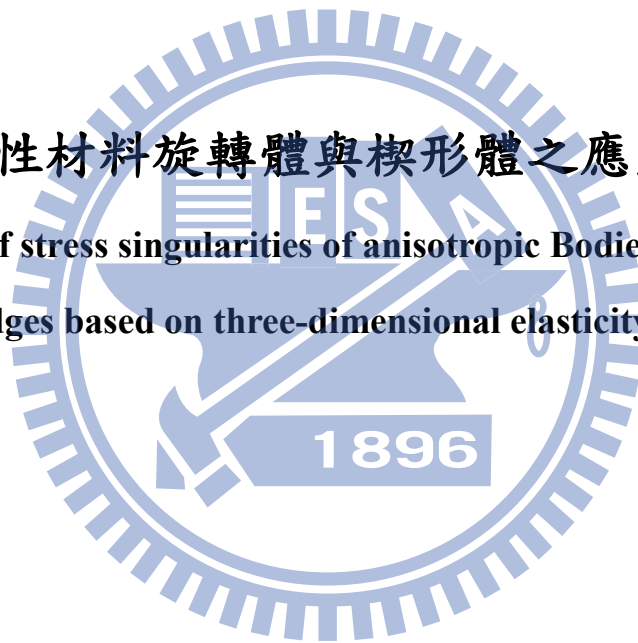


國立交通大學
土木工程學系
碩士論文

三維異向性材料旋轉體與楔形體之應力奇異性分析

The analyses of stress singularities of anisotropic Bodies of revolution and
wedges based on three-dimensional elasticity theory



研究生：李承哲

指導教授：黃炯憲 博士

中華民國一百零一年六月

三維異向性材料旋轉體與楔形體之應力奇異性分析

**The analyses of stress singularities of anisotropic Bodies of revolution and
wedges based on three-dimensional elasticity theory**

研 究 生：李承哲

Student : Cheng-Che Lee

指 導 教 授：黃炯憲

Advisor : Dr. Chiung-Shiann Huang



June 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零一年六月

三維異向性材料旋轉體與楔形體之應力奇異性分析

研究生：李承哲

指導教授：黃炯憲 博士

國立交通大學土木工程學系碩士班

摘要

本研究為探討三維異向性材料旋轉體及楔形體於邊界與材料性質不連續處之應力奇異性。利用特徵函數展開法，並結合級數解之技巧以建立旋轉體及楔形體之彈性應力奇異性漸進解。該漸進解為直接求解以位移分量表示之三維力平衡方程式。利用比較文獻中等向性材料之結果確認本研究所推導解之正確性。本研究考慮組成旋轉體與楔形體之材料可為等向性材料(Isotropic material)、正交性材料(Orthotropic material)及三斜晶體 (Triclinic material)。數值結果顯示單一異向性材料或雙材料(正交性/等向性，三斜晶體/等向性)之奇異性階數，明顯受幾何形狀、邊界條件與材料性質之影響。此些結果均見於文獻，可做為將來發展數值解之比對。

The analyses of stress singularities of anisotropic Bodies of revolution and wedges based on three-dimensional elasticity theory

Student : Cheng-Che Lee

Advisor : Dr. Chiung-Shiann Huang

Department of Civil Engineering
National Chiao-Tung University

Abstract

The work investigates the stress singularities induced by discontinuities of boundaries or material properties in anisotropic bodies of revolution and wedges. An eigenfunction expansion approach is combined with a power series solution technique to establish the asymptotic solutions around the singular points in bodies of revolution and wedges. The asymptotic solutions are developed by directly solving the 3D equations of equilibrium in terms of displacement components. The correctness of the proposed solutions are validated by comparing the present results with the published ones for isotropic bodies of revolution and wedges. Bodies of revolution and wedges under consideration are made of isotropic, orthotropic or triclinic materials. Numerical results reveal that the geometrically-induced stress singularities in bodies of revolution or wedges made of a single anisotropic material or two materials (orthotropic/isotropic, triclinic/isotropic) are significantly affected by geometry, boundary conditions and material properties. The present results can be used as a check on the solutions via numerical techniques such as finite element approaches.

誌謝

本論文得以順利完成，首先要感謝恩師 黃炯憲教授耐心與悉心的指導。作研究期間，老師嚴謹且不厭其煩的糾正錯誤，使學生的專業知識有所增長；並不斷提供新設備與優質的研究環境，使得研究能順利完成。在論文修改時，您細心的研讀並提出建議，使學生的論文得以更加完整。

論文口試時，承蒙交通大學土木工程學系 劉俊秀教授、林昌佑教授與 郭心怡教授於口試期間提供寶貴的意見，謹此表示最誠摯的感謝。

這份論文能夠順利完成，感謝研究室政甯學長、明儒學長的指導，在課業與研究上耐心且大方的指導與協助。在論文撰寫與口試期間，幫忙訂正論文與簡報，並提供諸多寶貴之建議。尤其是政甯學長，在研究論文上無私的傾囊相授，沒有你的幫助，我根本無法順利完成此論文。同時也感謝威智學長、連杰學長、靖俞學長、志偉學長，以及子軒學長、宗輝學長、家宇學長。另外，感謝同窗中原、鈞誠與維莘，因為有你們的相互扶持，使我在生活與課業上獲益良多。也感謝同學穎泰、進順、宣妤、連峰、柏林、綸桓、孟軒、思伶、江祥，學弟妹裕鈞、旭進、芳琳，還有宣治、俊佐、晟佑和俊超一起在生活和研究中成長、幫助。還要感謝所有交通大學的老師們、同學們。當然還要感謝台北、新竹的朋友們與在新竹研究所期間認識的所有人們。

最重要的，我要感謝我的家人，爸爸、媽媽從小的栽培及付出，並且辛苦的工作，你們一路支持，讓我無後顧之憂。也要感謝在台北的爺爺、奶奶、叔叔及嬸嬸，對我的照顧及關心，讓我在台北的日子裡感受到關愛。還有台北、新竹家教家長們對我的照顧。

最後，我要感謝珮娟，在這一段時間的陪伴、幫助，感恩妳的包容與忍讓，且每當我感到沮喪、洩氣時，你總是給我鼓勵，帶給我很大正面的動力。同時對我的關心、照顧並帶給我滿滿的歡樂，讓我這一路走來不孤單。沒有妳，我無法通過這一切！

在這即將離開的時刻，這些日子滿滿的回憶湧上心頭，這些點點滴滴將陪伴我走向未來。凡走過必留下痕跡，凡努力必造就意義。



目錄

摘要.....	I
Abstract.....	II
誌謝.....	III
目錄.....	V
表目錄.....	VII
圖目錄.....	VIII
第一章 緒論.....	1
§1.1 前言.....	1
§1.2 研究動機與方法.....	1
§1.3 文獻回顧.....	1
§1.4 研究內容.....	3
第二章 三維旋轉體之幾何所引致應力奇異解.....	5
§2.1 平衡方程式.....	5
§2.2 本構方程式.....	5
§2.3 彈性材料常數座標轉換.....	6
§2.4 應力與位移之關係.....	8
§2.5 圓柱 (r, Z) 座標轉換成角函數 (ρ, ϕ) 座標.....	10
§2.6 $\rho \rightarrow 0$ 之奇異性漸進解.....	13
§2.7 連續條件與邊界條件之滿足.....	20
§2.8 正交性材料 (Orthotropic Materials) 之特性.....	21
第三章 旋轉體應力奇異階數分析.....	24
§3.1 方法驗證與收斂性分析.....	24
§3.2 矽化鈦旋轉體之奇異性分析.....	27
§3.3 不同正交性材料之影響.....	28
§3.4 矽化鈦彈性係數改變之影響.....	30

3.4.1 Case1.....	30
3.4.2 Case2.....	30
3.4.3 Case3.....	31
§3.5 雲矽鈣石旋轉體之應力奇異性.....	32
§3.6 雙材料旋轉體之應力奇異性.....	33
第四章 三維楔形體之幾何所引致應力奇異解.....	47
§4.1 $r \rightarrow 0$ 之奇異性漸進解.....	48
§4.2 連續條件與邊界條件之滿足.....	53
§4.3 正交性材料 (Orthotropic Materials) 之特性.....	53
第五章 楔形體結果分析.....	56
§5.1 方法驗證與收斂性分析.....	56
§5.2 矽化鈦楔形體之奇異性分析.....	58
§5.3 雙材料旋轉體之應力奇異性.....	59
5.3.1 矽化鈦/等向性材料 雙材料楔形體.....	59
5.3.2 正交性材料/等向性材料 雙材料楔形體.....	62
5.3.3 雲矽鈣石/等向性材料 雙材料楔形體.....	63
第六章 結論與建議.....	75
§6.1 結論.....	75
6.1.1 三維旋轉體.....	75
6.1.2 三維楔形體.....	76
§6.2 建議.....	77
參考文獻.....	78

表目錄

表 3.1 等向性材料旋轉體最小 λ_m 的實數部分之收斂性.....	25
表 3.2 材料彈性係數.....	26
表 3.3 改變彈性係數案例說明.....	30
表 5.1 等向性材料楔形體最小 λ_m 的實數部分之收斂性.....	57



圖目錄

圖 2.1 複合式材料旋轉體.....	6
圖 2.2 圓柱座標 (r, Z) 與角函數座標 (ρ, ϕ)	10
圖 2.3 旋轉體子域 $\phi \in [\phi_0, \phi_n]$	13
圖 3.1 複合式材料之旋轉體角度示意圖.....	24
圖 3.2 於收斂性分析中旋轉體之幾何形狀與邊界條件.....	25
圖 3.3 F-F 矽化鈦旋轉體 $(\beta = 360^\circ)$ 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_x 、 γ_y 或 γ_z 之變化.....	35
圖 3.4 F-F 不同 γ_y 下矽化鈦旋轉體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化.....	35
圖 3.5 不同 γ_y 之 F-F 矽化鈦旋轉體 $(\beta = 360^\circ)$ 最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 θ 之變化.....	36
圖 3.6 不同邊界條件矽化鈦旋轉體的最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化(考慮 $\gamma_y = 0^\circ$).....	36
圖 3.7 $\beta = 240^\circ$ 矽化鈦旋轉體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 在不同邊界條件下隨 γ_y 之變化.....	37
圖 3.8 $\beta = 300^\circ$ 矽化鈦旋轉體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 在不同邊界條件下隨 γ_y 之變化.....	37
圖 3.9 $\beta = 360^\circ$ 之不同正交性材料旋轉體的最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之改變(F-F 邊界條件)....	38
圖 3.10 不同正交性材料旋轉體的最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之改變(考慮 $\gamma_y = 0^\circ$, F-F 邊界條件).	38
圖 3.11 $\beta = 360^\circ$ 之不同正交性材料旋轉體的最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 θ 之改變(考慮 $\gamma_y = 0^\circ$, F-F 邊界條件).....	39
圖 3.12 不同正交性材料旋轉體的最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之改變(考慮 $\gamma_y = 0^\circ$, C-F 邊界條件).	39
圖 3.13 Case 1 旋轉體的最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之改變(考慮 $\gamma_y = 30^\circ$, F-F 邊界條件).....	40
圖 3.14 Case 1 旋轉體的最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之改變(考慮 $\gamma_y = 60^\circ$, F-F 邊界條件).....	40
圖 3.15 Case 2 旋轉體的最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之改變(考慮 $\gamma_y = 0^\circ$, F-F 邊界條件).....	41

圖 3.16 $\beta = 360^\circ$ 之 Case 3 旋轉體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_x 、 γ_y 或 γ_z 之變化 (F-F)	41
圖 3.17 $\beta = 360^\circ$ 之 Case 3 旋轉體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 在不同邊界條件下隨 θ 之變化.....	42
圖 3.18 $\beta = 360^\circ$ 之雲矽鈣石旋轉體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 在不同邊界條件下隨 γ_y 之變化.....	42
圖 3.19 $\beta = 360^\circ$ 之雲矽鈣石旋轉體之在不同 γ_y 下最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 θ 之變(F-F 邊界條件)..	43
圖 3.20 雲矽鈣石旋轉體在不同邊界條件下最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化(考慮 $\gamma_y = 0^\circ$).....	43
圖 3.21 雙材料旋轉體在不同 β_1 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之變化(F-F 邊界條件).....	44
圖 3.22 $\beta_1 = 90^\circ$ ， $\beta - \beta_1 = 90^\circ$ 之雙材料旋轉體在不同邊界條件下最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之變化.....	44
圖 3.23 $\beta_1 = 90^\circ$ 之雙材料旋轉體在不同 γ_y 下最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 θ 之變化(F-F 邊界條件)....	45
圖 3.24 雙材料旋轉體在不同 γ_y 下最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化(F-F 邊界條件).....	45
圖 3.25 雙材料旋轉體在不同邊界條件下最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化(考慮 $\gamma_y = 60^\circ$).....	46
圖 4.1 楔型體之座標 (X, Y, Z) 與 (r, θ, Z)	47
圖 4.2 楔型體子域 $\theta \in [0, \theta_n]$	51
圖 5.1 複合式材料之楔形體角度示意圖	56
圖 5.2 於收斂性分析中楔形體之幾何形狀與邊界條件.....	57
圖 5.3 F-F 矽化鈦楔形體 ($\beta = 360^\circ$) 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_x 、 γ_y 或 γ_z 之變化.....	65
圖 5.4 F-F 不同 γ_x 下矽化鈦楔形體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化.....	65
圖 5.5 F-F 不同 γ_y 下矽化鈦楔形體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化.....	66
圖 5.6 F-F 不同 γ_z 下矽化鈦楔形體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化.....	66
圖 5.7 不同邊界條件之矽化鈦楔形體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化 (考慮 $\gamma = 0^\circ$)	67

圖 5.8 F-F 不同 β_1 下雙材料楔形體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_x 之變化.....	67
圖 5.9 F-F 不同 β_1 下雙材料楔形體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之變化.....	68
圖 5.10 F-F 不同 β_1 下雙材料楔形體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_z 之變化.....	68
圖 5.11 F-F 不同 γ_x 下雙材料楔形體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化.....	69
圖 5.12 F-F 不同 γ_y 下雙材料楔形體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化.....	69
圖 5.13 F-F 不同 γ_z 下雙材料楔形體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化.....	70
圖 5.14 不同邊界條件之雙材料楔形體的最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化 (考慮 $\gamma = 0^\circ$)	70
圖 5.15 F-F 雙材料楔形體 ($\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 180^\circ$) 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_x 之變化.....	71
圖 5.16 F-F 雙材料楔形體 ($\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 180^\circ$) 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之變化.....	71
圖 5.17 F-F 雙材料楔形體 ($\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 180^\circ$) 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_z 之變化.....	72
圖 5.18 F-F 雙材料楔形體 ($\beta_2 = 180^\circ$) 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化 (考慮 $\gamma = 0^\circ$)	72
圖 5.19 F-F 雙材料楔形體 ($\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 180^\circ$) 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_x, γ_y 或 γ_z 之變化...	73
圖 5.20 F-F 不同 γ_x 下雙材料楔形體 ($\beta_2 = 180^\circ$) 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化.....	73
圖 5.21 F-F 不同 γ_y 下雙材料楔形體 ($\beta_2 = 180^\circ$) 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化.....	74
圖 5.22 F-F 不同 γ_z 下雙材料楔形體 ($\beta_2 = 180^\circ$) 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化.....	74

第一章 緒論

§1.1 前言

異向性材料在現代工程結構和元件中已被廣泛的應用，而這些材料安全可靠程度也成為關注的重點。與等向性材料相比，異向性材料的應力奇異性更為複雜，尤其是不同材料的連接處，應力奇異性容易導致界面破壞，甚至釀成事故。了解異向性材料應力奇異性，能夠為材料的結構設計與安全性提供一評估之依據。

§1.2 研究動機與方法

材料在應用上常面臨應力奇異點 (stress singularity) 之問題，通常發生於：(1)幾何形狀不連續 (如裂縫尖銳切角或邊界條件)；(2)載重點處 (集中載重或載重強度急遽改變)；(3)材料性質之陡變 (如複合材料)。之前學者大多研究等向性材料(Isotropic material) 或層狀複合材料(Laminate composite)在不同邊界條件、材料性質及幾何形狀對應力奇異性之影響。或是將材料纖維方向 (fiber orientations) 旋轉後，將其視為異向性材料來做分析。

本研究將分析一般異向性材料之旋轉體及楔形體，利用特徵函數展開法，並結合級數解之技巧以建立旋轉體及楔形體之彈性奇異性漸進解。該漸進解為直接求解於以位移分量表示之三維力平衡方程式；分析在不同邊界條件、材料性質、幾何形狀及材料座標軸分別對幾何座標軸不一致之情況下，應力奇異性之變化。

§1.3 文獻回顧

材料破壞一直為工程應用之重點，為有效預測材料破壞之行為，許多學者針對應力奇異性問題進行研究探討；常被討論的幾何形狀有旋轉體 (Body Revolution) 及楔形體 (Wedge)，因為其幾何形狀簡單，較易用解析方法求解；其應力奇異特性在實際工程應

用常遇到。

於等向性(Isotropic)旋轉體之應力奇異性問題探討，常見於文獻中之分析方法可大約分為兩類，一類為將三維問題，透過軸對稱之假設，分解為面內及面外變形獨立兩問題；另一為直接求解三維之彈性平衡。因為三維旋轉體的尖銳邊界不連續，會在其附近造成應力奇異性，Huang 和 Leissa[1] 利用特徵方程展開及位移來表示三維圓柱座標下之平衡方程式，在不同邊界條件下求取其閉合解；Huang 和 Leissa[2] 利用特徵方程展開在雙材料旋轉體之尖端處求取其應力奇異性漸進解；異向性旋轉體之應力奇異性問題。由於材料的複雜性，使得以解析法求解三維異向性材料旋轉體的奇異性(singularity)問題，在數學的處理上顯得相當困難。

因為層狀複合式材料廣泛使用在結構工程設計上，異向性楔形體之應力奇異性問題較多受到關注。England[3]指出許多在應力場有精確解的線彈性問題，其應力奇異性會發生在尖角處與邊界條件改變處，應力奇異性會受邊界條件與幾何形狀改變影響，又以幾何形狀改變影響較大；假設廣義平面應變或應力下，Bogy[4]及 Kuo 和 Bogy[5,6]根據 Mellin transform 分析當纖維方向在平面上，面內變形之應力問題。Ma 和 Hour[7]用 Mellin transform 解決了面外變形之應力問題。Lin 和 Hartmann [8]利用 Lekhnitskii's 複變數法來分析異向性楔形體，其為一特徵值問題，在不同幾何形狀及材料參數下求得應力奇異性，解決了當纖維方向分別在不同平面上，面內與面外偶合之應力問題。Chue[9,10]利用 Lekhnitskii's 複數函數建立一通解，並根據此解以決定異向性楔形體之應力奇異階數。應力奇異階數會隨幾何形狀、邊界條件及材料性質不同而改變。Liu[11]利用 Lekhnitskii's 函數，分析異向性複合材料之楔形體及連結體在其中一材料之纖維方向不同於幾何座標方向時，其應力奇異性隨纖維方向旋轉之角度及邊界條件不同而改變。Chen[12]根據 Ting[13]用 Stroh formalism 建立之二維變形方程式，利用特徵方程式分析異向性複合材料之楔形體及連結體(junction)，因其幾何形狀、邊界條件及材料性質不同，探討其應力奇異性之變化。Pageau 和 Biggers[14] 利用有限元素法分析異向性材料由材料性質與幾何形狀之不連續，所造成應力奇異階數，該法被應用於二維平面之幾何形狀，

垂直於該平面方向之幾何形狀保持不變(假設為 prismatic)。結果發現在三維空間之問題可被簡化為為面內(Inplane)及面外(Antiplane)之問題;假設物理量與厚度無關之條件下, Delale[15]用 Lekhnitskii's & William's method 解決了當纖維方向分別在不同平面上, 面內與面外偶合之應力問題。Hwu[16]利用 Stroh formalism, 建立一滿足二維異向線彈性平衡式之解, 其為一複雜變異式。藉由滿足邊界條件, 可得到楔形體尖端處之應力奇異階數, 應力奇異階數會因材料性質與幾何形狀不同而改變; Pageau[17] 利用有限元素法及延伸 Yamada 與 Okumura 所提出之 Hybrid and Mixed Finite Element Methods, 去分析異向性材料楔形體, 因材料性質不同及幾何形狀不連續所造成平面內應力奇異性。

§1.4 研究內容

有別於之前學者均利用二維之力學方法分析應力奇異性問題。本研究利用特徵函數展開法, 並結合級數解之技巧以建立旋轉體及楔形體之彈性奇異性漸進解。該漸進解為直接求解於以位移分量表示之三維力平衡方程式, 並無做任何平面簡化之假設; 分析在不同邊界條件、材料性質、幾何形狀及材料座標軸分別對幾何座標軸不一致之情況下, 應力奇異性之變化。

論文架構如下:

第一章 緒論: 主要內容為研究動機與方法、文獻回顧及研究內容之簡介

第二章 三維旋轉體之幾何所引致應力奇異解: 利用特徵函數展開法配合級數解, 求解三維旋轉體, 以位移表示之平衡方程式, 於幾何急劇變化處(如尖角處)之漸近解; 再將正交性材料將材料座標軸 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對 X、Y 與 Z 軸進行旋轉, 並分別對其所造成之影響進行探討。

第三章 旋轉體應力奇異階數分析: 方法驗證與收斂性分析。探討材料的特性、邊界條件、幾何形狀、及參數等改變對應力奇異性(singularity) λ_m 值之影響; 分析由正交性材料及三斜晶體構成單一材料之應力奇異性。以及分析由正交性材料與

等向性材料組合成雙材料之應力奇異性。

第四章 三維楔形體之幾何所引致應力奇異解：利用特徵函數展開法配合級數解，求解三維楔形體，以位移表示之平衡方程式，於幾何急劇變化處（如尖角處）之漸近解；再將正交性材料將材料座標軸 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對 X、Y 與 Z 軸進行旋轉，並分別對其所造成之影響進行探討。

第五章 楔形體應力奇異階數分析：方法驗證與收斂性分析。探討材料的特性、邊界條件、幾何形狀、及參數等改變對應力奇異性（singularity） λ_m 值之影響；分析由矽化鈦構成單一材料之應力奇異性。以及分析由正交性材料與等向性材料、三斜晶體材料與等向性材料組合成雙材料之應力奇異性。

第六章 結論與建議：總結此研究中旋轉體與楔形體個參數變化對奇異性之影響；並建議此研究於未來進一步探討之部分。



第二章 三維旋轉體之幾何所引致應力奇異解

本章利用特徵函數展開法配合級數解，求解三維旋轉體，以位移表示之平衡方程式，於幾何急劇變化處（如尖角處）之漸近解，以便探討由幾何所引致支應力奇異現象。

§2.1 平衡方程式

考慮如圖 2.1 所示之旋轉體，為了求解的便利性，用圓柱座標系 (r, θ, Z) 來表示三維力平衡方程式。在不考慮體力（Body force）下之力平衡方程式為

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \quad (2.1c)$$

§2.2 本構方程式

由假設構成旋轉體材料為 *rectangularly anisotropic*，該材料之本構方程式在卡式座標系 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ （參看圖 2.1）為

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{C}]\{\bar{\varepsilon}\}$$

$$\{\bar{\sigma}\} = \left\{ \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \quad \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \quad \sigma_{\bar{z}\bar{z}} \quad \sigma_{\bar{y}\bar{z}} \quad \sigma_{\bar{x}\bar{z}} \quad \sigma_{\bar{x}\bar{y}} \right\}^T, \quad \{\bar{\varepsilon}\} = \left\{ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} \quad \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} \quad \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} \quad 2\varepsilon_{\bar{y}\bar{z}} \quad 2\varepsilon_{\bar{x}\bar{z}} \quad 2\varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} \right\}^T$$

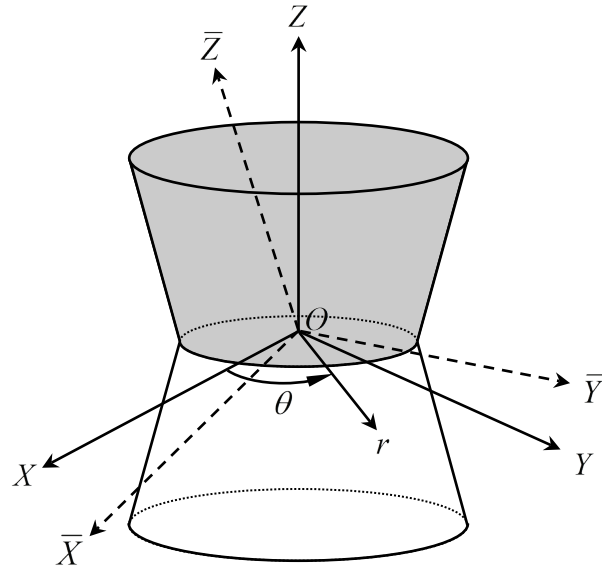


圖 2.1 複合式材料旋轉體

其中異向性材料之彈性係數為

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & \bar{c}_{14} & \bar{c}_{15} & \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{12} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & \bar{c}_{24} & \bar{c}_{25} & \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{13} & \bar{c}_{23} & \bar{c}_{33} & \bar{c}_{34} & \bar{c}_{35} & \bar{c}_{36} \\ \bar{c}_{14} & \bar{c}_{24} & \bar{c}_{34} & \bar{c}_{44} & \bar{c}_{45} & \bar{c}_{46} \\ \bar{c}_{15} & \bar{c}_{25} & \bar{c}_{35} & \bar{c}_{45} & \bar{c}_{55} & \bar{c}_{56} \\ \bar{c}_{16} & \bar{c}_{26} & \bar{c}_{36} & \bar{c}_{46} & \bar{c}_{56} & \bar{c}_{66} \end{bmatrix}$$

於本文中，稱 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 為材料異向性之材料座標軸，如圖 2.1 所示之旋轉體，其幾何座標軸 $((X, Y, Z)$ 或 (r, θ, Z))與材料座標軸不一致。

§2.3 彈性材料常數座標轉換

為配合平衡方程式(2.1)，將材料系數轉換至圓柱座標系 (r, θ, Z) ，可得在 (r, θ, Z) 座標系統之本構方程式

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (2.2)$$

其中

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{rr} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{\theta z} \quad \sigma_{zr} \quad \sigma_{r\theta}\}^T, \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{rr} \quad \varepsilon_{\theta\theta} \quad \varepsilon_{zz} \quad 2\varepsilon_{\theta z} \quad 2\varepsilon_{zr} \quad 2\varepsilon_{r\theta}\}^T$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix}$$

$[C]$ 為 θ 之函數，與 $[\bar{C}]$ 之間的轉換關係如下

$$[C] = [T]_{\sigma} [K] [\bar{C}] [K]^T [T]_{\epsilon}^{-1}$$

其中

$$[T]_{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\epsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\cos \theta \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos(\bar{X}, X) & \cos(\bar{X}, Y) & \cos(\bar{X}, Z) \\ \cos(\bar{Y}, X) & \cos(\bar{Y}, Y) & \cos(\bar{Y}, Z) \\ \cos(\bar{Z}, X) & \cos(\bar{Z}, Y) & \cos(\bar{Z}, Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & 2K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{12}^2 & l_{13}^2 \\ l_{21}^2 & l_{22}^2 & l_{23}^2 \\ l_{31}^2 & l_{32}^2 & l_{33}^2 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} l_{12}l_{13} & l_{13}l_{11} & l_{11}l_{12} \\ l_{22}l_{23} & l_{23}l_{21} & l_{21}l_{22} \\ l_{32}l_{33} & l_{33}l_{31} & l_{31}l_{32} \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} l_{21}l_{31} & l_{22}l_{32} & l_{23}l_{33} \\ l_{31}l_{11} & l_{32}l_{12} & l_{33}l_{13} \\ l_{11}l_{21} & l_{12}l_{22} & l_{13}l_{23} \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} l_{22}l_{33} + l_{23}l_{32} & l_{23}l_{31} + l_{21}l_{33} & l_{21}l_{32} + l_{22}l_{31} \\ l_{32}l_{13} + l_{33}l_{12} & l_{33}l_{11} + l_{31}l_{13} & l_{31}l_{12} + l_{32}l_{11} \\ l_{12}l_{23} + l_{13}l_{22} & l_{13}l_{21} + l_{11}l_{23} & l_{11}l_{22} + l_{12}l_{21} \end{bmatrix}$$

§2.4 應力與位移之關係

在圓柱座標 (r, θ, Z) ，應變與位移之關係為

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \\ \varepsilon_{zr} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\end{aligned}\quad (2.3)$$

其中 u_r 、 u_θ 、 u_z 分別為 r 、 θ 和 Z 方向位移。

由式(2.2)及(2.3)可得

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{14} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + c_{15} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ &+ c_{16} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)\end{aligned}\quad (2.4a)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= c_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{22} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{23} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{24} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + c_{25} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ &+ c_{26} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)\end{aligned}\quad (2.4b)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= c_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{23} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{34} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + c_{35} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ &+ c_{36} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)\end{aligned}\quad (2.4c)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{z\theta} &= c_{14} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{24} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{34} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{44} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + c_{45} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ &+ c_{46} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)\end{aligned}\quad (2.4d)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zr} &= c_{15} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{25} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{35} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{45} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + c_{55} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ &+ c_{56} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)\end{aligned}\quad (2.4e)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta} &= c_{16} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{26} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{36} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{46} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + c_{56} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ &+ c_{66} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)\end{aligned}\quad (2.4f)$$

將式(2.4)代入方程式(2.1)可得以位移表示之平衡方程式：

$$\begin{aligned}
& \left[c_{11} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + c_{55} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(c_{11} + \frac{\partial c_{16}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial r} + \left(c_{15} + \frac{\partial c_{56}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial z} + \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} \right. \\
& \quad \left. + 2c_{16} \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \theta} + 2c_{56} \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} + 2c_{15} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \left(-c_{22} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} + c_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{r^2} \right] u_r \\
& \quad + \left[c_{16} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + c_{45} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(-c_{26} + \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial r} + \left(c_{14} - c_{24} - c_{56} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial z} \right. \\
& \quad \left. + \left(-c_{22} - c_{66} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \theta} + (c_{25} + c_{46}) \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} + (c_{14} + c_{56}) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \right. \\
& \quad \left. + \left(c_{26} - \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} + c_{26} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{r^2} \right] u_\theta + \left[c_{15} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + c_{35} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(c_{15} - c_{25} + \frac{\partial c_{56}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial r} \right. \\
& \quad \left. + \left(c_{13} - c_{23} + \frac{\partial c_{36}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial z} + \left(-c_{24} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} + (c_{14} + c_{56}) \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \theta} + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} \right. \\
& \quad \left. + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + c_{46} \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right] u_z = 0 \tag{2.5a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[c_{16} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + c_{45} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(2c_{16} + c_{26} + \frac{\partial c_{12}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial r} + \left(2c_{56} + c_{24} + \frac{\partial c_{25}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial z} + \left(c_{22} + c_{66} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} \right. \\
& \quad \left. + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \theta} + (c_{25} + c_{46}) \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} + (c_{56} + c_{14}) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \left(c_{26} + \frac{\partial c_{22}}{\partial \theta} + c_{26} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{r^2} \right] u_r \\
& \quad + \left[c_{66} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(c_{66} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial r} + \left(c_{46} + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial z} + \left(\frac{\partial c_{22}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} \right. \\
& \quad \left. + 2c_{26} \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \theta} + 2c_{24} \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} + 2c_{46} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \left(-c_{66} - \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{r^2} \right] u_\theta \\
& \quad + \left[c_{56} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + c_{34} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(2c_{56} + \frac{\partial c_{25}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial r} + \left(2c_{36} + \frac{\partial c_{23}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial z} + \left(c_{46} + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} \right. \\
& \quad \left. + (c_{25} + c_{46}) \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \theta} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + c_{24} \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right] u_z = 0 \tag{2.5b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[c_{15} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + c_{35} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(c_{15} + c_{25} + \frac{\partial c_{14}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial r} + \left(c_{23} + c_{55} + \frac{\partial c_{45}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial z} + \left(c_{24} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} \right. \\
& \quad \left. + (c_{14} + c_{56}) \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \theta} + (c_{45} + c_{36}) \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} + (c_{55} + c_{13}) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \left(\frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} + c_{46} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{r^2} \right] u_r \\
& \quad + \left[c_{56} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + c_{34} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial r} + \left(c_{45} - c_{36} + \frac{\partial c_{44}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial z} + \left(-c_{46} + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (c_{25} + c_{46}) \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \theta} + (c_{44} + c_{23}) \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} + (c_{45} + c_{36}) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \left(-\frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} + c_{24} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{r^2} \Big] u_\theta \\
& + \left[c_{55} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + c_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(c_{55} + \frac{\partial c_{45}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial r} + \left(c_{35} + \frac{\partial c_{34}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r \partial z} + \left(\frac{\partial c_{44}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} \right. \\
& \left. + 2c_{45} \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \theta} + 2c_{34} \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} + 2c_{35} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + c_{44} \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right] u_z = 0
\end{aligned} \tag{2.5c}$$

