

國立交通大學

土木工程學系

碩士論文

數種濾波技術於線性系統識別之可行性探討

A Study on the Applicability of Several Filtering Techniques
to the Identification of Linear Systems



研究生：楊維莘

指導教授：黃炯憲 博士

中華民國一百零一年一月

數種濾波技術於線性系統識別之可行性探討

A Study on the Applicability of Several Filtering Techniques to the Identification of Linear Systems

研究生：楊維莘

Student：Wei-Hsin Yang

指導教授：黃炯憲 博士

Advisor：Dr. Chiung-Shiann Huang

國立交通大學

土木工程學系



Submitted to Department of Civil Engineering
College of Engineering
National Chiao-Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Civil Engineering

January 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 一 百 零 一 年 一 月

數種濾波技術於線性系統識別之可行性探討

研究生：楊維莘

指導教授：黃炯憲 博士

國立交通大學土木工程學系

摘要

本研究旨在探討數種常用濾波技術對於非時變系統與時變系統之系統識別模型參數的影響。本研究選用三種濾波技術來進行比較，分別是卡爾曼濾波演算法(Kalman filtering algorithm)、離散小波濾波法(discrete wavelet de-noising)，以及中位值濾波器(median filter)。研究中將數值模擬地震反應分為非時變系統與時變系統兩大部分：非時變系統中，將數值模擬七個自由度的系統之地震反應，利用連續小波轉換建構 ARX (Autoregressive with exogenous input) 模式，進一步估算其系統模態參數。為探討不同噪訊含量的訊號中，經由上述各種濾波法處理後的差異性，我們將數值模擬地震反應加入不同比例的白色噪訊，使其噪訊比分別為 10%、20%、30%、40%，再利用濾波法對含噪訊之地震反應進行濾波處理，而濾波方法對於提升系統識別之效率的可行性，乃取決於識別出其準確之模態參數時所需的最小階數。時變系統部分，本研究採用數值模擬五個自由度的系統受地震反應時的訊號，不同於非時變系統，此系統的勁度與模態的阻尼比與時間相關，利用移動最小平方差法(Moving Least Square method, MLS) 架構 TVARX 模型(Time Varying Autoregressive with exogenous input)，識別其系統之瞬時模態特性。對於時變系統，其研究方法與探討非時變系統雷同，將上述的濾波技術應用於處理時變系統中其噪訊比分別為 1%、3%、5%的地震反應，用來評估其濾波技術對於改善系統識別之效能的可行性。

A Study on the Applicability of Several Filtering Techniques to the Identification of Linear Systems

Student : Wei-Hsin Yang

Advisor : Dr. Chiung-Shiann Huang

Department of Civil Engineering National Chiao-Tung University

Abstract

The main purpose of this study is to investigate the effects that several popular de-noising techniques on identifying the modal parameters of time invariant and time varying linear systems. There are three de-noising techniques under consideration, and they are Kalman filtering algorithm, discrete wavelet de-noising, median filter. When studying invariant time systems, we numerically simulate acceleration responses of a seven degrees of freedom (DOF) system under earthquake. A continuous wavelet transform combined with ARX (Auto-regressive with exogenous input) model is applied to process the acceleration responses and estimate the modal parameters of the system. White noise with different noise levels (noise-to-signal ratio (NSR) =10%, 20%,30%, 40%) is added to the acceleration responses. The de-noising techniques are employed to the noisy responses. The feasibility of these de-noising techniques on handling the noisy data is determined by the least order of ARX yielding accurate modal parameter identification. When investigating time varying systems, we numerically simulate acceleration responses of a five DOF system under earthquake. Their stiffness and modal damping ratios are time dependent. A moving least square method is adopted to construct TVARX model (time varying auto-regressive with exogenous input) and to identify the instantaneous modal parameters of the five DOF system. Similar to the study for a time invariant system those de-noising techniques are utilized to process the noisy acceleration responses with NSR equal to 1%, 3%, and 5%, and their effectiveness on improving the modal identification is evaluated.

誌謝

首先，最要感激的人就是指導教授 黃炯憲老師對我的耐心指導，更感謝老師一直以來對我的寬容、體諒及指教，讓我在生活上及課業上都得到極大的支持與幫助。老師對於學術上的熱誠與對學生的關懷令我敬佩萬分，與老師的氣度相比，實在令我自己感到汗顏，期許自己能努力向老師看齊，學習這種敬業與認真的態度，對於將來運用於人生的任何一個面向，必將是極大的助益，對老師的感激之情無法言喻，難以用筆墨來形容。

特別要感謝 翁正強老師對我的教導與啟發，老師諄諄的教誨，予我生活上的支持、鼓勵與建議，讓我對人生的方向有了更明確的目標，對自我的定位更加清晰。

感謝口試委員 鄭復平老師、劉俊秀老師、林昌佑老師的用心傾聽、指導與完善的建議，讓這份論文更趨於完整。感謝大學時期的導師 王維志老師，指引我未來的方向；感謝交通大學以及土木系所給予我完善的教育資源與環境，從大學時期到研究所，這幾年在交大的生活讓我在心靈和教育上得到良好的滋養，得到前所未有的體驗與快樂。當然，也要感謝清華大學，慷慨地分享資源，帶給我生活上的便利，期望兩校發展日益精進。

感謝同窗好友鈞誠、江祥、宣妤、連峰、中原、博然、進順、承哲、自勝、柏霖及其他研究所同學們；學長姐景裕、祖涵、意晴、柏安、威智、靖俞、穎泰、政甯、明儒等；學弟妹芳琳、裕鈞、旭進、宣治、俊超等，有了你們的陪伴讓我的研究所生活多采多姿，在學業和生活上都得到大家的照顧，也得到了極其珍貴的友情，更懂得如何待人處事與良好地溝通。

感謝我的多年好友凱復、正淇、聖文、兆民、宗佑、聖仁、國豪、韋菱、宜萍、亭宜、祐甄、吉鴻、強瑞，多虧你們，讓我擁有美好的回憶；感謝我的好姊妹們，雅婷、晏嘉、岱瀚、康亭及其他高中同學，很高興經過這麼多年我們的情誼仍然如此深厚，妳們是我的支柱。這些年有大家的真摯的友情與情義相挺，分享生活中的心情與大小事，使我感覺充滿力量，心智與個性也更加成熟。

最後要感謝一直以來最支持我的父親、母親、弟弟允中及喆銘，還有很幸運地在我畢業前臨門一腳趕上的君瀚，你我都是幸運的人。感謝所有愛護我的家人，感謝整個大家族，感謝我們擁有彼此，你們都是最疼愛我的家人，更是我最親密的伴侶，有了你們的照顧，給予我圓滿的愛，讓我一直在備受寵愛的環境裡成長，使我擁有完整的幸福，才有完整的我。有了你們，我的人生更加美好。感謝所有人對我的祝福。

這些年遇到了很多人、很多事、很多物，促使我在個性、態度、處事及觀念上都

學習與成長了很多，我的視野更加開闊，心胸更寬大，大大小小的人、事、物，成就了今天的我，也成就了我的今天，更成就了我的明天。我真是個幸運兒，要感謝的實在是太多了，就感謝這個世界吧！我真心相信，懷著感恩的心，每一件事堆砌出來的路，都是在為我美好的未來鋪設更舒適的道路。感恩這個美好的人生，感謝我自己，盡情自在地享受這一切最美滿的幸福。



目錄

中文摘要	ii
英文摘要	iii
誌謝.....	iv
目錄.....	vi
表目錄.....	viii
圖目錄.....	ix
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 研究內容	3
第二章 濾波方法介紹	4
2.1 前言	4
2.2 卡爾曼濾波演算法之介紹	4
2.2.1 卡氏濾波器的基本動態系統模型	5
2.2.2 卡氏濾波器的推導及運算	5
2.3 中位值濾波法之介紹	7
2.3.1 中位值濾波法之公式推導	8
2.4 離散小波轉換之介紹	9
2.4.1 離散小波變換的推導	9
2.4.2 離散小波在濾波上的應用	11
第三章 架構 ARX 模型以及 TVARX 模型	14
3.1 前言	14
3.2 連續小波變換之理論基礎	14
3.3 建構 ARX 模型	17
3.4 以移動最小平方差法架構 TVARX 模型	19
3.5 瞬時模態參數估算	23
第四章 數值模擬之系統識別結果分析	26
4.1 前言	26
4.2 非時變系統之數值模擬的系統識別分析結果	26
4.2.1 小波函數之影響	26

4.2.2 無噪訊反應之識別結果.....	27
4.2.3 含噪訊反應對於識別結果之影響.....	27
4.3 濾波後對於非時變系統的數值模擬反應識別結果之影響與比較.....	28
4.3.1 卡氏濾波器濾波後的識別結果.....	28
4.3.2 中值濾波器濾波後的識別結果.....	29
4.3.3 離散小波濾波後的識別結果.....	30
4.3.4 濾波後對於非時變系統的數值模擬反應識別分析的綜合比較.....	31
4.4 時變系統之數值模擬反應的系統識別分析結果.....	31
4.4.1 識別動態特性準確指標.....	32
4.4.2 無噪訊與含噪訊數值模擬反應之識別結果.....	32
4.4.3 濾波後對於時變系統的數值模擬反應識別結果之影響與比較.....	33
第五章 結論與建議.....	35
5.1 結論.....	35
5.1.1 非時變系統.....	35
5.1.2 時變系統.....	35
5.2 建議.....	36
參考文獻	38
附表.....	43
附圖.....	55



表目錄

表 4.1	七層樓剪力構架之非時變系統反應其理論值的系統識別結果.....	43
表 4.2	七層樓剪力構架含噪訊之非時變系統反應經卡氏濾波過後之噪訊比.....	44
表 4.3	七層樓剪力構架含 10%噪訊之訊號與經卡氏濾波後之系統識別結果.....	45
表 4.4	七層樓剪力構架含 20%噪訊之訊號與經卡氏濾波後之系統識別結果.....	46
表 4.5	七層樓剪力構架含 30%噪訊之訊號與經卡氏濾波後之系統識別結果.....	47
表 4.6	七層樓剪力構架含 40%噪訊之訊號與經卡氏濾波後之系統識別結果.....	48
表 4.7	七層樓剪力構架含噪訊之非時變系統反應經中值濾波過後之噪訊比.....	49
表 4.8	七層樓剪力構架含 10%噪訊之訊號與經中值濾波後之系統識別結果.....	49
表 4.9	七層樓剪力構架含 20%噪訊之訊號與經中值濾波後之系統識別結果.....	50
表 4.10	七層樓剪力構架含 30%噪訊之訊號與經中值濾波後之系統識別結果.....	50
表 4.11	七層樓剪力構架含 40%噪訊之訊號與中值濾波後之系統識別結果.....	51
表 4.12	七層樓剪力構架含噪訊之非時變系統反應經離散小波濾波過後之噪訊比.....	51
表 4.13	七層樓剪力構架含 10%噪訊之訊號與離散小波濾波後之系統識別結果.....	52
表 4.14	七層樓剪力構架含 20%噪訊之訊號與離散小波濾波後之系統識別結果.....	52
表 4.15	七層樓剪力構架含 30%噪訊之訊號與離散小波濾波後之系統識別結果.....	53
表 4.16	七層樓剪力構架含 40%噪訊之訊號與離散小波濾波後之系統識別結果.....	53
表 4.17	七層樓剪力構架含噪訊之非時變系統反應訊號經三種濾波方法處理後的系統識別結果綜合比較	54

圖目錄

圖 2.1 含噪訊號的濾波流程.....	55
圖 2.2 卡氏濾波器之模型示意圖.....	55
圖 2.3 卡爾曼濾波器之分析流程.....	56
圖 2.4 小波分析樹狀圖.....	57
圖 2.5 小波重構示意圖.....	58
圖 4.1 濾波與系統識別分析流程.....	59
圖 4.2 a 七層樓之剪力構架示意圖.....	60
圖 4.2 b 七層樓之剪力構架示意圖.....	61
圖 4.3 a 七層樓剪力構架第一層樓之地震歷時反應圖(非時變系統).....	62
圖 4.3 b 七層樓剪力構架第二層樓之地震歷時反應圖(非時變系統).....	63
圖 4.3 c 七層樓剪力構架第三層樓之地震歷時反應圖(非時變系統).....	64
圖 4.3 d 七層樓剪力構架第四層樓之地震歷時反應圖(非時變系統).....	65
圖 4.3 e 七層樓剪力構架第五層樓之地震歷時反應圖(非時變系統).....	66
圖 4.3 f 七層樓剪力構架第六層樓之地震歷時反應圖(非時變系統).....	67
圖 4.3 g 七層樓剪力構架第七層樓之地震歷時反應(非時變系統).....	68
圖 4.4 a 五層樓之剪力構架示意圖.....	69
圖 4.4 b 五層樓之剪力構架示意圖.....	70
圖 4.5 a 五層樓剪力構架第一層樓之地震歷時反應圖(時變系統).....	71
圖 4.5 b 五層樓剪力構架第二層樓之地震歷時反應圖(時變系統).....	72
圖 4.5 c 五層樓剪力構架第三層樓之地震歷時反應圖(時變系統).....	73
圖 4.5 d 五層樓剪力構架第四層樓之地震歷時反應圖(時變系統).....	74
圖 4.5 e 五層樓剪力構架第五層樓之地震歷時反應圖(時變系統).....	75
圖 4.6 五層樓剪力構架無噪訊的時變系統反應之識別結果(理論值).....	76
圖 4.7 五層樓剪力構架含 1%噪訊的時變系統反應之識別結果.....	77
圖 4.8 五層樓剪力構架含 1%噪訊的時變系統反應經卡氏濾波器處理後之識別結果....	78
圖 4.9 五層樓剪力構架含 1%噪訊的時變系統反應經中值濾波器處理後之識別結果....	79
圖 4.10 五層樓剪力構架含 1%噪訊的時變系統反應經離散小波濾波處理後之識別結果	80
圖 4.11 五層樓剪力構架含 3%噪訊的時變系統反應之識別結果.....	81
圖 4.12 五層樓剪力構架含 3%噪訊的時變系統反應經卡氏濾波器處理後之識別結果..	82

圖 4.13 五層樓剪力構架含 3%噪訊的時變系統反應經中值濾波器處理後之識別結果..	83
圖 4.14 五層樓剪力構架含 3%噪訊的時變系統反應經離散小波濾波處理後之識別結果	84
圖 4.15 五層樓剪力構架含 5%噪訊的時變系統反應之識別結果.....	85
圖 4.16 五層樓剪力構架含 5%噪訊的時變系統反應經卡氏濾波器處理後之識別結果..	86
圖 4.17 五層樓剪力構架含 5%噪訊的時變系統反應經中值濾波器處理後之識別結果..	87
圖 4.18 五層樓剪力構架含 5%噪訊的時變系統反應經離散小波濾波處理後之識別結果	88



第一章 緒論

台灣位處歐亞板塊與菲律賓板塊之環太平洋之地震帶，地震相當頻繁，尤其在民國八十八年「九二一大地震」發生之後，許多民眾不僅在經濟上受到重大損失，甚至失去寶貴性命，造成許多社會問題，也因此使得國人日益重視結構物耐震的設計與以及安全性。

土木工程系統最大的問題在於結構物實際上表現出來的力學行為與理論上的力學行為差異較大且相當複雜，加上現地施工品質不易掌握，因此藉由現地量測的資料來識別結構物的動態特性以及其健康狀況受到相當程度地重視。

「九二一大地震」發生之後，加速隔減震裝置越來越廣泛地運用於補強或修復結構物，而許多近期研發之「半主動控制元件」例如：半主動摩擦組尼器、半主動控制磁流變消能器、蓄壓式油壓半主動減震器以及電流變阻尼器……等等，亦相繼地被納入於新開發結構物之設計中。當此類半主動控制元件被裝置於結構物上，該結構系統受到外力作用時，其勁度和阻尼將會隨時間而改變，此即為系統識別領域中所稱之時變系統(Time-varient system)。現今科技日新月異，吾人可以透過系統識別(System Identification)技術來處理相關的工程問題，系統識別技術可以識別結構系統之動態特性並協助建立非線性模型，並幫助檢驗半主動控制元件等非線性元件的應用是否完善，評估結構系統的健康狀況。

另外，若是結構系統在受外力作用之時表現出材料的非線性行為(Non- linear)，亦可視其為非線性時變系統，吾人可透過系統識別評估該結構系統隨時間改變之動態特性，瞭解其力學與其動態行為之影響。

1.1 前言

在工程應用上，大部分碰到的問題為時變系統，可用來描述非穩態過程中之各種特性，TVARX(Time Varying Autoregressive with exogenous input)模型常被用來表示時變系統之輸入與輸出之關係。

如前述所知，發展出一準確性高且具有高效率的系統識別技術，對於土木工程領域的應用具有相當大地重要性，然而不論是時變系統還是非時變系統，普遍存在「雜訊」(或稱噪訊)干擾的問題，在系統識別過程中，噪訊干擾會嚴重影響到系統識別的結果。因此，利用「濾波」(filtering，又稱去噪，de-noising)方法，盡可能地降低噪訊

對系統識別的結果之影響，成為在系統識別領域中一個相當重要的課題。

目前在訊號處理領域中，所發展出來的濾波方法有非常多種；針對不同類型的訊號，亦發展出各種不同的濾波方法，每一種濾波方法都有其優缺點，也都有其適合的訊號類型。濾掉太多噪訊易導致原始的訊號失真，喪失原有的訊號特性；濾掉太少則殘留的噪訊太多，使得系統識別的結果大受影響。

本研究針對時變系統以及非時變線性系統訊號，利用目前使用上較為普遍的三種濾波方法，分別是卡爾曼濾波演算法、中位值濾波法以及離散小波濾波法，進行其對系統識別結果影響之比較與討論。

1.2 文獻回顧

- (1) 卡爾曼濾波演算法(Kalman filtering algorithm，亦稱卡氏濾波器)：1960 年起，Kalman 發表了一種濾波的演算法[1,2]，該濾波方法並以他命名，此後卡氏濾波器在濾波領域逐漸受到重視並持續發展，傳統的卡氏濾波器為基本型卡爾曼濾波器(The Basic Kalman filter)，也是本研究中所使用的濾波方法。多數研究指出，該方法在處理離散系統線性濾波的問題中可以得到良好的效果，目前主要應用於自主或輔助定位導航、測量、信號處理、以及自動控制等領域；此外，Gelb(1974) [3]、Lewis(1986) [4]、Brown(1992)[5]、Jacobs(1993)[6]等人對卡氏濾波器做了更深入地研究；Harvey (1989)[7]、Welch and Bishop(2001)[8]等人也對其做了詳盡的介紹。至於用於非線性問題時，一般則使用擴展型卡爾曼濾波器(The Extended Kalman Filter，簡稱 EKF)：Ljung(1979)[9]；Hoshiya and Saito(1984)[10]；Roman(1987)[11]；Julier(1997)[12]；Vander Merwe and Wan(2001)[13]；張(2008)[14]。
- (2) 中位值濾波法(Median filter，亦稱中值濾波器)：1983 年，Bednar 提出時間方向的中值濾波，將中值濾波法引入地震探勘領域[15]；1984 年，Brownrigg 發表了考慮權重參數的中值濾波器[16]；1995 年，Duncan 也陸續發表了不少關於中值濾波應用於地震探勘處理中的論文[17,18]；2006 年，Liu 等利用二維多級中值濾波技術進行白噪消除[19]，並於 2009 年發表了非穩態時變中值濾波技術[20]；中值濾波器(median filter)及其相關濾波器在各領域都有得到廣泛的發展：Bednar(1984)[21]，Lee and Kassam(1985) [22]；Fitch, et al.(1986)[23]。
- (3) 離散小波去噪(Discrete wavelet de-noising)：1992 年，Mallat 等人提出了基於信號的奇異性，利用 Lipschitz 指數在多尺度上對信號、圖像和噪聲的數學特性進行描

述，稱模極大值重構濾波方法[24,25]；Lu 等人直接結合小波變換理論與傳統的多尺度信號處理方法，提出了一種效果優良的小波濾波法[26,27]；Simoncelli, et al. 提出利用在小波域對噪聲的小波係數進行抑制達到去噪的效果[28]；1994 年，Moulin 在功率譜之估計問題的研究上得到與閾值演算法相類似的結果[29]；同年，Dohono 正式定義了「去噪」，通過對小波係數閾值化處理而去除噪聲，利用均方差來做為最優去噪效果的指標，並提出了小波域閾值濾波演算法，並有大量的理論和成果[30~35]；Kirm 等人利用最小描述長度(Minimum description length,MDL) 準則，得到了相同的閾值[36]；Moulin 在研究譜估計方面的問題提出了另一種選擇閾值的方法[37]。

1.3 研究內容

本研究分為兩大部分進行，非時變線性系統以及線性時變系統訊號的濾波處理和系統識別。由於噪訊對系統識別之結果影響很大，然雜訊在實際量測反應上卻又是不可避免的，因此本研究在非時變系統部分，利用六層樓及七層樓構架之數值模擬地震反應，分別加上 10%、20%、30%、40%的高斯白噪聲(Gaussian white noise，簡稱白噪聲或白噪)，經過前述三種濾波方法濾波之後，討論其濾波之後對系統識別結果的影響；而在線性時變系統部分，則利用五層樓構架之數值模擬地震反應，分別加上 1%、3%、5%的白噪，經過前述三種濾波方法濾波之後，探討其濾波之後對系統識別結果的比較與影響。

論文架構如下：

第一章 緒論：主要內容為文獻回顧以及研究內容之簡介。

第二章 濾波方法理論與介紹：分別介紹本研究中所使用之三種濾波方法的基本理論與操作方法。

第三章 架構 TVARX 模型以及 ARX 模型：介紹如何建立該兩種模型與其基礎理論。

第四章 數值模擬之系統識別結果的分析：分為非時變系統和時變系統兩大部分來討論其系統識別結果。

第五章 結論與建議：總結此研究中非時變系統與時變系統之濾波效果與系統識別分析結果。

第二章 濾波方法介紹

2.1 前言

噪訊在實際應用上難以避免，卻會對系統識別的結果造成一定程度的影響。為減少噪訊的在系統識別應用中所造成的問題，本研究擬利用三種濾波方法進行訊號處理，分別是卡爾曼濾波法、離散小波濾波法以及中位值濾波法(請參閱 1.2 節之文獻回顧)，希望含噪訊號可以經由濾波過後，降低雜訊對於系統識別結果的影響。如圖 2.1 所示，理論上我們希望可以藉由濾波器的處理將噪訊的含量及影響減至最低，並盡可能保留真實的訊號(即盡量減低真實訊號在濾波過程中的損失)。上述這三種濾波法都是可以用來處理線性及非線性系統的濾波方法，以下將對這三種濾波方法的原理進行基本的介紹：2.2 節介紹卡爾曼濾波器的理論及應用；2.3 節介紹中位值濾波法(亦稱中值濾波器)；2.4 節介紹離散小波濾波的理論及應用。

2.2 卡爾曼濾波演算法之介紹

1960 年，卡爾曼(Rudolph E. Kalman)發表了以遞歸方法解決離散數據線性濾波問題的論文，故此濾波方法以卡爾曼命名。卡爾曼濾波(Kalman filter；以下簡稱卡氏濾波器)由一系列的遞歸數學公式描述，是一種高效率的遞歸濾波器(亦稱自回歸濾波器)，它能夠從一系列的不完全及包含噪訊的測量(measurement)中，估計動態系統的狀態。一般而言，量測點的位移、速度、加速度的測量值往往都會有噪訊，卡氏濾波器利用量測點的動態資訊，從一組包含噪聲的序列，設法除去噪聲的影響，預測其位移及速度，良好地估計出量測點的狀態。

簡單的說，就是以最小均方誤差為估計的最佳準則，來尋求一套遞迴估算的演算法，當輸入為高斯白噪聲(Gaussian white noise，簡稱白噪，即常態分佈的隨機噪訊)時，使得期望的量測值和實際的輸出值之間的均方根誤差達到最小。採用訊號與噪訊的狀態空間模型，利用前一時刻的估計值和當前時刻的觀測值來更新對狀態變數的估計，求出當前時刻的估計值。

卡氏濾波器在許多工程應用(如雷達、動態定位系統、GPS、經濟學、時間序列模型……等)中都有良好的發展亦是控制理論以及控制系統工程中的一個重要課題。

2.2.1 卡氏濾波器的基本動態系統模型

卡氏濾波器建立在隱馬爾可夫模型(Hidden Markov Model)上，其模型假設當 t 時刻的真實狀態是從 $(t-1)$ 時刻的狀態演化而來，可用下式表示之：

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t + \mathbf{w}_t \quad (2.1)$$

其中 $\mathbf{F}_t$ 為作用在 $\mathbf{x}_{t-1}$ 的狀態變換模型； $\mathbf{B}_t$ 為作用在控制器向量 $\mathbf{u}_t$ 的輸入控制模型； $\mathbf{w}_t$ 為符合均值為零的過程噪聲(process noise)且協方差矩陣為 $\mathbf{Q}_t$ 的多元常態分佈， $\mathbf{w}_t \sim N(0, \mathbf{Q}_t)$ 。

對於一個真實狀態 $\mathbf{x}_t$ 的測量 $\mathbf{z}_t$ ，在時刻為 t 時滿足下式：

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad (2.2)$$

其中 $\mathbf{H}_t$ 為觀測模型，本研究在濾波演算過程中將其設為 $\mathbf{H}_t = [1 \ 0]$ ；而 $\mathbf{v}_t$ 為均值為零的觀測噪聲(observation noise)，且協方差矩陣為 $\mathbf{R}_t$ 並滿足 $\mathbf{v}_t \sim N(0, \mathbf{R}_t)$ 。假設 $\mathbf{w}_t$ 與 $\mathbf{v}_t$ 皆為互相獨立且正態分佈的白色噪聲；實際的應用中， $\mathbf{w}_t$ 與 $\mathbf{v}_t$ 通常為有色噪聲，兩者亦可能存在互相關的情況，而 $\mathbf{Q}_t$ 與 $\mathbf{R}_t$ 則可能會隨著疊代計算而產生變化，但在這裡我們將 $\mathbf{Q}_t$ 與 $\mathbf{R}_t$ 假設為常數[8]。在本研究中，我們假設 $\mathbf{Q}_t$ 為 0.001；且在此稱 GR 值為「猜測的噪訊值」，在濾波之前，先假設 GR 值分別為 10%、20%、30%、40%，其中 GR 值即代表式中的 $\mathbf{R}_t$ ，濾波過程中我們將 $\mathbf{R}_t$ 假設為 0.1、0.2、0.3、0.4，欲觀察猜測的噪訊含量是否與實際上的噪訊含量一致，而此過程對於過濾噪訊與系統識別的結果又將影響與否。

卡氏濾波器模型請參考圖 2.2，其中圓圈代表向量，方塊代表矩陣，星號代表高斯噪聲，其協方差矩陣在右下方標示。

2.2.2 卡氏濾波器的推導及運算

在線性的條件之下，卡氏濾波器的狀態可由以下兩個變數表示：

$\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ ：當時刻為 t 時的狀態估算，

$\mathbf{P}_{t|t}$ ：誤差的協方差矩陣(covariance matrix)，用來度量估計值的精確程度。

基本型的卡氏濾波器的運算包含預測及更新兩個階段：

(1) 預測：依式(2.1)，利用前一刻狀態的估算，做出對當前時刻狀態的估算

$$\text{預測狀態： } \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_{t-1} \quad (2.3)$$

$$\text{預測估計協方差矩陣： } \mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t-1|t-1} \mathbf{F}_t^T + \mathbf{Q}_t \quad (2.4)$$

(2) 更新：

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \tilde{\mathbf{y}}_t \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t) \mathbf{P}_{t|t-1} \quad (2.6)$$

其中，

$$\tilde{\mathbf{y}}_t = \mathbf{z}_t - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^T \mathbf{S}_t^{-1} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t \quad (2.9)$$

$\tilde{\mathbf{y}}_t$ 為測量餘量(measurement residual)； $\mathbf{S}_t$ 為測量餘量的協方差矩陣； $\mathbf{K}_t$ 為卡爾曼增益； $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ 為更新的狀態估算； $\mathbf{P}_{t|t}$ 為更新的協方差矩陣之估算，只適用於最優卡爾曼增益。

假設模型準確，且 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ 和 $\mathbf{P}_{0|0}$ 反映了最初狀態的分佈，那麼可知協方差矩陣亦準確地反映了估算的協方差，即

$$\mathbf{P}_{t|t} = \text{cov}(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \text{cov}(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{S}_t = \text{cov}(\tilde{\mathbf{y}}_t) \quad (2.12)$$

其中 $\text{cov}(a) = E[aa^T]$ ， $E[A]$ 代表 A 的期望值。

欲推導後驗(posteriori)協方差矩陣，首先將式(2.5)代入式(2.10)，可得：

$$\mathbf{P}_{t|t} = \text{cov}[\mathbf{x}_t - (\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \tilde{\mathbf{y}}_t)] \quad (2.13)$$

再將式(2.2)及(2.7)代入式(2.13)，得：

$$\mathbf{P}_{t|t} = \text{cov}\{\mathbf{x}_t - [\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t(\mathbf{H}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t - \mathbf{H}_t\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})]\} \quad (2.14)$$

整理可得：

$$\mathbf{P}_{t|t} = \text{cov}[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) - \mathbf{K}_t\mathbf{v}_t] \quad (2.15)$$

由於測量誤差 $\mathbf{v}_t$ 與其他項不相關，因此(2.13)式可改寫為：

$$\mathbf{P}_{t|t} = \text{cov}[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})] + \text{cov}(\mathbf{K}_t\mathbf{v}_t) \quad (2.16)$$

利用協方差矩陣的性質，式(2.14)可以改寫為：

$$\mathbf{P}_{t|t} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)\text{cov}(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T + \mathbf{K}_t\text{cov}(\mathbf{v}_t)\mathbf{K}_t^T \quad (2.17)$$

最後，將式(2.11)代入(2.15)，並令 $\mathbf{R}_t = \text{cov}(\mathbf{v}_t)$ ，整理可得下式：

$$\mathbf{P}_{t|t} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)\mathbf{P}_{t|t-1}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T + \mathbf{K}_t\mathbf{R}_t\mathbf{K}_t^T \quad (2.18)$$

上式對於任一卡爾曼增益 $\mathbf{K}_t$ 皆成立。卡氏濾波器的分析流程圖請參考圖 2.3。

2.3 中位值濾波法之介紹

中位值濾波法(median filter；簡稱中值濾波器)是基於排序統計理論中的一種可以有效地抑制噪訊的非線性信號處理技術。中值濾波器能夠有效地消除非平穩信號中的峰值噪聲，經常被使用於去除圖像的噪訊(避免邊緣模糊或進行邊緣檢測)或者其它信號中的噪訊，對於消除斑點噪聲(speckle noise，又稱散斑幹擾或散斑噪聲，為一種顆粒狀的雜訊，通常由反射信號的隨機波動所造成，會增加二維圖像局部區域的平均灰階，造成圖像判讀困難)和椒鹽噪聲(salt-and-pepper noise，為隨機產生的黑點和白點狀，通常由於訊號的快速瞬變或故障切換時產生)效果尤其顯著[38]。

