)	2.6910E-1(4)	2.9661E-1(3)	2.9410E-1(4)	2.2942E-1(4)
K_5	3.2831E-1(4)	3.2813E-1(4)	3.1206E-1(4)	3.0266E-1(3)	3.2769E-1(4)	2.9846E-1(4)	2.9863E-1(3)
K_6	3.3126E-1(2)	3.3146E-1(4)	3.4855E-1(4)	3.9130E-1(4)	3.3190E-1(4)	3.6565E-1(4)	4.2953E-1(4)
K_7	5.8073E-1(3)	5.8077E-1(3)	5.8131E-1(3)	5.8172E-1(4)	5.8077E-1(3)	5.8107E-1(3)	5.7983E-1(3)
K_8	5.9305E-1(4)	5.9308E-1(4)	5.9564E-1(4)	6.1669E-1(4)	5.9309E-1(4)	5.9987E-1(4)	6.6458E-1(4)

表二十二 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 0^\circ$				$\alpha = 5^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.5000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3410E-6	3.3284E-5	1.3042E-4	1.3374E-6	4.0031E-5	1.2850E-4
ε_b	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-1.6568E-5	-4.6501E-4	-1.2499E-3
ε_c	0.0000E+0	-2.1059E-5	-5.2043E-4	-2.0098E-3	-2.1009E-5	-6.2657E-4	-1.9959E-3
U_{tip}	0.0000E+0	7.0736E-7	-5.0526E-6	-2.7137E-4	6.3335E-7	-6.8652E-5	-1.0347E-3
V_{tip}	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-3.5603E-4	-9.9346E-3	-3.4175E-2
W_{tip}	0.0000E+0	-2.6095E-4	-6.4277E-3	-2.4565E-2	-2.6036E-4	-7.7733E-3	-2.6509E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	1.5671E-5	1.2938E-2	1.6913E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	3.3566E-5	2.7708E-2	3.3951E-1
K_1	1.9410E-2(2)	1.9446E-2(2)	2.0089E-2(4)	1.9305E-2(4)	1.9446E-2(2)	2.0177E-2(4)	1.9677E-2(4)
K_2	6.1580E-2(3)	6.1604E-2(3)	6.2180E-2(3)	5.9712E-2(4)	6.1603E-2(3)	6.1638E-2(4)	5.2772E-2(4)
K_3	6.7990E-2(4)	6.8002E-2(4)	6.7591E-2(4)	6.3958E-2(4)	6.8002E-2(4)	6.8028E-2(4)	7.2583E-2(4)
K_4	1.2159E-1(2)	1.2164E-1(2)	1.2306E-1(4)	1.2868E-1(4)	1.2164E-1(2)	1.2341E-1(4)	1.2964E-1(4)
K_5	2.3320E-1(4)	2.3323E-1(4)	2.3353E-1(4)	2.3037E-1(4)	2.3323E-1(4)	2.3367E-1(4)	2.3375E-1(4)
K_6	3.4022E-1(2)	3.4028E-1(2)	3.4153E-1(4)	3.4467E-1(4)	3.4028E-1(2)	3.4172E-1(4)	3.3686E-1(4)
K_7	3.8428E-1(3)	3.8430E-1(3)	3.8473E-1(3)	3.8608E-1(3)	3.8430E-1(3)	3.8493E-1(3)	3.9533E-1(4)
K_8	4.8085E-1(4)	4.8089E-1(4)	4.8177E-1(4)	4.8349E-1(4)	4.8089E-1(4)	4.8204E-1(4)	4.8499E-1(4)

表二十三 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3090E-6	3.2053E-5	1.1650E-4	1.2156E-6	2.8527E-5	8.7908E-5
ε_b	0.0000E+0	-4.9204E-5	-1.1587E-3	-3.8051E-3	-9.5084E-5	-2.2529E-3	-7.6250E-3
ε_c	0.0000E+0	-2.0615E-5	-5.0899E-4	-1.9089E-3	-1.9313E-5	-4.7567E-4	-1.7073E-3
U_{tip}	0.0000E+0	5.4288E-8	-3.5383E-4	-5.8717E-3	-1.7348E-6	-1.3196E-3	-1.7472E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-1.0574E-3	-2.4666E-2	-9.3483E-2	-2.0435E-3	-4.7890E-2	-1.6629E-1
W_{tip}	0.0000E+0	-2.5567E-4	-6.4885E-3	-3.5892E-2	-2.4016E-4	-6.5819E-3	-4.7645E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	4.5726E-5	2.5932E-2	3.8079E-1	8.3153E-5	4.6554E-2	4.7570E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	9.7914E-5	5.5664E-2	7.9936E-1	1.7791E-4	1.0018E-1	1.0683E+0
K_1	1.9410E-2(2)	1.9445E-2(2)	2.0077E-2(4)	2.1035E-2(4)	1.9441E-2(2)	2.0036E-2(4)	2.2053E-2(4)
K_2	6.1580E-2(3)	6.1597E-2(4)	5.9446E-2(4)	4.4260E-2(4)	6.1578E-2(4)	5.5610E-2(4)	3.9719E-2(4)
K_3	6.7990E-2(4)	6.8008E-2(4)	7.0439E-2(4)	8.6286E-2(4)	6.8025E-2(4)	7.4554E-2(4)	9.3794E-2(4)
K_4	1.2159E-1(2)	1.2164E-1(2)	1.2304E-1(4)	1.3291E-1(4)	1.2164E-1(2)	1.2298E-1(4)	1.3324E-1(4)
K_5	2.3320E-1(4)	2.3323E-1(4)	2.3454E-1(4)	2.4958E-1(4)	2.3323E-1(4)	2.3722E-1(4)	2.6247E-1(4)
K_6	3.4022E-1(2)	3.4028E-1(2)	3.4124E-1(4)	3.2167E-1(4)	3.4027E-1(2)	3.4058E-1(4)	3.2650E-1(4)
K_7	3.8428E-1(3)	3.8430E-1(3)	3.8523E-1(4)	4.1899E-1(4)	3.8430E-1(3)	3.8649E-1(4)	4.3390E-1(4)
K_8	4.8085E-1(4)	4.8089E-1(4)	4.8237E-1(4)	4.9450E-1(4)	4.8089E-1(4)	4.8404E-1(4)	5.1672E-1(4)

表二十四 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 0^\circ$				$\alpha = 5^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.4883E-7	2.3027E-5	8.3869E-5	9.4609E-7	2.2899E-5	4.8720E-5
ε_b	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-1.6593E-5	-4.0332E-4	-1.1306E-3
ε_c	0.0000E+0	-3.5442E-5	-8.8096E-4	-3.4586E-3	-3.5351E-5	-8.7858E-4	-3.3190E-3
U_{tip}	0.0000E+0	4.1082E-7	-5.4289E-5	-9.7012E-4	3.3728E-7	-1.0207E-4	-1.3105E-2
V_{tip}	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-3.5678E-4	-9.0713E-3	-1.0121E-1
W_{tip}	0.0000E+0	-4.3664E-4	-1.0830E-2	-4.2213E-2	-4.3555E-4	-1.0852E-2	-9.7795E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	2.6172E-5	1.7221E-2	9.9559E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	5.6159E-5	3.6369E-2	1.9968E+0
K_1	1.9410E-2(2)	1.9422E-2(2)	1.9107E-2(4)	*—	1.9422E-2(2)	1.9109E-2(4)	1.7931E-2(4)
K_2	6.1580E-2(3)	6.1607E-2(3)	6.2266E-2(4)	4.1093E-2(4)	6.1607E-2(3)	6.1495E-2(4)	3.4972E-2(4)
K_3	6.7990E-2(4)	6.7996E-2(4)	6.6202E-2(4)	6.4350E-2(4)	6.7997E-2(4)	6.7006E-2(4)	9.7385E-2(4)
K_4	1.2159E-1(2)	1.2162E-1(2)	1.2297E-1(4)	1.3005E-1(4)	1.2162E-1(2)	1.2297E-1(4)	1.5114E-1(4)
K_5	2.3320E-1(4)	2.3322E-1(4)	2.3254E-1(4)	2.1759E-1(4)	2.3322E-1(4)	2.3270E-1(4)	2.3807E-1(4)
K_6	3.4022E-1(2)	3.4026E-1(2)	3.4098E-1(4)	3.4103E-1(4)	3.4026E-1(2)	3.4087E-1(4)	3.2471E-1(4)
K_7	3.8428E-1(3)	3.8429E-1(3)	3.8464E-1(3)	3.8565E-1(3)	3.8429E-1(3)	3.8478E-1(4)	4.7782E-1(4)
K_8	4.8085E-1(4)	4.8087E-1(4)	4.8128E-1(4)	4.7931E-1(4)	4.8087E-1(4)	4.8137E-1(4)	5.1517E-1(4)

*: 發散不穩定(divergence instability)

表二十五 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.2425E-7	2.1890E-5	2.9759E-5	8.5234E-7	1.8720E-5	1.8493E-6
ε_b	0.0000E+0	-4.9279E-5	-1.1996E-3	-4.0680E-3	-9.5222E-5	-2.3295E-3	-8.3161E-3
ε_c	0.0000E+0	-3.4621E-5	-8.5972E-4	-3.1698E-3	-3.2215E-5	-7.9792E-4	-2.8486E-3
U_{tip}	0.0000E+0	-2.3799E-7	-4.7396E-4	-2.2247E-2	-2.0140E-6	-1.6040E-3	-3.7152E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-1.0596E-3	-2.6894E-2	-1.5050E-1	-2.0476E-3	-5.1746E-2	-2.1581E-1
W_{tip}	0.0000E+0	-4.2687E-4	-1.1002E-2	-1.1150E-1	-3.9820E-4	-1.1266E-2	-1.1827E-1
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	7.6212E-5	4.9597E-2	1.0072E+0	1.3760E-4	8.6739E-2	9.2637E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	1.6349E-4	1.0495E-1	2.1970E+0	2.9495E-4	1.8460E-1	2.1926E+0
K_1	1.9410E-2(2)	1.9421E-2(2)	1.9130E-2(4)	1.9376E-2(4)	1.9418E-2(2)	1.9180E-2(4)	2.0147E-2(4)
K_2	6.1580E-2(3)	6.1601E-2(4)	5.8398E-2(4)	3.4962E-2(4)	6.1582E-2(4)	5.4090E-2(4)	3.4995E-2(4)
K_3	6.7990E-2(4)	6.8002E-2(4)	7.0352E-2(4)	9.8708E-2(4)	6.8020E-2(4)	7.5309E-2(4)	9.9558E-2(4)
K_4	1.2159E-1(2)	1.2162E-1(2)	1.2300E-1(4)	1.4780E-1(4)	1.2162E-1(2)	1.2304E-1(4)	1.4182E-1(4)
K_5	2.3320E-1(4)	2.3322E-1(4)	2.3390E-1(4)	2.3641E-1(4)	2.3322E-1(4)	2.3734E-1(4)	2.3893E-1(4)
K_6	3.4022E-1(2)	3.4026E-1(2)	3.4014E-1(4)	3.4405E-1(4)	3.4026E-1(2)	3.3854E-1(4)	3.5228E-1(4)
K_7	3.8428E-1(3)	3.8429E-1(3)	3.8582E-1(4)	4.7772E-1(4)	3.8429E-1(3)	3.8835E-1(4)	4.7538E-1(4)
K_8	4.8085E-1(4)	4.8088E-1(4)	4.8205E-1(4)	5.4037E-1(4)	4.8088E-1(4)	4.8412E-1(4)	5.7186E-1(4)

表二十六 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 0^\circ$				$\alpha = 5^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3391E-6	3.2308E-5	1.1825E-4	1.3351E-6	3.1926E-5	1.1573E-4
ε_b	0.0000E+0	-8.3017E-5	-1.8972E-3	-5.9199E-3	-9.4527E-5	-2.1627E-3	-6.8108E-3
ε_c	0.0000E+0	-1.4877E-5	-3.5920E-4	-1.2758E-3	-1.2740E-5	-3.0505E-4	-1.0579E-3
U_{tip}	0.0000E+0	-1.2417E-6	-9.7971E-4	-9.5951E-3	-1.7979E-6	-1.2508E-3	-1.1583E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-1.8519E-3	-4.1437E-2	-1.2635E-1	-2.0992E-3	-4.6874E-2	-1.4021E-1
W_{tip}	0.0000E+0	-1.8440E-4	-4.8412E-3	-2.7065E-2	-1.5889E-4	-4.2293E-3	-2.3947E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	1.5934E-4	3.3051E-2	2.8622E-1	1.5803E-4	3.1831E-2	2.5216E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	2.2214E-4	6.7926E-2	6.3044E-1	2.1930E-4	6.5400E-2	5.6173E-1
K_1	1.9410E-2(2)	1.9457E-2(2)	2.0517E-2(4)	2.3772E-2(4)	1.9457E-2(2)	2.0546E-2(4)	2.3975E-2(4)
K_2	6.1580E-2(3)	6.1579E-2(4)	5.6707E-2(4)	4.4449E-2(4)	6.1574E-2(4)	5.5895E-2(4)	4.4082E-2(4)
K_3	6.7990E-2(4)	6.8029E-2(4)	7.3773E-2(4)	8.9120E-2(4)	6.8035E-2(4)	7.4723E-2(4)	9.0069E-2(4)
K_4	1.2159E-1(2)	1.2164E-1(2)	1.2302E-1(4)	1.3011E-1(4)	1.2164E-1(2)	1.2298E-1(4)	1.2923E-1(4)
K_5	2.3320E-1(4)	2.3323E-1(4)	2.3660E-1(4)	2.5668E-1(4)	2.3324E-1(4)	2.3737E-1(4)	2.5933E-1(4)
K_6	3.4022E-1(2)	3.4028E-1(2)	3.4102E-1(4)	3.3138E-1(4)	3.4028E-1(2)	3.4100E-1(4)	3.3428E-1(4)
K_7	3.8428E-1(3)	3.8430E-1(3)	3.8599E-1(4)	4.1121E-1(4)	3.8430E-1(3)	3.8620E-1(4)	4.0935E-1(4)
K_8	4.8085E-1(4)	4.8090E-1(4)	4.8370E-1(4)	5.0211E-1(4)	4.8090E-1(4)	4.8421E-1(4)	5.0559E-1(4)

表二十七 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3061E-6	3.0552E-5	1.0752E-4	1.2125E-6	2.7110E-5	8.6776E-5
ε_b	0.0000E+0	-1.1604E-4	-2.6628E-3	-8.5028E-3	-1.4334E-4	-3.3127E-3	-1.0753E-2
ε_c	0.0000E+0	-8.3216E-6	-1.9353E-4	-6.1819E-4	-1.5854E-6	-2.4541E-5	2.7660E-5
U_{tip}	0.0000E+0	-3.0369E-6	-1.8535E-3	-1.6138E-2	-4.9945E-6	-2.8304E-3	-2.4540E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-2.5614E-3	-5.7111E-2	-1.6739E-1	-3.1482E-3	-7.0546E-2	-2.0709E-1
W_{tip}	0.0000E+0	-1.0615E-4	-2.8826E-3	-1.6188E-2	-2.5713E-5	-5.8928E-4	-6.1189E-4
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	1.4786E-4	2.5595E-2	1.6879E-1	1.1634E-4	8.4016E-3	1.5474E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	1.9724E-4	5.1931E-2	3.7844E-1	1.8094E-4	1.6933E-2	2.5947E-2
K_1	1.9410E-2(2)	1.9456E-2(2)	2.0571E-2(2)	2.4142E-2(4)	1.9453E-2(2)	2.0527E-2(2)	2.3950E-2(4)
K_2	6.1580E-2(3)	6.1561E-2(4)	5.4376E-2(4)	4.3043E-2(4)	6.1541E-2(4)	5.2378E-2(4)	4.0742E-2(4)
K_3	6.7990E-2(4)	6.8047E-2(4)	7.6462E-2(4)	9.1857E-2(4)	6.8066E-2(4)	7.8652E-2(4)	9.4522E-2(4)
K_4	1.2159E-1(2)	1.2164E-1(2)	1.2290E-1(2)	1.2763E-1(4)	1.2164E-1(2)	1.2275E-1(2)	1.2621E-1(2)
K_5	2.3320E-1(4)	2.3324E-1(4)	2.3899E-1(4)	2.6420E-1(4)	2.3324E-1(4)	2.4139E-1(4)	2.7027E-1(4)
K_6	3.4022E-1(2)	3.4027E-1(2)	3.4099E-1(4)	3.3926E-1(4)	3.4027E-1(2)	3.4093E-1(4)	3.4163E-1(4)
K_7	3.8428E-1(3)	3.8430E-1(3)	3.8661E-1(4)	4.0680E-1(4)	3.8430E-1(3)	3.8732E-1(4)	4.1053E-1(4)
K_8	4.8085E-1(4)	4.8090E-1(4)	4.8529E-1(4)	5.1308E-1(4)	4.8090E-1(4)	4.8697E-1(4)	5.2640E-1(4)

表二十八 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 0^\circ$				$\alpha = 5^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.4354E-7	1.9674E-5	2.5099E-5	9.3994E-7	1.9105E-5	2.3560E-5
ε_b	0.0000E+0	-1.3997E-4	-3.3341E-3	-1.0999E-2	-1.5133E-4	-3.6058E-3	-1.1959E-2
ε_c	0.0000E+0	-2.5047E-5	-6.0958E-4	-2.0957E-3	-2.2881E-5	-5.5472E-4	-1.8821E-3
U_{tip}	0.0000E+0	-5.0672E-6	-3.2256E-3	-4.0116E-2	-5.9627E-6	-3.7000E-3	-4.2993E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-3.1056E-3	-7.4335E-2	-2.4532E-1	-3.3499E-3	-7.9783E-2	-2.5781E-1
W_{tip}	0.0000E+0	-3.0875E-4	-9.6628E-3	-8.4304E-2	-2.8291E-4	-9.0855E-3	-7.7341E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	2.2363E-4	9.2727E-2	6.5281E-1	2.2178E-4	8.9853E-2	5.8911E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	4.0723E-4	1.9740E-1	1.5959E+0	4.0321E-4	1.9177E-1	1.4541E+0
K_1	1.9410E-2(2)	1.9429E-2(2)	1.9764E-2(4)	2.2112E-2(4)	1.9429E-2(2)	1.9814E-2(4)	2.2232E-2(4)
K_2	6.1580E-2(3)	6.1548E-2(4)	5.0910E-2(4)	3.5745E-2(4)	6.1539E-2(4)	5.0261E-2(4)	3.5908E-2(4)
K_3	6.7990E-2(4)	6.8059E-2(4)	7.9685E-2(4)	9.9394E-2(4)	6.8069E-2(4)	8.0539E-2(4)	9.9549E-2(4)
K_4	1.2159E-1(2)	1.2162E-1(2)	1.2297E-1(4)	1.3461E-1(4)	1.2162E-1(2)	1.2289E-1(4)	1.3284E-1(4)
K_5	2.3320E-1(4)	2.3323E-1(4)	2.4200E-1(4)	2.5469E-1(4)	2.3324E-1(4)	2.4317E-1(4)	2.5768E-1(4)
K_6	3.4022E-1(2)	3.4026E-1(2)	3.3835E-1(4)	3.4341E-1(4)	3.4026E-1(2)	3.3844E-1(4)	3.4250E-1(4)
K_7	3.8428E-1(3)	3.8430E-1(3)	3.9037E-1(4)	4.6172E-1(4)	3.8430E-1(3)	3.9066E-1(4)	4.5885E-1(4)
K_8	4.8085E-1(4)	4.8089E-1(4)	4.8720E-1(4)	5.6380E-1(4)	4.8089E-1(4)	4.8810E-1(4)	5.6640E-1(4)

表二十九 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.1690E-7	1.7598E-5	1.8175E-5	8.4453E-7	1.4569E-5	3.9388E-6
ε_b	0.0000E+0	-1.7156E-4	-4.0942E-3	-1.3711E-2	-1.9456E-4	-4.6668E-3	-1.5858E-2
ε_c	0.0000E+0	-1.8227E-5	-4.3766E-4	-1.4382E-3	-1.0711E-5	-2.5042E-4	-7.5139E-4
U_{tip}	0.0000E+0	-7.7334E-6	-4.6264E-3	-4.8946E-2	-1.0032E-5	-5.8438E-3	-5.8264E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-3.7848E-3	-8.9493E-2	-2.8131E-1	-4.2794E-3	-1.0085E-1	-3.1265E-1
W_{tip}	0.0000E+0	-2.2735E-4	-7.6386E-3	-6.2010E-2	-1.3759E-4	-4.8308E-3	-3.5880E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	2.0731E-4	7.8966E-2	4.5770E-1	1.6223E-4	5.2580E-2	2.5511E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	3.7190E-4	1.6894E-1	1.1464E+0	2.7447E-4	1.1161E-1	6.4090E-1
K_1	1.9410E-2(2)	1.9428E-2(2)	1.9884E-2(4)	2.2361E-2(4)	1.9426E-2(2)	1.9908E-2(4)	2.2289E-2(4)
K_2	6.1580E-2(3)	6.1521E-2(4)	4.9163E-2(4)	3.6092E-2(4)	6.1498E-2(4)	4.7936E-2(4)	3.5970E-2(4)
K_3	6.7990E-2(4)	6.8087E-2(4)	8.1971E-2(4)	9.9985E-2(4)	6.8110E-2(4)	8.3520E-2(4)	1.0087E-1(4)
K_4	1.2159E-1(2)	1.2162E-1(2)	1.2272E-1(2)	1.2964E-1(4)	1.2162E-1(2)	1.2242E-1(2)	1.2599E-1(4)
K_5	2.3320E-1(4)	2.3324E-1(4)	2.4530E-1(4)	2.6324E-1(4)	2.3325E-1(4)	2.4784E-1(4)	2.6952E-1(4)
K_6	3.4022E-1(2)	3.4025E-1(2)	3.3880E-1(4)	3.4055E-1(4)	3.4025E-1(2)	3.3942E-1(4)	3.3723E-1(4)
K_7	3.8428E-1(3)	3.8430E-1(3)	3.9106E-1(4)	4.5401E-1(4)	3.8430E-1(3)	3.9138E-1(4)	4.5080E-1(4)
K_8	4.8085E-1(4)	4.8090E-1(4)	4.8980E-1(4)	5.7194E-1(4)	4.8090E-1(4)	4.9194E-1(4)	5.8149E-1(4)

表三十 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 0^\circ$				$\alpha = 5^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3373E-6	3.1503E-5	1.1542E-4	1.3338E-6	3.1417E-5	1.1485E-4
ε_b	0.0000E+0	-1.1729E-4	-2.6287E-3	-8.0663E-3	-1.1702E-4	-2.6231E-3	-8.0462E-3
ε_c	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	2.9696E-6	7.3425E-5	2.7570E-4
U_{tip}	0.0000E+0	-3.1824E-6	-1.8210E-3	-1.3992E-2	-3.1672E-6	-1.8158E-3	-1.4040E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-2.6162E-3	-5.6680E-2	-1.5698E-1	-2.6103E-3	-5.6587E-2	-1.5708E-1
W_{tip}	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	3.5465E-5	1.0120E-3	6.2190E-3
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-1.5603E-5	-7.8048E-3	-6.0991E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-3.3475E-5	-1.7097E-2	-1.4517E-1
K_1	1.9410E-2(2)	1.9469E-2(2)	2.0892E-2(2)	2.5114E-2(4)	1.9468E-2(2)	2.0886E-2(2)	2.5083E-2(4)
K_2	6.1580E-2(3)	6.1555E-2(4)	5.4441E-2(4)	4.4317E-2(4)	6.1555E-2(4)	5.4443E-2(4)	4.4181E-2(4)
K_3	6.7990E-2(4)	6.8056E-2(4)	7.6544E-2(4)	9.0770E-2(4)	6.8056E-2(4)	7.6529E-2(4)	9.0848E-2(4)
K_4	1.2159E-1(2)	1.2165E-1(2)	1.2293E-1(2)	1.2693E-1(2)	1.2165E-1(2)	1.2293E-1(2)	1.2707E-1(2)
K_5	2.3320E-1(4)	2.3324E-1(4)	2.3893E-1(4)	2.6179E-1(4)	2.3324E-1(4)	2.3891E-1(4)	2.6183E-1(4)
K_6	3.4022E-1(2)	3.4028E-1(2)	3.4135E-1(2)	3.4390E-1(2)	3.4028E-1(2)	3.4133E-1(2)	3.4327E-1(4)
K_7	3.8428E-1(3)	3.8430E-1(3)	3.8643E-1(4)	3.9925E-1(4)	3.8430E-1(3)	3.8644E-1(4)	4.0014E-1(4)
K_8	4.8085E-1(4)	4.8090E-1(4)	4.8515E-1(4)	5.0889E-1(4)	4.8090E-1(4)	4.8514E-1(4)	5.0897E-1(4)

表三十一 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3062E-6	3.0731E-5	1.1026E-4	1.2151E-6	2.8478E-5	9.4833E-5
ε_b	0.0000E+0	-1.1483E-4	-2.5783E-3	-7.8858E-3	-1.0761E-4	-2.4296E-3	-7.3599E-3
ε_c	0.0000E+0	8.8187E-6	2.1813E-4	8.1919E-4	1.7037E-5	4.2190E-4	1.5860E-3
U_{tip}	0.0000E+0	-3.0479E-6	-1.7741E-3	-1.4425E-2	-2.6704E-6	-1.6348E-3	-1.5781E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-2.5634E-3	-5.5847E-2	-1.5781E-1	-2.4085E-3	-5.3330E-2	-1.6003E-1
W_{tip}	0.0000E+0	1.0532E-4	2.9986E-3	1.8926E-2	2.0346E-4	5.7482E-3	3.9603E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	-4.5527E-5	-2.2983E-2	-1.8553E-1	-8.2789E-5	-4.3053E-2	-3.8524E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	-9.7650E-5	-5.0272E-2	-4.3889E-1	-1.7743E-4	-9.3741E-2	-8.9607E-1
K_1	1.9410E-2(2)	1.9467E-2(2)	2.0834E-2(2)	2.4836E-2(4)	1.9463E-2(2)	2.0664E-2(4)	2.4081E-2(4)
K_2	6.1580E-2(3)	6.1556E-2(4)	5.4466E-2(4)	4.3137E-2(4)	6.1559E-2(4)	5.4576E-2(4)	4.0182E-2(4)
K_3	6.7990E-2(4)	6.8054E-2(4)	7.6408E-2(4)	9.1453E-2(4)	6.8048E-2(4)	7.5980E-2(4)	9.3259E-2(4)
K_4	1.2159E-1(2)	1.2164E-1(2)	1.2295E-1(2)	1.2811E-1(4)	1.2164E-1(2)	1.2300E-1(4)	1.3154E-1(4)
K_5	2.3320E-1(4)	2.3324E-1(4)	2.3875E-1(4)	2.6223E-1(4)	2.3323E-1(4)	2.3822E-1(4)	2.6246E-1(4)
K_6	3.4022E-1(2)	3.4028E-1(2)	3.4117E-1(2)	3.3875E-1(4)	3.4028E-1(2)	3.4069E-1(4)	3.2944E-1(4)
K_7	3.8428E-1(3)	3.8430E-1(3)	3.8655E-1(4)	4.0680E-1(4)	3.8430E-1(3)	3.8684E-1(4)	4.2489E-1(4)
K_8	4.8085E-1(4)	4.8090E-1(4)	4.8503E-1(4)	5.0974E-1(4)	4.8089E-1(4)	4.8466E-1(4)	5.1286E-1(4)

表三十二 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 0^\circ$				$\alpha = 5^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.3826E-7	1.7296E-5	2.7331E-5	9.3565E-7	1.7247E-5	2.6789E-5
ε_b	0.0000E+0	-1.9783E-4	-4.6466E-3	-1.5161E-2	-1.9732E-4	-4.6355E-3	-1.5127E-2
ε_c	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	2.9700E-6	7.3108E-5	2.6112E-4
U_{tip}	0.0000E+0	-1.0530E-5	-5.7862E-3	-5.1131E-2	-1.0477E-5	-5.7654E-3	-5.1147E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-4.3890E-3	-1.0050E-1	-2.9592E-1	-4.3781E-3	-1.0030E-1	-2.9573E-1
W_{tip}	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	3.5495E-5	1.2866E-3	1.0619E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-2.6084E-5	-1.3109E-2	-7.6045E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-5.6047E-5	-2.9013E-2	-1.9864E-1
K_1	1.9410E-2(2)	1.9436E-2(2)	2.0225E-2(4)	2.3210E-2(4)	1.9436E-2(2)	2.0219E-2(4)	2.3192E-2(4)
K_2	6.1580E-2(3)	6.1490E-2(4)	4.8093E-2(4)	3.6613E-2(4)	6.1491E-2(4)	4.8104E-2(4)	3.6577E-2(4)
K_3	6.7990E-2(4)	6.8122E-2(4)	8.3555E-2(4)	1.0042E-1(4)	6.8121E-2(4)	8.3534E-2(4)	1.0040E-1(4)
K_4	1.2159E-1(2)	1.2163E-1(2)	1.2240E-1(2)	1.2492E-1(4)	1.2163E-1(2)	1.2241E-1(2)	1.2507E-1(4)
K_5	2.3320E-1(4)	2.3325E-1(4)	2.4779E-1(4)	2.7410E-1(4)	2.3325E-1(4)	2.4775E-1(4)	2.7373E-1(4)
K_6	3.4022E-1(2)	3.4026E-1(2)	3.4032E-1(2)	3.3733E-1(2)	3.4026E-1(2)	3.4028E-1(2)	3.3743E-1(4)
K_7	3.8428E-1(3)	3.8430E-1(3)	3.9069E-1(4)	4.4021E-1(4)	3.8430E-1(3)	3.9071E-1(4)	4.4072E-1(4)
K_8	4.8085E-1(4)	4.8090E-1(4)	4.9172E-1(4)	5.6831E-1(4)	4.8090E-1(4)	4.9168E-1(4)	5.6851E-1(4)