§2.5 圓柱 (r, Z) 座標轉換成角函數 (ρ, ϕ) 座標

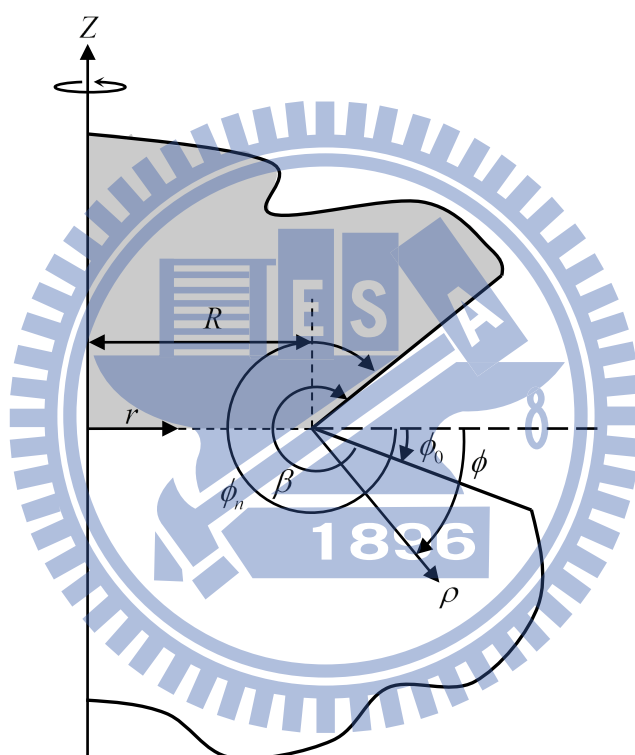


圖 2.2 圓柱座標 (r, Z) 與角函數座標 (ρ, ϕ)

為探討在如圖 2.1 中尖角處之應力奇異性，吾人須將 (r, Z) 座標轉換如圖 2.2 所示之 (ρ, ϕ) 座標，此二座標系統的關係如下

$$\rho = \sqrt{(r-R)^2 + z^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{-z}{r-R} \right), \quad r-R = \rho \cos \phi, \quad \text{和} \quad z = -\rho \sin \phi, \tag{2.6}$$

將式(2.6)代入方程式(2.5)可得

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(c_{11}L_1 + c_{55}L_3 + 2c_{15}L_5 \right) + \frac{1}{\rho \cos \phi + R} \left[\left(c_{11} + \frac{\partial c_{16}}{\partial \theta} \right) L_2 + \left(c_{15} + \frac{\partial c_{56}}{\partial \theta} \right) L_4 + 2c_{16} \frac{\partial}{\partial \theta} L_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 2c_{56} \frac{\partial}{\partial \theta} L_4 \right] + \frac{1}{(\rho \cos \phi + R)^2} \left[-c_{22} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} + c_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right\} u_r \\
& + \left\{ \left(c_{16}L_1 + c_{45}L_3 + (c_{14} + c_{56})L_5 \right) + \frac{1}{\rho \cos \phi + R} \left[\left(-c_{26} + \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \right) L_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(c_{14} - c_{24} - c_{56} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) L_4 + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial}{\partial \theta} L_2 + (c_{25} + c_{46}) \frac{\partial}{\partial \theta} L_4 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\rho \cos \phi + R} \left[\left(-c_{26} + \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \right) L_2 + \left(c_{14} - c_{24} - c_{56} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) L_4 \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{(\rho \cos \phi + R)^2} \left[c_{26} - \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} + c_{26} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left(-c_{22} - c_{66} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right\} u_\theta \\
& + \left\{ \left(c_{15}L_1 + c_{35}L_3 + (c_{13} + c_{55})L_5 \right) + \frac{1}{\rho \cos \phi + R} \left[\left(c_{15} - c_{25} + \frac{\partial c_{56}}{\partial \theta} \right) L_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(c_{13} - c_{23} + \frac{\partial c_{36}}{\partial \theta} \right) L_4 + (c_{14} + c_{56}) \frac{\partial}{\partial \theta} L_2 + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial}{\partial \theta} L_4 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{(\rho \cos \phi + R)^2} \left[\left(-c_{24} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + c_{46} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \right\} u_z = 0
\end{aligned} \tag{2.7a}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(c_{16}L_1 + c_{45}L_3 + (c_{56} + c_{14})L_5 \right) + \frac{1}{\rho \cos \phi + R} \left[\left(2c_{16} + c_{26} + \frac{\partial c_{12}}{\partial \theta} \right) L_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(2c_{56} + c_{24} + \frac{\partial c_{25}}{\partial \theta} \right) L_4 + (c_{21} + c_{66}) \frac{\partial}{\partial \theta} L_2 + (c_{25} + c_{46}) \frac{\partial}{\partial \theta} L_4 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{(\rho \cos \phi + R)^2} \left[\left(c_{26} + \frac{\partial c_{22}}{\partial \theta} + c_{26} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \left(c_{22} + c_{66} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right\} u_r \\
& + \left\{ \left(c_{66}L_1 + c_{44}L_3 + 2c_{46}L_5 \right) + \frac{1}{\rho \cos \phi + R} \left[\left(c_{66} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right) L_2 + \left(c_{46} + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right) L_4 + 2c_{26} \frac{\partial}{\partial \theta} L_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 2c_{24} \frac{\partial}{\partial \theta} L_4 \right] + \frac{1}{(\rho \cos \phi + R)^2} \left[\left(\frac{\partial c_{22}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(-c_{66} - \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] \right\} u_\theta \\
& + \left\{ \left(c_{56}L_1 + c_{34}L_3 + (c_{36} + c_{45})L_5 \right) + \frac{1}{\rho \cos \phi + R} \left[\left(2c_{56} + \frac{\partial c_{25}}{\partial \theta} \right) L_2 + \left(2c_{36} + \frac{\partial c_{23}}{\partial \theta} \right) L_4 \right. \right. \\
& \left. \left. + (c_{25} + c_{46}) \frac{\partial}{\partial \theta} L_2 + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial \theta} L_4 \right] + \frac{1}{(\rho \cos \phi + R)^2} \left[\left(c_{46} + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + c_{24} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \right\} u_z = 0
\end{aligned} \tag{2.7b}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(c_{15}L_1 + c_{35}L_3 + (c_{55} + c_{13})L_5 \right) + \frac{1}{\rho \cos \phi + R} \left[\left(c_{15} + c_{25} + \frac{\partial c_{14}}{\partial \theta} \right) L_2 + \left(c_{23} + c_{55} + \frac{\partial c_{45}}{\partial \theta} \right) L_4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (c_{14} + c_{56}) \frac{\partial}{\partial \theta} L_2 + (c_{45} + c_{36}) \frac{\partial}{\partial \theta} L_4 \right] + \frac{1}{(\rho \cos \phi + R)^2} \left[\left(\frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} + c_{46} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(c_{24} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right\} u_r + \left\{ \left(c_{56}L_1 + c_{34}L_3 + (c_{45} + c_{36})L_5 \right) + \frac{1}{\rho \cos \phi + R} \left[\left(\frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) L_2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(c_{45} - c_{36} + \frac{\partial c_{44}}{\partial \theta} \right) L_4 + (c_{25} + c_{46}) \frac{\partial}{\partial \theta} L_2 + (c_{44} + c_{23}) \frac{\partial}{\partial \theta} L_4 \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(\rho \cos \phi + R)^2} \left[\left(-c_{46} + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(-\frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} + c_{24} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] \right\} u_\theta \\
& \quad + \left\{ \left(c_{55}L_1 + c_{33}L_3 + 2c_{35}L_5 \right) + \frac{1}{\rho \cos \phi + R} \left[\left(c_{55} + \frac{\partial c_{45}}{\partial \theta} \right) L_2 + \left(c_{35} + \frac{\partial c_{34}}{\partial \theta} \right) L_4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2c_{45} \frac{\partial}{\partial \theta} L_2 + 2c_{34} \frac{\partial}{\partial \theta} L_4 \right] + \frac{1}{(\rho \cos \phi + R)^2} \left[\left(\frac{\partial c_{44}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \right\} u_z = 0 \tag{2.7c}
\end{aligned}$$

其中

$$L_1 = \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\sin^2 \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\sin^2 \phi}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$L_2 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$L_3 = \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\cos^2 \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \phi} - \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos^2 \phi}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$L_4 = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\cos \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$L_5 = -\sin \phi \cos \phi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\sin \phi \cos \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\cos 2\phi}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{\cos 2\phi}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\sin \phi \cos \phi}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

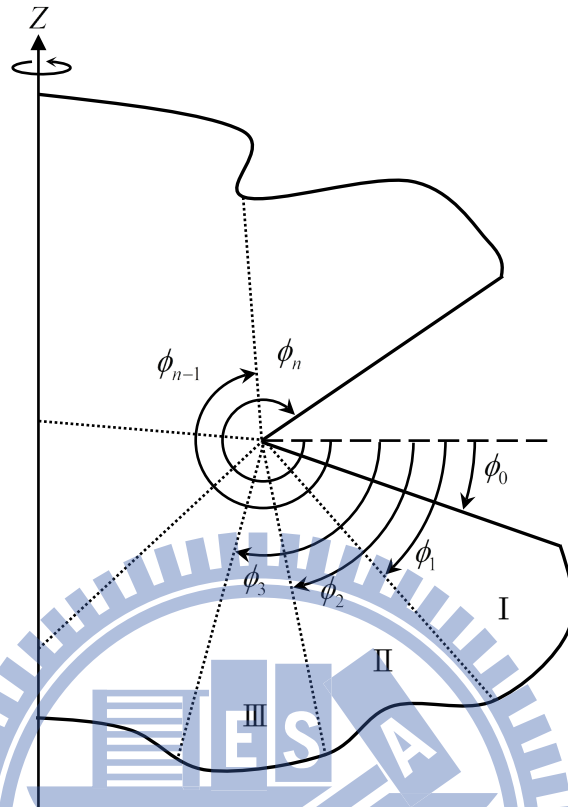


圖 2.3 子域 $\phi \in [\phi_0, \phi_n]$

§2.6 $\rho \rightarrow 0$ 之奇異性漸進解

利用特徵函數展開法，解的形式可表示成如下

$$u_r(\rho, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{\lambda_m+n} \hat{U}_n^{(m)}(\theta, \phi)$$

$$u_\theta(\rho, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{\lambda_m+n} \hat{V}_n^{(m)}(\theta, \phi)$$

$$u_z(\rho, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{\lambda_m+n} \hat{W}_n^{(m)}(\theta, \phi) \quad (2.8)$$

λ_m 是待定的參數，此參數可以為複數，因為要確保在 $\rho=0$ 之有限位移變形，實數部分一定為正數，因奇異性(singularity)行為發生在 ρ 逼近 0 的時候，故將式(2.8)代入方程式(2.7)做整理，並只取 ρ 最低次項的係數，吾人可得

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\Delta_1} (\lambda_m - 1) [(c_{55} - c_{11}) \sin 2\phi - 2c_{15} \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi} \\
& + \frac{1}{\Delta_1} \left[\lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{55} + c_{11}) \sin^2 \phi + \lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{11} + c_{55}) \cos^2 \phi \right. \\
& \left. + \lambda_m (2 - \lambda_m) c_{15} \sin 2\phi \right] \hat{U}_0^{(m)} + \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \left[c_{16} \sin^2 \phi + c_{45} \cos^2 \phi + \frac{(c_{14} + c_{56})}{2} \sin 2\phi \right] \frac{\partial^2 \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} \right. \\
& \left. + (\lambda_m - 1) [(c_{45} - c_{16}) \sin 2\phi - (c_{14} + c_{56}) \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \phi} \right. \\
& \left. + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{16} \cos^2 \phi + c_{45} \sin^2 \phi - \frac{(c_{14} + c_{56})}{2} \sin 2\phi \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \lambda_m \left(c_{16} \sin^2 \phi + c_{45} \cos^2 \phi + \frac{(c_{14} + c_{56})}{2} \sin 2\phi \right) \right] \hat{V}_0^{(m)} \right\} \\
& + \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \left[c_{15} \sin^2 \phi + c_{35} \cos^2 \phi + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right] \frac{\partial^2 \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + (\lambda_m - 1) [(c_{35} - c_{15}) \sin 2\phi \right. \\
& \left. - (c_{13} + c_{55}) \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{15} \cos^2 \phi + c_{35} \sin^2 \phi - \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \lambda_m \left(c_{15} \sin^2 \phi + c_{35} \cos^2 \phi + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right) \right] \hat{W}_0^{(m)} \right\} = 0 \tag{2.9a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\Delta_2} (\lambda_m - 1) [(c_{44} - c_{66}) \sin 2\phi - 2c_{46} \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \phi} \\
& + \frac{1}{\Delta_2} \left[\lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{44} + c_{66}) \sin^2 \phi + \lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{66} + c_{44}) \cos^2 \phi \right. \\
& \left. + \lambda_m (2 - \lambda_m) c_{46} \sin 2\phi \right] \hat{V}_0^{(m)} + \frac{1}{\Delta_2} \left\{ \left[c_{16} \sin^2 \phi + c_{45} \cos^2 \phi + \frac{(c_{56} + c_{14})}{2} \sin 2\phi \right] \frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} \right. \\
& \left. + (\lambda_m - 1) [(c_{45} - c_{16}) \sin 2\phi - (c_{56} + c_{14}) \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi} \right. \\
& \left. + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{16} \cos^2 \phi + c_{45} \sin^2 \phi - \frac{(c_{56} + c_{14})}{2} \sin 2\phi \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \lambda_m \left(c_{16} \sin^2 \phi + c_{45} \cos^2 \phi + \frac{(c_{56} + c_{14})}{2} \sin 2\phi \right) \right] \hat{U}_0^{(m)} \right\} \\
& + \frac{1}{\Delta_2} \left\{ \left[c_{56} \sin^2 \phi + c_{34} \cos^2 \phi + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2} \sin 2\phi \right] \frac{\partial^2 \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + (\lambda_m - 1) [(c_{34} - c_{56}) \sin 2\phi \right. \\
& \left. - (c_{36} + c_{45}) \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{56} \cos^2 \phi + c_{34} \sin^2 \phi - \frac{(c_{36} + c_{45})}{2} \sin 2\phi \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \lambda_m \left(c_{56} \sin^2 \phi + c_{34} \cos^2 \phi + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2} \sin 2\phi \right) \left] \hat{W}_0^{(m)} \right\} = 0 \quad (2.9b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\Delta_3} (\lambda_m - 1) [(c_{33} - c_{55}) \sin 2\phi - 2c_{35} \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi} \\ & + \frac{1}{\Delta_3} \left[\lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{33} + c_{55}) \sin^2 \phi + \lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{55} + c_{33}) \cos^2 \phi \right. \\ & \left. + \lambda_m (2 - \lambda_m) c_{35} \sin 2\phi \right] \hat{W}_0^{(m)} + \frac{1}{\Delta_3} \left\{ \left[c_{15} \sin^2 \phi + c_{35} \cos^2 \phi + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right] \frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} \right. \\ & \left. + (\lambda_m - 1) [(c_{35} - c_{15}) \sin 2\phi - (c_{13} + c_{55}) \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi} \right. \\ & \left. + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{15} \cos^2 \phi + c_{35} \sin^2 \phi - \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda_m \left(c_{15} \sin^2 \phi + c_{35} \cos^2 \phi + \frac{(c_{31} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right) \right] \hat{U}_0^{(m)} \right\} \\ & + \frac{1}{\Delta_3} \left\{ \left[c_{56} \sin^2 \phi + c_{34} \cos^2 \phi + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2} \sin 2\phi \right] \frac{\partial^2 \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + (\lambda_m - 1) [(c_{34} - c_{56}) \sin 2\phi \right. \\ & \left. - (c_{36} + c_{45}) \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{56} \cos^2 \phi + c_{34} \sin^2 \phi - \frac{(c_{36} + c_{45})}{2} \sin 2\phi \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda_m \left(c_{56} \sin^2 \phi + c_{34} \cos^2 \phi + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2} \sin 2\phi \right) \right] \hat{V}_0^{(m)} \right\} = 0 \quad (2.9c) \end{aligned}$$

其中

$$\Delta_1 = c_{11} \sin^2 \phi + c_{55} \cos^2 \phi + c_{15} \sin 2\phi, \quad \Delta_2 = c_{66} \sin^2 \phi + c_{44} \cos^2 \phi + c_{46} \sin 2\phi,$$

$$\Delta_3 = c_{55} \sin^2 \phi + c_{33} \cos^2 \phi + c_{35} \sin 2\phi$$

方程式(2.9)是一組變係數常微分方程式，但是係數都是 (θ, ϕ) 之函數，要找到解析解 (closed-form solution) 是不可能的，級數解法 (power series method) 為解變係數常微分方程式之常用之方法；級數解取到越高次項所得的解會越精確，但卻也常會造成數值計算之困難。為了解決此問題，我們將全域切割成許多子域，如圖 2.3，子域間必須滿足連續條件；此方法對於建立多材料旋轉體之解是非常方便的。

為了建立子域的級數解，將微分方程式的變係數 (ϕ) 之函數於每個子域中之中點 $(\bar{\phi})$ 以泰勒展開式表示：

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 2\phi}{\Delta_1} &= \sum_{k=0}^K a_k^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^k, \quad \frac{\cos^2 \phi}{\Delta_1} = \sum_{k=0}^K b_k^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^k, \quad \frac{\sin^2 \phi}{\Delta_1} = \sum_{k=0}^K c_k^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^k \\
\frac{\cos 2\phi}{\Delta_1} &= \sum_{k=0}^K d_k^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^k, \quad \frac{\sin 2\phi}{\Delta_2} = \sum_{k=0}^K e_k^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^k, \quad \frac{\cos^2 \phi}{\Delta_2} = \sum_{k=0}^K f_k^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^k \\
\frac{\sin^2 \phi}{\Delta_2} &= \sum_{k=0}^K g_k^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^k, \quad \frac{\cos 2\phi}{\Delta_2} = \sum_{k=0}^K h_k^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^k, \quad \frac{\sin 2\phi}{\Delta_3} = \sum_{k=0}^K l_k^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^k \\
\frac{\cos^2 \phi}{\Delta_3} &= \sum_{k=0}^K m_k^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^k, \quad \frac{\sin^2 \phi}{\Delta_3} = \sum_{k=0}^K n_k^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^k, \quad \frac{\cos 2\phi}{\Delta_3} = \sum_{k=0}^K o_k^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^k
\end{aligned} \tag{2.10}$$

因此，在每個子域中的位移函數也均以級數表示：

$$\hat{U}_0^{(m)} = \sum_{j=0}^J \hat{A}_j^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^j, \quad \hat{V}_0^{(m)} = \sum_{j=0}^J \hat{B}_j^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^j, \quad \hat{W}_0^{(m)} = \sum_{j=0}^J \hat{C}_j^{(i)} (\phi - \bar{\phi})^j \tag{2.11}$$

將式(2.10)與(2.11)代入方程式(2.9)，根據 Tseng 等人[18]之方法整理可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^J \left\{ (j+2)(j+1) \hat{A}_{j+2}^{(i)} + \sum_{k=0}^j [(\lambda_m - 1) [(c_{55} - c_{11}) a_{j-k}^{(i)} - 2c_{15} d_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{A}_{k+1}^{(i)} \right. \\
&\quad + [\lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{55} + c_{11}) c_{j-k}^{(i)} + \lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{11} + c_{55}) b_{j-k}^{(i)} + \lambda(2-\lambda)c_{15} a_{j-k}^{(i)}] \hat{A}_k^{(i)} \\
&\quad + \left[c_{16} c_{j-k}^{(i)} + c_{45} b_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{14} + c_{56})}{2} a_{j-k}^{(i)} \right] (k+2)(k+1) \hat{B}_{k+2}^{(i)} + (\lambda_m - 1) [(c_{45} - c_{16}) a_{j-k}^{(i)} \\
&\quad - (c_{14} + c_{56}) d_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{B}_{k+1}^{(i)} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{16} b_{j-k}^{(i)} + c_{45} c_{j-k}^{(i)} - \frac{(c_{14} + c_{56})}{2} a_{j-k}^{(i)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \lambda_m \left(c_{16} c_{j-k}^{(i)} + c_{45} b_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{14} + c_{56})}{2} a_{j-k}^{(i)} \right) \right] \hat{B}_k^{(i)} \\
&\quad + \left[c_{15} c_{j-k}^{(i)} + c_{35} b_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} a_{j-k}^{(i)} \right] (k+2)(k+1) \hat{C}_{k+2}^{(i)} + (\lambda_m - 1) [(c_{35} - c_{15}) a_{j-k}^{(i)} \\
&\quad - (c_{13} + c_{55}) d_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{C}_{k+1}^{(i)} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{15} b_{j-k}^{(i)} + c_{35} c_{j-k}^{(i)} - \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} a_{j-k}^{(i)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \lambda_m \left(c_{15} c_{j-k}^{(i)} + c_{35} b_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} a_{j-k}^{(i)} \right) \right] \hat{C}_k^{(i)} \left. \right\} (\phi - \bar{\phi})^j = 0
\end{aligned} \tag{2.12a}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^J \left\{ (j+2)(j+1) \hat{B}_{j+2}^{(i)} + \sum_{k=0}^j [(\lambda_m - 1) [(c_{44} - c_{66}) e_{j-k}^{(i)} - 2c_{46} h_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{B}_{k+1}^{(i)} \right. \\
& \quad + [\lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{44} + c_{66}) g_{j-k}^{(i)} + \lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{66} + c_{44}) f_{j-k}^{(i)} + \lambda_m (2 - \lambda_m) c_{45} e_{j-k}^{(i)}] \hat{B}_k^{(i)} \\
& \quad + \left[c_{16} g_{j-k}^{(i)} + c_{45} f_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{56} + c_{14})}{2} e_{j-k}^{(i)} \right] (k+2)(k+1) \hat{A}_{k+2}^{(i)} + (\lambda_m - 1) [(c_{45} - c_{16}) e_{j-k}^{(i)} \\
& \quad - (c_{56} + c_{14}) h_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{A}_{k+1}^{(i)} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{16} f_{j-k}^{(i)} + c_{45} g_{j-k}^{(i)} - \frac{(c_{56} + c_{14})}{2} e_{j-k}^{(i)} \right) \right. \\
& \quad \left. + \lambda_m \left(c_{16} g_{j-k}^{(i)} + c_{45} f_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{56} + c_{14})}{2} e_{j-k}^{(i)} \right) \right] \hat{A}_k^{(i)} \\
& \quad + \left[c_{56} g_{j-k}^{(i)} + c_{34} f_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2} e_{j-k}^{(i)} \right] (k+2)(k+1) \hat{C}_{k+2}^{(i)} + (\lambda_m - 1) [(c_{34} - c_{56}) e_{j-k}^{(i)} \\
& \quad - (c_{36} + c_{45}) h_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{C}_{k+1}^{(i)} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{56} f_{j-k}^{(i)} + c_{34} g_{j-k}^{(i)} - \frac{(c_{36} + c_{45})}{2} e_{j-k}^{(i)} \right) \right. \\
& \quad \left. + \lambda_m \left(c_{56} g_{j-k}^{(i)} + c_{34} f_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2} e_{j-k}^{(i)} \right) \right] \hat{C}_k^{(i)} \left. \right\} (\phi - \bar{\phi})^j = 0 \tag{2.12b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^J \left\{ (j+2)(j+1) \hat{C}_{j+2}^{(i)} + \sum_{k=0}^j [(\lambda_m - 1) [(c_{33} - c_{55}) l_{j-k}^{(i)} - 2c_{35} o_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{C}_{k+1}^{(i)} \right. \\
& \quad + [\lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{33} + c_{55}) n_{j-k}^{(i)} + \lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{55} + c_{33}) m_{j-k}^{(i)} + \lambda_m (2 - \lambda) c_{35} l_{j-k}^{(i)}] \hat{C}_k^{(i)} \\
& \quad + \left[c_{15} n_{j-k}^{(i)} + c_{35} m_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} l_{j-k}^{(i)} \right] (k+2)(k+1) \hat{A}_{k+2}^{(i)} + (\lambda_m - 1) [(c_{35} - c_{15}) l_{j-k}^{(i)} \\
& \quad - (c_{13} + c_{55}) o_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{A}_{k+1}^{(i)} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{15} m_{j-k}^{(i)} + c_{35} n_{j-k}^{(i)} - \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} l_{j-k}^{(i)} \right) \right. \\
& \quad \left. + \lambda_m \left(c_{15} n_{j-k}^{(i)} + c_{35} m_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} l_{j-k}^{(i)} \right) \right] \hat{A}_k^{(i)} \\
& \quad + \left[c_{56} n_{j-k}^{(i)} + c_{34} m_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2} l_{j-k}^{(i)} \right] (k+2)(k+1) \hat{B}_{k+2}^{(i)} + (\lambda_m - 1) [(c_{34} - c_{56}) l_{j-k}^{(i)} \\
& \quad - (c_{36} + c_{45}) o_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{B}_{k+1}^{(i)} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{56} m_{j-k}^{(i)} + c_{34} n_{j-k}^{(i)} - \frac{(c_{36} + c_{45})}{2} l_{j-k}^{(i)} \right) \right. \\
& \quad \left. + \lambda_m \left(c_{56} n_{j-k}^{(i)} + c_{34} m_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2} l_{j-k}^{(i)} \right) \right] \hat{B}_k^{(i)} \left. \right\} (\phi - \bar{\phi})^j = 0 \tag{2.12c}
\end{aligned}$$

對所有之 ϕ 均須滿足式(2.12)，故可整理得

$$\begin{aligned}
& \hat{A}_{j+2}^{(i)} + \left(c_{16}c_0^{(i)} + c_{45}b_0^{(i)} + \frac{(c_{14} + c_{56})}{2}a_0^{(i)} \right) \hat{B}_{j+2}^{(i)} + \left(c_{15}c_0^{(i)} + c_{35}b_0^{(i)} + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2}a_0^{(i)} \right) \hat{C}_{j+2}^{(i)} \\
&= \frac{-1}{(j+2)(j+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} \left[\left(c_{16}c_{j-k}^{(i)} + c_{45}b_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{14} + c_{56})}{2}a_{j-k}^{(i)} \right) (k+2)(k+1) \hat{B}_{k+2}^{(i)} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left(c_{15}c_{j-k}^{(i)} + c_{35}b_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2}a_{j-k}^{(i)} \right) (k+2)(k+1) \hat{C}_{k+2}^{(i)} \right. \\
&\quad + \sum_{k=0}^j [(\lambda_m - 1)[(c_{55} - c_{11})a_{j-k}^{(i)} - 2c_{15}d_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{A}_{k+1}^{(i)} \\
&\quad + [\lambda_m((\lambda_m - 1)c_{55} + c_{11})c_{j-k}^{(i)} + \lambda_m((\lambda_m - 1)c_{11} + c_{55})b_{j-k}^{(i)} + \lambda(2 - \lambda)c_{15}a_{j-k}^{(i)}] \hat{A}_k^{(i)} \\
&\quad + (\lambda_m - 1)[(c_{45} - c_{16})a_{j-k}^{(i)} - (c_{14} + c_{56})d_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{B}_{k+1}^{(i)} + [\lambda_m(\lambda_m - 1) \\
&\quad \times \left(c_{16}b_{j-k}^{(i)} + c_{45}c_{j-k}^{(i)} - \frac{(c_{14} + c_{56})}{2}a_{j-k}^{(i)} \right) + \lambda_m \left(c_{16}c_{j-k}^{(i)} + c_{45}b_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{14} + c_{56})}{2}a_{j-k}^{(i)} \right)] \hat{B}_k^{(i)} \\
&\quad + (\lambda_m - 1)[(c_{35} - c_{15})a_{j-k}^{(i)} - (c_{13} + c_{55})d_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{C}_{k+1}^{(i)} + [\lambda_m(\lambda_m - 1) \\
&\quad \times \left(c_{15}b_{j-k}^{(i)} + c_{35}c_{j-k}^{(i)} - \frac{(c_{13} + c_{55})}{2}a_{j-k}^{(i)} \right) + \lambda_m \left(c_{15}c_{j-k}^{(i)} + c_{35}b_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2}a_{j-k}^{(i)} \right)] \hat{C}_k^{(i)} \left. \right\} \quad (2.12a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{B}_{j+2}^{(i)} + \left(c_{16}g_0^{(i)} + c_{45}f_0^{(i)} + \frac{(c_{56} + c_{14})}{2}e_0^{(i)} \right) \hat{A}_{j+2}^{(i)} + \left(c_{56}g_0^{(i)} + c_{34}f_0^{(i)} + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2}e_0^{(i)} \right) \hat{C}_{j+2}^{(i)} \\
&= \frac{-1}{(j+2)(j+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} \left[\left(c_{16}g_{j-k}^{(i)} + c_{45}f_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{56} + c_{14})}{2}e_{j-k}^{(i)} \right) (k+2)(k+1) \hat{A}_{k+2}^{(i)} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left(c_{56}g_{j-k}^{(i)} + c_{34}f_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2}e_{j-k}^{(i)} \right) (k+2)(k+1) \hat{C}_{k+2}^{(i)} \right. \\
&\quad + \sum_{k=0}^j [(\lambda_m - 1)[(c_{44} - c_{66})e_{j-k}^{(i)} - 2c_{46}h_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{B}_{k+1}^{(i)} \\
&\quad + [\lambda_m((\lambda_m - 1)c_{44} + c_{66})g_{j-k}^{(i)} + \lambda_m((\lambda_m - 1)c_{66} + c_{44})f_{j-k}^{(i)} + \lambda_m(2 - \lambda_m)c_{45}e_{j-k}^{(i)}] \hat{B}_k^{(i)} \\
&\quad + (\lambda_m - 1)[(c_{45} - c_{16})e_{j-k}^{(i)} - (c_{56} + c_{14})h_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{A}_{k+1}^{(i)} + [\lambda_m(\lambda_m - 1) \\
&\quad \times \left(c_{16}f_{j-k}^{(i)} + c_{45}g_{j-k}^{(i)} - \frac{(c_{56} + c_{14})}{2}e_{j-k}^{(i)} \right) + \lambda_m \left(c_{16}g_{j-k}^{(i)} + c_{45}f_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{56} + c_{14})}{2}e_{j-k}^{(i)} \right)] \hat{A}_k^{(i)} \\
&\quad + (\lambda_m - 1)[(c_{34} - c_{56})e_{j-k}^{(i)} - (c_{36} + c_{45})h_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{C}_{k+1}^{(i)} + [\lambda_m(\lambda_m - 1) \\
&\quad \times \left(c_{56}f_{j-k}^{(i)} + c_{34}g_{j-k}^{(i)} - \frac{(c_{36} + c_{45})}{2}e_{j-k}^{(i)} \right) + \lambda_m \left(c_{56}g_{j-k}^{(i)} + c_{34}f_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2}e_{j-k}^{(i)} \right)] \hat{C}_k^{(i)} \left. \right\} \quad (2.12b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{C}_{j+2}^{(i)} + \left(c_{15}n_0^{(i)} + c_{35}m_0^{(i)} + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2}l_0^{(i)} \right) \hat{A}_{j+2}^{(i)} + \left(c_{56}n_0^{(i)} + c_{34}m_0^{(i)} + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2}l_0^{(i)} \right) \hat{B}_{j+2}^{(i)} \\
&= \frac{-1}{(j+2)(j+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} \left[\left(c_{15}n_{j-k}^{(i)} + c_{35}m_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2}l_{j-k}^{(i)} \right) (k+2)(k+1) \hat{A}_{k+2}^{(i)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(c_{56}n_{j-k}^{(i)} + c_{34}m_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2}l_{j-k}^{(i)} \right) (k+2)(k+1) \hat{B}_{k+2}^{(i)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k=0}^j [(\lambda_m - 1)[(c_{33} - c_{55})l_{j-k}^{(i)} - 2c_{35}o_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{C}_{k+1}^{(i)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + [\lambda_m((\lambda_m - 1)c_{33} + c_{55})n_{j-k}^{(i)} + \lambda_m((\lambda_m - 1)c_{55} + c_{33})m_{j-k}^{(i)} + \lambda_m(2 - \lambda)c_{35}l_{j-k}^{(i)}] \hat{C}_k^{(i)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\lambda_m - 1)[(c_{35} - c_{15})l_{j-k}^{(i)} - (c_{13} + c_{55})o_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{A}_{k+1}^{(i)} + [\lambda_m(\lambda_m - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(c_{15}m_{j-k}^{(i)} + c_{35}n_{j-k}^{(i)} - \frac{(c_{13} + c_{55})}{2}l_{j-k}^{(i)} \right) + \lambda_m \left(c_{15}n_{j-k}^{(i)} + c_{35}m_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2}l_{j-k}^{(i)} \right) \right] \hat{A}_k^{(i)} \right. \\
&\quad \left. \left. + (\lambda_m - 1)[(c_{34} - c_{56})l_{j-k}^{(i)} - (c_{36} + c_{45})o_{j-k}^{(i)}] (k+1) \hat{B}_{k+1}^{(i)} + [\lambda_m(\lambda_m - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(c_{56}m_{j-k}^{(i)} + c_{34}n_{j-k}^{(i)} - \frac{(c_{36} + c_{45})}{2}l_{j-k}^{(i)} \right) + \lambda_m \left(c_{56}n_{j-k}^{(i)} + c_{34}m_{j-k}^{(i)} + \frac{(c_{36} + c_{45})}{2}l_{j-k}^{(i)} \right) \right] \hat{B}_k^{(i)} \right\} \quad (2.12c)
\end{aligned}$$