中值濾波器的基本原理是把信號序列中某一點的值，用該點附近的一個鄰域中各個點值由大排列到小，取其中的中位數來替代該點本來的值，讓周圍的圖元值接近的真實值，從而消除孤立的噪聲點。目前，中值濾波器運用在地震資料處理方面亦有相當不錯的成果[39~42]，本研究將中值濾波器應用於一維數值模擬

多自由度的剪力構架受地震反應之訊號濾波與系統識別，其結果將在第四章討論。

2.3.1 中位值濾波法之公式推導

中值濾波器是一種能有效抑制噪訊的非線性濾波技術，基本原理是將一個序列中的某值用涵蓋該點的跨度(N)中各個點值的中位數值取代，藉此消除孤立的噪聲點，使得誤差的絕對值之和達到最小值來估算參數的方法。其推導過程如下：

令一組觀測值 $\{x_i\}$ ，其中 $1 \leq i \leq N$ ，其絕對誤差和表示為：

$$Q = \sum_{i=1}^N |\bar{x} - x_i| \quad (2.19)$$

欲使 Q 達到最小，必須令 $dQ / d\bar{x} = 0$

$$\frac{dQ}{d\bar{x}} = \frac{d}{d\bar{x}} \left(\sum_{i=1}^N |\bar{x} - x_i| \right) = \frac{d}{d\bar{x}} \left\{ \sum_{i=1}^N [(\bar{x} - x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \right\} = \sum_{i=1}^N \frac{\bar{x} - x_i}{|\bar{x} - x_i|} = \sum_{i=1}^N \text{sign}(\bar{x} - x_i) = 0 \quad (2.20)$$

其中 $\text{sign}(\omega_{j,i})$ 為符號函數：

$$\text{sign}(\omega_{j,i}) = \begin{cases} -1, & \omega_{j,i} < 0 \\ 0, & \omega_{j,i} = 0 \\ 1, & \omega_{j,i} > 0 \end{cases} \quad (2.20a)$$

由式(2.20)可知，若要滿足 $\sum_{i=1}^N \text{sign}(\bar{x} - x_i) = 0$ ，所選取之 $\bar{x}$ 必須使得 N 個 x_i 中有 N/2 個 x_i 大於 $\bar{x}$ ，即 $\bar{x}$ 正好為 $\{x_i\}$ 序列中的值按大至小順序排列時的中間值，此即稱為中位數；一般而言，取 N 為奇數，若該序列的個數 N 為偶數，則取最中間兩個數的平均值為該序列的中位數(亦稱為中值)。

中值濾波器的操作過程分為兩個步驟：

(1) 從訊號中的某個採樣視窗取出 N 個數據由小到大進行排序。

(2) 取該序列的中位數取代待處理的數據即可。

此外，中值濾波器的效果取決於「跨度」(N)：每個訊號濾波所適用的跨度並不一定，跨度太小，信號不夠平滑，達不到去噪效果；跨度太大，平滑效應會導致有效信號會被壓制。因此，如何選擇適當的跨度是中值濾波的關鍵，本研究所使用之跨度 N 約為 200~250 之間。

2.4 離散小波轉換之介紹

小波變換的概念是由法國工程師 Morlet 在 1974 年首先提出的，它是一個時間和頻率的局域變換，能夠有效地從訊號中提取資訊，透過伸縮或平移等運算功能，構成 $L^2(R)$ 函數空間的一組完整的基底函數，對函數或信號進行多尺度分析。小波分析為一種強大的數學工具，目前被廣泛地應用於信號處理的領域，可用一簡單的多分辨率分析小波樹狀圖來表示(圖 2.4)。

1988 年 Mallet 提出了多分辨率分析(Multi-Resolution Analysis, MRA)的概念，將所有的正交小波基的構造法統一起來，說明瞭小波的多解析度特性。小波分析不同於短時傅立葉變換在單解析度上的缺點，具有多分辨率分析的優點，在時域和頻域都可以處理訊號的局部訊息。小波變換具有下列特性：時頻局部化特性、多解析度特性以及小波基選擇的靈活性。

2.4.1 離散小波變換的推導

離散小波變換(Discrete Wavelet Transform)在數值分析和時頻分析中很有用。離散小波轉換顧名思義就是離散的輸入以及離散的輸出。

在連續小波中，考慮小波函數：

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.21)$$

其中 $b \in R$ ， $a \in R_+$ ，且 $a \neq 0$ 。

在實際運用上，由於數據處理上的問題，連續小波必須經過離散化。限制 $a > 0$ ，所得之相容性條件變為：

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\Psi}(\bar{\omega})|^2}{(\bar{\omega})} d\bar{\omega} < \infty \quad (2.22)$$

Meyer 於 1986 年發表了具有一定衰減特性之光滑小波函數，此函數之二進制尺度與平移足以表示 $L^2(R)$ 空間中之所有函數。將連續小波變換中的尺度因數 a 和平移因數 b 進行二進位之離散化，取 $a = a_0^j$ ， $b = ka_0^j b_0$ ，其中 $k, j \in Z$ 。可得離散小波函數為：

$$\Psi_{j,k}(t) = a_0^{-\frac{j}{2}} \Psi\left(\frac{t - ka_0^j b_0}{a_0^j}\right) = a_0^{-\frac{j}{2}} \Psi(a_0^{-j} t - kb_0) \quad (2.23)$$

通常我們對其進行二進制離散化，取 $a_0 = 2$ 且 $b_0 = 1$ ，則 $\Psi_{j,k}(t)$ 可表示為：

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \Psi(2^{-j} t - k) \quad (2.24)$$

此亦稱為二進制小波(Dyadic Wavelet)。

我們將離散化小波變換表示為：

$$DW_f(j, k) = \int_R f(t) \bar{\Psi}_{j,k}(t) dt \quad (2.25)$$

若用內積的方式表示則寫為：

$$DW_f(j, k) = \langle f(t), \Psi_{j,k}(t) \rangle \quad j, k \in Z \quad (2.26)$$

值得注意的是，離散小波轉換 $DW_{j,k}$ 基本上仍然將信號 $f(t)$ 經過一系列帶通濾波器而輸出，不同的是其帶通濾波器之中心頻率和帶寬由於 a 之離散取樣而成為一系列之離散值，並且濾波之後的輸出也因為 b 的離散取樣而成為若干離散取樣值。

若取具正交性之小波：

$$\langle \Psi_{m,n}, \Psi_{j,k} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{當 } m = j \text{ 且 } n = k \\ 0, & \text{當 } m \neq j \text{ 或 } n \neq k \end{cases}, \quad (2.27)$$

則對任一函數 $f(t) \in L^2(R)$ ，可經由小波轉換表示成：

$$f(t) = \sum_{n=1}^N C_V(M, n) \Phi_{M, n} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_W(m, n) \Psi_{m, n} \quad (2.28)$$

其中 Φ 代表尺度函數(Scaling function)。

當取不同之 m 時，即是將 $L^2(R)$ 分解成不同的空間，各個不同分解空間之關係可以為(Mallat, 1989a and 1989b)：

$$\begin{aligned} L^2(R) &= W_1 \oplus V_1 \\ &= W_1 \oplus W_2 \oplus V_2 \\ &= W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_M \oplus V_M \end{aligned} \quad (2.29)$$

其中 $W_i \perp V_i$ 且 $V_i = V_{i+1} \oplus W_{i+1}$ ，而 V_i 空間之訊號較 W_i 低頻。 $\Psi_{m, n}$ 與 $\Phi_{m, n}$ 分別代表 W_m 與 V_m 之正交基底。理論上，所選取之 M 足夠大時， V_M 將趨近於零空間。

2.4.2 離散小波在濾波上的應用

信號和噪訊在小波域中呈現不同的狀態，兩者的小波係數會隨著尺度的不同而產生不同的變化，隨著尺度分解的階數越多，噪聲係數的幅值會很快地衰減，而原始訊號係數的幅值基本上維持不變。濾波的重點就在於盡可能減小由噪訊所產生的係數，且盡可能地保留原始訊號的係數，最後將經過處理的小波係數重構回去，得到原始信號估計的最優化。

小波濾波的三大基本假設：

- (1) 噪訊經小波變換之後，大部分的小波係數趨近零。
- (2) 噪訊均勻地分佈在所有係數之中。
- (3) 噪訊比不至於過高[30]。

小波的信號濾波(filtering，亦可稱為去噪，de-noising)的過程可概略分為三個步驟：

- (1) 選擇一個小波分解的尺度 (階數)及小波基，進行分解計算。
- (2) 選擇一個閾值(threshold)，對各個分解尺度下的小波係數進行非線性處理。
- (3) 將處理過後的低頻及高頻係數進行重構(小波逆變換)，見圖 2.5。

普遍來說，地震訊號中的噪訊只存在於前三或四尺度的分解結果中[43]，但並無特定的判斷準則來確定小波分解的尺度，只能大概估算。

小波基的選擇又是另一門學問，一個良好的濾波效果，需要在緊支撐性、平滑性以及對稱性等達到一定的水準。然而目前階段而言，這三點不太可能同時達到滿足：緊支撐性與平滑性不可兼得，要有較好的平滑特性，則緊支撐長度需要增加；反之，緊支撐的長度較小，雖然可以保留訊號的局部特性，但是相對的平滑性也會下降。本文中，我們參照柳等人[43]的建議來選取最優小波基，採用 sym4 小波基。

在小波濾波的過程中，閾值對於濾波的效果具有決定性的影響，目前有許多文獻提出了各種閾值的選取方法及理論，例如：通用閾值法是 Dohono 和 Johnstone 將多維獨立正態變量決策理論應用於高斯噪聲模型所得出的通用閾值 $t = \sigma\sqrt{2\ln N}$ [32]；潘等人驗證了基於正態分佈的自適應閾值 $t = c\sigma$ ， $c \in [3.0, 4.0]$ [44,45]。極小化風險閾值法則利用 SURE(Stein's Unbiased Risk Estimator)法[33,46]、交叉驗證(Cross-Validation, CV)演算法[47]、廣義交叉驗證(Generalized Cross- Validation, GCV)演算法[48,49]對均方差函數進行估計以得到濾波後的結果與其真實訊號之間的差異來確定閾值.....等等。不過，每個訊號的去噪效果對閾值的反應不一，目前並沒有很明確的方法可以判別何種閾值會產生比較好的去噪效果。一般情況下，閾值的選定會採取試誤法(trial and error method)。

閾值確定後，再對小波係數進行閾值量化處理，目前主要的方法有硬閾值法及軟閾值法，其基本概念都是去除小幅值的係數，對較大幅值的係數進行收縮或保留[30~35]。硬閾值法因為有不連續性，通常會使得結果產生較大的方差，優點為可以保留信號邊緣的局部特徵，缺點為易造成偽吉布斯(Gibbs)現象。軟閾值法因為收縮性質較大，濾波結果相對平滑許多，卻容易造成濾波結果有較大的偏差，且使得邊緣模糊等失真現象。

硬閾值法的基本處理方式為當某時刻的小波變換值大於閾值 t 時將保留原值，否則置零，其公式為：

$$\hat{\theta}_{j,i} = \begin{cases} 0 & , \quad |\omega_{j,i}| \leq t \\ \omega_{j,i} & , \quad |\omega_{j,i}| > t \end{cases} \quad , \quad \text{其中 } t = \sigma\sqrt{2\ln N} \quad (2.30)$$

軟閾值法則是當某時刻的小波變換值大於閾值 t 時，將其值減去 t 值，反之則將其設為零，公式如下：

$$\hat{\theta}_{j,i} = \text{sign}(\omega_{j,i}) \cdot (|\omega_{j,i}| - t) \quad , \quad t = \sigma\sqrt{2\ln N} \quad (2.31)$$

其中 $\text{sign}(\omega_{j,i})$ 為符號函數，定義同式(2.20a)。

1995 年，Gao 提出了結合硬閾值法與軟閾值法的一種折衷形式，稱為半軟閾值法 (semisoft shrinkage) [50]，1997 年並推導出基於該方法的 Minimax 閾值[51]，至於上閾值和下閾值的選取方式，請參閱文獻[50]，於此不再贅述。在此法中，需要確定兩個閾值，會增加計算上的複雜度，但可以截長補短，保留硬閾值法及軟閾值法各自的優點。半軟閾值法的表示式如下：

$$\hat{\theta}_{j,i} = \begin{cases} 0 & , |\omega_{j,i}| \leq t_2 \\ \text{sign}(\omega_{j,i}) \frac{t_2(|\omega_{j,i}| - t_1)}{t_2 - t_1} & , t_1 < |\omega_{j,i}| \leq t_2 \\ \omega_{j,i} & , |\omega_{j,i}| > t_2 \end{cases} \quad (2.32)$$

其中 t_1 為上閾值， t_2 為下閾值。



第三章 架構 ARX 模型以及 TVARX 模型

3.1 前言

本章將介紹兩種系統識別模型。第一個是介紹如何透過連續小波轉換，將量測之訊號轉換至小波域中，並於小波域中架構量測系統之 ARX 模型(Autoregressive with exogenous input Model)，再進一步估算系統模態。第二個是移動最小平方差法(Moving Least Square method, MLS)架構 TVARX 模型(Time Varying Autoregressive with exogenous input Model)，識別系統之瞬時模態特性。此方法主要是透過數據之輸入與輸出反應架構 TVARX 模型，再進一步估計系統之瞬時模態參數。

3.2 節介紹連續小波變換之理論基礎；3.3 節介紹如何於小波域中架構 ARX 模型，並估算結構系統動態特性；3.4 節介紹以移動最小平方差法架構 TVARX 模型；3.5 節介紹瞬時模態估算的方法。

3.2 連續小波變換之理論基礎

小波變換為近十幾年來在信號處理領域中一個熱門的研究主題，目前廣泛地被運用在圖像壓縮、特徵提取、信號濾波等方面。小波變換是傅立葉(Fourier)變換的延伸，傳統的傅立葉變換因為無法描述信號的局部頻率特徵，因此不再是分析非平穩信號的有效工具。小波變換既保留了傅立葉變換的優點，亦彌補了傅立葉變換在信號分析方面的不足；因此，小波變換可視為傅立葉變換之改良。

給定一函數 $f(t) \in L^2(R)$ ，其連續小波轉換定義如下[52]：

$$W_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_R f(t) \bar{\Psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle \quad (3.1)$$

其中 $\Psi(t)$ 為母小波函數(mother wavelet)， $\bar{\Psi}(t)$ 為 $\Psi(t)$ 的共軛函數， $\Psi_{a,b}$ 為小波函數，乃是經由母小波函數 $\Psi(t)$ 伸縮和平移所形成之基底函數，其定義為：

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.2)$$

其中 a 與 b 分別為尺度因數(Scaling Factor)與平移因數(Translation Factor)。

小波逆變換的定義為：

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} W_f(a, b) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da db \quad (3.3)$$

C_ψ 的定義為：

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{(\omega)} d\omega < \infty \quad (3.3a)$$

其中 $\hat{\Psi}(\omega)$ 為 $\Psi(t)$ 之傅立葉變換。

有別於傅立葉變換中之基底函數被固定為 $e^{i\omega t}$ ，小波變換之母小波函數則有多種選擇性，但要滿足以下兩個條件：

- (1) 小波函數必須為平方可積(Square Integrable)或函數具有有限能量。
- (2) 小波函數及其各階倒數在 $t \rightarrow \infty$ 處急速下降收斂至零，即為有限支撐長度。

依式(3.1)定義，若母小波函數 $\Psi(t)$ 在時間域，可將之視為中心為 t^* ，半徑為 Δ 之窗函數， $\Psi_{a,b}$ 之中心在 $b + at^*$ ，且半徑為 $a\Delta$ 。式(3.1)表示之小波轉換，只取時間窗：

$$[b + at^* - a\Delta, b + at^* + a\Delta] \quad (3.4)$$

內 $f(t)$ 的局部訊息。式(3.4)之窗中心 t^* 及半徑 Δ 之定義分別為：

$$t^* = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt \quad (3.5)$$

$$\Delta = \frac{1}{\|f\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |f(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

其中 $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ 。

由於

$$\frac{1}{2\pi} \Psi_{a,b}(\omega) = \frac{ae^{ib\omega}}{2\pi\sqrt{|a|}} \hat{\Psi}(a\omega) \quad (3.7)$$

對式(3.1)進行傅立葉變換，可得：

$$|\widehat{W}_f(a, \omega)| = \sqrt{a} |\widehat{\Psi}(a\omega)| |\widehat{f}(\omega)| \quad (3.8)$$

其中 $\widehat{W}_f(a, \omega)$ 代表 $W_f(a, b)$ 之傅立葉變換，根據上式可定義 f 之頻率窗範圍為[53]：

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\hat{\Delta}}{a}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\hat{\Delta}}{a} \right] \quad (3.9)$$

其中 ω^* 與 $\hat{\Delta}$ 為在頻率域計算 $\widehat{\Psi}$ 之中心與半徑，定義如下：

$$\omega^* = \frac{1}{\|\widehat{f}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.10)$$

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{\|\widehat{f}\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega^*)^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

式(3.9)表示之窗具有中心頻率 $\frac{\omega^*}{a}$ 且帶寬為 $2\frac{\hat{\Delta}}{a}$ ，利用式(3.24)之小波變換，其將提供一時間頻率窗：

$$[b + at^* - a\Delta, b + at^* + a\Delta] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\hat{\Delta}}{a}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\hat{\Delta}}{a} \right] \quad (3.12)$$

$\Psi_{a,b}(t)$ 所定義之時間一頻率窗口之矩形形狀，隨伸縮因數 a 變動而改變。當 a 值大時，時間視窗較寬而頻率視窗變窄，適合分析低頻信號；而當 a 值小時，時間視窗較窄而頻率視窗寬，適合偵測高頻現象，所以能偵測出極高頻率訊號發生得時間。因此小波函數實際是一個帶通濾波器，其隨伸縮因數 a 之變動，即對應不同的視窗中心及視窗半徑。

依小波轉換之定義，可證明連續小波轉換具有以下重要性質[54]：

- (1) 線性：一個多分量信號之小波轉換等於各分量小波轉換之和。
- (2) 自相似性：對應不同尺度參數 a 和不同平移參數 b 之連續小波轉換之間是自相似。
- (3) 平移不變性：若 $f(t)$ 之小波轉換為 $W_f(a, b)$ ，則 $f(t - \tau)$ 之小波轉換為 $W_f(a, b - \tau)$ 。
- (4) 伸縮共變性：若 $f(t)$ 之小波轉換為 $W_f(a, b)$ ，則 $f(ct)$ 之小波轉換為 $W_f(ca, cb)/\sqrt{c}$ ，其中 $c > 0$ 。

3.3 建構 ARX 模型

在線性系統中，可將量測自由度間之反應表示成(Huang，1999)[55]：

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^I \Phi_i \mathbf{y}(t - i\Delta t) + \sum_{j=0}^J \Theta_j \mathbf{f}(t - j\Delta t) \quad (3.13)$$

其中 $\mathbf{y}(t)$ 為量測動力反應歷時向量（位移、速度、或加速度）；以下假設該向量亦有 n 個分量）； $\mathbf{f}(t)$ 為系統外力向量歷時； Φ_i 與 Θ_j 待定係數矩陣， Δt 為量測反應之取樣時間間隔； I 及 J 為輸入輸出之延時。以上之離散化運動方程式與多變數 ARX 之時間序列模型相當類似，式(3.13)為不考慮雜訊或誤差之 ARX 模式。

依 Huang[56]及林[57]之經驗，當量測自由度比系統自由度少很多或有雜訊時，需用很大之 I 及 J 方能得到較準確之離散化運動方程。但當採用很大之 I 及 J ，於利用最小平方差估算式(3.13)中之 Φ_i 與 Θ_j 時，常會造成數值困難。另外，採用越大之 I 會造成越多之虛假模態，增加判斷真正系統模態之困難度。若將式(3.13)進行小波轉換，於小波空間估算 Φ_i 與 Θ_j ；如此便可以適度地降低該數值困難，以較小之 I 及 J 進行估算(Huang and Su，2008)[54]。

將式(3.13)作小波變換，可得：

$$\bar{W}_y(a, b) = \sum_{i=1}^I \Phi_i \bar{W}_y(a, b - it) + \sum_{j=0}^J \Theta_j \bar{W}_f(a, b - jt) \quad (3.14)$$

此即小波域中之 ARX 模式。傳統時域下之 ARX 模式僅可藉由調整模型項數(I, J)以求得最適當之模型；而小波域下之 ARX 模型除了透過模型項數之外，可藉由選擇適當之小波函數與調整伸縮因數 a 以獲得適當之模型。

在建立式(3.14)時，可利用連續小波轉換之平移不變性；計算 $\mathbf{y}(t)$ 與 $\mathbf{f}(t)$ 之小波轉換，可同時得 $\mathbf{y}(t - i\Delta t)$ 與 $\mathbf{f}(t - j\Delta t)$ 之小波轉換函數。依小波轉換之特性，於式(3.14)中取不同之 a 值，代表取某一頻率窗內之反應建立 ARX 模式。為了簡化表示式， $\bar{W}_y(a, b - it)$ 與 $\bar{W}_f(a, b - jt)$ 分別記為 $\mathbf{y}_{\bar{w}}(a, \bar{b} - i)$ 與 $\mathbf{f}_{\bar{w}}(a, \bar{b} - j)$ 。取特定之 a 與不同之 $\bar{b}$ 建構式(3.14)，可整理得：

$$[Y^{(0)}] = [C] \begin{bmatrix} [Y] \\ [F] \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

其中

$$[Y] = \begin{bmatrix} [Y^{(1)}]^T & [Y^{(2)}]^T & \dots & [Y^{(I)}]^T \end{bmatrix}^T \quad (3.15a)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} [F^{(1)}]^T & [F^{(2)}]^T & \dots & [F^{(I)}]^T \end{bmatrix}^T \quad (3.15b)$$

$$[Y^{(i)}] = [\mathbf{y}_{\bar{w}}(a, \max - i) \quad \mathbf{y}_{\bar{w}}(a, \max - i + 1) \dots \mathbf{y}_{\bar{w}}(a, \max - i + M)] \quad (3.15c)$$

$$[C] = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \dots \Phi_I \quad \Theta_1 \quad \Theta_2 \dots \Theta_J] \quad (3.15d)$$

$$\max = \max(I, J) \quad (3.15e)$$

$[F^{(i)}]$ 之定義等同於 $[Y^{(i)}]$

欲估算結構系統之動態特性(如：自然振動頻率、模態阻尼比以及振型)，依式(3.13)知其決定於係數矩陣 $\Phi_i (i = 1, 2, \dots, I)$ 。依黃[55]之推導可知，若從 Φ_i 建構矩陣 $[G]$ ：

$$[G] = \begin{bmatrix} [0] & [I] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & [I] & [0] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [0] & [0] & [0] & [0] & \dots & [I] \\ \Phi_I & \Phi_{I-1} & \Phi_{I-2} & \Phi_{I-3} & \dots & \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

其中， $[0]$ 與 $[I]$ 分別代表維度為 $N_d \times N_d$ 之零矩陣與單位矩陣， N_d 為量測自由度。 $[G]$ 之特徵值及特徵向量相關於該結構系統之動態特性。令 $\lambda_k = a_k + ib_k$ 為 $[G]$ 之第 k 特徵值，則該結構系統之第 k 模態自然振動頻率 ω_k 及模態阻尼比 ξ_k 為：

$$\omega_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \quad (3.17)$$

$$\xi_k = -\alpha_k / \beta_k \quad (3.18)$$

其中 $\alpha_k = \frac{1}{2\Delta t} \ln(a_k^2 + b_k^2)$ ； $\beta_k = \frac{1}{\Delta t} \tan^{-1} \left(\frac{b_k}{a_k} \right)$ 。

令 $\mathbf{g}_k$ 為 $[\mathbf{G}]$ 之第 k 振態，將 $\mathbf{g}_k$ 表示成：

$$\mathbf{g}_k = \begin{bmatrix} \{\psi\}_1 \\ \{\psi\}_2 \\ \vdots \\ \{\psi\}_I \end{bmatrix}_k \quad (3.19)$$

其中 $\{\psi\}_i$ 含有 N_d 個分量，由於 $[\mathbf{G}]$ 之特殊結構，可證明：

$$\{\psi\}_i = \lambda_k \{\psi\}_{i-1} \quad (3.20)$$

即不同之 i ， $\{\psi\}_i$ 彼此之間相互平行，故任一 $\{\psi\}_i$ 均對應於結構系統之第 k 模態的振形。

3.4 以移動最小平方差法架構 TVARX 模型

傳統之基底函數展開法常用之基底函數包含：傅利葉級數(Marmarelis, 1987) [58]、小波函數(Tsatsanis and Giannakis, 1993) [59]、Legendre polynomials (Niedwiecki, 2000) [60]、Walsh 函數(Zou et. al, 2003) [61].....等。

本節將介紹以移動最小平方差法(MLS)(Liu, 2003) [62] 架構 TVARX 模型的方法以移動最小平方差法(MLS)將 TVARX 之時變係數以基底函數展開之後，先利用權重平方差估計各個節點(Nodal points)之形狀函數，再以傳統的最小平方差法估算各形狀函數對應之係數。此方法的優點為能以較少之基底展開，避開用高階多項函數所造成之數值問題。

由於多項式函數具有平滑性質，對於平滑變化之時變係數的識別結果較佳，因此本研究乃利用多項式函數，並配合最小移動平方差法，取最高幕次為 2(即 $[1 \ t \ t^2]$)，考慮指數權重函數之影響半徑(d_m)，求得函數展開之係數。

TVARX 通常被應用於架構時變系統之輸入與輸出之關係，其模型的定義為：

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^I \Phi_i(t) \mathbf{y}(t-i) + \sum_{j=0}^J \Theta_j(t) \mathbf{f}(t-j) + \mathbf{a}_n(t) \quad (3.21)$$

其中 $\mathbf{y}(t-i)$ 為在 $t-i\Delta t$ 時刻所測量得到之反應向量； $\mathbf{f}(t-j)$ 是在 $t-j\Delta t$ 時刻所測量得之外力輸入向量； $\Phi_i(t)$ 和 $\Theta_j(t)$ 為待測之時變係數矩陣； $\mathbf{a}_n(t)$ 為由量測噪訊或模型誤

差所造成之誤差向量。當利用 TVARX 模型建構非線性系統之輸入及輸出時，即是將位移或速度反應相關之系統特性(如：阻尼、勁度等)以一等價之時間顯函數來替代。

以移動最小平方差法架構 TVARX 模型，其詳細推導過程可參閱蘇(2008)[54]。在多自由度時變系統之反應中，TVARX 模型中以多項式基底函數的展開，可以矩陣形式表示：

$$\Phi_i(t) = \sum_{\hat{n}=0}^{N_i} A_{i\hat{n}} t^{\hat{n}} = \tilde{A}_i P_i \quad (3.22)$$

$$\Theta_j(t) = \sum_{\hat{n}=0}^{\bar{N}_j} B_{j\hat{n}} t^{\hat{n}} = \tilde{B}_j T_j \quad (3.23)$$

其中，

$$P_i = [[I] \ [I]t \ [I]t^2 \ \dots \ [I]t^{N_i}]^T \quad (3.23a)$$

$$T_j = [[I] \ [I]t \ [I]t^2 \ \dots \ [I]t^{\bar{N}_j}]^T \quad (3.23b)$$

$$\tilde{A}_i = [A_{i0} \ A_{i1} \ \dots \ A_{iN_i}] \quad (3.23c)$$

$$\tilde{B}_j = [B_{j0} \ B_{j1} \ \dots \ B_{j\bar{N}_j}] \quad (3.23d)$$

$A_{i\hat{n}}$ 與 $B_{j\hat{n}}$ 為待定係數矩陣， $[I]$ 為維度與係數矩陣一致之單位矩陣。式(3.22)及(3.23)中之待定係數 $A_{i\hat{n}}$ 與 $B_{j\hat{n}}$ 可以用權重最小平方差法(weighted least square)求解。

令 $\Phi_i(t_k)$ 與 $\Theta_j(t_k)$ 之真值分別為 $\bar{\Phi}_{ik}$ 與 $\bar{\Theta}_{jk}$ 。此外，待定係數可以透過誤差函數最小化求得，以求取式(3.2a) Φ 中之 $\tilde{A}_i$ 為例，將誤差函數定義為：

$$\bar{E}(t) = \sum_{l=1}^{\bar{l}_i} (\tilde{A}_i P_i(t_l) - \bar{\Phi}_{il})^T W(t, t_l) (\tilde{A}_i P_i(t_l) - \bar{\Phi}_{il}) \quad (3.24)$$

其中 $W(t, t_l) = w(t, t_l)[I]$ ； $\bar{l}_i$ 為描述 $\Phi_i(t)$ 上所取之節點總數，其值遠小於反應的總取樣點數。

使函數 $\bar{E}$ 最小化可得：

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \tilde{A}_i} = [0] \quad (3.25)$$

將誤差函數代入上式，可得：

$$\tilde{\mathbf{A}}_i \bar{\mathbf{A}}_i(t) = \bar{\mathbf{\Phi}}_i \mathbf{Q}_i(t) \quad (3.26)$$

其中，

$$\bar{\mathbf{A}}_i(t) = \sum_{l=1}^{\bar{l}_i} \mathbf{P}_i(t_l) W(t, t_l) \mathbf{P}_i(t_l)^T \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{Q}_i(t) = [Q_{i1} \ Q_{i2} \ \dots \ Q_{i\bar{l}_i}]^T \quad (3.26b)$$

$$\mathbf{Q}_{il} = \mathbf{P}_i(t_l) W(t_n, t_l) \quad (3.26c)$$

$$\bar{\mathbf{\Phi}}_i = [\bar{\Phi}_{i1} \ \bar{\Phi}_{i2} \ \dots \ \bar{\Phi}_{i\bar{l}_i}] \quad (3.26d)$$

則式中 $\tilde{\mathbf{A}}_i$ 之解為：

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \bar{\mathbf{\Phi}}_i \mathbf{Q}_i(t) \bar{\mathbf{A}}_i^{-1}(t) \quad (3.27)$$

上式所得之 $\tilde{\mathbf{A}}_i$ 為時間 t 之函數，將之代回(3.26)，可得：

$$\mathbf{\Phi}_i(t) = \bar{\mathbf{\Phi}}_i \tilde{\mathbf{\Phi}}_{p,i}(t) \quad (3.28)$$

$\tilde{\mathbf{\Phi}}_{p,i}(t)$ 類似有限函數中所稱之形狀函數(shape function) 矩陣，

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_{p,i}(t) = \mathbf{Q}_i(t) \bar{\mathbf{A}}_i^{-1}(t) \mathbf{P}_i(t)^T \quad (3.29)$$

同理， $\mathbf{\Theta}_j(t)$ 可用相同方式展開，表示成：

$$\mathbf{\Theta}_j(t) = \bar{\mathbf{\Theta}}_j \tilde{\mathbf{\Theta}}_{p,j}(t) \quad (3.30)$$