表三十三 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.1488E-7	1.6856E-5	2.2504E-5	8.4629E-7	1.5583E-5	8.7725E-6
ε_b	0.0000E+0	-1.9327E-4	-4.5474E-3	-1.4857E-2	-1.7988E-4	-4.2549E-3	-1.3964E-2
ε_c	0.0000E+0	8.8199E-6	2.1724E-4	7.7751E-4	1.7039E-5	4.2052E-4	1.5160E-3
U_{tip}	0.0000E+0	-1.0061E-5	-5.5998E-3	-5.1260E-2	-8.7486E-6	-5.0542E-3	-5.1469E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-4.2910E-3	-9.8764E-2	-2.9412E-1	-4.0035E-3	-9.3555E-2	-2.8821E-1
W_{tip}	0.0000E+0	1.0540E-4	3.7948E-3	3.1868E-2	2.0360E-4	7.1593E-3	6.3568E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	-7.5955E-5	-3.8571E-2	-2.2719E-1	-1.3714E-4	-7.2033E-2	-4.4734E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	-1.6317E-4	-8.5223E-2	-5.9258E-1	-2.9439E-4	-1.5831E-1	-1.1614E+0
K_1	1.9410E-2(2)	1.9435E-2(2)	2.0174E-2(4)	2.3052E-2(4)	1.9432E-2(2)	2.0024E-2(4)	2.2613E-2(4)
K_2	6.1580E-2(3)	6.1495E-2(4)	4.8198E-2(4)	3.6284E-2(4)	6.1507E-2(4)	4.8557E-2(4)	3.5439E-2(4)
K_3	6.7990E-2(4)	6.8116E-2(4)	8.3355E-2(4)	1.0033E-1(4)	6.8101E-2(4)	8.2716E-2(4)	1.0020E-1(4)
K_4	1.2159E-1(2)	1.2163E-1(2)	1.2246E-1(2)	1.2613E-1(4)	1.2162E-1(2)	1.2261E-1(2)	1.2918E-1(4)
K_5	2.3320E-1(4)	2.3325E-1(4)	2.4741E-1(4)	2.7104E-1(4)	2.3324E-1(4)	2.4624E-1(4)	2.6292E-1(4)
K_6	3.4022E-1(2)	3.4026E-1(2)	3.3996E-1(2)	3.3813E-1(4)	3.4026E-1(2)	3.3907E-1(4)	3.4113E-1(4)
K_7	3.8428E-1(3)	3.8430E-1(3)	3.9090E-1(4)	4.4457E-1(4)	3.8430E-1(3)	3.9135E-1(4)	4.5489E-1(4)
K_8	4.8085E-1(4)	4.8089E-1(4)	4.9137E-1(4)	5.7020E-1(4)	4.8089E-1(4)	4.9034E-1(4)	5.7590E-1(4)

表三十四 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 0^\circ$				$\alpha = 5^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3411E-6	3.3396E-5	1.3202E-4	1.3376E-6	3.3261E-5	1.2438E-4
ε_b	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-1.5333E-5	-3.7324E-4	-1.3673E-3
ε_c	0.0000E+0	-2.7328E-5	-6.7892E-4	-2.6635E-3	-2.7264E-5	-6.7731E-4	-2.6540E-3
U_{tip}	0.0000E+0	7.3491E-7	1.1560E-5	-3.3359E-5	7.1978E-7	3.5451E-6	-1.9472E-4
V_{tip}	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-1.5326E-4	-3.7320E-3	-1.6017E-2
W_{tip}	0.0000E+0	-1.4182E-4	-3.5169E-3	-1.3719E-2	-1.4150E-4	-3.5158E-3	-1.4217E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	6.4741E-6	3.8582E-3	6.6766E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	2.5444E-5	1.5090E-2	2.5145E-1
K_1	2.9614E-2(2)	2.9637E-2(2)	2.9944E-2(4)	2.8050E-2(4)	2.9637E-2(2)	2.9944E-2(4)	2.8350E-2(4)
K_2	5.6933E-2(4)	5.6949E-2(4)	5.7220E-2(4)	5.6875E-2(4)	5.6948E-2(4)	5.7200E-2(4)	5.6946E-2(4)
K_3	8.3477E-2(3)	8.3495E-2(3)	8.3926E-2(3)	8.5247E-2(3)	8.3495E-2(3)	8.3925E-2(4)	8.5248E-2(4)
K_4	1.7147E-1(4)	1.7151E-1(4)	1.7230E-1(4)	1.7149E-1(4)	1.7151E-1(4)	1.7238E-1(4)	1.7420E-1(4)
K_5	1.8541E-1(2)	1.8544E-1(2)	1.8638E-1(4)	1.9024E-1(4)	1.8544E-1(2)	1.8638E-1(4)	1.9051E-1(4)
K_6	2.8798E-1(4)	2.8806E-1(4)	2.8977E-1(4)	2.9318E-1(4)	2.8806E-1(4)	2.8980E-1(4)	2.9527E-1(4)
K_7	4.0777E-1(4)	4.0788E-1(4)	4.1032E-1(4)	4.1610E-1(4)	4.0788E-1(4)	4.1032E-1(4)	4.1797E-1(4)
K_8	5.1832E-1(2)	5.1836E-1(2)	5.1894E-1(4)	5.1927E-1(4)	5.1836E-1(2)	5.1877E-1(4)	5.1319E-1(4)

表三十五 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3096E-6	3.2203E-5	8.0257E-5	1.2174E-6	2.8886E-5	6.7235E-6
ε_b	0.0000E+0	-4.5535E-5	-1.1094E-3	-4.0852E-3	-8.7979E-5	-2.1496E-3	-8.0008E-3
ε_c	0.0000E+0	-2.6752E-5	-6.6450E-4	-2.5851E-3	-2.5062E-5	-6.2229E-4	-2.3860E-3
U_{tip}	0.0000E+0	6.0123E-7	-5.9194E-5	-1.3346E-3	2.3278E-7	-2.5351E-4	-4.3638E-3
V_{tip}	0.0000E+0	-4.5515E-4	-1.1089E-2	-4.5779E-2	-8.7943E-4	-2.1468E-2	-8.4317E-2
W_{tip}	0.0000E+0	-1.3894E-4	-3.5051E-3	-1.7127E-2	-1.3050E-4	-3.4443E-3	-2.2040E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	1.8886E-5	1.1227E-2	1.6624E-1	3.4321E-5	2.0259E-2	2.3590E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	7.4211E-5	4.3909E-2	6.1429E-1	1.3476E-4	7.9210E-2	8.6212E-1
K_1	2.9614E-2(2)	2.9637E-2(2)	2.9938E-2(4)	2.9537E-2(4)	2.9634E-2(2)	2.9915E-2(4)	3.0546E-2(4)
K_2	5.6933E-2(4)	5.6948E-2(4)	5.7049E-2(4)	5.6709E-2(4)	5.6946E-2(4)	5.6585E-2(4)	5.4735E-2(4)
K_3	8.3477E-2(3)	8.3495E-2(3)	8.3920E-2(4)	8.5496E-2(4)	8.3494E-2(3)	8.3905E-2(4)	8.6340E-2(4)
K_4	1.7147E-1(4)	1.7151E-1(4)	1.7295E-1(4)	1.8632E-1(4)	1.7151E-1(4)	1.7464E-1(4)	1.8992E-1(4)
K_5	1.8541E-1(2)	1.8544E-1(2)	1.8636E-1(4)	1.9294E-1(4)	1.8544E-1(2)	1.8629E-1(4)	2.0748E-1(4)
K_6	2.8798E-1(4)	2.8806E-1(4)	2.9005E-1(4)	3.0646E-1(4)	2.8806E-1(4)	2.9078E-1(4)	3.2428E-1(4)
K_7	4.0777E-1(4)	4.0787E-1(4)	4.1036E-1(4)	4.2677E-1(4)	4.0787E-1(4)	4.1043E-1(4)	4.3737E-1(4)
K_8	5.1832E-1(2)	5.1836E-1(2)	5.1802E-1(4)	5.0254E-1(4)	5.1836E-1(2)	5.1669E-1(4)	4.9610E-1(4)

表三十六 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 0^\circ$				$\alpha = 5^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.4937E-7	2.3355E-5	8.8804E-5	9.4667E-7	2.3184E-5	8.8005E-6
ε_b	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-1.5343E-5	-3.7966E-4	-1.4659E-3
ε_c	0.0000E+0	-4.5991E-5	-1.1462E-3	-4.5392E-3	-4.5872E-5	-1.1432E-3	-4.5121E-3
U_{tip}	0.0000E+0	4.8790E-7	-7.0180E-6	-2.5960E-4	4.7327E-7	-1.5875E-5	-1.1327E-3
V_{tip}	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-1.5340E-4	-3.9148E-3	-3.2888E-2
W_{tip}	0.0000E+0	-2.3728E-4	-5.9069E-3	-2.3305E-2	-2.3669E-4	-5.9053E-3	-2.8293E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	1.0808E-5	6.9254E-3	2.5939E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	4.2550E-5	2.7070E-2	8.8442E-1
K_1	2.9614E-2(2)	2.9620E-2(2)	2.9076E-2(4)	1.3461E-2(4)	2.9620E-2(2)	2.9079E-2(4)	2.2889E-2(4)
K_2	5.6933E-2(4)	5.6944E-2(4)	5.6908E-2(4)	5.3378E-2(4)	5.6944E-2(4)	5.6891E-2(4)	5.6027E-2(4)
K_3	8.3477E-2(3)	8.3498E-2(3)	8.3997E-2(3)	8.5503E-2(4)	8.3498E-2(3)	8.3997E-2(4)	8.5962E-2(4)
K_4	1.7147E-1(4)	1.7150E-1(4)	1.7134E-1(4)	1.6319E-1(4)	1.7150E-1(4)	1.7144E-1(4)	1.8300E-1(4)
K_5	1.8541E-1(2)	1.8543E-1(2)	1.8630E-1(4)	1.8945E-1(4)	1.8543E-1(2)	1.8630E-1(4)	1.9629E-1(4)
K_6	2.8798E-1(4)	2.8804E-1(4)	2.8887E-1(4)	2.8631E-1(4)	2.8804E-1(4)	2.8892E-1(4)	3.0600E-1(4)
K_7	4.0777E-1(4)	4.0784E-1(4)	4.0921E-1(4)	4.0837E-1(4)	4.0784E-1(4)	4.0924E-1(4)	4.2964E-1(4)
K_8	5.1832E-1(2)	5.1835E-1(2)	5.1810E-1(4)	5.1246E-1(4)	5.1835E-1(2)	5.1788E-1(4)	4.9050E-1(4)

表三十七 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.2521E-7	2.1879E-5	-1.3209E-4	8.5444E-7	1.8117E-5	-2.5975E-4
ε_b	0.0000E+0	-4.5565E-5	-1.1282E-3	-4.3784E-3	-8.8034E-5	-2.1843E-3	-8.5238E-3
ε_c	0.0000E+0	-4.4926E-5	-1.1195E-3	-4.3851E-3	-4.1802E-5	-1.0413E-3	-4.0370E-3
U_{tip}	0.0000E+0	3.5867E-7	-8.4908E-5	-3.5636E-3	3.1928E-9	-2.9540E-4	-7.8357E-3
V_{tip}	0.0000E+0	-4.5556E-4	-1.1614E-2	-6.7138E-2	-8.8019E-4	-2.2373E-2	-1.0555E-1
W_{tip}	0.0000E+0	-2.3196E-4	-5.8875E-3	-3.6780E-2	-2.1636E-4	-5.7718E-3	-4.4516E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	3.1467E-5	2.0044E-2	3.8606E-1	5.6778E-5	3.5561E-2	4.3492E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	1.2386E-4	7.8326E-2	1.2864E+0	2.2334E-4	1.3888E-1	1.4630E+0
K_1	2.9614E-2(2)	2.9620E-2(2)	2.9102E-2(4)	2.6860E-2(4)	2.9618E-2(2)	2.9165E-2(4)	2.8498E-2(4)
K_2	5.6933E-2(4)	5.6943E-2(4)	5.6762E-2(4)	5.6327E-2(4)	5.6942E-2(4)	5.6363E-2(4)	5.4797E-2(4)
K_3	8.3477E-2(3)	8.3498E-2(3)	8.3991E-2(4)	8.7550E-2(4)	8.3497E-2(3)	8.3977E-2(4)	8.8969E-2(4)
K_4	1.7147E-1(4)	1.7150E-1(4)	1.7220E-1(4)	1.9269E-1(4)	1.7150E-1(4)	1.7435E-1(4)	1.9294E-1(4)
K_5	1.8541E-1(2)	1.8543E-1(2)	1.8628E-1(4)	2.1191E-1(4)	1.8543E-1(2)	1.8621E-1(4)	2.2513E-1(4)
K_6	2.8798E-1(4)	2.8804E-1(4)	2.8931E-1(4)	3.3052E-1(4)	2.8804E-1(4)	2.9040E-1(4)	3.5020E-1(4)
K_7	4.0777E-1(4)	4.0784E-1(4)	4.0941E-1(4)	4.4702E-1(4)	4.0784E-1(4)	4.0982E-1(4)	4.5670E-1(4)
K_8	5.1832E-1(2)	5.1835E-1(2)	5.1679E-1(4)	4.8223E-1(4)	5.1834E-1(2)	5.1497E-1(4)	4.8483E-1(4)

表三十八 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 0^\circ$				$\alpha = 5^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3404E-6	3.2579E-5	8.1722E-5	1.3366E-6	3.2374E-5	8.5549E-5
ε_b	0.0000E+0	-7.6881E-5	-1.8471E-3	-6.5466E-3	-8.7538E-5	-2.1043E-3	-7.4819E-3
ε_c	0.0000E+0	-1.9317E-5	-4.7521E-4	-1.7909E-3	-1.6544E-5	-4.0555E-4	-1.5096E-3
U_{tip}	0.0000E+0	3.7535E-7	-1.9363E-4	-2.7776E-3	2.7126E-7	-2.5103E-4	-3.3938E-3
V_{tip}	0.0000E+0	-7.9772E-4	-1.9047E-2	-6.8576E-2	-9.0423E-4	-2.1557E-2	-7.6348E-2
W_{tip}	0.0000E+0	-1.0028E-4	-2.6033E-3	-1.4483E-2	-8.6419E-5	-2.2691E-3	-1.3163E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	1.5060E-4	1.6862E-2	1.6172E-1	1.5006E-4	1.6429E-2	1.4910E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	3.2944E-4	5.9308E-2	5.9165E-1	3.2729E-4	5.7623E-2	5.4794E-1
K_1	2.9614E-2(2)	2.9645E-2(2)	3.0272E-2(4)	3.2031E-2(4)	2.9645E-2(2)	3.0303E-2(4)	3.2287E-2(4)
K_2	5.6933E-2(4)	5.6954E-2(4)	5.6915E-2(4)	5.5499E-2(4)	5.6953E-2(4)	5.6782E-2(4)	5.4614E-2(4)
K_3	8.3477E-2(3)	8.3492E-2(3)	8.3906E-2(4)	8.5997E-2(4)	8.3492E-2(3)	8.3912E-2(4)	8.6063E-2(4)
K_4	1.7147E-1(4)	1.7152E-1(4)	1.7442E-1(4)	1.8950E-1(4)	1.7152E-1(4)	1.7494E-1(4)	1.8937E-1(4)
K_5	1.8541E-1(2)	1.8544E-1(2)	1.8634E-1(4)	1.9862E-1(4)	1.8544E-1(2)	1.8632E-1(4)	2.0092E-1(4)
K_6	2.8798E-1(4)	2.8807E-1(4)	2.9074E-1(4)	3.1301E-1(4)	2.8807E-1(4)	2.9097E-1(4)	3.1464E-1(4)
K_7	4.0777E-1(4)	4.0788E-1(4)	4.1062E-1(4)	4.2853E-1(4)	4.0788E-1(4)	4.1065E-1(4)	4.2805E-1(4)
K_8	5.1832E-1(2)	5.1836E-1(2)	5.1707E-1(4)	5.0313E-1(4)	5.1836E-1(2)	5.1696E-1(4)	5.0429E-1(4)

表三十九 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3084E-6	3.1478E-5	9.6075E-5	1.2161E-6	2.8860E-5	1.0063E-4
ε_b	0.0000E+0	-1.0745E-4	-2.5866E-3	-9.2525E-3	-1.3271E-4	-3.2056E-3	-1.1582E-2
ε_c	0.0000E+0	-1.0812E-5	-2.6172E-4	-9.3493E-4	-2.0719E-6	-4.2881E-5	-7.4189E-5
U_{tip}	0.0000E+0	3.0929E-8	-3.7837E-4	-4.7547E-3	-3.6872E-7	-5.8136E-4	-7.1001E-3
V_{tip}	0.0000E+0	-1.1032E-3	-2.6263E-2	-9.1199E-2	-1.3557E-3	-3.2330E-2	-1.1191E-1
W_{tip}	0.0000E+0	-5.7763E-5	-1.5505E-3	-9.5994E-3	-1.4063E-5	-3.7295E-4	-1.8259E-3
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	1.4585E-4	1.3817E-2	1.1105E-1	1.3276E-4	6.2262E-3	2.8610E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	3.1052E-4	4.7308E-2	4.0744E-1	2.5856E-4	1.7178E-2	8.1405E-2
K_1	2.9614E-2(2)	2.9644E-2(2)	3.0337E-2(4)	3.2554E-2(4)	2.9642E-2(2)	3.0316E-2(2)	3.2445E-2(4)
K_2	5.6933E-2(4)	5.6952E-2(4)	5.6478E-2(4)	5.2551E-2(4)	5.6950E-2(4)	5.5976E-2(4)	4.9540E-2(4)
K_3	8.3477E-2(3)	8.3492E-2(3)	8.3922E-2(4)	8.6096E-2(4)	8.3491E-2(3)	8.3922E-2(4)	8.6054E-2(4)
K_4	1.7147E-1(4)	1.7152E-1(4)	1.7601E-1(4)	1.8895E-1(4)	1.7152E-1(4)	1.7755E-1(4)	1.8843E-1(2)
K_5	1.8541E-1(2)	1.8544E-1(2)	1.8627E-1(4)	2.0511E-1(4)	1.8544E-1(2)	1.8619E-1(2)	2.1105E-1(4)
K_6	2.8798E-1(4)	2.8807E-1(4)	2.9141E-1(4)	3.1746E-1(4)	2.8806E-1(4)	2.9203E-1(4)	3.2311E-1(4)
K_7	4.0777E-1(4)	4.0788E-1(4)	4.1066E-1(4)	4.2607E-1(4)	4.0787E-1(4)	4.1056E-1(4)	4.2401E-1(4)
K_8	5.1832E-1(2)	5.1836E-1(2)	5.1678E-1(4)	5.0711E-1(4)	5.1836E-1(2)	5.1649E-1(4)	5.1004E-1(4)

表四十 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 0^\circ$				$\alpha = 5^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.4714E-7	1.9212E-5	-1.8482E-4	9.4409E-7	1.9021E-5	-1.6370E-4
ε_b	0.0000E+0	-1.2947E-4	-3.1750E-3	-1.1806E-2	-1.3998E-4	-3.4330E-3	-1.2773E-2
ε_c	0.0000E+0	-3.2513E-5	-8.0437E-4	-3.0403E-3	-2.9703E-5	-7.3380E-4	-2.7567E-3
U_{tip}	0.0000E+0	-5.1967E-7	-6.2987E-4	-1.0732E-2	-6.8550E-7	-7.2591E-4	-1.1684E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-1.3358E-3	-3.3063E-2	-1.2973E-1	-1.4409E-3	-3.5553E-2	-1.3667E-1
W_{tip}	0.0000E+0	-1.6781E-4	-4.8032E-3	-3.8608E-2	-1.5377E-4	-4.4837E-3	-3.6684E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	1.4175E-4	4.1527E-2	3.5543E-1	1.4098E-4	4.0661E-2	3.3213E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	4.0217E-4	1.5813E-1	1.2628E+0	3.9912E-4	1.5484E-1	1.1961E+0
K_1	2.9614E-2(2)	2.9625E-2(2)	2.9616E-2(4)	3.0397E-2(4)	2.9625E-2(2)	2.9669E-2(4)	3.0523E-2(4)
K_2	5.6933E-2(4)	5.6945E-2(4)	5.5837E-2(4)	5.2895E-2(4)	5.6944E-2(4)	5.5643E-2(4)	5.2204E-2(4)
K_3	8.3477E-2(3)	8.3497E-2(3)	8.4058E-2(4)	8.9105E-2(4)	8.3497E-2(3)	8.4067E-2(4)	8.9017E-2(4)
K_4	1.7147E-1(4)	1.7151E-1(4)	1.7770E-1(4)	1.9043E-1(4)	1.7151E-1(4)	1.7849E-1(4)	1.8981E-1(4)
K_5	1.8541E-1(2)	1.8543E-1(2)	1.8615E-1(4)	2.2657E-1(4)	1.8543E-1(2)	1.8612E-1(4)	2.2683E-1(4)
K_6	2.8798E-1(4)	2.8804E-1(4)	2.9211E-1(4)	3.5195E-1(4)	2.8804E-1(4)	2.9249E-1(4)	3.5231E-1(4)
K_7	4.0777E-1(4)	4.0784E-1(4)	4.1049E-1(4)	4.5860E-1(4)	4.0784E-1(4)	4.1054E-1(4)	4.5847E-1(4)
K_8	5.1832E-1(2)	5.1835E-1(2)	5.1381E-1(4)	4.8929E-1(4)	5.1835E-1(2)	5.1370E-1(4)	4.9092E-1(4)

表四十一 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.2212E-7	1.8557E-5	-1.1126E-4	8.5117E-7	1.7367E-5	-2.7780E-5
ε_b	0.0000E+0	-1.5869E-4	-3.8942E-3	-1.4522E-2	-1.7993E-4	-4.4255E-3	-1.6611E-2
ε_c	0.0000E+0	-2.3663E-5	-5.8250E-4	-2.1567E-3	-1.3910E-5	-3.3886E-4	-1.2070E-3
U_{tip}	0.0000E+0	-1.0199E-6	-9.1317E-4	-1.3494E-2	-1.4713E-6	-1.1546E-3	-1.5913E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-1.6279E-3	-3.9972E-2	-1.4925E-1	-1.8403E-3	-4.5035E-2	-1.6483E-1
W_{tip}	0.0000E+0	-1.2357E-4	-3.7296E-3	-3.1503E-2	-7.4801E-5	-2.3493E-3	-2.0542E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	1.3499E-4	3.6502E-2	2.7688E-1	1.1631E-4	2.5261E-2	1.7531E-1
$\Theta_1'(0.1)$	0.0000E+0	3.7535E-4	1.3865E-1	1.0251E+0	3.0133E-4	9.4360E-2	6.7042E-1
K_1	2.9614E-2(2)	2.9625E-2(2)	2.9751E-2(4)	3.0627E-2(4)	2.9623E-2(2)	2.9808E-2(4)	3.0426E-2(4)
K_2	5.6933E-2(4)	5.6943E-2(4)	5.5250E-2(4)	5.0632E-2(4)	5.6941E-2(4)	5.4712E-2(4)	4.7912E-2(4)
K_3	8.3477E-2(3)	8.3496E-2(3)	8.4078E-2(4)	8.8730E-2(4)	8.3496E-2(4)	8.4078E-2(4)	8.8074E-2(4)
K_4	1.7147E-1(4)	1.7151E-1(4)	1.7993E-1(4)	1.8867E-1(4)	1.7151E-1(4)	1.8158E-1(4)	1.8745E-1(4)
K_5	1.8541E-1(2)	1.8543E-1(2)	1.8605E-1(4)	2.2686E-1(4)	1.8543E-1(2)	1.8594E-1(4)	2.2630E-1(4)
K_6	2.8798E-1(4)	2.8804E-1(4)	2.9313E-1(4)	3.5218E-1(4)	2.8804E-1(4)	2.9380E-1(4)	3.5104E-1(4)
K_7	4.0777E-1(4)	4.0784E-1(4)	4.1053E-1(4)	4.5652E-1(4)	4.0784E-1(4)	4.1030E-1(4)	4.5049E-1(4)
K_8	5.1832E-1(2)	5.1835E-1(2)	5.1365E-1(4)	4.9489E-1(4)	5.1835E-1(2)	5.1381E-1(4)	5.0154E-1(4)

表四十二 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 0^\circ$				$\alpha = 5^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3396E-6	3.2539E-5	1.2214E-4	1.3361E-6	3.2430E-5	1.1897E-4
ε_b	0.0000E+0	-1.0868E-4	-2.5877E-3	-9.0303E-3	-1.0843E-4	-2.5819E-3	-9.0104E-3
ε_c	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	3.8545E-6	9.5914E-5	3.7257E-4
U_{tip}	0.0000E+0	1.6514E-8	-3.8288E-4	-4.3779E-3	1.7834E-8	-3.8160E-4	-4.3884E-3
V_{tip}	0.0000E+0	-1.1276E-3	-2.6464E-2	-8.8227E-2	-1.1251E-3	-2.6414E-2	-8.8240E-2
W_{tip}	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	1.9276E-5	5.2514E-4	3.3988E-3
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-6.4528E-6	-3.5741E-3	-3.5402E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-2.5407E-5	-1.4146E-2	-1.4355E-1
K_1	2.9614E-2(2)	2.9652E-2(2)	3.0570E-2(2)	3.3372E-2(4)	2.9652E-2(2)	3.0563E-2(2)	3.3331E-2(4)
K_2	5.6933E-2(4)	5.6958E-2(4)	5.6596E-2(4)	5.2155E-2(4)	5.6958E-2(4)	5.6598E-2(4)	5.2262E-2(4)
K_3	8.3477E-2(3)	8.3490E-2(3)	8.3896E-2(4)	8.5951E-2(4)	8.3490E-2(3)	8.3895E-2(4)	8.5976E-2(4)
K_4	1.7147E-1(4)	1.7152E-1(4)	1.7614E-1(4)	1.8889E-1(4)	1.7152E-1(4)	1.7613E-1(4)	1.8890E-1(4)
K_5	1.8541E-1(2)	1.8544E-1(2)	1.8630E-1(2)	2.0259E-1(4)	1.8544E-1(2)	1.8630E-1(2)	2.0279E-1(4)
K_6	2.8798E-1(4)	2.8807E-1(4)	2.9147E-1(4)	3.1307E-1(4)	2.8807E-1(4)	2.9146E-1(4)	3.1350E-1(4)
K_7	4.0777E-1(4)	4.0788E-1(4)	4.1069E-1(4)	4.2146E-1(4)	4.0788E-1(4)	4.1069E-1(4)	4.2201E-1(4)
K_8	5.1832E-1(2)	5.1836E-1(2)	5.1753E-1(4)	5.1325E-1(4)	5.1836E-1(2)	5.1749E-1(4)	5.1254E-1(4)

表四十三 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	1.3085E-6	3.1574E-5	9.4990E-5	1.2172E-6	2.8857E-5	2.7387E-5
ε_b	0.0000E+0	-1.0640E-4	-2.5358E-3	-8.8525E-3	-9.9689E-5	-2.3830E-3	-8.3356E-3
ε_c	0.0000E+0	1.1447E-5	2.8488E-4	1.1076E-3	2.2113E-5	5.5064E-4	2.1471E-3
U_{tip}	0.0000E+0	2.8101E-8	-3.7137E-4	-4.4664E-3	5.9032E-8	-3.3774E-4	-4.6628E-3
V_{tip}	0.0000E+0	-1.1048E-3	-2.6015E-2	-8.8300E-2	-1.0378E-3	-2.4670E-2	-8.8064E-2
W_{tip}	0.0000E+0	5.7243E-5	1.5561E-3	1.0082E-2	1.1058E-4	2.9844E-3	1.9479E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	-1.8824E-5	-1.0478E-2	-1.0437E-1	-3.4204E-5	-1.9351E-2	-1.9886E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	-7.4103E-5	-4.1452E-2	-4.1708E-1	-1.3457E-4	-7.6422E-2	-7.6522E-1
K_1	2.9614E-2(2)	2.9651E-2(2)	3.0512E-2(4)	3.3033E-2(4)	2.9649E-2(2)	3.0350E-2(4)	3.2254E-2(4)
K_2	5.6933E-2(4)	5.6958E-2(4)	5.6611E-2(4)	5.2953E-2(4)	5.6957E-2(4)	5.6652E-2(4)	5.4166E-2(4)
K_3	8.3477E-2(3)	8.3490E-2(3)	8.3887E-2(4)	8.6155E-2(4)	8.3489E-2(3)	8.3860E-2(4)	8.6578E-2(4)
K_4	1.7147E-1(4)	1.7152E-1(4)	1.7600E-1(4)	1.8902E-1(4)	1.7152E-1(4)	1.7558E-1(4)	1.8958E-1(4)
K_5	1.8541E-1(2)	1.8544E-1(2)	1.8630E-1(4)	2.0424E-1(4)	1.8544E-1(2)	1.8629E-1(4)	2.0784E-1(4)
K_6	2.8798E-1(4)	2.8807E-1(4)	2.9140E-1(4)	3.1651E-1(4)	2.8806E-1(4)	2.9116E-1(4)	3.2330E-1(4)
K_7	4.0777E-1(4)	4.0788E-1(4)	4.1065E-1(4)	4.2590E-1(4)	4.0787E-1(4)	4.1052E-1(4)	4.3459E-1(4)
K_8	5.1832E-1(2)	5.1836E-1(2)	5.1720E-1(4)	5.0840E-1(4)	5.1836E-1(2)	5.1661E-1(4)	5.0021E-1(4)

表四十四 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

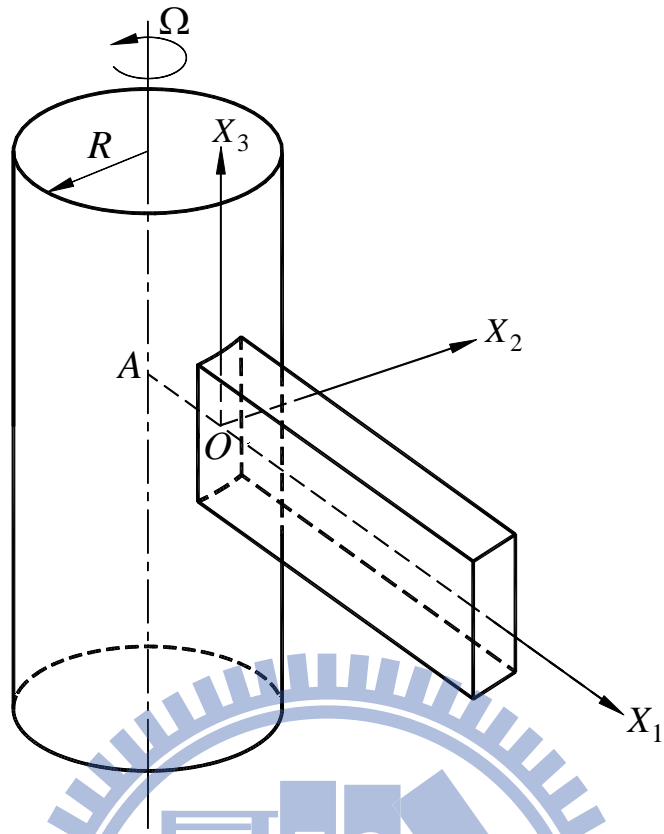
(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

	$\alpha = 0^\circ$				$\alpha = 5^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.4494E-7	2.0752E-5	5.4998E-5	9.4230E-7	2.0630E-5	4.8740E-5
ε_b	0.0000E+0	-1.8306E-4	-4.4602E-3	-1.6338E-2	-1.8258E-4	-4.4492E-3	-1.6301E-2
ε_c	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	3.8548E-6	9.5947E-5	3.6843E-4
U_{tip}	0.0000E+0	-1.5259E-6	-1.1777E-3	-1.4789E-2	-1.5173E-6	-1.1729E-3	-1.4785E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-1.8886E-3	-4.5564E-2	-1.6051E-1	-1.8838E-3	-4.5465E-2	-1.6036E-1
W_{tip}	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	1.9285E-5	6.1339E-4	5.7099E-3
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-1.0780E-5	-5.9900E-3	-4.6892E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	0.0000E+0	-4.2503E-5	-2.3783E-2	-1.9575E-1
K_1	2.9614E-2(2)	2.9630E-2(2)	3.0038E-2(4)	3.0915E-2(4)	2.9630E-2(2)	3.0032E-2(4)	3.0923E-2(4)
K_2	5.6933E-2(4)	5.6946E-2(4)	5.4710E-2(4)	4.6406E-2(4)	5.6946E-2(4)	5.4721E-2(4)	4.6598E-2(4)
K_3	8.3477E-2(3)	8.3495E-2(4)	8.4115E-2(4)	8.7377E-2(4)	8.3495E-2(4)	8.4115E-2(4)	8.7449E-2(4)
K_4	1.7147E-1(4)	1.7152E-1(4)	1.8180E-1(4)	1.8742E-1(4)	1.7152E-1(4)	1.8177E-1(4)	1.8743E-1(4)
K_5	1.8541E-1(2)	1.8543E-1(2)	1.8597E-1(4)	2.2373E-1(4)	1.8543E-1(2)	1.8597E-1(4)	2.2387E-1(4)
K_6	2.8798E-1(4)	2.8805E-1(4)	2.9384E-1(4)	3.4520E-1(4)	2.8805E-1(4)	2.9383E-1(4)	3.4553E-1(4)
K_7	4.0777E-1(4)	4.0785E-1(4)	4.1027E-1(4)	4.3711E-1(4)	4.0785E-1(4)	4.1027E-1(4)	4.3818E-1(4)
K_8	5.1832E-1(2)	5.1835E-1(2)	5.1472E-1(4)	5.0762E-1(4)	5.1835E-1(2)	5.1468E-1(4)	5.0733E-1(4)