式(2.12)代表 \hat{A}_j 、 \hat{B}_j 及 \hat{C}_j 係數間之遞迴關係； $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{B}_0, \hat{B}_1, \hat{C}_0, \hat{C}_1$ 已知，則可由方程式(2.12)求解得到 $\hat{A}_{j+2}, \hat{B}_{j+2}, \hat{C}_{j+2}$ ($j=0,1,2,\dots$)。因此方程式(2.9)在每一子域中的解均可簡單地表示成

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{0i}^{(m)}(\theta, \phi) &= \hat{A}_0^{(i)}\hat{U}_{0i0}^{(m)} + \hat{A}_1^{(i)}\hat{U}_{0i1}^{(m)} + \hat{B}_0^{(i)}\hat{U}_{0i2}^{(m)} + \hat{B}_1^{(i)}\hat{U}_{0i3}^{(m)} + \hat{C}_0^{(i)}\hat{U}_{0i4}^{(m)} + \hat{C}_1^{(i)}\hat{U}_{0i5}^{(m)} \\
\hat{V}_{0i}^{(m)}(\theta, \phi) &= \hat{A}_0^{(i)}\hat{V}_{0i0}^{(m)} + \hat{A}_1^{(i)}\hat{V}_{0i1}^{(m)} + \hat{B}_0^{(i)}\hat{V}_{0i2}^{(m)} + \hat{B}_1^{(i)}\hat{V}_{0i3}^{(m)} + \hat{C}_0^{(i)}\hat{V}_{0i4}^{(m)} + \hat{C}_1^{(i)}\hat{V}_{0i5}^{(m)} \\
\hat{W}_{0i}^{(m)}(\theta, \phi) &= \hat{A}_0^{(i)}\hat{W}_{0i0}^{(m)} + \hat{A}_1^{(i)}\hat{W}_{0i1}^{(m)} + \hat{B}_0^{(i)}\hat{W}_{0i2}^{(m)} + \hat{B}_1^{(i)}\hat{W}_{0i3}^{(m)} + \hat{C}_0^{(i)}\hat{W}_{0i4}^{(m)} + \hat{C}_1^{(i)}\hat{W}_{0i5}^{(m)} \quad (2.13)
\end{aligned}$$

其中下標“ i ”代表在子域“ i ”。先將式(2.13)代回式(2.8)可得 u_r, u_z, u_θ ，再代回式(2.4)即可得到 $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{z\theta}, \sigma_{zr}, \sigma_{r\theta}$ 用 $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{B}_0, \hat{B}_1, \hat{C}_0, \hat{C}_1$ 來表示

其中

κ_{ϕ_i} : 為 ϕ_0 時的邊界條件產生之方程式(2.15)的係數

κ_{ϕ_e} 、 κ_{ϕ_n} : 為子域 I 與 II 連續條件方程式(2.14)的係數

$\kappa_{\phi_{ne}}$: 為 ϕ_n 時的邊界條件產生之方程式(2.15)的係數

子域符號根據圖 2.3 所示，而式(2.16)之矩陣為一帶寬矩陣，該矩陣內含 λ_m ；為使式(2.16)有非零解，故該矩陣之行列式項為零；因此，吾人可決定 λ_m 值。

§2.8 正交性材料 (Orthotropic Materials) 之特性

當材料性質對稱於某三個相互垂直的特定平面時，我們稱其為「正交性對稱 (orthotropic symmetry)」，而具有正交性對稱的材料即為「正交性材料」。假設 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 即為正交性材料之 axes of orthotropy。矩陣 $[\bar{C}]$ 可表示成

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_{12} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_{13} & \bar{c}_{23} & \bar{c}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{66} \end{bmatrix}$$

在一般情形下，即使是分析正交性材料，其面內及面外位移函數是相互耦合的。但有某些特殊情況下及特殊 θ 角下，式(2.9)中之面內及面外位移可分開考慮。例如當考慮 $\theta = 0^\circ$ 時且 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 與 (X, Y, Z) 重疊或 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 與 (X, Y, Z) 有相同之 \bar{Y} 及 Y 軸。當 $\theta = 0^\circ$ ， $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 與 (X, Y, Z) 重疊時，式(2.9)可簡化為

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\Delta_1} (\lambda_m - 1) [(c_{55} - c_{11}) \sin 2\phi] \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \frac{1}{\Delta_1} \left[\lambda_m ((\lambda_m - 1) c_{55} + c_{11}) \sin^2 \phi \right. \\ & \left. + \lambda_m ((\lambda_m - 1) c_{11} + c_{55}) \cos^2 \phi \right] \hat{U}_0^{(m)} + \frac{1}{\Delta_1} \left[\left[\frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right] \frac{\partial^2 \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + (\lambda_m - 1) \right. \\ & \left. \times [-(c_{13} + c_{55}) \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(-\frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right) \right] \right. \end{aligned}$$

$$+\lambda_m \left(\frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right) \left] \hat{W}_0^{(m)} \right\} = 0 \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\Delta_2} (\lambda_m - 1) [(c_{44} - c_{66}) \sin 2\phi] \frac{\partial \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \frac{1}{\Delta_2} [\lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{44} + c_{66}) \sin^2 \phi \\ + \lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{66} + c_{44}) \cos^2 \phi] \hat{V}_0^{(m)} = 0 \end{aligned} \quad (2.17b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\Delta_3} (\lambda_m - 1) [(c_{33} - c_{55}) \sin 2\phi] \frac{\partial \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \frac{1}{\Delta_3} [\lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{33} + c_{55}) \sin^2 \phi \\ + \lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{55} + c_{33}) \cos^2 \phi] \hat{W}_0^{(m)} + \frac{1}{\Delta_3} \left\{ \left[\frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right] \frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + (\lambda_m - 1) \right. \\ \times \left[-(c_{13} + c_{55}) \cos 2\phi \right] \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(-\frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right) \right. \\ \left. \left. + \lambda_m \left(\frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right) \right] \hat{U}_0^{(m)} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.17c)$$

故當材料座標軸與幾何座標重疊時，從方程式(2.17a)與(2.17c)得知 $\hat{U}_n^{(m)}$ 、 $\hat{W}_n^{(m)}$ 是耦合的；從方程式(2.17b)得知 $\hat{V}_n^{(m)}$ 獨立存在；即在 $\theta = 0^\circ$ 之面，其面外位移與面內位移不相關。

當 $\theta = 0^\circ$ ， $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 與 (X, Y, Z) 有相同之 \bar{Y} 及 Y 軸。即將 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對 Y 軸進行旋轉，由轉換關係 $[C] = [T]_\sigma [K] [\bar{C}] [K]^T [T]_\sigma^{-1}$ 得

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & c_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{46} & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

矩陣中部分元素為零，其中如 c_{16} 、 c_{45} 等等，此矩陣與單斜晶系 (Monoclinic) 之彈性係數矩陣之形式一致，將該值帶入方程式(2.9)中，整理後如下：

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\Delta_1} (\lambda_m - 1) [(c_{55} - c_{11}) \sin 2\phi - 2c_{15} \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \frac{1}{\Delta_1} [\lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{55} + c_{11}) \sin^2 \phi \\
& + \lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{11} + c_{55}) \cos^2 \phi + \lambda_m (2 - \lambda_m) c_{15} \sin 2\phi] \hat{U}_0^{(m)} \\
& + \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \left[c_{15} \sin^2 \phi + c_{35} \cos^2 \phi + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right] \frac{\partial^2 \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + (\lambda_m - 1) [(c_{35} - c_{15}) \sin 2\phi \right. \\
& \left. - (c_{13} + c_{55}) \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{15} \cos^2 \phi + c_{35} \sin^2 \phi - \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \lambda_m \left(c_{15} \sin^2 \phi + c_{35} \cos^2 \phi + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right) \right] \hat{W}_0^{(m)} \right\} = 0 \tag{2.18a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\Delta_2} (\lambda_m - 1) [(c_{44} - c_{66}) \sin 2\phi - 2c_{46} \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \frac{1}{\Delta_2} [\lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{44} + c_{66}) \sin^2 \phi \\
& + \lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{66} + c_{44}) \cos^2 \phi + \lambda_m (2 - \lambda_m) c_{46} \sin 2\phi] \hat{V}_0^{(m)} = 0 \tag{2.18b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\Delta_3} (\lambda_m - 1) [(c_{33} - c_{55}) \sin 2\phi - 2c_{35} \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \frac{1}{\Delta_3} [\lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{33} + c_{55}) \sin^2 \phi \\
& + \lambda_m ((\lambda_m - 1)c_{55} + c_{33}) \cos^2 \phi + \lambda_m (2 - \lambda_m) c_{35} \sin 2\phi] \hat{W}_0^{(m)} \\
& + \frac{1}{\Delta_3} \left\{ \left[c_{15} \sin^2 \phi + c_{35} \cos^2 \phi + \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right] \frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi^2} + (\lambda_m - 1) [(c_{35} - c_{15}) \sin 2\phi \right. \\
& \left. - (c_{13} + c_{55}) \cos 2\phi] \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \phi} + \left[\lambda_m (\lambda_m - 1) \left(c_{15} \cos^2 \phi + c_{35} \sin^2 \phi - \frac{(c_{13} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \lambda_m \left(c_{15} \sin^2 \phi + c_{35} \cos^2 \phi + \frac{(c_{31} + c_{55})}{2} \sin 2\phi \right) \right] \hat{U}_0^{(m)} \right\} = 0 \tag{2.18c}
\end{aligned}$$

將 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對 Y 軸旋轉時，可從方程式(2.18a)與(2.18c)得知 $\hat{U}_n^{(m)}$ 、 $\hat{W}_n^{(m)}$ 是耦合的；從方程式(2.18b)得知 $\hat{V}_n^{(m)}$ 獨立存在。

第三章 旋轉體應力奇異階數分析

為了方便討論材料的特性、邊界條件、幾何形狀、及參數等改變對應力奇異性 (singularity) λ_m 值之影響，先將欲探討之參數做說明如下：

γ ：如圖 2.1，為異向性材料之材料座標軸 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對幾何座標軸 (X, Y, Z) 旋轉之

角度， γ_x 、 γ_y 、 γ_z 分別為對 X、Y 及 Z 軸旋轉之角度

β ：如圖 3.1，表示幾何形狀之角度 (β ， β_1)

θ ：如圖 2.1，為 (r, θ, Z) 座標系統之 θ 值

F、C：表示邊界條件，F (代表自由端)、C (代表固定端)；如圖 3.1，F-C 表示 Material 1 之邊界條件 F、Material 2 之邊界條件 C。

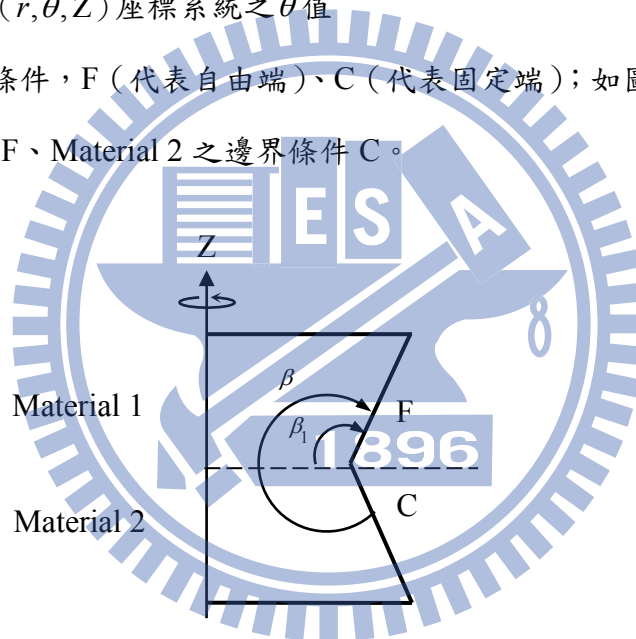


圖 3.1 複合式材料之旋轉體角度示意圖

§3.1 方法驗證與收斂性分析

由於文獻上無異向性材料旋轉體奇異性分析之研究，為驗證本研究所推導之解的正確性，吾人利用等向性材料之文獻結果來確認本研究之解及所衍生電腦程式的正確性。如圖 3.2 所示，考慮兩種幾何形狀之旋轉體，一為 $\beta = 360^\circ$ ，另一為 $\beta = 240^\circ$ 之單一等向性材料旋轉體；此等旋轉體之奇異性有閉和解 (根據 Huang 與 Leissa[1]推導出其閉合解)。

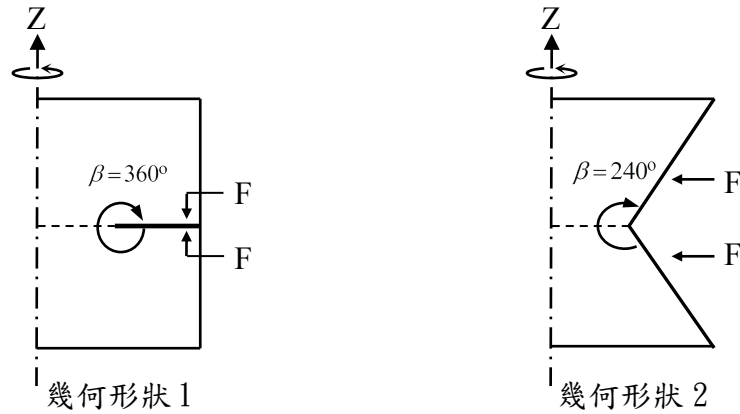


圖 3.2 於收斂性分析中旋轉體之幾何形狀與邊界條件

表 3.1 等向性材料旋轉體最小 λ_m 的實數部分之收斂性

幾何形狀	子域數目	多項式項數							Publish[1]
		5	6	7	9	11	13	15	
$\beta = 360^\circ$	2	0.3175	0.2674	0.4893	0.4997	0.4999	0.4999	0.4999	0.5000
	4	0.4999	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	
	6	0.4995	0.4999	0.4999	0.4994	0.4992	0.5000	0.5000	
	8	0.4999	0.4999	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	
$\beta = 240^\circ$	2	0.6178	0.6162	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157
	4	0.6158	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	
	6	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	
	8	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	

表 3.1 為針對 $\beta = 240^\circ$ 及 $\beta = 360^\circ$ 單一等向性材料旋轉體應力奇異性，使用不同數目之子域配合不同項數級數解之分析結果。使用較少之子域(在 ϕ 向)，則須配合較多項之級數，方能得到收斂解，反之亦然；在級數解中，通常用愈多項時，愈有可能遇到數值分析之困難。從表 3.1 之結果顯示即使 $\beta = 360^\circ$ 之旋轉體，在 ϕ 向切 8 個子域，各子域使用 7 項之級數，即可得準確之解；同樣的子域數及多項級數亦提供 $\beta = 240^\circ$ 案例之準確解。在往下之分析中，吾人取 8 個子域數配合 13 項級數求解。值得一提的是，本法所得之收斂解(收斂致四位有效數字)與閉合解所得者一致；此一致性某種程度上確認本研究所提解之正確性。

表 3.2 材料彈性係數

彈性係數 c_{ij} (GPa)	材料			
	二矽化鈦 (TiSi ₂) [19]	重晶石 (Barytes) [20]	矽酸鐵 (FeSiO ₃) [21]	雲矽鈣石 (Tobermorite)[22]
c_{11}	377.2	89.41	198	169.15
c_{12}	27.8	46.14	84	54.48
c_{13}	21.3	26.91	72	37.45
c_{14}	0	0	0	-1.05
c_{15}	0	0	0	-8.90
c_{16}	0	0	0	2.70
c_{22}	341.1	78.42	136	169.95
c_{23}	95.1	26.77	55	36.15
c_{24}	0	0	0	3.55
c_{25}	0	0	0	-11.75
c_{26}	0	0	0	-1.08
c_{33}	425.3	105.48	175	92.70
c_{34}	0	0	0	2.60
c_{35}	0	0	0	-3.45
c_{36}	0	0	0	0.60
c_{44}	136.5	11.90	59	40.60
c_{45}	0	0	0	0.43
c_{46}	0	0	0	-5.48
c_{55}	93.7	28.74	58	17.85
c_{56}	0	0	0	-1.85
c_{66}	154.6	27.78	49	45.65

§3.2 矽化鈦旋轉體之奇異性分析

假設所欲考慮之旋轉體由矽化鈦 (TiSi_2) 構成，其為正交性材料（相關彈性係數列於表 3.2）。矽化鈦是工業界最常使用的金屬矽化物，其主要原因有下列幾項：

- (1) 具有很低的電阻率（約 $13\text{-}20 \mu\Omega\text{-cm}$ ）。
- (2) 在高溫製程下，不會凝聚成一塊。
- (3) 自我對準製程已被標準化。

圖 3.3 所示者為 $\beta = 360^\circ$ 之矽化鈦旋轉體在自由邊界條件 (F-F) 下，其最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 γ_x 、 γ_y 或 γ_z 之變化，所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。結果顯示當 γ_x 、 γ_z 改變時，最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 幾乎不變；而當 γ_y 改變時，最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之最大值（發生於 $\gamma_y = 0^\circ$ ）與最小值（發生於 $\gamma_y = 22^\circ$ ）之差異可達 4.2%。值得一提者，由方程式(2.17)~(2.19)知，對 Y 軸轉動時， $\hat{V}_n^{(m)}$ 與 $\hat{U}_n^{(m)}$ 及 $\hat{W}_n^{(m)}$ 不互相耦合。最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 在 $\gamma_y = 2^\circ \sim 36^\circ$ 與 $\gamma_y = 50^\circ \sim 88^\circ$ 時，對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數，而在其他之 γ_y 值，則為實數。而對 X 及 Z 軸轉動時， $\hat{U}_n^{(m)}$ 、 $\hat{V}_n^{(m)}$ 與 $\hat{W}_n^{(m)}$ 是耦合的，且對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。

圖 3.4 所示者為矽化鈦旋轉體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_y 下，其最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β 之變化（因為得知對 Y 軸旋轉時， λ_m 會有明顯的變化），所示之值亦為在 $\theta = 0^\circ$ 者。結果顯示最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β 增加而減少，即其應力奇異性隨 β 增加而增強。當 $\gamma_y = 0^\circ$ 對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數；當 $\gamma_y = 30^\circ$ 且在 $\beta = 0^\circ \sim 12^\circ$ ，對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數；但當 $\gamma_y = 60^\circ$ 且 $\beta = 0^\circ \sim 20^\circ$ ，對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。

圖 3.5 所示者為 $\beta = 360^\circ$ 之矽化鈦旋轉體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_y 下，其最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 θ 之變化。當 $\gamma_y = 0^\circ$ 時， λ_m 幾乎不隨 θ 改變而改變，對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數且對稱於 $\theta = 90^\circ$ ；當 $\gamma_y = 30^\circ$ 與 $\gamma_y = 60^\circ$ 時，最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨不同 θ 值而有明顯的變

化。當 $\gamma_Y = 30^\circ$ 時，整段 λ_m 之實數部分對稱於 $\theta = 90^\circ$ ；在 $\theta = 0^\circ \sim 26^\circ$ 與 $\theta = 154^\circ \sim 180^\circ$ ，對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數；最小 $R_e[\lambda_m]$ 之最大值（發生於 $\theta = 90^\circ$ ）與最小值（發生於 $\theta = 44^\circ$ ）之差異可達 5.5%。當 $\gamma_Y = 60^\circ$ 在 $\theta = 0^\circ \sim 72^\circ$ 與 $\theta = 108^\circ \sim 180^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數，最小 $R_e[\lambda_m]$ 之最大值（發生於 $\theta = 90^\circ$ ）與最小值（發生於 $\theta = 0^\circ$ 或 $\theta = 180^\circ$ ）之差異可達 3.6%。而在 $\theta = 90^\circ$ 時，不同 γ_Y 下皆得到相同之最小 $R_e[\lambda_m]$ ，等於 0.5。

圖 3.6 所示者為矽化鈦旋轉體在不同邊界條件（F-F、C-C 與 C-F）下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化，所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。很明顯地，C-F 邊界條件所引致之應力奇異性遠較 C-C 及 F-F 者嚴重，在 $\beta = 180^\circ$ 與 $\beta = 360^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 的差異可達 50%；而 F-F 所引致之奇異性則稍較 C-C 者強，兩者在 $\beta = 256^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 的最大差異可達 7.9%。

圖 3.7 與圖 3.8 所示者分別為 $\beta = 240^\circ$ 與 $\beta = 300^\circ$ 之旋轉體在不同邊界條件（F-F、C-C 與 C-F）下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_Y 之變化，所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。不同邊界條件所引致應力強度之趨勢如同圖 3.6 所觀察到者。邊界條件 C-C 之 $R_e[\lambda_m]$ 皆比 F-F 之 $R_e[\lambda_m]$ 大；在 $\beta = 240^\circ$ 時，最大可差到 15.3%；在 $\beta = 300^\circ$ 時，最大可差到 12.3%。

§3.3 不同正交性材料之影響

為了解不同正交性材料對應力奇異性之影響，本節考慮另外兩種正交性材料來做比對分析，分別為重晶石（Barytes）與矽酸鐵（ferrosilite, FeSiO_3 ）（相關彈性係數列於表 3.2）。

圖 3.9 所示者為三種正交性材料旋轉體（ $\beta = 360^\circ$ ）在自由邊界條件（F-F）下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_Y 之變化，所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。發現矽化鈦與矽酸鐵之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_Y 改變而改變之程度，較重晶石者小。重晶石最小 $R_e[\lambda_m]$ 之最大值（發生於 $\gamma_Y = 2^\circ$ ）與最小

值（發生於 $\gamma_y = 44^\circ$ ）之差異可達 12.7%；矽酸鐵最小 $R_e[\lambda_m]$ 之最大值（發生於 $\gamma_y = 0^\circ$ ）與最小值（發生於 $\gamma_y = 44^\circ$ ）之差異只有 3.4%；重晶石與矽化鈦在 $\gamma_y = 50^\circ$ 最大差異可達 11.8%，可知不同 γ_y 下之最小 $R_e[\lambda_m]$ 主要由材料特性控制；並且重晶石之最小 $R_e[\lambda_m]$ 在 $\gamma_y = 0^\circ \sim 2^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數；矽酸鐵之最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。

圖 3.10 所示者為在材料座標軸與幾何座標軸一致下（即以 $\gamma_y = 0^\circ$ 表示），三種正交性材料旋轉體在自由邊界條件（F-F）下所得最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化，所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。三者之 $\beta = 0^\circ$ 與 $\beta = 360^\circ$ 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 相同；三者之 $\beta = 200^\circ \sim 280^\circ$ 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 有較明顯之差異，矽酸鐵之應力奇異性較弱，與重晶石者最大差異可達 3.3%（ $\beta = 224^\circ$ ）；與矽化鈦者最大差異可達 6%（ $\beta = 220^\circ$ ）。可知就算不同材料之最小 $R_e[\lambda_m]$ 主要還是由幾何形狀控制。

圖 3.11 所示者為在 $\gamma_y = 0^\circ$ 與 $\beta = 360^\circ$ 下三種正交性材料旋轉體在自由邊界條件（F-F）所得之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 θ 變化。三者之最小 $R_e[\lambda_m]$ 皆對稱於 $\theta = 90^\circ$ ，雖然相較於矽化鈦與矽酸鐵，重晶石之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 θ 有較明顯的變化，但三者之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 θ 改變而改變之量很微小（小於 0.1%）。

圖 3.12 所示者為 $\gamma_y = 0^\circ$ 之三種正交性材料旋轉體在一邊界固定一邊界自由條件（C-F）下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化，所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。發現三種正交性材料之最小 $R_e[\lambda_m]$ 均介於 0.25 ~ 0.5。矽化鈦旋轉體在 $\beta = 0^\circ \sim 4^\circ$ 、 $\beta = 40^\circ \sim 84^\circ$ 與 $\beta = 158^\circ \sim 180^\circ$ 下，對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數；重晶石者皆為複數；矽酸鐵者皆為實數。在三者中，重晶石之應力奇異性最弱，與矽化鈦之最小 $R_e[\lambda_m]$ 最大差異可達 1.7%（發生於 $\beta = 260^\circ$ ）；與矽酸鐵之最小 $R_e[\lambda_m]$ 最大差異可達 3.5%（發生於 $\beta = 268^\circ$ ）。與圖 3.10 所示者相較，C-F 邊界條件所引致之應力奇異性明顯比 F-F 邊界條件所引致者大；但在 F-F 邊界條件下，三種材料所引致應力奇異性之差異性稍較 C-F 邊界條件下者大。

§3.4 矽化鈦彈性係數改變之影響

在材料座標軸與幾何座標軸一致時，為探討個別彈性係數（ c_{11} 、 c_{44} 等等）對旋轉體應力奇異性強度之影響，以下分三種情況(如表 3.3 所示)分別改變矽化鈦彈性係數。

表 3.3 改變彈性係數案例說明

Case 1.	將 c_{44} 做倍數放大
Case 2.	將 c_{55} 做倍數放大
Case 3.	將 $E_{11} \times 2, S_{12}, S_{13}$ 不變

3.4.1 Case1

在本案例中，僅將矽化鈦之彈性係數 c_{44} 分別放大兩倍、四倍及六倍，探討其在不同 β 角時，對最小 $R_e[\lambda_m]$ 之影響。圖 3.13 及圖 3.14 分別顯示當 $\gamma_Y = 30^\circ$ 及 $\gamma_Y = 60^\circ$ 時，改變 c_{44} 值對最小 $R_e[\lambda_m]$ 之影響。圖中，各在不同 β 範圍內，改變 c_{44} 並未改變最小 $R_e[\lambda_m]$ 值。究其原因，為當改變 γ_Y 時， $\hat{V}_n^{(m)}$ 與 $\hat{U}_n^{(m)}$ 及 $\hat{W}_n^{(m)}$ 不耦合；從式(2.17b)知改變 c_{44} 只會改變 $\hat{V}_n^{(m)}$ 所對應之應力奇異性；故圖中最小 $R_e[\lambda_m]$ 不隨 c_{44} 改變者，即代表該段之應力奇異性由 $\hat{U}_n^{(m)}$ 及 $\hat{W}_n^{(m)}$ 所對應之應力奇異性所控制。應力奇異性隨 c_{44} 增加而增大。

3.4.2 Case2

在本案例中，僅將矽化鈦之彈性係數 c_{55} 分別放大兩倍、四倍及六倍，探討其在不同 β 角時，對最小 $R_e[\lambda_m]$ 之影響。圖 3.15 所示者當 $\gamma_Y = 0^\circ$ 時，在自由邊界條件 (F-F) 下改變 c_{55} 對最小 $R_e[\lambda_m]$ 之影響，所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。結果顯示最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨著 c_{55} 放大有越大的趨勢，但接近 $\beta = 180^\circ$ 與 $\beta = 360^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 則會相同，由方程式(2.16a)與(2.16c)得知 $\hat{U}_n^{(m)}$ 、 $\hat{W}_n^{(m)}$ 是耦合的，所以 c_{55} 會影響 $\hat{U}_n^{(m)}$ 及 $\hat{W}_n^{(m)}$ 之係數，表示

$\beta = 182^\circ \sim 280^\circ$ 由(2.16a)與(2.16c)控制；在 $\beta = 282^\circ \sim 360^\circ$ 之結果不隨 c_{55} 增加而改變，因不影響 $\hat{V}_n^{(m)}$ 之係數，表示由(2.16b)控制。 c_{66} 做倍數放大也會有相同的影響。

3.4.3 Case3

先將材料彈性數 $[\bar{C}]$ 逆運算 (Inverse) 得 $[S]$ 柔度矩陣。其中 E_{ij} 為楊氏模數、 ν_{ij} 為波松比。利用方程式(3.1)改變 E_{ij} 與 ν_{ij} ，且須符合方程式(3.2)，計算得到一新 $[S']$ ，再將 $[S']$ 做逆運算得新的材料彈性係數 $[\bar{C}']$ 。並對新材料 $[\bar{C}']$ 做應力奇異性分析。

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_{11}}, & S_{12} &= \frac{-\nu_{12}}{E_{11}}, & S_{13} &= \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} \\ S_{21} &= \frac{-\nu_{21}}{E_{22}}, & S_{22} &= \frac{1}{E_{22}}, & S_{23} &= \frac{-\nu_{23}}{E_{22}} \\ S_{31} &= \frac{-\nu_{31}}{E_{33}}, & S_{32} &= \frac{-\nu_{32}}{E_{33}}, & S_{33} &= \frac{1}{E_{33}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

柔度矩陣需對稱

$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_{11}} = \frac{\nu_{31}}{E_{33}}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_{22}} = \frac{\nu_{32}}{E_{33}} \quad (3.2)$$

在本案例中，將 E_{11} 放大兩倍且 S_{12} 與 S_{13} 維持不變，則會得到新的波松比 (ν_{12}, ν_{21}) 之值，但新的波松比仍須介於 0~0.5。圖 3.16 所示者為 $\beta = 360^\circ$ 之旋轉體在自由邊界條件 (F-F) 下，其最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 γ_x 、 γ_y 或 γ_z 之變化，所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。結果顯示 γ_x 、 γ_z 改變時，最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 幾乎不變，而 γ_y 改變時則有改變；但當 $\gamma_y = 34^\circ$ 與 $\gamma_y = 56^\circ$ 時出現急劇改變之現象，此現象之原因不甚清楚，有待將來進一步研究。

因 γ_y 改變之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 會出現急劇改變，圖 3.17 所示者為 $\gamma_y = 0^\circ$ 與 $\beta = 360^\circ$ 之旋轉體在不同邊界條件 (F-F、C-C 與 C-F) 下，其最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 θ 做變化。結果顯示在自由邊界條件 (F-F) 與固定邊界條件 (C-C) 下不同 θ 值之對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數且

對稱 $\theta = 90^\circ$ ；邊界條件 F-C 其最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 亦對稱 $\theta = 90^\circ$ ，在 $\theta = 22^\circ \sim 44^\circ$ 、 $\theta = 66^\circ \sim 114^\circ$ 與 $\theta = 136^\circ \sim 158^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。