其中，

$$\bar{\mathbf{\Theta}}_j = [\bar{\Theta}_{j1} \ \bar{\Theta}_{j2} \ \dots \ \bar{\Theta}_{j\bar{l}_j}] \quad (3.30a)$$

$$\tilde{\mathbf{\Theta}}_{p,j}(t) = \mathbf{U}_i(t) \bar{\mathbf{B}}_j^{-1}(t) \mathbf{T}_j(t)^T \quad (3.30b)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_j(t) = \sum_{l=1}^{\hat{l}_j} \mathbf{T}_j(t_l) \mathbf{W}(t, t_l) \mathbf{P}_j(t_l)^T \quad (3.30c)$$

$$\mathbf{U}_j(t) = \begin{bmatrix} U_{i1} & U_{i2} & \dots & U_{j\hat{l}_j} \end{bmatrix}^T \quad (3.30d)$$

$$U_{jl} = \mathbf{T}_j(t_l) \mathbf{W}(t, t_l) \quad (3.30e)$$

$\hat{l}_j$ 為描述 $\boldsymbol{\theta}_j(t)$ 上所取之節點總數(假設 $\boldsymbol{\theta}_j(t)$ 中每一分量函數所取之節點總數相同)。在式(3.28)與式(3.30)中的未知數為 $\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i$ 和 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_j$ ，以最小平方差法對 $\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i$ 和 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_j$ 求解，其所對應的誤差函數定義為：

$$\mathbf{E} = \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} (\mathbf{a}_n(t_{\bar{n}}))^T (\mathbf{a}_n(t_{\bar{n}})) \quad (3.31)$$

其中 $\bar{N}$ 為用於分析之各自由度反應資料點數，由式(3.21)，(3.28)和(3.30)可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n(t) &= \mathbf{y}(t) - [\sum_{i=1}^I \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i(t) \mathbf{y}(t-i) + \sum_{j=0}^J \bar{\boldsymbol{\theta}}_j(t) \mathbf{f}(t-j)] \\ &= \mathbf{y}(t) - [\sum_{i=1}^I \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{p,i}(t) \mathbf{y}(t-i) + \sum_{j=0}^J \bar{\boldsymbol{\theta}}_j \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{p,j}(t) \mathbf{f}(t-j)] \\ &= \mathbf{y}(t) - [\sum_{i=1}^I \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i \boldsymbol{\Gamma}_{t,i} + \sum_{j=0}^J \bar{\boldsymbol{\theta}}_j(t) \boldsymbol{\Omega}_{t,j}] \end{aligned} \quad (3.32)$$

其中，

$$\boldsymbol{\Gamma}_{t,i} = [\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{p,i,1} \mathbf{y}(t-i)^T \quad \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{p,i,2} \mathbf{y}(t-i)^T \quad \dots \quad \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{p,i,\bar{l}_i} \mathbf{y}(t-i)^T]^T \quad (3.32a)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{t,j} = [\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{p,j,1} \mathbf{y}(t-j)^T \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{p,j,2} \mathbf{y}(t-j)^T \quad \dots \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{p,j,\bar{l}_j} \mathbf{y}(t-j)^T]^T \quad (3.32b)$$

對未知數取導數可得：

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i} = \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} 2 \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_i \mathbf{y}(t_{\bar{n}} - i)^T \left[\mathbf{y}(t_{\bar{n}}) - \left(\sum_{i=1}^I \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i \boldsymbol{\Gamma}_{t,i} + \sum_{j=0}^J \bar{\boldsymbol{\theta}}_j(t) \boldsymbol{\Omega}_{t,j} \right) \right] = [0]$$

(3.33a)

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\boldsymbol{\Theta}}_i} = \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} 2\bar{\boldsymbol{\Theta}}_i \mathbf{y}(t_{\bar{n}} - j)^T \left[\mathbf{y}(t_{\bar{n}}) - \left(\sum_{i=1}^I \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i \boldsymbol{\Gamma}_{t,i} + \sum_{j=0}^J \bar{\boldsymbol{\Theta}}_j(t) \boldsymbol{\Omega}_{t,j} \right) \right] = [0]$$

(3.33b)

將以上聯立方程組以矩陣形式表示之，可得：

$$\mathbf{V}_m^T \mathbf{F} = \mathbf{V}_m^T \mathbf{V}_m \mathbf{C}_m \quad (3.34)$$

其中，

$$\mathbf{V}_m = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{t_1,1} & \boldsymbol{\Gamma}_{t_1,2} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{t_1,I} & \boldsymbol{\Omega}_{t_1,0} & \boldsymbol{\Omega}_{t_1,1} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{t_1,J} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{t_2,1} & \boldsymbol{\Gamma}_{t_2,2} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{t_2,I} & \boldsymbol{\Omega}_{t_2,0} & \boldsymbol{\Omega}_{t_2,1} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{t_2,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_{t_{\bar{n}},1} & \boldsymbol{\Gamma}_{t_{\bar{n}},2} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{t_{\bar{n}},I} & \boldsymbol{\Omega}_{t_{\bar{n}},0} & \boldsymbol{\Omega}_{t_{\bar{n}},1} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{t_{\bar{n}},J} \end{bmatrix} \quad (3.34a)$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{y}(t_1) \ \mathbf{y}(t_2) \ \cdots \ \mathbf{y}(t_{\bar{n}})]^T \quad (3.34b)$$

$$\mathbf{C}_m = [\bar{\boldsymbol{\Phi}}_1^T \ \bar{\boldsymbol{\Phi}}_2^T \ \cdots \ \bar{\boldsymbol{\Phi}}_I^T \ \bar{\boldsymbol{\Phi}}_0^T \ \bar{\boldsymbol{\Phi}}_1^T \ \cdots \ \bar{\boldsymbol{\Phi}}_J^T]^T \quad (3.34c)$$

對式(3.34)求解即可得到每個節點之真值，代回式(3.28)即可得到此系統於某個時刻 $t=t_n$ 之時變係數 $\boldsymbol{\Phi}_i(t_n)$ 。

3.5 瞬時模態參數估算

架構 TVARX 之各個時變係數時，若取相同之多項式階數以及相同之節點數(即令 $N_1 = N_2 = \cdots = N_I = \bar{N}_0 = \bar{N}_1 = \cdots = \bar{N}_J = N_p$; $l_1 = l_2 = \cdots = l_I = \hat{l}_0 = \hat{l}_1 = \cdots = \hat{l}_J = l_n$)，則每個時變係數可以使用相同之形狀函數，使得運算過程更有效率。

TVARX 通式如式(3.21)所示，在瞬時 t 下， $\boldsymbol{\Phi}_i(t)$ 與 $\boldsymbol{\Theta}_j(t)$ 均為常數矩陣，故 TVARX 模式與非時變之 ARX 模式對等。

依非時變 ARX 模式估算動態特性之方法，令

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ \Phi_i(t) & \Phi_{i-1}(t) & \Phi_{i-2}(t) & \Phi_{i-3}(t) & \cdots & \Phi_I(t) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

時變系統中， $[G]$ 隨時間而改變。 $[G]$ 之特徵值及特徵向量式與結構系統之瞬時動態特性有關，同非時變系統之推導可知：

$$[G]\tilde{\Psi}_k = \lambda_k \tilde{\Psi}_k \quad (3.36)$$

其中 λ_k 及 $\tilde{\Psi}_k$ 為 $[G]$ 之第 k 個特徵值及特徵向量。

在時變系統中， λ_k 及 $\tilde{\Psi}_k$ 亦是時間函數，令：

$$\tilde{\Psi}_k = \begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_k^{(1)} \\ \tilde{\Psi}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{\Psi}_k^{(I)} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

其中， $\tilde{\Psi}_k^{(i)}$ 為一 $(l \times 1)$ 之向量， l 為量測自由度，且由 $[G]$ 可知：

$$\tilde{\Psi}_k^{(i)} = \lambda_k \tilde{\Psi}_k^{(i-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, I) \quad (3.37a)$$

$$\sum_{j=0}^{I-1} \tilde{\Psi}_k^{(j)} = \lambda_k \tilde{\Psi}_k^{(I)} \quad (3.37b)$$

由(3.37a)及(3.37b)可得：

$$\tilde{\Psi}_k = \begin{Bmatrix} \tilde{\Psi}_k^{(1)} \\ \lambda_k \tilde{\Psi}_k^{(1)} \\ \lambda_k^2 \tilde{\Psi}_k^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda_k^{I-1} \tilde{\Psi}_k^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

及 $\tilde{\Psi}_k^{(1)}$ 代表量測自由度之第 k 瞬時模態。

式(3.35)中之特徵值常為複數或成對之共軛根。令 $\lambda_k = a_k + ib_k$ ，則結構系統之瞬

時擬自然振動頻率及阻尼比為：

$$\tilde{\beta}_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \quad , \quad \xi_k = \alpha_k / \tilde{\beta}_k \quad (3.39)$$

$$\text{其中, } \bar{\beta}_k = \frac{1}{\Delta t} \tan^{-1} \frac{b_k}{a_k} \quad , \quad \alpha_k = \frac{1}{2\Delta t} \ln(a_k^2 + b_k^2) \quad (3.40)$$

Δt 為時間增量(及取樣頻率之倒數)，通常 $\tilde{\beta}_k$ 亦稱為瞬時擬自然振動頻率(instantaneous pseudo-undamped circular natural frequency)。



第四章 數值模擬之系統識別結果分析

4.1 前言

本研究的數值模擬結構系統受地震反應分為兩大部分討論，分別是非時變系統(Time-invariant system)與時變系統(Time-variant system)考慮濾波對於系統識別的影響。由於時變系統的行為較非時變系統複雜得多，因此如果濾波方法及系統識別適用於時變系統的話，那麼該分析方法同樣也應適用於非時變系統；可知若是分析方法對於非時變系統是可行的，則我們將可以試著將其方法套用至時變系統，看看是否同樣可行；但假若該分析方法不適用於非時變系統，那麼將同樣也不適用於時變系統，分析流程如圖 4.1 所示。

為瞭解本研究所採用之濾波方法對於非時變系統與時變系統的識別效果，將透過一系列之數值模擬反應對此流程進行驗證：非時變系統使用七層樓之剪力結構物之數值模擬地震反應，建構 ARX 模型以進行系統識別；時變系統使用五層樓剪力構架之數值模擬地震反應建構 TVARX 模型；接著再探討信號經過濾波之後的識別結果與未濾波前的識別結果之差異。4.2 節分別介紹非時變系統的無噪訊反應(NSR=0%，NSR 為噪訊比，即 Noise-Signal Ratio)和含噪訊反應(NSR=10%、20%、30%、40%)的識別結果；4.3 節介紹非時變系統經過第二章所述之三種濾波方法濾波過後的系統識別結果；4.4 節分別介紹時變系統的無噪訊反應和含噪訊反應(NSR=1%、3%、5%)以及其經過濾波器處理後的識別結果。

4.2 非時變系統之數值模擬的系統識別分析結果

圖 4.2a 與圖 4.2b 為本研究中七層樓之剪力構架示意圖，其數值模擬地震反應的取樣頻率均為 250Hz，且每層樓的質量 m_i 為 0.1 噸，勁度 k_i 為 80kN/m，其中 $i=1\sim7$ 。圖 4.3a~圖 4.3g 所示為非時變系統之七層樓剪力構架之第一層樓到第七層樓中，其訊號不含噪訊與含不同噪訊比時之反應。

4.2.1 小波函數之影響

本節參考蘇(2008)[54]，介紹以 Meyer 小波函數為基底來架構 ARX 模型時， a 值的選取方法。Meyer 小波函數具有頻率轉換函數之數學表示式，且具有很類似帶通濾

波器之特性。因此，以下探討利用 Meyer 函數處理含有噪訊的反應。

Meyer 小波之小波函數 Ψ_M 定義於頻率域：

$$\hat{\Psi}_M(\omega) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} e^{i\omega/2} \sin \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{3}{2\pi} |\omega| - 1 \right) \right] & , \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \\ (2\pi)^{-1/2} e^{i\omega/2} \cos \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{3}{4\pi} |\omega| - 1 \right) \right] & , \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0 & , |\omega| \leq \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} \right] \end{cases} \quad (4.1)$$

其中， $v(s)$ 為構造 Meyer 小波之輔助函數：

$$v(s) = s^4(35 - 84s + 70s^2 - 20s^3) \quad s \in [0,1] \quad (4.2)$$

$\hat{\Psi}_M(\omega)$ 為有限支撐長度之正交小波。因此，配合此小波函數之”主要頻率保留區間”，即可決定出適當之 a 值。

由式(4.1)顯示， $\hat{\Psi}_M(\omega)$ 在 $2\pi/3 \leq \omega \leq 8\pi/3$ 之區間才有值。若定義頻率分量為最大者之 90% 以上之頻率區間為”主要頻率保留區間”，由式(4.1)可得此區間為 $[0.5348, 0.9311]$ 。因此，對尺度因數 a 之 Meyer 小波函數的”主要頻率保留區間”範圍為 $[0.5348/a, 0.9311/a]$ 。此小波函數之頻率域中，除了定義之區間外，其餘部份均為 0。由此可知，除非選擇 a 值所對應之”主要頻率保留區間”涵蓋欲識別之振動頻率，否則將難以獲取準確之結果。

4.2.2 無噪訊反應之識別結果

我們利用 Meyer 小波為基底來建構 ARX 模型，結構之動態特性理論值與識別結果如表 4.1 所示，其中取 $a=1$ 之連續小波轉換信號進行識別，不論高頻或是低頻部分，皆在 $(I,J) = (3,3)$ 的時候就可以識別出結果。在識別之頻率及阻尼比與理論值幾乎沒有誤差，且 MAC 值四捨五入取到小數點第二位皆等於 1.00，如此可知訊號在沒有噪訊的狀況下，系統識別結果的品質非常良好。

4.2.3 含噪訊反應對於識別結果之影響

一般量測資料基本上都會有雜訊，隨著噪訊增加，識別的品質會降低，甚至可能

會導致識別不出結果。通常我們以噪訊比(Noise-Signal Ratio, NSR)來表示噪訊的多寡。NSR 可定義為不含噪訊之原始信號與噪訊的均方根之比值。為瞭解存在噪訊對識別結果品質的影響，於數值分析所得之各自由度相對加速度及輸入反應中分別加入不相關白噪聲(White Noise)，使得 NSR=10%、20%、30%、40%，如圖 4.2 與圖 4.3，再分別對這幾組訊號進行識別，並與未含噪訊之分析結果做比較。

同樣地，選用 Meyer 小波函數為基底來架構 ARX 模型，為使不同噪訊含量的訊號在相同參數條件下識別，以進行識別結果和(I,J)值的高低之比較。我們將 α 值固定選用 1.2、0.4、0.24、0.17、0.14、0.13、0.12 (α 值的選擇係根據帶寬範圍來選取最適合的 α 值，方法如 4.2.1 節所示) 及配合增加 ARX 模式中(I,J)階數，分別識別第一模態到第七模態。

識別之頻率及阻尼比與理論值的誤差分別在 2%以及 20%以內之結果，即可視為「準確」的識別結果。表 4.3~表 4.6 所列之結果(參看未濾波欄位之結果)為當識別頻率及阻尼比與理論值的誤差範圍分別設定在 2%及 20%以內時所用之(I,J)階數。很明顯地，(I,J)值相較於無噪訊者皆需顯著提高，方能得到準確的識別結果。含 10%噪訊的訊號，(I,J)值提高至(4,4)~(10,10)；含 20%噪訊的訊號，(I,J)值提高至(4,4)~(10,10)；含 30%噪訊的訊號，(I,J)值提高至(4,4)~(11,11)；含 40%噪訊的訊號，(I,J)值提高至(4,4)~(12,12)；亦可以看出，當識別地表加速度以及高頻部分時，(I,J)值皆明顯提高。提高(I,J)階數除了增加計算時間之外，亦將增加虛擬模態數，導致確認真正模態之困難。

4.3 濾波後對於非時變系統的數值模擬反應識別結果之影響與比較

以下將分別介紹三種濾波方法濾波後的識別結果分析。本節將七層樓剪力結構物之數值模擬地震反應分別加上 10%、20%、30%、40%的白噪聲，經過幾種濾波法濾波之後，進行系統識別，並將之識別結果與未濾波前的識別結果做比較。4.2.2 節與 4.2.3 節已大略敘述過參數的設定以及理論值與含噪訊號未經濾波的識別情形，對於濾波過後的含噪訊號，在建構 ARX 模型時，採用與 4.2.3 節相同的參數設定以及頻率和阻尼的誤差範圍。

4.3.1 卡氏濾波器濾波後的識別結果

本節將討論經過卡氏濾波後的系統識別結果。在此稱 GR 值為「猜測的噪訊值」(在濾波之前，先假設 GR 值分別為 10%、20%、30%、40%，其中 GR 值即代表式(2.9)

中的 R_t ，設定如 2.2.1 節所示)。先假設一個噪訊值，欲觀察猜測的噪訊含量是否與實際上的噪訊含量一致，而此過程對於過濾噪訊與系統識別的結果又將是否會有影響。表 4.2 所示為經卡氏濾波後的噪訊比，其估算方法為先將濾波過後的訊號減去不含噪訊的真實訊號，此即等同於未被濾掉之殘餘的噪訊，其標準差與真實訊號的標準差的比值就是該表所示之噪訊比。

若是只單純看訊號濾波過後的噪訊比，可以觀察到一些現象：以噪訊含量 10% 的訊號為例，當 GR 設定為 10% 的時候，噪訊比降低最多，表示濾波的效果比較好；若是 GR 值設定太高(例：GR=20%、30%、40%)，經卡氏濾波器濾波過後所估算出的噪訊比反而會提高到比訊號本身所含有的噪訊還要高。同理，可以看出經卡氏濾波器處理的訊號中，含噪訊號在濾波過程中所假設的 GR 值如果大於 NSR，可能會造成濾波過後所估算的噪訊值超過訊號本身的含噪量，而訊號較低頻部分之此現象更為顯著。

表 4.3 至表 4.6 所示為含不同噪訊比的反應經濾波後之識別結果，為得準確之識別結果(即識別之頻率及阻尼比與理論值的誤差分別在 2% 以及 20% 以內)，含 10% 噪訊之訊號在濾波前其(I,J)階數需為(4,4)~(11,11)，而在不同 GR 值的情況下濾波後的訊號，其大部分的(I,J)值降至(2,2)~(4,4)；同理，含 20% 噪訊之訊號在濾波前其所需之(I,J)階數為(4,4)~(12,12)，濾波後其大部分的(I,J)值降至(2,2)~(8,8)；而含 30% 噪訊之訊號在濾波前其(I,J)階數為(4,4)~(11,11)，濾波後其大部分的(I,J)值降至(2,2)~(7,7)；至於含 30% 噪訊之訊號則是在濾波前其(I,J)階數為(4,4)~(12,12)，濾波後其大部分的(I,J)值降至(2,2)~(7,7)。可以看出，即使不同的 GR 值和 NSR 值之間的組合，經卡氏濾波器處理之後，其大部分的(I,J)階數皆下降至(2,2)~(7,7)，少數組合在較高頻及較低頻的部分(I,J)值會達到(6,6)~(8,8)，但都低於濾波前的(I,J)值，因此 GR 值的設定會影響濾波後的噪訊比，但對系統識別結果的影響並無直接關聯。

4.3.2 中值濾波器濾波後的識別結果

表 4.7 所示為含噪反應經中值濾波後的噪訊比，其估算方法同 4.3.1 節所述。在七層樓剪力構架的反應訊號中，經中值濾波器處理後顯示，對於含噪訊 10% 的反應而言，其濾波後的噪訊比基本上沒有太大的改變，甚至在低樓層部分有不減反增的趨勢，不過此不合理的現象只存在於含噪訊 10% 的反應中，在含噪訊 20%、30%、40% 的反應中，就沒有這種不合理的現象。含噪訊 20% 的反應其 NSR 可降低約 25%；含噪訊 30% 的反應其 NSR 約可減少三成；而噪訊 40% 的反應之 NSR 約降低至 35% 左右。

表 4.8 所示為七層樓剪力構架其含 10% 噪訊的反應，其濾波前與經中值濾波器處理後之系統識別結果，未濾波時所需(I,J)階數為(4,4)~(11,11)，濾波後其所需的(I,J)值

降至為(2,2)~(6,6)；而表 4.9 為含 20%噪訊的訊號在未濾波前所需的(I,J)階數為(4,4)~(10,10)，濾波後(I,J)值降至(2,2)~(8,8)；表 4.10 所示為 NSR=30%的訊號在未濾波前(I,J)階數需為(4,4)~(11,11)，濾波後(I,J)值降至(3,3)~(10,10)；至於表 4.11 表示當 NSR=40%時，訊號在未濾波時其所需的(I,J)階數為(4,4)~(12,12)，濾波後(I,J)階數降至(3,3)~(10,10)。

4.3.3 離散小波濾波後的識別結果

訊號和噪訊在小波域中的小波係數會隨著尺度 n (參看圖 2.4)的不同而產生不同的變化：隨著尺度的增加，噪聲的係數其幅值會很快地衰減，而原始訊號係數的幅值基本上維持不變。濾波的重點就在於盡可能得到原始信號估計的最優化。因為上述的原因，尺度 n 的選擇對於濾波效果而言是非常重要的。然而，目前在小波領域裡面，並沒有一個明確的指標來做為小波分解尺度的依據，本研究採用 AIC 值作為小波尺度分解的依據，先將訊號經小波分解，經八次操作分別將其分解至第一到第八階層(第一次只分解到第一層， $n=1$ ；第二次只分解到第二層， $n=2$ ；第三次分解到第三層， $n=3$ ；……以此類推直到 $n=8$ ，同一個訊號總共分解八次，可參考圖 2.4)，將每一次分解過程中，各階層所含的高頻係數(即圖 2.4 中的 $cD1\sim cDn$ 部分，其中 $n=1\sim 8$)剔除，只保留低頻係數(即圖 2.4 中的 cAn 部分，其中 $n=1\sim 8$)，再將訊號重構回去分別計算每一次操作所得的 AIC 值，同一個訊號會經過八次操作並分別計算出八個 AIC 值。取八個 AIC 值中，其最小值所對應的尺度作為該訊號所需分解的最佳尺度的依據。AIC 值的公式如下(推導請詳閱[63])：

$$AIC = N \log V_N(\hat{\theta}_N) + 2p \quad (4.3)$$

其中 N 為資料總長度； $V_N(\hat{\theta}_N)$ 為該訊號本身的方均根誤差；在二進制小波中，分量長度會隨尺度增加而逐漸減半，因此在本研究中，取 p 為小波分解至尺度 n 時，其分量長度為 $p = N/2^n$ 。

得到該訊號的最佳分解尺度之後(本研究中所使用之數值模擬反應，經上述計算操作所得之最佳分解尺度為 $n=3$ 或 $n=4$)，將原始訊號重新經小波分解至其最佳尺度 n ，將所分解出來的高頻係數剔除後，只保留低頻係數(圖 2.4 中的 cAn 部分)再重構回去，此即訊號經小波濾波後的結果。

利用 NSR 做為去噪效果的評估指標，表 4.12 顯示了離散小波濾波後的結果：七層樓剪力構架之反應幾乎在每個自由度的噪訊都至少減少了五成以上。表 4.13

至表 4.16，將訊號的理論值(無雜訊)、濾波後的結果、與未濾波的識別結果放在一起比較，可以看出識別所需之(I,J)階數隨著噪訊的含量而升高，在高頻和最低頻的部分，所需之(I,J)階數也明顯比其他自由度來得高。在低頻部分，以含噪訊 10%的反應為例，未濾波的訊號其識別所需的(I,J)階數為(4,4)~(11,11)，而經小波濾波後，(I,J)=(2,2)~(4,4)即可識別出準確的結果。在濾波前，含噪訊 20%的訊號若要識別出準確結果，其所需的(I,J)階數為(4,4)~(10,10)，含噪訊 30%的訊號所需的(I,J)階數為(4,4)~(11,11)，含噪訊 40%的訊號的所需的(I,J)階數則為(4,4)~(12,12)，而這三者再在濾波過後其所需的(I,J)值皆下降(2,2)~(4,4)。

4.3.4 濾波後對於非時變系統的數值模擬反應識別分析的綜合比較

表 4.17 是非時變系統中七個自由度的地震歷時反應在 NSR=10%、20%、30%、40%的情況下，經過上述三種濾波器處理過後的識別結果，與未濾波及理論值做的綜合比較。可以看出經濾波器處理過後，識別出結果的(I,J)值明顯低於未濾波的識別結果，其中又以卡氏濾波器以及離散小波的濾波效果較為良好，兩者的效果幾乎相當；在識別高頻時，離散小波的效果比起卡氏濾波器又略勝一籌。由表 4.17 的比較結果顯示，中值濾波器處理此類訊號時，在識別分析時的表現效果較另外兩者不佳，相較於另外兩者濾波器而言，其(I,J)階數需要較高方能識別出結果；此外，我們可以發現訊號在最高頻以及最低頻的部分較難以識別，往往需要較高的(I,J)階數才可以得到滿意的結果，同時亦可以預見這種現象應該也同樣會出現在時變系統中，將在稍後的章節會進一步討論到。

4.4 時變系統之數值模擬反應的系統識別分析結果

圖 4.4a 以及圖 4.4b 顯示本研究所用之五層樓剪力構架示意圖，取樣頻率為 250Hz，且每層樓的質量 m 為 0.1 噸， $k_1=80\text{kN/m}$ ，勁度 $k(t)$ 以及阻尼比 $\xi(t)$ 隨時間而改變，函數如下：

$$k(t)=m\left\{2\pi\left[1-0.5\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)\right]\right\}^2, \quad 0 \leq t \leq 30 \quad (4.4)$$

$$\xi(t) = 5 + 2.5 \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right), \quad 0 \leq t \leq 30 \quad (4.5)$$

為得知不同的噪訊比以及經不同濾波器處理後的一系列時變系統之地震數值模擬反應之識別效果，本節的五個自由度時變系統的訊號中，在建構 TVARX 模型時其各項參數設定均為一致：取模型階數(I,J) = (2,2)~(90,90)、Nodal point $N_p=15$ 、支撐長度 $d_m=20$ 、多項式的幕次為 2 次方。

4.4.1 識別動態特性準確指標

為比較理論模態與識別模態之吻合程度，可以利用 MAC(Model Assurance Criterion)值為指標(Allemang 與 Brown, 1983)，其定義為：

$$MAC(\psi_{iI}, \psi_{iT}) = \frac{|\{\psi_{iI}^*\}^T \{\psi_{iT}\}|^2}{\{\psi_{iI}^*\}^T \{\psi_{iI}\} \{\psi_{iT}^*\}^T \{\psi_{iT}\}} \quad (4.6)$$

其中 $\{\psi_{iI}^*\}$ 與 $\{\psi_{iT}\}$ 分別為識別與理論之第 i 模態。由上式可知，當兩模態完全一致時，MAC=1；當兩模態差異甚大時，則 MAC 值趨近於零。由此可知，若是兩模態彼此越接近，則 MAC 值將越趨近於 1。

本節即是利用此觀念來將時變系統的 TVARX 模型繪成頻率-歷時圖與阻尼比-歷時圖，藉以判別識別結果。取識別分析結果的振動頻率和阻尼比分別與理論值的誤差範圍小於 2%及 20%，在同一個時間點下，此範圍內所識別出來的所有結果，再取其 MAC 值最接近於 1.00 的識別結果即所求。值得注意的是，在圖 4.6 至圖 4.18 中，直線段部分即表示只有直線段的兩端點有識別出來，而在該區段內沒有識別出合理範圍內的結果，並非表示識別出的點剛好連成一直線。

4.4.2 無噪訊與含噪訊數值模擬反應之識別結果

圖 4.5a 至圖 4.5e 為五層樓的時變系統數值模擬反應每一層樓(一層樓為一個自由度)當其反應不含噪訊時，以及於數值分析所得之各自由度的相對加速度及輸入反應中分別加入白噪聲，使得其 NSR 分別等於 1%、3%、5%時的反應圖。

圖 4.6 所示為五個自由度之時變系統不含雜訊時所建構之 TVARX 模型理論值及其系統識別結果。在高頻及低頻部分，識別出的頻率及阻尼比部分與訊號的理論值幾乎沒有誤差，如此可知時變系統中，數值模擬訊號在沒有噪訊的狀況下，對系統識別結果的品質幾乎沒有影響。

對 $NSR=1\%$ 、 3% 、 5% 這幾組訊號建構 TVARX 模式以進行系統識別分析，與訊號之理論值做比較，如圖 4.7、圖 4.11 與圖 4.15 所示，分別顯示了在 $NSR=1\%$ 、 3% 、 5% 之下所識別出來的五個模態的頻率-歷時圖及阻尼比-歷時圖。討論識別瞬時自然振動頻率：如圖 4.7 在 $NSR=1\%$ 的情況下，低頻部分第一到第三個模態的識別結果與理論值相當吻合，高頻部分在第四個模態的瞬時自然振動頻率開始在頭尾出現一些誤差稍大的值，但是到了第五個模態，開始出現少許直線段，如 4.4.1 節所述，代表已經有一些點是識別不出來的；而在 $NSR=3\%$ (圖 4.11) 與 $NSR=5\%$ (圖 4.15) 的情況下，僅在第一模態和第二模態有良好的識別效果，至第三模態起，已經出現誤差較大的值並且出現直線段，代表該部分無法識別出結果，在第四模態及第五模態有更多部分無法被識別出來，而且此現象發生於 $NSR=5\%$ 的反應中比 $NSR=3\%$ 的狀況來得更明顯，可以見得此類訊號的噪訊越大，其識別效果越差，但在低頻部分的第一模態及第二模態其識別情形都相當良好。

4.4.3 濾波後對於時變系統的數值模擬反應識別結果之影響與比較

本節探討本研究中使用之二種濾波方法處理時變系統的含噪訊號之後，對於系統識別分析效果的影響。

比較經由不同濾波器處理同樣 NSR 條件下的數值模擬反應的識別結果：討論 $NSR=1\%$ 的數值模擬地震反應，圖 4.8~圖 4.10 所示分別表示 $NSR=1\%$ 的訊號經不同濾波器處理後所分析出的系統識別結果，高頻部分在第四模態(參看圖 4.8~圖 4.10 之第四橫排的圖)開始出現識別不穩定的現象，而第五模態仍然有直線段的現象產生，即使 (I,J) 已經提高到 $(90,90)$ ，三種濾波器處理後對含噪訊為 1% 的訊號識別效果並沒有顯著的影響。

$NSR=3\%$ 的數值模擬地震反應中，如圖 4.12~圖 4.14 所示，可以看出中值濾波器和離散小波濾波所處理後的識別效果相當，而其中卡氏濾波器處理後的高頻部分第五模態其識別出的結果顯示其直線段較另外兩種濾波器多出許多，代表訊號經卡氏濾波器處理後，其高模態部分的識別效果較差。圖 4.16~圖 4.18 為 $NSR=5\%$ 的數值模擬反應經不同濾波器濾波過的頻率和阻尼比的歷時圖，可以看出當 NSR 提高，從第三個模態開始就出現了較多的直線段(其代表意義如同 4.4.1 節所述)，而高頻部分的第四和第五模態明顯比 NSR 較低的數值模擬反應還要難以識別，其中卡氏濾波器和中值濾波器在第一模態到第四模態的表現所差無幾，而卡氏濾波器在識別第五模態部分又比中值濾波器差一點，而離散小波濾波法雖然識別效果仍然有待加強，但比另外兩種濾波器的效果還要好。推測可能是由於卡氏濾波器在處理此類型資料時的過程中，會過濾掉