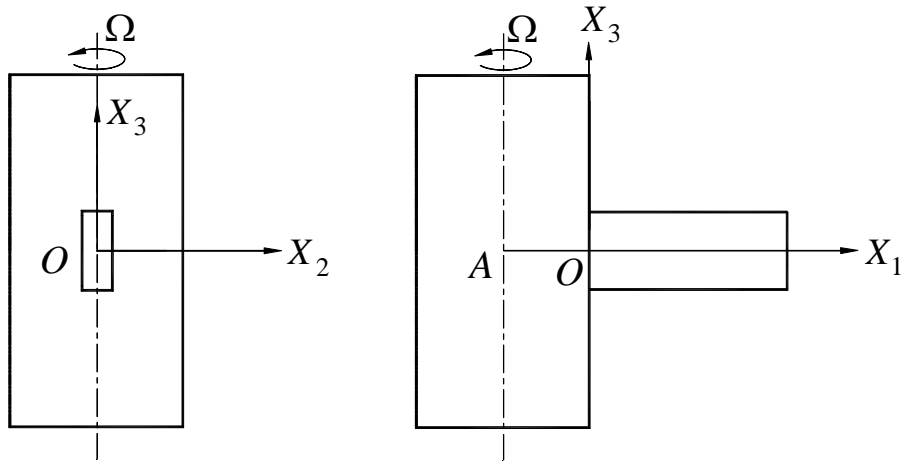
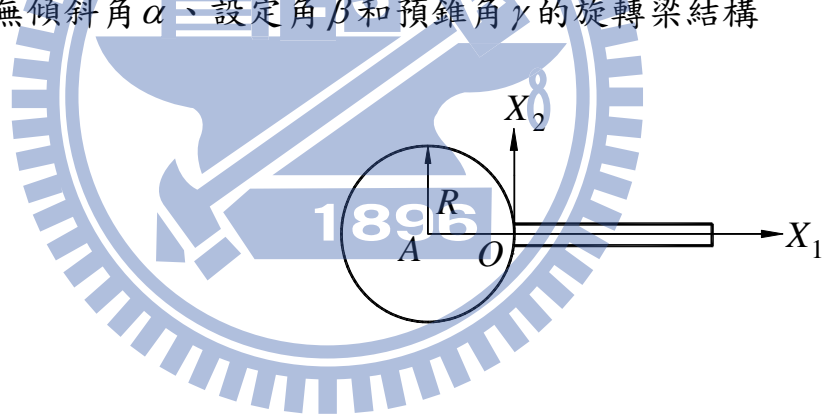
表四十五 旋轉梁不同傾斜角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

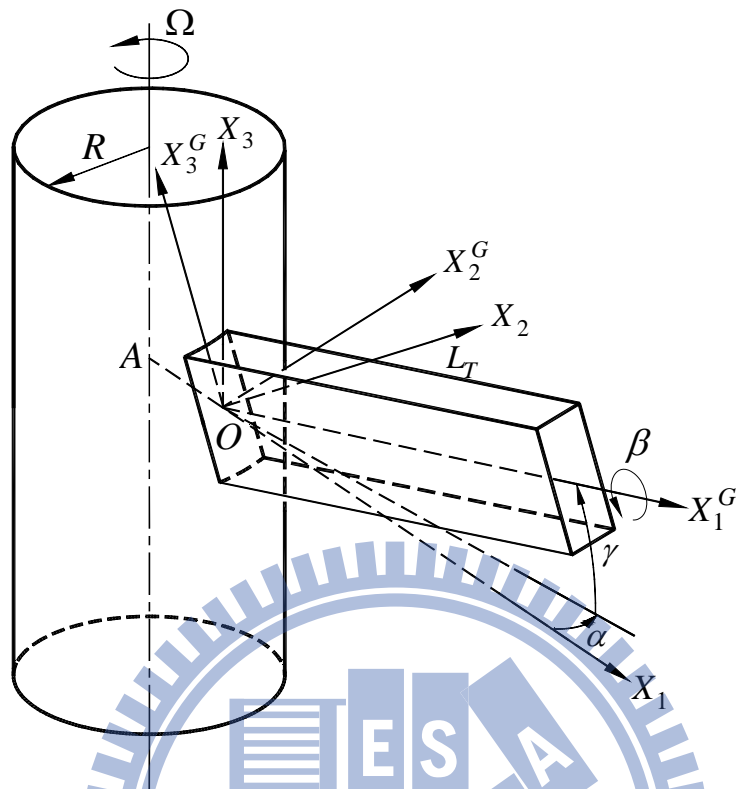
	$\alpha = 15^\circ$				$\alpha = 30^\circ$		
k	0.0000E+0	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2	1.0000E-3	5.0000E-3	1.0000E-2
ε_0	0.0000E+0	9.2129E-7	1.9694E-5	3.3600E-6	8.5190E-7	1.6922E-5	-1.1158E-4
ε_b	0.0000E+0	-1.7882E-4	-4.3610E-3	-1.6008E-2	-1.6641E-4	-4.0689E-3	-1.5032E-2
ε_c	0.0000E+0	1.1447E-5	2.8499E-4	1.0968E-3	2.2115E-5	5.5094E-4	2.1330E-3
U_{tip}	0.0000E+0	-1.4494E-6	-1.1347E-3	-1.4735E-2	-1.2364E-6	-1.0109E-3	-1.4403E-2
V_{tip}	0.0000E+0	-1.8463E-3	-4.4680E-2	-1.5912E-1	-1.7222E-3	-4.2044E-2	-1.5461E-1
W_{tip}	0.0000E+0	5.7267E-5	1.8096E-3	1.6586E-2	1.1063E-4	3.4210E-3	3.0559E-2
$\Theta_1(1)$	0.0000E+0	-3.1385E-5	-1.7534E-2	-1.3655E-1	-5.6627E-5	-3.2204E-2	-2.5359E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.0000E+0	-1.2372E-4	-6.9554E-2	-5.5720E-1	-2.2310E-4	-1.2740E-1	-9.8298E-1
K_1	2.9614E-2(2)	2.9629E-2(2)	2.9988E-2(4)	3.0934E-2(4)	2.9627E-2(2)	2.9846E-2(4)	3.0743E-2(4)
K_2	5.6933E-2(4)	5.6946E-2(4)	5.4807E-2(4)	4.7785E-2(4)	5.6945E-2(4)	5.5071E-2(4)	4.9881E-2(4)
K_3	8.3477E-2(3)	8.3495E-2(4)	8.4108E-2(4)	8.7894E-2(4)	8.3494E-2(4)	8.4083E-2(4)	8.8701E-2(4)
K_4	1.7147E-1(4)	1.7152E-1(4)	1.8152E-1(4)	1.8754E-1(4)	1.7151E-1(4)	1.8064E-1(4)	1.8819E-1(4)
K_5	1.8541E-1(2)	1.8543E-1(2)	1.8597E-1(4)	2.2483E-1(4)	1.8543E-1(2)	1.8599E-1(4)	2.2712E-1(4)
K_6	2.8798E-1(4)	2.8805E-1(4)	2.9374E-1(4)	3.4777E-1(4)	2.8804E-1(4)	2.9337E-1(4)	3.5265E-1(4)
K_7	4.0777E-1(4)	4.0784E-1(4)	4.1032E-1(4)	4.4486E-1(4)	4.0784E-1(4)	4.1039E-1(4)	4.5671E-1(4)
K_8	5.1832E-1(2)	5.1835E-1(2)	5.1443E-1(4)	5.0450E-1(4)	5.1835E-1(2)	5.1387E-1(4)	4.9713E-1(4)



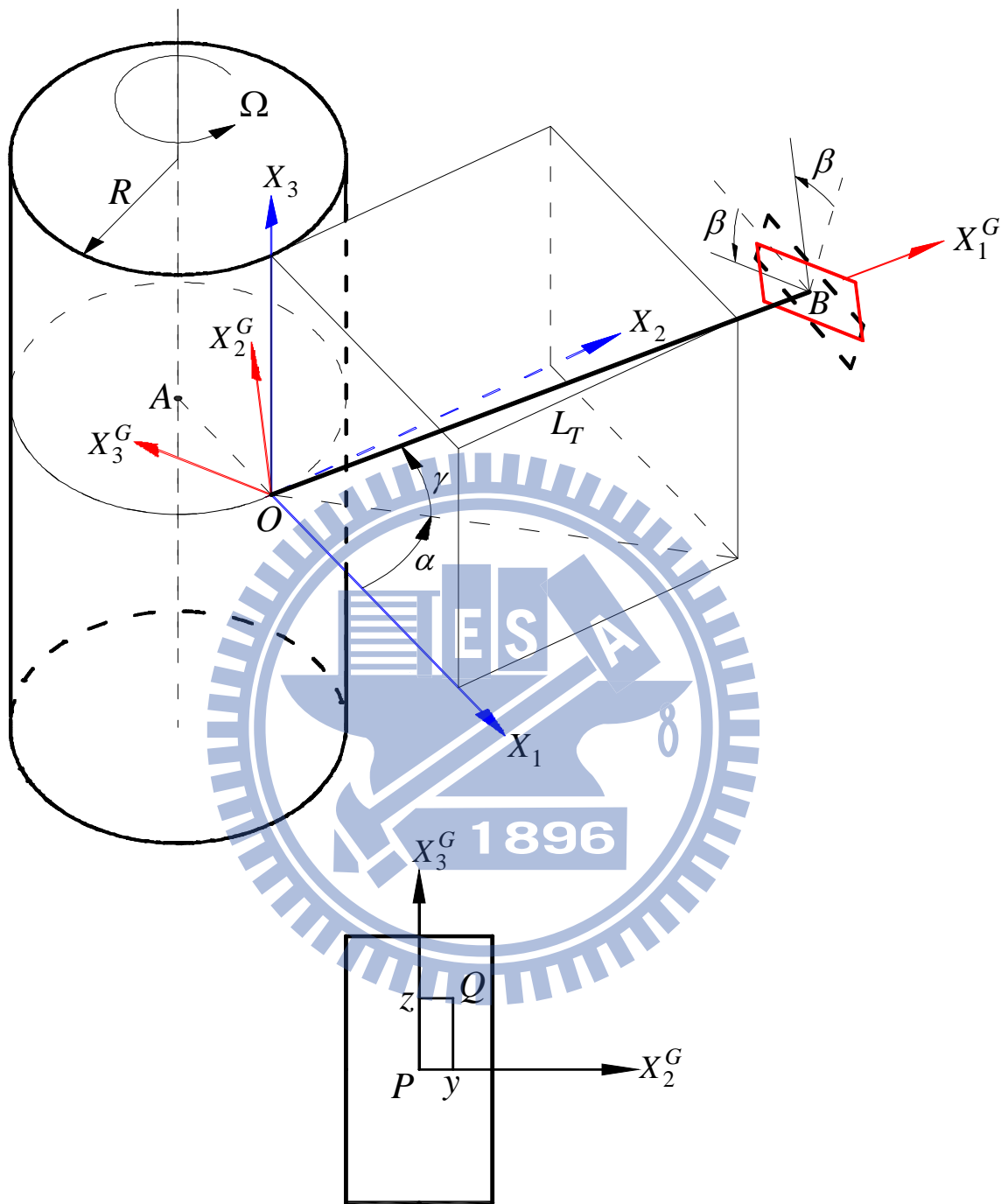
圖一 無傾斜角 α 、設定角 β 和預錐角 γ 的旋轉梁結構



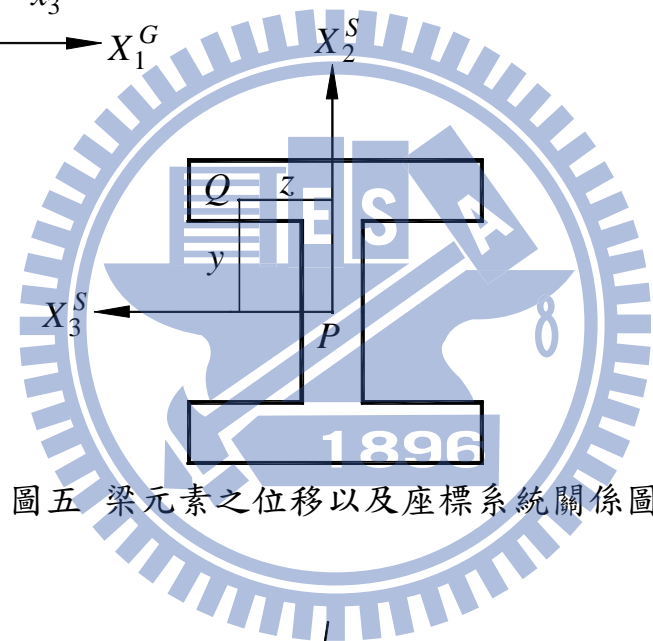
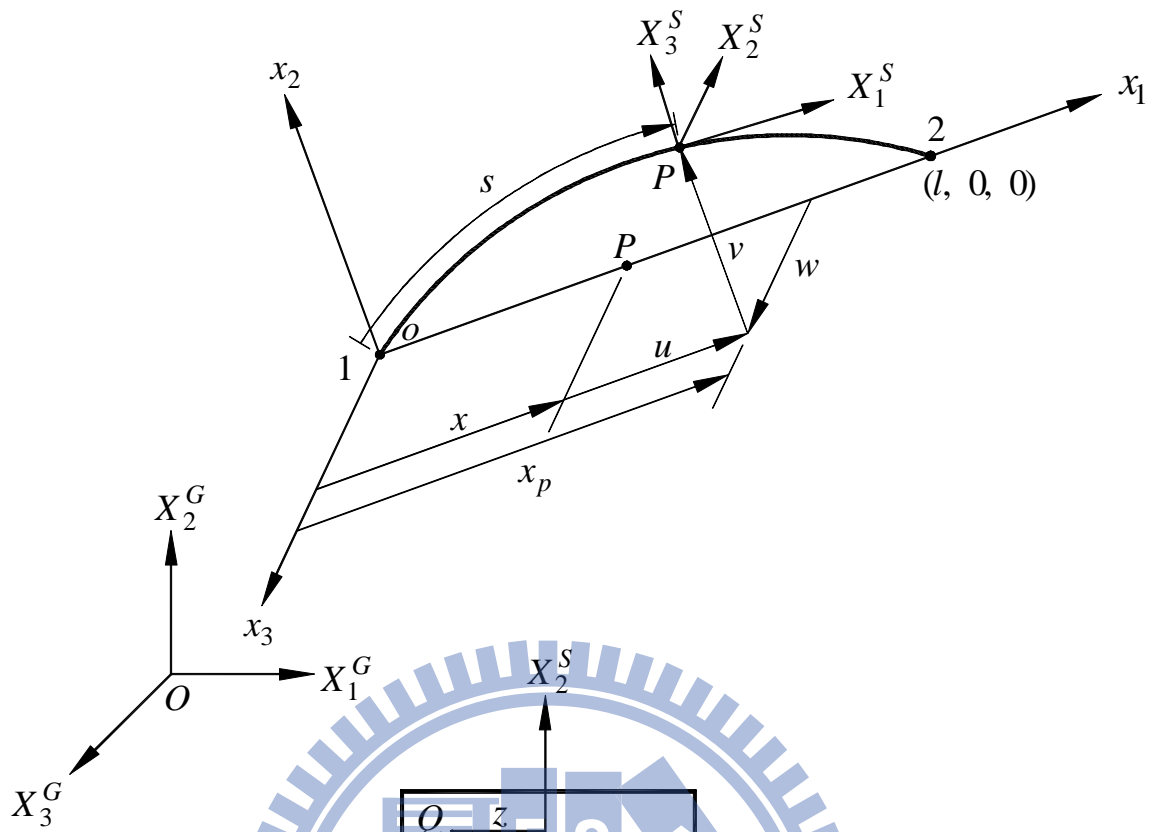
圖二 無傾斜角 α 、設定角 β 和預錐角 γ 之旋轉梁結構的三視圖