§3.5 雲矽鈣石旋轉體之應力奇異性

本節進而分析雲矽鈣石 (Tobermorite) 旋轉體之應力奇異性，其屬三斜晶體 (triclinic material)，是為最不對稱的異向性材料。彈性係數會因分子間的距離不同而有所差異，例如分子間距離大於 11 埃 (Å) 時，某些係數會是零 (如 c_{15} 、 c_{56} 等等)，而分子間距離等於 9 埃 (Å) 時，係數全都存在。本節所探討為分子間距離等於 9 埃 (Å) 之雲矽鈣石，相關彈性係數列於表 3.2。

圖 3.18 所示者為在 $\beta = 360^\circ$ 之雲矽鈣石旋轉體在不同邊界條件 (F-F、C-C 與 C-F) 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之變化，所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。最小 $R_e[\lambda_m]$ 在 $\gamma_y = 34^\circ \sim 68^\circ$ 間出現急劇變化，邊界 F-F 會比 C-C 變化範圍大；在 $\gamma_y = 0^\circ \sim 30^\circ$ 間，雖然最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_y 改變，但其改變幅度不大 (最大差異僅達 5.8%)；而邊界條件 C-F 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 在 0.1~0.25，也有急劇改變之現象。

因 γ_y 變化最小 $R_e[\lambda_m]$ 會出現急劇變化。圖 3.19 所示者為 $\beta = 360^\circ$ 之雲矽鈣石旋轉體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_y 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 θ 之變化。在 $\gamma_y = 0^\circ$ 、 $\gamma_y = 30^\circ$ 時不同 θ 值之最小 $R_e[\lambda_m]$ 會改變幅度不大；但在 $\gamma_y = 60^\circ$ 時不同 θ 值之最小 $R_e[\lambda_m]$ 就會產生急劇變化，與 $\gamma_y = 30^\circ \sim 90^\circ$ 時會跳動相互印證，表示雲矽鈣石在某些 γ_y 角度下最小 $R_e[\lambda_m]$ 會急劇變化。

圖 3.20 所示者為 $\gamma_y = 0^\circ$ 之雲矽鈣石旋轉體在不同邊界條件 (F-F、C-C 與 C-F) 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化，所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。結果顯示固定邊界條件 (C-C) 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 都會比自由邊界條件 (F-F) 者大，對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數，最小 $R_e[\lambda_m]$ 相較正交性材料 (圖 3.10) 較小；值得一提者，當 $\beta = 180^\circ$ 時，邊界條件 F-F 之最小

$R_e[\lambda_m]=0.9822$ ；邊界條件 C-C 之最小 $R_e[\lambda_m]=0.9876$ ，表示會有應力奇異性存在。邊界條件 C-F 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 一樣會介於 $0.25\sim 0.5$ ，當 $\beta = 0^\circ \sim 12^\circ$ 與 $\beta = 104^\circ \sim 180^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數，最小 $R_e[\lambda_m]$ 相較正交性材料(圖 3.12)較小。

§3.6 雙材料旋轉體之應力奇異性

本節考慮正交性材料 (Orthotropic material) 與等向性材料 (Isotropic material) 組合而成之旋轉體；如圖 3.1 所示，取 Material 1 為矽化鈦其角度為 β_1 ，取 Material 2 為等向性材料 ($E = 6.24GPa$ ， $\nu = 0.3$) 且其角度為 180° ；探討邊界條件、幾何形狀、及 γ_y 等改變對應力奇異性之影響。

圖 3.21 所示者為旋轉體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 β_1 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之變化，所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。結果顯示最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 增加而減少，即其應力奇異性隨 β_1 增加而增強；但 γ_y 之角度改變對其影響並不顯著。當 $\beta_1 = 180^\circ$ 且 $\gamma_y = 50^\circ \sim 90^\circ$ 時，對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數；而 $\beta_1 = 135^\circ$ 與 $\beta_1 = 90^\circ$ 之 λ_m (對應最小 $R_e[\lambda_m]$) 者皆為實數。

圖 3.22 所示者為旋轉體 ($\beta_1 = 90^\circ$ 與 $\beta = 180^\circ$) 在不同邊界條件 (F-F、C-C 與 C-F) 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之變化，所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。若是單一材料，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 等於 1，表示幾乎沒有應力奇異性；而複合式材料在邊界條件 F-F (除了 $\gamma_y = 0^\circ$ 及 $\gamma_y = 90^\circ$ 外) 與邊界條件 C-C 下，則會有應力奇異性。複合式材料在自由邊界條件 (F-F) 與固定邊界條件 (C-C) 下之最小 $R_e[\lambda_m]$ 最大差異可達 15.3%。在自由邊界條件 (F-F) 下，當 $\gamma_y = 40^\circ \sim 48^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數；在固定邊界條件 (C-C) 下，對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數；在邊界條件 (F-C) 下當 $\gamma_y = 64^\circ \sim 80^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數；在邊界條件 (C-F) 下當 $\gamma_y = 0^\circ \sim 68^\circ$ 與 $\gamma_y = 84^\circ \sim 90^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。邊界條件 (F-C) 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 都大於邊界條件 (C-F)，表示只固定正交性材料端支應力奇異性較強。

圖 3.23 所示者為旋轉體 ($\beta_1 = 90^\circ$ 與 $\beta - \beta_1 = 180^\circ$) 在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_Y 下, 其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 θ 之變化。對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。當 $\gamma_Y = 0^\circ$ 最大差異可達 4.15%; 當 $\gamma_Y = 30^\circ$ 最大差異可達 5.76%; 當 $\gamma_Y = 60^\circ$ 最大差異可達 4.34%。

圖 3.24 所示者為旋轉體 ($\beta - \beta_1 = 180^\circ$) 在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_Y 下, 其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化, 所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。當 $\gamma_Y = 0^\circ$ 與 $\gamma_Y = 30^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數; 當 $\gamma_Y = 60^\circ$ 時 $\beta_1 = 150^\circ \sim 180^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。

圖 3.25 所示者為旋轉體 ($\beta - \beta_1 = 180^\circ$) 在不同邊界條件 (F-F、C-C、C-F 與 F-C) 及 $\gamma_Y = 60^\circ$ 下, 其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化, 所示之值為在 $\theta = 0^\circ$ 者。在自由邊界條件 (F-F) 與固定邊界條件 (C-C) 下最小 $R_e[\lambda_m]$ 會介於 0.46~1.0, F-F 在 $\beta_1 = 150^\circ \sim 180^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數; C-C 在 $\beta_1 = 154^\circ \sim 180^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數; 在邊界條件 (C-F) 與 (F-C) 之最小 $R_e[\lambda_m]$ 會介於 0.22~0.5, C-F 在 $\beta_1 = 2^\circ \sim 22^\circ$ 、 $\beta_1 = 38^\circ \sim 100^\circ$ 與 $\beta_1 = 124^\circ \sim 180^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數; F-C 在 $\beta_1 = 158^\circ \sim 180^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數; 很明顯地, C-F 及 F-C 所引致之應力奇異性遠較 C-C 及 F-F 者嚴重, C-F 相較 C-C 在 $\beta_1 = 180^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 的差異可達 55.4%。C-F 所引致之奇異性則較 F-C 者強, 兩者在 $\beta_1 = 158^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 的最大差異可達 16.7%, 表示只固定等向性材料端之最小 $R_e[\lambda_m]$ 會比只固定正交性材料端大, 所以只固定正交性材料端支應力奇異性較強。

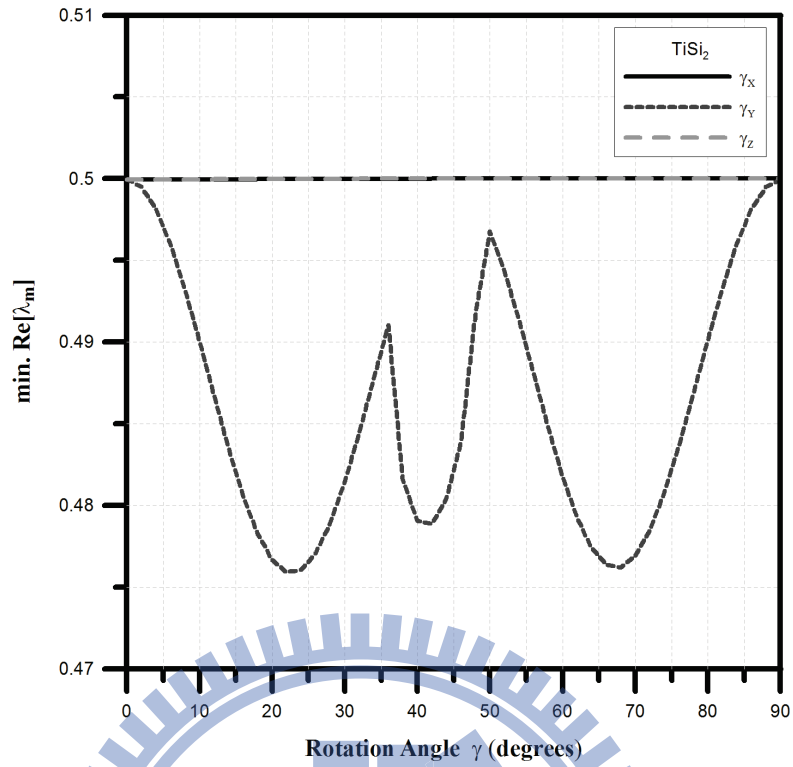


圖 3.3 F-F 矽化鈦旋轉體($\beta = 360^\circ$)之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 γ_x 、 γ_y 或 γ_z 之變化

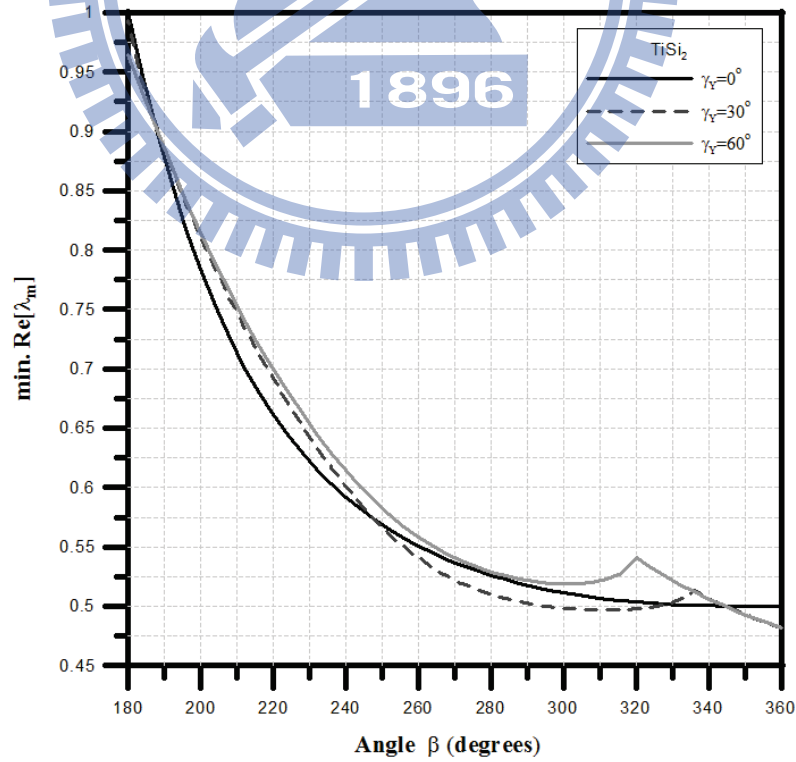


圖 3.4 F-F 不同 γ_y 下矽化鈦旋轉體之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β 之變化

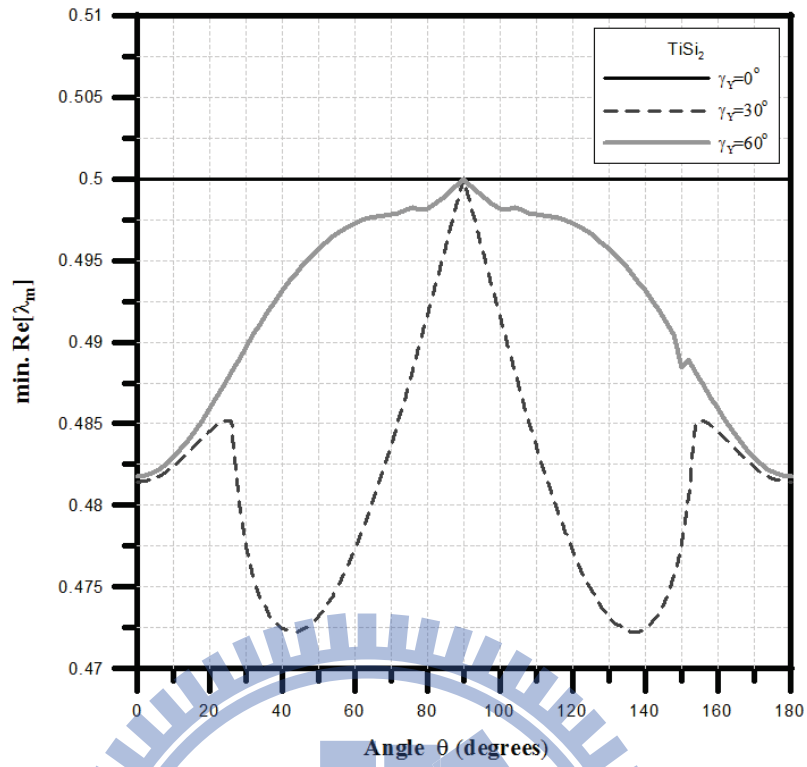


圖 3.5 不同 γ_Y 之 F-F 矽化鈦旋轉體 ($\beta = 360^\circ$) 最小 $Re[\lambda_m]$ 隨 θ 之變化

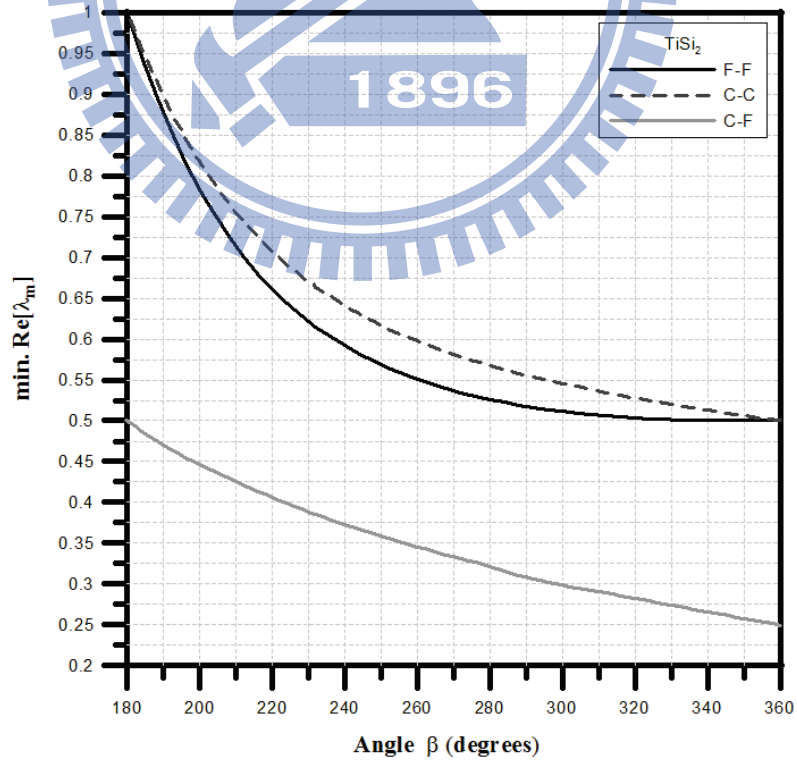


圖 3.6 不同邊界條件矽化鈦旋轉體的最小 $Re[\lambda_m]$ 隨 β 之變化 (考慮 $\gamma_Y = 0^\circ$)

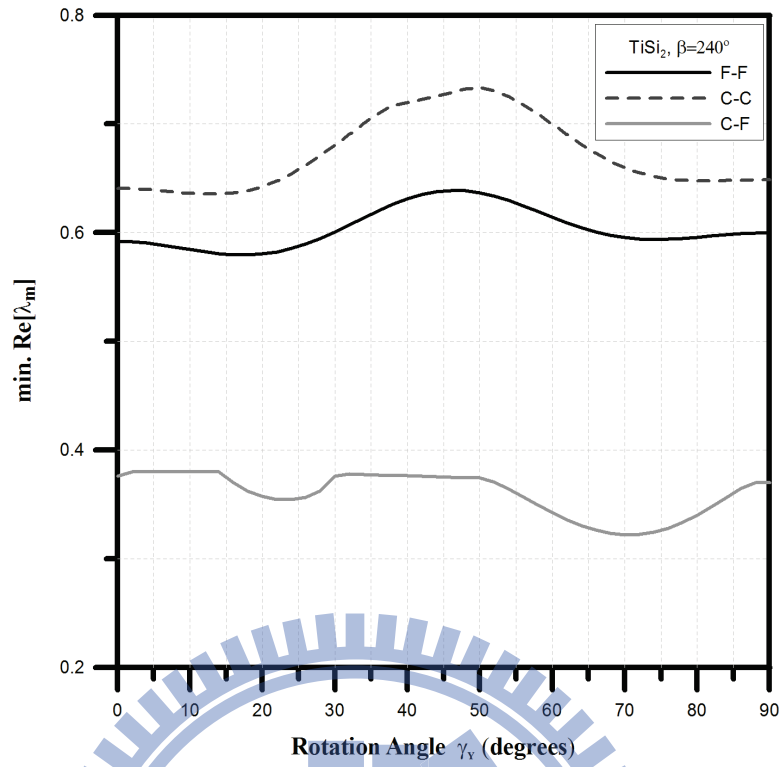


圖 3.7 $\beta = 240^\circ$ 矽化鈦旋轉體之最小 Re [μm] 在不同邊界條件下隨 γ_Y 之變化

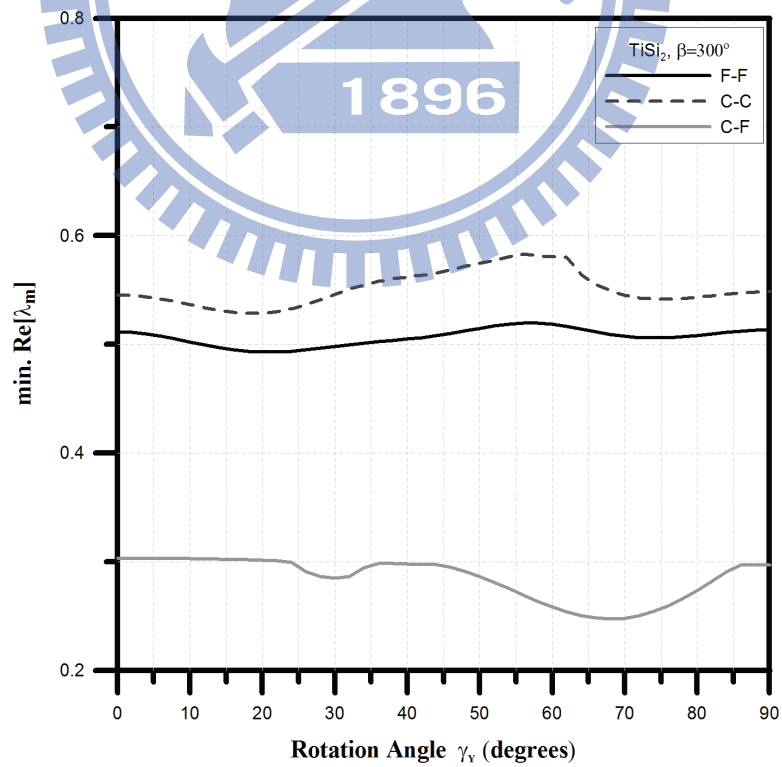


圖 3.8 $\beta = 300^\circ$ 矽化鈦旋轉體之最小 Re [μm] 在不同邊界條件下隨 γ_Y 之變化

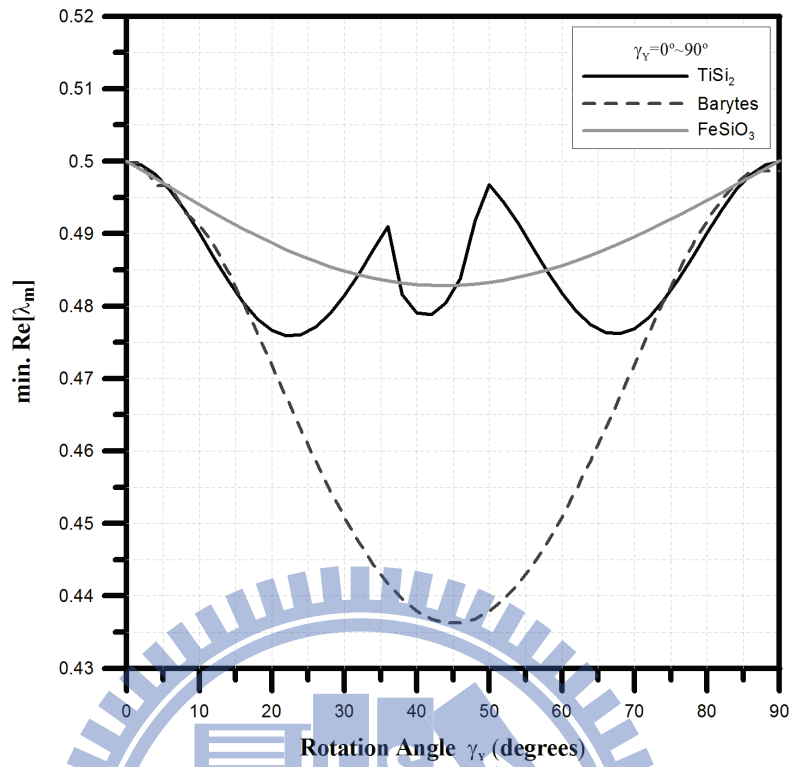


圖 3.9 $\beta = 360^\circ$ 之不同正交性材料旋轉體的最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之改變 (F-F 邊界條件)

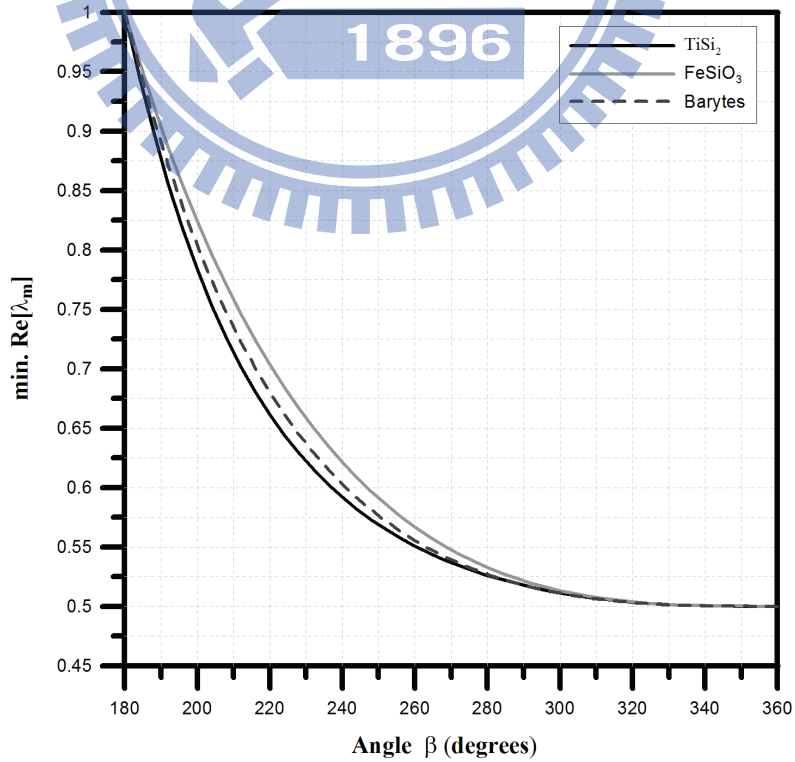


圖 3.10 不同正交性材料旋轉體的最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之改變 (考慮 $\gamma_y = 0^\circ$, F-F 邊界條件)

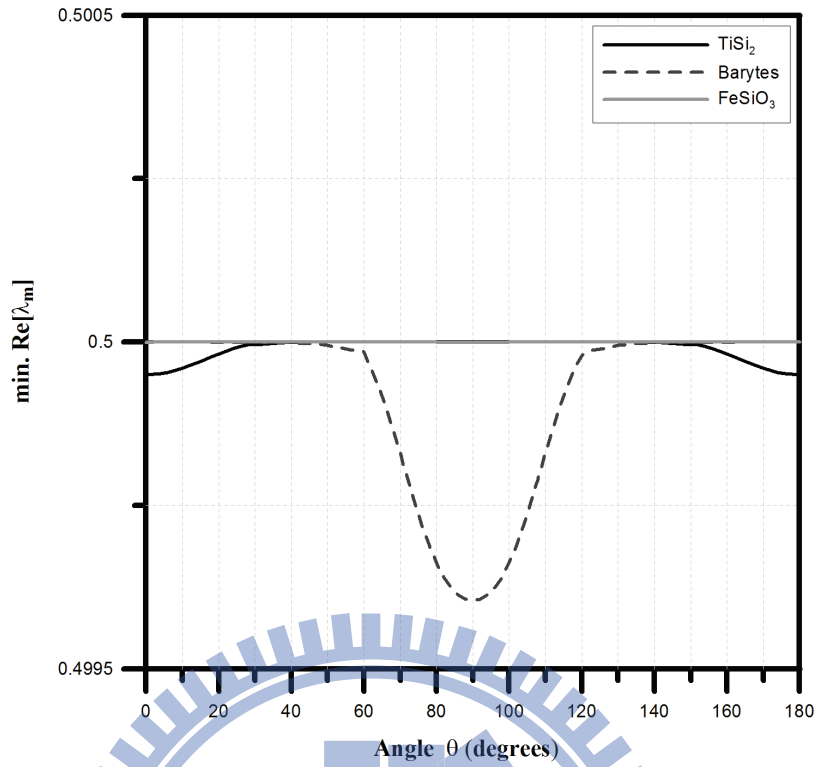


圖 3.11 $\beta = 360^\circ$ 之不同正交性材料旋轉體的最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 θ 之改變 (考慮 $\gamma_Y = 0^\circ$, F-F 邊界條件)

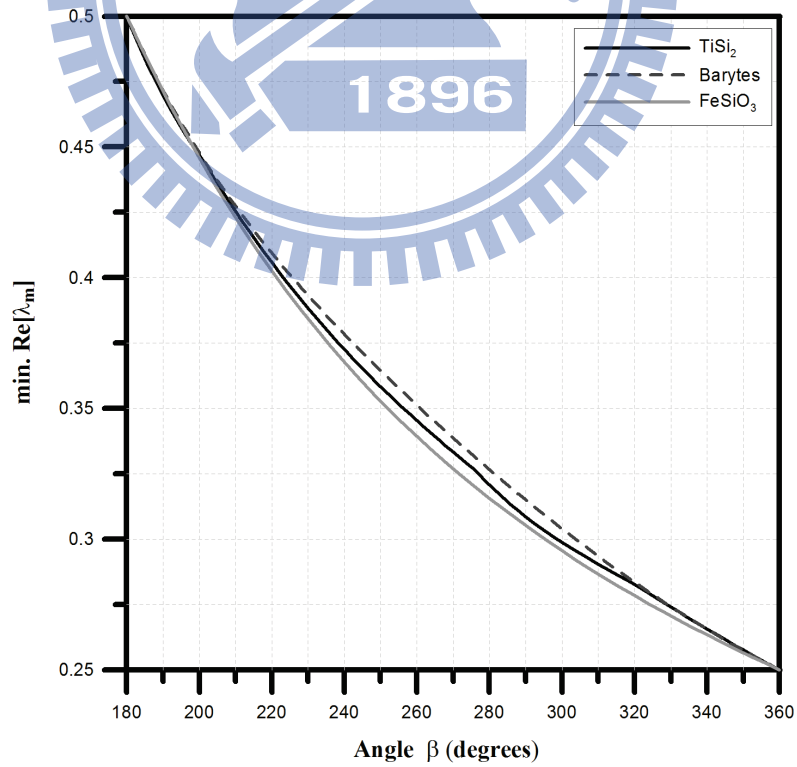


圖 3.12 不同正交性材料旋轉體的最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β 之改變 (考慮 $\gamma_Y = 0^\circ$, C-F 邊界條件)

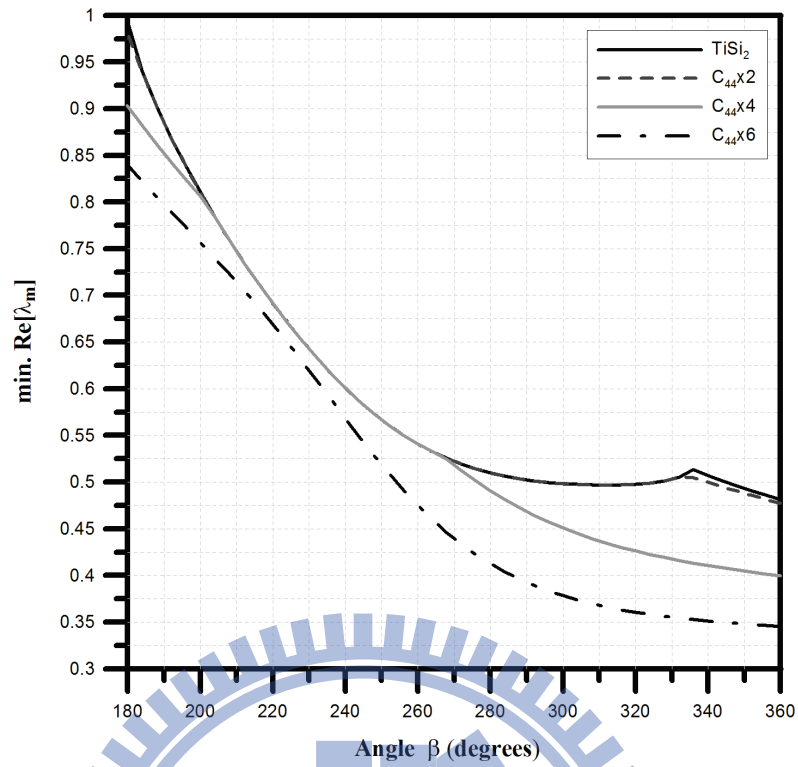


圖 3.13 Case 1 旋轉體的最小 $Re[\lambda_m]$ 隨 β 之改變 (考慮 $\gamma_Y = 30^\circ$, F-F 邊界條件)

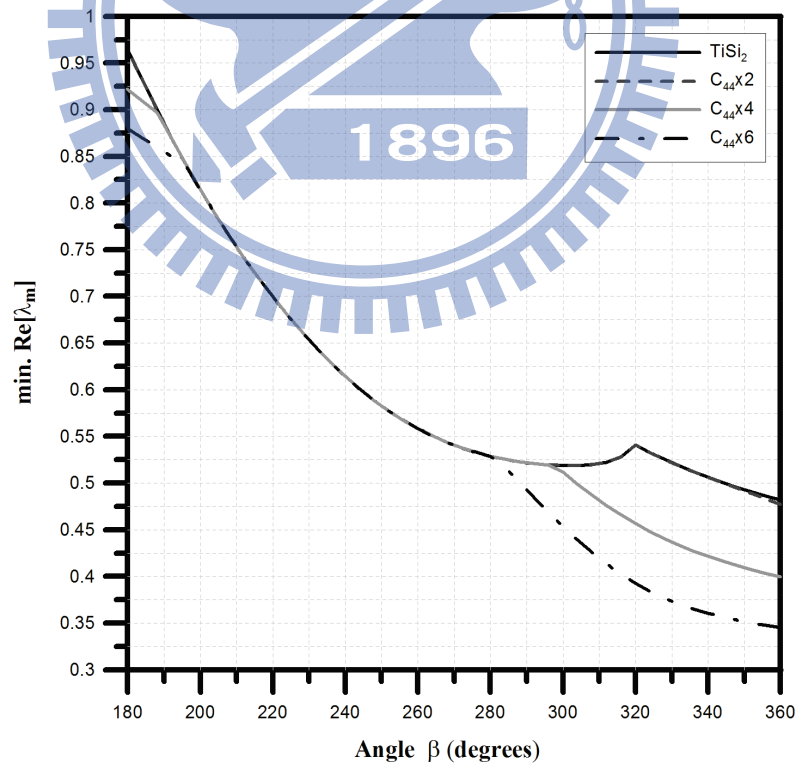


圖 3.14 Case 1 旋轉體的最小 $Re[\lambda_m]$ 隨 β 之改變 (考慮 $\gamma_Y = 60^\circ$, F-F 邊界條件)