過多的高頻信號，導致訊號在高頻部分失真，因此許多高頻部分識別不出來；當然，亦可能是目前所選擇之參數設定的問題，造成卡氏濾波器在處理這類型數據時表現較不佳。



第五章 結論與建議

5.1 結論

本文針對時變系統以及非時變線性系統訊號，利用目前使用上較為普遍的三種濾波方法，分別是卡氏濾波器、離散小波濾波法以及中值濾波器；進行其對系統識別結果影響之比較與討論。

5.1.1 非時變系統

為探討本研究所採用之濾波方法對於非時變系統的識別效果之影響，透過一系列之數值模擬反應對此流程進行驗證，研究中利用七層樓的剪力結構物之數值模擬地震反應，經過前述各濾波方法的參數設定並處理之後，建構 ARX 模型以進行系統識別分析，探討訊號經過濾波之後的識別結果與未濾波前的識別結果兩者之間的差異。為瞭解濾波對識別結果品質的影響，將含噪訊號進行濾波與系統識別，與未含噪訊之識別結果以及未濾波的訊號之識別分析準確結果做比較，並以 ARX 模式識別出準確結果所需的(I,J)階數的高低作為濾波是否有效的判斷標準；得到準確的識別結果所需的(I,J)階數越低代表訊號越容易識別，意即濾波及識別效果越好，反之亦然。

研究中的識別分析結果顯示，經濾波器處理過後的訊號，識別出結果的(I,J)值皆明顯低於未濾波的訊號之識別結果，其中又以卡氏濾波器以及離散小波的濾波效果較良好，兩者的效果幾乎相當；在識別高頻時，離散小波的效果又略勝卡氏濾波器一籌。而中值濾波器處理此類訊號時，在識別分析時的表現效果比另外兩者差，相較於另外兩者濾波器而言，其(I,J)階數需要提高方能識別出結果；此外，我們可以發現不論是哪種濾波方法，訊號在最高頻以及最低頻的部分較難以識別，往往需要較高的(I,J)階數才可以得到滿意的結果。綜觀而言，本研究中所使用之濾波法的參數設定對於非時變系統數值模擬地震反應，離散小波濾波方法在整體表現最為傑出，其次是卡氏濾波器，而中值濾波器的表現相較於另外兩者則顯得較為普通。

5.1.2 時變系統

在時變系統方面，本研究採用五層樓的剪力結構物之數值模擬地震反應，經前述

之各濾波方法的參數設定並處理之後，建構 TVARX 模型以進行系統識別分析，探討訊號經過濾波之後的識別結果與未濾波前的識別結果兩者之間的差異。將噪訊比分別為 1%、3%、5%之訊號進行濾波與系統識別，與未含噪訊之識別結果以及未濾波的訊號之識別分析結果做比較。

由於提高(I,J)階數會增加計算時間，亦將增加虛擬模態數，導致確認真正模態之困難度，當(I,J)階數提高時，雖然可能增加識別結果的品質，但是對於實際使用上並無太大的幫助，因此本研究中對於時變系統部分的 TVARX 模型，將最高的(I,J)階數設定為(90,90)，即使識別結果不理想，假如再繼續增加(I,J)階數，雖然有可能可以得到較準確之結果，但對於判斷濾波效果和識別結果已無太大地意義。

參考本研究中所採用之含噪訊的數值模擬地震反應經不同濾波器濾波過的頻率和阻尼比的歷時圖，可以看出當訊號的噪訊含量越高，其濾波前後皆越難以識別出準確的結果，但在低頻部分(第一模態到第三模態)的識別情形都相當良好。由第四章的分析結果顯示，當噪訊含量為 1%時，其濾波後幾乎沒有對識別結果產生任何影響。噪訊含量為 3%和 5%的訊號中，訊號經三種濾波器處理過後對於第四模態和第五模態皆可以使其有稍微好一些的識別結果，但卡氏濾波器濾波後對於訊號的第五模態識別效果為三者中最差的。

在本研究中的濾波器所採用的參數設定情形下，訊號經濾波器處理後，系統識別高頻部分，中值濾波器和離散小波濾波的效果差不多，而其中整體表現又為離散小波濾波法表現較佳。在時變系統中，離散小波濾波法雖然對於識別效果仍然幫助不大，但還是比另外兩種濾波器的效果還要好，其次是中值濾波器，卡氏濾波器應用於此類地震反應的識別效果則最差。

5.2 建議

訊號的類型千百種，每一種類型的訊號所適用的濾波方法都不盡相同，除了由理論發展之外，更有不少新的嘗試。在地震反應訊號的領域中，目前對於此類訊號的濾波這部分並沒有很確切的定論及準則，仍屬嘗試階段；本研究採用之三種濾波器為目前普遍使用的三種濾波方法，其濾波的過程中演算法與參數設定，大部分皆遵循前人發展的方法來操作。

在非時變系統中，其濾波效果對於識別分析的影響都有不錯的效果，可以識別出含噪量達到 40%的訊號，然而非時變系統的訊號屬於理想狀態，若是將來想要應用於實際情況，必須要考慮時變系統的訊號，才比較符合工程上的狀況。

時變系統中，本研究所採用的三種濾波方法對於高頻部分(第四模態和第五模態)

的識別分析其成效都不彰。三種濾波器對於時變系統中的高頻部分之識別效果皆不甚理想，推測可能是由於濾波器在處理此類型資料時的過程中，會過濾掉過多的高頻信號，導致訊號在高頻部分失真，因此許多高頻部分的點識別不出來。可以歸納出這三種使用較為廣泛的濾波方法並不適用於此類地震反應的訊號，建議可以改良濾波器的操作演算過程或是深入探討參數的設定，進行比較或分析，盡可能保留較多的高頻的訊號，以期對系統識別分析有所助益。



參考文獻

1. Kalman, R. E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering Vol. 82, pp. 35-45, 1960.
2. Kalman, R. E., Bucy, R.S., "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory", Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, Vol. 83: pp. 95-107, 1961.
3. The Technical Staff, The Analytic Sciences Corporation, Applied Optimal Estimation, Gelb, A., MIT Press, Cambridge, MA., 1974.
4. Lewis, F. L., Optimal Estimation : with An Introduction to Stochastic Control Theory, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
5. Brown, R. G., Hwang, P. Y. C., Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1992.
6. Jacobs, O. L. R., Introduction to Control Theory, 2nd Edition, Oxford University Press, 1993.
7. Harvey, A. C., Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
8. Welch, G., Bishop, G., "An Introduction to the Kalman Filter", Computer and Information Science, 7(1), pp.1-16, 2001.
9. Ljung, L., "Asymptotic Behavior of the Extended Kalman Filter as a Parameter Estimator for Linear Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, 24(1), pp. 36~50, 1979.
10. Hoshiya, M., Saito, E., "Structural Identification by Extended Kalman Filter", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 110(12), pp.1757-1771, 1984.
11. Roman, S., "Adaptive Extended Kalman Filter with Recursive Noise Covariance Identification Applied to the Fermentation Processes", Modeling, Simulation & Control C : Environmental, Biomedical, Human & Social System, 10(2), pp.52-64, 1987.
12. Julier, S. J., Uhlmann, J. K., "A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems", The University of Oxford, 1997.
13. Van der Merwe, R., Wan, E. A., "The Square-Root Unscented Kalman Filter for State and Parameter Estimation", pp. 3461-3464, Salt Lake City, UT , USA, May 2001.
14. 張滿生、張學莊，「卡爾曼濾波器及其工程應用」，計算技術與自動化，第二十七卷，第一期，136~139頁，2008年3月。

15. Bednar, J. B., "Applications of Median Filtering to Deconvolution, Pulse Estimation, and Statistical Editing of Seismic Data", Geophysics, 48(12), pp. 1598-1610, 1983.
16. Brownrigg, D. R. K., "The Weighted Median Filter", Communications of the ACM, 27(8), pp.807-818, Aug 1984.
17. Duncan, G., Beresford, G., "Some Analyses of 2-D Median F-K Filters", Geophysics, 60(4), pp. 1157-1168, Aug 1995.
18. Duncan, G., Beresford, G., "Median Filter Behavior with Seismic Data", Geophysical Prospecting, 43(3), pp.329-345, Apr 1995.
19. Liu, C., Liu, Y., Yang, B., Wang, D., Sun, J., "A 2-D Multistage Median Filter to Reduce Random Seismic Noise", Geophysics, 71(5), pp. 105-110, Sep 2006.
20. Liu, Y., Liu, C., Wang, D., "A 1-D Time-Varying Median Filter for Seismic Random, Spike-Like Noise Elimination", Geophysics, 74(1), pp.17-24, 2009.
21. Bednar, J. B., Watt, T., "Alpha-Trimmed Means and Their Relationship to Median Filters", IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 32(1), pp.145-153,1984.
22. Lee,Y. H., Kassam, S. A., "Generalized Median Filtering and Related Nonlinear Filtering Techniques", IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 33(3), pp.672~683, Jun 1984.
23. Fitch, J. P., Coyle, E. J., Gallagher, N. C., "The Analog Median Filter", IEEE Transactions on Circuits and System, 33(1), pp.94~102, Jan 1986.
24. Mallat S., Hwang W. L., "Singularity Detection and Processing with Wavelets", IEEE Transactions Information Theory, 38(2), pp.617-643, 1992.
25. Mallat S., Zhong S., "Characterization of Signals from Multiscale Edges", IEEE Transactions Pattern Analysis and Machine Intelligence , 45(7), pp.710-732, 1992.
26. Lu J., et al. "Noise Reduction with Multiscale Edge Representation and Perceptual Criteria", In:Proceedings of IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, pp.555~558, Victoria , BC, Canada , Oct 1992.
27. Lu J., et al. "MR Image Filtering with a Multiscale Edge Representation" In: Proceedings of the 11th Annual Meeting , Society of Magnetic Resonance in Medicine, pp. 471, Berlin,1992.
28. Simoncelli E. P., et al. "Shiftable Multiscale Transforms", IEEE Transactions Information Theory, 38(2), pp.587~607 ,1992.
29. Moulin, P., "Wavelet Thresholding Techniques for Power Spectrum Estimation", IEEE

- Transaction on Signal Processing, 42(11), pp.3126-3136, 1994.
30. Dohono, D. L., "Wavelet Shrinkage and W.V.D-a Ten Minute Tour", Stanford University, Progress in Wavelet Analysis and Applications, pp.109-128, 1993.
 31. Dohono, D. L., Johnstone I. M., "Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage", Biometrika, 81(3), pp.425-455, 1994.
 32. Dohono, D. L., "De-Noising by Soft-Thresholding", IEEE Transactions Information Theory, 41(30), pp.613-627, 1995.
 33. Dohono D. L., Johnstone I. M., "Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage", Journal of the American Statistical Association, 90(432), pp.1200-1224 , 1995.
 34. Dohono D. L., Johnstone I. M., "Minimax Estimation via Wavelet Shrinkage", Annals of Statistics, 26(3), pp.879-921 , 1998.
 35. Dohono D. L., Johnstone I. M., "Ideal De-noising in an Orthonormal Basis Chosen from a Library of Bases", Comptes Rendus Academies of Sciences, Series I, Paris, Vol.319, pp.1317-1322, 1994.
 36. Kirm, H., Pesquet, J. C., "On the Statistics of Best Bases Criteria", Wavelets in Statistic of Lecture Notes in Statistic, Springer-Verlag, New York, pp.193~207, 1995.
 37. Moulin, P., "Wavelet Thresholding Techniques for Power Spectrum Estimation", IEEE Transactions Signal Processing, 42(11), pp.3126-3136, 1994.
 38. Loupas, T., McDicken, W. N., Allan, P. L., "An Adaptive Weighted Median Filter for Speckle Suppression in Medical Ultrasonic Images", IEEE Transactions on Circuits and Systems, 36(1), pp.129-135, Jan 1989.
 39. 趙彥青、吳繼偉、蕭蘊詩，「最優中值濾波跨度計算及其應用」，計算機輔助工程，第十五卷，第一期，59~62頁，2006年3月。
 40. 熊翥，「地震數據數字處理應用技術」，北京:石油工業出版社，192~194頁，1993年。
 41. 李小紅、汪曉兵、肖都建，「中值在地震資料處理中的應用」，石油物探，第四十三卷，第三期，248~250頁，2004年。
 42. 馮暄、劉財、楊寶俊，「中值濾波器對信號相位和形狀影響的研究」，石油物探，第四十一卷，第一期，37~41頁，2002年。
 43. 柳建新、韓世禮、馬捷，「小波分析在地震資料去噪中的應用」，地球物理學進展，第二十一卷，第二期，541~545頁，2006年6月。
 44. 張磊、潘泉、張洪才、戴冠中，「小波域濾波閾值參數c的選取」，電子學報，第

二十九卷，第三期，400~402頁，2001年。

45. Zhang L., Bao P., “Denoising by Spatial Correlation Thresholding”, IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 13(6), pp.535-538, 2003.
46. Zhang, X. P., “Adaptive Denoising Based on SURE Risk”, IEEE Signal Processing Letters, 5(10), pp.265-267, Oct 1998.
47. Nason G. P., “Wavelet Shrinkage Using Cross-Validation”, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol.58, pp.463-479, 1996.
48. Jansen, M., et al. “Generalized Cross Validation for Wavelet Thresholding”, Signal Processing, 56(1), pp.33-34, 1997.
49. Jansen, M., Bultheel, A., “Multiple Wavelet Threshold Estimation by Generalized Cross Validation for Images with Correlated Noise”, IEEE Transactions on Image Processing, 8(7), pp. 947-953, Jul 1999.
50. Gao, H. Y., Bruce A. G., “WaveShrink and Semisoft Shrinkage”, StatSci Reserch Report No.39, 1995.
51. Gao, H. Y., Bruce A. G., “WaveShrink with Firm Shrinkage”, Statistica Sinica, 7(4), pp.885-874, 1997.
52. Daubechies, I., Ten Lectures on Wavelets, Society for Industrial & Applied, USA, May 1992.
53. Chui, C. K., An Introduction to Wavelets, Academic Press, Inc. 1992.
54. 蘇威智，「以時間序列模型識別結構之模態參數」，博士論文，土木工程研究所，國立交通大學，2008年。
55. Huang, C. S., Yang, Y. B., Lu, L. Y., and Chen, C. H., “Dynamic Testing and System Identification of a Multi-Span Highway Bridge”, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 28(8), pp. 857-878, Aug 1999.
56. Huang, C. S., “Structural Identification from Ambient Vibration Measurement Using the Multivariate AR Model”, Journal of Sound and Vibration, 241(3), pp.337-359, Mar 2001.
57. 林志嘉，「橋梁現地實驗與動力特性系統識別」，碩士論文，土木工程研究所，國立台灣大學，2000年。
58. Marmarelis, V. Z., “Nonlinear and Nonstationary Modeling of Physiological System: an Overview in Advanced Methods of Physiological System Modeling”, Biomedical Simulations Resource, Vol. 1, pp.1-24,1987.
59. Tsatsanis, M. K., Giannakis, G. B., “Time-Varying System Identification and Model

- Validation Using Wavelets”, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Process, 41(12), pp.3512-3523, 1993.
60. Niedwiecki, M., Identification of Time-Varying Processes, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 2000.
61. Zou, R., Wang, H., Chon, K.H., “A Robust Time-Varying Identification Algorithm Using Basis Function”, Annals of Biomedical Engineering, 31(7), pp.840-853, 2003.
62. Liu, G. R., Mesh Free Methods- Moving Beyond the Finite Element Method, CRC Press, New York, 2003.
63. Grimbale, M. J., et al., “System Identification”, Prentice Hall, New York, 1988.



附表

表 4.1 七層樓剪力構架之非時變系統反應其理論值的系統識別結果

7 DOF		Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
頻率 f (Hz)	理論值	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	識別值	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
阻尼比 ξ (%)	理論值	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%
	識別值	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%
MAC 值		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

表 4.2 七層樓剪力構架含噪訊之非時變系統反應經卡氏濾波過後之噪訊比

NSR		10%	20%	30%	40%
GR=10%	7F	5.56%	9.01%	12.87%	16.83%
	6F	5.72%	8.95%	12.82%	16.76%
	5F	5.88%	9.14%	12.80%	16.71%
	4F	6.05%	9.20%	12.91%	16.89%
	3F	6.21%	9.39%	13.03%	17.19%
	2F	6.98%	9.78%	13.35%	17.28%
	1F	8.99%	11.46%	14.51%	18.32%
	a _g	8.29%	10.97%	14.27%	17.67%
NSR		10%	20%	30%	40%
GR=20%	7F	8.97%	10.44%	11.76%	14.68%
	6F	9.11%	10.33%	12.08%	14.61%
	5F	9.84%	11.05%	12.46%	15.02%
	4F	10.46%	11.40%	12.59%	15.55%
	3F	11.24%	12.38%	12.76%	16.26%
	2F	13.37%	14.12%	14.25%	17.78%
	1F	18.82%	19.56%	20.56%	22.28%
	a _g	16.58%	17.41%	18.70%	20.13%
NSR		10%	20%	30%	40%
GR=30%	7F	12.77%	13.62%	14.69%	16.05%
	6F	12.86%	13.43%	14.72%	15.98%
	5F	14.06%	14.63%	15.60%	16.87%
	4F	15.02%	15.38%	16.47%	17.91%
	3F	16.40%	16.97%	17.55%	19.15%
	2F	19.60%	19.89%	20.55%	22.01%
	1F	27.80%	28.15%	28.61%	29.62%
	a _g	24.15%	24.57%	25.24%	26.10%
NSR		10%	20%	30%	40%
GR=40%	7F	16.26%	16.85%	17.49%	18.40%
	6F	16.26%	16.58%	17.47%	18.27%
	5F	17.91%	18.21%	18.84%	19.59%
	4F	19.19%	19.36%	20.07%	21.11%
	3F	21.13%	21.47%	21.75%	22.88%
	2F	25.29%	25.45%	25.78%	26.86%
	1F	35.87%	36.07%	36.38%	37.02%
	a _g	30.86%	31.12%	31.52%	32.20%

表 4.3 七層樓剪力構架含 10% 噪訊之訊號與經卡氏濾波後之系統識別結果

GR	NSR=10%	Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
10%	(I,J)	(5,5)	(3,3)	(3,3)	(2,2)	(3,3)	(4,4)	(5,5)
	f	0.68	2.00	3.18	4.26	5.17	5.89	6.17
	ξ	5.88%	5.01%	4.94%	5.85%	5.64%	5.95%	5.56%
20%	(I,J)	(4,4)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(4,4)
	f	0.68	2.00	3.18	4.26	5.17	5.87	6.21
	ξ	5.58%	5.24%	4.96%	5.19%	5.68%	5.12%	5.38%
30%	(I,J)	(3,3)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(3,3)
	f	0.67	1.98	3.18	4.26	5.17	5.83	6.17
	ξ	5.58%	4.97%	4.94%	5.13%	5.44%	4.20%	5.64%
40%	(I,J)	(3,3)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(3,3)	(3,3)
	f	0.68	1.97	3.18	4.26	5.17	5.77	6.15
	ξ	5.23%	4.88%	4.93%	5.11%	5.34%	4.21%	5.40%
未濾波	(I,J)	(8,8)	(4,4)	(4,4)	(4,4)	(8,8)	(11,11)	(10,10)
	f	0.68	2.00	3.20	4.27	5.14	5.76	6.21
	ξ	5.02%	5.56%	5.00%	5.23%	5.01%	5.30%	4.71%
不含 噪訊	(I,J)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	ξ	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%

表 4.4 七層樓剪力構架含 20% 噪訊之訊號與經卡氏濾波後之系統識別結果

GR	NSR=20%	Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
10%	(I,J)	(6,6)	(4,4)	(4,4)	(4,4)	(6,6)	(4,4)	(8,8)
	f	0.68	1.97	3.19	4.25	5.18	5.84	6.40
	ξ	5.96%	4.76%	5.04%	5.09%	4.90%	4.47%	5.91%
20%	(I,J)	(6,6)	(4,4)	(2,2)	(2,2)	(4,4)	(4,4)	(8,8)
	f	0.68	2.00	3.19	4.30	5.19	5.88	6.31
	ξ	5.16%	5.01%	4.90%	5.77%	5.47%	4.75%	5.59%
30%	(I,J)	(5,5)	(4,4)	(2,2)	(2,2)	(4,4)	(2,2)	(4,4)
	f	0.68	1.98	3.19	4.28	5.17	5.84	6.29
	ξ	5.74%	4.85%	4.86%	5.20%	5.08%	5.76%	4.22%
40%	(I,J)	(5,5)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(3,3)
	f	0.68	2.01	3.19	4.27	5.20	5.79	6.26
	ξ	5.33%	4.80%	4.82%	5.06%	5.88%	5.15%	5.31%
未濾波	(I,J)	(10,10)	(6,6)	(4,4)	(4,4)	(7,7)	(7,7)	(12,12)
	f	0.68	1.99	3.20	4.28	5.19	5.89	6.14
	ξ	5.67%	5.03%	5.80%	5.09%	5.62%	5.48%	4.68%
不含 噪訊	(I,J)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	ξ	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%

表 4.5 七層樓剪力構架含 30% 噪訊之訊號與經卡氏濾波後之系統識別結果

GR	NSR=30%	Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
10%	(I,J)	(7,7)	(4,4)	(3,3)	(3,3)	(6,6)	(3,3)	(6,6)
	f	0.68	1.98	3.21	4.27	5.08	5.91	6.36
	ξ	5.63%	5.05%	5.34%	5.02%	5.09%	5.23%	4.22%
20%	(I,J)	(6,6)	(3,3)	(2,2)	(3,3)	(4,4)	(3,3)	(4,4)
	f	0.68	2.03	3.20	4.25	5.21	5.86	6.23
	ξ	5.35%	5.76%	5.45%	5.00%	5.20%	5.62%	4.02%
30%	(I,J)	(6,6)	(4,4)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(7,7)
	f	0.68	1.97	3.20	4.25	5.20	5.91	6.26
	ξ	5.03%	4.64%	5.06%	5.03%	5.94%	5.19%	5.28%
40%	(I,J)	(5,5)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.68	1.99	3.20	4.25	5.17	5.88	6.12
	ξ	5.71%	4.91%	4.95%	5.07%	5.74%	5.06%	5.81%
未濾波	(I,J)	(11,11)	(7,7)	(6,6)	(4,4)	(8,8)	(7,7)	(10,10)
	f	0.68	1.98	3.20	4.28	5.13	5.76	6.12
	ξ	5.79%	4.81%	5.58%	5.14%	5.83%	4.76%	4.10%
不含 噪訊	(I,J)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	ξ	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%

表 4.6 七層樓剪力構架含 40% 噪訊之訊號與經卡氏濾波後之系統識別結果

GR	NSR=40%	Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
10%	(I,J)	(7,7)	(4,4)	(4,4)	(3,3)	(6,6)	(3,3)	(5,5)
	f	0.68	1.99	3.19	4.25	5.11	5.71	6.20
	ξ	5.93%	5.20%	5.57%	4.84%	5.13%	5.96%	5.03%
20%	(I,J)	(6,6)	(4,4)	(2,2)	(3,3)	(5,5)	(3,3)	(4,4)
	f	0.68	1.97	3.20	4.21	5.06	5.88	6.18
	ξ	5.48%	4.83%	5.75%	4.61%	4.72%	3.40%	4.83%
30%	(I,J)	(6,6)	(3,3)	(2,2)	(3,3)	(6,6)	(2,2)	(3,3)
	f	0.68	2.01	3.20	4.21	5.26	5.80	6.28
	ξ	5.00%	5.86%	5.54%	4.08%	5.39%	5.53%	5.75%
40%	(I,J)	(6,6)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(4,4)	(2,2)	(3,3)
	f	0.68	2.00	3.19	4.25	5.10	5.73	6.22
	ξ	4.82%	5.52%	5.38%	4.41%	5.24%	4.87%	5.26%
未濾波	(I,J)	(12,12)	(7,7)	(6,6)	(4,4)	(8,8)	(7,7)	(8,8)
	f	0.68	1.99	3.20	4.28	5.13	5.86	6.25
	ξ	5.63%	5.04%	5.94%	4.92%	5.62%	4.68%	5.84%
不含 噪訊	(I,J)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	ξ	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%

表 4.7 七層樓剪力構架含噪訊之非時變系統反應經中值濾波過後之噪訊比

Mode \ NSR	10%	20%	30%	40%
7 th floor	9.04%	13.26%	17.76%	22.63%
6 th floor	9.04%	13.03%	17.92%	22.64%
5 th floor	9.62%	13.58%	17.98%	22.58%
4 th floor	10.31%	14.16%	18.62%	23.08%
3 rd floor	11.43%	14.72%	19.17%	23.68%
2 nd floor	12.85%	16.15%	19.93%	24.15%
1 st floor	17.40%	19.61%	23.32%	27.10%
a _g earth	15.29%	18.03%	21.28%	26.10%

表 4.8 七層樓剪力構架含 10% 噪訊之訊號與經中值濾波後之系統識別結果

NSR=10%		Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
中值濾波	(I,J)	(6,6)	(4,4)	(2,2)	(2,2)	(4,4)	(4,4)	(6,6)
	f	0.68	1.97	3.19	4.26	5.17	5.74	6.23
	ξ	5.35%	4.81%	5.20%	5.49%	5.94%	5.80%	5.79%
未濾波	(I,J)	(8,8)	(4,4)	(4,4)	(4,4)	(8,8)	(11,11)	(10,10)
	f	0.68	2.00	3.20	4.27	5.14	5.76	6.21
	ξ	5.02%	5.56%	5.00%	5.23%	5.01%	5.30%	4.71%
不含噪訊	(I,J)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	ξ	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%

表 4.9 七層樓剪力構架含 20% 噪訊之訊號與經中值濾波後之系統識別結果

NSR=20%		Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
中值濾波	(I,J)	(7,7)	(4,4)	(2,2)	(3,3)	(6,6)	(4,4)	(8,8)
	f	0.68	1.98	3.20	4.28	5.20	5.88	6.12
	ξ	5.91%	4.96%	5.98%	5.63%	5.38%	5.98%	3.52%
未濾波	(I,J)	(10,10)	(6,6)	(4,4)	(4,4)	(7,7)	(7,7)	(10,10)
	f	0.68	1.99	3.20	4.28	5.19	5.89	6.14
	ξ	5.67%	5.03%	5.80%	5.09%	5.62%	5.48%	4.68%
不含噪訊	(I,J)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	ξ	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%

表 4.10 七層樓剪力構架含 30% 噪訊之訊號與經中值濾波後之系統識別結果

NSR=30%		Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
中值濾波	(I,J)	(10,10)	(4,4)	(3,3)	(3,3)	(7,7)	(4,4)	(7,7)
	f	0.68	1.99	3.21	4.28	5.17	5.86	6.14
	ξ	5.38%	5.09%	5.82%	5.25%	5.12%	5.06%	4.62%
未濾波	(I,J)	(11,11)	(7,7)	(6,6)	(4,4)	(8,8)	(7,7)	(10,10)
	f	0.68	1.98	3.20	4.28	5.13	5.76	6.12
	ξ	5.79%	4.81%	5.58%	5.14%	5.83%	4.76%	4.10%
不含噪訊	(I,J)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	ξ	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%

表 4.11 七層樓剪力構架含 40% 噪訊之訊號與中值濾波後之系統識別結果

NSR=40%		Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
中值濾波	(I,J)	(10,10)	(4,4)	(4,4)	(3,3)	(7,7)	(4,4)	(6,6)
	f	0.68	2.00	3.20	4.26	5.17	5.90	6.29
	ξ	5.35%	5.40%	5.90%	4.63%	4.25%	5.73%	5.72%
未濾波	(I,J)	(12,12)	(7,7)	(6,6)	(4,4)	(8,8)	(7,7)	(8,8)
	f	0.68	1.99	3.20	4.28	5.13	5.86	6.25
	ξ	5.63%	5.04%	5.94%	4.92%	5.62%	4.68%	5.84%
不含噪訊	(I,J)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	ξ	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%

表 4.12 七層樓剪力構架含噪訊之非時變系統反應經離散小波濾波過後之噪訊比

Mode \ NSR	10%	20%	30%	40%
7 th floor	4.59%	7.76%	11.09%	14.48%
6 th floor	4.88%	7.75%	11.22%	14.43%
5 th floor	5.02%	7.91%	11.06%	14.31%
4 th floor	5.16%	8.07%	11.17%	14.51%
3 rd floor	5.29%	8.08%	11.35%	15.03%
2 nd floor	5.84%	8.43%	11.48%	14.64%
1 st floor	8.45%	10.41%	13.10%	16.28%
a _g earth	4.59%	7.76%	11.09%	14.48%

表 4.13 七層樓剪力構架含 10% 噪訊之訊號與離散小波濾波後之系統識別結果

NSR=10%		Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
小波濾波	(I,J)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(3,3)	(4,4)
	f	0.68	1.97	3.19	4.26	5.17	5.74	6.23
	ξ	5.35%	4.81%	5.20%	5.49%	5.94%	5.80%	5.79%
未濾波	(I,J)	(8,8)	(4,4)	(4,4)	(4,4)	(8,8)	(11,11)	(10,10)
	f	0.68	2.00	3.20	4.27	5.14	5.76	6.21
	ξ	5.02%	5.56%	5.00%	5.23%	5.01%	5.30%	4.71%
不含噪訊	(I,J)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	ξ	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%

表 4.14 七層樓剪力構架含 20% 噪訊之訊號與離散小波濾波後之系統識別結果

NSR=20%		Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
小波濾波	(I,J)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(3,3)	(4,4)
	f	0.68	1.98	3.20	4.28	5.20	5.88	6.12
	ξ	5.91%	4.96%	5.98%	5.63%	5.38%	5.98%	3.52%
未濾波	(I,J)	(10,10)	(6,6)	(4,4)	(4,4)	(7,7)	(7,7)	(10,10)
	f	0.68	1.99	3.20	4.28	5.19	5.89	6.14
	ξ	5.67%	5.03%	5.80%	5.09%	5.62%	5.48%	4.68%
不含噪訊	(I,J)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	ξ	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%

表 4.15 七層樓剪力構架含 30% 噪訊之訊號與離散小波濾波後之系統識別結果

NSR=30%		Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
小波濾波	(I,J)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(3,3)	(4,4)
	f	0.68	1.99	3.21	4.28	5.17	5.86	6.14
	ξ	5.38%	5.09%	5.82%	5.25%	5.12%	5.06%	4.62%
未濾波	(I,J)	(11,11)	(7,7)	(6,6)	(4,4)	(8,8)	(7,7)	(10,10)
	f	0.68	1.98	3.20	4.28	5.13	5.76	6.12
	ξ	5.79%	4.81%	5.58%	5.14%	5.83%	4.76%	4.10%
不含噪訊	(I,J)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	ξ	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%