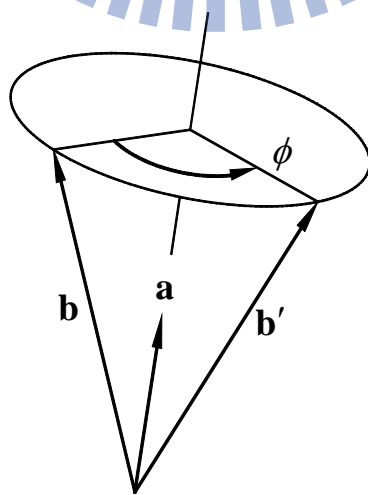
圖三 具傾斜角 α 、設定角 β 和預錐角 γ 的旋轉梁結構



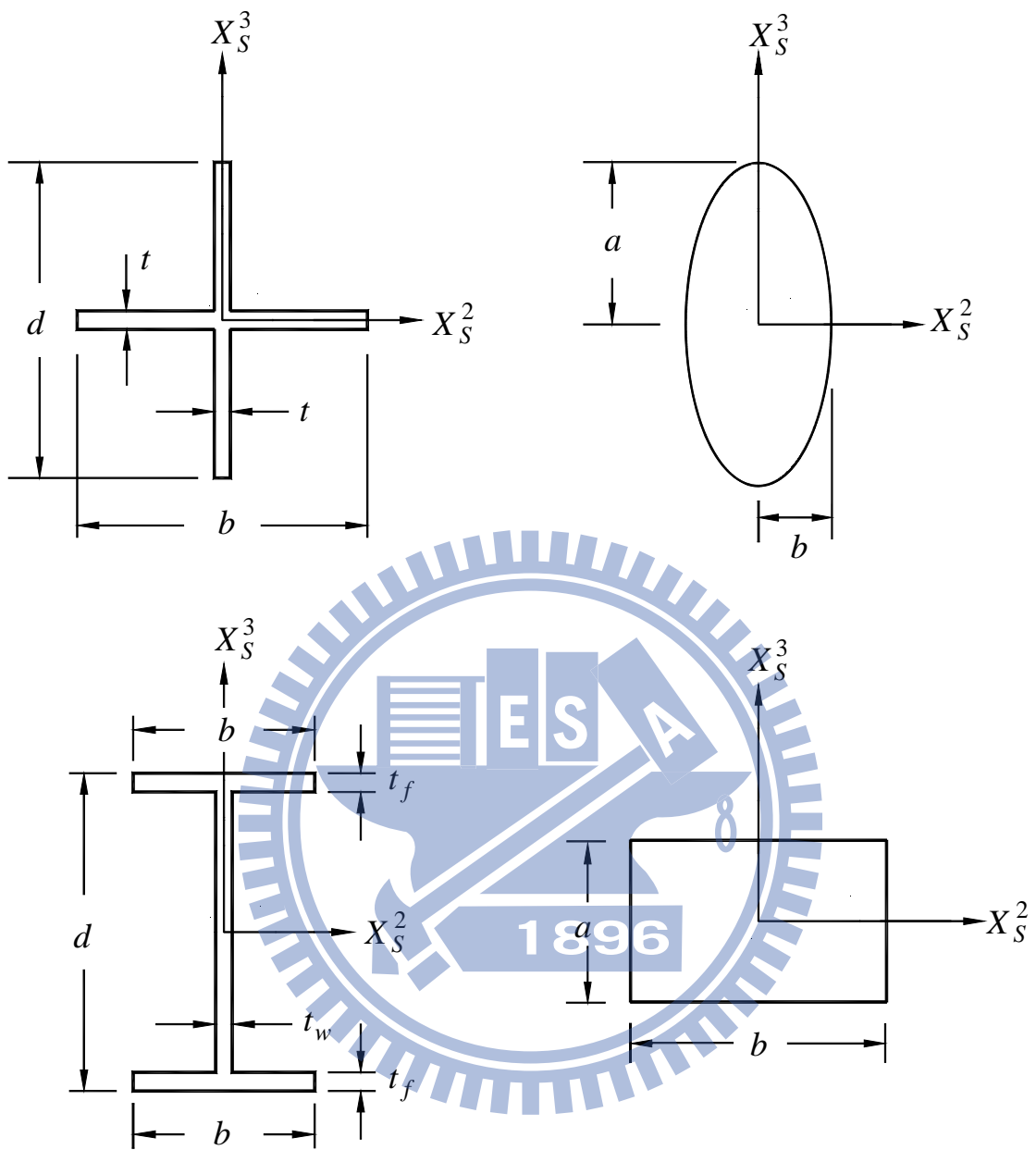
圖四 具傾斜角 α 、設定角 β 和預錐角 γ 的旋轉梁結構示意圖



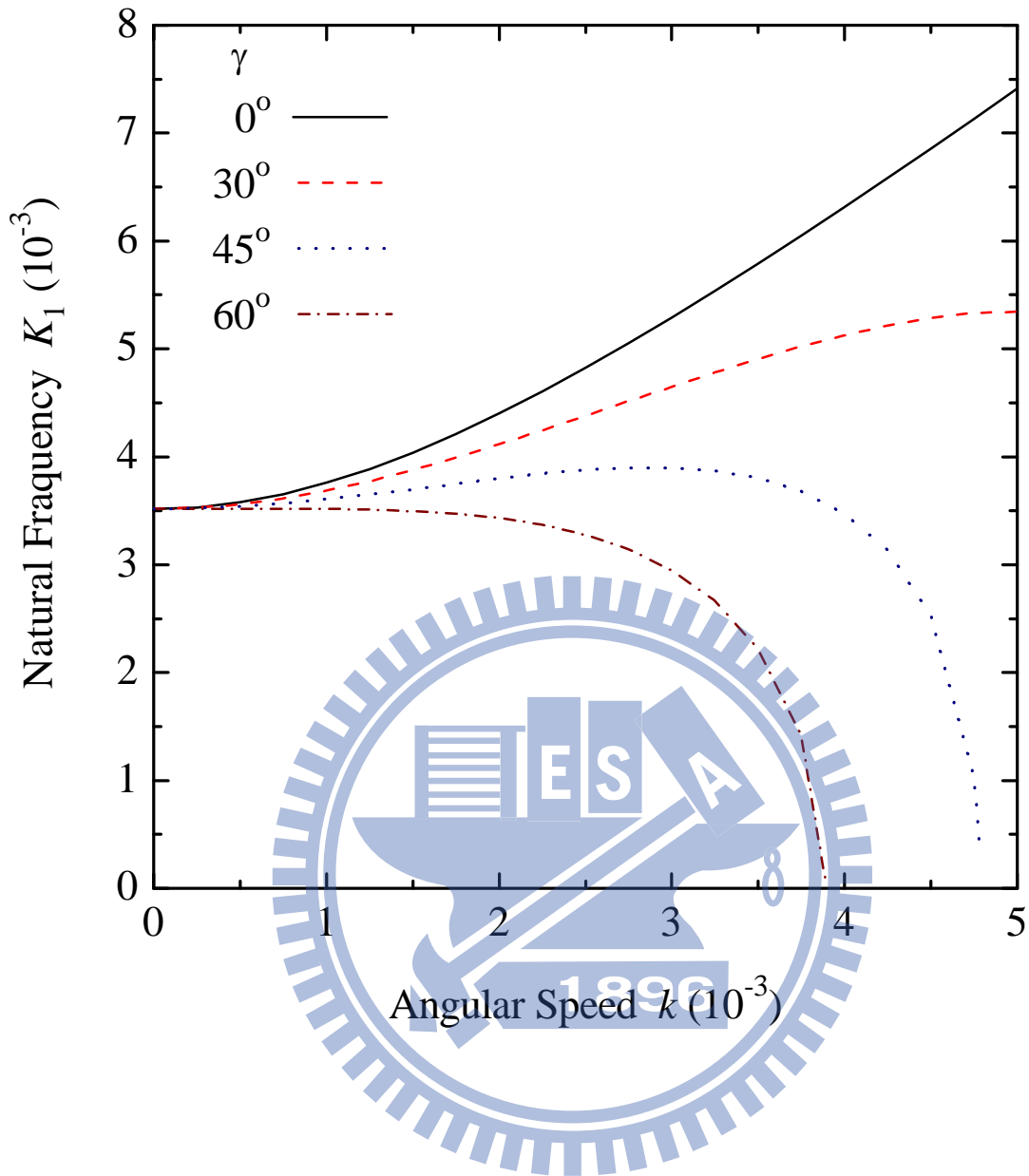
圖五 梁元素之位移以及座標系統關係圖



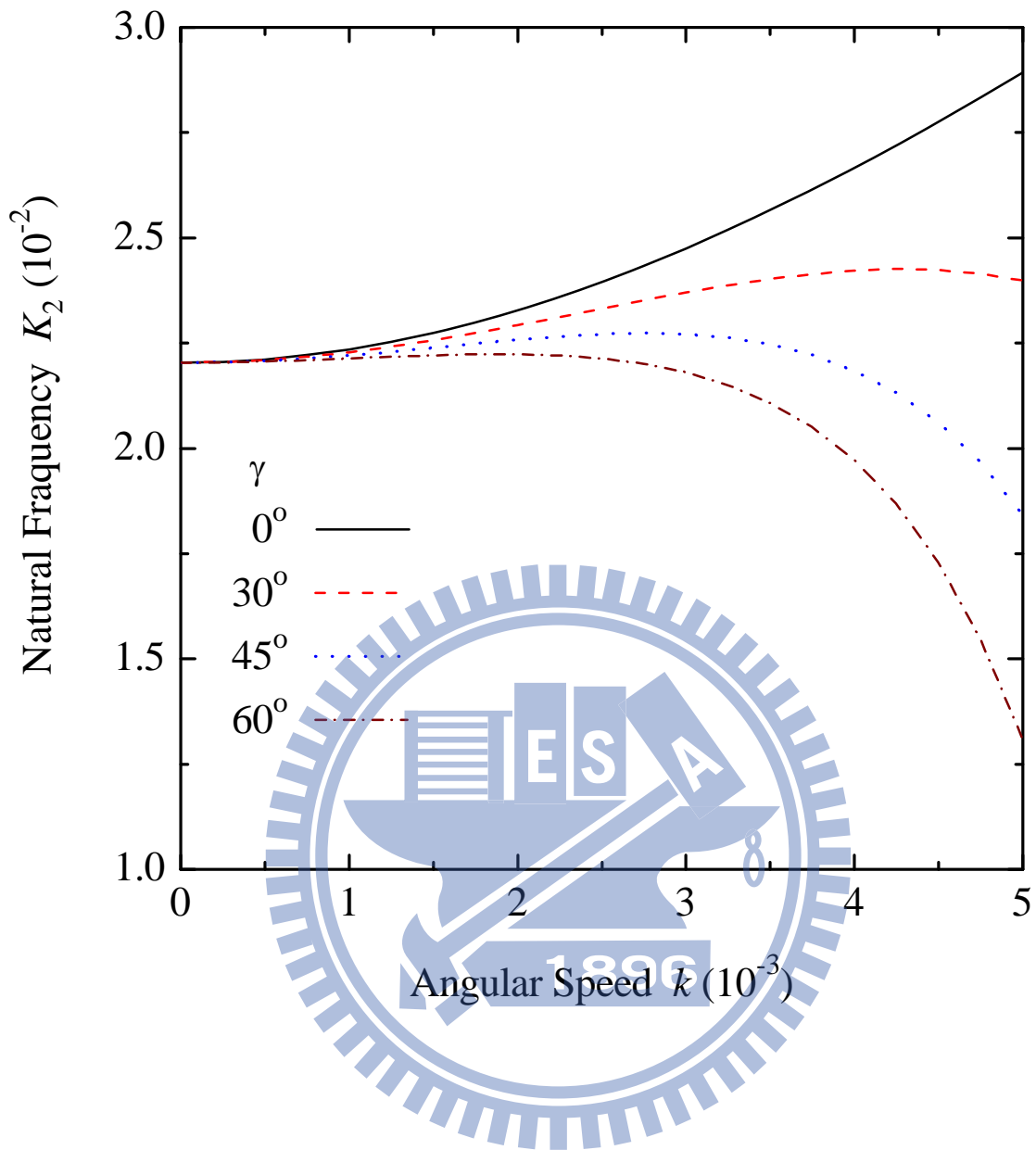
圖六 旋轉向量



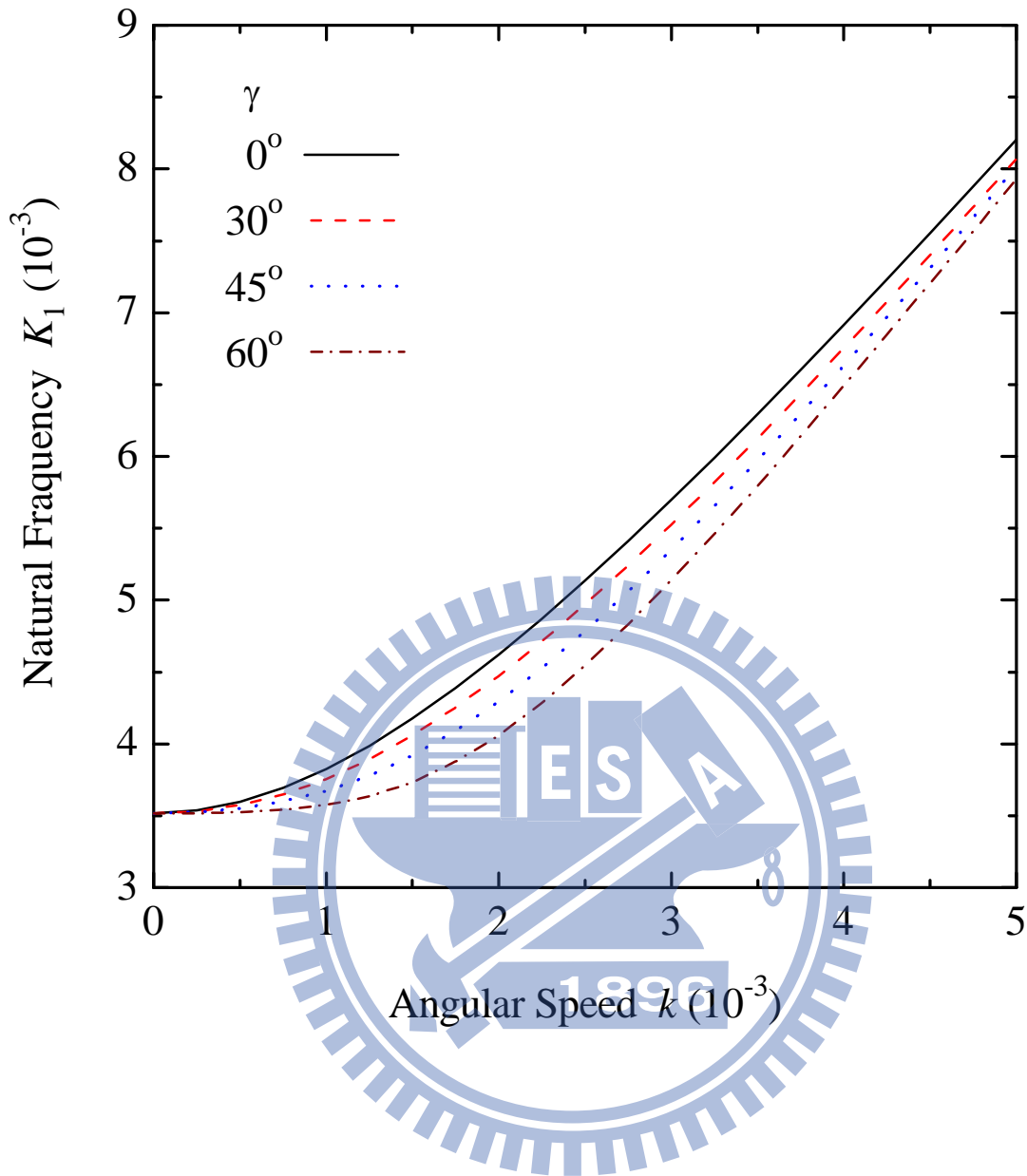
圖七 梁的斷面圖



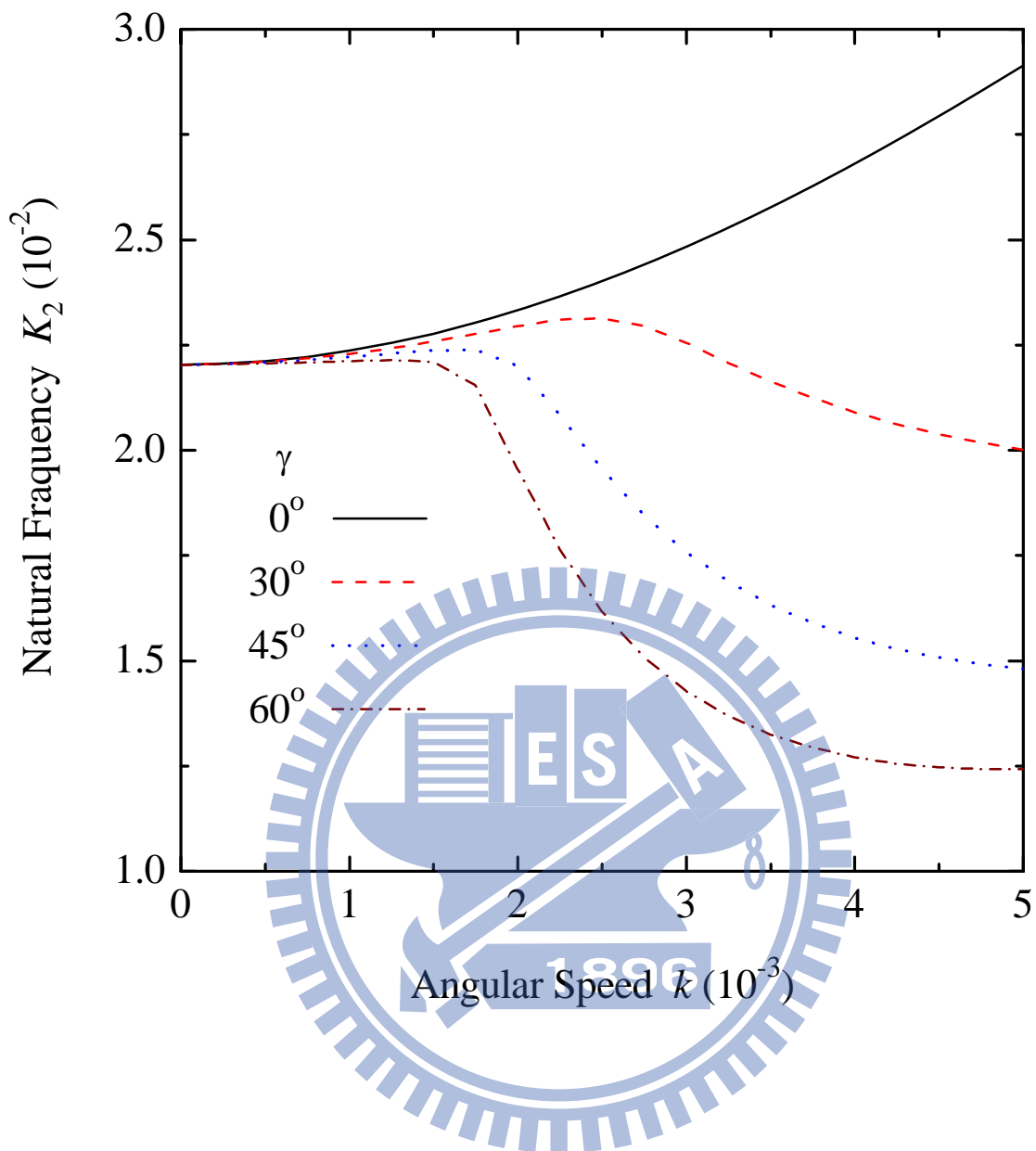
圖八 轉速 - 第一自然頻率曲線
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$)



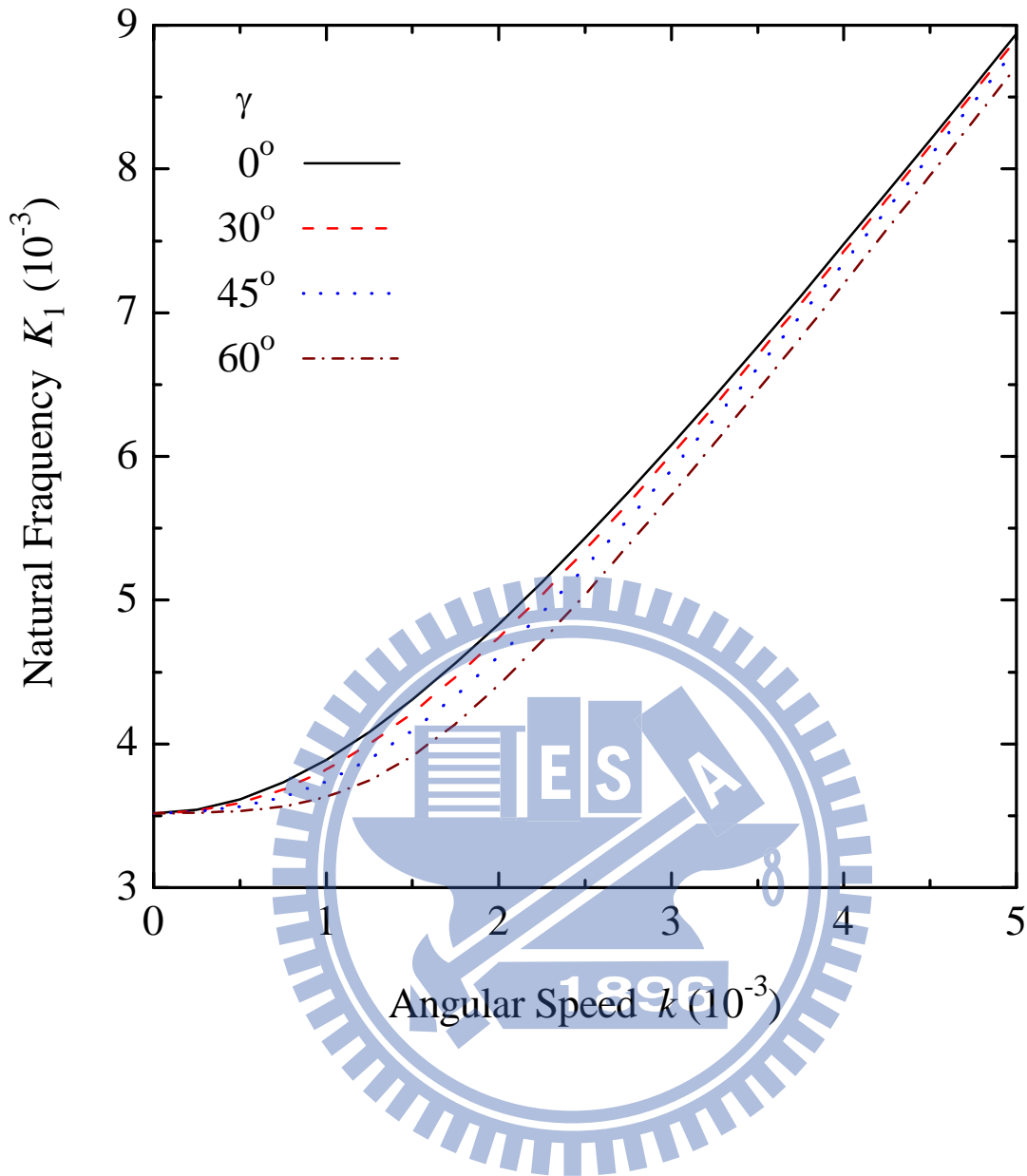
圖九 轉速 - 第二自然頻率曲線
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$)



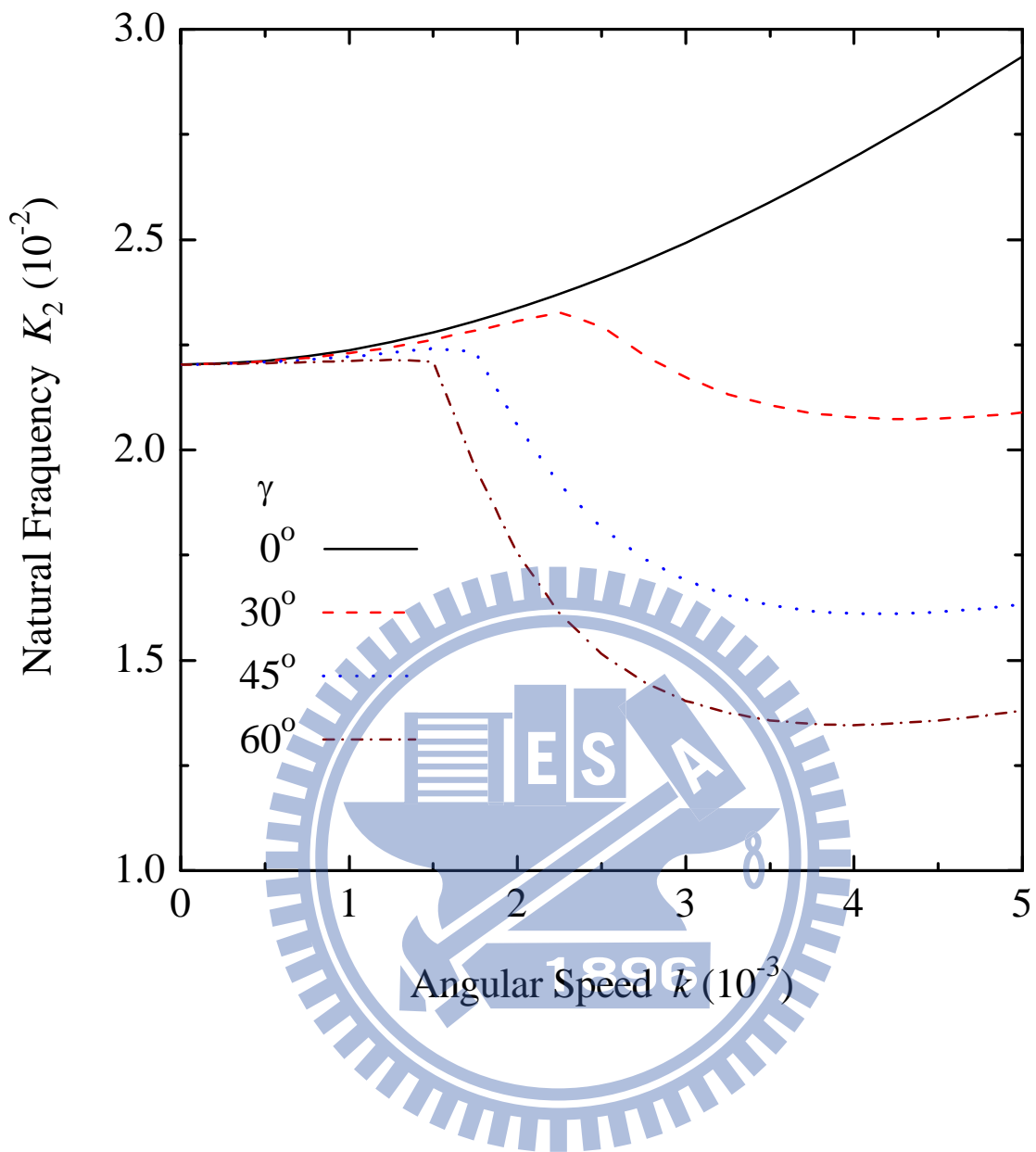
圖十 轉速 - 第一自然頻率曲線
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$)



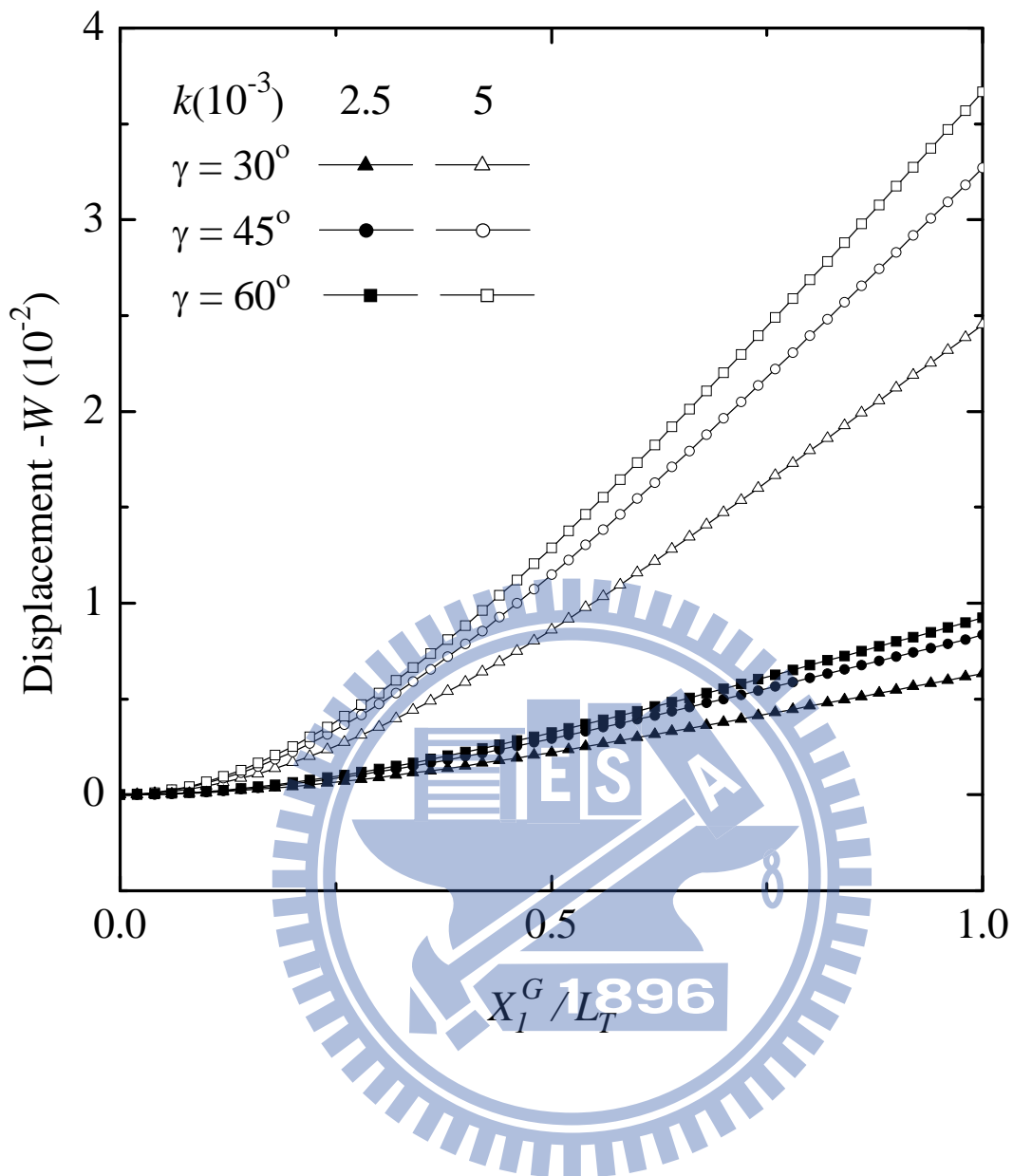
圖十一 轉速 - 第二自然頻率曲線
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$)



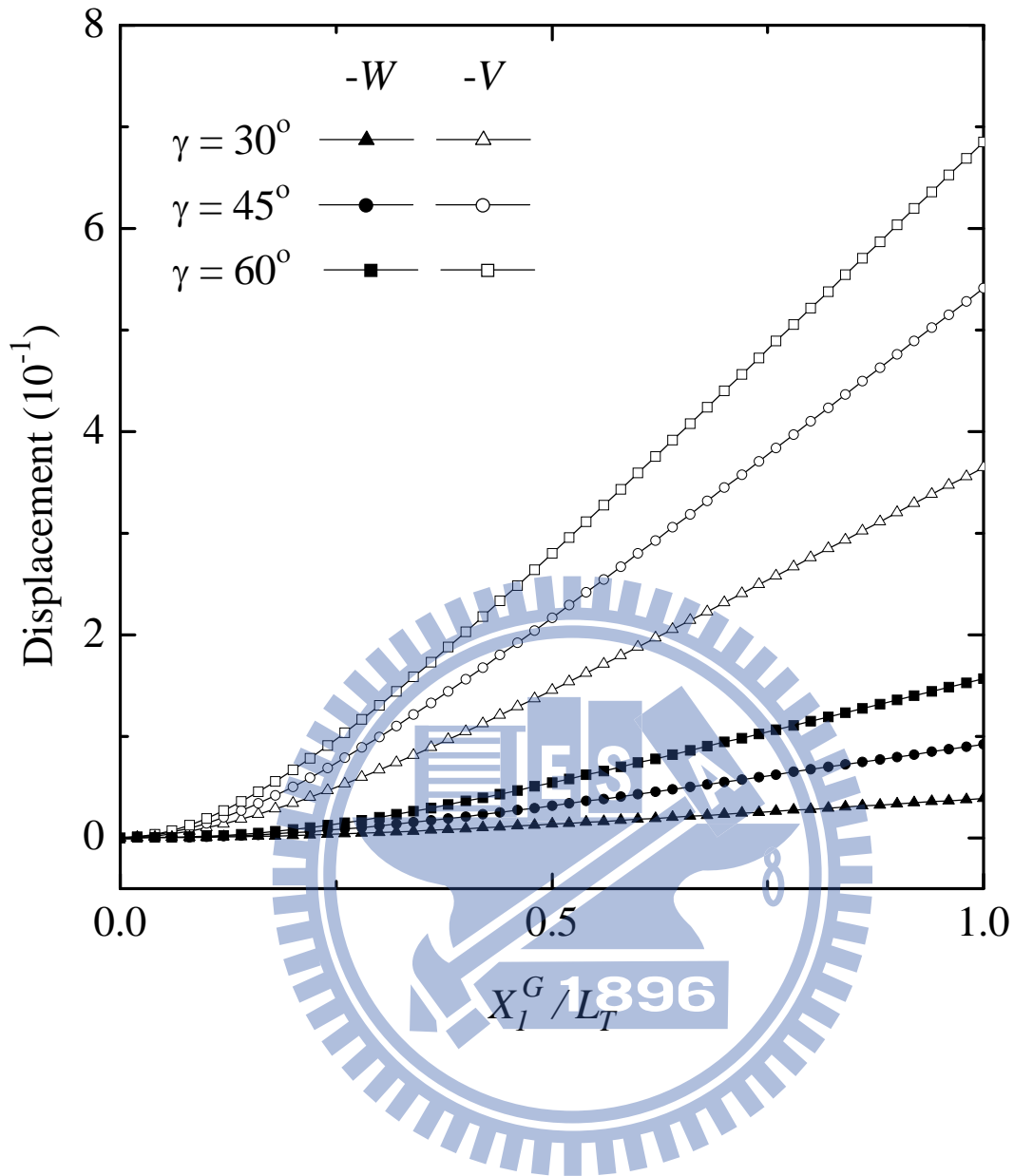
圖十二 轉速 - 第一自然頻率曲線
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$)



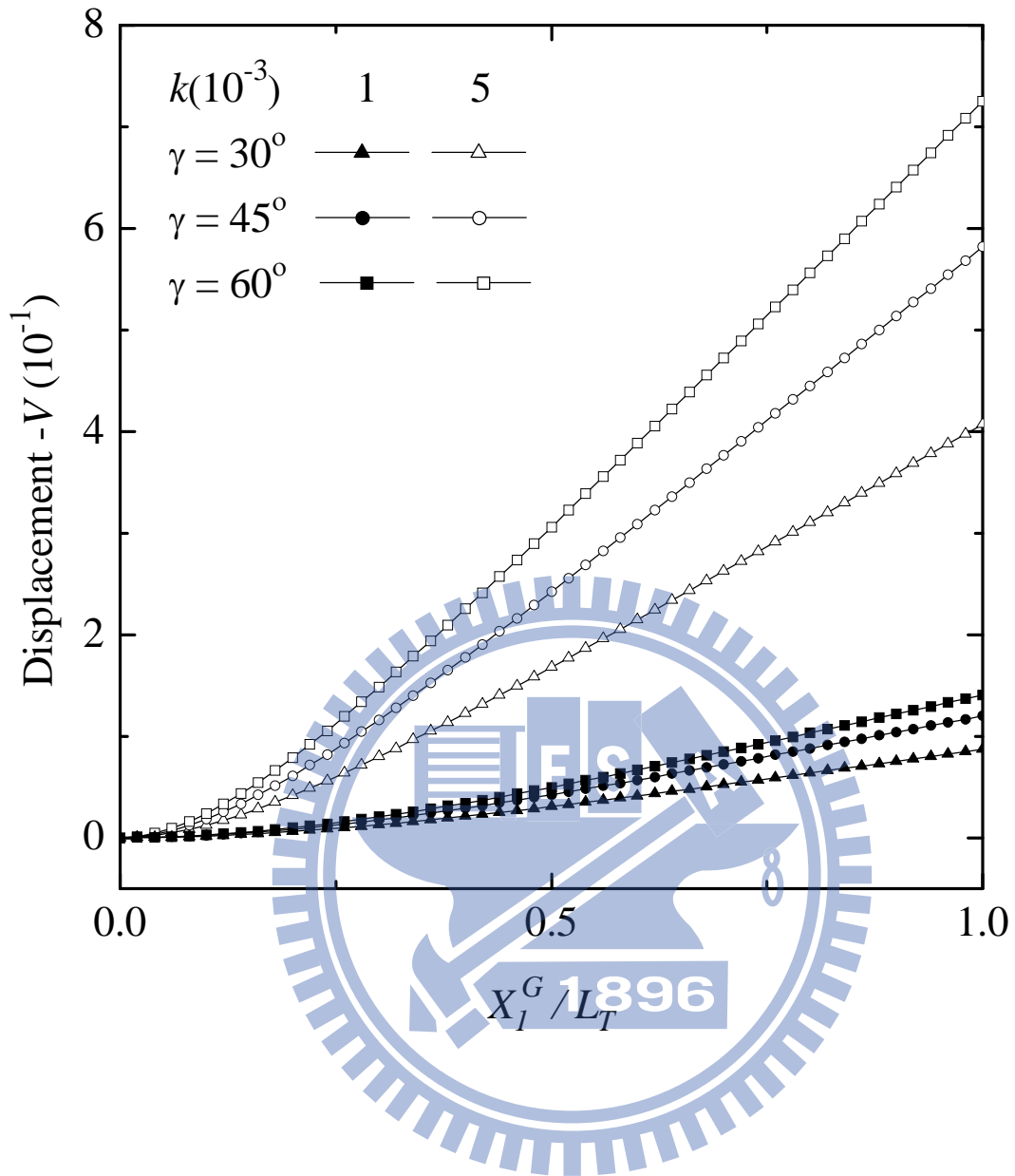
圖十三 轉速 - 第二自然頻率曲線
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$)



圖十四 旋轉梁之側位移分布圖
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$)

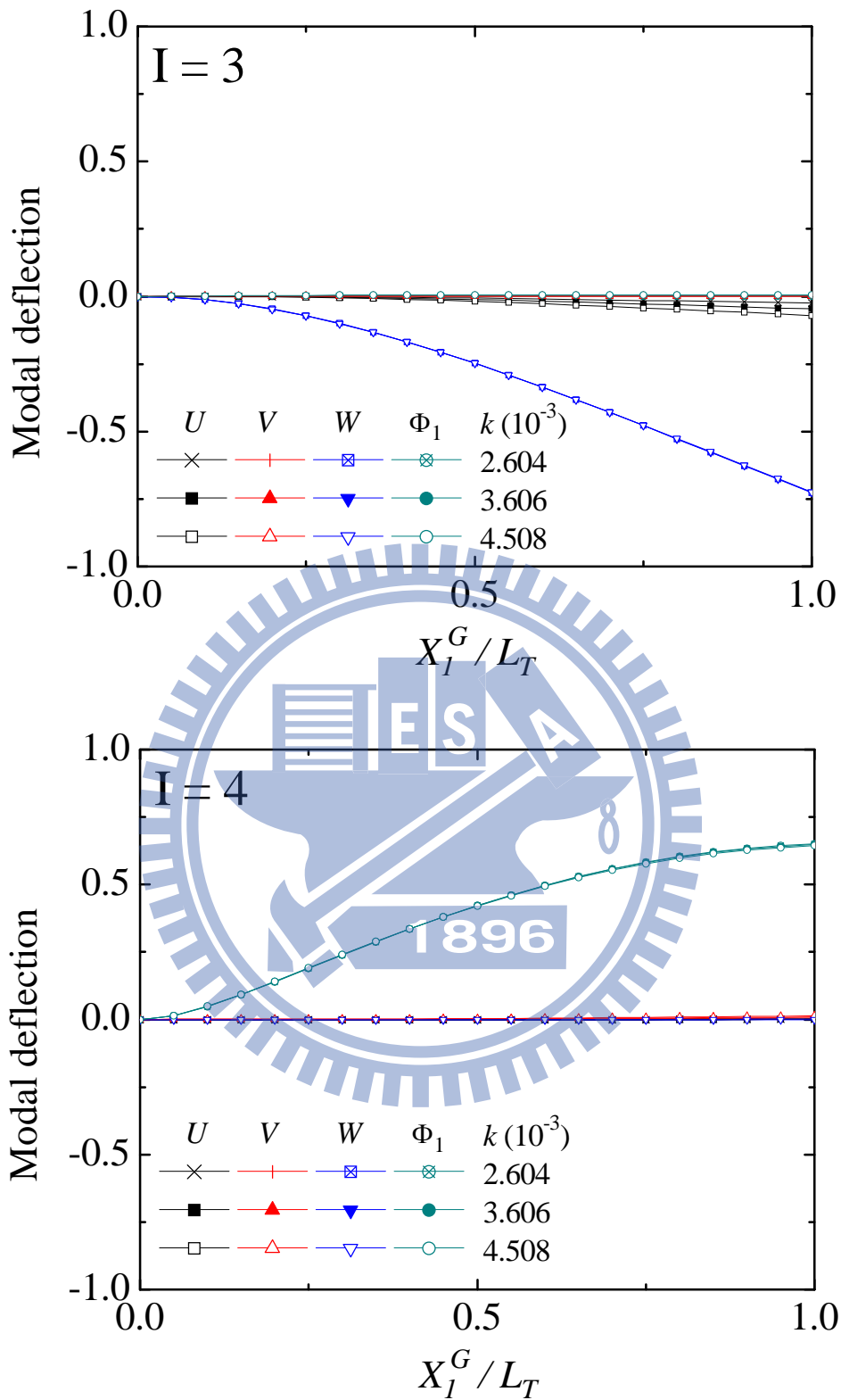


圖十五旋轉梁之側位移分布圖
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$,
 $\beta = 45^\circ$, $k = 0.005$)