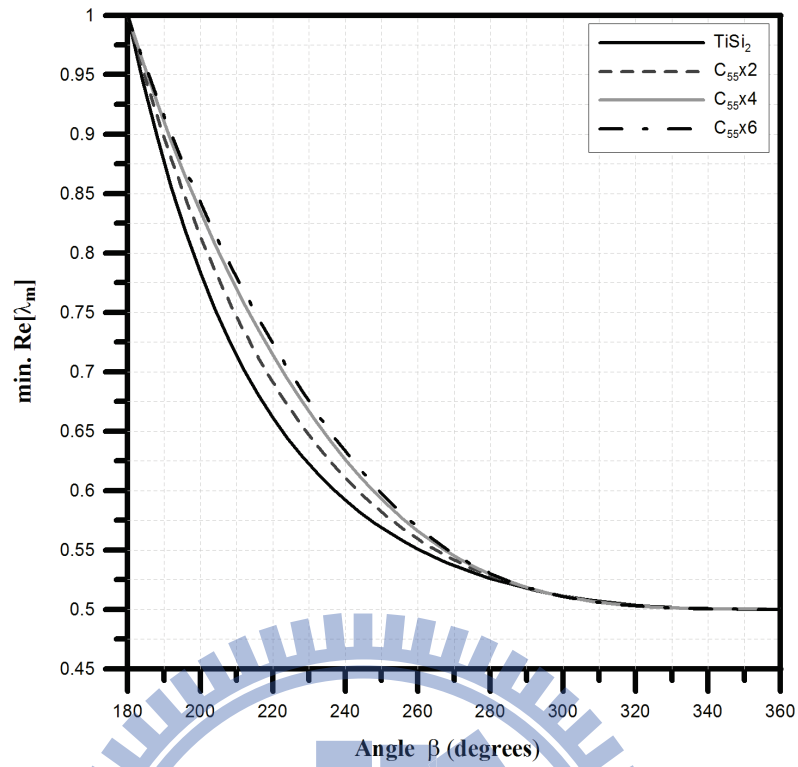


圖 3.15 Case 2 旋轉體的最小 $Re[\lambda_m]$ 隨 β 之改變 (考慮 $\gamma_Y = 0^\circ$, F-F 邊界條件)

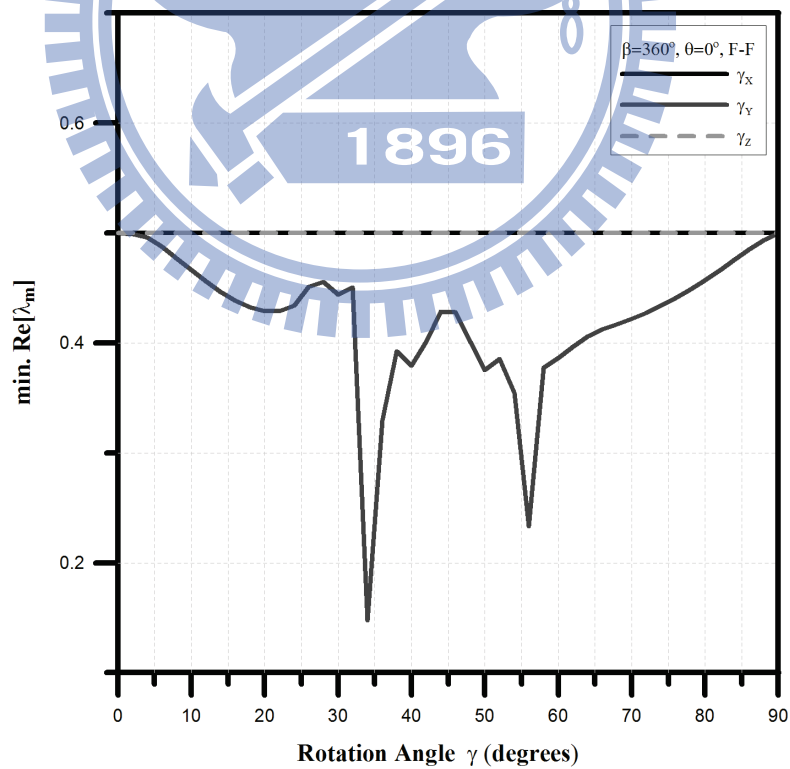


圖 3.16 $\beta = 360^\circ$ 之 Case 3 旋轉體的最小 $Re[\lambda_m]$ 隨 γ_x 、 γ_y 或 γ_z 之變化 (F-F)

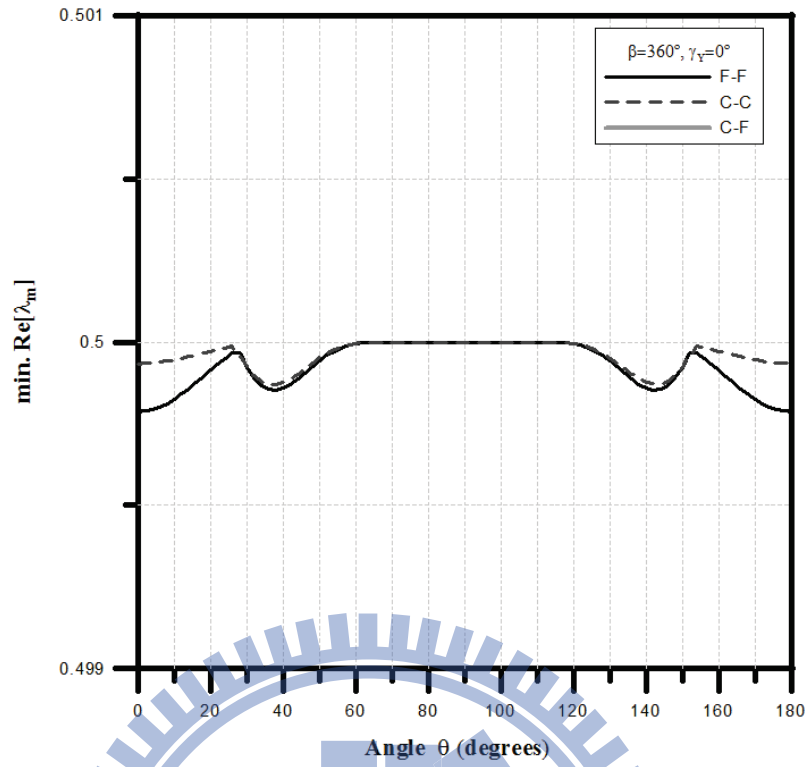


圖 3.17 $\beta = 360^\circ$ 之 Case 3 旋轉體之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 在不同邊界條件下隨 θ 之變化 (考慮 $\gamma_Y = 0^\circ$)

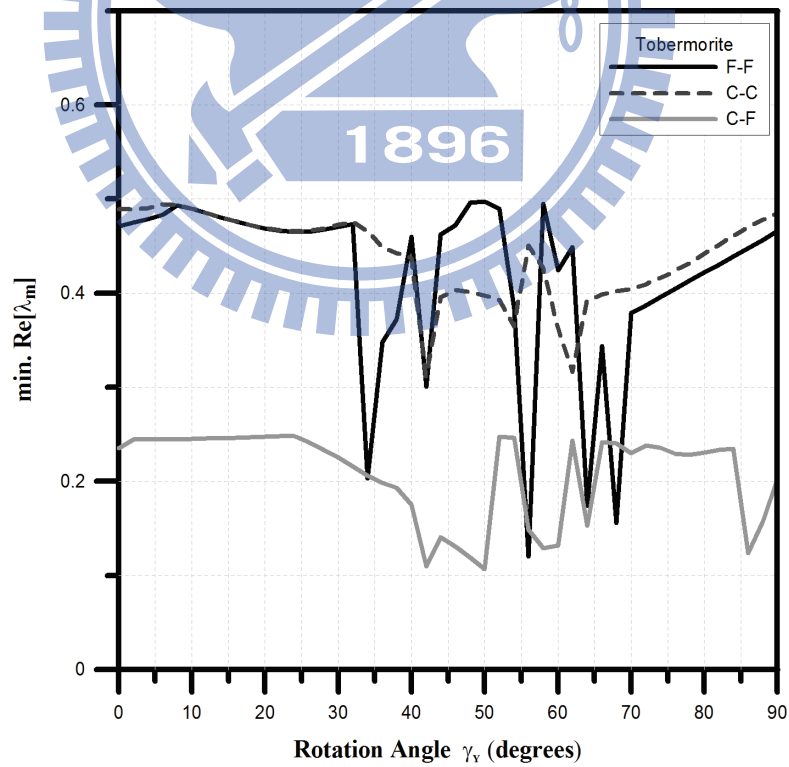


圖 3.18 $\beta = 360^\circ$ 之雲矽鈣石旋轉體之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 在不同邊界條件下隨 γ_Y 之變化

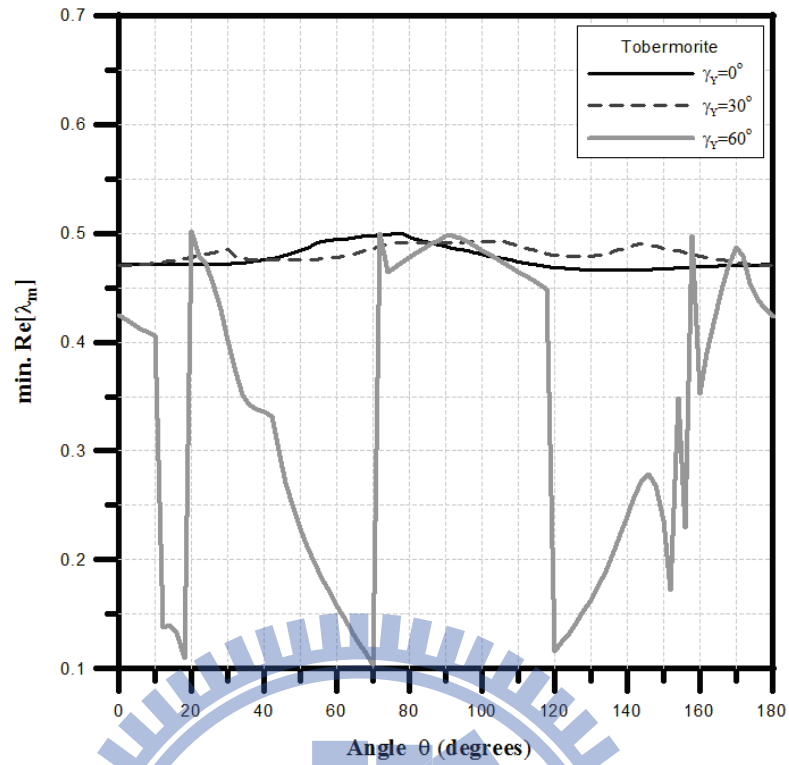


圖 3.19 $\beta = 360^\circ$ 之雲矽鈣石旋轉體之在不同 γ_Y 下最小 $Re[\lambda_m]$ 隨 θ 之變 (F-F 邊界條件)

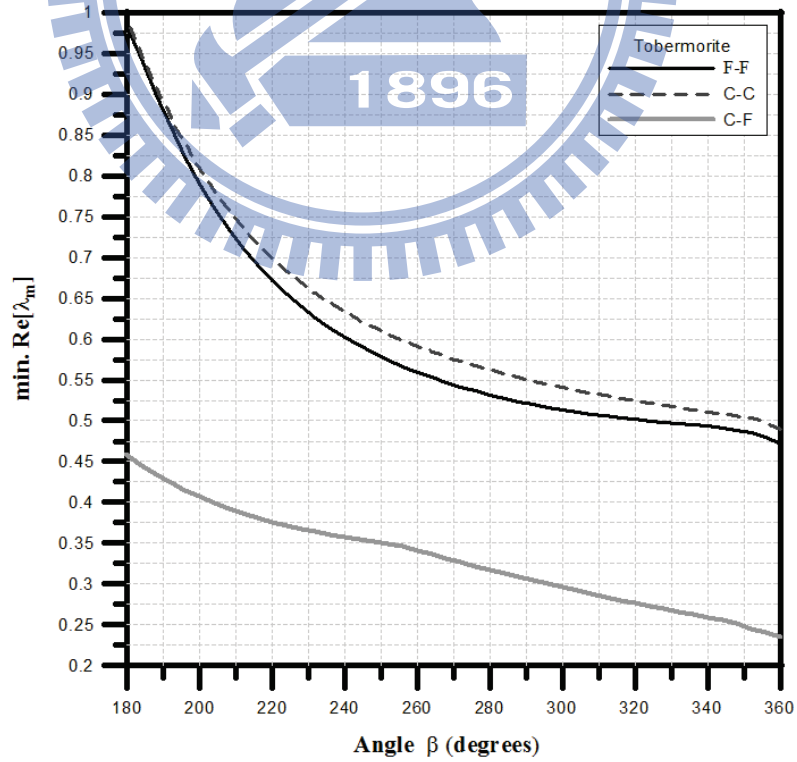


圖 3.20 雲矽鈣石旋轉體在不同邊界條件下最小 $Re[\lambda_m]$ 隨 β 之變化 (考慮 $\gamma_Y = 0^\circ$)

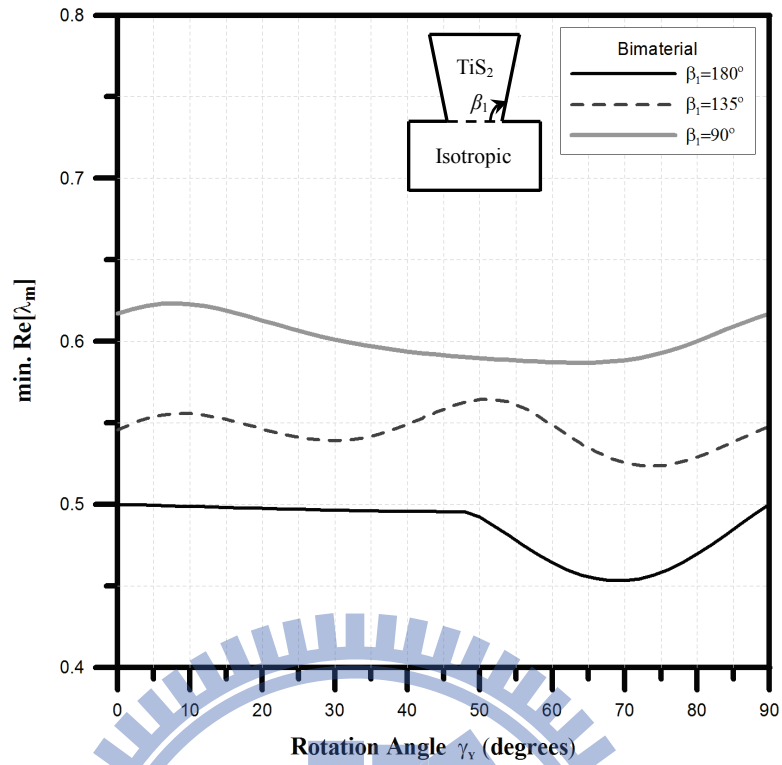


圖 3.21 雙材料旋轉體在不同 β_1 之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 γ_Y 之變化(F-F 邊界條件)

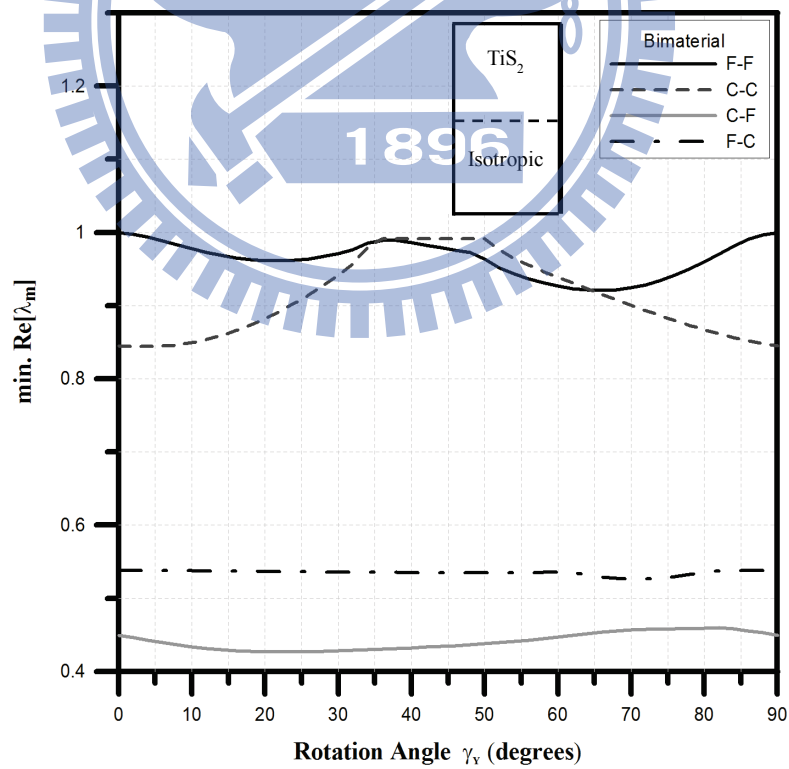


圖 3.22 $\beta_1 = 90^\circ$, $\beta - \beta_1 = 90^\circ$ 之雙材料旋轉體在不同邊界條件下最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 γ_Y 之變化

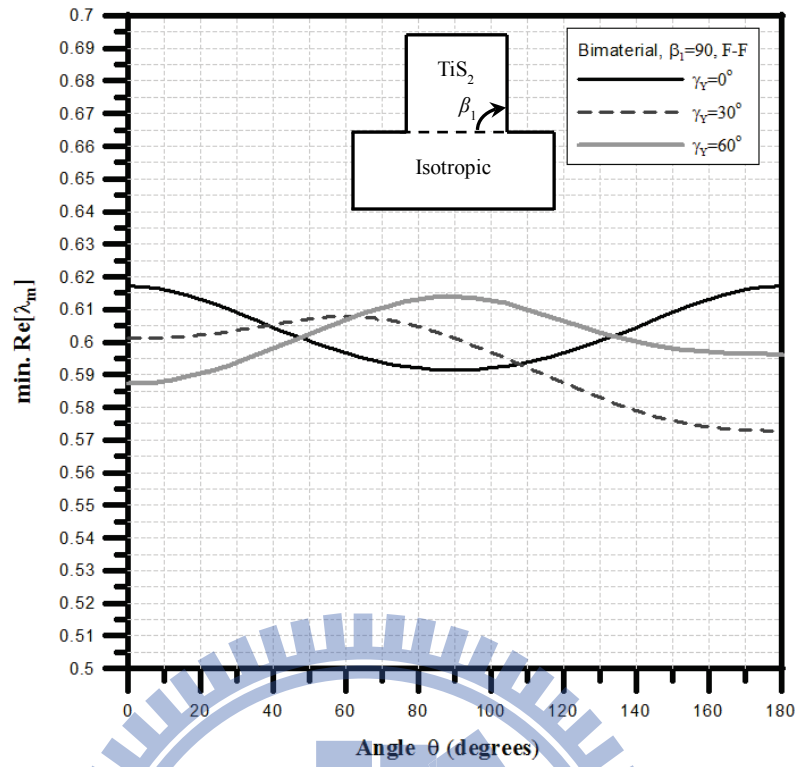


圖 3.23 $\beta_1 = 90^\circ$ 之雙材料旋轉體在不同 γ_Y 下最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 θ 之變化(F-F 邊界條件)

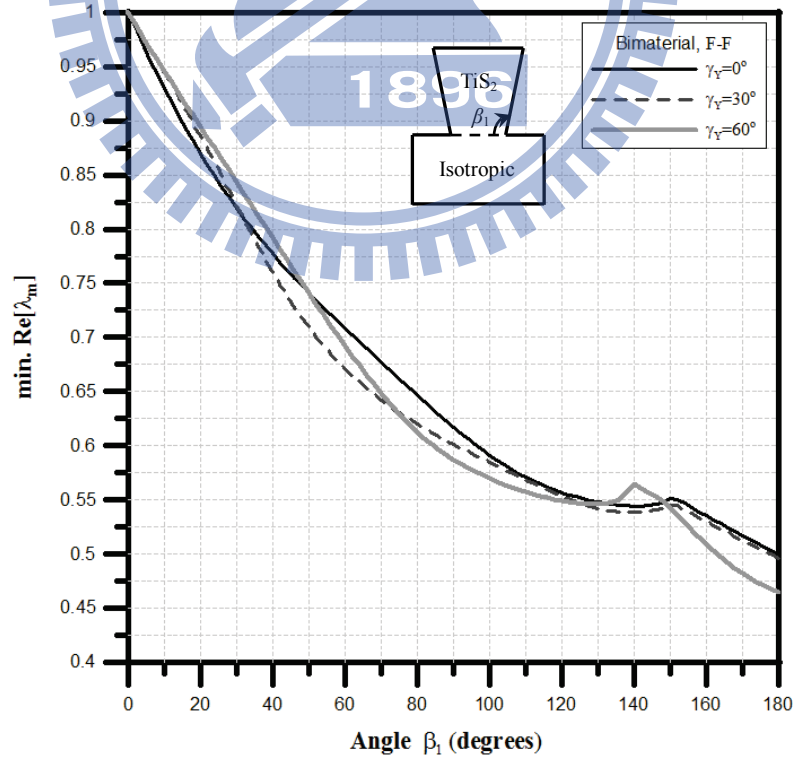


圖 3.24 雙材料旋轉體在不同 γ_Y 下最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化(F-F 邊界條件)

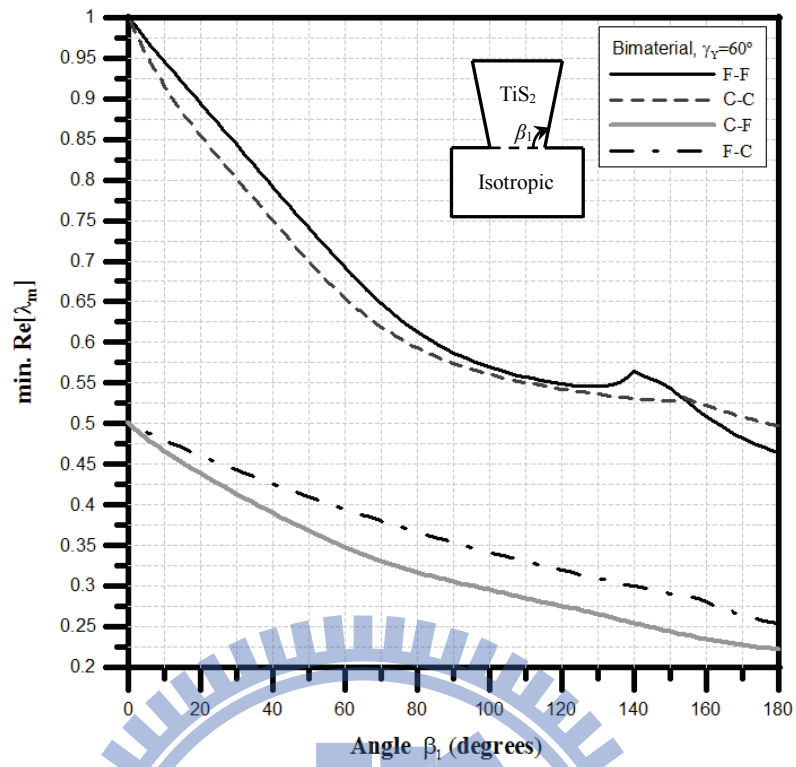


圖 3.25 雙材料旋轉體在不同邊界條件下最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化 (考慮 $\gamma_\gamma = 60^\circ$)

第四章 三維楔形體之幾何所引致應力奇異解

本章推導如圖 4.1 三維楔形體於尖端處之應力漸進解。如同第二章，假設 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 座標系統為定義材料性質之座標系統，而 (X, Y, Z) 為定義物體幾何形狀之座標系統。為考慮尖端處之應力奇異性，用 (r, θ, Z) 圓柱座標系統較易求解；因此，第二章所列之圓柱座標系統下之平衡方程式，本構方程等均可直接應用於本章，不再贅述。

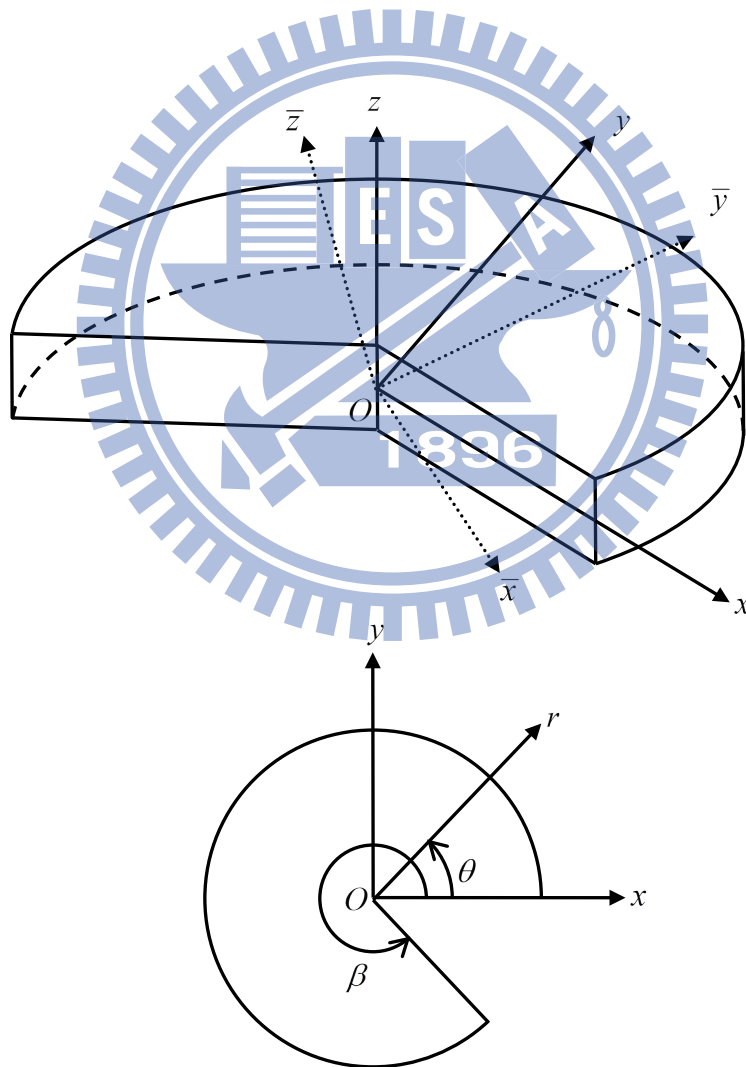


圖 4.1 楔型體之座標 (X, Y, Z) 與 (r, θ, Z)

§4.1 $r \rightarrow 0$ 之奇異性漸進解

由於平衡方程式和本構方程式之推導皆與第二章相同，利用特徵函數展開法，解的形式亦可表示成如下

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_m+n} \hat{U}_n^{(m)}(\theta, z) \\ u_\theta(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_m+n} \hat{V}_n^{(m)}(\theta, z) \\ u_z(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_m+n} \hat{W}_n^{(m)}(\theta, z) \end{aligned} \quad (4.1)$$

λ_m 是待定的參數，可以為複數；其實數部分一定為正數，以確保在 $r=0$ 處之有限位移變形。將式(4.1)代入方程式(2.5)做整理得

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_m+n-2} \left[c_{11}(\lambda_m+n)(\lambda_m+n-1)\hat{U}_n^{(m)} + \left(c_{11} + \frac{\partial c_{16}}{\partial \theta} \right) (\lambda_m+n)\hat{U}_n^{(m)} + \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{U}_n^{(m)}}{\partial \theta} + 2c_{16}(\lambda_m+n) \times \right. \\ & \frac{\partial \hat{U}_n^{(m)}}{\partial \theta} + \left(-c_{22} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} + c_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \hat{U}_n^{(m)} + c_{16}(\lambda_m+n)(\lambda_m+n-1)\hat{V}_n^{(m)} + \left(-c_{26} + \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \right) (\lambda_m+n)\hat{V}_n^{(m)} \\ & + \left(-c_{22} - c_{66} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{V}_n^{(m)}}{\partial \theta} + (c_{12} + c_{66})(\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{V}_n^{(m)}}{\partial \theta} + \left(c_{26} - \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} + c_{26} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \hat{V}_n^{(m)} + c_{15}(\lambda_m+n) \times \\ & (\lambda_m+n-1)\hat{W}_n^{(m)} + \left(c_{15} - c_{25} + \frac{\partial c_{56}}{\partial \theta} \right) (\lambda_m+n)\hat{W}_n^{(m)} + \left(-c_{24} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{W}_n^{(m)}}{\partial \theta} + (c_{14} + c_{56})(\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{W}_n^{(m)}}{\partial \theta} \\ & + c_{46} \frac{\partial^2 \hat{W}_n^{(m)}}{\partial \theta^2} \left. \right] + r^{\lambda_m+n-1} \left[\left(c_{15} + \frac{\partial c_{56}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{U}_n^{(m)}}{\partial z} + 2c_{56} \frac{\partial^2 \hat{U}_n^{(m)}}{\partial \theta \partial z} + 2c_{15}(\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{U}_n^{(m)}}{\partial z} + \left(c_{14} - c_{24} - c_{56} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \times \frac{\partial \hat{V}_n^{(m)}}{\partial z} + (c_{25} + c_{46}) \frac{\partial^2 \hat{V}_n^{(m)}}{\partial \theta \partial z} + (c_{14} + c_{56})(\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{V}_n^{(m)}}{\partial z} + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial^2 \hat{W}_n^{(m)}}{\partial \theta \partial z} + \left(c_{13} - c_{23} + \frac{\partial c_{36}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{W}_n^{(m)}}{\partial z} \\ & \left. + (c_{13} + c_{55})(\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{W}_n^{(m)}}{\partial z} \right] + r^{\lambda_m+n} \left(c_{55} \frac{\partial^2 \hat{U}_n^{(m)}}{\partial z^2} + c_{45} \frac{\partial^2 \hat{V}_n^{(m)}}{\partial z^2} + c_{35} \frac{\partial^2 \hat{W}_n^{(m)}}{\partial z^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_m+n-2} \left[c_{16} (\lambda_m+n)(\lambda_m+n-1) \hat{U}_n^{(m)} + \left(2c_{16} + c_{26} + \frac{\partial c_{12}}{\partial \theta} \right) (\lambda_m+n) \hat{U}_n^{(m)} + \left(c_{22} + c_{66} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{U}_n^{(m)}}{\partial \theta} \right. \\
& + (c_{12} + c_{66}) (\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{U}_n^{(m)}}{\partial \theta} + \left(c_{26} + \frac{\partial c_{22}}{\partial \theta} + c_{26} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \hat{U}_n^{(m)} + c_{66} (\lambda_m+n)(\lambda_m+n-1) \hat{V}_n^{(m)} + \left(\frac{\partial c_{22}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{V}_n^{(m)}}{\partial \theta} \\
& + \left(c_{66} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right) (\lambda_m+n) \hat{V}_n^{(m)} + 2c_{26} (\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{V}_n^{(m)}}{\partial \theta} + \left(-c_{66} - \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \hat{V}_n^{(m)} + c_{56} (\lambda_m+n) \times \\
& (\lambda_m+n-1) \hat{W}_n^{(m)} + \left(2c_{56} + \frac{\partial c_{25}}{\partial \theta} \right) (\lambda_m+n) \hat{W}_n^{(m)} + \left(c_{46} + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{W}_n^{(m)}}{\partial \theta} + (c_{25} + c_{46}) (\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{W}_n^{(m)}}{\partial \theta} \\
& + c_{24} \frac{\partial^2 \hat{W}_n^{(m)}}{\partial \theta^2} \left. \right] + r^{\lambda_m+n-1} \left[\left(2c_{56} + c_{24} + \frac{\partial c_{25}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{U}_n^{(m)}}{\partial z} + (c_{25} + c_{46}) \frac{\partial^2 \hat{U}_n^{(m)}}{\partial \theta \partial z} + (c_{56} + c_{14}) (\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{U}_n^{(m)}}{\partial z} \right. \\
& + \left(c_{46} + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{V}_n^{(m)}}{\partial z} + 2c_{24} \frac{\partial^2 \hat{V}_n^{(m)}}{\partial \theta \partial z} + 2c_{46} (\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{V}_n^{(m)}}{\partial z} + \left(2c_{36} + \frac{\partial c_{23}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{W}_n^{(m)}}{\partial z} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 \hat{W}_n^{(m)}}{\partial \theta \partial z} \\
& + (c_{36} + c_{45}) (\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{W}_n^{(m)}}{\partial z} \left. \right] + r^{\lambda_m+n} \left(c_{45} \frac{\partial^2 \hat{U}_n^{(m)}}{\partial z^2} + c_{44} \frac{\partial^2 \hat{V}_n^{(m)}}{\partial z^2} + c_{34} \frac{\partial^2 \hat{W}_n^{(m)}}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (4.2b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_m+n-2} \left[c_{15} (\lambda_m+n)(\lambda_m+n-1) \hat{U}_n^{(m)} + \left(c_{15} + c_{25} + \frac{\partial c_{14}}{\partial \theta} \right) (\lambda_m+n) \hat{U}_n^{(m)} + \left(c_{24} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{U}_n^{(m)}}{\partial \theta} \right. \\
& + (c_{14} + c_{56}) (\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{U}_n^{(m)}}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} + c_{46} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \hat{U}_n^{(m)} + c_{56} (\lambda_m+n)(\lambda_m+n-1) \hat{V}_n^{(m)} + \left(\frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) (\lambda_m+n) \times \\
& \hat{V}_n^{(m)} + \left(-c_{46} + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{V}_n^{(m)}}{\partial \theta} + (c_{25} + c_{46}) (\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{V}_n^{(m)}}{\partial \theta} + \left(-\frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} + c_{24} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \hat{V}_n^{(m)} + c_{55} (\lambda_m+n) \times \\
& (\lambda_m+n-1) \hat{W}_n^{(m)} + \left(c_{55} + \frac{\partial c_{45}}{\partial \theta} \right) (\lambda_m+n) \hat{W}_n^{(m)} + \left(\frac{\partial c_{44}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{W}_n^{(m)}}{\partial \theta} + 2c_{45} (\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{W}_n^{(m)}}{\partial \theta} + c_{44} \frac{\partial^2 \hat{W}_n^{(m)}}{\partial \theta^2} \left. \right] \\
& + r^{\lambda_m+n-1} \left[\left(c_{23} + c_{55} + \frac{\partial c_{45}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{U}_n^{(m)}}{\partial z} + (c_{45} + c_{36}) \frac{\partial^2 \hat{U}_n^{(m)}}{\partial \theta \partial z} + (c_{55} + c_{13}) (\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{U}_n^{(m)}}{\partial z} + \left(c_{45} - c_{36} + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right) \right. \\
& \times \frac{\partial \hat{V}_n^{(m)}}{\partial z} + (c_{44} + c_{23}) \frac{\partial^2 \hat{V}_n^{(m)}}{\partial \theta \partial z} + (c_{45} + c_{36}) (\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{V}_n^{(m)}}{\partial z} + \left(c_{35} + \frac{\partial c_{34}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \hat{W}_n^{(m)}}{\partial z} + 2c_{34} \frac{\partial^2 \hat{W}_n^{(m)}}{\partial \theta \partial z} \\
& + 2c_{35} (\lambda_m+n) \frac{\partial \hat{W}_n^{(m)}}{\partial z} \left. \right] + r^{\lambda_m+n} \left(c_{35} \frac{\partial^2 \hat{U}_n^{(m)}}{\partial z^2} + c_{34} \frac{\partial^2 \hat{V}_n^{(m)}}{\partial z^2} + c_{33} \frac{\partial^2 \hat{W}_n^{(m)}}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (4.2c)
\end{aligned}$$