表 4.16 七層樓剪力構架含 40% 噪訊之訊號與離散小波濾波後之系統識別結果

NSR=40%		Mode						
		1	2	3	4	5	6	7
小波濾波	(I,J)	(4,4)	(2,2)	(3,3)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)
	f	0.68	2.00	3.20	4.26	5.17	5.90	6.29
	ξ	5.35%	5.40%	5.90%	4.63%	4.25%	5.73%	5.72%
未濾波	(I,J)	(12,12)	(7,7)	(6,6)	(4,4)	(8,8)	(7,7)	(8,8)
	f	0.68	1.99	3.20	4.28	5.13	5.86	6.25
	ξ	5.63%	5.04%	5.94%	4.92%	5.62%	4.68%	5.84%
不含噪訊	(I,J)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	f	0.67	1.97	3.18	4.26	5.15	5.82	6.23
	ξ	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%

表 4.17 七層樓剪力構架含噪訊之非時變系統反應訊號經三種濾波方法處理後的系
識別結果綜合比較

NSR	Mode	1	2	3	4	5	6	7
10%	Kalman filter	(3,3)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(3,3)
	Median filter	(6,6)	(4,4)	(2,2)	(2,2)	(4,4)	(4,4)	(6,6)
	Wavelet	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(3,3)	(4,4)
	未濾波	(8,8)	(4,4)	(4,4)	(4,4)	(8,8)	(11,11)	(10,10)
20%	Kalman filter	(5,5)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(3,3)
	Median filter	(7,7)	(4,4)	(2,2)	(3,3)	(6,6)	(4,4)	(8,8)
	Wavelet	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(3,3)	(4,4)
	未濾波	(10,10)	(6,6)	(4,4)	(4,4)	(7,7)	(7,7)	(10,10)
30%	Kalman filter	(5,5)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	Median filter	(10,10)	(4,4)	(3,3)	(3,3)	(7,7)	(4,4)	(7,7)
	Wavelet	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(3,3)	(4,4)
	未濾波	(11,11)	(7,7)	(6,6)	(4,4)	(8,8)	(7,7)	(10,10)
40%	Kalman filter	(6,6)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(4,4)	(2,2)	(3,3)
	Median filter	(10,10)	(4,4)	(4,4)	(3,3)	(7,7)	(4,4)	(6,6)
	Wavelet	(4,4)	(2,2)	(3,3)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)
	未濾波	(12,12)	(7,7)	(6,6)	(4,4)	(8,8)	(7,7)	(8,8)
0%	理論值	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)	(3,3)

附圖

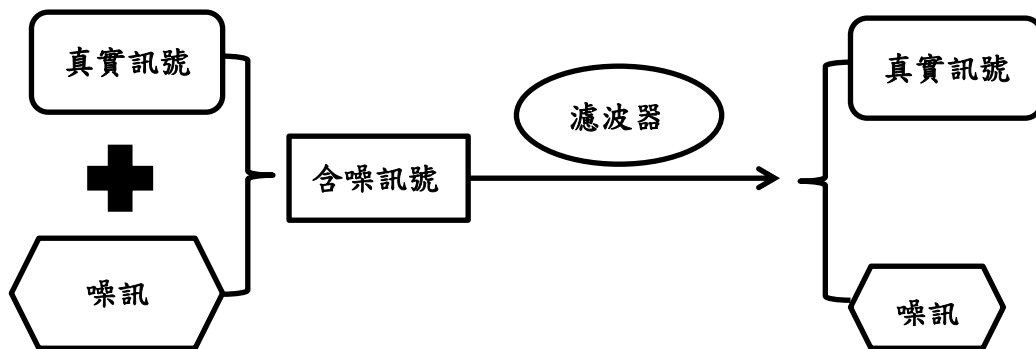


圖 2.1 含噪訊號的濾波流程

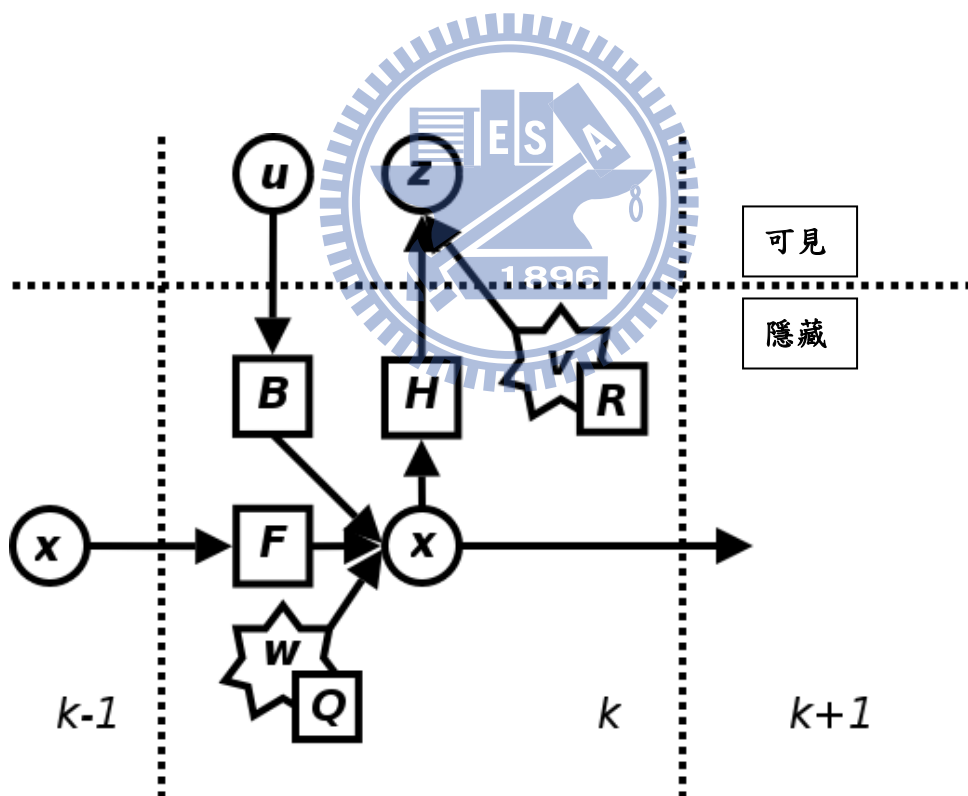


圖 2.2 卡氏濾波器之模型示意圖

(資料來源：http://zh.wikipedia.org/wiki/File:Kalman_filter_model.png
作者：CIPHERGOth , translated by Jacktance)

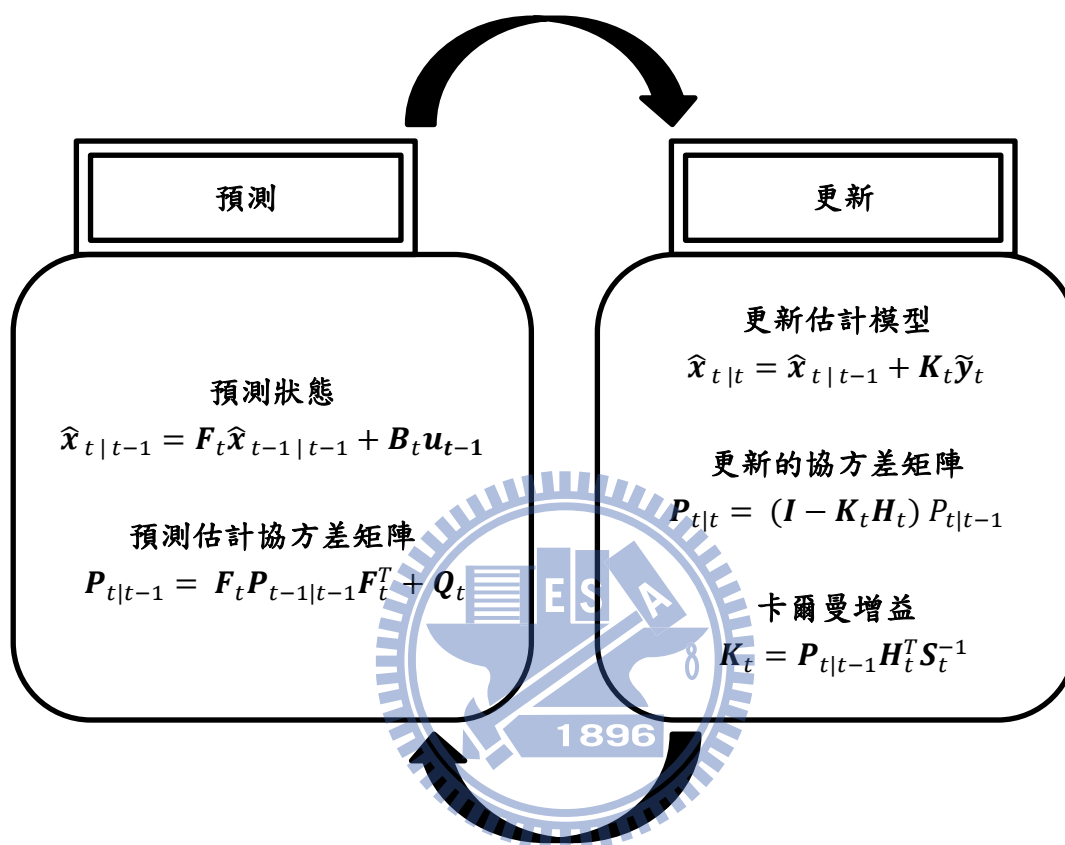


圖 2.3 卡爾曼濾波器之分析流程

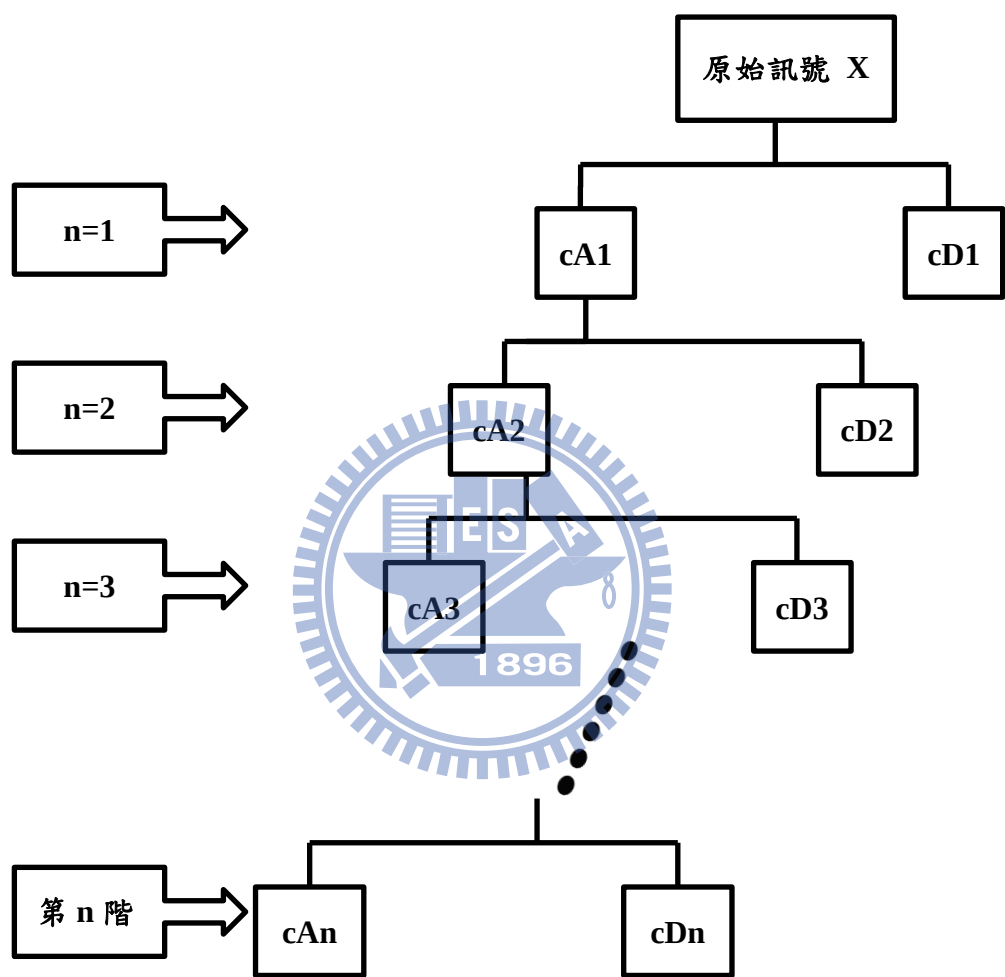


圖 2.4 小波分析樹狀圖

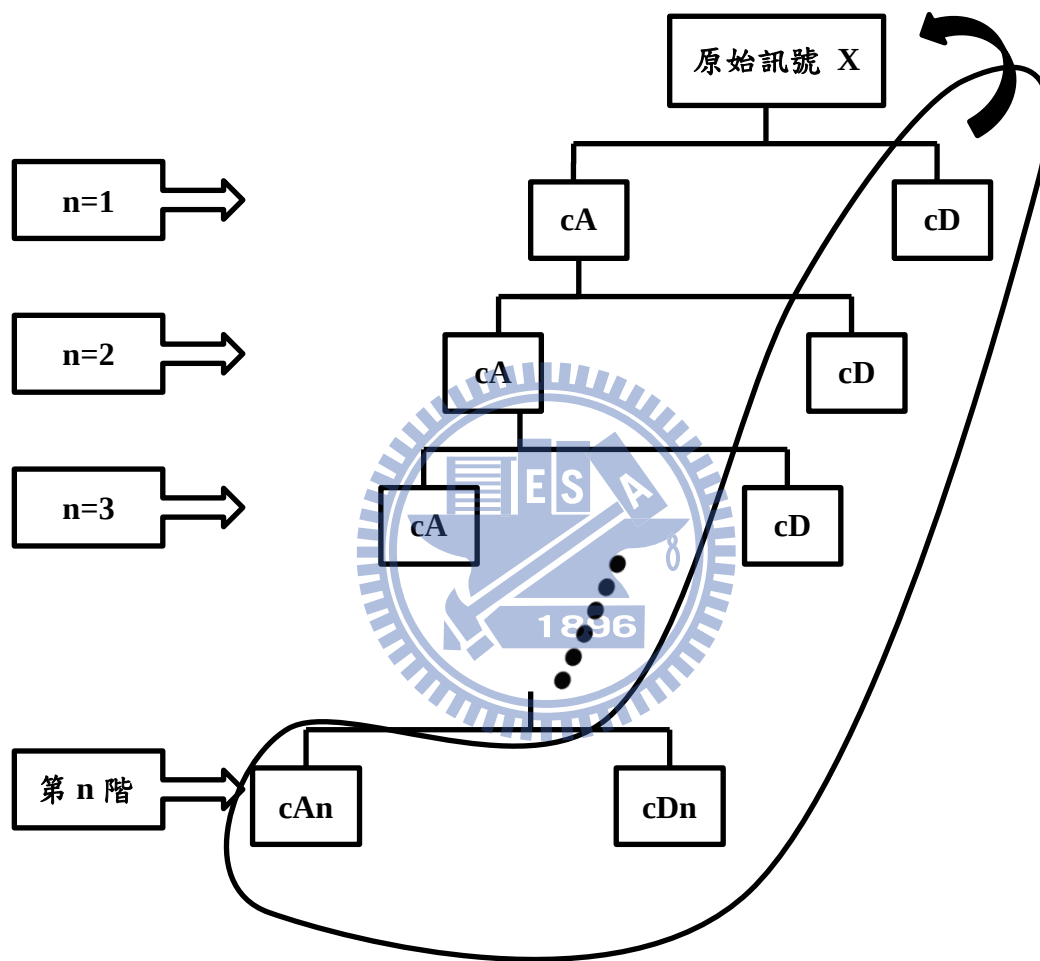


圖 2.5 小波重構示意圖

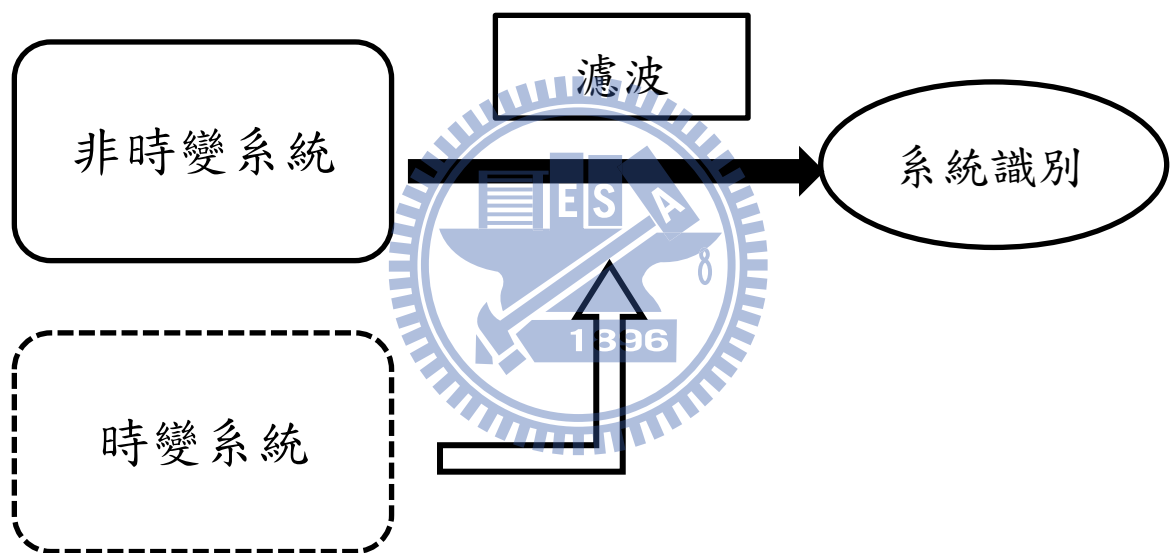


圖 4.1 濾波與系統識別分析流程

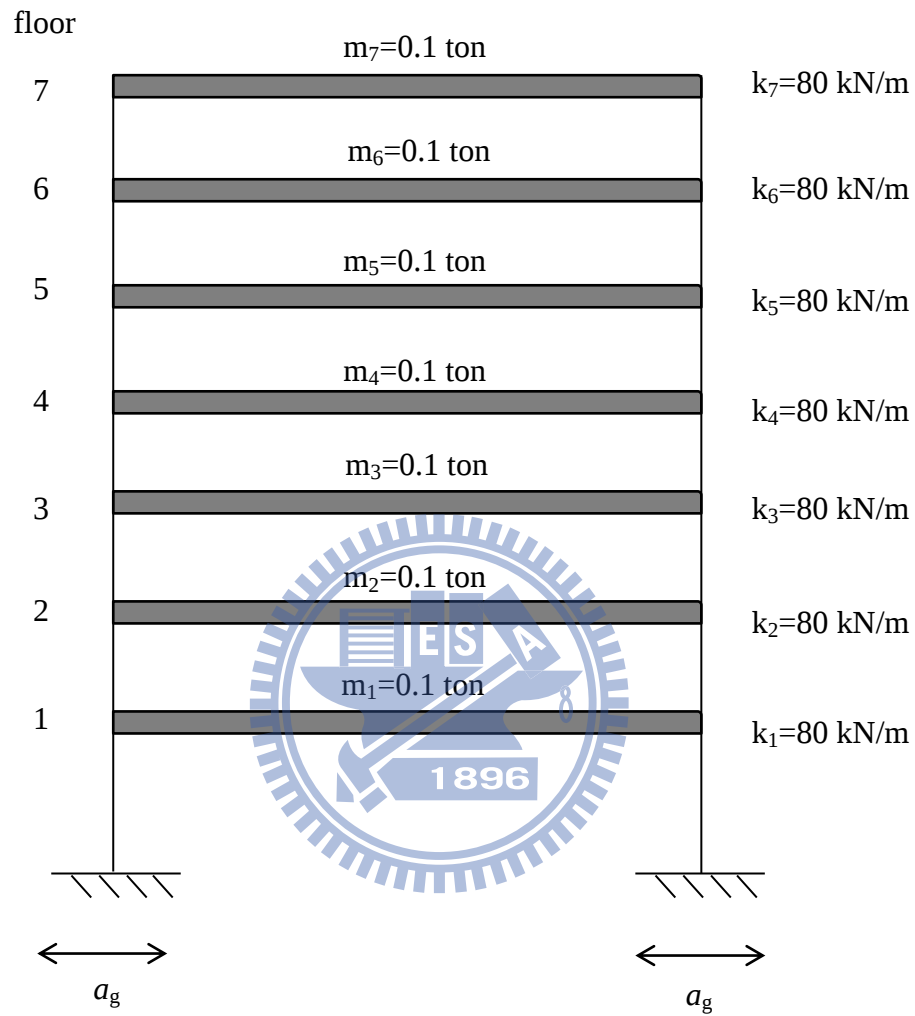


圖 4.2 a 七層樓之剪力構架示意圖

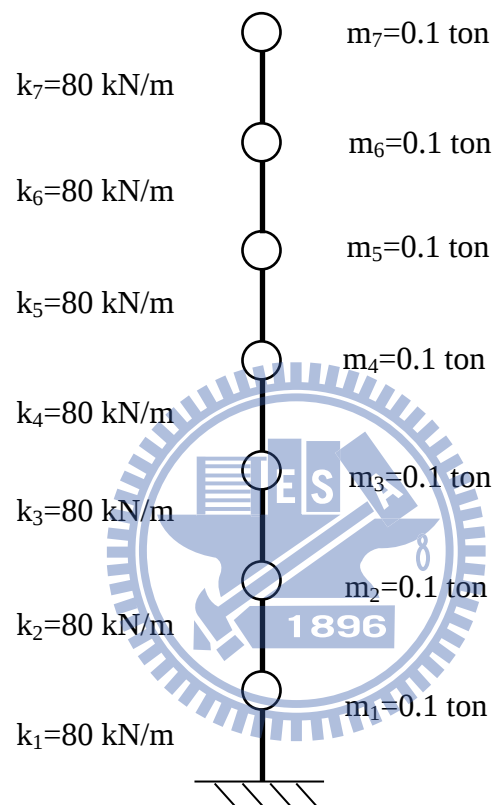


圖 4.2 b 七層樓之剪力構架示意圖

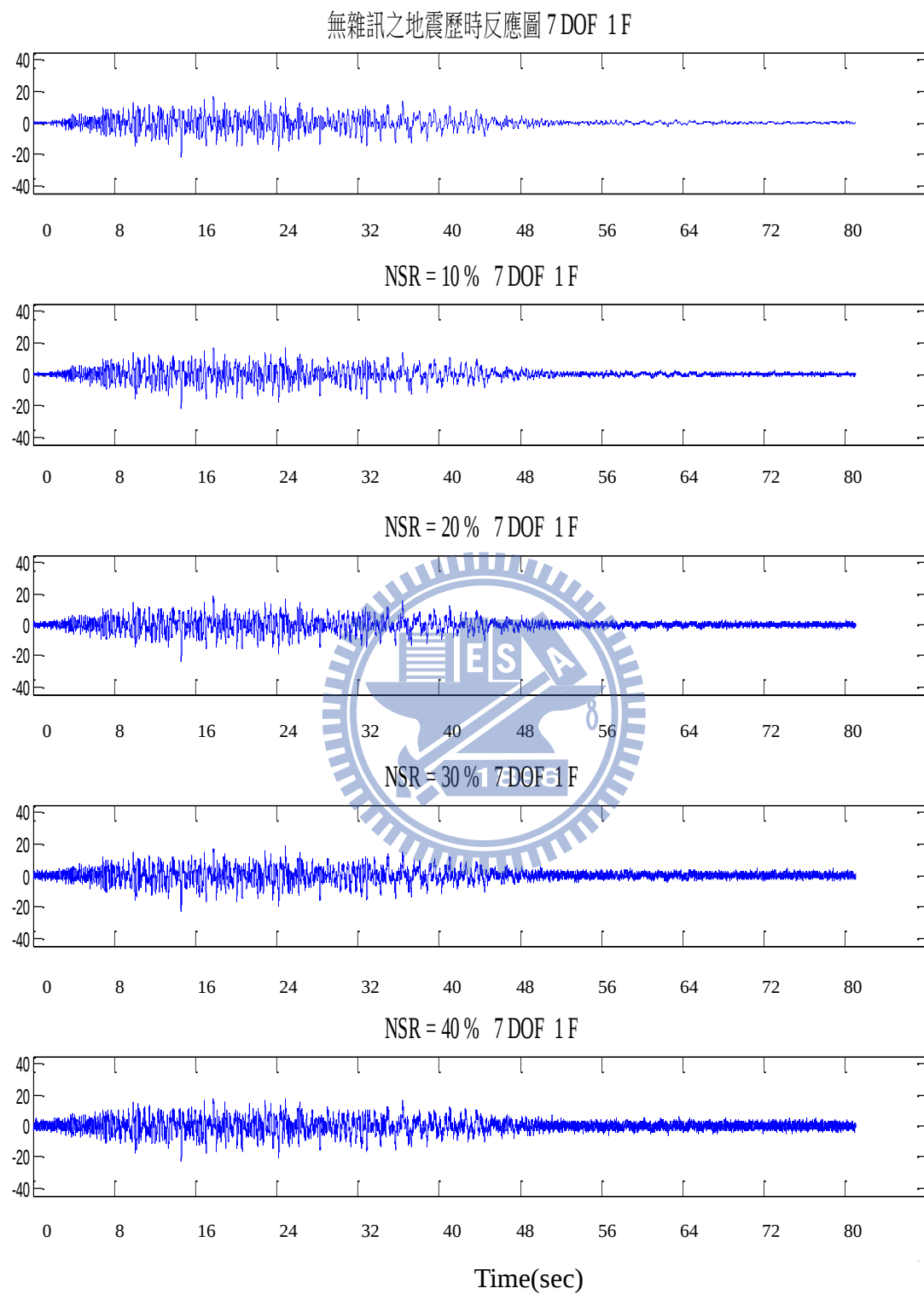


圖 4.3 a 七層樓剪力構架第一層樓之地震歷時反應圖(非時變系統)

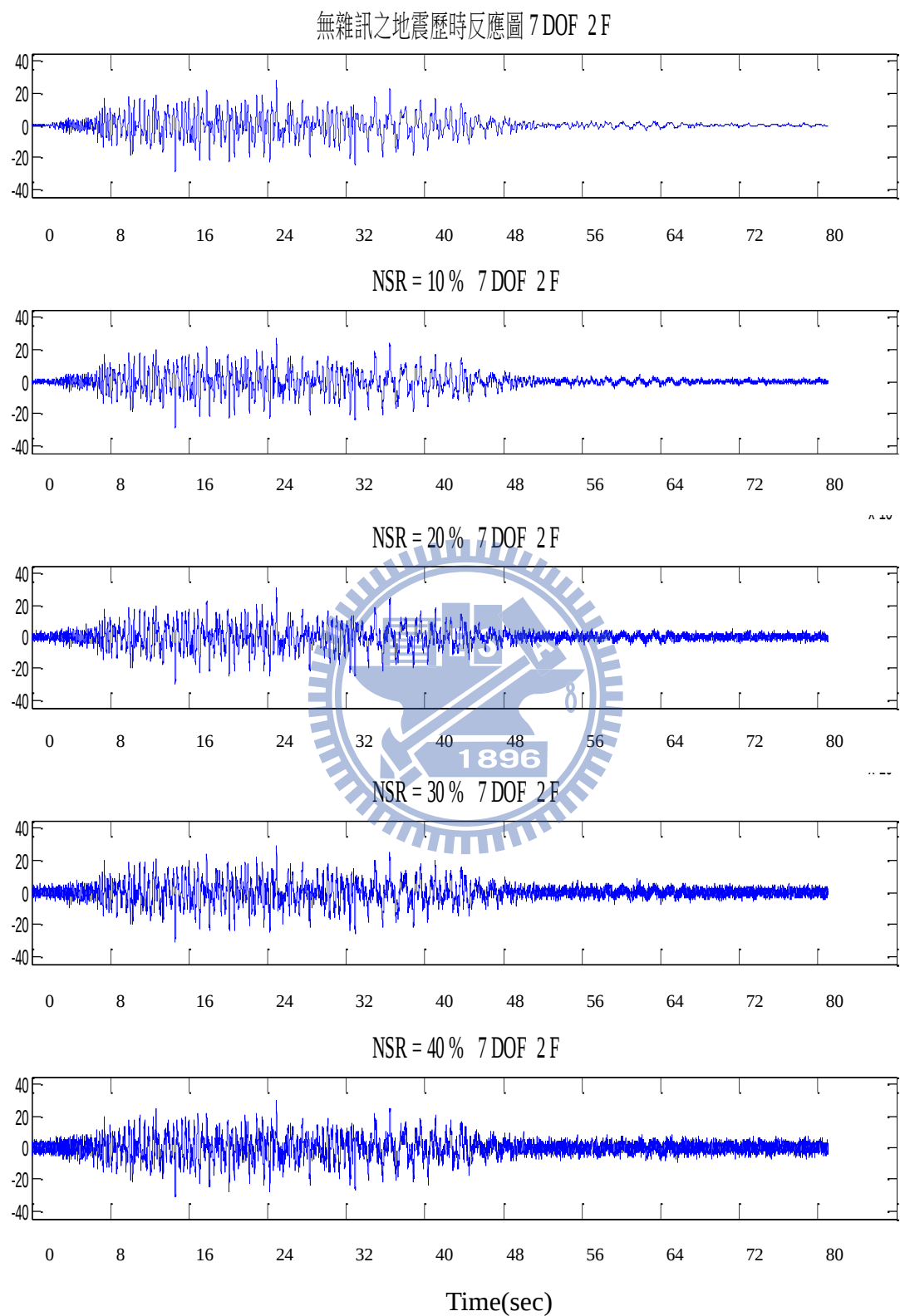


圖 4.3 b 七層樓剪力構架第二層樓之地震歷時反應圖(非時變系統)