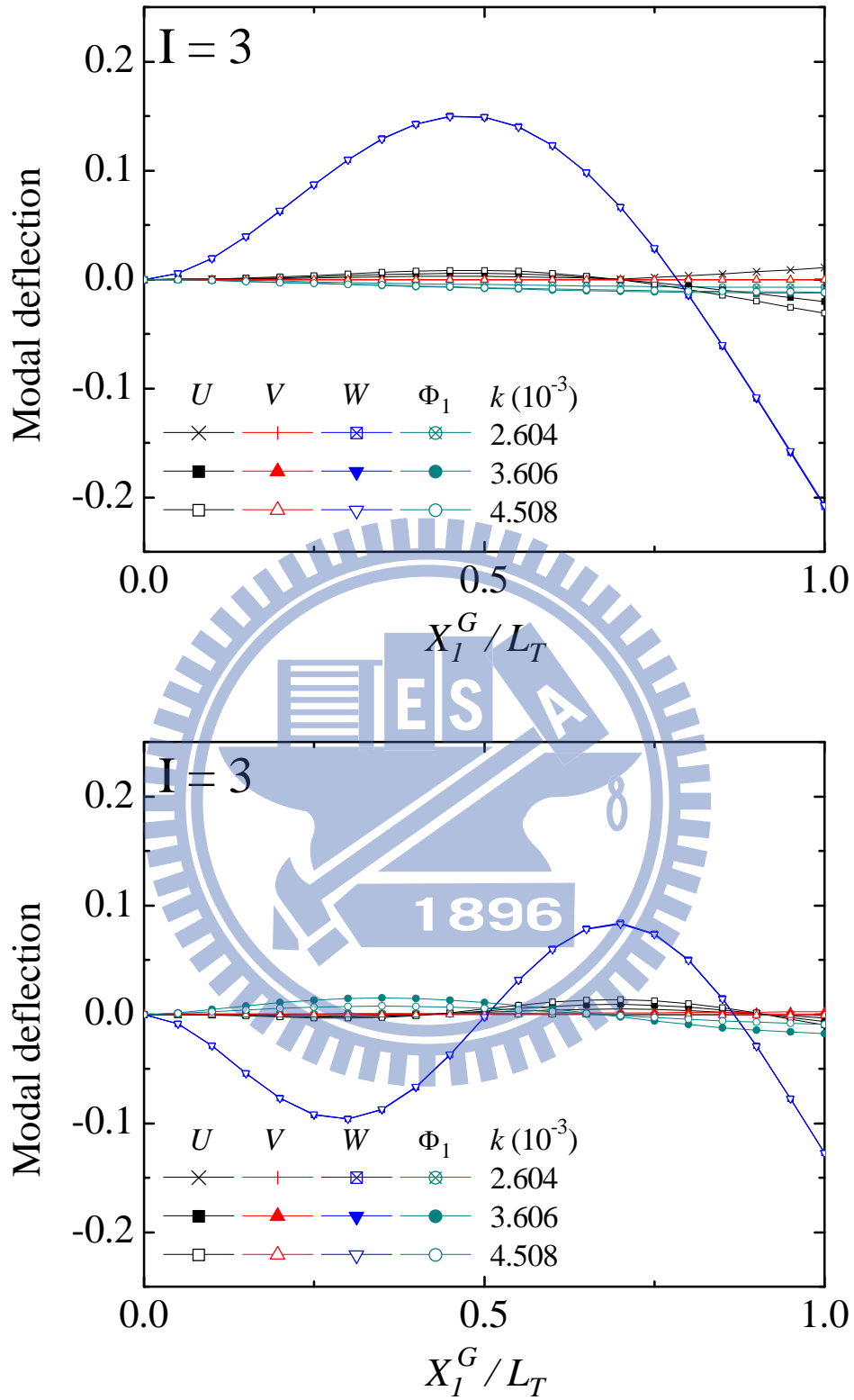


圖十六 旋轉梁之側位移分布圖

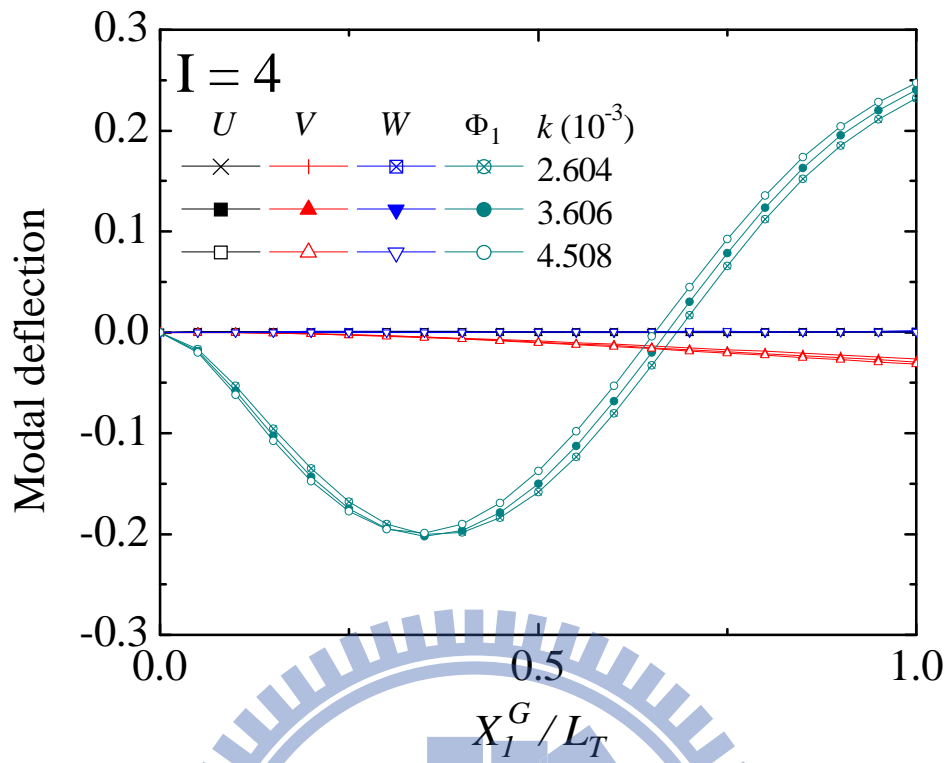
(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $n_y = 1000$, $n_z = 100$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$)



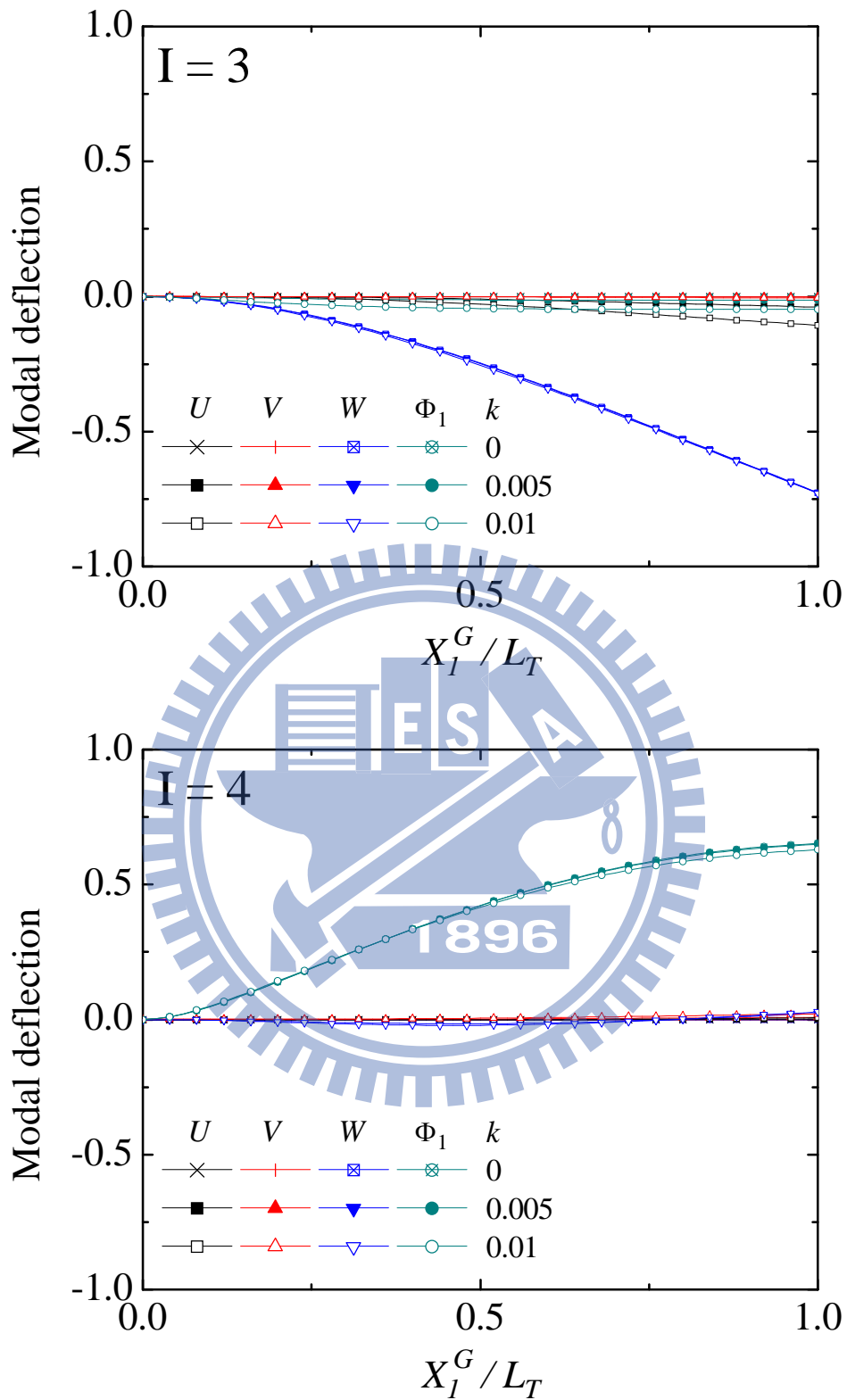
圖十七 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態
 (矩形斷面 $a/b=0.05$, $L_T/a=60$, $r=0.636$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$, $\gamma=45^\circ$, $N=20$)



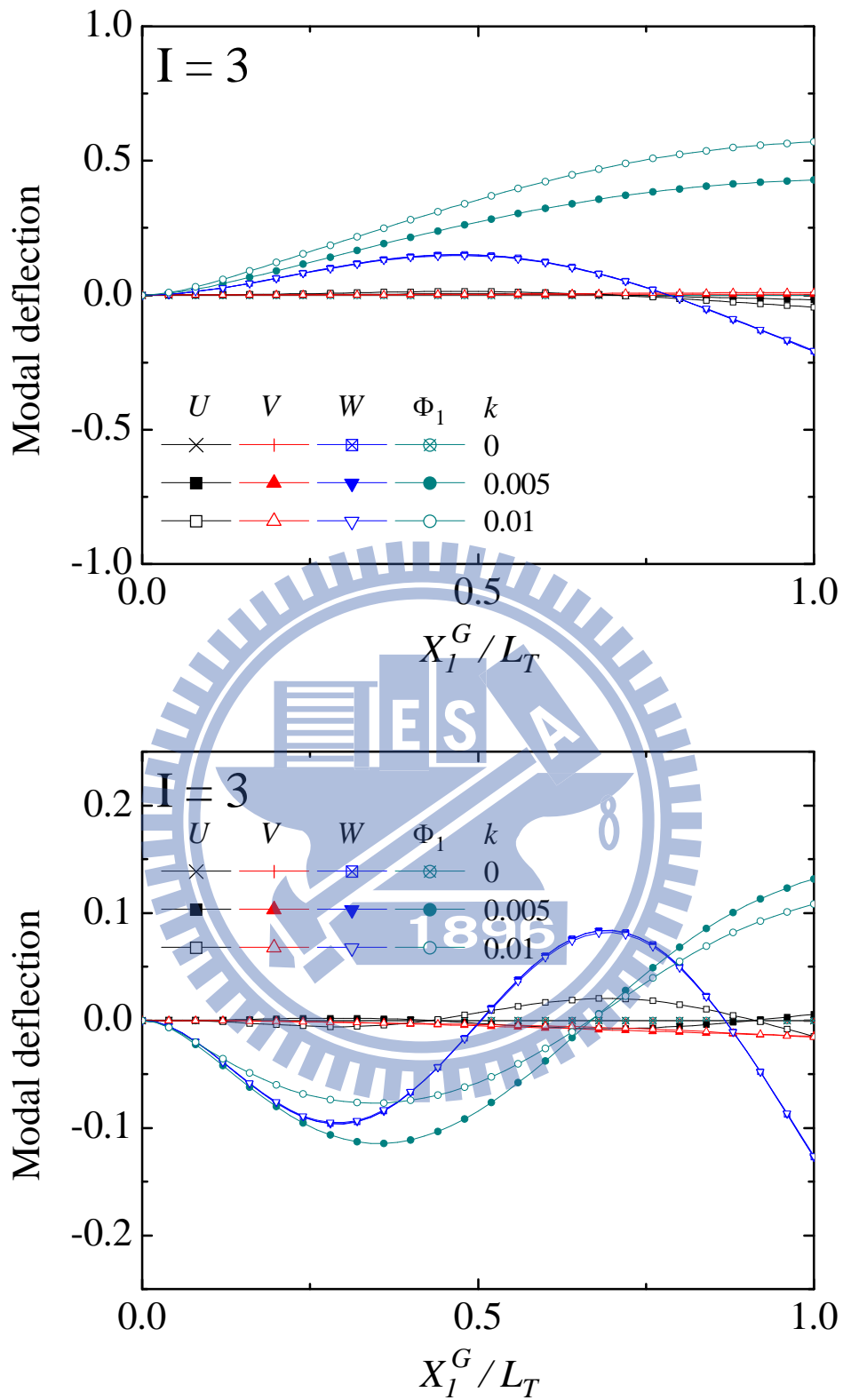
圖十八 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態
 (矩形斷面 $a/b=0.05$, $L_T/a=60$, $r=0.636$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$, $\gamma=45^\circ$, $N=20$)



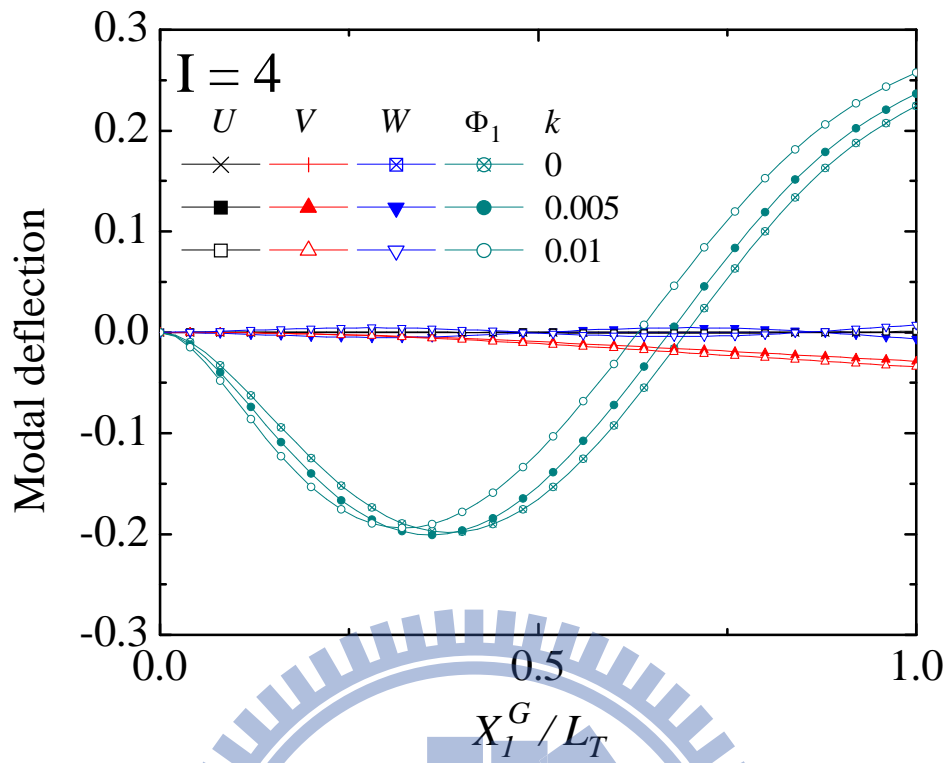
圖十九 旋轉梁不同轉速下的第五振動模態
 (矩形斷面 $a/b=0.05$, $L_T/a=60$, $r=0.636$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$, $\gamma=45^\circ$, $N=20$)



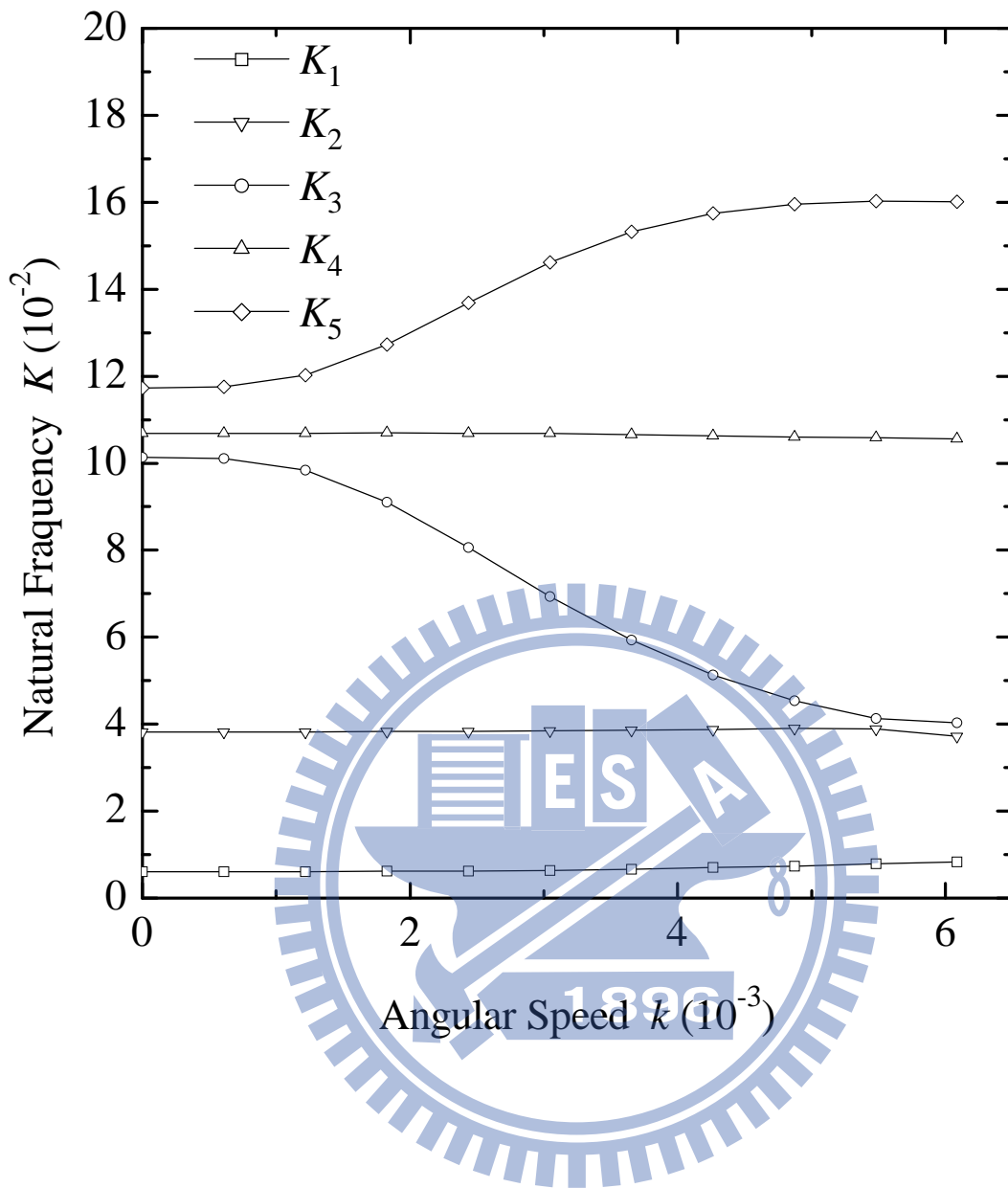
圖二十 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態
 (矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)



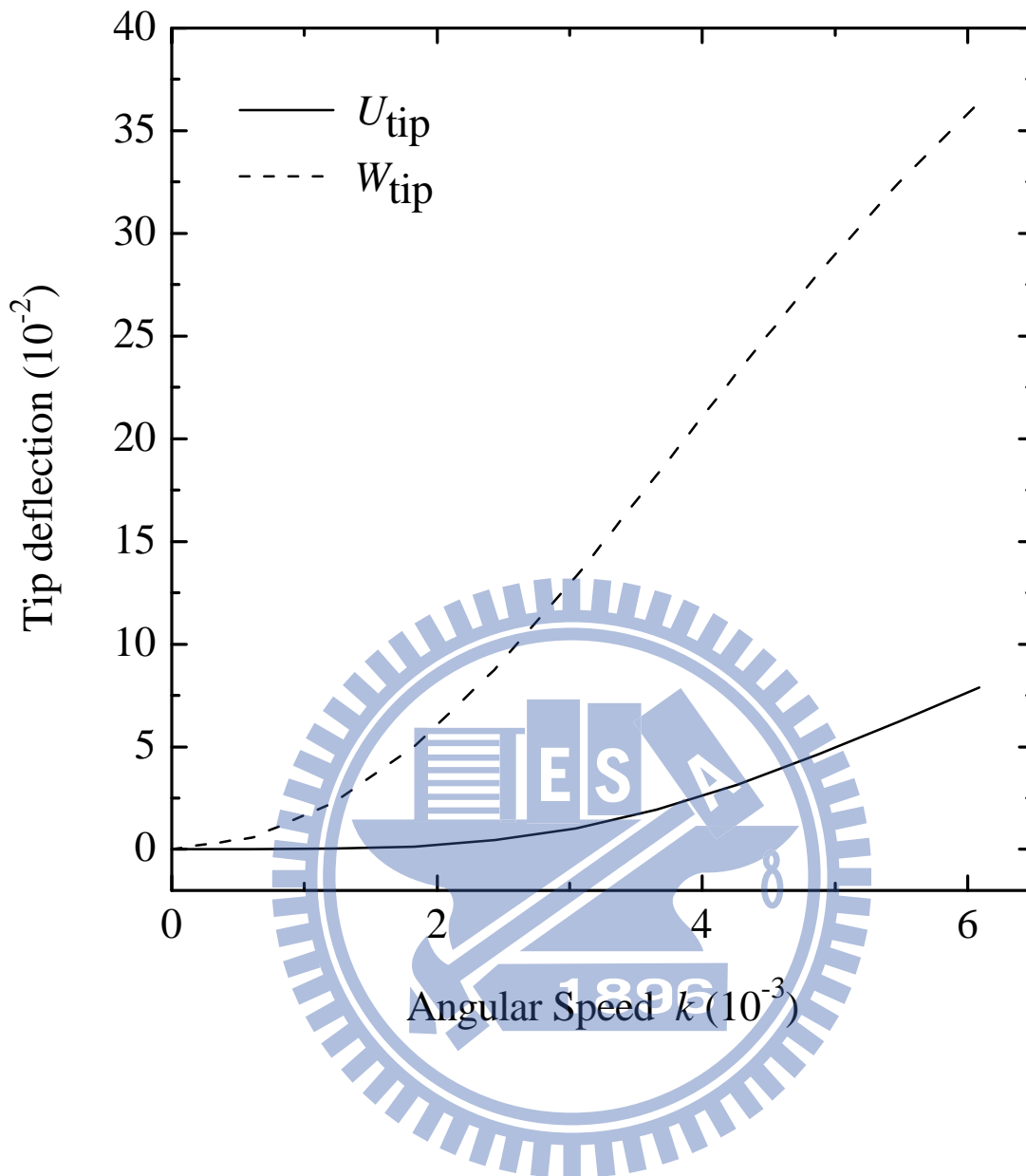
圖二十一 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態
 (矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)



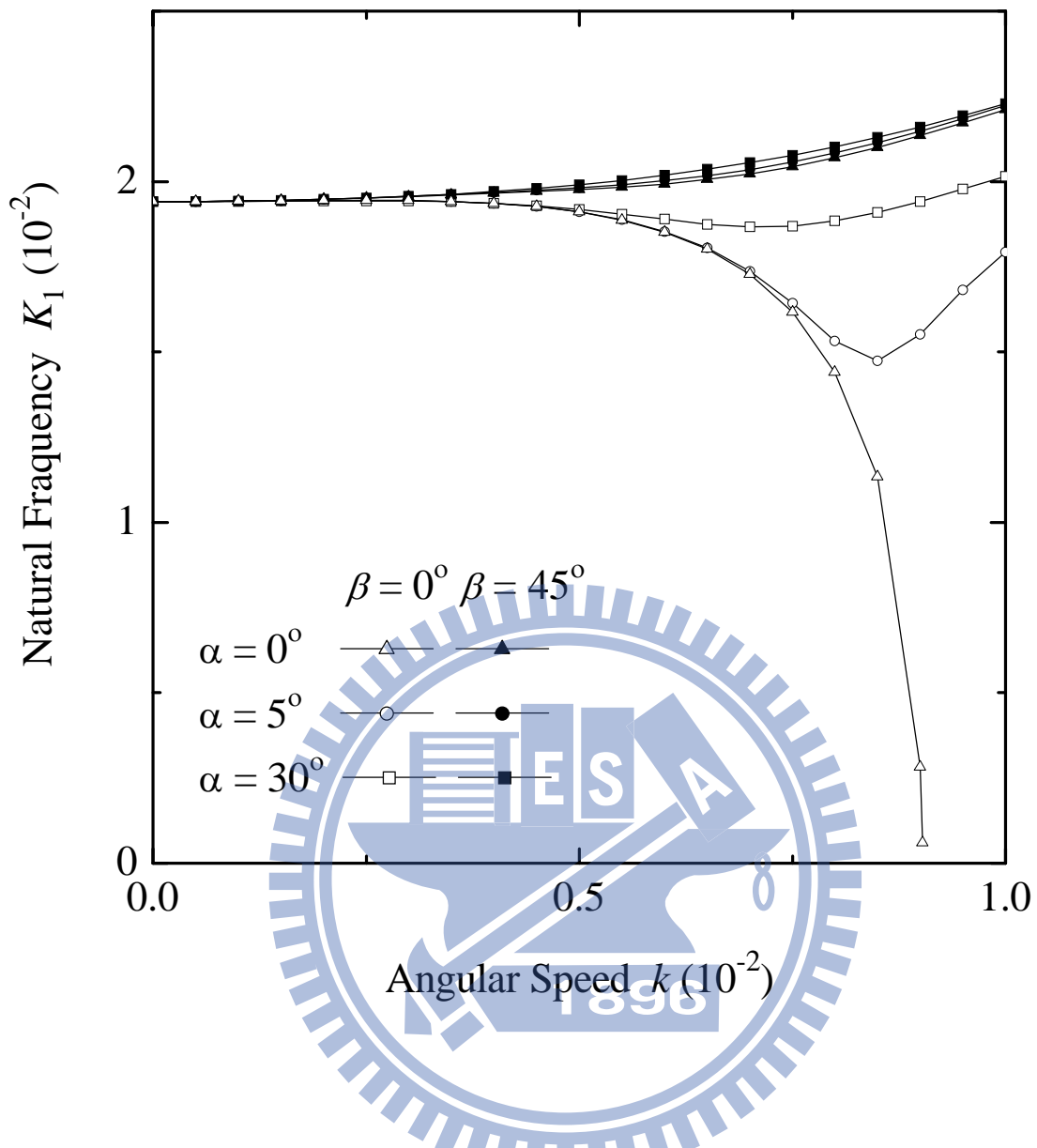
圖二十二 旋轉梁不同轉速下的第五振動模態
 (矩形斷面 $a/b = 0.05$, $L_T/a = 60$, $r = 1$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 22.5^\circ$, $N = 50$)



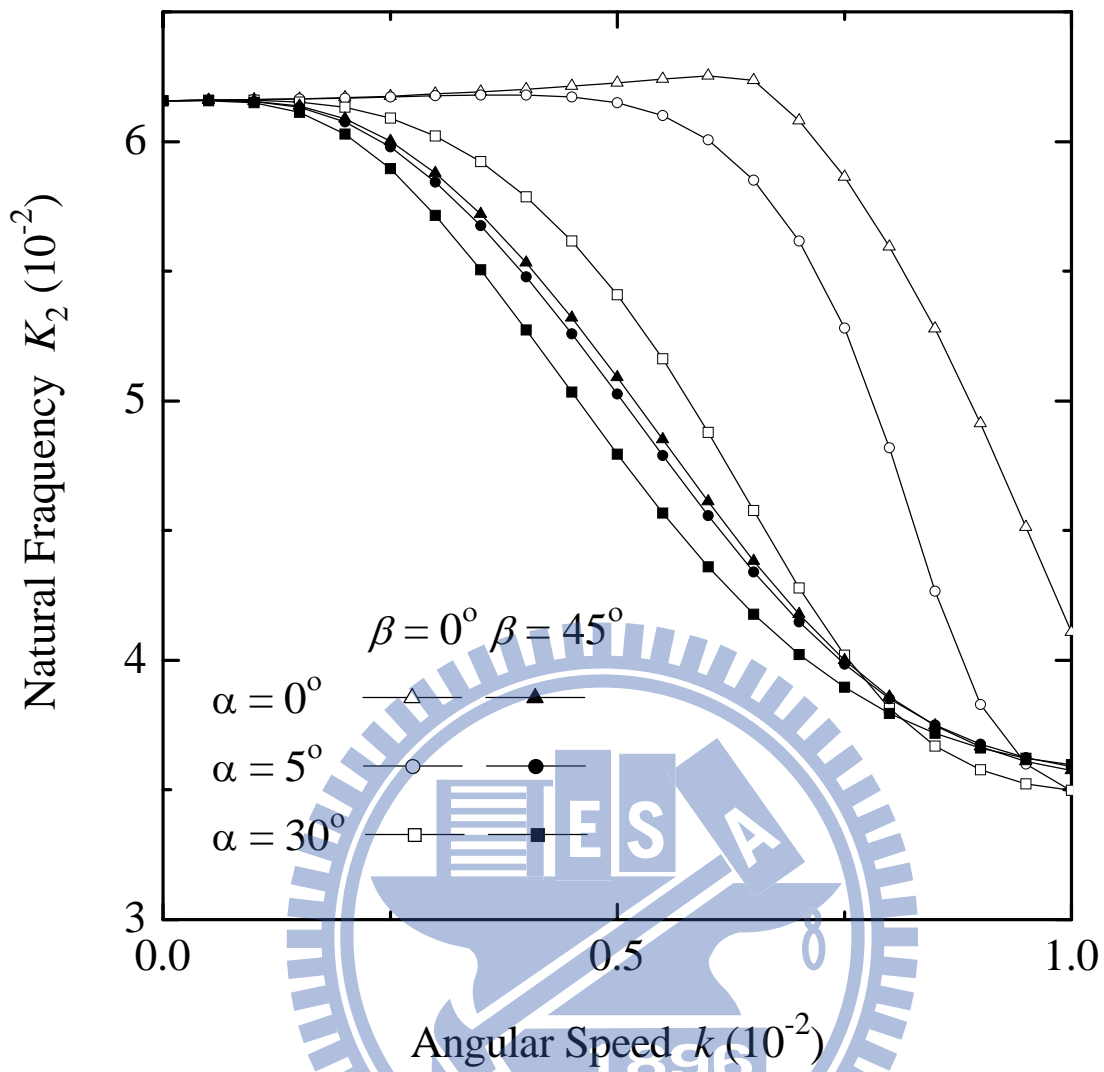
圖二十三 旋轉梁之轉速 - 自然頻率曲線
 (矩形斷面 $a/b=0.06$, $L_T/a=166.67$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$, $\gamma=45^\circ$)