為了探討 $r \rightarrow 0$ 之應力奇異現象，故僅取 r 之最低次項；整理 r 最低次項係數，可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + p_1(\theta) \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta} + p_2(\theta) \hat{U}_0^{(m)} + p_3(\theta) \frac{\partial^2 \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + p_4(\theta) \frac{\partial \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta} + p_5(\theta) \hat{V}_0^{(m)} \\ & + p_6(\theta) \frac{\partial^2 \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + p_7(\theta) \frac{\partial \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \theta} + p_8(\theta) \hat{W}_0^{(m)} = 0 \end{aligned} \quad (4.3a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + q_1(\theta) \frac{\partial \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta} + q_2(\theta) \hat{V}_0^{(m)} + q_3(\theta) \frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + q_4(\theta) \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta} + q_5(\theta) \hat{U}_0^{(m)} \\ & + q_6(\theta) \frac{\partial^2 \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + q_7(\theta) \frac{\partial \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \theta} + q_8(\theta) \hat{W}_0^{(m)} = 0 \end{aligned} \quad (4.3b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + s_1(\theta) \frac{\partial \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \theta} + s_2(\theta) \hat{W}_0^{(m)} + s_3(\theta) \frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + s_4(\theta) \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta} + s_5(\theta) \hat{U}_0^{(m)} \\ & + s_6(\theta) \frac{\partial^2 \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + s_7(\theta) \frac{\partial \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta} + s_8(\theta) \hat{V}_0^{(m)} = 0 \end{aligned} \quad (4.3c)$$

其中

$$\begin{aligned} p_1(\theta) &= \frac{1}{c_{66}} \left(2\lambda_m c_{16} + \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \right), \quad p_2(\theta) = \frac{1}{c_{66}} \left(\lambda_m^2 c_{11} + \lambda_m \frac{\partial c_{16}}{\partial \theta} - c_{22} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right), \quad p_3(\theta) = \frac{c_{26}}{c_{66}}, \\ p_4(\theta) &= \frac{1}{c_{66}} \left[(\lambda_m - 1) c_{66} + \lambda_m c_{12} - c_{22} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right], \quad p_5(\theta) = \frac{1}{c_{66}} (\lambda_m - 1) \left(\lambda_m c_{16} - c_{26} + \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \right), \\ p_6(\theta) &= \frac{c_{46}}{c_{66}}, \quad p_7(\theta) = \frac{1}{c_{66}} \left[\lambda_m (c_{14} + c_{56}) - c_{24} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right], \quad p_8(\theta) = \frac{1}{c_{66}} \lambda_m \left(\lambda_m c_{15} - c_{25} + \frac{\partial c_{56}}{\partial \theta} \right) \\ q_1(\theta) &= \frac{1}{c_{22}} \left(2\lambda_m c_{26} + \frac{\partial c_{22}}{\partial \theta} \right), \quad q_2(\theta) = \frac{1}{c_{22}} (\lambda_m - 1) \left[(\lambda_m + 1) c_{66} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right], \quad q_3(\theta) = \frac{c_{26}}{c_{22}}, \\ q_4(\theta) &= \frac{1}{c_{22}} \left[\lambda_m (c_{12} + c_{66}) + c_{66} + c_{22} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right], \\ q_5(\theta) &= \frac{1}{c_{22}} \left[(\lambda_m + 1) (\lambda_m c_{16} + c_{26}) + \lambda_m \frac{\partial c_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial c_{22}}{\partial \theta} \right], \quad q_6(\theta) = \frac{c_{24}}{c_{22}}, \\ q_7(\theta) &= \frac{1}{c_{22}} \left[\lambda_m (c_{25} + c_{46}) + c_{46} + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right], \quad q_8(\theta) = \lambda_m \left[(\lambda_m + 1) c_{56} + \frac{\partial c_{25}}{\partial \theta} \right] \\ s_1(\theta) &= \frac{1}{c_{44}} \left(2\lambda_m c_{45} + \frac{\partial c_{44}}{\partial \theta} \right), \quad s_2(\theta) = \frac{1}{c_{44}} \lambda_m \left(\lambda_m c_{55} + \frac{\partial c_{45}}{\partial \theta} \right), \quad s_3(\theta) = \frac{c_{46}}{c_{44}}, \\ s_4(\theta) &= \frac{1}{c_{44}} \left[\lambda_m (c_{14} + c_{56}) + c_{24} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right], \quad s_5(\theta) = \frac{1}{c_{44}} \left[\lambda_m \left(\lambda_m c_{15} + c_{25} + \frac{\partial c_{14}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right], \\ s_6(\theta) &= \frac{c_{24}}{c_{44}}, \quad s_7(\theta) = \frac{1}{c_{44}} \left[\lambda_m (c_{25} + c_{46}) - c_{46} + \frac{\partial c_{24}}{\partial \theta} \right], \quad s_8(\theta) = \frac{1}{c_{44}} (\lambda_m - 1) \left(\lambda_m c_{56} + \frac{\partial c_{46}}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

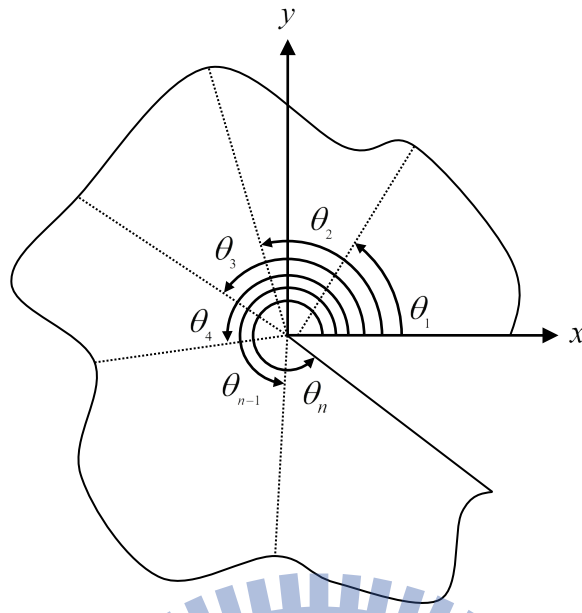


圖 4.2 子域 $\theta \in [0, \theta_n]$

方程式(4.3)是一組變係數常微分方程式，係數 θ 的函數，要獲得到閉合解（closed-form solution）通常是不可能的；而級數解（power series method）為一可行方法。級數解取到越高次項所得的解會越精確，但卻也常會造成數值計算之困難。為了解決此問題，我們將全域切割成許多子域，如圖 4.2，子域間必須滿足連續條件；此方法對於建立多材料旋轉體之解是非常方便的。

為了建立子域的級數解，將微分方程式的變係數（ θ 之函數）於每個子域中之中點（ $\bar{\theta}$ ），以泰勒展開式表示：

$$p_j(\theta) = \sum_{k=0}^K \bar{a}_{jk}^{(i)} (\theta - \bar{\theta}_i)^k, \quad q_j(\theta) = \sum_{k=0}^K \bar{b}_{jk}^{(i)} (\theta - \bar{\theta}_i)^k, \quad s_j(\theta) = \sum_{k=0}^K \bar{c}_{jk}^{(i)} (\theta - \bar{\theta}_i)^k \quad (4.4)$$

$j = 1, 2, \dots, 8$

因此，在每個子域中的位移函數也均以級數表示成：

$$\hat{U}_{0i}^{(m)} = \sum_{j=0}^J \hat{A}_j^{(i)} (\theta - \bar{\theta}_i)^j, \quad \hat{V}_{0i}^{(m)} = \sum_{j=0}^J \hat{B}_j^{(i)} (\theta - \bar{\theta}_i)^j, \quad \hat{W}_{0i}^{(m)} = \sum_{j=0}^J \hat{C}_j^{(i)} (\theta - \bar{\theta}_i)^j \quad (4.5)$$

將式(4.4)與(4.5)代入方程式(4.3)，整理可得

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{j+2}^{(i)} + (\bar{a}_3)_0^{(i)} \hat{B}_{j+2}^{(i)} + (\bar{a}_6)_0^{(i)} \hat{C}_{j+2}^{(i)} &= \frac{-1}{(j+2)(j+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} \left[(k+2)(k+1) \left((\bar{a}_3)_{j-k}^{(i)} \hat{B}_{k+2}^{(i)} + (\bar{a}_6)_{j-k}^{(i)} \hat{C}_{k+2}^{(i)} \right) \right] \right. \\
&+ \sum_{k=0}^j \left[(k+1) (\bar{a}_1)_{j-k}^{(i)} \hat{A}_{k+1}^{(i)} + (\bar{a}_2)_{j-k}^{(i)} \hat{A}_k^{(i)} + (k+1) (\bar{a}_4)_{j-k}^{(i)} \hat{B}_{k+1}^{(i)} + (\bar{a}_5)_{j-k}^{(i)} \hat{B}_k^{(i)} + (k+1) (\bar{a}_7)_{j-k}^{(i)} \hat{C}_{k+1}^{(i)} \right. \\
&\left. \left. + (\bar{a}_8)_{j-k}^{(i)} \hat{C}_k^{(i)} \right] \right\} \quad (4.6a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{j+2}^{(i)} + (\bar{b}_3)_0^{(i)} \hat{A}_{j+2}^{(i)} + (\bar{b}_6)_0^{(i)} \hat{C}_{j+2}^{(i)} &= \frac{-1}{(j+2)(j+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} \left[(k+2)(k+1) \left((\bar{b}_3)_{j-k}^{(i)} \hat{A}_{k+2}^{(i)} + (\bar{b}_6)_{j-k}^{(i)} \hat{C}_{k+2}^{(i)} \right) \right] \right. \\
&+ \sum_{k=0}^j \left[(k+1) (\bar{b}_1)_{j-k}^{(i)} \hat{B}_{k+1}^{(i)} + (\bar{b}_2)_{j-k}^{(i)} \hat{B}_k^{(i)} + (k+1) (\bar{b}_4)_{j-k}^{(i)} \hat{A}_{k+1}^{(i)} + (\bar{b}_5)_{j-k}^{(i)} \hat{A}_k^{(i)} + (k+1) (\bar{b}_7)_{j-k}^{(i)} \hat{C}_{k+1}^{(i)} \right. \\
&\left. \left. + (\bar{b}_8)_{j-k}^{(i)} \hat{C}_k^{(i)} \right] \right\} \quad (4.6b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{j+2}^{(i)} + (\bar{c}_3)_0^{(i)} \hat{A}_{j+2}^{(i)} + (\bar{c}_6)_0^{(i)} \hat{B}_{j+2}^{(i)} &= \frac{-1}{(j+2)(j+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} \left[(k+2)(k+1) \left((\bar{c}_3)_{j-k}^{(i)} \hat{A}_{k+2}^{(i)} + (\bar{c}_6)_{j-k}^{(i)} \hat{B}_{k+2}^{(i)} \right) \right] \right. \\
&+ \sum_{k=0}^j \left[(k+1) (\bar{c}_1)_{j-k}^{(i)} \hat{C}_{k+1}^{(i)} + (\bar{c}_2)_{j-k}^{(i)} \hat{C}_k^{(i)} + (k+1) (\bar{c}_4)_{j-k}^{(i)} \hat{A}_{k+1}^{(i)} + (\bar{c}_5)_{j-k}^{(i)} \hat{A}_k^{(i)} + (k+1) (\bar{c}_7)_{j-k}^{(i)} \hat{B}_{k+1}^{(i)} \right. \\
&\left. \left. + (\bar{c}_8)_{j-k}^{(i)} \hat{B}_k^{(i)} \right] \right\} \quad (4.6c)
\end{aligned}$$

式(4.6)代表 $\hat{A}_j^{(i)}$ 、 $\hat{B}_j^{(i)}$ 及 $\hat{C}_j^{(i)}$ 係數間之遞迴關係。若 $\hat{A}_0^{(i)}$ 、 $\hat{A}_1^{(i)}$ 、 $\hat{B}_0^{(i)}$ 、 $\hat{B}_1^{(i)}$ 、 $\hat{C}_0^{(i)}$ 、 $\hat{C}_1^{(i)}$ 已知，則可由方程式(4.6)求解得到 $\hat{A}_{j+2}^{(i)}$ 、 $\hat{B}_{j+2}^{(i)}$ 、 $\hat{C}_{j+2}^{(i)}$ ($j=0, 1, 2, \dots$)。因此，方程式(4.3) 在每一子域中的解均可簡單地表示成

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{0i}^{(m)}(\theta, z) &= \hat{A}_0^{(i)} \hat{U}_{00}^{(m)}(\theta) + \hat{A}_1^{(i)} \hat{U}_{01}^{(m)}(\theta) + \hat{B}_0^{(i)} \hat{U}_{02}^{(m)}(\theta) + \hat{B}_1^{(i)} \hat{U}_{03}^{(m)}(\theta) + \hat{C}_0^{(i)} \hat{U}_{04}^{(m)}(\theta) + \hat{C}_1^{(i)} \hat{U}_{05}^{(m)}(\theta) \\
\hat{V}_{0i}^{(m)}(\theta, z) &= \hat{A}_0^{(i)} \hat{V}_{00}^{(m)}(\theta) + \hat{A}_1^{(i)} \hat{V}_{01}^{(m)}(\theta) + \hat{B}_0^{(i)} \hat{V}_{02}^{(m)}(\theta) + \hat{B}_1^{(i)} \hat{V}_{03}^{(m)}(\theta) + \hat{C}_0^{(i)} \hat{V}_{04}^{(m)}(\theta) + \hat{C}_1^{(i)} \hat{V}_{05}^{(m)}(\theta) \\
\hat{W}_{0i}^{(m)}(\theta, z) &= \hat{A}_0^{(i)} \hat{W}_{00}^{(m)}(\theta) + \hat{A}_1^{(i)} \hat{W}_{01}^{(m)}(\theta) + \hat{B}_0^{(i)} \hat{W}_{02}^{(m)}(\theta) + \hat{B}_1^{(i)} \hat{W}_{03}^{(m)}(\theta) + \hat{C}_0^{(i)} \hat{W}_{04}^{(m)}(\theta) + \hat{C}_1^{(i)} \hat{W}_{05}^{(m)}(\theta) \quad (4.7)
\end{aligned}$$

其中下標“ i ”代表在子域“ i ”。先將式(4.7)代回式(4.1)可得 u_r, u_z, u_θ ，再代回式(2.4)，

即可得到 $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{z\theta}, \sigma_{zr}, \sigma_{r\theta}$ 之級數表示式。

§4.2 連續條件與邊界條件之滿足

為了得到方程式(4.3)在全域之解，在兩相鄰子域之介面必須滿足位移及 traction 之連續，此連續條件可表示成：

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)} = \sigma_{\theta\theta}^{(i+1)}, \quad \sigma_{\theta r}^{(i)} = \sigma_{\theta r}^{(i+1)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(i)} = \sigma_{\theta z}^{(i+1)}, \quad u_{\theta}^{(i)} = u_{\theta}^{(i+1)}, \quad u_r^{(i)} = u_r^{(i+1)}, \quad u_z^{(i)} = u_z^{(i+1)} \quad (4.8)$$

其中上標“(i)”代表子域*i*。

另外，在邊界上須滿足邊界條件；自由端的邊界條件為

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad (4.9a)$$

固定端則須滿足

$$u_{\theta} = u_r = u_z = 0 \quad (4.9b)$$

若將 θ 之值域切成 *n* 個子域，則由式(4.7)中共有 6*n* 個係數 (*i*=1,2,...,*n*)；從邊界條件與連續條件可得到以 $\hat{A}_0^{(i)}, \hat{A}_1^{(i)}, \hat{B}_0^{(i)}, \hat{B}_1^{(i)}, \hat{C}_0^{(i)}, \hat{C}_1^{(i)}$ 的待定係數之 6*n* 條齊次(homogeneous)線性代數方程 (如(2.16)式所式)。

§4.3 正交性材料 (Orthotropic Materials) 之特性

假設 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 為正交性材料之 axes of orthotropy。矩陣 $[\bar{C}]$ 可表示成

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_{12} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_{13} & \bar{c}_{23} & \bar{c}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{66} \end{bmatrix}$$

在一般情形下，即使是分析正交性材料，其面內及面外位移函數是相互耦合的。但有某些特殊情況下及特殊 θ 角下，式(4.3)中之面內及面外位移可分開考慮。例如當考慮 $\theta=0^\circ$ 時且 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 與 (X, Y, Z) 重疊或 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 與 (X, Y, Z) 有相同之 \bar{Z} 及 Z 軸。

當 $\theta = 0^\circ$ ， $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 與 (X, Y, Z) 重疊時，式(4.3)可簡化為

$$\frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + \bar{p}_1(\theta) \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta} + \bar{p}_2(\theta) \hat{U}_0^{(m)} + \bar{p}_3(\theta) \frac{\partial \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta} + \bar{p}_4(\theta) \hat{V}_0^{(m)} = 0 \quad (4.10a)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + \bar{q}_1(\theta) \frac{\partial \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta} + \bar{q}_2(\theta) \hat{V}_0^{(m)} + \bar{q}_3(\theta) \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta} + \bar{q}_4(\theta) \hat{U}_0^{(m)} = 0 \quad (4.10b)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + \bar{s}_1(\theta) \frac{\partial \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \theta} + \bar{s}_2(\theta) \hat{W}_0^{(m)} = 0 \quad (4.10c)$$

其中

$$\bar{p}_1(\theta) = \frac{1}{c_{66}} \left(\frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \right), \quad \bar{p}_2(\theta) = \frac{1}{c_{66}} (\lambda_m^2 c_{11} - c_{22}), \quad \bar{p}_3(\theta) = \frac{1}{c_{66}} [(\lambda_m - 1) c_{66} - c_{22}],$$

$$\bar{p}_4(\theta) = \frac{1}{c_{66}} (\lambda_m - 1) \left(\frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \right)$$

$$\bar{q}_1(\theta) = \frac{1}{c_{22}} \left(\frac{\partial c_{22}}{\partial \theta} \right), \quad \bar{q}_2(\theta) = \frac{1}{c_{22}} (\lambda_m - 1) [(\lambda_m + 1) c_{66}], \quad \bar{q}_3(\theta) = \frac{1}{c_{22}} [\lambda_m (c_{12} + c_{66}) + c_{66} + c_{22}],$$

$$\bar{q}_4(\theta) = \frac{1}{c_{22}} \left[\lambda_m \frac{\partial c_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial c_{22}}{\partial \theta} \right]$$

$$\bar{s}_1(\theta) = \frac{1}{c_{44}} \left(\frac{\partial c_{44}}{\partial \theta} \right), \quad \bar{s}_2(\theta) = \frac{1}{c_{44}} \lambda_m (\lambda_m c_{55})$$

故當材料座標軸與幾何座標重疊時，從方程式(4.10a)與(4.10b)得知 $\hat{U}_n^{(m)}$ 與 $\hat{V}_n^{(m)}$ 是耦合的；從方程式(4.10c)得知 $\hat{W}_n^{(m)}$ 獨立存在，與 $\hat{U}_n^{(m)}$ 及 $\hat{V}_n^{(m)}$ 無關。

當 $\theta = 0^\circ$ ， $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 與 (X, Y, Z) 有相同之 \bar{Z} 及 Z 軸。即將 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對 Z 軸進行

旋轉，由轉換關係 $[C] = [T]_\sigma [K] [\bar{C}] [K]^T [T]_e^{-1}$ 得

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

矩陣中部分元素為零，其中如 c_{15} 、 c_{46} 等等，將該值帶入方程式(4.3)中，整理後如下：

$$\frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + p_{1z}(\theta) \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta} + p_{2z}(\theta) \hat{U}_0^{(m)} + p_{3z}(\theta) \frac{\partial^2 \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + p_{4z}(\theta) \frac{\partial \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta} + p_{5z}(\theta) \hat{V}_0^{(m)} = 0 \quad (4.13a)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + q_{1z}(\theta) \frac{\partial \hat{V}_0^{(m)}}{\partial \theta} + q_{2z}(\theta) \hat{V}_0^{(m)} + q_{3z}(\theta) \frac{\partial^2 \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + q_{4z}(\theta) \frac{\partial \hat{U}_0^{(m)}}{\partial \theta} + q_{5z}(\theta) \hat{U}_0^{(m)} = 0 \quad (4.13b)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \theta^2} + s_1(\theta) \frac{\partial \hat{W}_0^{(m)}}{\partial \theta} + s_2(\theta) \hat{W}_0^{(m)} = 0 \quad (4.13c)$$

其中

$$p_{1z}(\theta) = \frac{1}{c_{66}} \left(2\lambda_m c_{16} + \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \right), \quad p_{2z}(\theta) = \frac{1}{c_{66}} \left(\lambda_m^2 c_{11} + \lambda_m \frac{\partial c_{16}}{\partial \theta} - c_{22} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right), \quad p_{3z}(\theta) = \frac{c_{26}}{c_{66}},$$

$$p_{4z}(\theta) = \frac{1}{c_{66}} \left[(\lambda_m - 1)c_{66} + \lambda_m c_{12} - c_{22} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right], \quad p_{5z}(\theta) = \frac{1}{c_{66}} (\lambda_m - 1) \left(\lambda_m c_{16} - c_{26} + \frac{\partial c_{66}}{\partial \theta} \right)$$

$$q_{1z}(\theta) = \frac{1}{c_{22}} \left(2\lambda_m c_{26} + \frac{\partial c_{22}}{\partial \theta} \right), \quad q_{2z}(\theta) = \frac{1}{c_{22}} (\lambda_m - 1) \left[(\lambda_m + 1)c_{66} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right], \quad q_{3z}(\theta) = \frac{c_{26}}{c_{22}},$$

$$q_{4z}(\theta) = \frac{1}{c_{22}} \left[\lambda_m (c_{12} + c_{66}) + c_{66} + c_{22} + \frac{\partial c_{26}}{\partial \theta} \right], \quad s_{1z}(\theta) = \frac{1}{c_{44}} \left(2\lambda_m c_{45} + \frac{\partial c_{44}}{\partial \theta} \right),$$

$$q_{5z}(\theta) = \frac{1}{c_{22}} \left[(\lambda_m + 1)(\lambda_m c_{16} + c_{26}) + \lambda_m \frac{\partial c_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial c_{22}}{\partial \theta} \right], \quad s_{2z}(\theta) = \frac{1}{c_{44}} \lambda_m \left(\lambda_m c_{55} + \frac{\partial c_{45}}{\partial \theta} \right)$$

將 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對 Z 軸旋轉時，可從方程式(4.13a)與(4.13b)得知 $\hat{U}_n^{(m)}$ 、 $\hat{V}_n^{(m)}$ 是耦合的；從方程式(4.13c)得知 $\hat{W}_n^{(m)}$ 獨立存在。

第五章 楔形體結果分析

為了方便討論材料的特性、邊界條件、幾何形狀、及參數改變對應力奇異性 (singularity) λ_m 值之影響，先將欲探討之參數做說明如下：

γ ：如圖 4.1，為材料異向性之材料座標軸 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對幾何座標軸 (X, Y, Z) 旋轉之

角度， γ_x 、 γ_y 、 γ_z 分別為對 X、Y 及 Z 軸旋轉之角度；本章僅考慮對單一軸旋轉，不考慮同時對兩軸以上(含)之旋轉問題。

β ：如圖 5.1，表示幾何形狀之角度 $(\beta, \beta_1, \beta_2)$

F、C：表示邊界條件，F (代表自由端)、C (代表固定端)；如圖 5.1，F-C 表示 Material 1 之邊界條件 F、Material 2 之邊界條件 C。

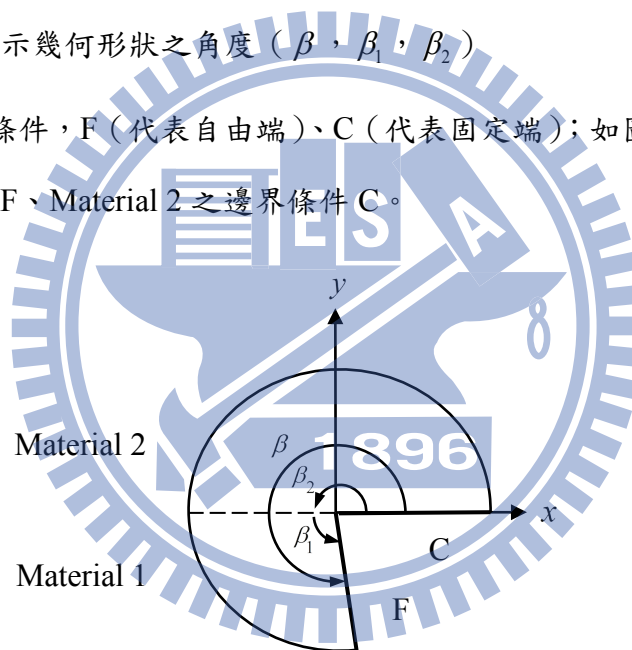


圖 5.1 複合式材料之楔形體角度示意圖

§5.1 方法驗證與收斂性分析

由於文獻上異向性材料楔形體奇異性分析皆為將等向性材料纖維方向 (fiber orientations) 旋轉後，將其視為異向性材料來做分析。為驗證本研究所推導之解的正確性，吾人利用等向性材料之文獻結果來確認本研究之解及所衍生電腦程式的正確性。

根據 Hwu[16] 假設物理量與厚度無關，則可消除厚度方向之應變相關項次；因此，方程式(4.3)中 C_{ij} (i 或 $j=3$) 亦會被消除。依此假設得到之解會與 Hwu[16] 所求得之 λ_m 一致，則可發現式(2.5)中有關 z 之次項在式(4.3)均未出現，此表示若依據該假設，在式(2.5)中有關 z 方向之物理量均不會影響式(4.3)之建立；如圖 5.2 所示，考慮兩種幾何形狀之楔形體，一為 $\beta = 360^\circ$ ，另一為 $\beta = 360^\circ$ 之單一等向性材料楔形體。

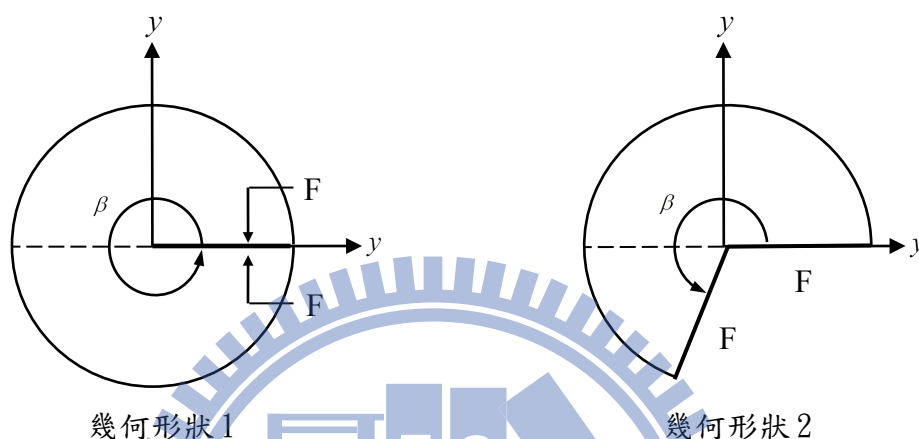


圖 5.2 於收斂性分析中楔形體之幾何形狀與邊界條件

表 5.1 等向性材料楔形體最小 λ_m 的實數部分之收斂性

幾何形狀	子域數目	多項式項數							Publish[16]
		5	6	7	9	11	13	15	
$\beta = 360^\circ$	2	0.2069	0.4999	0.4876	0.5	0.4999	0.4999	0.5000	0.5000
	4	0.5	0.4995	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	
	6	0.4995	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	
	8	0.4999	0.4999	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	
$\beta = 240^\circ$	2	0.6363	0.6173	0.6148	0.6158	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157
	4	0.6163	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	
	6	0.6158	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	
	8	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	0.6157	