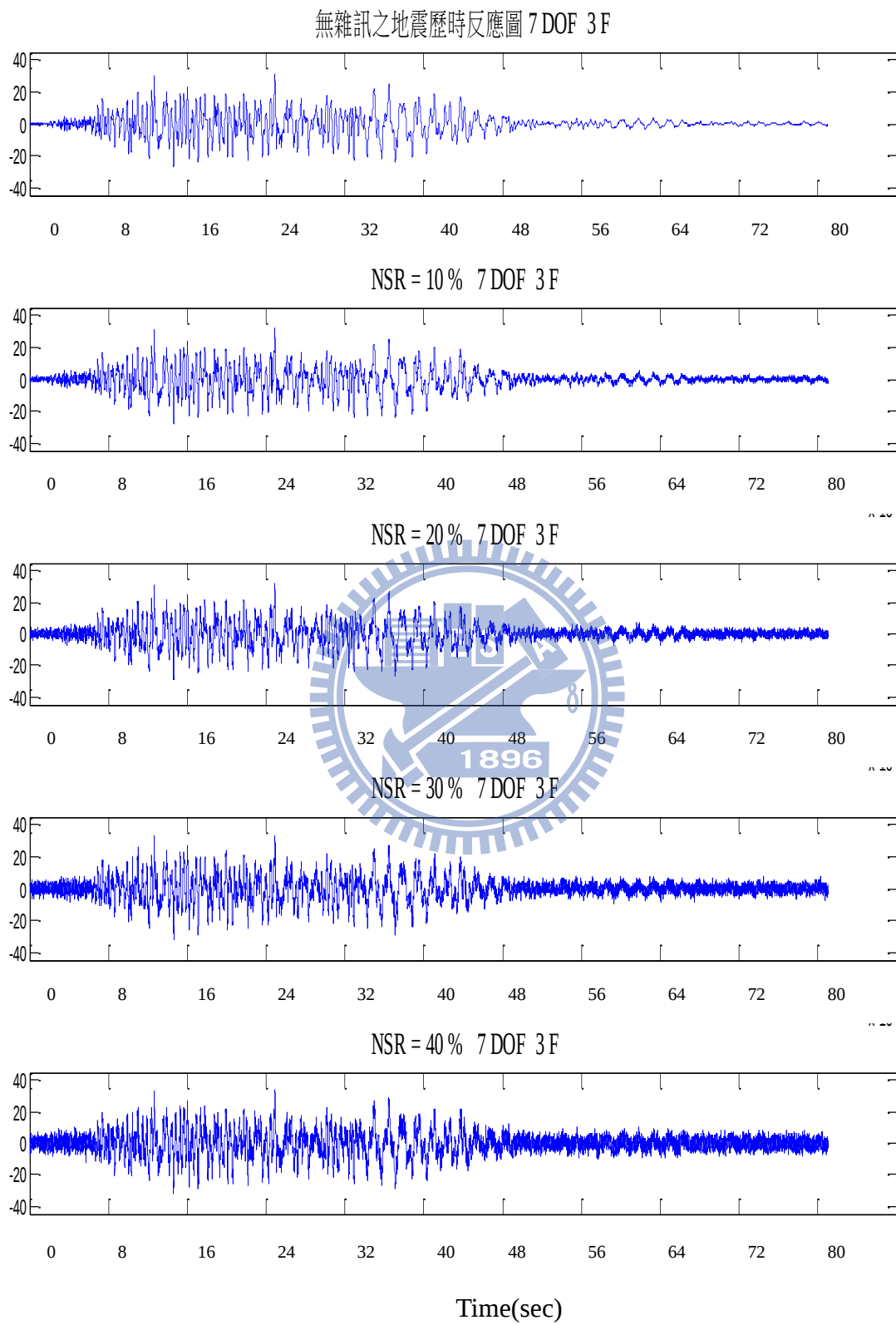


圖 4.3 c 七層樓剪力構架第三層樓之地震歷時反應圖(非時變系統)

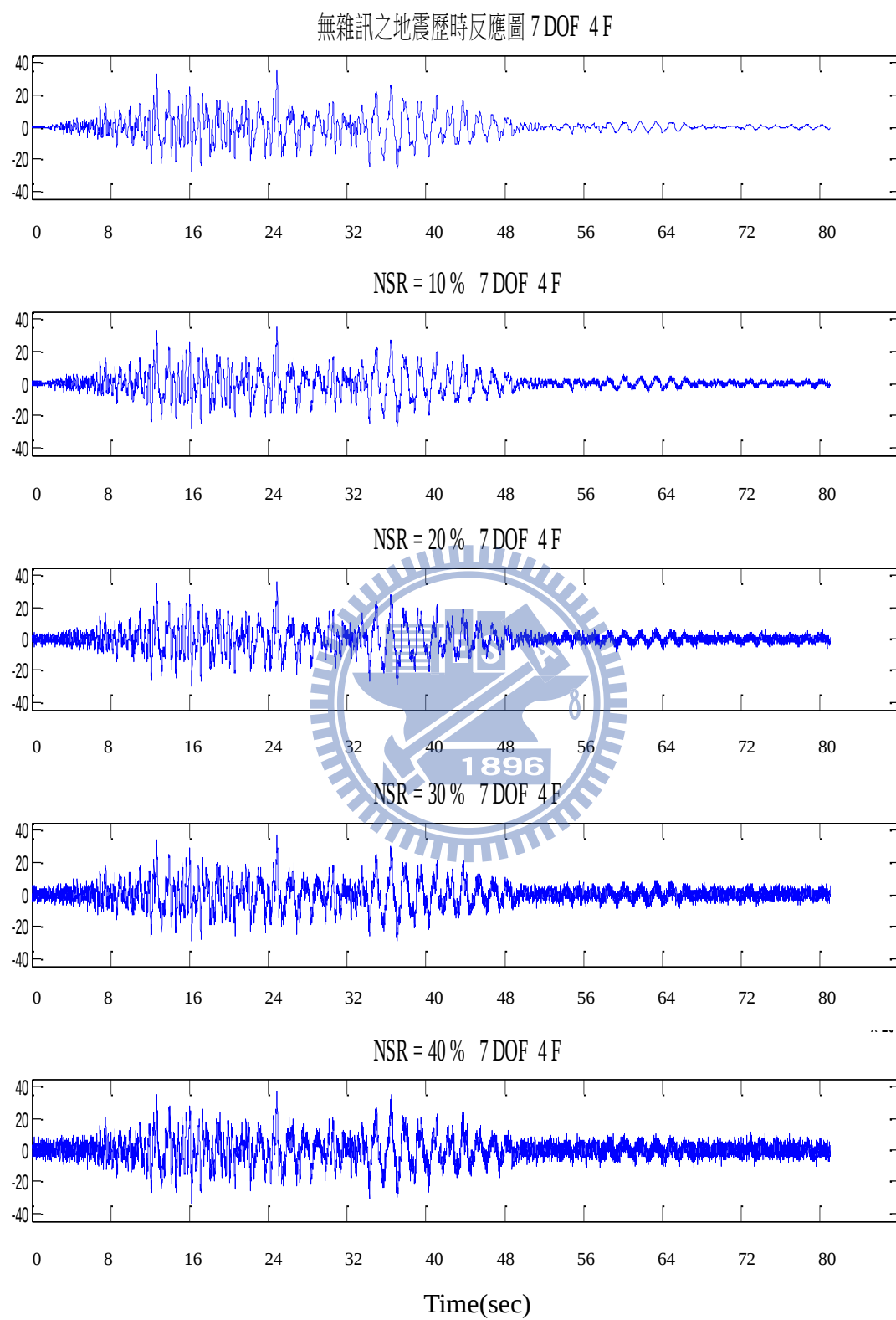


圖 4.3 d 七層樓剪力構架第四層樓之地震歷時反應圖(非時變系統)

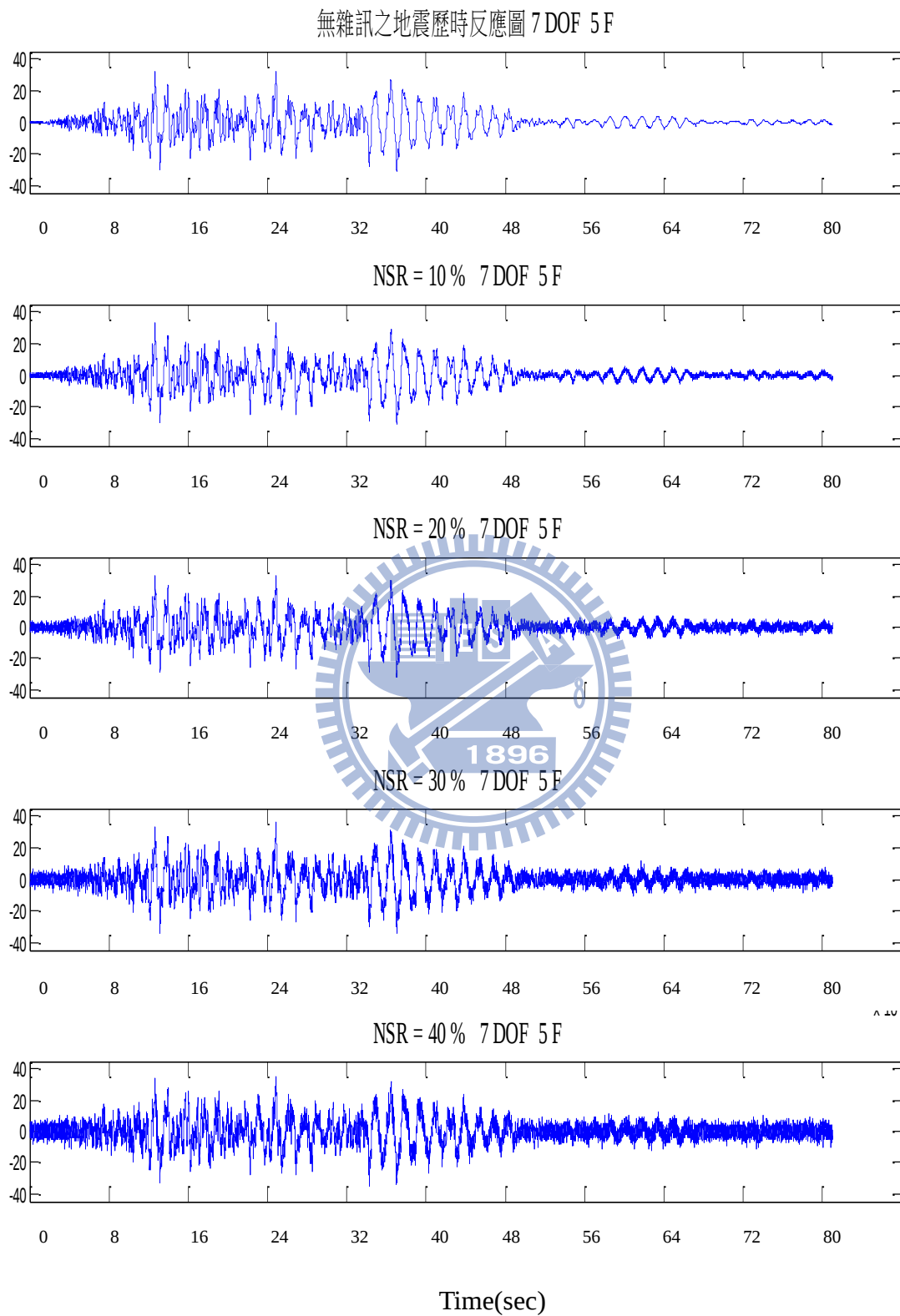
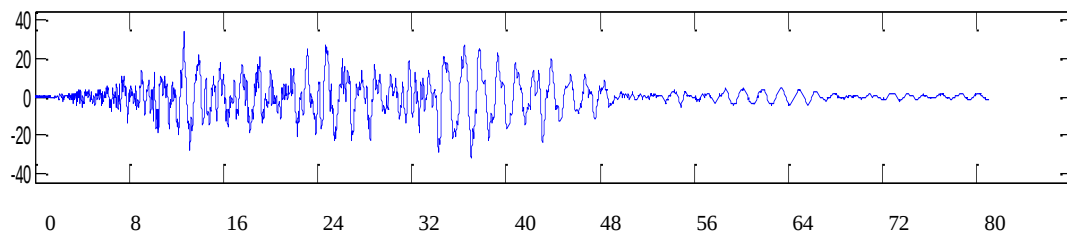
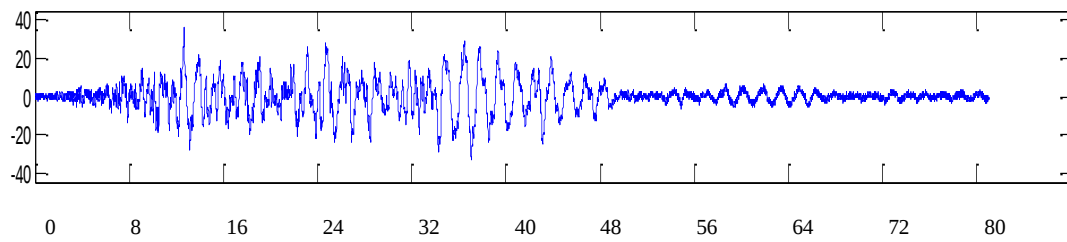


圖 4.3 e 七層樓剪力構架第五層樓之地震歷時反應圖(非時變系統)

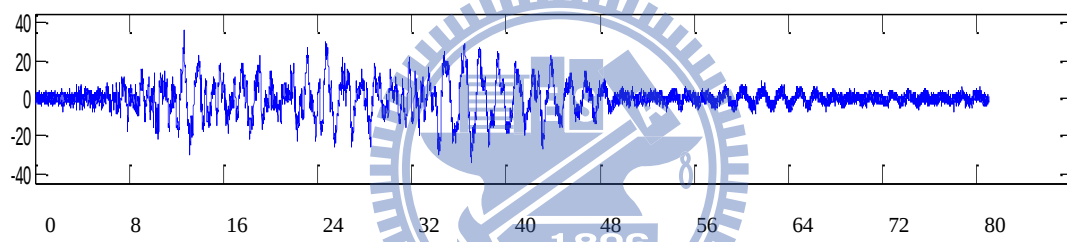
無雜訊之地震歷時反應圖 7 DOF 6 F



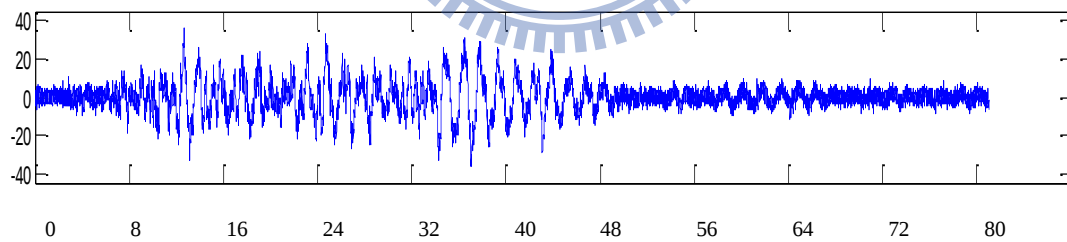
NSR = 10 % 7 DOF 6 F



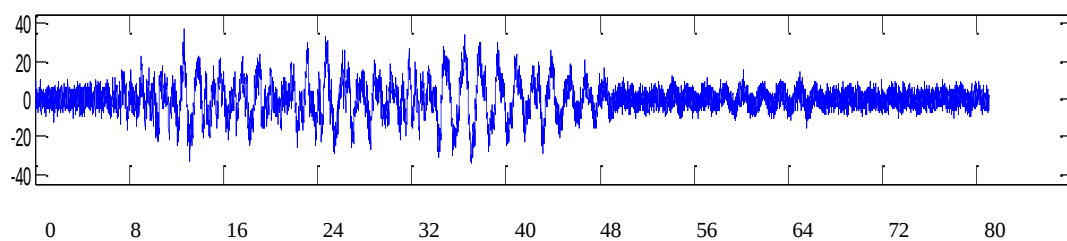
NSR = 20 % 7 DOF 6 F



NSR = 30 % 7 DOF 6 F



NSR = 40 % 7 DOF 6 F



Time(sec)

圖 4.3 f 七層樓剪力構架第六層樓之地震歷時反應圖(非時變系統)

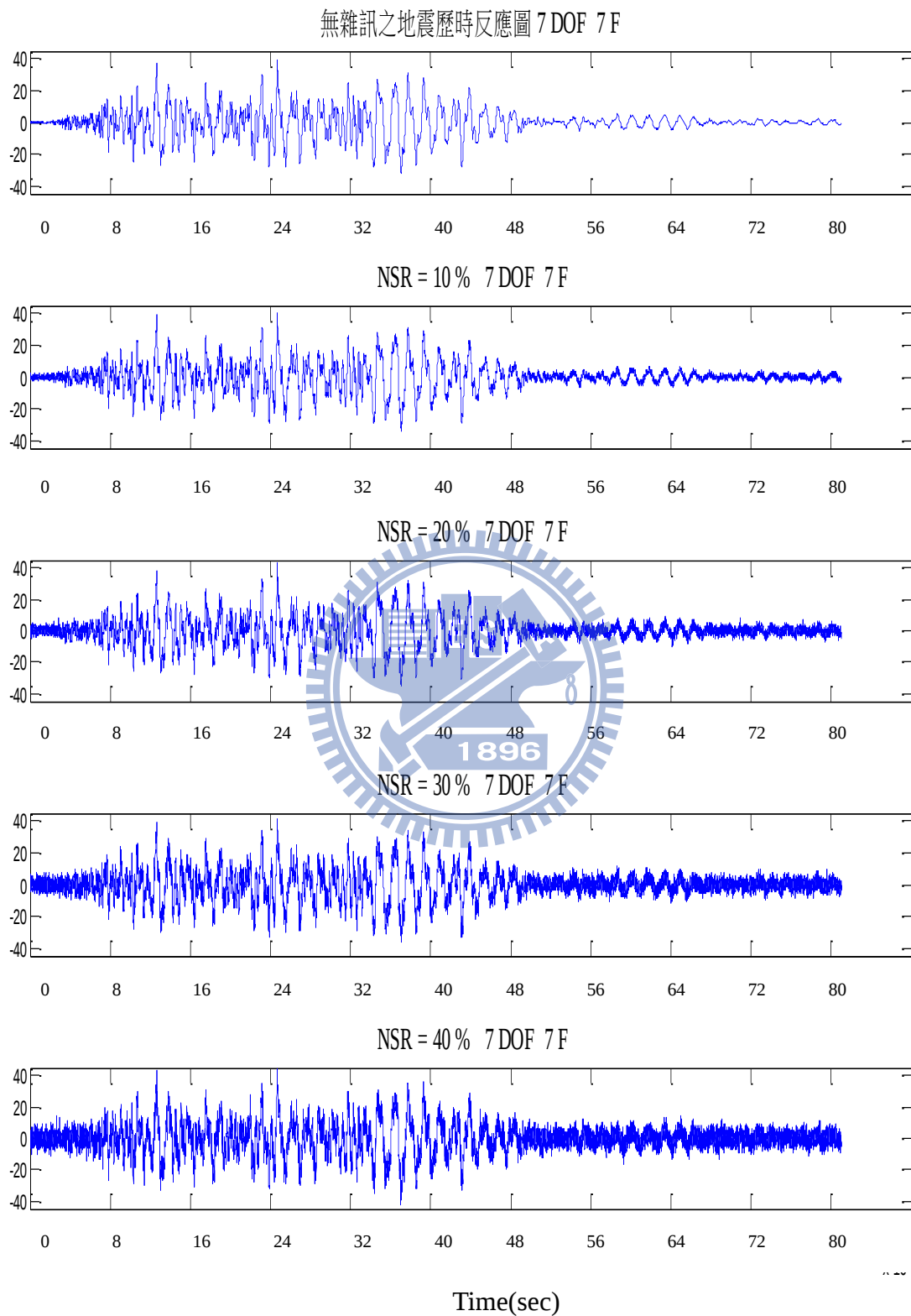


圖 4.3 g 七層樓剪力構架第七層樓之地震歷時反應(非時變系統)

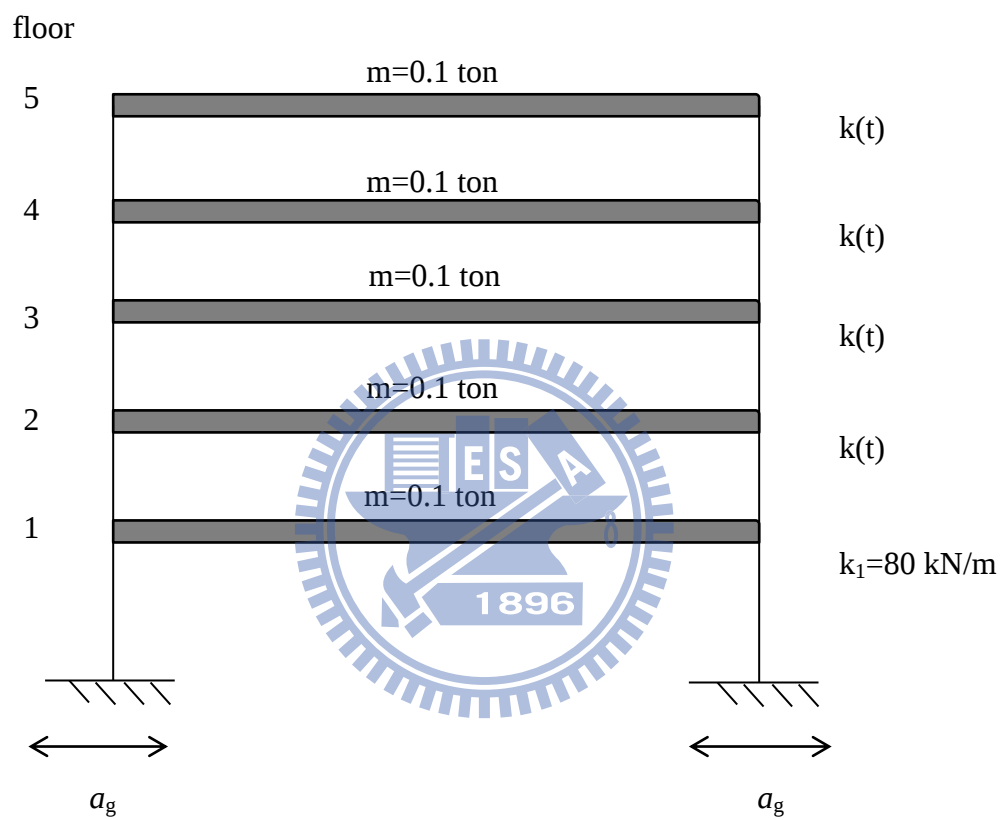


圖 4.4 a 五層樓之剪力構架示意圖

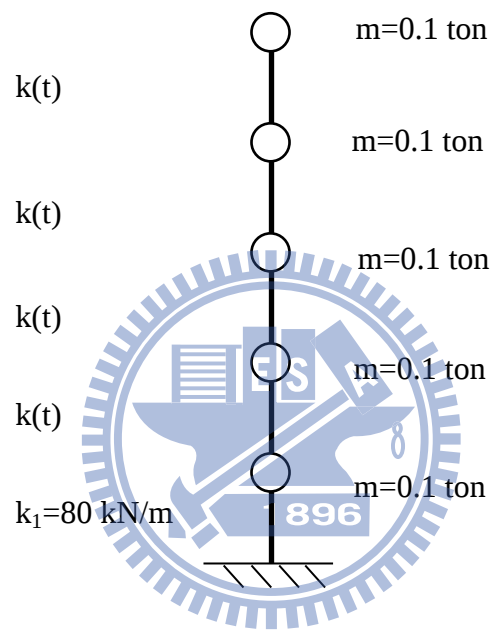


圖 4.4 b 五層樓之剪力構架示意圖

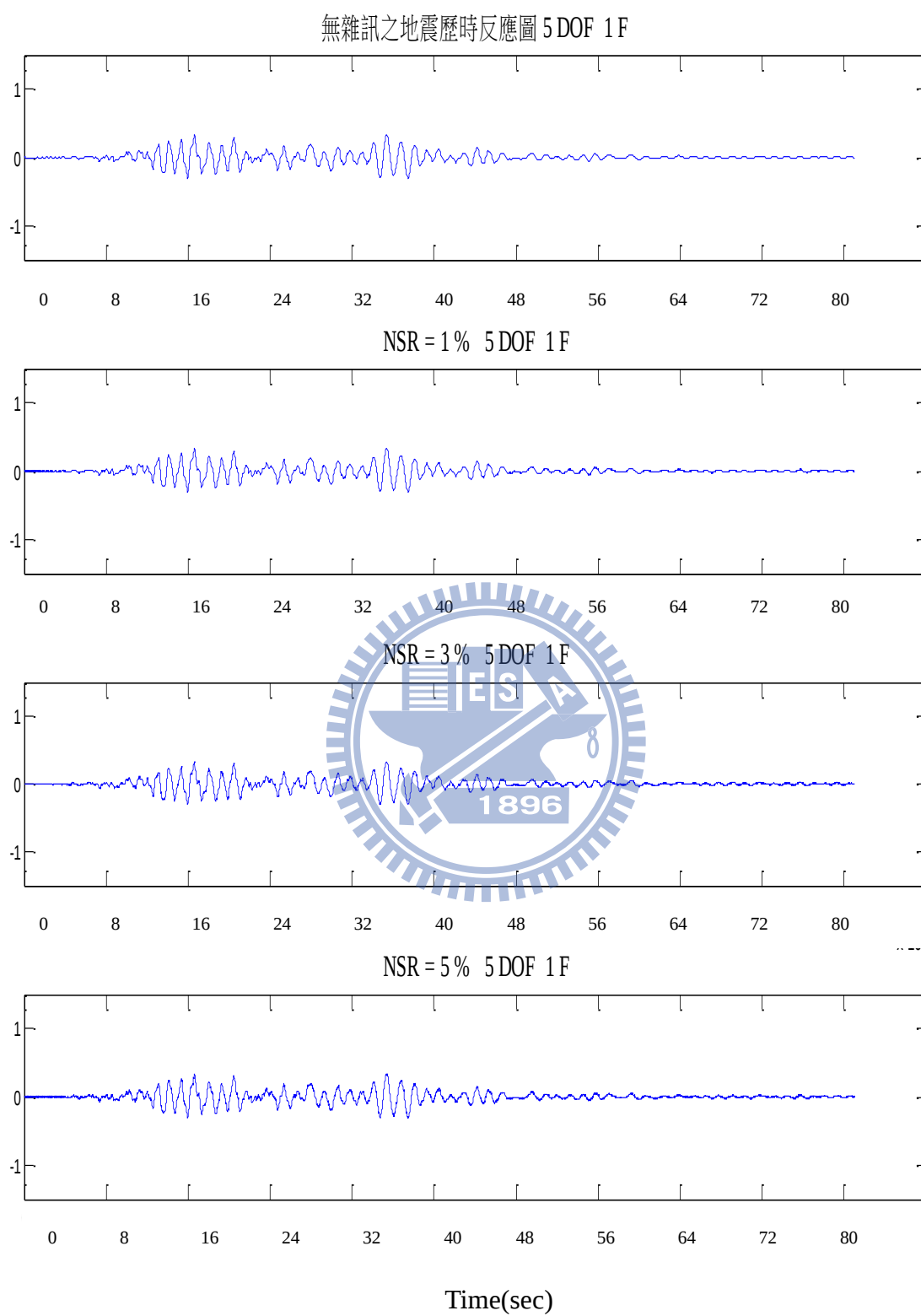


圖 4.5 a 五層樓剪力構架第一層樓之地震歷時反應圖(時變系統)

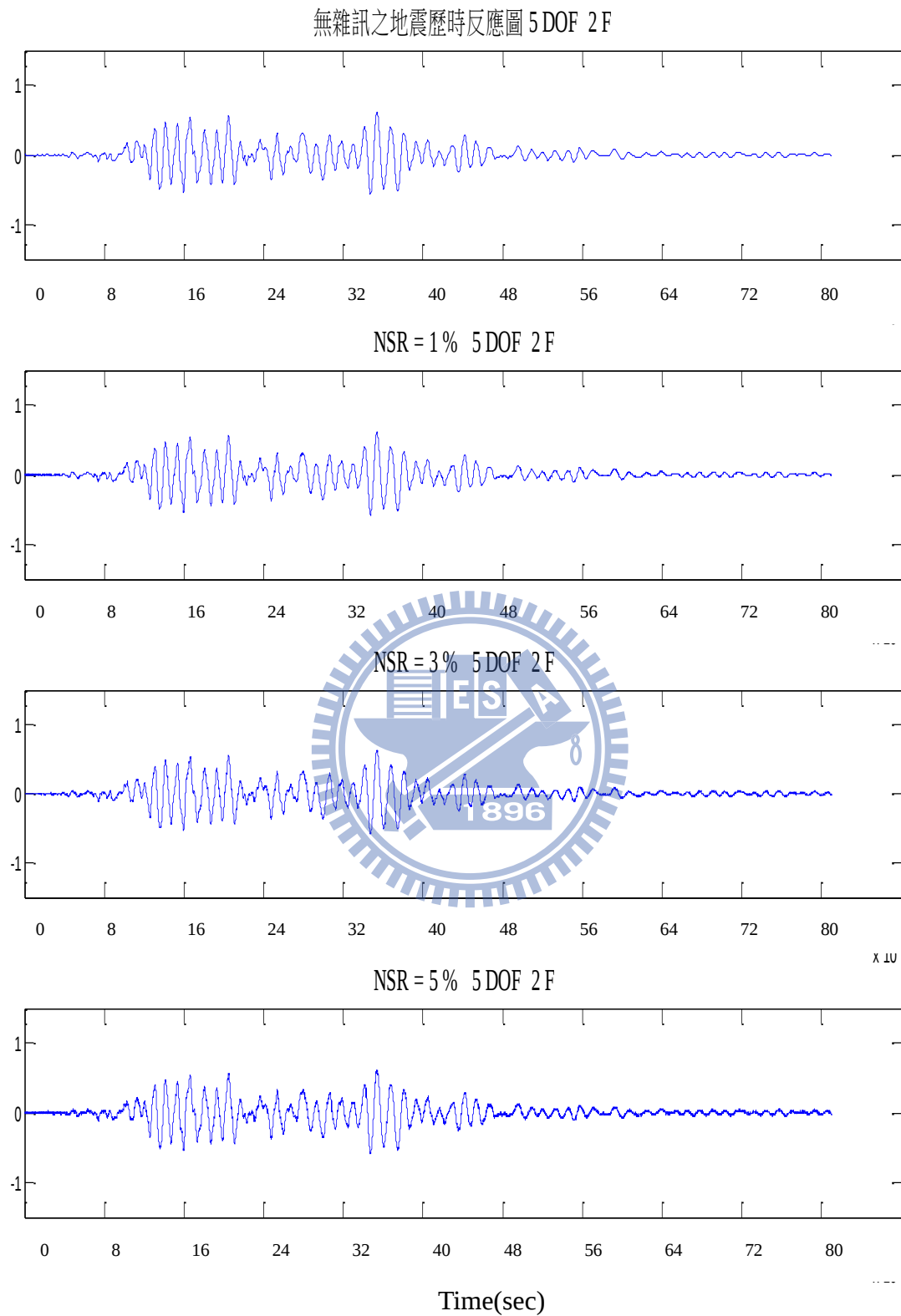
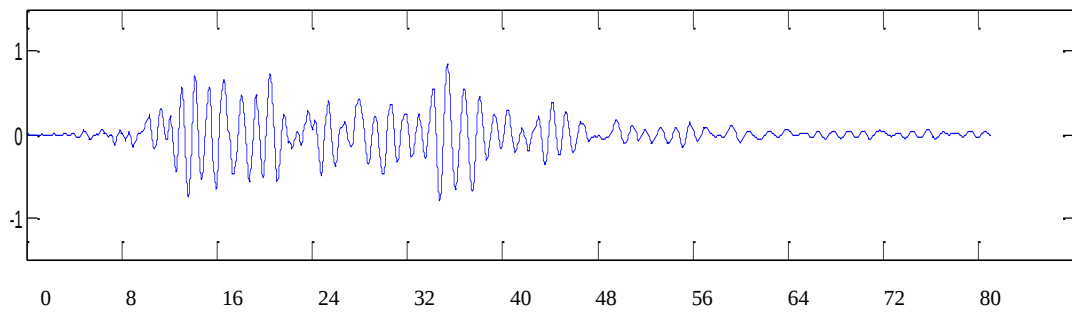
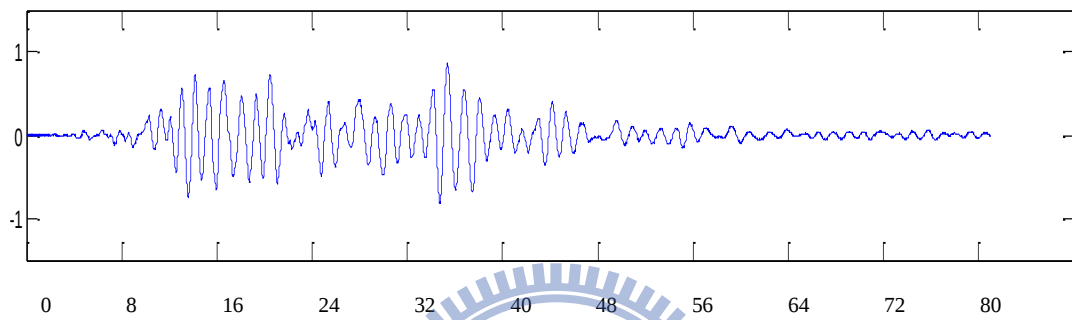