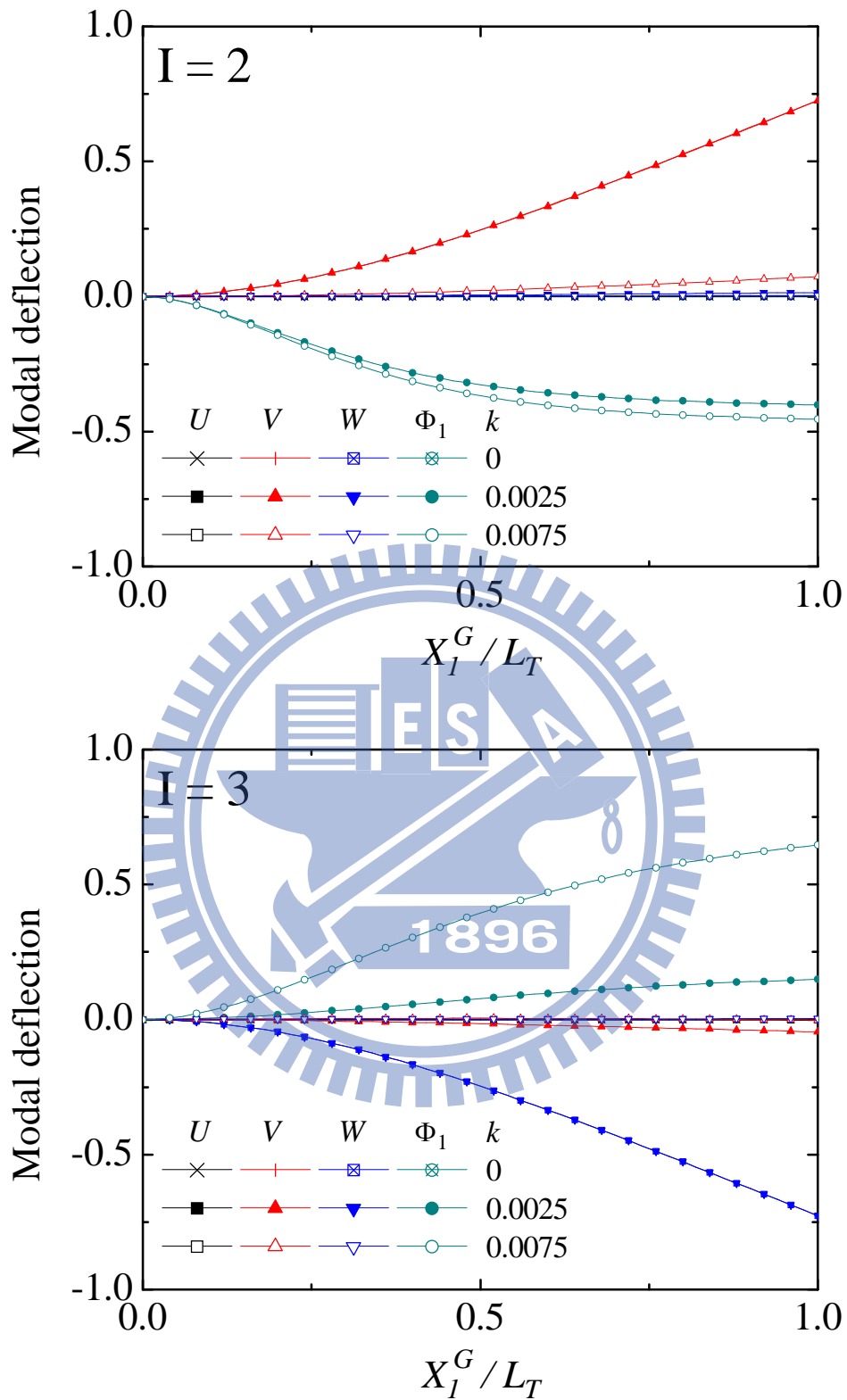
圖二十四 旋轉梁之轉速 - 端點位移曲線
 (矩形斷面 $a/b=0.06$, $L_T/a=166.67$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=0^\circ$, $\gamma=45^\circ$)



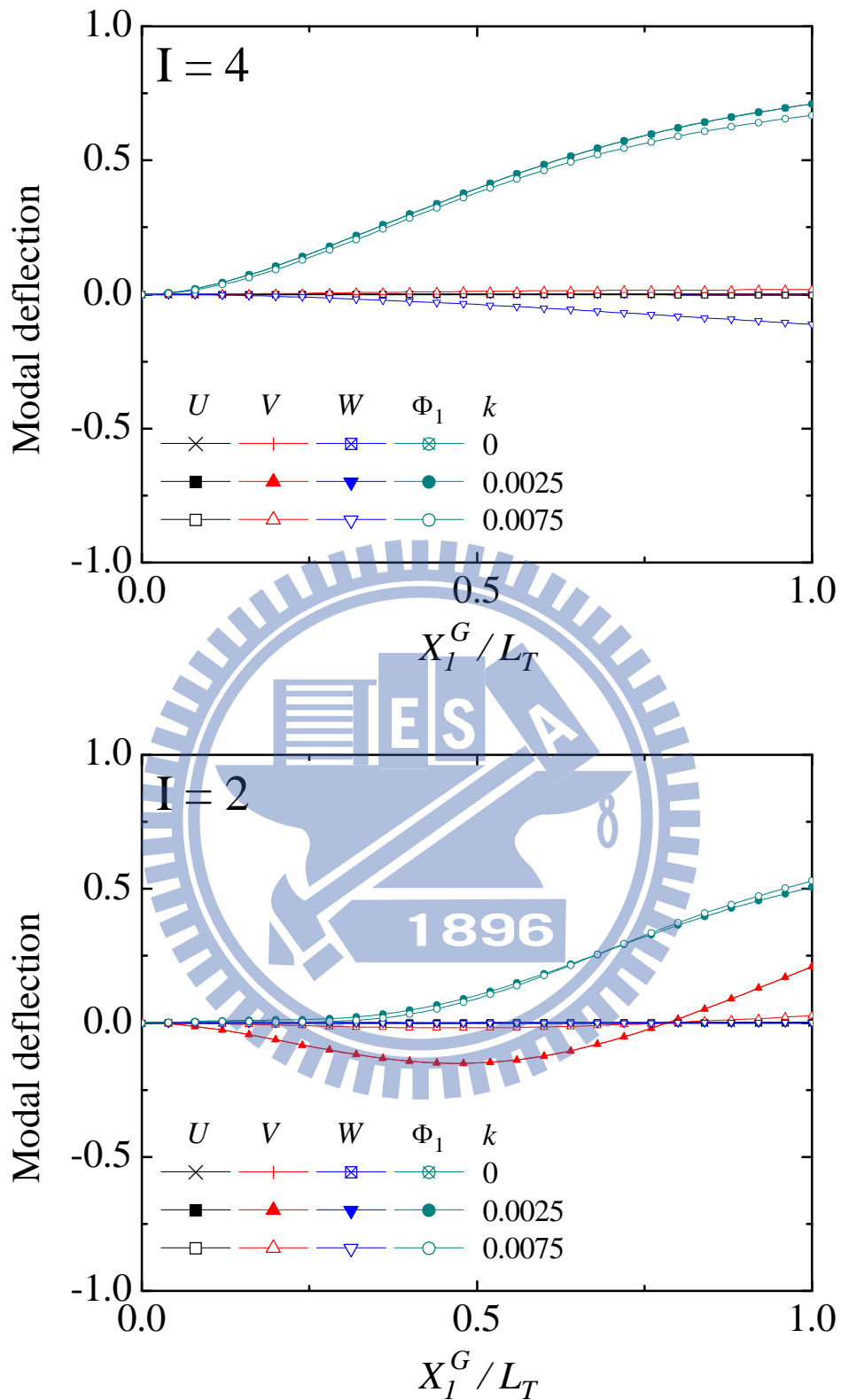
圖二十五 轉速 - 第一自然頻率曲線
(I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)



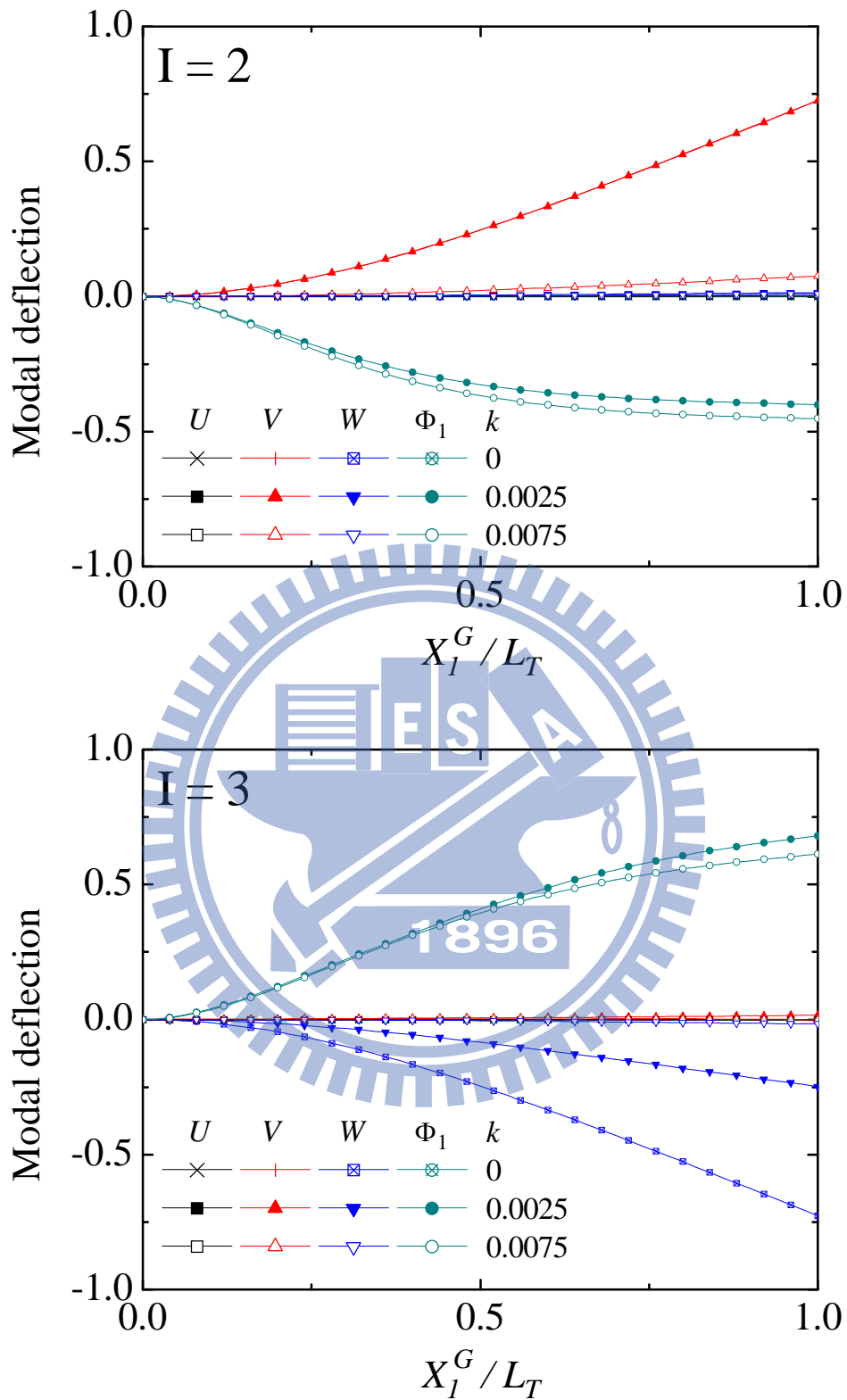
圖二十六 轉速 - 第二自然頻率曲線
 (I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)



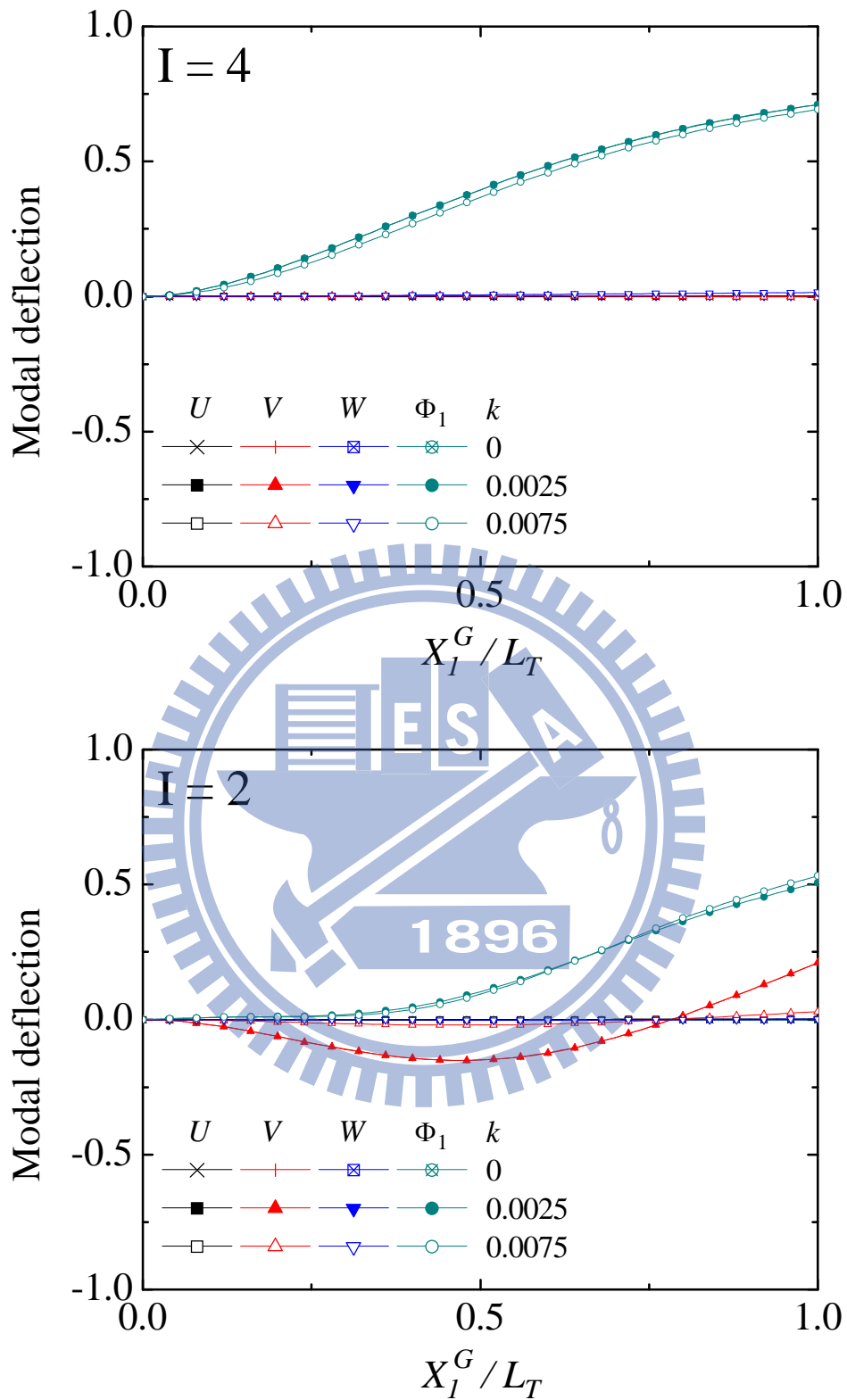
圖二十七 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態
 (I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)



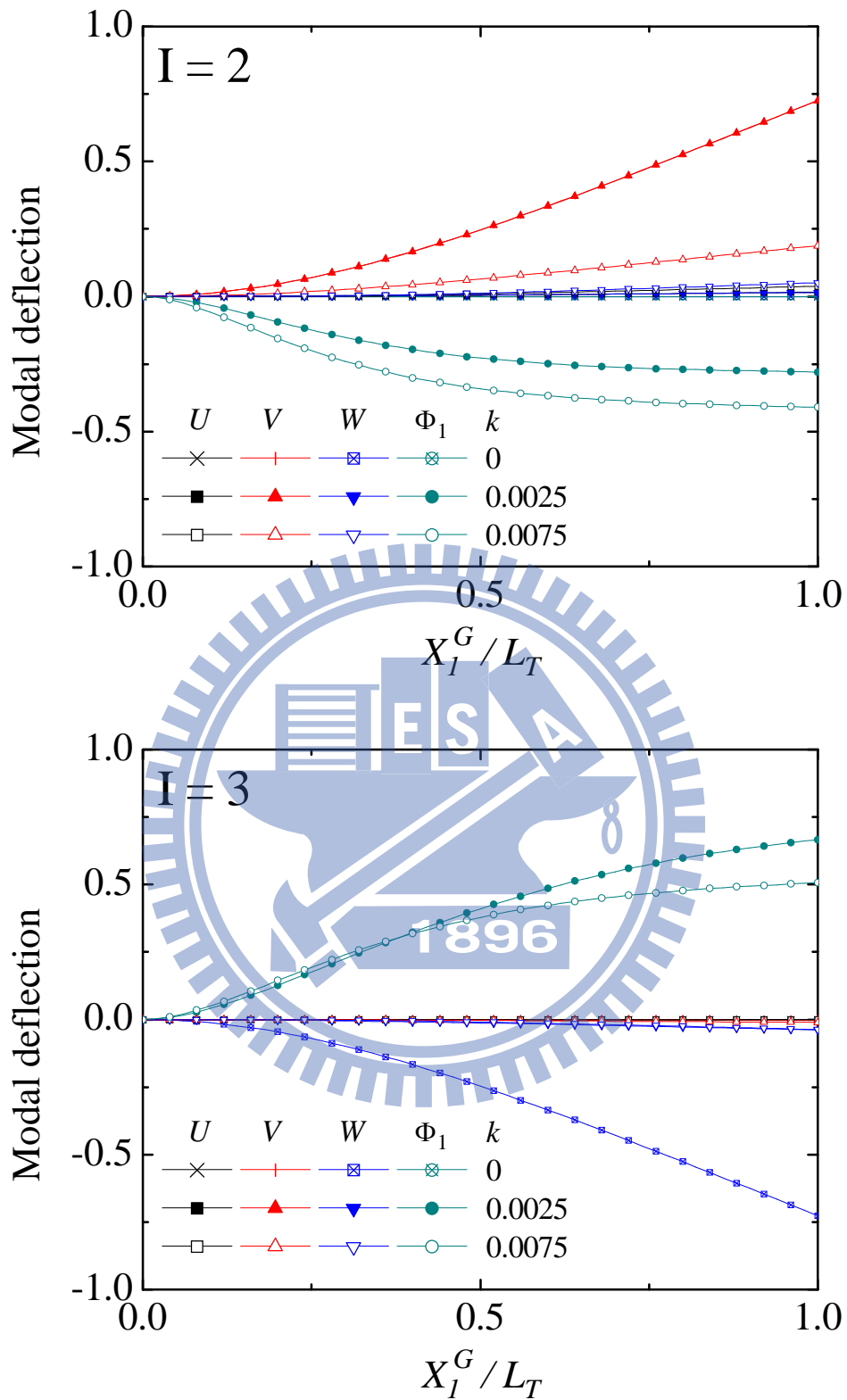
圖二十八 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態
 (I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)



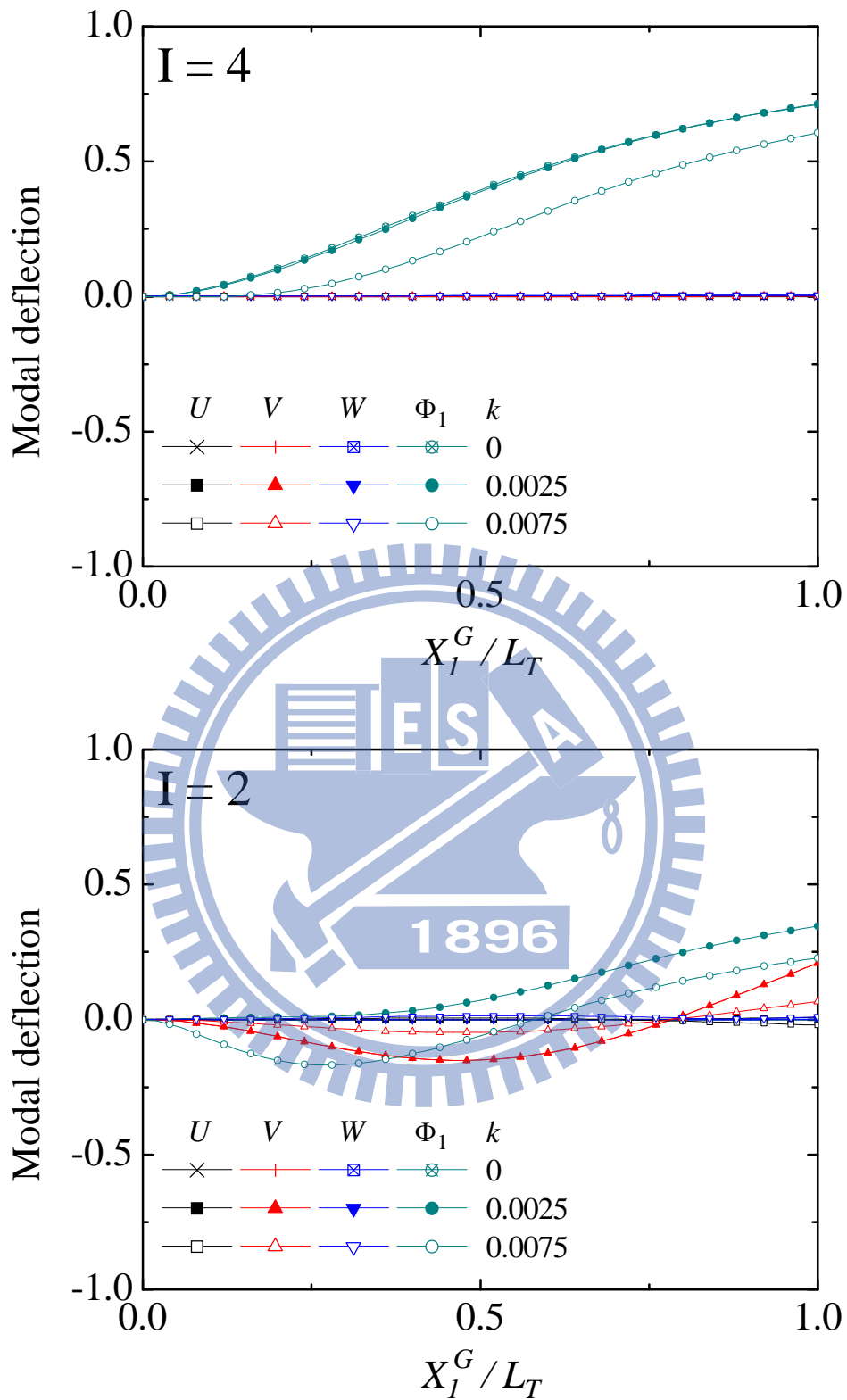
圖二十九 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態
 (I形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)



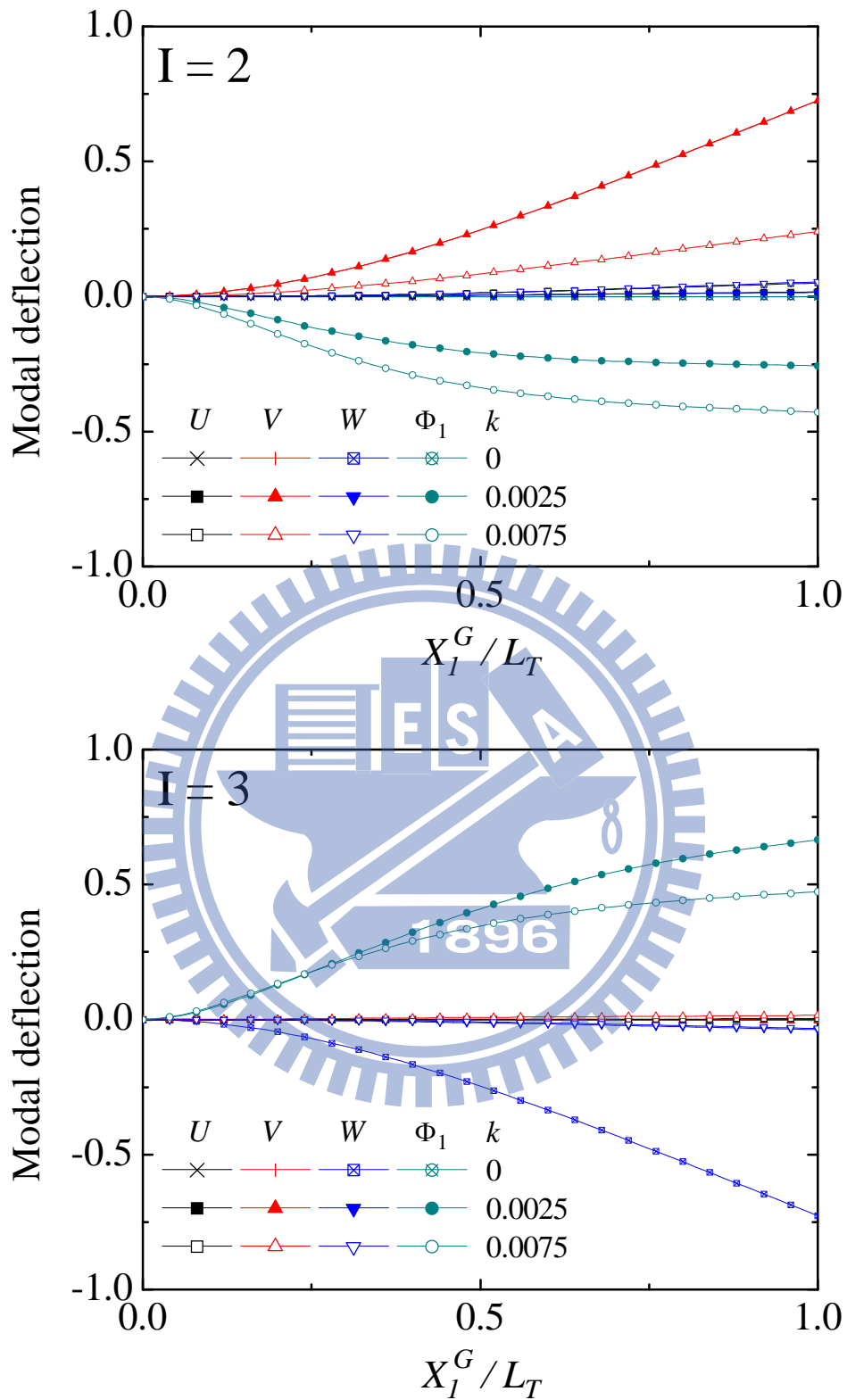
圖三十 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態
 (I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)



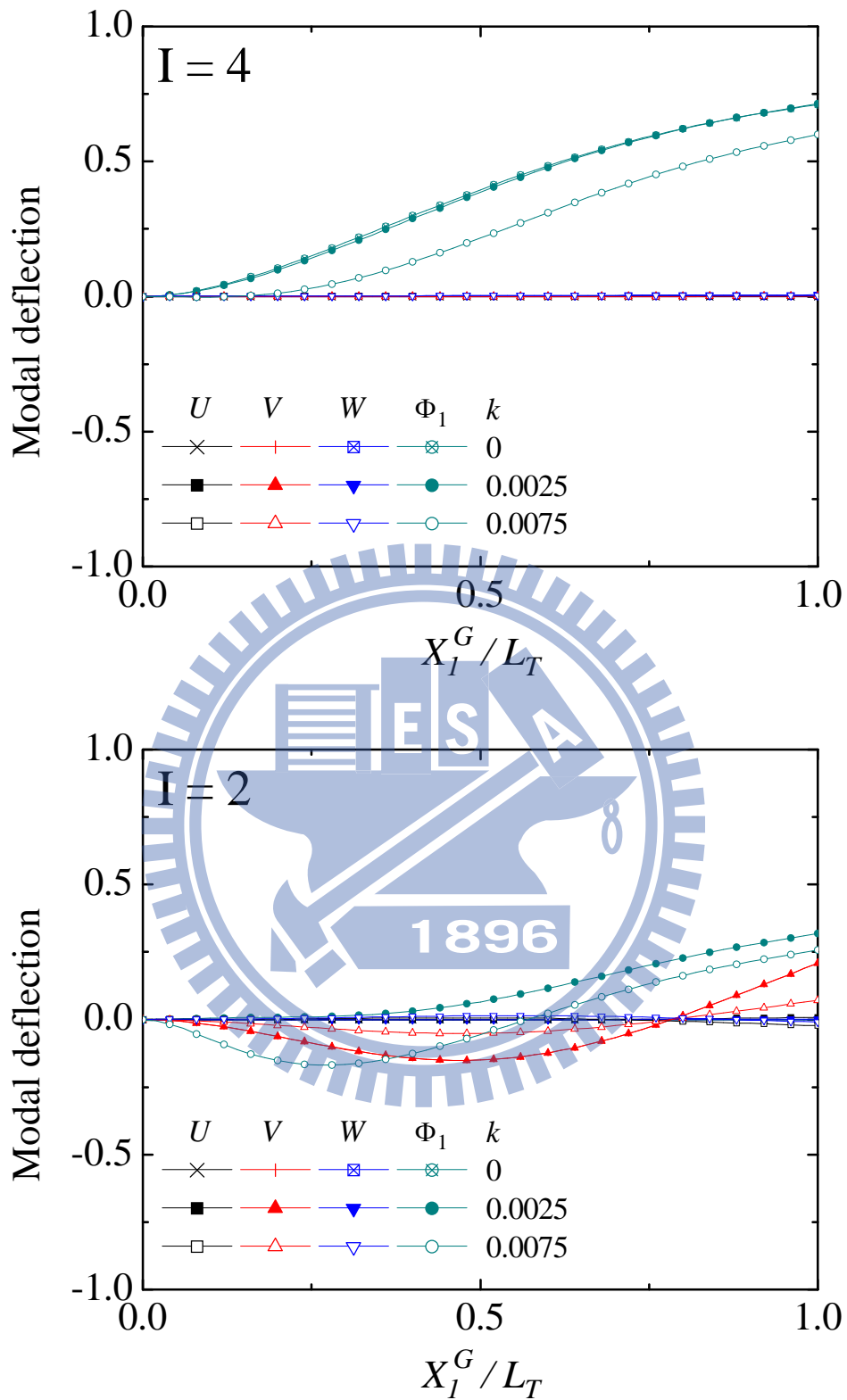
圖三十一 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態
 (I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)



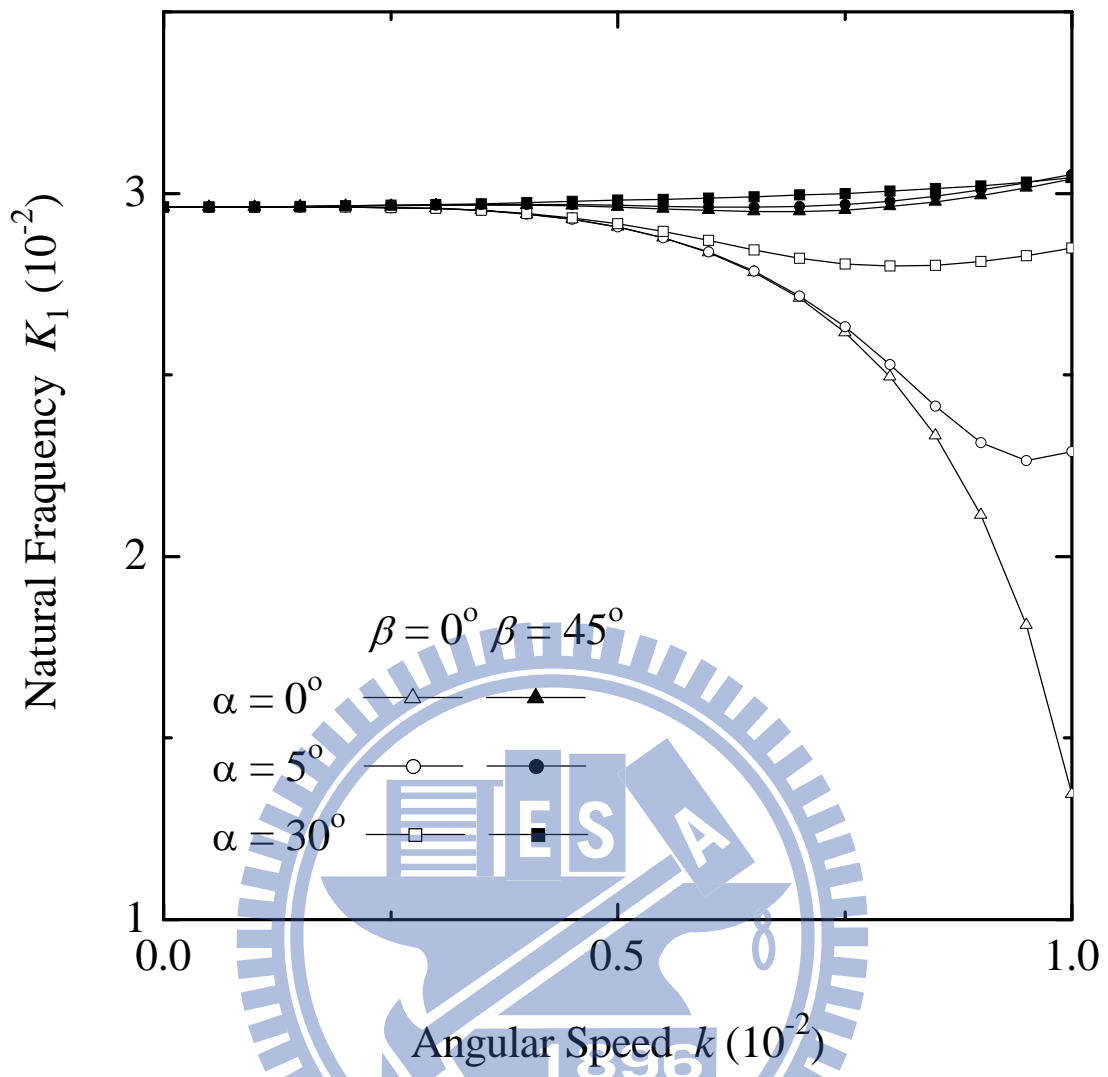
圖三十二 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態
 (I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)