表 5.1 為針對 $\beta = 360^\circ$ 及 $\beta = 360^\circ$ 單一等向性材料旋轉體應力奇異性，使用不同數目之子域配合不同項數級數解之分析結果。使用較少之子域(在 ϕ 向)，則須配合較多項之級數，方能得到收斂解，反之亦然；在級數解中，通常用愈多項時，愈有可能遇到數

值分析之困難。從表 5.1 之結果顯示即使 $\beta = 360^\circ$ 之旋轉體，在 ϕ 向切 8 個子域，各子域使用 7 項之級數，即可得準確之解；同樣的子域數及多項級數亦提供 $\beta = 360^\circ$ 案例之準確解。在往下之分析中，吾人取 8 個子域數配合 13 項級數求解。值得一提的是，本法所得之收斂解(收斂致四位有效數字)與閉合解所得者一致；此一致性某種程度上確認本研究所提解之正確性。

§5.2 矽化鈦楔形體之奇異性分析

假設所欲考慮之楔形體由矽化鈦 (TiSi_2) 構成，其為正交性材料(相關彈性係數列於表 3.2)。

圖 5.3 所示者為 $\beta = 360^\circ$ 之矽化鈦楔形體在自由邊界條件 (F-F) 下，其最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 γ_x 、 γ_y 或 γ_z 之變化。結果顯示 γ_x 變化時，當 $\gamma_x = 0^\circ \sim 12^\circ$ 對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數，最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之最大值(發生於 $\gamma_x = 12^\circ$)與最小值(發生於 $\gamma_x = 44^\circ$)之差異可達 2%；當 γ_y 變化時，對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數，最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之最大值(發生於 $\gamma_y = 90^\circ$)與最小值(發生於 $\gamma_y = 42^\circ$)之差異可達 13.2%；而 γ_z 變化時，當 $\gamma_z = 54^\circ \sim 88^\circ$ 對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數，最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之最大值(發生於 $\gamma_z = 52^\circ$)與最小值(發生於 $\gamma_z = 28^\circ$)之差異可達 3.6%。由方程式(4.11)~(4.13)得知，對 Z 軸轉動時 $\hat{W}_n^{(m)}$ 與 $\hat{U}_n^{(m)}$ 及 $\hat{V}_n^{(m)}$ 不互相耦合，而對 X 及 Y 軸轉動時 $\hat{U}_n^{(m)}$ 、 $\hat{V}_n^{(m)}$ 與 $\hat{W}_n^{(m)}$ 是耦合的。

圖 5.4 所示者為矽化鈦楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_x 下，其最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β 之變化。結果顯示最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β 增加而減少，即其應力奇異性隨 β 增加而增強。當 $\gamma_x = 0^\circ$ 、 $\gamma_x = 30^\circ$ 與 $\gamma_x = 60^\circ$ 對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數； $\gamma_x = 0^\circ$ 與 $\gamma_x = 30^\circ$ 在 $\beta = 224^\circ$ 最大差異可達 4.5%； $\gamma_x = 0^\circ$ 與 $\gamma_x = 60^\circ$ 在 $\beta = 220^\circ$ 最大差異可達 6.4%。

圖 5.5 所示者為矽化鈦楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_Y 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化。結果顯示最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 增加而減少，即其應力奇異性隨 β 增加而增強。當 $\gamma_Y = 0^\circ$ 、 $\gamma_Y = 30^\circ$ 與 $\gamma_Y = 60^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數； $\gamma_Y = 0^\circ$ 與 $\gamma_Y = 30^\circ$ 在 $\beta = 360^\circ$ 最大差異可達 11.5%； $\gamma_Y = 0^\circ$ 與 $\gamma_Y = 60^\circ$ 在 $\beta = 360^\circ$ 最大差異可達 10.3%。

圖 5.6 所示者為矽化鈦楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_Z 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化。結果顯示最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 增加而減少，即其應力奇異性隨 β 增加而增強。當 γ_Z 不同時，最小 $R_e[\lambda_m]$ 幾乎不隨 γ_Z 變化。

圖 5.7 所示者為矽化鈦楔形體在不同邊界條件 (F-F、C-C 與 C-F) 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化。結果顯示兩固定端 (C-C) 所得之最小 $R_e[\lambda_m]$ 都會比兩自由端 (F-F) 者大，在 $\beta = 260^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 之差異可達 11.7%，但介於 0.5~1.0，而當 β 小於 180° 後對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 皆等於 1。兩固定端 (C-C) 與兩自由端 (F-F) 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數；一固定端與一自由端 (C-F) 在 $\beta = 180^\circ \sim 360^\circ$ 時最小 $R_e[\lambda_m]$ 會介於 0.25~0.5，特別的是當 β 小於 180° 仍有應力奇異性，直到 β 小於 68° 後對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 皆等於 1。一固定端與一自由端 (C-F) 在 $\beta = 112^\circ \sim 176^\circ$ ，對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。

§5.3 雙材料旋轉體之應力奇異性

5.3.1 矽化鈦/等向性材料 雙材料楔形體

本節考慮分析正交性材料 (Orthotropic material) 與等向性材料 (Isotropic material) 組合而成之楔形體。如圖 5.1 所示，取 Material 1 為矽化鈦其角度為 β_1 ，取 Material 2 為等向性材料 ($E = 6.24GPa$ ， $\nu = 0.3$) 且其角度 β_2 為 180° ；探討邊界條件、幾何形狀、及 γ

等改變對應力奇異性之影響。

圖 5.8 所示者為楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 β_1 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_x 之變化。結果顯示最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 增加而減少，即其應力奇異性隨 β_1 增加而增強，但 γ_x 之角度改變對其影響並不顯著；在 $\beta_1 = 180^\circ$ 、 $\beta_1 = 150^\circ$ 、 $\beta_1 = 120^\circ$ 與 $\beta_1 = 90^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。

圖 5.9 所示者為楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 β_1 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之變化。結果顯示最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 增加而減少，即其應力奇異性隨 β_1 增加而增強，特別的是 $\beta_1 = 150^\circ$ 與 $\beta_1 = 120^\circ$ 在 $\gamma_y = 16^\circ$ 及 $\gamma_y = 82^\circ$ 時會互相交叉；在 $\beta_1 = 180^\circ$ 、 $\beta_1 = 120^\circ$ 與 $\beta_1 = 90^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。而 $\beta_1 = 150^\circ$ 在 $\gamma_y = 26^\circ \sim 88^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。

圖 5.10 所示者為楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 β_1 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_z 之變化。結果顯示最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 增加而減少，即其應力奇異性隨 β_1 增加而增強，特別的是 $\beta_1 = 150^\circ$ 與 $\beta_1 = 120^\circ$ 在 $\gamma_z = 44^\circ$ 及 $\gamma_z = 80^\circ$ 時會互相交叉；在 $\beta_1 = 120^\circ$ 與 $\beta_1 = 90^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。而在 $\beta_1 = 180^\circ$ (當 $\gamma_z = 62^\circ \sim 90^\circ$) 與 $\beta_1 = 150^\circ$ (當 $\gamma_z = 56^\circ \sim 90^\circ$) 所對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。

圖 5.11 所示者為楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_x 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化。最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 增加而減少，即其應力奇異性隨 β_1 增加而增強；當 $\gamma_x = 0^\circ$ 、 $\gamma_x = 30^\circ$ 與 $\gamma_x = 60^\circ$ 時所對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。 $\gamma_x = 0^\circ$ 與 $\gamma_x = 60^\circ$ 在 $\beta_1 = 136^\circ$ 最大差異可達 8.2%。

圖 5.12 所示者為楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_Y 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化。最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 增加而減少，即其應力奇異性隨 β_1 增加而增強；當 $\gamma_Y = 0^\circ$ 、 $\gamma_Y = 30^\circ$ 與 $\gamma_Y = 60^\circ$ 時所對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。 $\gamma_Y = 0^\circ$ 與 $\gamma_Y = 60^\circ$ 在 $\beta_1 = 136^\circ$ 最大差異可達 8.7%。

圖 5.13 所示者為楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_Z 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化。最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 增加而減少，即其應力奇異性隨 β_1 增加而增強；當 $\gamma_Z = 0^\circ$ 與 $\gamma_Z = 30^\circ$ 時所對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。當 $\gamma_Z = 60^\circ$ 在 $\beta_1 = 144^\circ \sim 176^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。 $\gamma_Z = 30^\circ$ 與 $\gamma_Z = 60^\circ$ 在 $\beta_1 = 144^\circ$ 最大差異可達 7.6%。

圖 5.14 所示者為楔形體在不同邊界條件 (F-F、C-C 與 C-F) 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化。F-F 邊界條件與 C-C 邊界條件對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。C-F 邊界條件在 $\beta_1 = 4^\circ \sim 12^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。F-C 邊界條件在 $\beta_1 = 0^\circ \sim 100^\circ$ 及 $\beta_1 = 132^\circ \sim 180^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數；很明顯地，C-F 及 F-C 所引致之應力奇異性遠較 C-C 及 F-F 者嚴重，C-F 相較 C-C 及 F-F 在 $\beta_1 = 180^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 的差異可達 57.7%。F-F 所引致之奇異性則稍較 C-C 者強，兩者在 $\beta_1 = 136^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 的最大差異可達 6.2%。C-F 所引致之奇異性則較 F-C 者強，兩者在 $\beta_1 = 136^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 的最大差異可達 26.3%，表示只固定等向性材料端之最小 $R_e[\lambda_m]$ 會比只固定正交性材料端大，所以只固定正交性材料端支應力奇異性較強。

5.3.2 正交性材料/等向性材料 雙材料楔形體

如圖 5.1 所示，取 Material 1 為正交性材料其角度為 β_1 ，取 Material 2 為等向性材料 ($E=6.24GPa$ ， $\nu=0.3$) 且其角度 β_2 為 180° ；探討邊界條件、幾何形狀、及 γ 等改變對應力奇異性之影響。正交性材料分別為矽化鈦、重晶石與矽酸鐵（相關彈性係數列於表 3.2）；矽化鈦結合等向性材料(TiSi₂+Iso)，重晶石結合等向性材料(Barytes+Iso)，矽酸鐵結合等向性材料(FeSiO₃+Iso)。

圖 5.15 所示者為楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及 $\beta_1=150^\circ$ 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_x 之變化。TiSi₂+Iso 與 FeSiO₃+Iso 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。Barytes+Iso 當 $\gamma_x=0^\circ\sim 10^\circ$ 及 $\gamma_x=72^\circ\sim 90^\circ$ 所對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。TiSi₂+Iso 與 Barytes+Iso 在 $\gamma_x=70^\circ$ 時，最小 $R_e[\lambda_m]$ 最大差異可達 12.1%。

圖 5.16 所示者為楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及 $\beta_1=150^\circ$ 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之變化。TiSi₂+Iso 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。Barytes+Iso 當 $\gamma_y=0^\circ\sim 6^\circ$ 所對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。FeSiO₃+Iso 當 $\gamma_y=10^\circ\sim 82^\circ$ 所對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。Barytes+Iso 相較之下最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 隨 γ_y 變化有較明顯改變，最小 $R_e[\lambda_m]$ 之最大值（發生於 $\gamma_y=2^\circ$ ）與最小值（發生於 $\gamma_y=56^\circ$ ）之差異可達 23.6%。

圖 5.17 所示者為楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及 $\beta_1=150^\circ$ 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_z 之變化。TiSi₂+Iso 當 $\gamma_z=56^\circ\sim 90^\circ$ 所對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。Barytes+Iso 當 $\gamma_z=0^\circ\sim 22^\circ$ 所對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。FeSiO₃+Iso 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。Barytes+Iso 相較之下最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 隨 γ_z 變化有較明顯改變，FeSiO₃+Iso 次之；

Barytes+Iso 最小 $R_e[\lambda_m]$ 之最大值（發生於 $\gamma_z = 0^\circ$ ）與最小值（發生於 $\gamma_z = 62^\circ$ ）之差異可達 27.8%。FeSiO₃+Iso 最小 $R_e[\lambda_m]$ 之最大值（發生於 $\gamma_z = 90^\circ$ ）與最小值（發生於 $\gamma_z = 60^\circ$ ）之差異可達 18.2%。

圖 5.18 所示者為楔形體在自由邊界條件（F-F）下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化。TiSi₂+Iso 與 FeSiO₃+Iso 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。Barytes+Iso 在 $\beta_1 = 152^\circ \sim 180^\circ$ 所對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。在 $\beta_1 = 100^\circ \sim 180^\circ$ 之條件下，TiSi₂+Iso 其對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 較小，表示其應力奇異性較強，FeSiO₃+Iso 次之。三者最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 會介於 0.5~1.0。

5.3.3 雲矽鈣石/等向性材料 雙材料楔形體

本節考慮三斜晶體材料（triclinic material）與等向性材料（Isotropic material）之雙材料楔形體。如圖 5.1 所示，取 Material 1 為雲矽鈣石其角度為 β_1 ，取 Material 2 為等向性材料（ $E = 6.24\text{GPa}$ ， $\nu = 0.3$ ）且其角度 β_2 為 180° ，探討邊界條件、幾何形狀、及 γ 等改變對應力奇異性之影響。

圖 5.19 所示者為楔形體在自由邊界條件（F-F）及 $\beta_1 = 150^\circ$ 下，其最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_x 、 γ_y 或 γ_z 之變化。結果顯示 γ_x 變化時，對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數，最小 $R_e[\lambda_m]$ 之最大值（發生於 $\gamma_x = 0^\circ$ ）與最小值（發生於 $\gamma_x = 90^\circ$ ）之差異可達 28.6%；當 γ_y 變化時，當 $\gamma_y = 26^\circ \sim 58^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數，最小 $R_e[\lambda_m]$ 之最大值（發生於 $\gamma_y = 56^\circ$ ）與最小值（發生於 $\gamma_y = 80^\circ$ ）之差異可達 11.0%；而 γ_z 變化時，當 $\gamma_z = 6^\circ \sim 16^\circ$ 及 $\gamma_z = 48^\circ \sim 90^\circ$ 所對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數，最小 $R_e[\lambda_m]$ 之最大值（發生於 $\gamma_z = 48^\circ$ ）與最小值（發生於 $\gamma_z = 28^\circ$ ）之差異可達 12.7%。

圖 5.20 所示者為楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_x 下，其最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化。當 $\gamma_x = 0^\circ$ 在 $\beta_1 = 164^\circ \sim 180^\circ$ 及 $\beta_1 = 136^\circ \sim 144^\circ$ 所對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。當 $\gamma_x = 30^\circ$ 對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 皆為實數。當 $\gamma_x = 60^\circ$ 在 $\beta_1 = 168^\circ \sim 180^\circ$ 所對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。

圖 5.21 所示者為楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_y 下，其最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化。當 $\gamma_y = 30^\circ$ 在 $\beta_1 = 136^\circ \sim 180^\circ$ 所對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。當 $\gamma_y = 60^\circ$ 在 $\beta_1 = 156^\circ \sim 180^\circ$ 所對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。

圖 5.22 所示者為楔形體在自由邊界條件 (F-F) 及不同 γ_z 下，其最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化。當 $\gamma_z = 30^\circ$ 在 $\beta_1 = 164^\circ \sim 176^\circ$ 所對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。當 $\gamma_z = 60^\circ$ 在 $\beta_1 = 144^\circ \sim 180^\circ$ 所對應最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 之 λ_m 為複數。



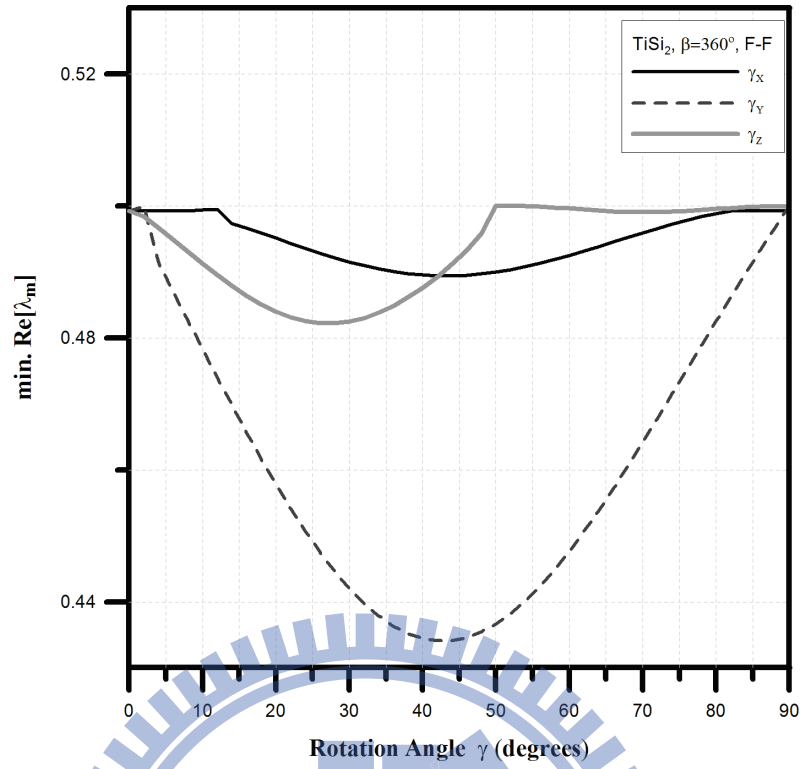


圖 5.3 F-F 矽化鈦楔形體 ($\beta=360^\circ$) 之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 γ_x 、 γ_y 或 γ_z 之變化

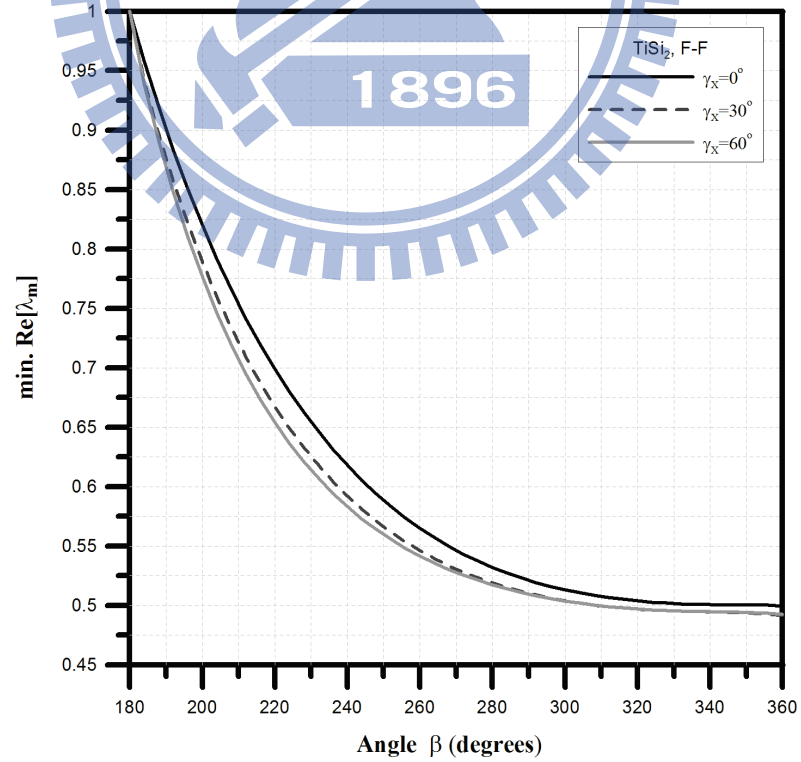


圖 5.4 F-F 不同 γ_x 下矽化鈦楔形體之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β 之變化

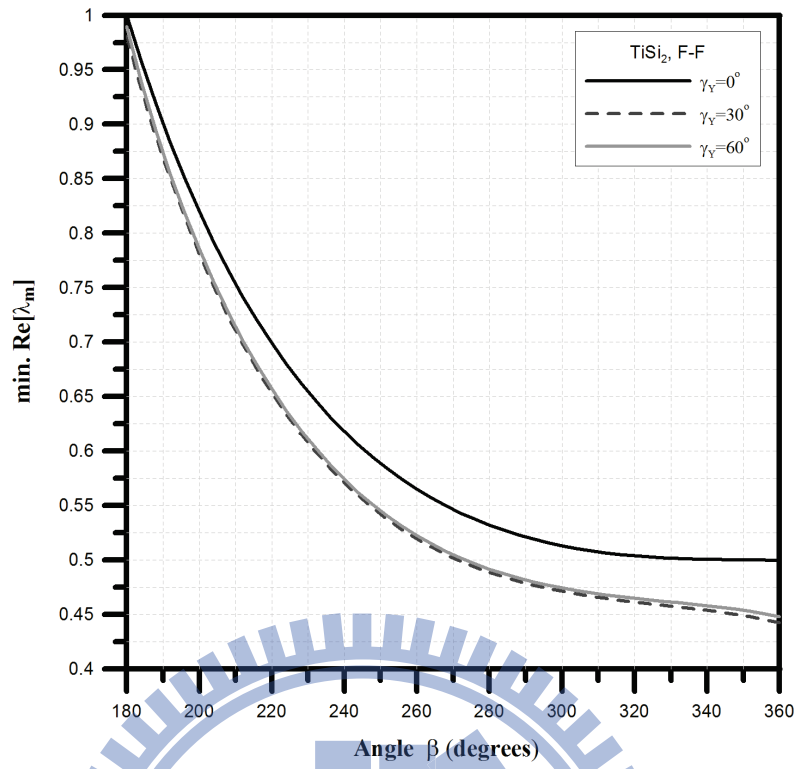


圖 5.5 F-F 不同 γ_y 下矽化鈦楔形體之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β 之變化

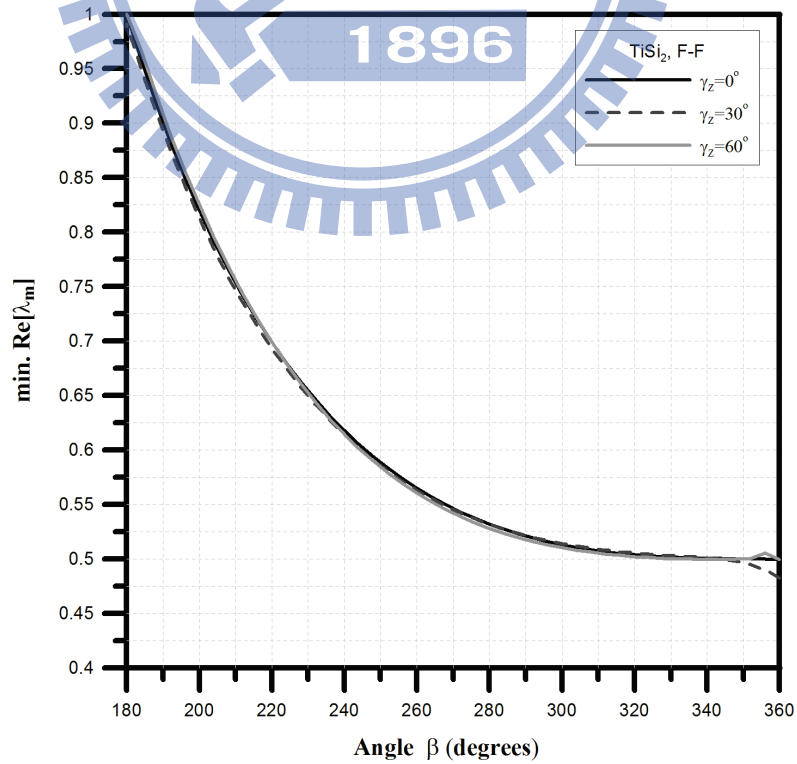


圖 5.6 F-F 不同 γ_z 下矽化鈦楔形體之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β 之變化

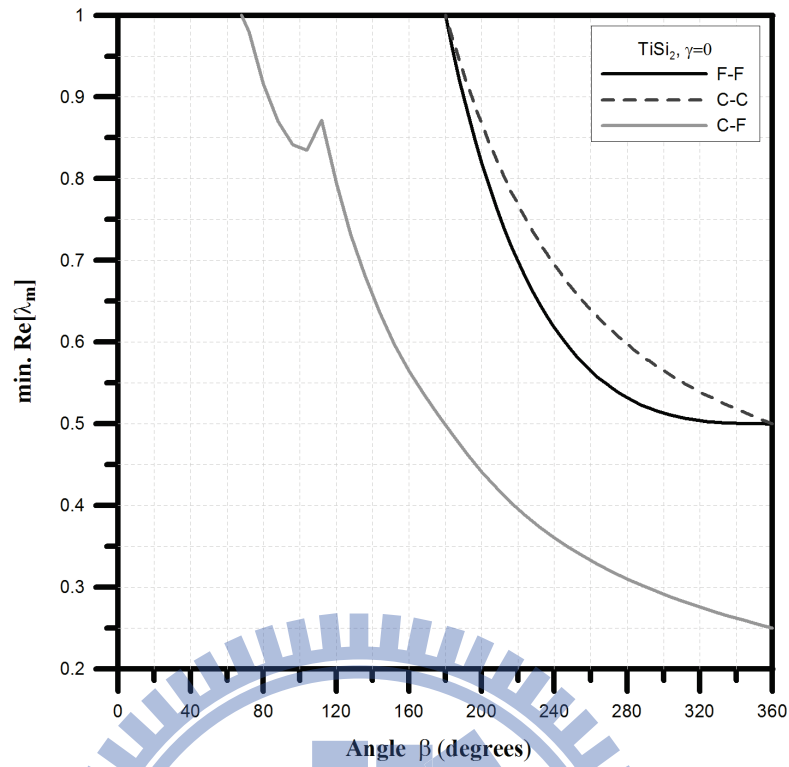


圖 5.7 不同邊界條件之矽化鈦楔形體的最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 之變化 (考慮 $\gamma=0^\circ$)

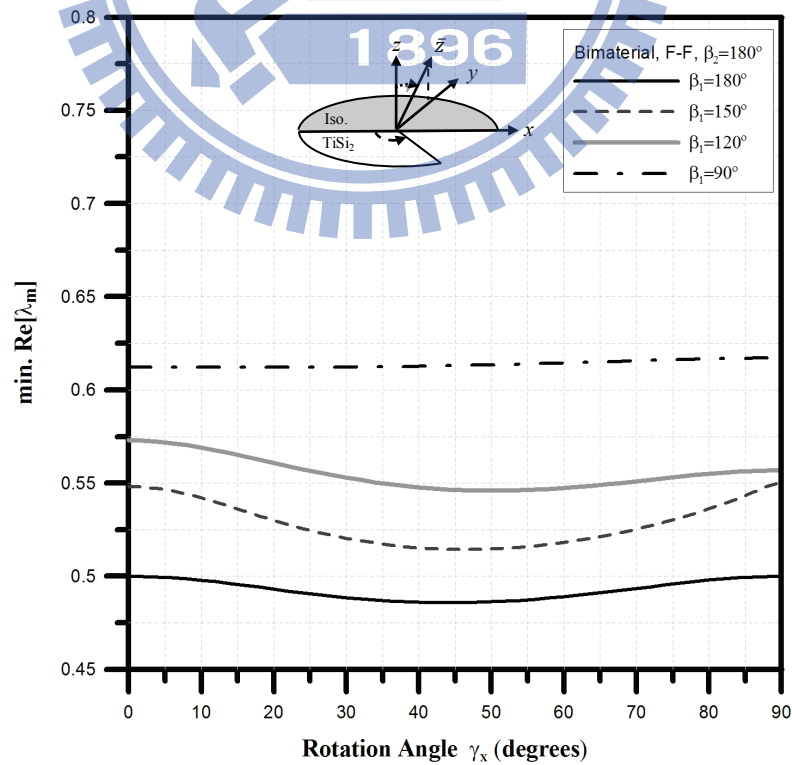


圖 5.8 F-F 不同 β_1 下雙材料楔形體之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_x 之變化

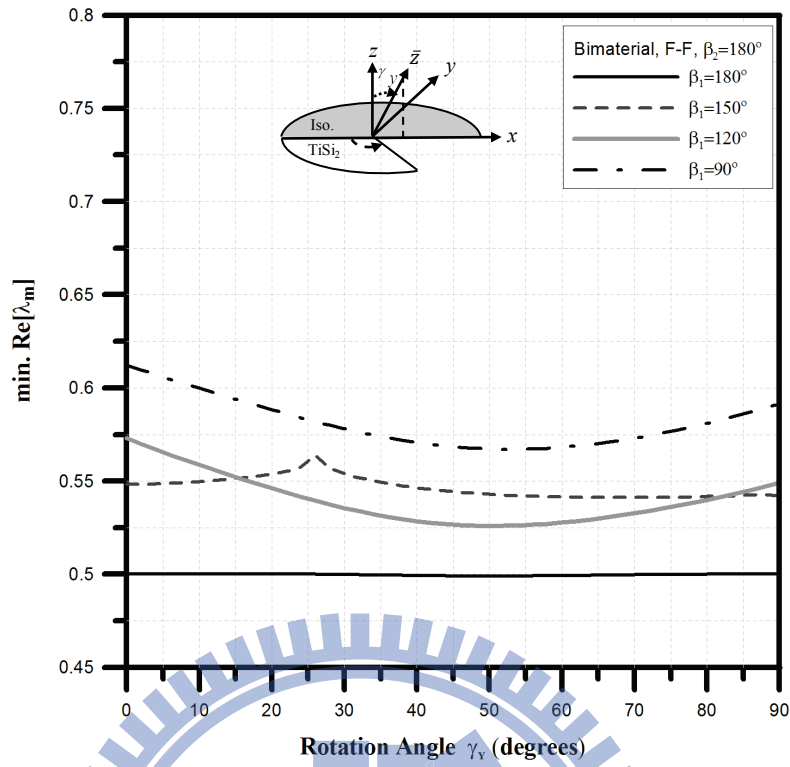


圖 5.9 F-F 不同 β_1 下雙材料楔形體之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之變化

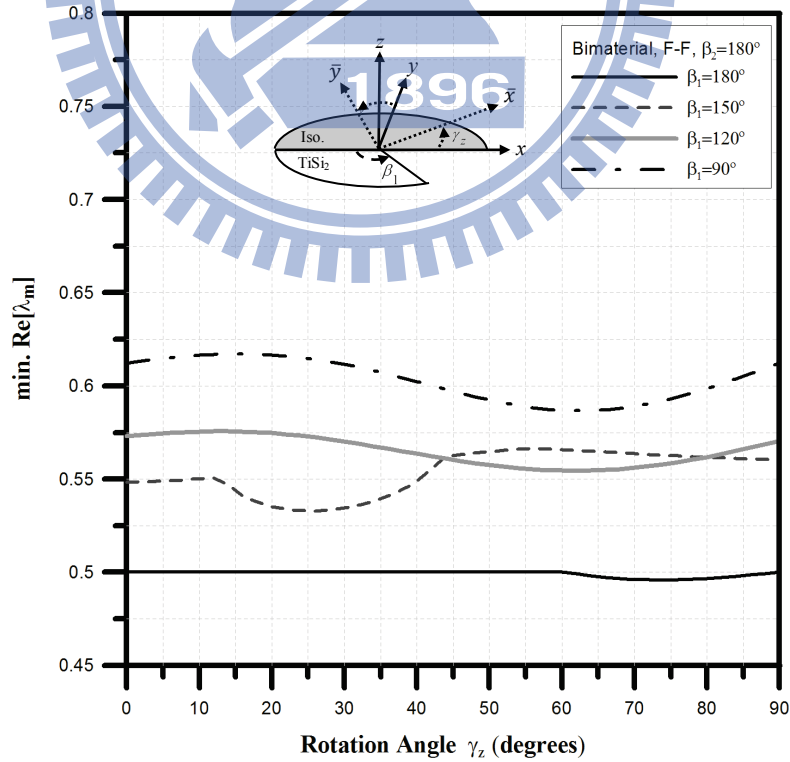


圖 5.10 F-F 不同 β_1 下雙材料楔形體之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 γ_z 之變化