圖 4.5 b 五層樓剪力構架第二層樓之地震歷時反應圖(時變系統)

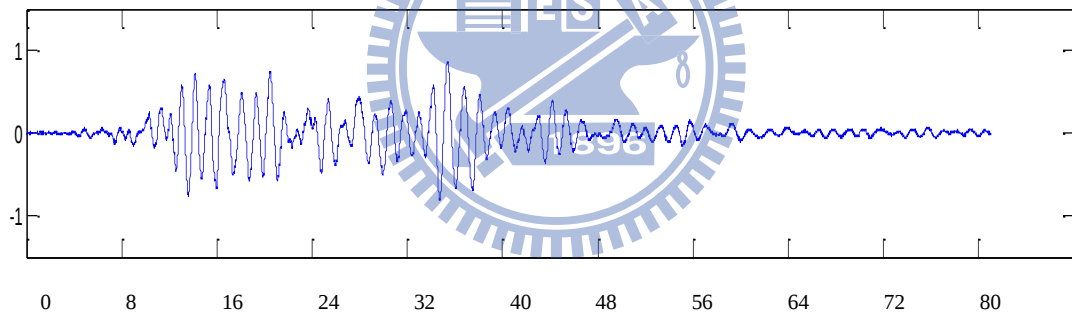
無雜訊之地震歷時反應圖 5 DOF 3 F



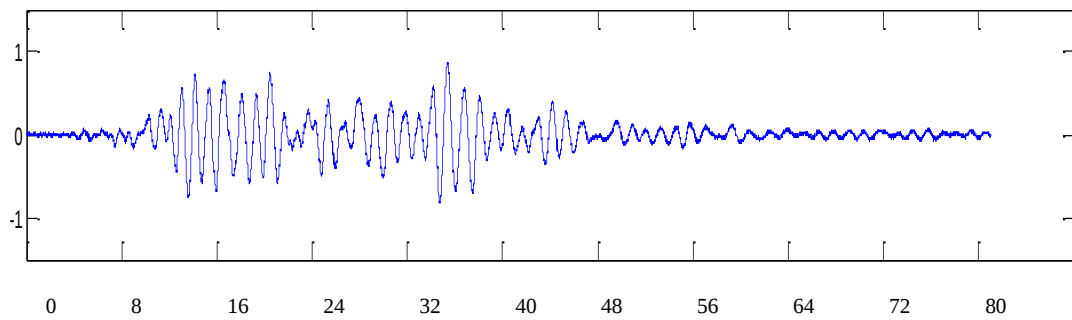
NSR = 1 % 5 DOF 3 F



NSR = 3 % 5 DOF 3 F



NSR = 5 % 5 DOF 3 F



Time(sec)

圖 4.5 c 五層樓剪力構架第三層樓之地震歷時反應圖(時變系統)

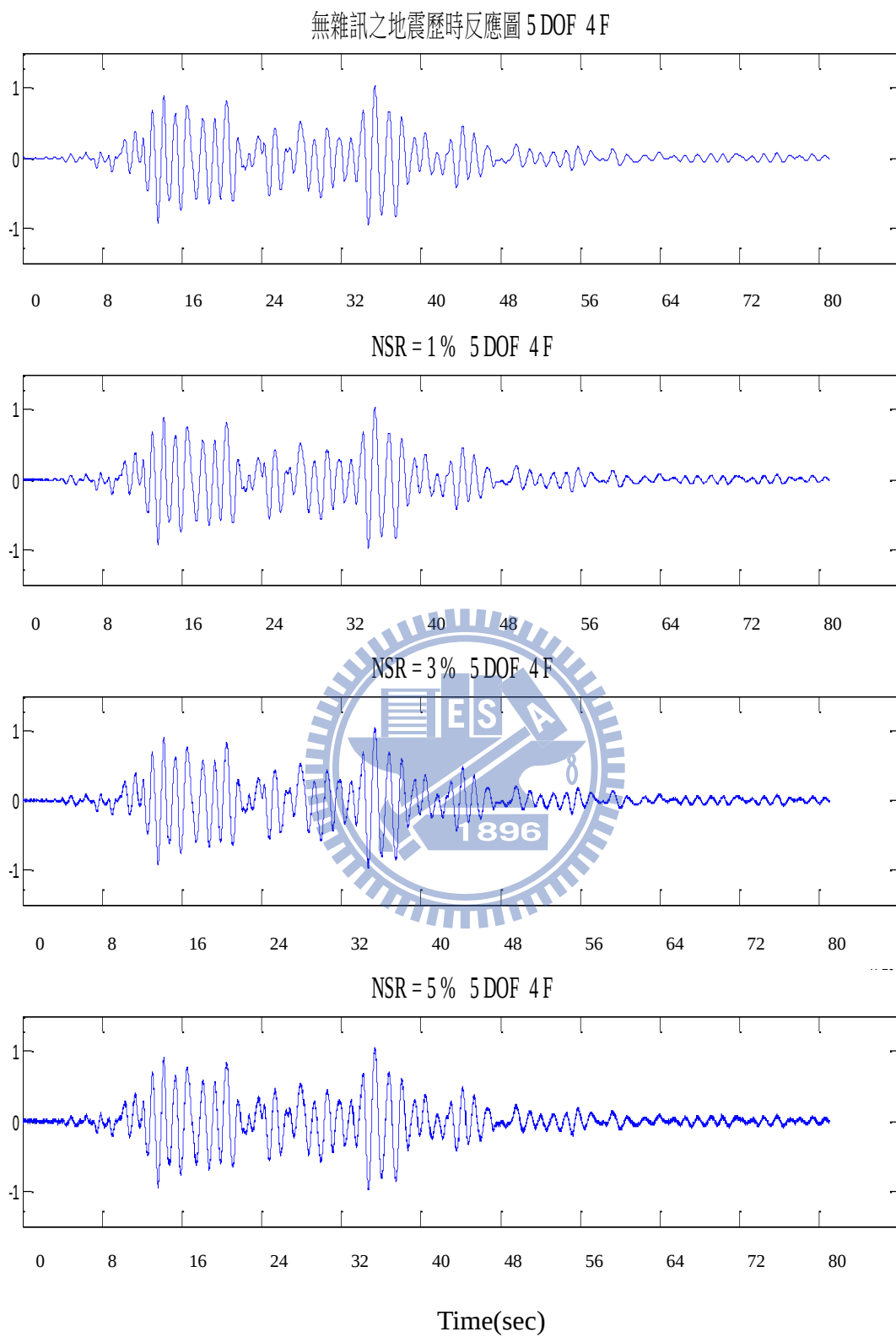
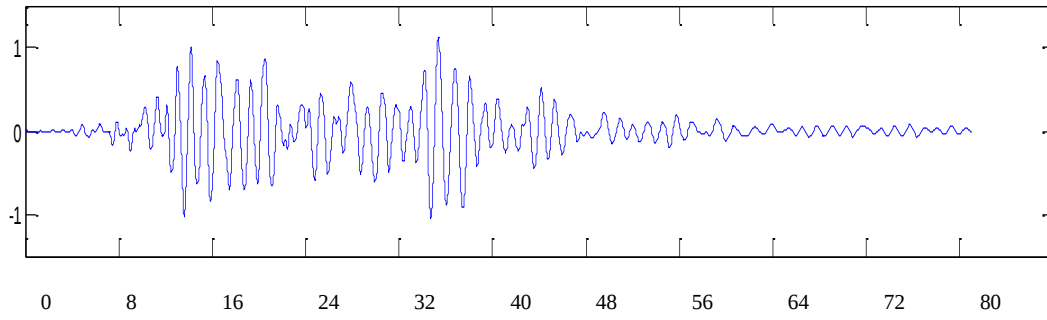
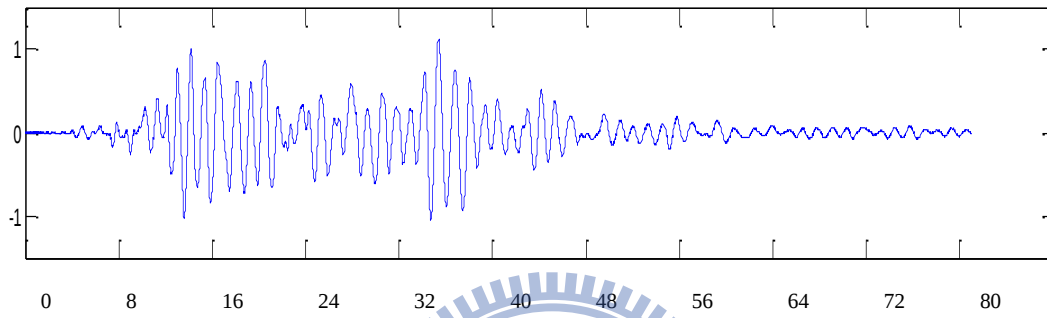


圖 4.5 d 五層樓剪力構架第四層樓之地震歷時反應圖(時變系統)

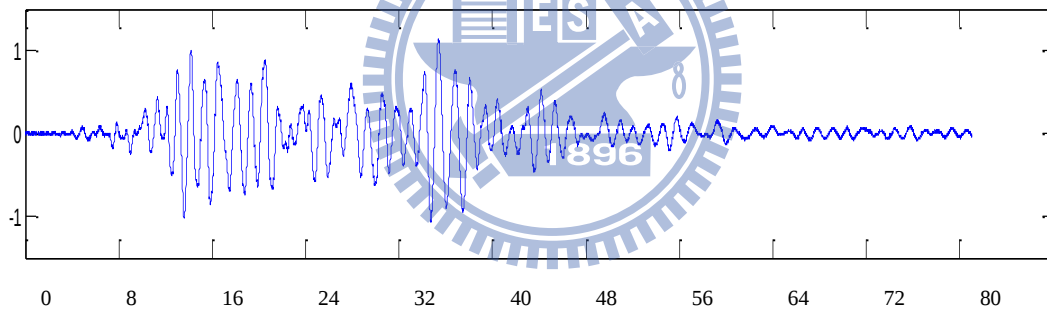
無雜訊之地震歷時反應圖 5 DOF 5 F



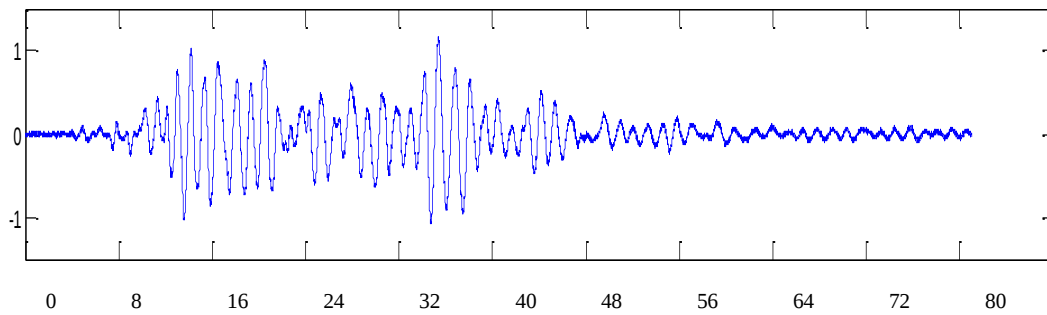
NSR=1% 5 DOF 5 F



NSR=3% 5 DOF 5 F



NSR=5% 5 DOF 5 F



Time(sec)

圖 4.5 e 五層樓剪力構架第五層樓之地震歷時反應圖(時變系統)

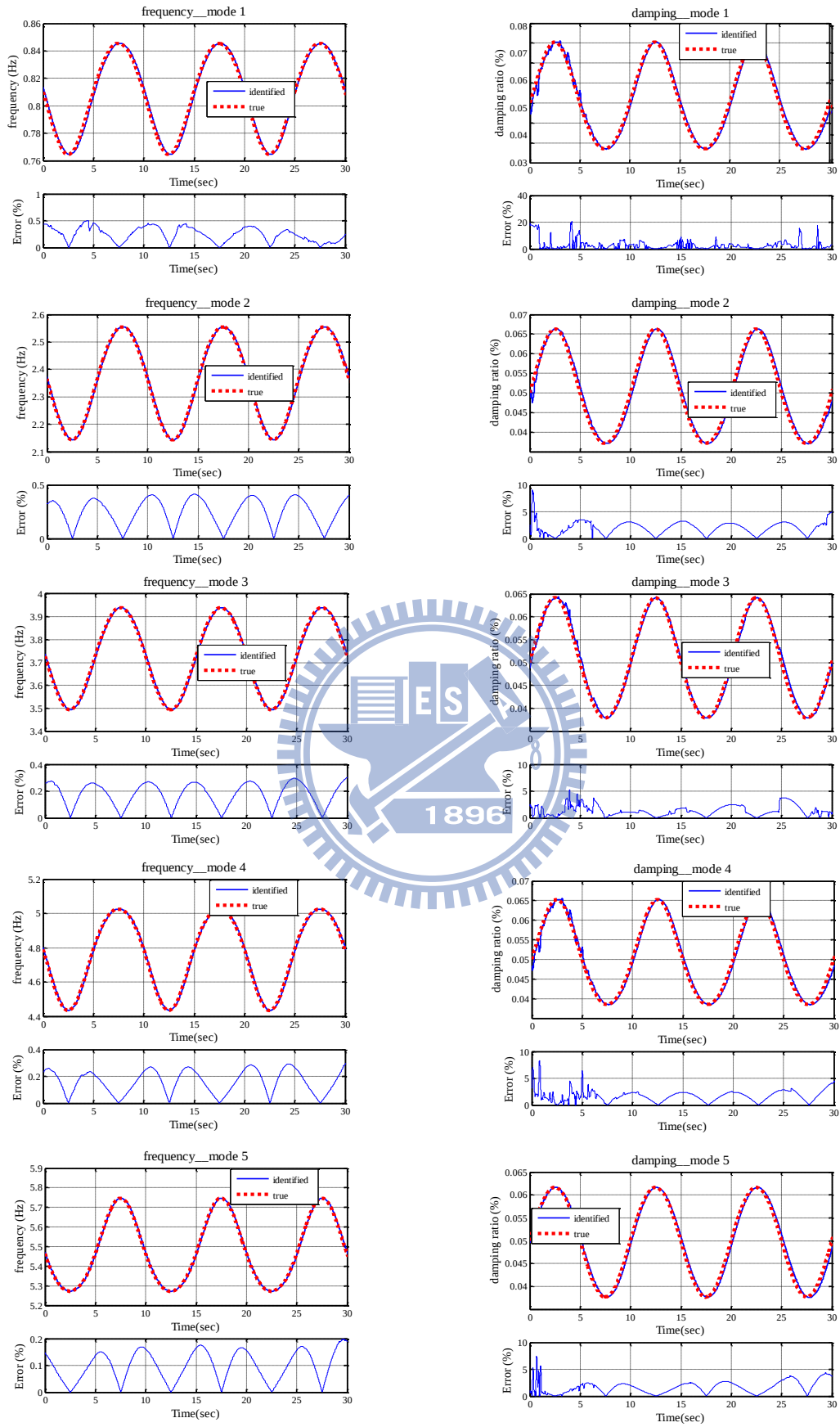


圖 4.6 五層樓剪力構架無噪訊的時變系統反應之識別結果(理論值)