圖三十三 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態
 (I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

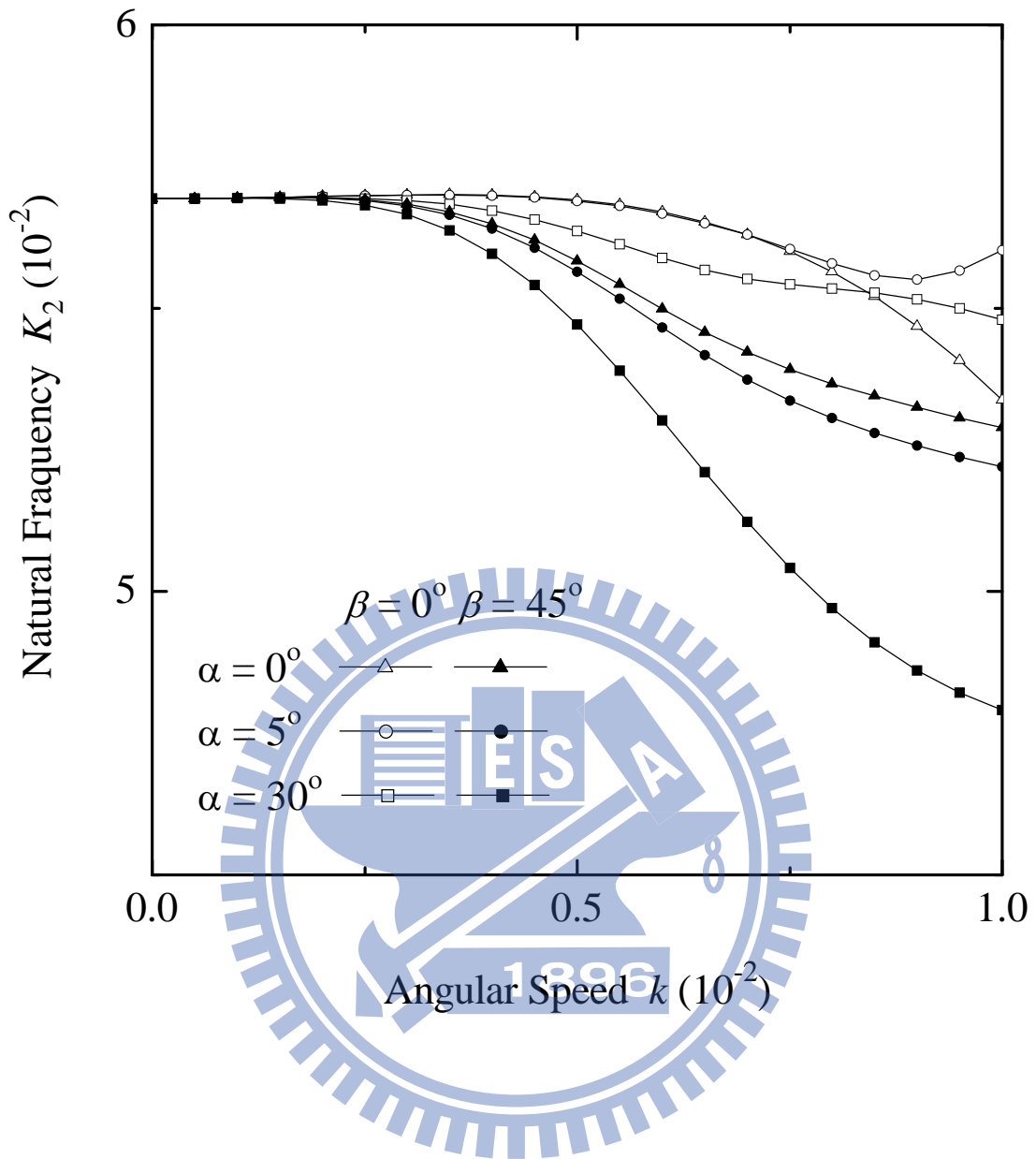


圖三十四 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態
 (I 形斷面 $W10 \times 30$, $L_T / d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)

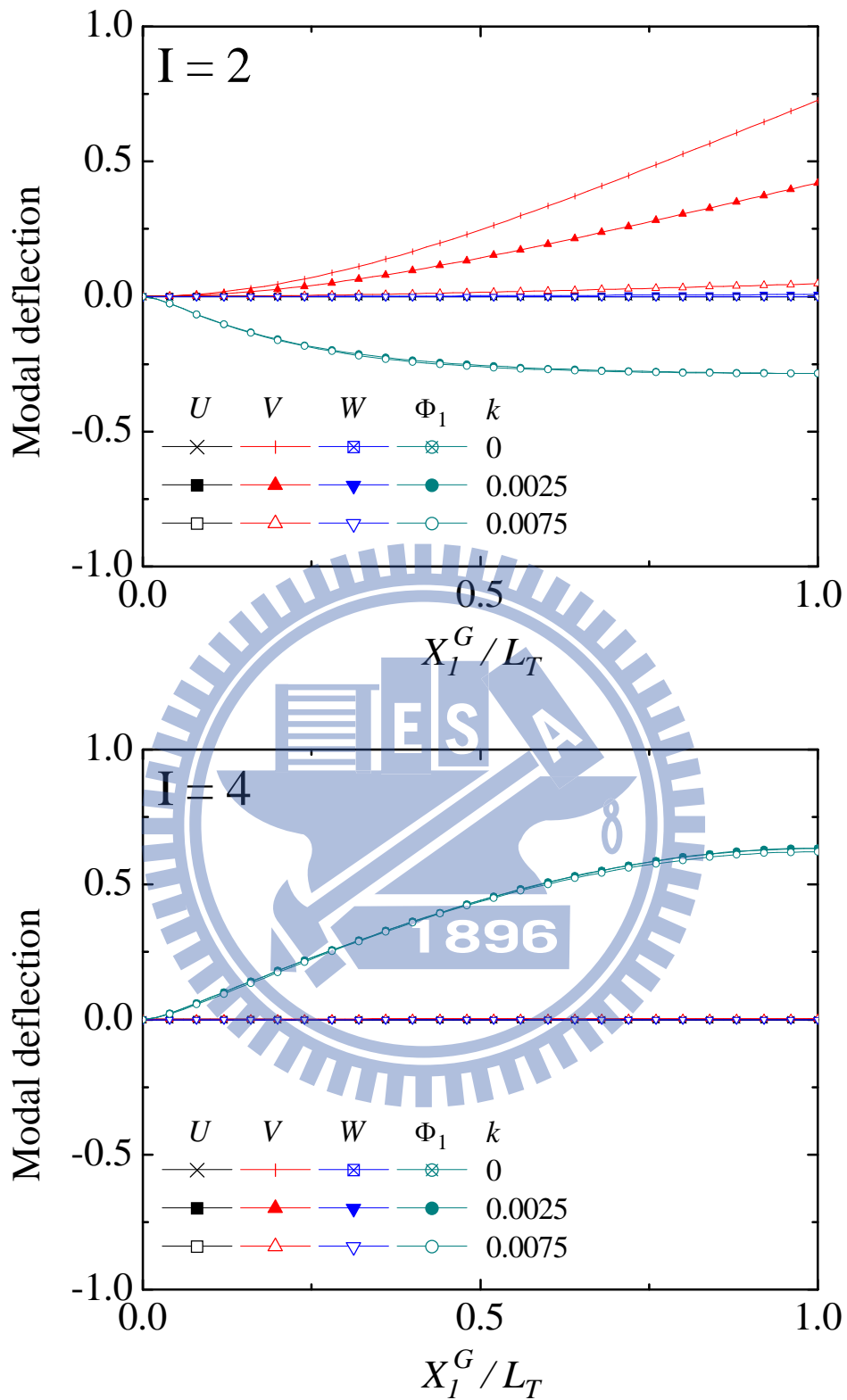


圖三十五 轉速 - 第一自然頻率曲線

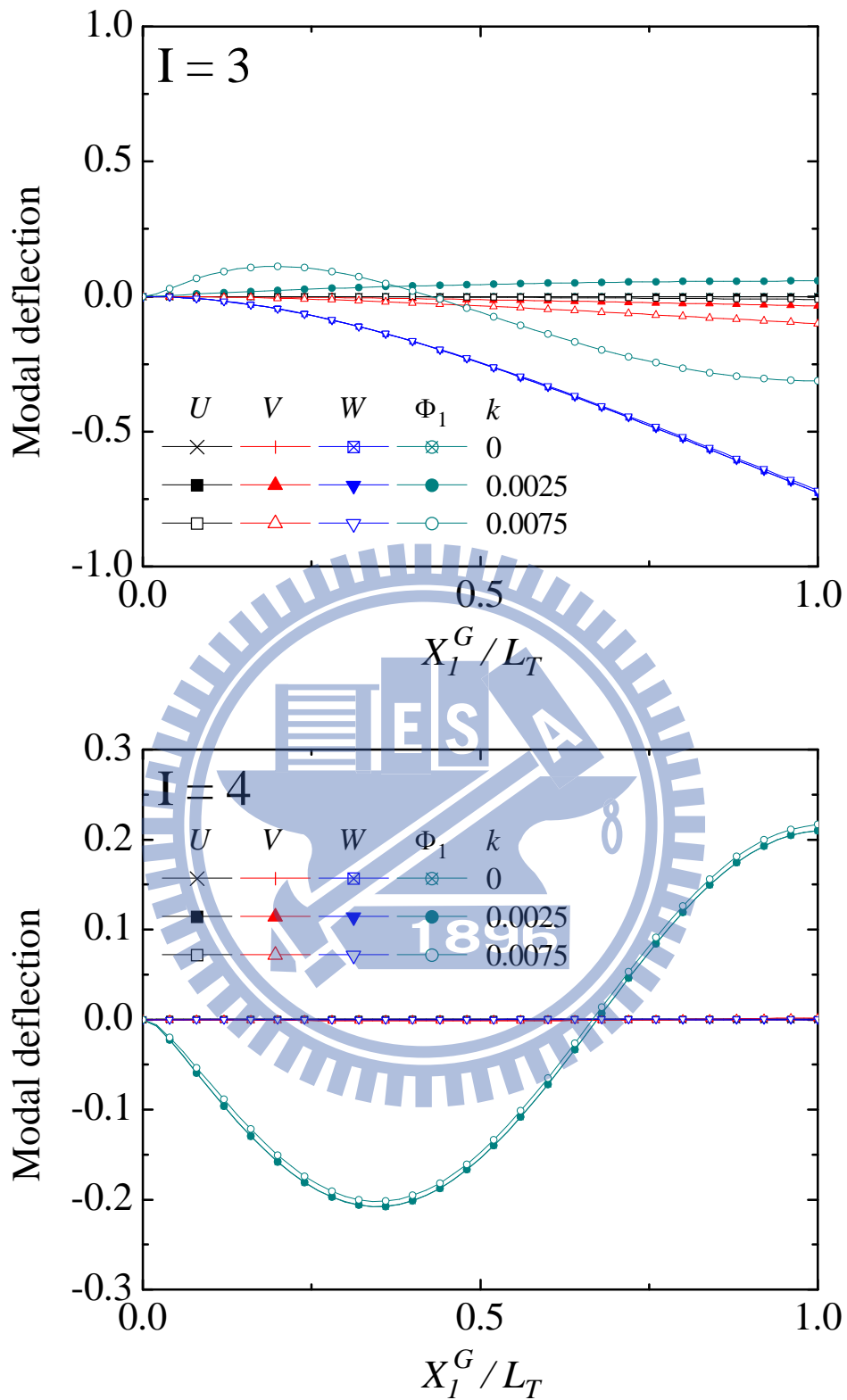
(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)



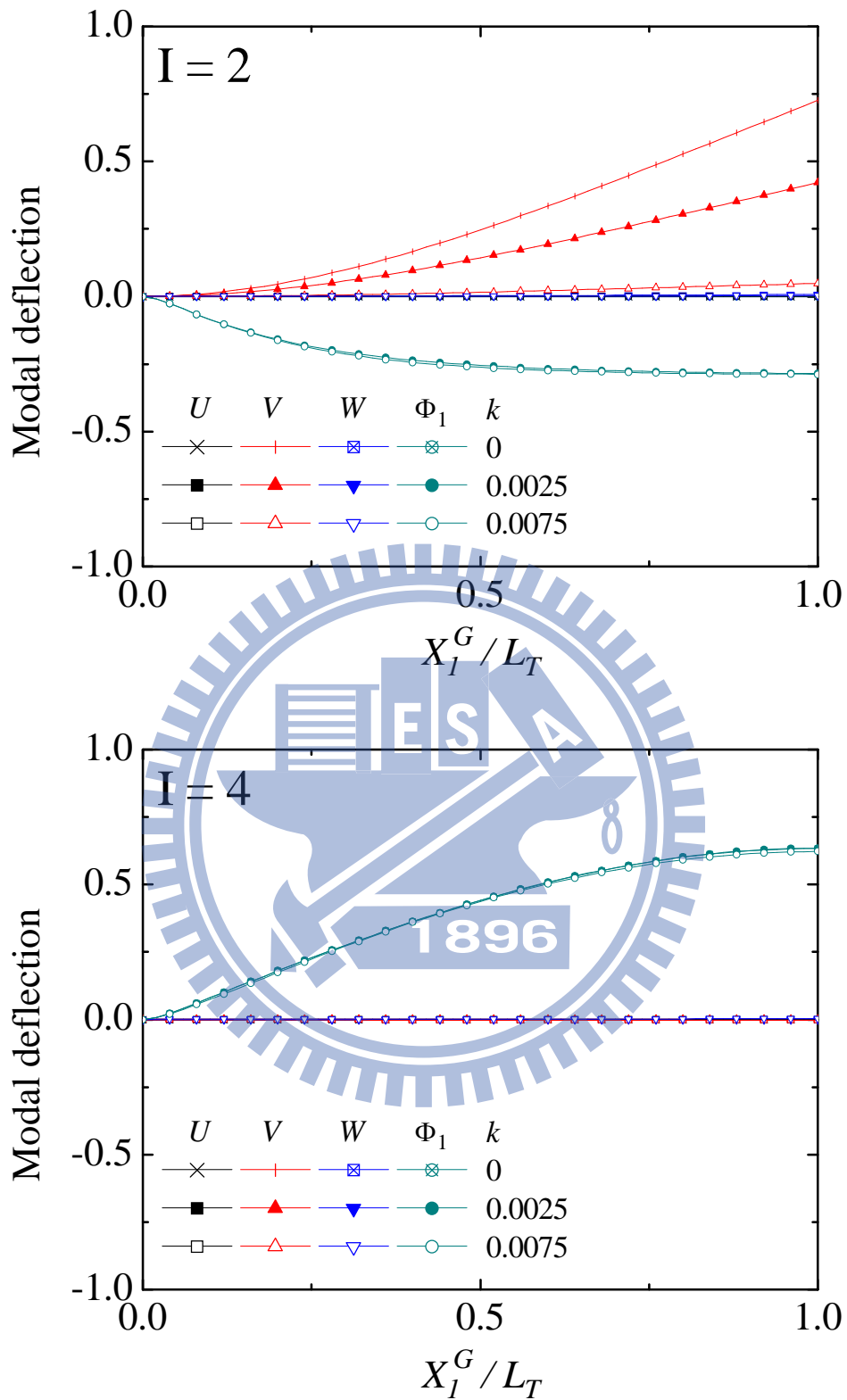
圖三十六 轉速 - 第二自然頻率曲線
 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\gamma = 45^\circ$, $N = 50$)



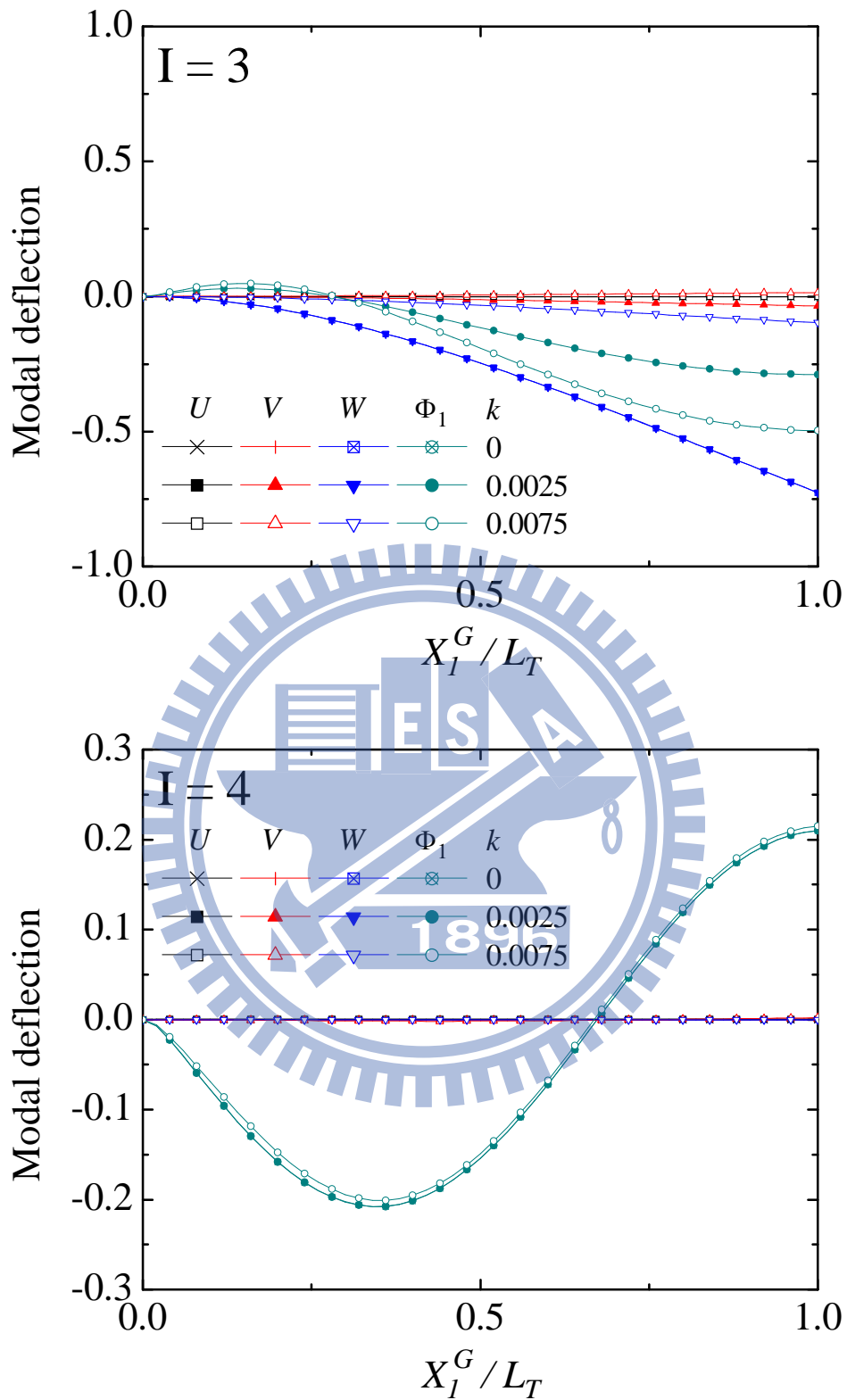
圖三十七 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態
 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)



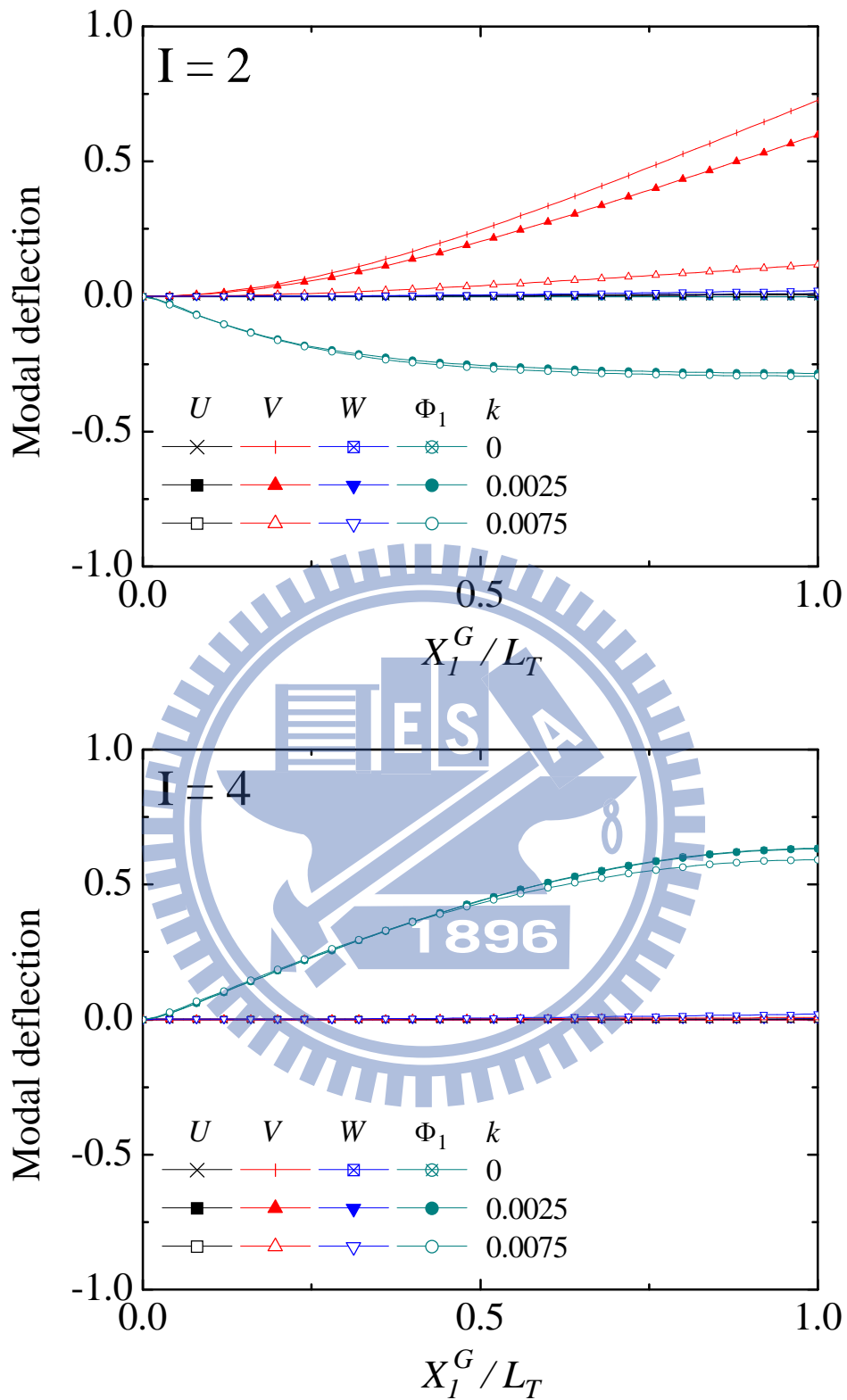
圖三十八 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態
 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)



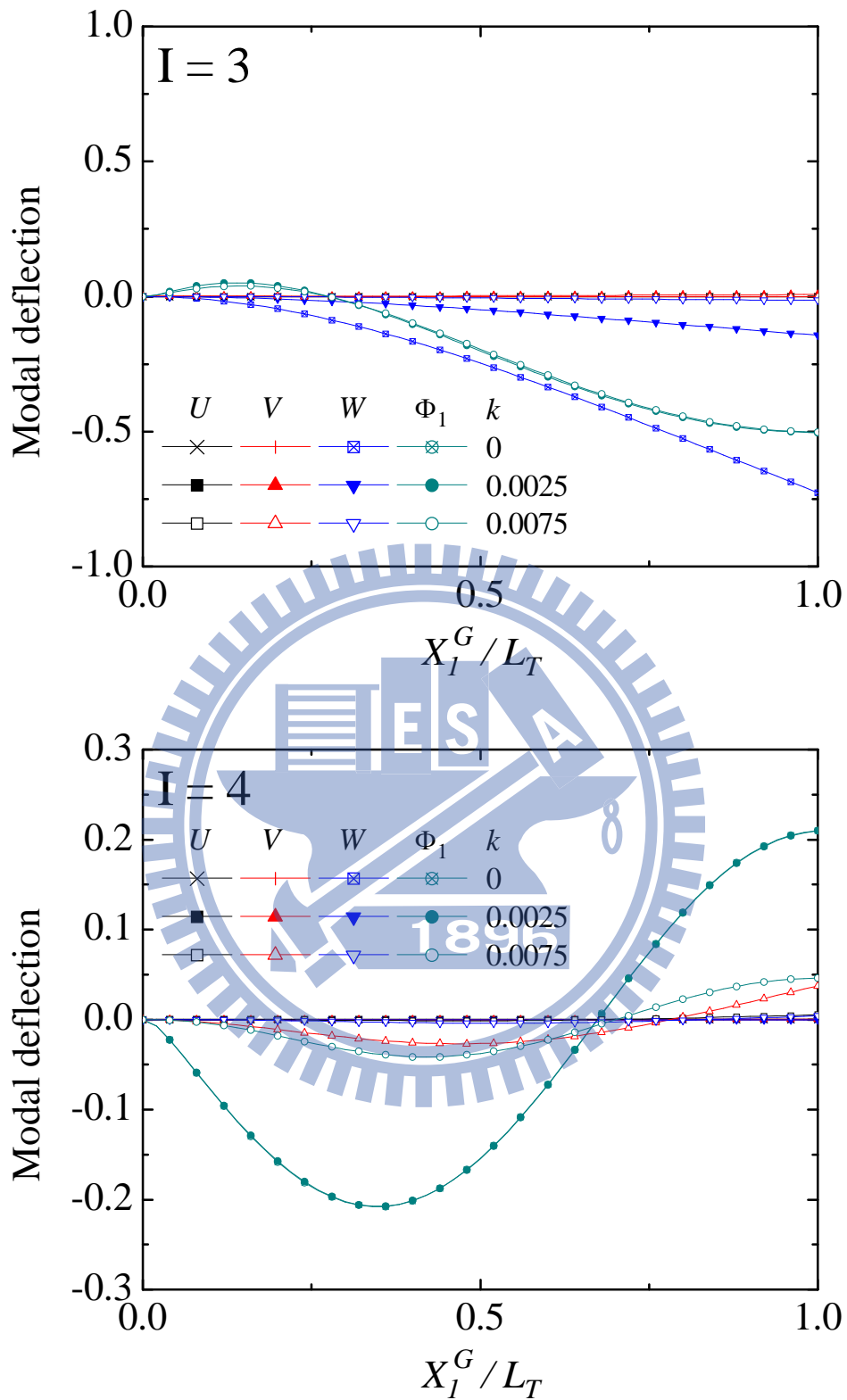
圖三十九 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態
 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)



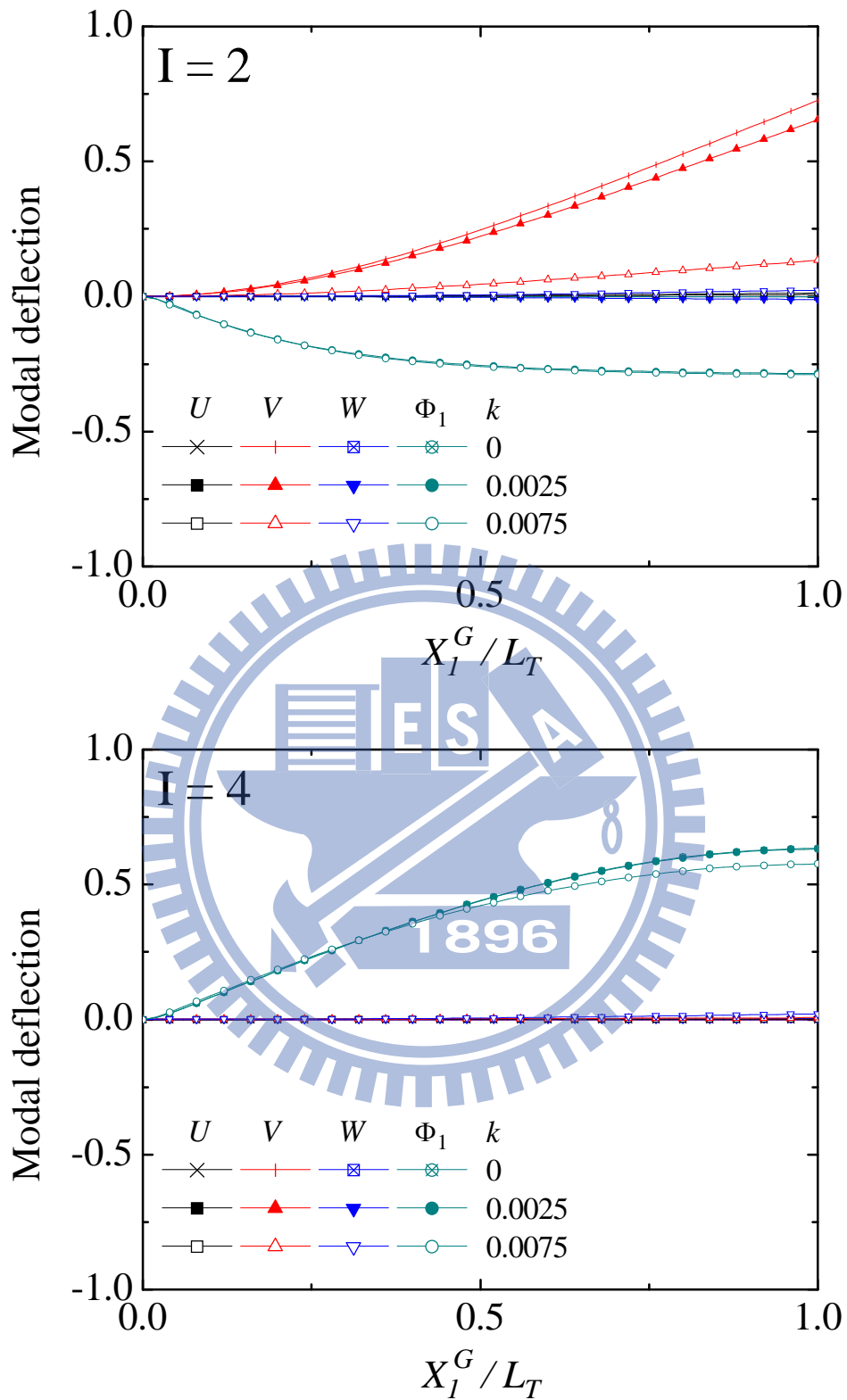
圖四十 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態
 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)