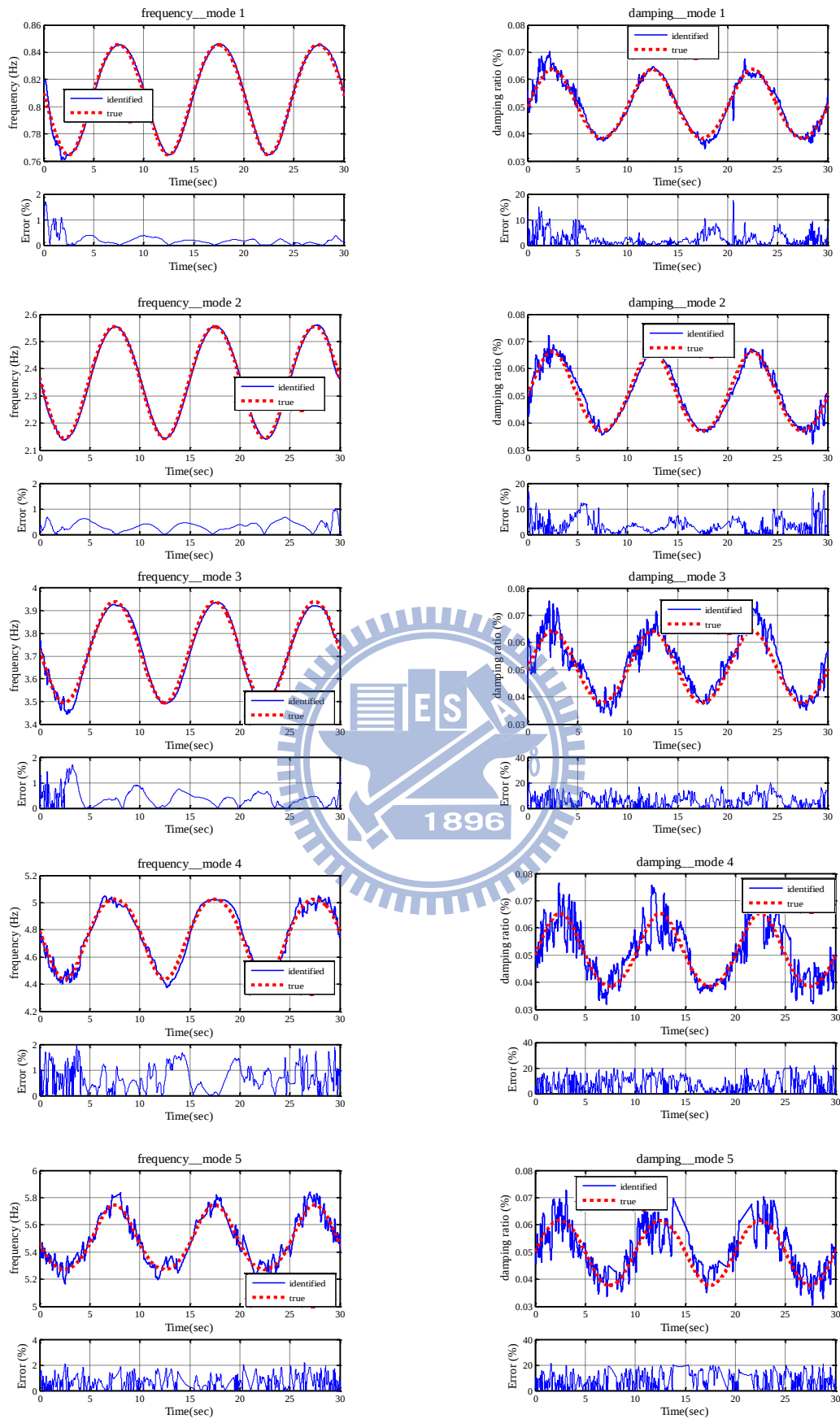


圖 4.7 五層樓剪力構架含 1% 噪訊的時變系統反應之識別結果

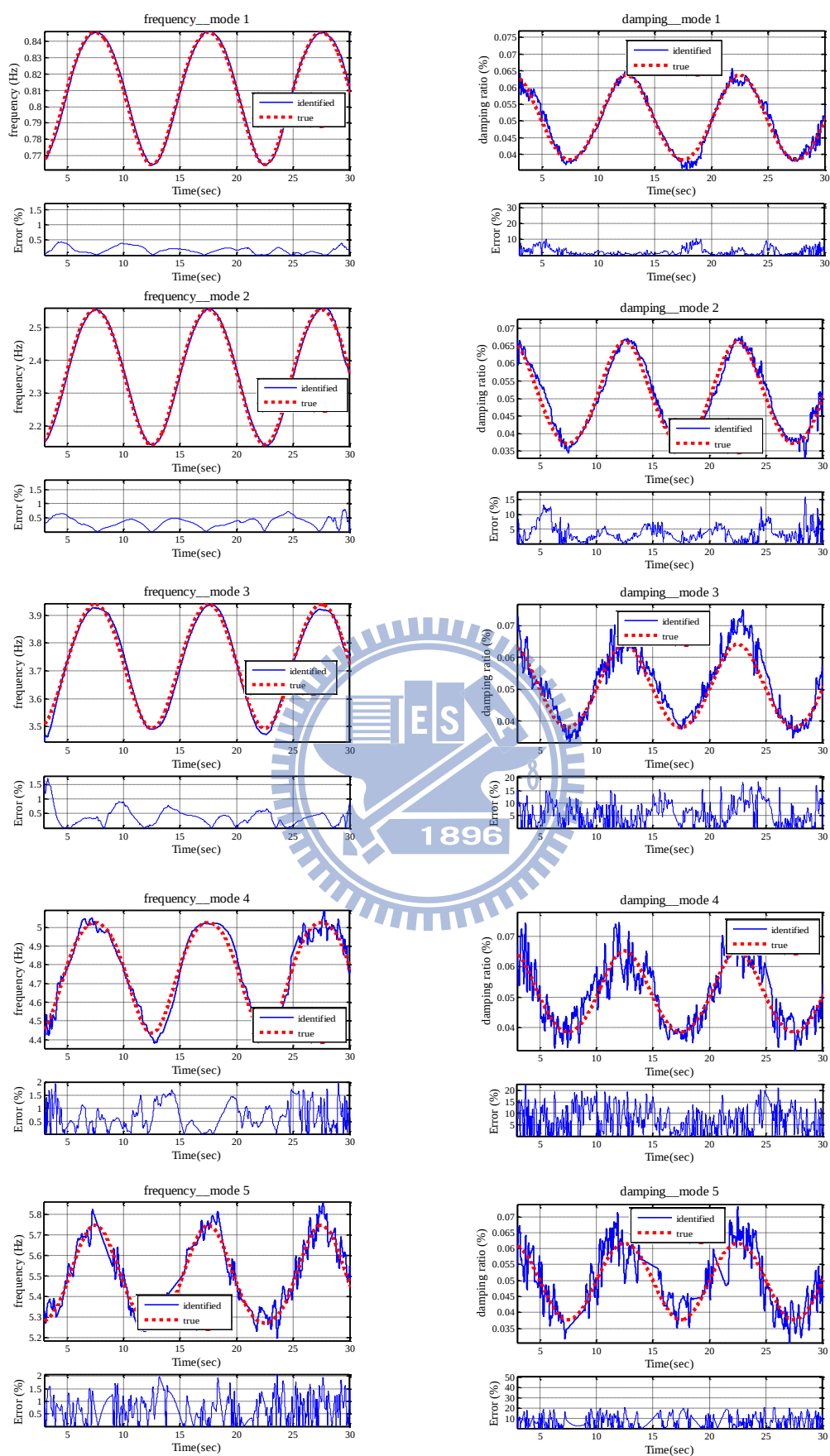


圖 4.8 五層樓剪力構架含 1% 噪訊的時變系統反應經卡氏濾波器處理後之識別結果

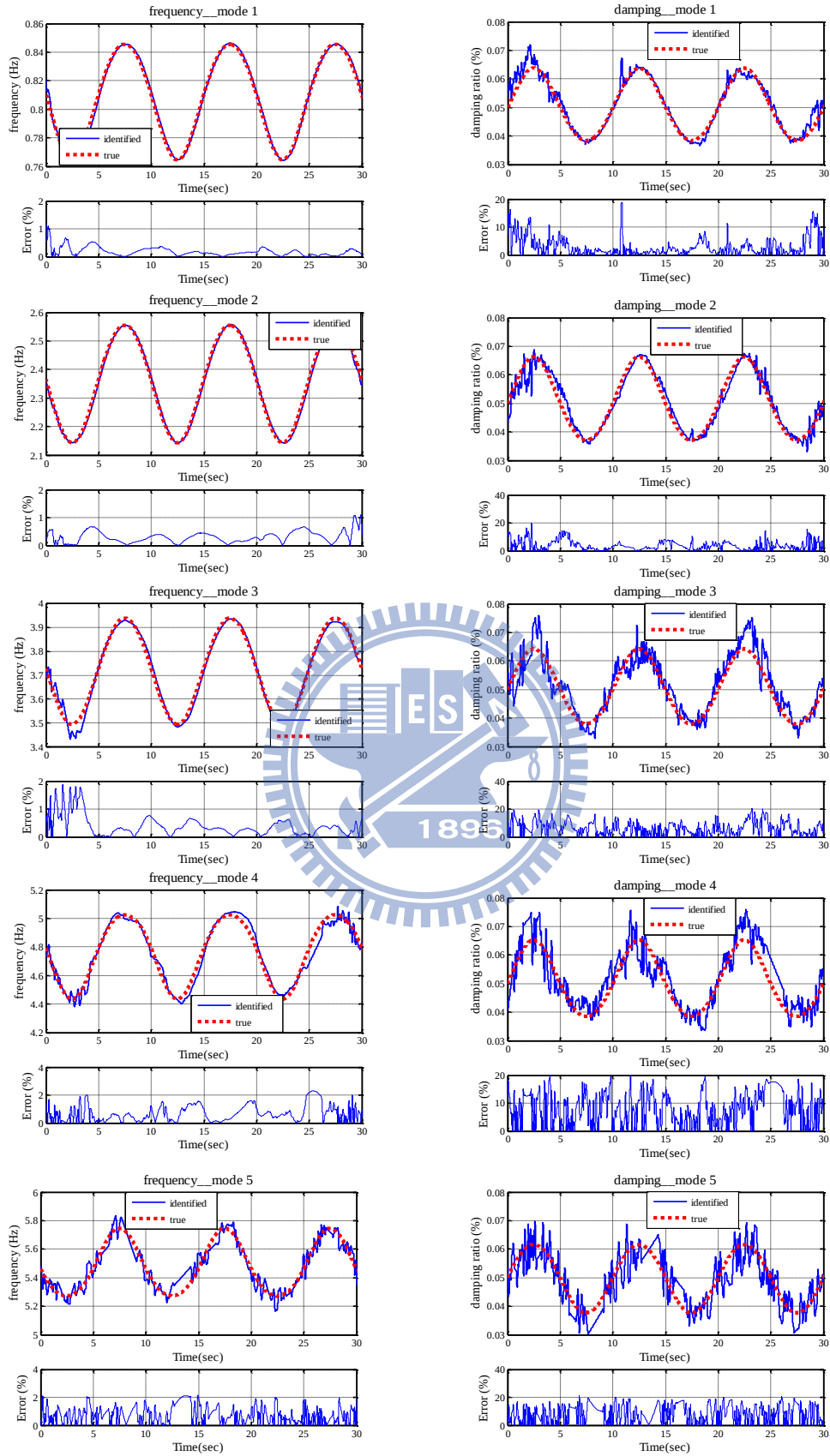


圖 4.9 五層樓剪力構架含 1% 噪訊的時變系統反應經中值濾波器處理後之識別結果

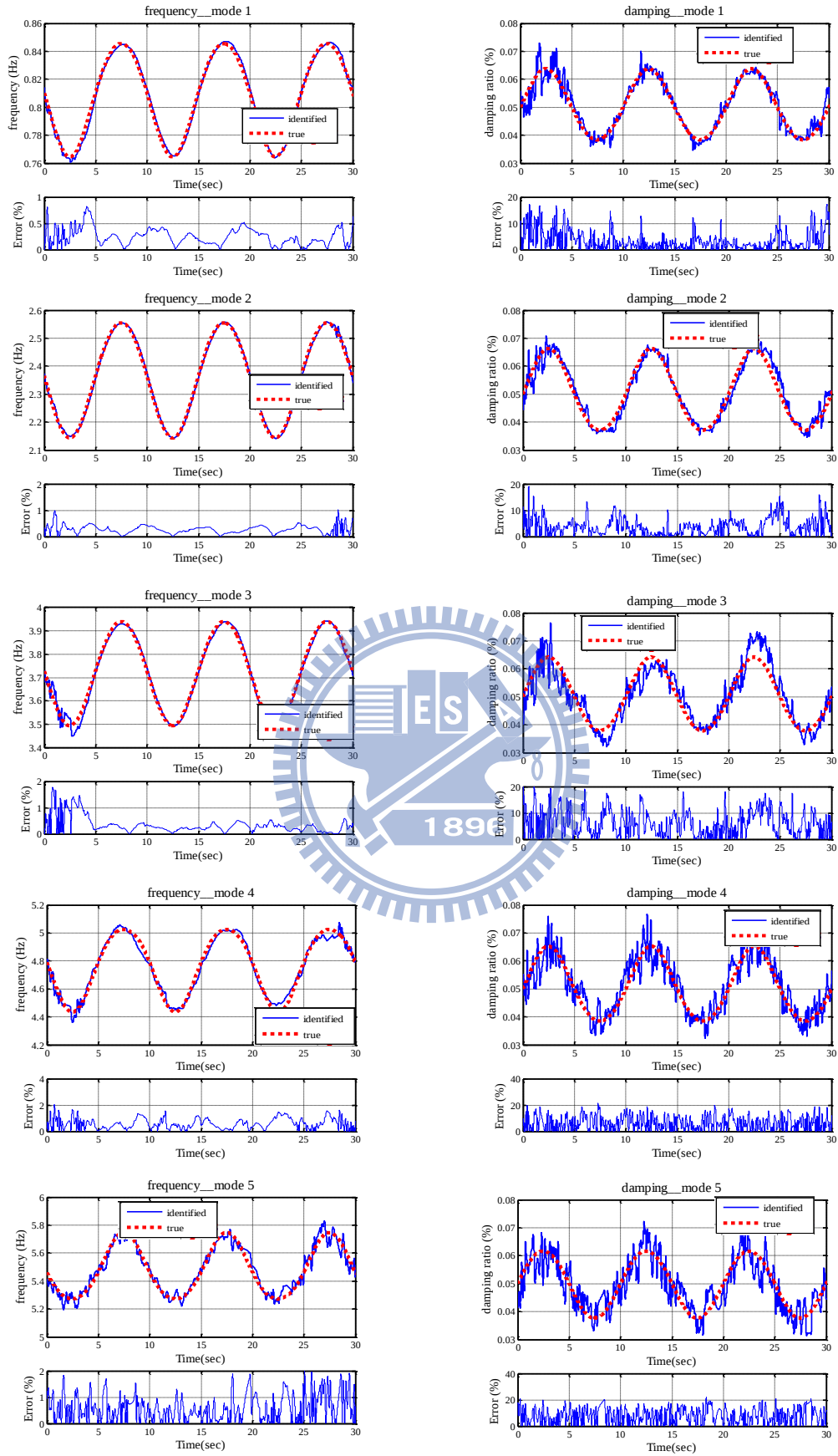


圖 4.10 五層樓剪力構架含 1% 噪訊的時變系統反應經離散小波濾波處理後之識別結果

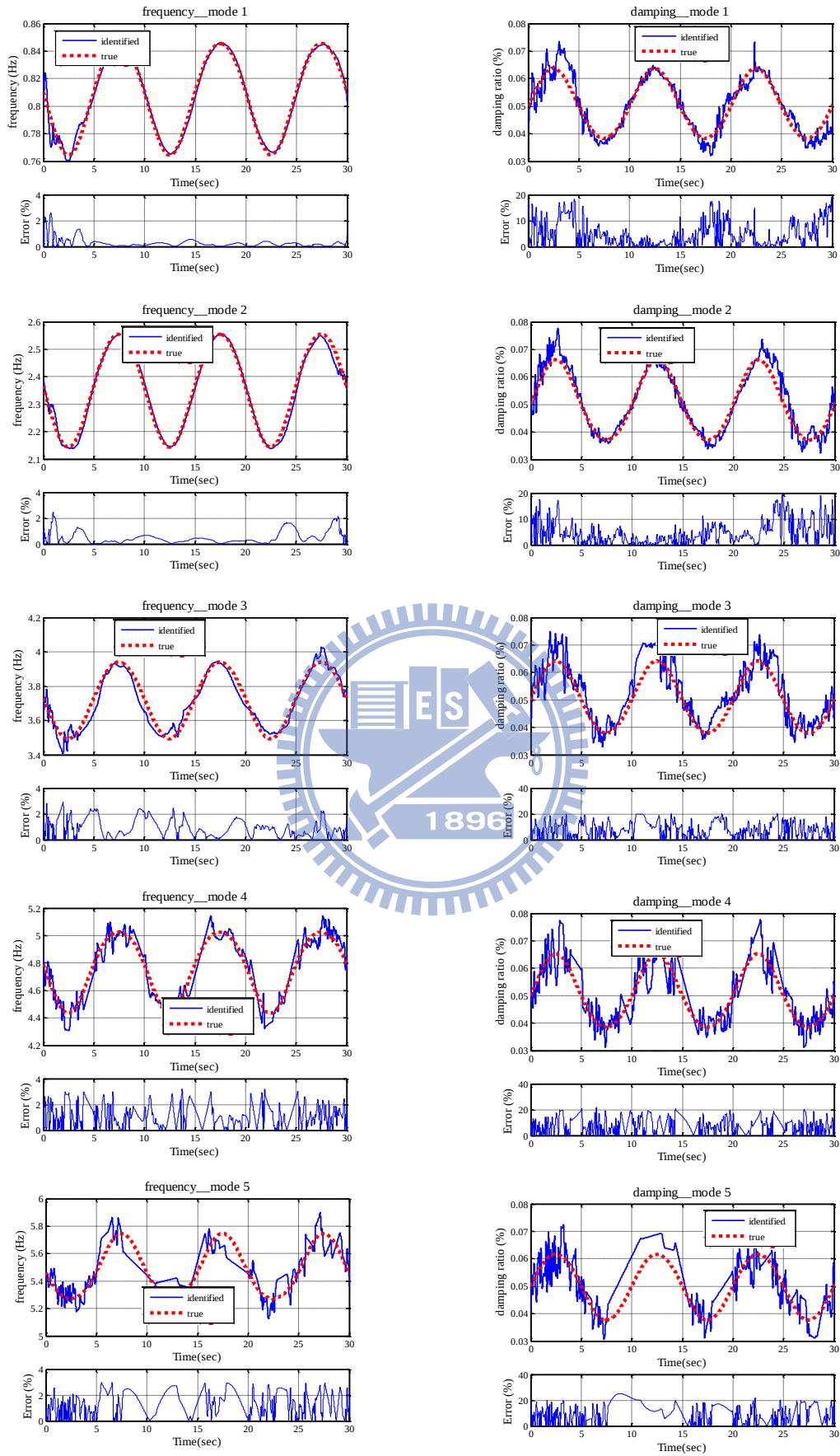


圖 4.11 五層樓剪力構架含 3% 噪訊的時變系統反應之識別結果

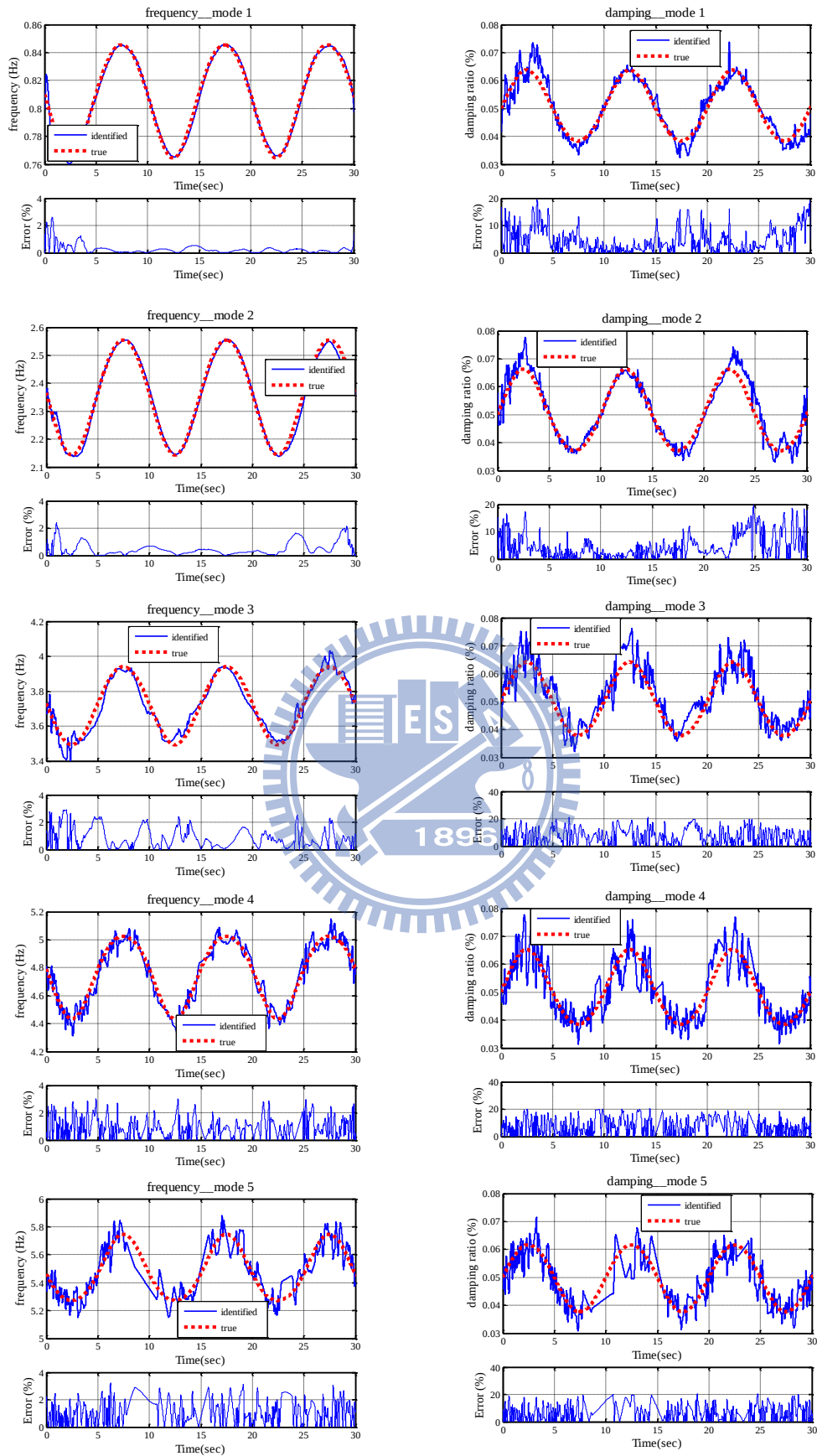


圖 4.12 五層樓剪力構架含 3% 噪訊的時變系統反應經卡氏濾波器處理後之識別結果

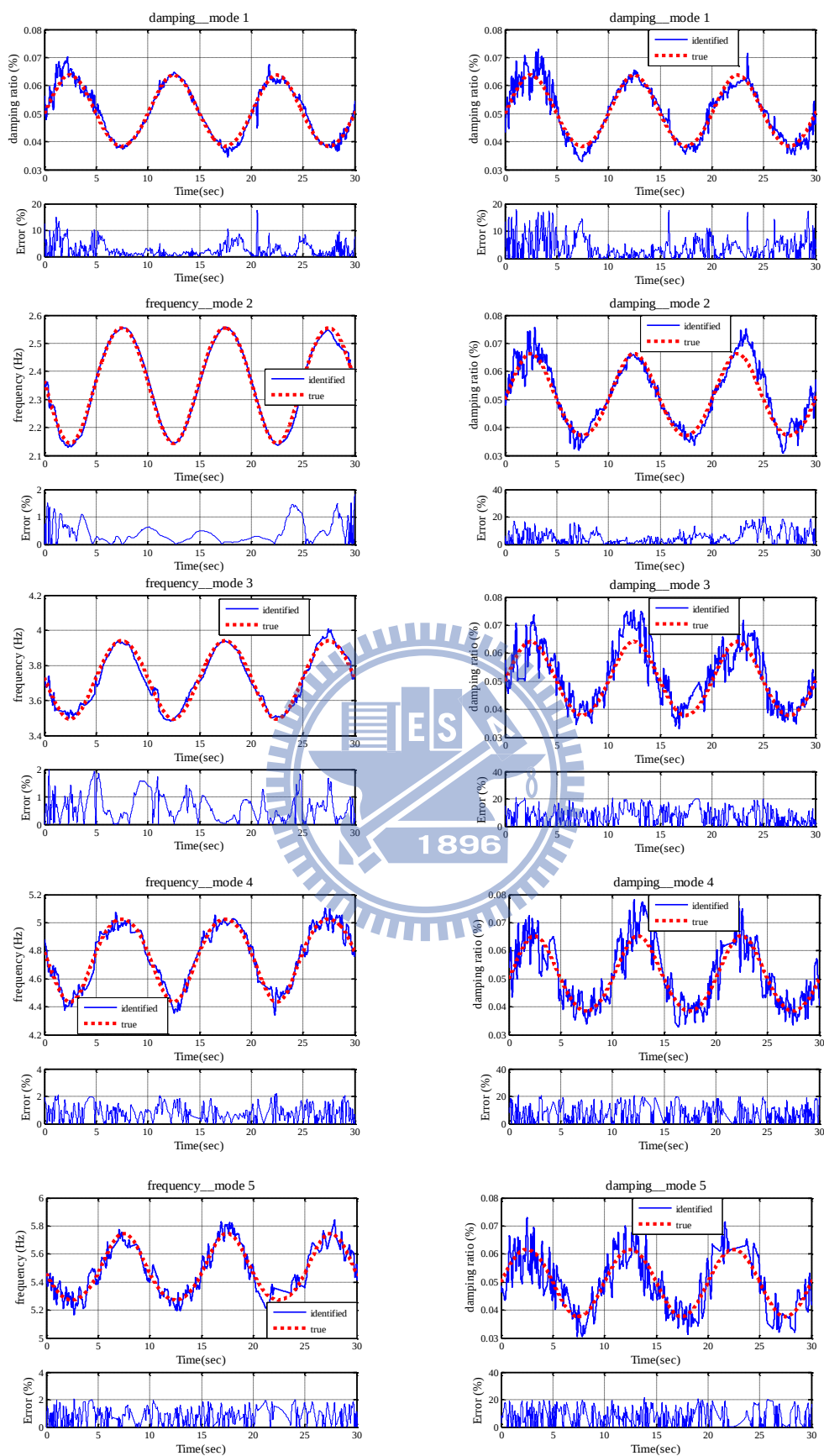


圖 4.13 五層樓剪力構架含 3% 噪訊的時變系統反應經中值濾波器處理後之識別結果

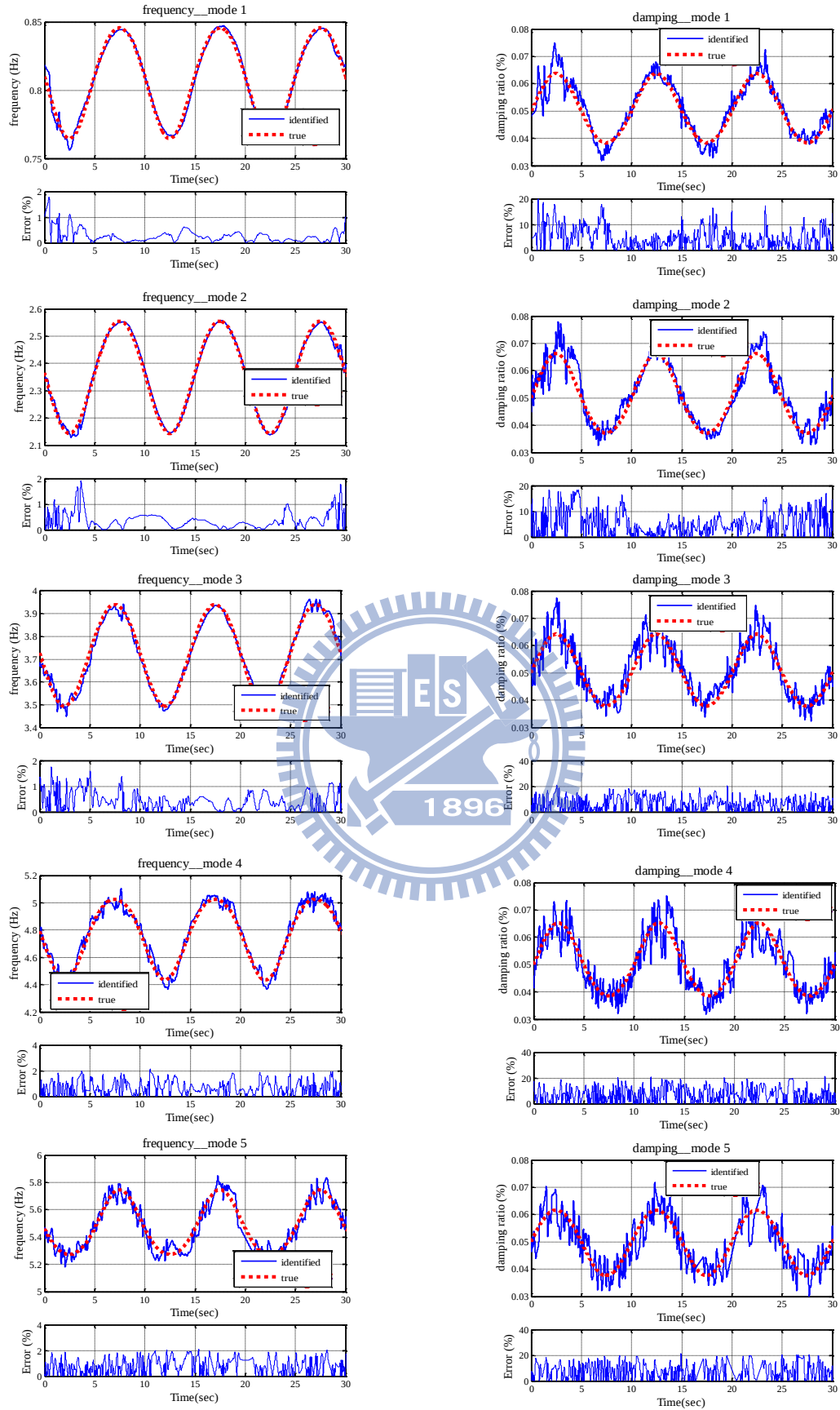


圖 4.14 五層樓剪力構架含 3% 噪訊的時變系統反應經離散小波濾波處理後之識別結果

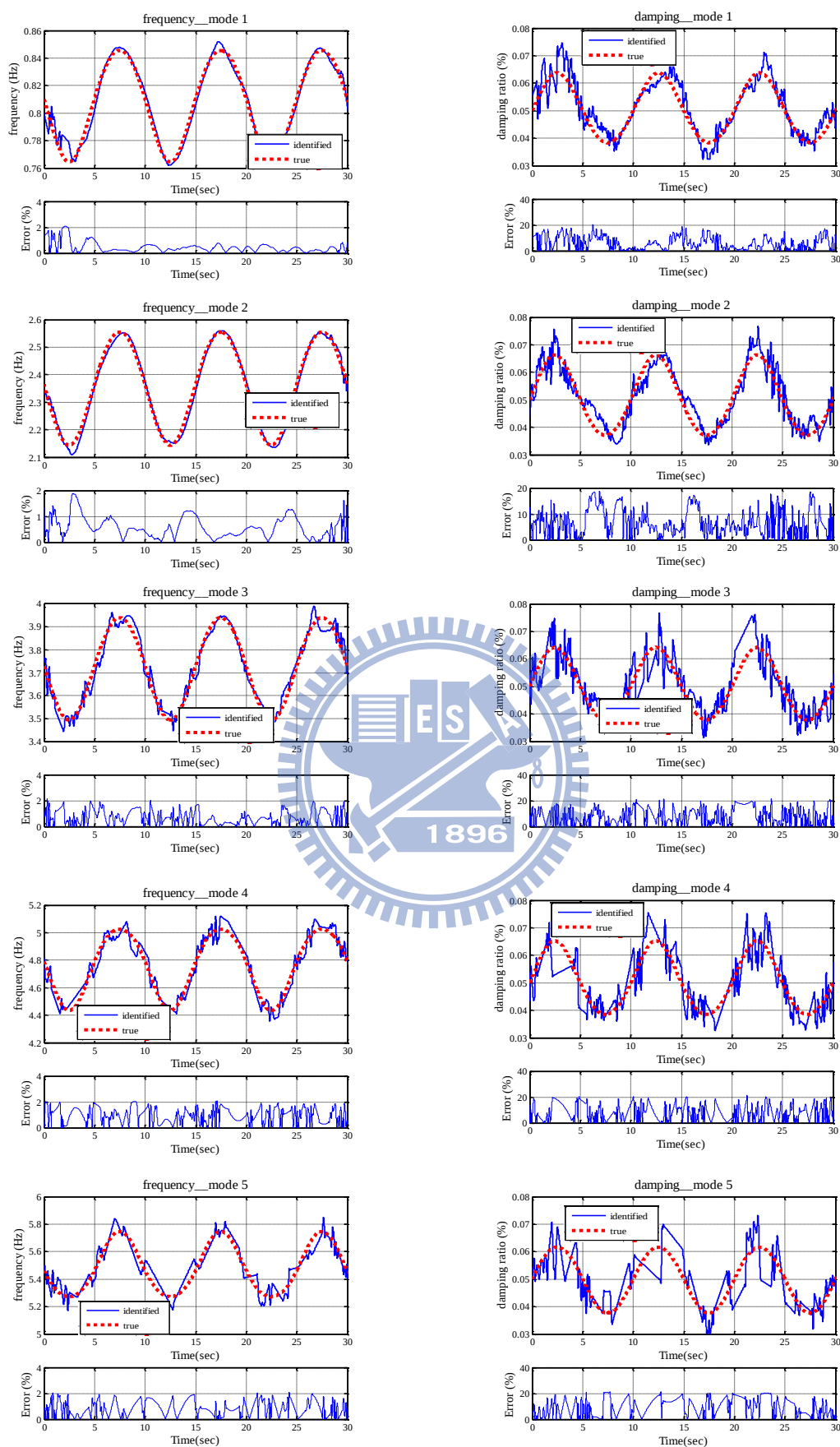


圖 4.15 五層樓剪力構架含 5% 噪訊的時變系統反應之識別結果

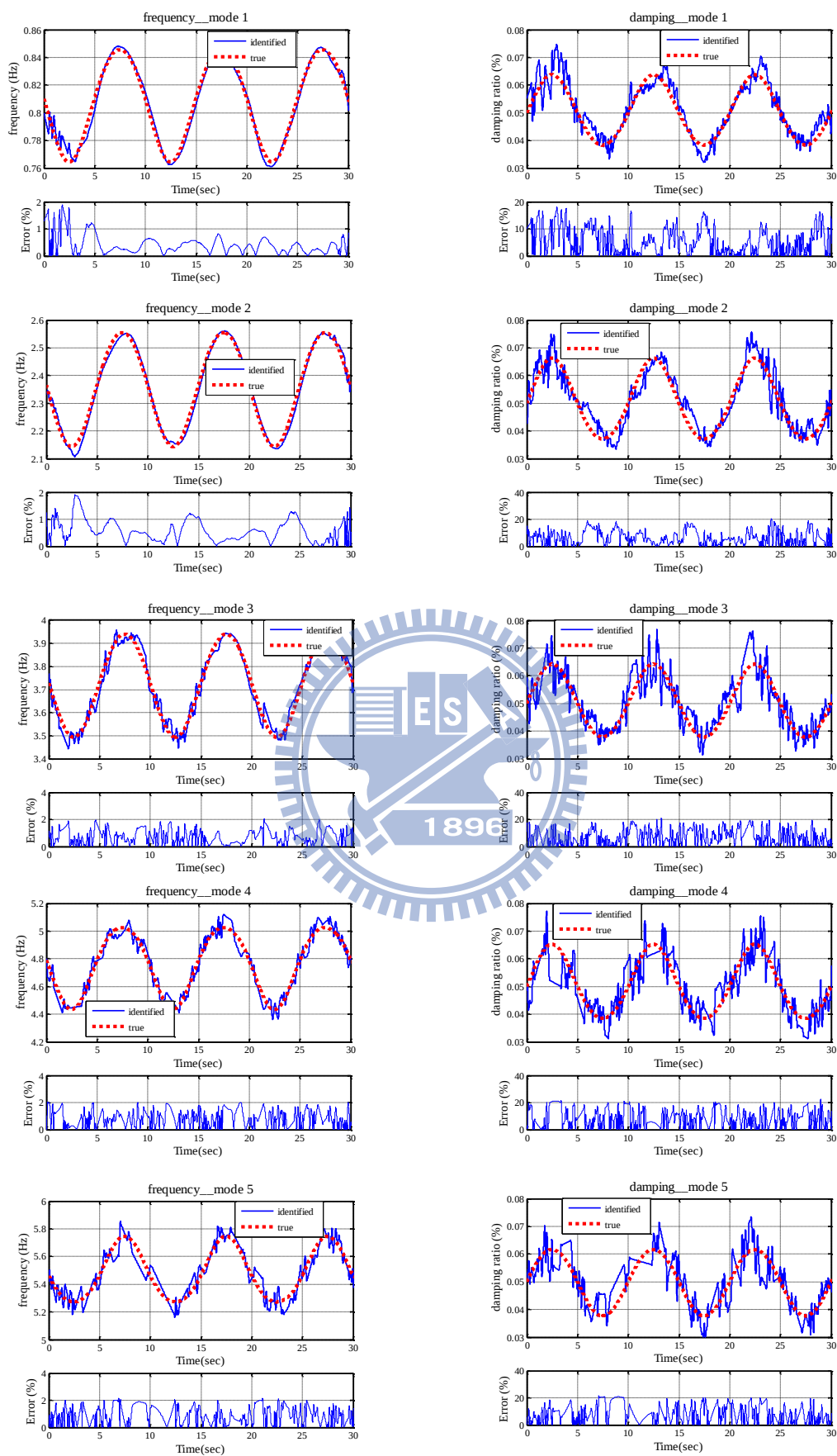


圖 4.16 五層樓剪力構架含 5% 噪訊的時變系統反應經卡氏濾波器處理後之識別結果

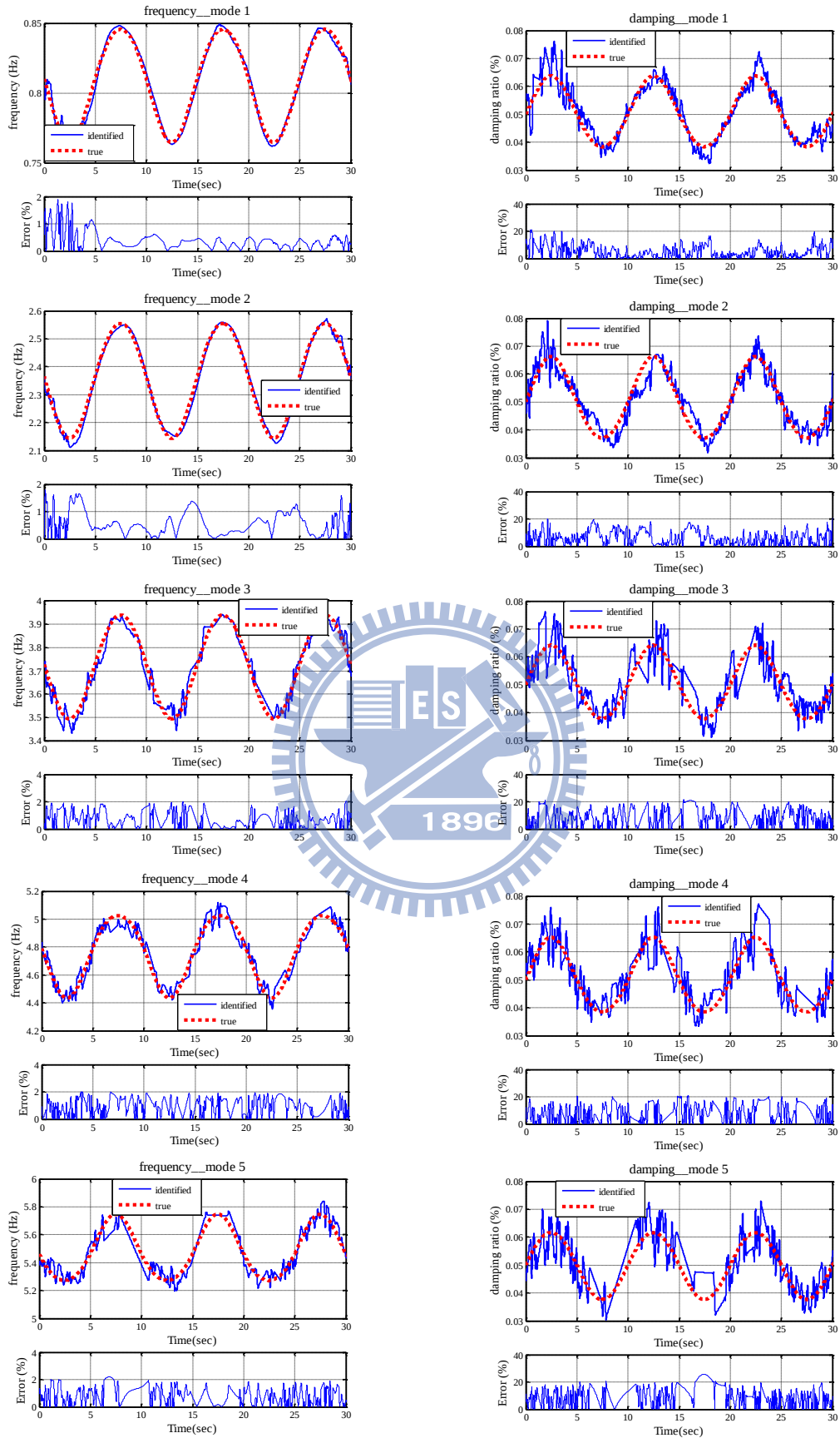


圖 4.17 五層樓剪力構架含 5% 噪訊的時變系統反應經中值濾波器處理後之識別結果

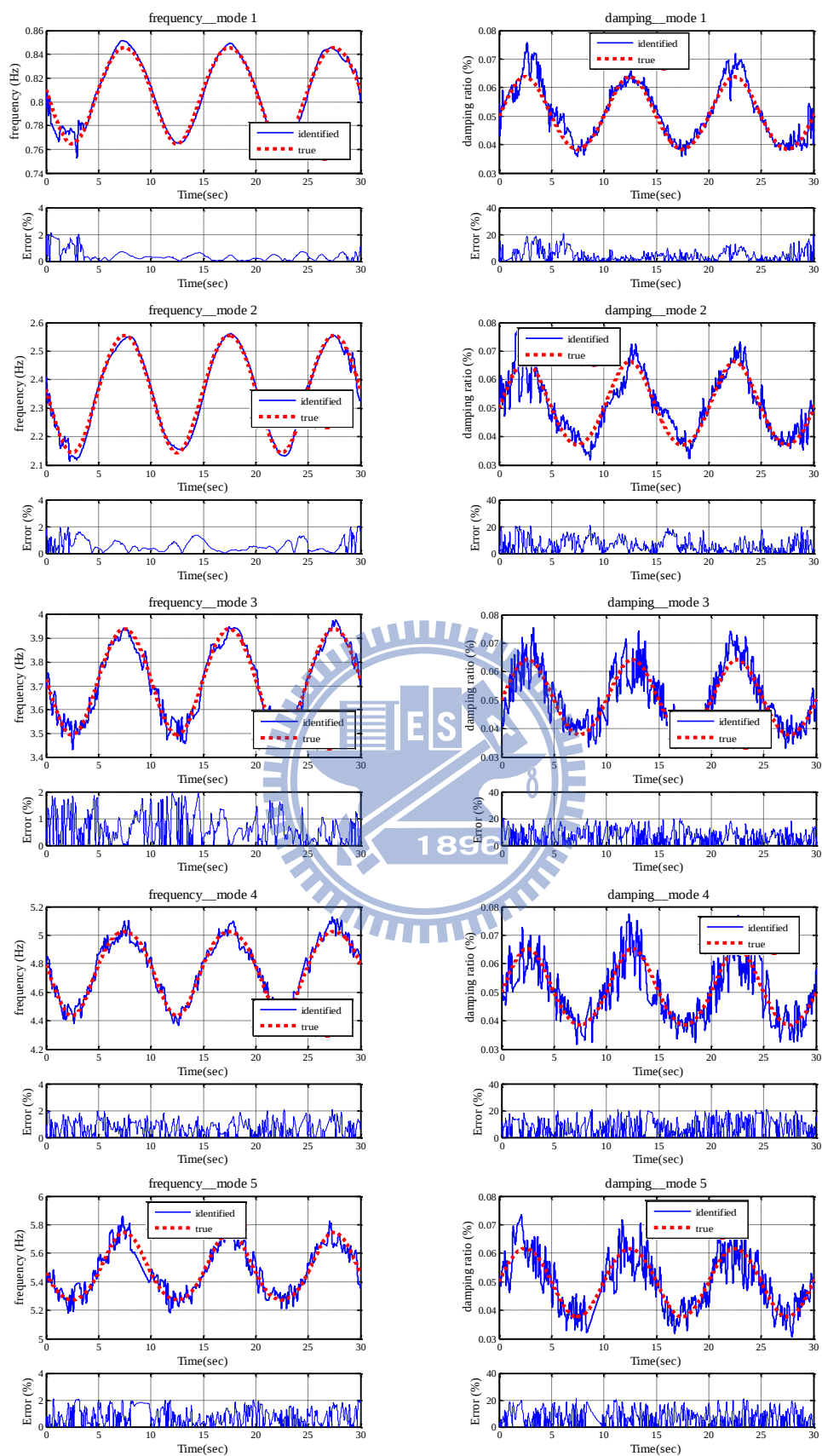


圖 4.18 五層樓剪力構架含 5% 噪訊的時變系統反應經離散小波濾波處理後之識別結果