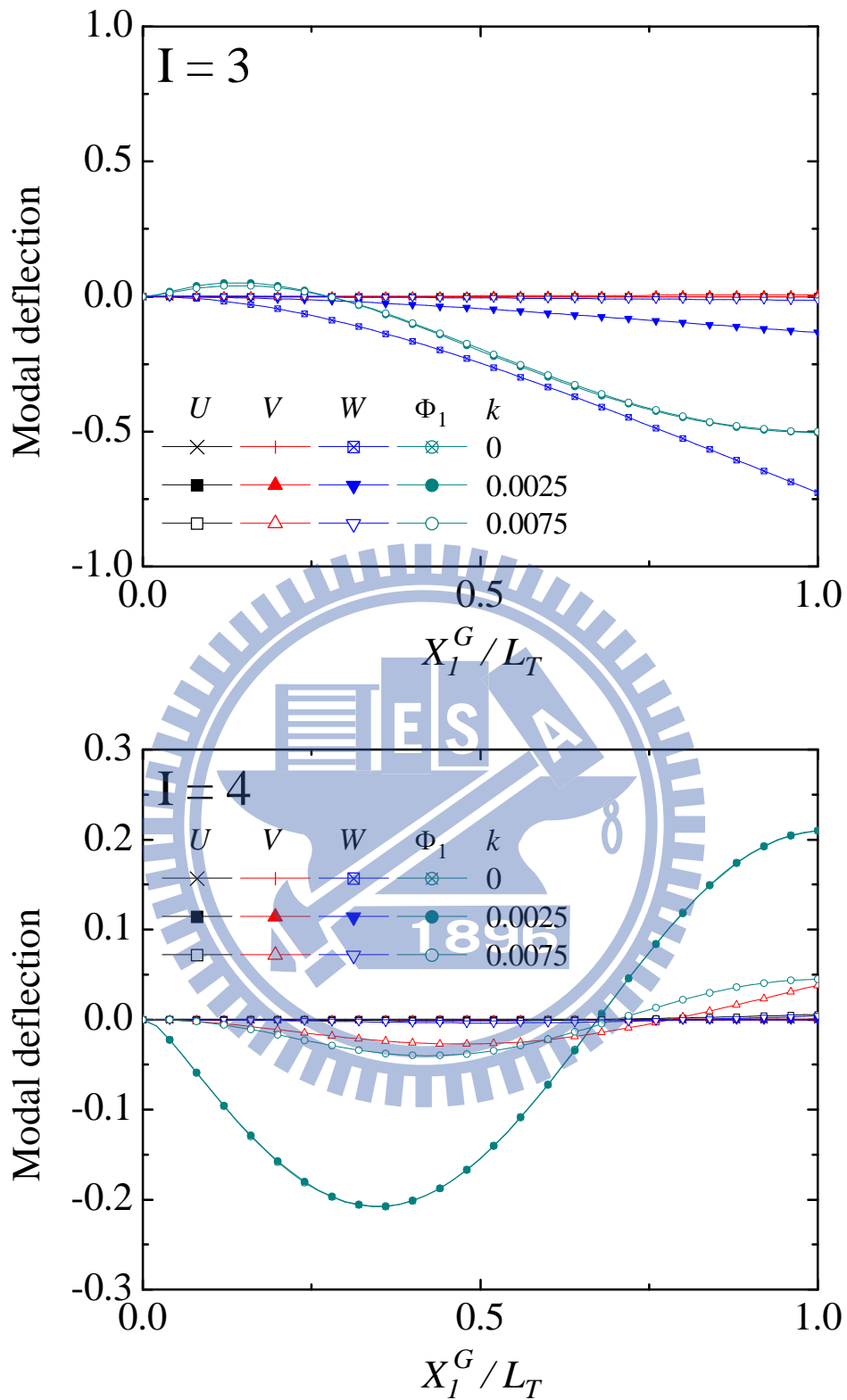
圖四十一 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態
 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)



圖四十二 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態
 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)



圖四十三 旋轉梁不同轉速下的第一、第二振動模態
 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)



圖四十四 旋轉梁不同轉速下的第三、第四振動模態
 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$)

附錄 A 總體座標系統與參考座標系統的轉換關係

總體座標系統 $\mathbf{X}^G = \{ X_1^G, X_2^G, X_3^G \}$ 與參考座標系統 $\mathbf{X} = \{ X_1, X_2, X_3 \}$ 的關係為

$$\mathbf{X}^G = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2.3.1)$$

推導 \mathbf{A} 的流程如下：

\mathbf{X} 首先以 O 點為圓心繞 X_1 軸轉 β 角為 $\mathbf{X}' = \{ X'_1, X'_2, X'_3 \}$ ，其中 X'_1 軸與 X_1 軸重合，如圖 A1 所示， \mathbf{X}' 與 \mathbf{X} 的轉換關係為

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \mathbf{X} \quad (\text{A.1})$$

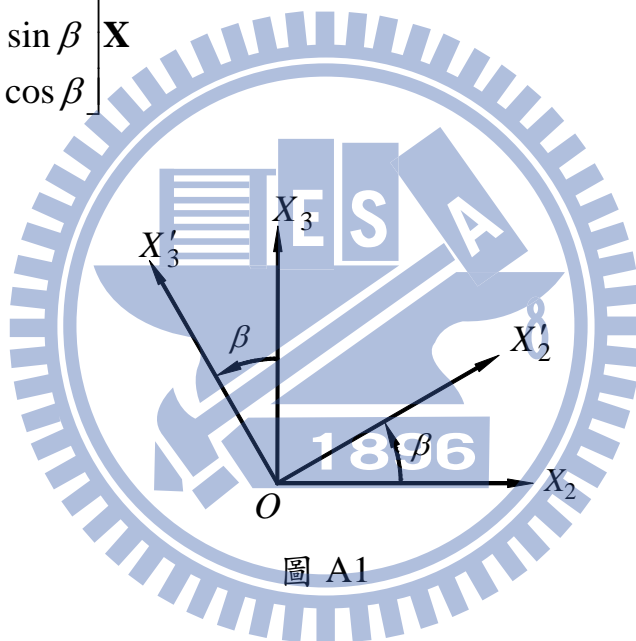


圖 A1

\mathbf{X}' 再以 O 點為圓心繞 $-X_2$ 軸轉 γ 角為 $\mathbf{X}'' = \{ X''_1, X''_2, X''_3 \}$ ， \mathbf{X}'' 與 \mathbf{X} 的轉換關係為

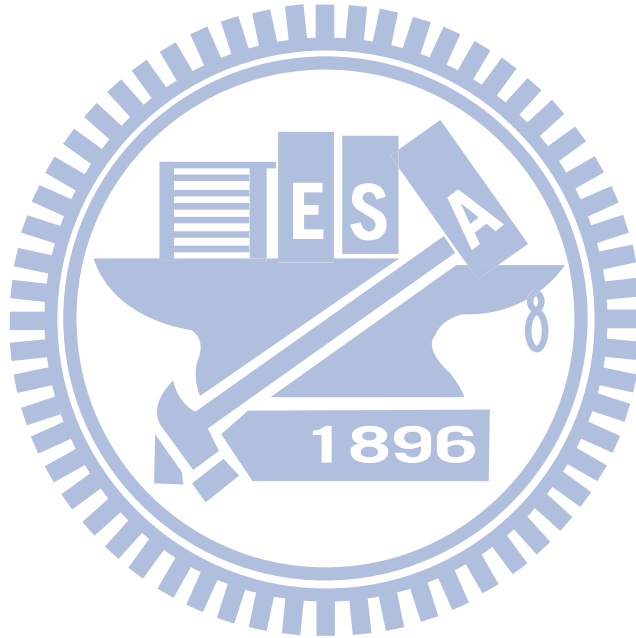
$$\begin{aligned} \mathbf{X}'' &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \mathbf{X} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ -\sin \beta \sin \gamma & \cos \beta & \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \mathbf{X} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

最後 \mathbf{X}'' 以 O 點為圓心繞 X_3 軸轉 α 角為 \mathbf{X}^G ， \mathbf{X}^G 與 \mathbf{X} 的轉換關係為

$$\mathbf{X}^G = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ -\sin \beta \sin \gamma & \cos \beta & \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} \quad (\text{A.3})$$

(A.3)與(2.3.1)可以得到 \mathbf{X}^G 與 \mathbf{X} 的轉換矩陣 \mathbf{A} 如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$



附錄 B 斷面常數

本附錄中所使用的斷面常數包括

$$A = \int dA$$

$$J = \int (y^2 + z^2 - z\omega_{,y} + y\omega_{,z}) dA$$

$$I_y = \int z^2 dA$$

$$I_z = \int y^2 dA$$

$$I_\omega = \int \omega^2 dA$$

$$K_I = \int (y^2 + z^2)^2 dA$$

$$\alpha_{yz\omega} = \int yz\omega dA$$

$$J_{y\omega z} = \int y\omega_{,z} dA$$

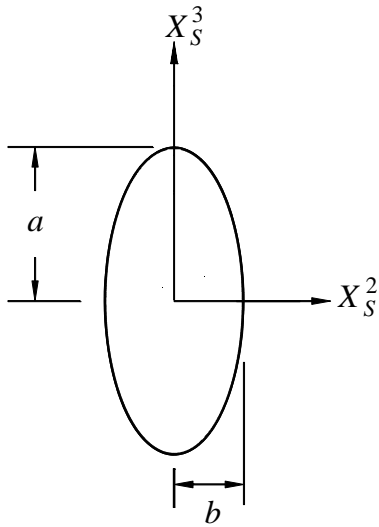
$$J_{z\omega y} = \int z\omega_{,y} dA$$

(2.7.14)

其中 ω 為斷面的翹曲函數(warping function)。

本附錄中考慮橢圓斷面，其斷面的形狀、尺寸、翹曲函數 ω (warping function)、及斷面的常數值分別表示如下：

橢圓斷面



$$A = \pi ab \quad \omega = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} yz$$

$$I_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b \quad I_z = \frac{1}{4} \pi ab^3$$

$$I_\omega = \frac{a^3 b^3 \pi}{24} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2$$

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

$$\alpha_{yz\omega} = \frac{a^3 b^3 \pi}{24} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)$$

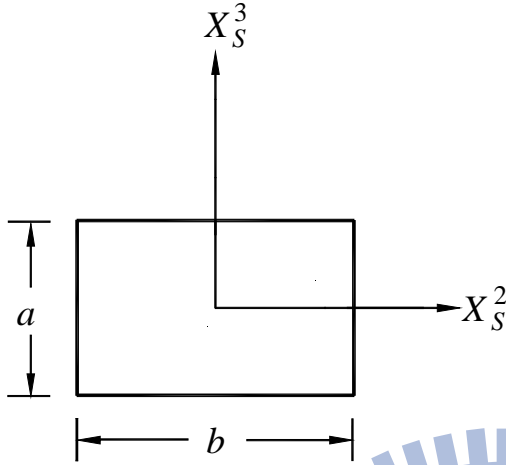
$$K_I = \frac{ab}{192} (24a^4 + 16a^2b^2 + 24b^4) \pi$$

$$J_{y\omega z} = \frac{ab^3 \pi}{4} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)$$

$$J_{y\omega z} = \frac{ab^3 \pi}{4} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)$$

$a : b$	2	5	10	20	30
$A/a^2 \ (10^{-1})$	15.7079	6.2832	3.1416	1.5708	1.0472
$I_y/a^4 \ (10^{-2})$	39.2699	15.7080	7.8540	3.9270	2.6180
$I_z/a^4 \ (10^{-4})$	981.7477	62.8319	7.8540	0.9816	0.2909
$J/a^4 \ (10^{-3})$	314.1593	24.1661	3.1105	0.3917	0.1162
$I_\omega/a^6 \ (10^{-4})$	58.9049	8.9229	1.2577	0.1620	0.0483
$K_I/a^6 \ (10^{-2})$	24.1346	8.0760	3.9536	1.9668	1.3100
$I_y/Aa^2 \ (10^{-1})$	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000
$I_\omega/Aa^4 \ (10^{-4})$	37.5000	14.2011	4.0033	1.0313	0.4609
$J_{y\omega z}/a^4 \ (10^{-4})$	589.0486	57.9986	7.6985	0.9769	0.2902
$J_{z\omega y}/a^4 \ (10^{-2})$	23.5619	14.4997	7.6985	3.9074	2.6122
$\alpha_{yz\omega}/a^6 \ (10^{-4})$	98.1748	9.6664	1.2831	0.1628	0.0484

矩型斷面



$$L_T = 0.1524(m)$$

$$A = ab$$

$$I_y = \frac{ab^3}{12}$$

$$I_z = \frac{ba^3}{12}$$

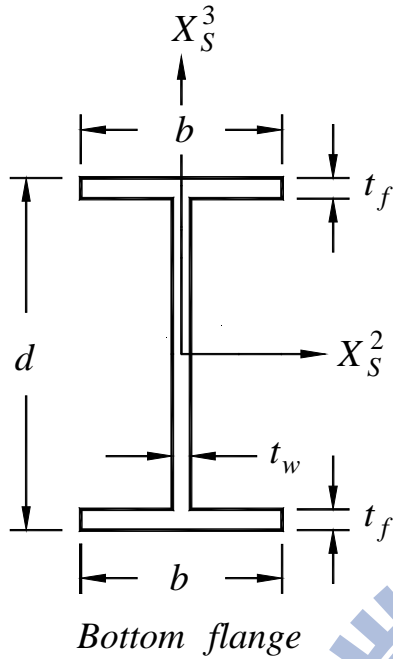
$$J = \int_A (y^2 + z^2 + y\omega_z - z\omega_y) dA$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA, \quad \alpha_{\omega yz} = \int \omega yz dA$$

$$I_4 = \frac{a^5 b}{80} + \frac{ab^5}{80} + \frac{a^3 b^3}{72}$$

$a : b$	0.05	0.05	0.06	0.1	0.25
$L_T : a$	60	200	166.67	100	40
a ($10^{-1} m$)	0.254	0.762	0.914382	0.1524	0.381
b ($10^{-2} m$)	0.508	0.1524	0.1524	0.1524	0.1524
A ($10^{-4} m^2$)	1.29032	0.116129	0.139349	0.232258	0.580644
J ($10^{-11} m^4$)	26.8743	0.217682	0.373677	1.68479	.23.6688
I_y ($10^{-12} m^4$)	69.3719	0.561912	0.970907	4.49530	70.2391
I_z ($10^{-9} m^4$)	27.7488	0.224765	0.269696	0.449530	1.12382
$\alpha_{\omega yz}$ ($10^{-16} m^6$)	148.320	0.108125	0.186348	0.850503	11.8797
I_4 ($10^{-14} m^6$)	1077.13	0.785231	0.943318	1.58366	4.20244
I_ω ($10^{-16} m^6$)	147.482	0.107514	0.184848	0.832278	10.4889

I 型斷面



翹曲函數：

Top flange

$$\omega = -y(z - d + t_f)$$

$$\text{for } \begin{cases} -0.5b \leq y \leq 0.5b \\ 0.5(d - 2t_f) \leq z \leq 0.5d \end{cases}$$

Web

$$\omega = yz$$

$$\text{for } \begin{cases} -0.5t_w \leq y \leq 0.5t_w \\ -0.5(d - 2t_f) \leq z \leq 0.5(d - 2t_f) \end{cases}$$

Bottom flange

$$\omega = -y(z + d - t_f) \quad \text{for } \begin{cases} -0.5b \leq y \leq 0.5b \\ -0.5d \leq z \leq -0.5(d - 2t_f) \end{cases}$$

	W14×159	W14×90	W10×100	W10×60	W10×30
d (in)	14.98	14.02	11.1	10.22	10.47
b (in)	15.565	14.52	10.34	10.08	5.81
t_f (in)	1.19	0.71	1.12	0.68	0.51
t_w (in)	0.745	0.44	0.68	0.37	0.30
A (10^1 in^2)	4.6432	2.6162	2.9186	1.6987	0.8761
J (in^4)	19.3870	3.8425	10.7306	2.2741	0.6034
I_y (10^2 in^4)	18.8970	9.8738	6.1856	3.3389	1.6820
I_z (10^2 in^4)	7.4833	3.6234	2.0666	1.1611	0.1669
I_ω (10^3 in^6)	35.6499	16.0600	5.1615	2.6458	0.4140
K_I (10^4 in^6)	18.6411	8.5996	2.8819	1.4482	0.4859
$J_{y\omega z}$ (10^2 in^4)	-7.4747	-3.6216	-2.0613	-1.1604	-0.1665
$J_{z\omega y}$ (10^2 in^4)	18.8096	9.8565	6.1372	3.3283	1.6794
$\alpha_{yz\omega}$ (10^3 in^6)	35.4734	16.0270	5.1184	2.6368	0.4132

十字斷面

翹曲函數

$$\omega = yz$$

$$\text{for } \begin{cases} -0.5t \leq y \leq 0.5t \\ -0.5d \leq z \leq 0.5d \end{cases}$$

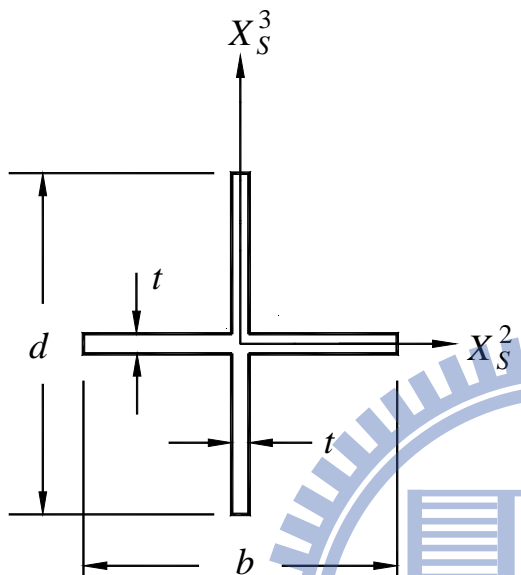
$$\omega = -yz$$

$$\text{for } \begin{cases} -0.5b \leq y \leq -0.5t \\ -0.5t \leq z \leq 0.5t \end{cases}$$

$$\omega = -yz$$

$$\text{for } \begin{cases} 0.5t \leq y \leq 0.5b \\ -0.5t \leq z \leq 0.5t \end{cases}$$

$$J = \frac{2\left(\frac{b-t}{2}\right)t^3 + dt^3}{3}$$



$d \times b \times t$ (in)	14 × 7 × 0.7	14 × 7 × 0.35	14 × 3.5 × 0.35
A (in^2)	14.2100	7.2275	6.0025
J (in^4)	2.3210	0.2951	0.2451
I_y ($10^2 in^4$)	1.6025	0.8006	0.8004
I_z (in^4)	20.3885	10.0529	1.2993
I_ω (in^6)	7.3522	0.9191	0.8298
K_I ($10^3 in^6$)	4.8677	2.4284	2.3569
$J_{y\omega z}$ (in^4)	-19.6282	-9.9554	-1.2018
$J_{z\omega y}$ ($10^2 in^4$)	1.5985	0.8001	0.8002
$\alpha_{yz\omega}$ (in^6)	5.7182	0.7147	0.8043

附錄 C 具預錐角之旋轉傾斜梁的線性穩態解

若不考慮具預錐角之旋轉傾斜梁穩態變形對慣性力及梁之側向剛度的影響，則可用 d'Alembert 原理及剛體動力學求得慣性分佈力，再用材料力學可以求得具預錐角之旋轉傾斜梁的線性穩態解。

令圖 C1 中 \mathbf{r} 為旋轉軸 A 點到旋轉梁上任一點 P 的位置向量，其中 Q 為梁形心軸且與 P 點在同一梁斷面的交點， q_1 、 q_2 、 q_3 及 m_1 、 m_2 、 m_3 分別為作用在通過 P 點斷面 X_1 、 X_2 及 X_3 方向的慣性分佈力及力矩，則作用在通過 P 點斷面之一小段梁 dx 的慣性分佈力及力矩可以表示成

$$\{q_1, q_2, q_3\} = -\rho \int_A \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dA = -\rho \int_A \mathbf{a} dA \quad (\text{C.1})$$

$$\{m_1, m_2, m_3\} = -\rho \int_A \mathbf{r}_{QP} \times \mathbf{a} dA \quad (\text{C.2})$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \{\sin \gamma, \sin \beta \cos \gamma, \cos \beta \cos \gamma\} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{AQ} + \mathbf{r}_{QP}$$

$$= \{R \cos \alpha \cos \gamma + x, R(-\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta) + y,$$

$$R(-\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta) + z\} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{r}_{AQ} = \{R \cos \alpha \cos \gamma + x, R(-\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta),$$

$$R(-\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta)\} \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{r}_{QP} = \{0, y, z\} \quad (\text{C.6})$$

其中 ρ 、 A 為梁的密度及斷面積， Ω 為轉速。

將(C3)–(C.6)式代入(C.1)、(C.2)式整理可得

$$q_1 = \frac{k^2 EA}{L_T^2} (R \cos \alpha \cos \gamma + x \cos^2 \gamma) \quad (\text{C.7})$$

$$q_2 = -\frac{k^2 EA}{L_T^2} [R(\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta) + x \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma] \quad (\text{C.8})$$

$$q_3 = -\frac{k^2 EA}{L_T^2} [R(\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta) + x \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma] \quad (\text{C.9})$$

$$m_1 = \frac{k^2 E}{L_T^2} (I_y - I_z) \sin \beta \cos \beta \cos^2 \gamma \quad (\text{C.10})$$

$$m_2 = -\frac{k^2 E}{L_T^2} I_y \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma \quad (\text{C.11})$$

$$m_3 = \frac{k^2 E}{L_T^2} I_z \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma \quad (\text{C.12})$$

$$k^2 = \frac{\rho \Omega^2 L_T^2}{E} \quad (2.10.1)$$

其中 k 為無因次化轉速。由(C.7)到(C.12)式可知旋轉傾斜梁相當於受到如圖 C2 所示的分布力

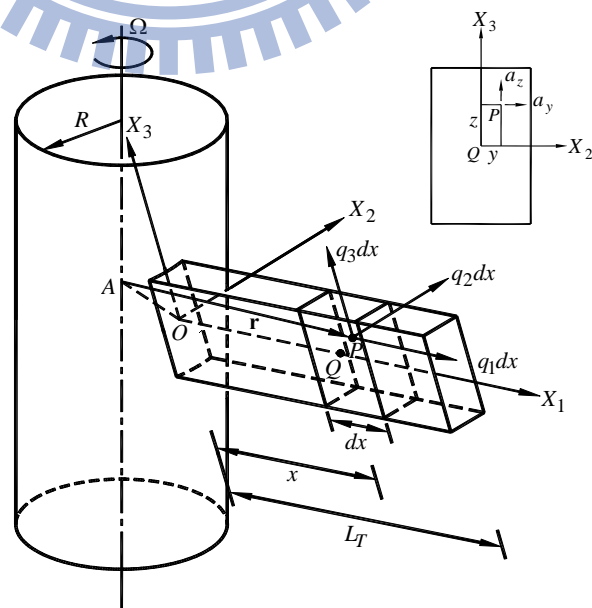


圖 C1

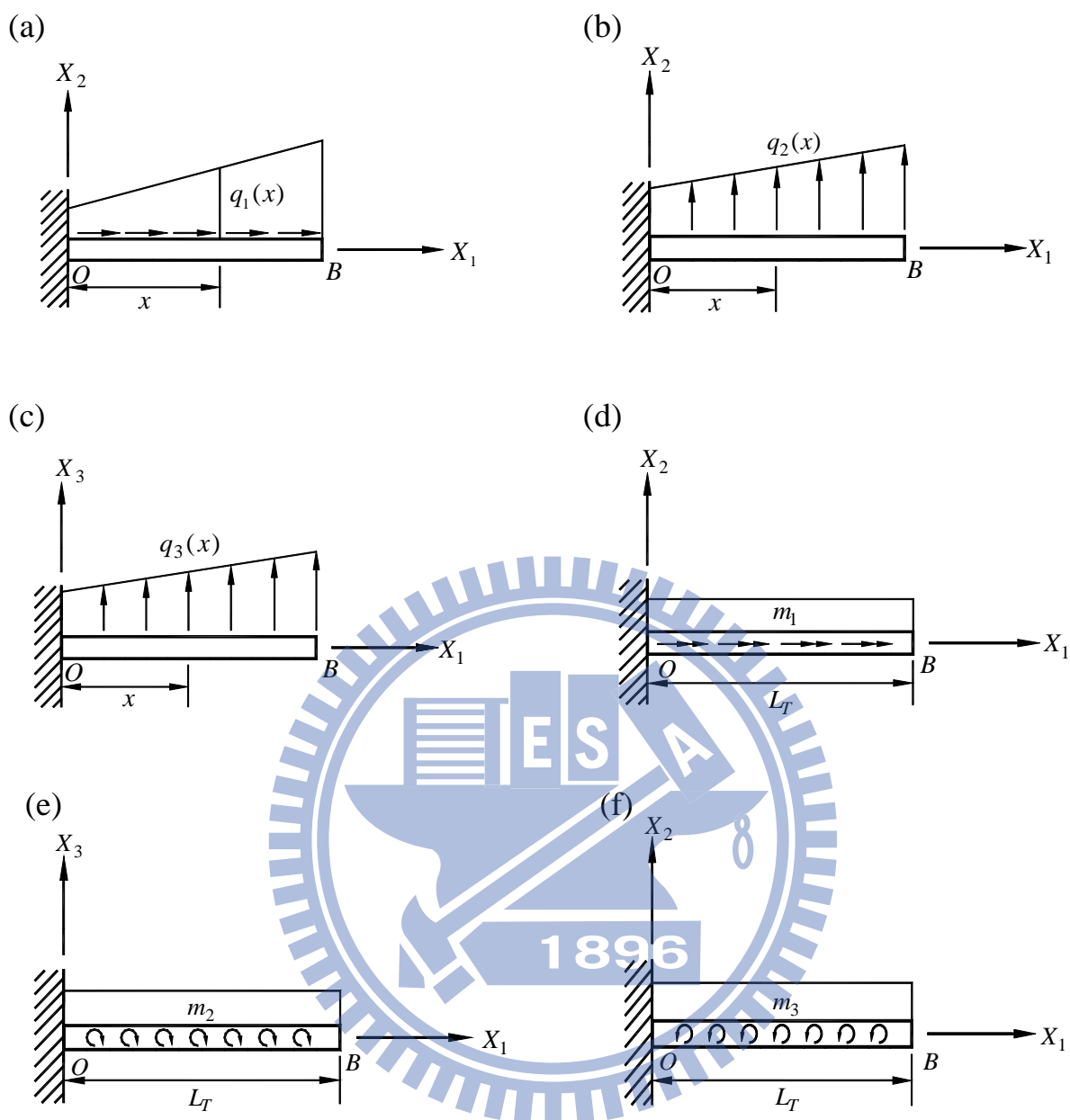


圖 C2

由(C.7)式及圖 C2(a)可得旋轉傾斜梁在距離固定端 x 處的軸向位移 $u(x)$

及膜應變(membrane strain) $\varepsilon_0(x)$ 可表示成

$$u(x) = -\frac{k^2}{L_T^2} \left[R \cos \alpha \cos \gamma \left(L_T x - \frac{1}{2} x^2 \right) + \frac{1}{2} \cos^2 \gamma \left(L_T^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \right] \quad (\text{C.13})$$

$$\varepsilon_0 = \frac{k^2}{L_T^2} \left[R \cos \alpha \cos \gamma (L_T - x) + \frac{1}{2} \cos^2 \gamma (L_T^2 - x^2) \right] \quad (\text{C.14})$$

由(C.14)式可知當 $x = 0$ 時，旋轉傾斜梁有最大的膜應變 $\varepsilon_{0\max}$

$$\varepsilon_{0\max} = k^2 \left(r \cos \alpha \cos \gamma + \frac{1}{2} \cos^2 \gamma \right) \quad (\text{C.15})$$

$$r = \frac{R}{L_T} \quad (2.10.1)$$

其中 r 為無因次轉軸半徑。

由(C.8)式及圖 C2(b)可得旋轉傾斜梁在自由端 X_2 方向的端點位移 v_B 為

$$\begin{aligned} \frac{v_B}{L_T} &= -\frac{k^2 AL_T^2}{I_z} \left[\frac{1}{8} r (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta) + \frac{11}{120} \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma \right] \\ &= -n_y^2 k^2 \left[\frac{1}{8} r (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta) + \frac{11}{120} \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma \right] \quad (\text{C.16}) \end{aligned}$$

$$n_y = \sqrt{\frac{AL_T^2}{I_z}} \quad (2.10.1)$$

其中 E 為楊氏係數， I_z 為梁斷面對 z 軸的二次矩， n_y 為 $X_1 - X_2$ 平面的細長比， r 為無因次轉軸半徑。

由(C.8)式可得梁在 $X_1 - X_2$ 平面的最大應變的絕對值為

$$\begin{aligned} \varepsilon_{b\max} &= \frac{M_{2\max} c_2}{EI_z} \\ &= -\frac{k^2 A c_2}{I_z} \left[\frac{1}{2} R (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta) + \frac{1}{3} L_T \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma \right] \\ &= -\frac{n_y^2 k^2 c_2}{L_T} \left[\frac{1}{2} r (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta) + \frac{1}{3} \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma \right] \quad (\text{C.17}) \end{aligned}$$

其中 c_2 為斷面上的點和 X_3 軸的最大距離。

由(C.9)式及圖 C2(c)可得旋轉傾斜梁在自由端 X_3 方向的端點位移 w_B 為

$$\begin{aligned}
\frac{w_B}{L_T} &= -\frac{k^2 AL_T^2}{I_y} \left[\frac{1}{8} r(\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta) + \frac{11}{120} \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma \right] \\
&= -n_z^2 k^2 \left[\frac{1}{8} r(\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta) + \frac{11}{120} \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma \right] \quad (\text{C.18}) \\
n_z &= \sqrt{\frac{AL_T^2}{I_y}} \quad (2.10.1)
\end{aligned}$$

其中 E 為楊氏係數， I_y 為梁斷面對 y 軸的二次矩， n_z 為 $X_1 - X_3$ 平面的細長比， r 為無因次轉軸半徑。

由(C.9)式及圖 C2(c)可得梁在 $X_1 - X_3$ 平面的最大應變的絕對值為

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{c \max} &= \frac{M_{3 \max} c_3}{EI_y} \\
&= -\frac{k^2 A c_3}{I_y} \left[\frac{1}{2} R(\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta) + \frac{1}{3} L_T \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma \right] \\
&= -\frac{n_z^2 k^2 c_3}{L_T} \left[\frac{1}{2} r(\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta) + \frac{1}{3} \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma \right] \quad (\text{C.19})
\end{aligned}$$

其中 c_3 為斷面上的點和 X_2 軸的最大距離。