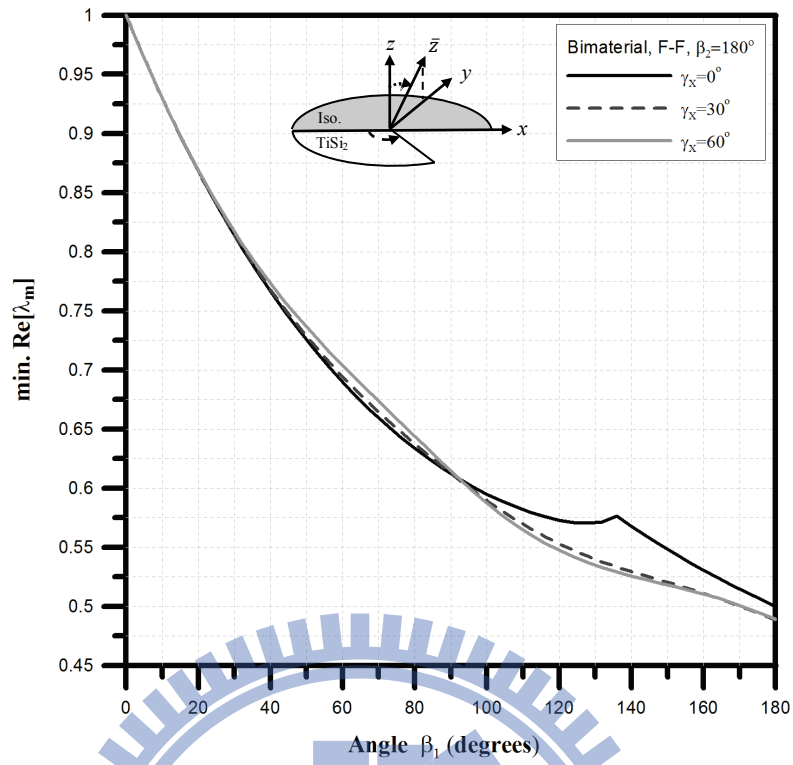


圖 5.11 F-F 不同 γ_x 下雙材料楔形體之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化

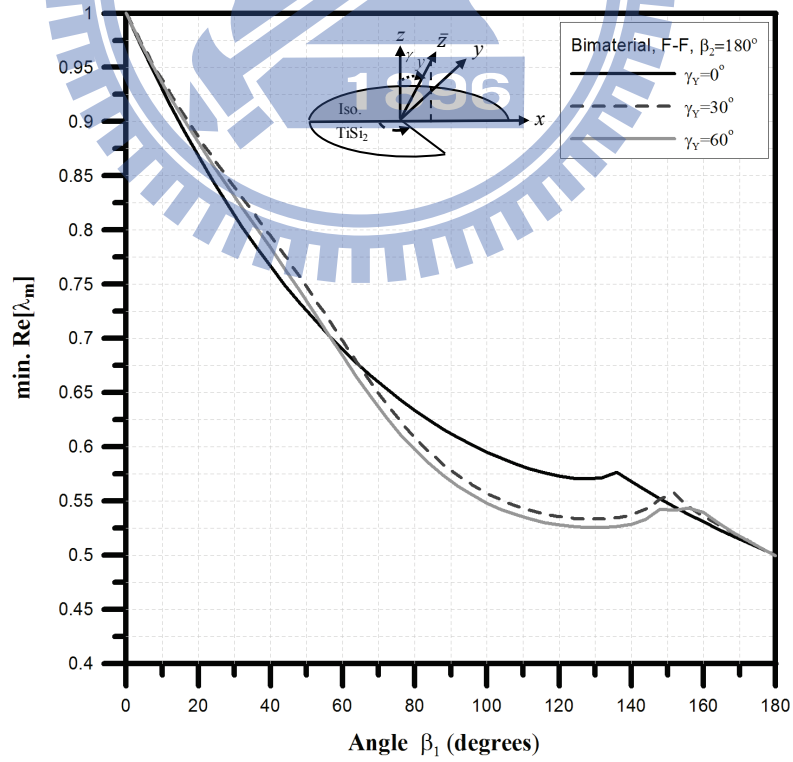


圖 5.12 F-F 不同 γ_y 下雙材料楔形體之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化

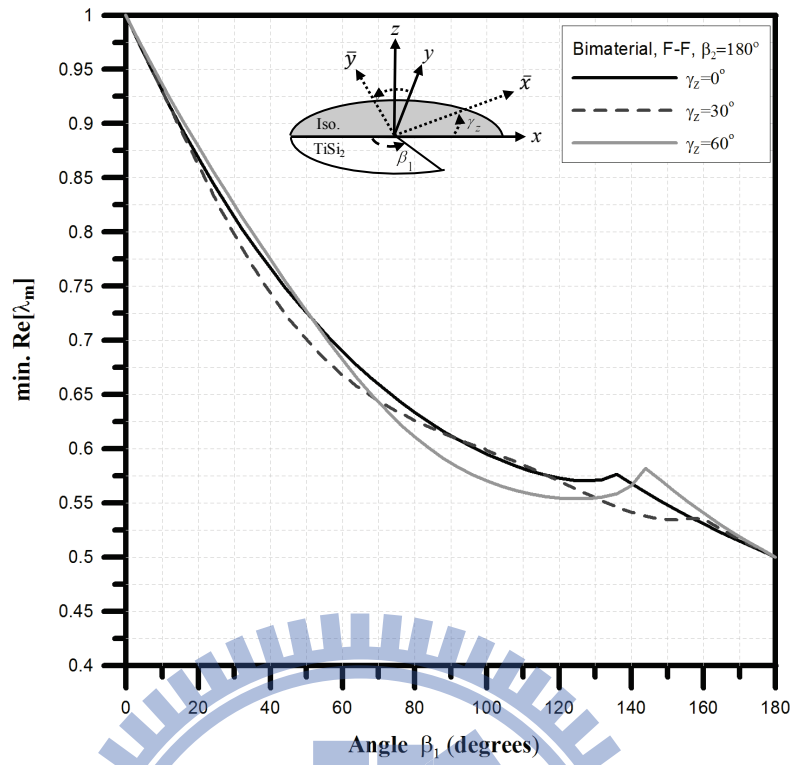


圖 5.13 F-F 不同 γ_z 下雙材料楔形體之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化

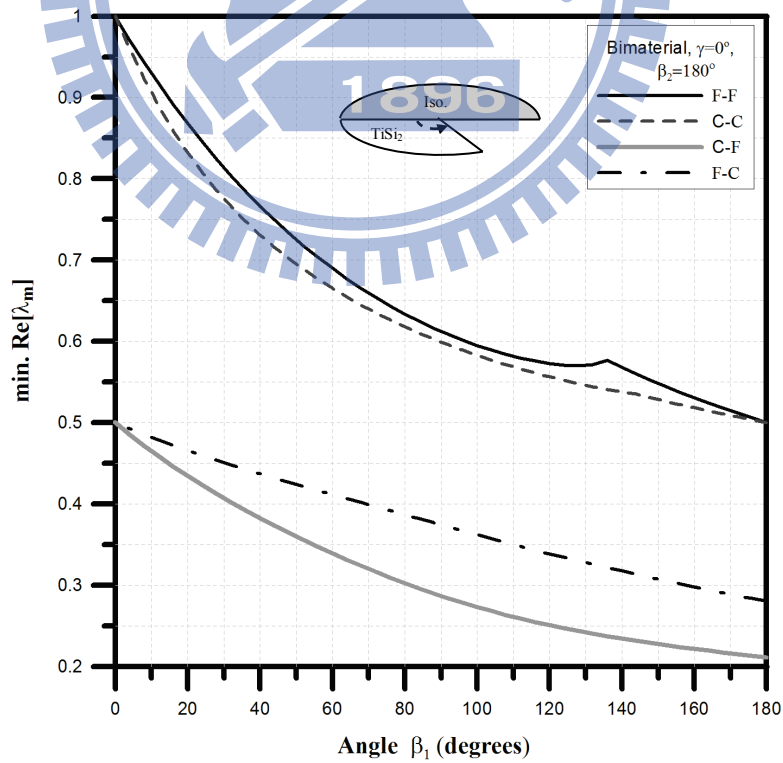


圖 5.14 不同邊界條件之雙材料楔形體的最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化 (考慮 $\gamma=0^\circ$)

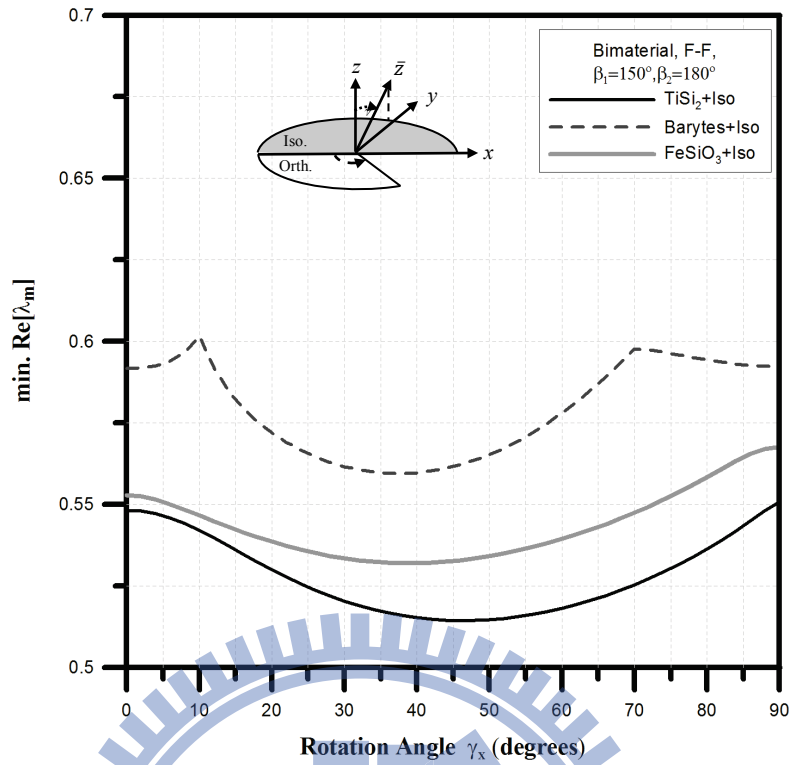


圖 5.15 F-F 雙材料楔形體($\beta_1 = 150^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ$)之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 γ_x 之變化

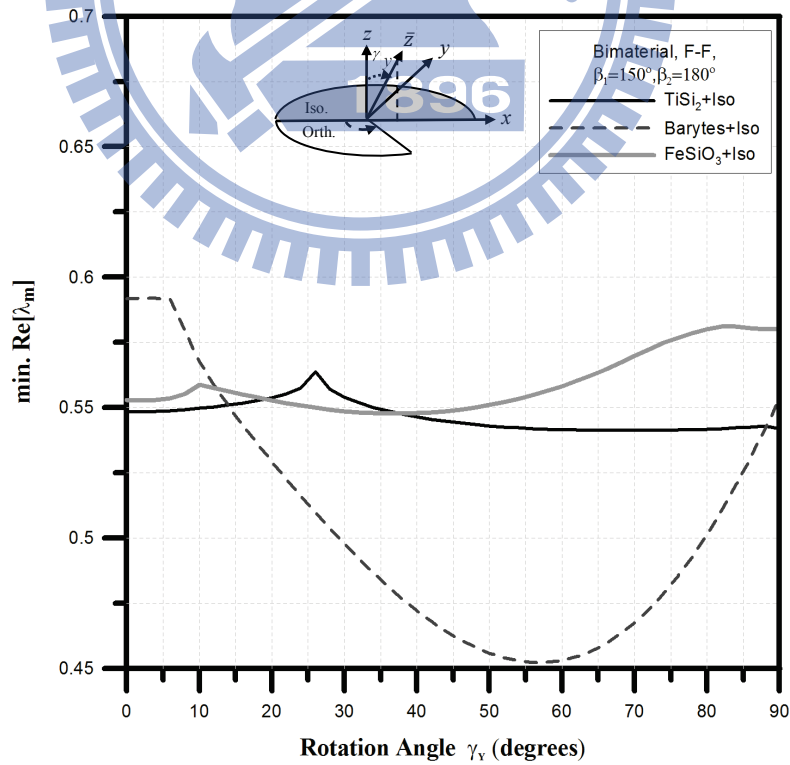


圖 5.16 F-F 雙材料楔形體($\beta_1 = 150^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ$)之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 γ_y 之變化

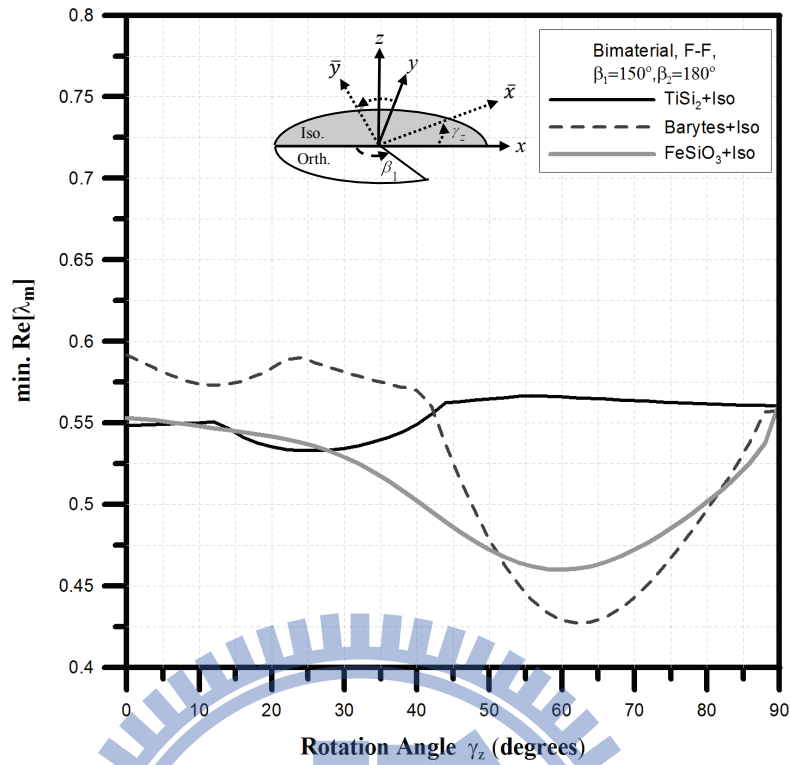


圖 5.17 F-F 雙材料楔形體($\beta_1 = 150^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ$)之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 γ_z 之變化

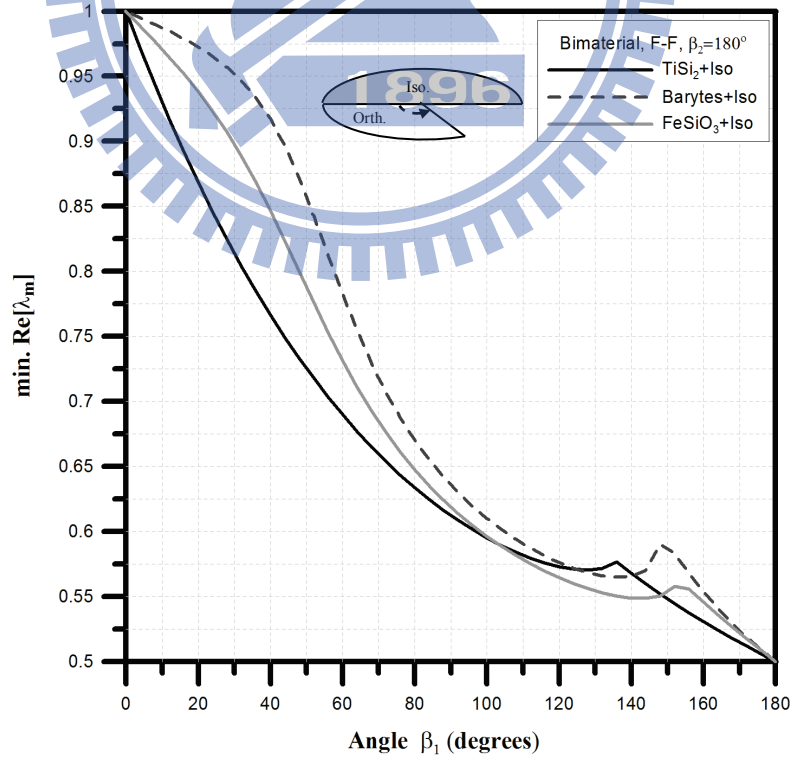


圖 5.18 F-F 雙材料楔形體($\beta_2 = 180^\circ$)之最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化 (考慮 $\gamma = 0^\circ$)

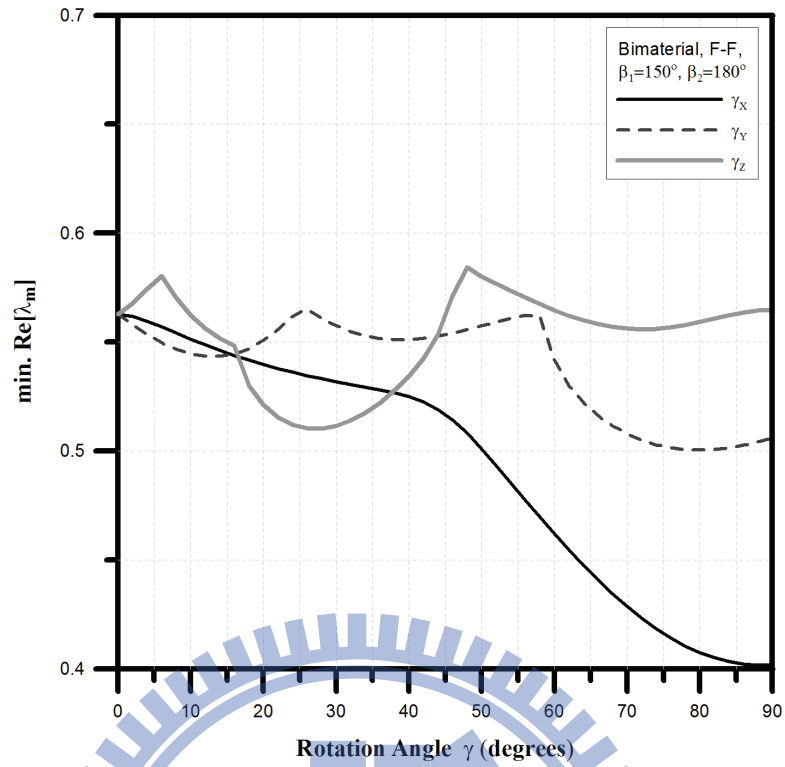


圖 5.19 F-F 雙材料楔形體($\beta_1=150^\circ$, $\beta_2=180^\circ$)之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 γ_X 、 γ_Y 或 γ_Z 之變化

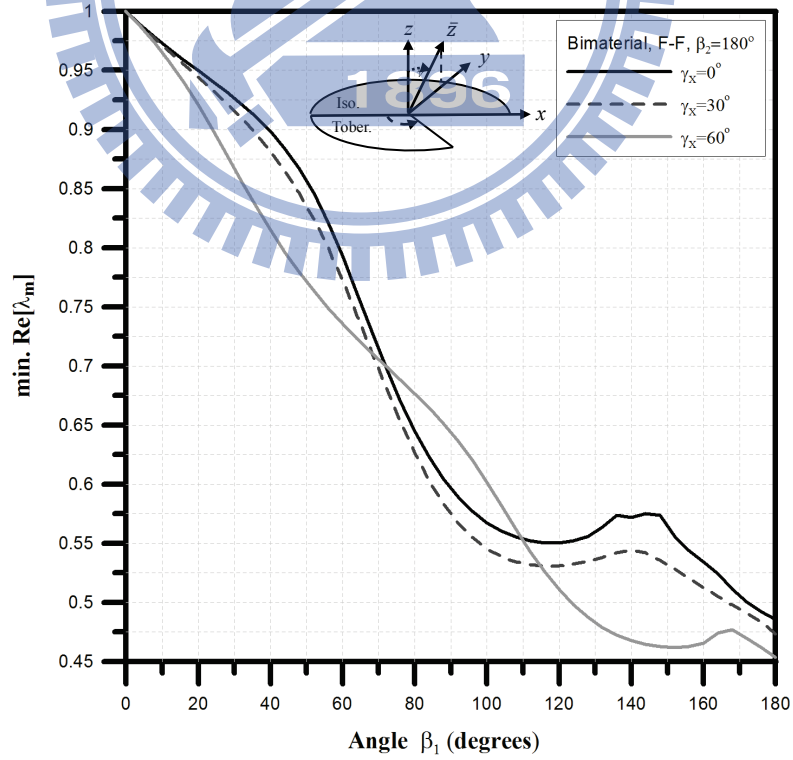


圖 5.20 F-F 不同 γ_X 下雙材料楔形體($\beta_2=180^\circ$)之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化

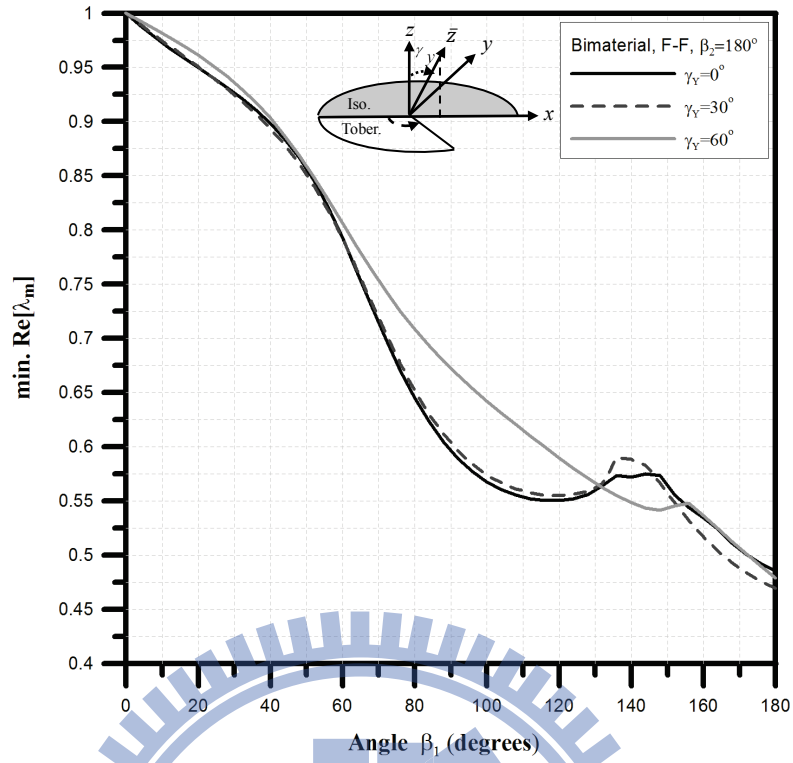


圖 5.21 F-F 不同 γ_y 下雙材料楔形體 ($\beta_2 = 180^\circ$) 之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化

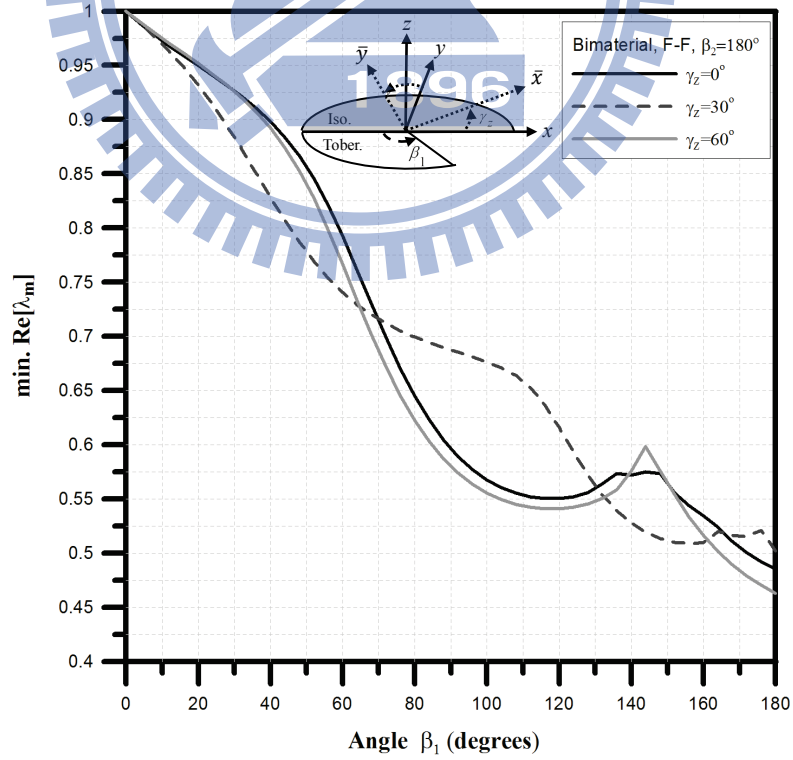


圖 5.22 F-F 不同 γ_z 下雙材料楔形體 ($\beta_2 = 180^\circ$) 之最小 $\text{Re}[\lambda_m]$ 隨 β_1 之變化

第六章 結論與建議

§6.1 結論

本文利用特徵函數展開法配合級數解，求解三維旋轉體與楔形體，於幾何急劇變化處（如尖角處）之漸近解，並探討材料的特性、邊界條件及幾何形狀等參數對應力奇異強度（singularity）之影響。

6.1.1 三維旋轉體

1. 無論單一正交性材料或雙材料（矽化鈦/等向性材料）之旋轉體，應力奇異強度均明顯受幾何形狀影響，最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 增加而減少，即其應力奇異性隨 β 增加而增強；材料座標軸 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對幾何座標軸 (X, Y, Z) 旋轉並未對應力奇異性造成劇烈影響。
2. 於單一正交性材料旋轉體，材料座標軸 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對幾何座標軸 (X, Y, Z) 之 Y 軸旋轉，相較於 X 軸與 Z 軸旋轉，對應力奇異性影響較甚，其中又以重晶石變化較大；於 C-F 邊界條件所引致之應力奇異性遠較 C-C 及 F-F 者嚴重，在 $\beta = 180^\circ$ 與 $\beta = 360^\circ$ 對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 的差異可達 50%。
3. 於矽化鈦旋轉體，對各別彈性係數做倍數改變；隨著 c_{44} 增加，最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 隨 β 變化範圍內，相同部分隨之減少，因為改變 c_{44} 僅會改變 $\hat{V}_n^{(m)}$ 所對應之應力奇異性，故重疊部分由 $\hat{U}_n^{(m)}$ 及 $\hat{W}_n^{(m)}$ 所對應力奇異性控制；隨著 c_{55} 變化，結果顯示，最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 於 $\beta = 290^\circ \sim 360^\circ$ 由 $\hat{V}_n^{(m)}$ 所對應之應力奇異性控制。

4. 雲矽鈣石除了相較於正交性材料之應力奇異性較大；在某些 γ_y 角度下，最小 $R_e[\lambda_m]$ 會有劇烈之變化。
5. 於雙材料（矽化鈦/等向性材料）之旋轉體，在 $\beta=180^\circ$ 之條件下，因為材料性質不一致，亦有應力奇異性存在，若是單一材料，其應力奇異性不存在；在 $\beta_1=180^\circ$ 之條件下，其對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 約在 0.5 附近，與傳統彈性之等向性材料情況類似；C-F 及 F-C 所引致之應力奇異性遠較 C-C 及 F-F 者嚴重，其中 C-F 所引致之奇異性則較 F-C 者強，只固定正交性材料端支應力奇異性較強。

6.1.2 三維楔形體

1. 無論單一正交性材料或雙材料（正交性材料/等向性材料）之楔型體，幾何形狀變化影響應力奇異性較大，最小 $R_e[\lambda_m]$ 隨 β 增加而減少，即其應力奇異性隨 β 增加而增強；材料座標軸 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對幾何座標軸 (X, Y, Z) 旋轉並不會對於應力奇異性造成劇烈影響。材料座標軸 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對幾何座標軸 (X, Y, Z) 之 Y 軸旋轉，相較於 X 軸與 Z 軸旋轉，對應力奇異性影響較甚。
2. 於單一正交性材料楔形體之情況下，C-F 邊界條件所引致之應力奇異性遠較 C-C 及 F-F 者嚴重，C-F 邊界條件在 $\beta=180^\circ \sim 360^\circ$ 時最小 $R_e[\lambda_m]$ 會介於 0.25~0.5，特別的是當 β 小於 180° 仍有應力奇異性，直到 β 小於 68° 後對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 皆等於 1。
3. 於雙材料（矽化鈦/等向性材料）之楔形體，在 $\beta_1=180^\circ$ 之條件下，其對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 約在 0.5 附近，與傳統彈性之等向性材料情況類似；C-F 及 F-C 所引致之應力奇異性遠較 C-C 及 F-F 者嚴重，其中 C-F 所引致之奇異性則較 F-C 者強，表示只固定正交性材料端支應力奇異性較強。

4. 於雙材料（正交性材料/等向性材料）之楔形體，在 $\beta_1 = 100^\circ \sim 180^\circ$ 之條件下，
TiSi₂+Iso 其對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 較小，表示其應力奇異性較強；FeSiO₃+Iso 次之。

§6.2 建議

1. 於矽化鈦旋轉體，對彈性係數 c_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 改變後，材料座標軸 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對幾何座標軸 (X, Y, Z) 之 Y 軸旋轉，會出現不連續現象；改變後彈性係數之 ν (波松比) 有維持在 0~0.5，當 $\gamma_Y = 34^\circ$ 與 $\gamma_Y = 56^\circ$ 時出現急劇改變之現象，此現象往後可再加以研究。
2. 雲矽鈣石 (Tobermorite)，其晶體結構為三斜晶體 (triclinic material)，是為最不對稱的異向性材料，無論是單一材料或雙材料 (雲矽鈣石/等向性材料)，在材料座標軸 $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 對幾何座標軸 (X, Y, Z) 之 Y 軸旋轉時，當 $\gamma_Y = 30^\circ \sim 70^\circ$ 所對應最小 $R_e[\lambda_m]$ 之 λ_m 會有急遽的變化，此現象往後可再加以探討。

參考文獻

- [1] C.S. Huang and A.W. Leissa, “Three-Dimensional Sharp Corner Displacement Functions for Bodies of Revolution”, *Journal of Applied Mechanics*, 74, pp.41-46, 2007
- [2] C.S. Huang and A.W. Leissa, “Stress Singularities in Bimaterial Bodies of Revolution”, *Composite Structures*, 82, pp.488-498, 2008
- [3] A.H. England, “On Stress Singularities in Linear Elasticity”, *International Journal of Engineering Science*, 9(6), pp.571–585, 1971
- [4] D.B. Bogy, “The Plane Solution for Anisotropic Elastic Wedges under Normal and Shear Loading”, *Journal of Applied Mechanics*, 39, pp.1103-1109, 1972
- [5] M.C. Kuo, D.B. Bogy, “Plane Solutions for the Displacement and Traction-Displacement Problems for Anisotropic Elastic Wedges”, *Journal of Applied Mechanics*, 41, pp.197-202, 1974
- [6] M.C. Kuo, D.B. Bogy, “Plane Solutions for Traction Problems on Orthotropic Unsymmetrical Wedges and Symmetrically Twinned Wedges”, *Journal of Applied Mechanics*, 41, pp.203-208, 1974
- [7] C.C. Ma, B.L. Hour, “Analysis of dissimilar Anisotropic Wedges Subjected to Antiplane Shear Deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, 25, pp.1295-1309, 1989
- [8] K.Y. Lin, H.H. Hartmann, “Numerical Analysis of Stress Singularities at a Bonded Anisotropic Wedge”, *Engineering Fracture Mechanics*, 32, pp.211-224, 1989
- [9] C.H. Chue, “A General Solution on Stress Singularities in an Anisotropic Wedge”, *International Journal of Solids and Structures*, 38, pp.6889-6906, 2001
- [10] C.H. Chue, “On Stress Singularities in an Anisotropic Wedge for Various Boundary Conditions”, *Composite Structures*, 54, pp.87-102, 2001

- [11] C.I. Liu, "On the Stress Singularity of dissimilar Anisotropic Wedges and Junctions in Antiplane Shear", *Composite Structures*, 73, pp.432-442, 2006
- [12] H.P. Chen, "Stress Singularities in Anisotropic Multi-Material Wedges and Junctions", *International Journal of Solids and Structures*, 35(11), pp.1057-1073, 1998
- [13] T.C.T. Ting, "Explicit Solution and Invariance of the Singularities at an Interface Crack in Anisotropic Composites", *Journal of Solids and Structures*, 22, pp.965-983, 1986
- [14] S.S. Pageau, S.B. Biggers Jr., "A Finite Element Approach to Three-Dimensional Singular Stress States in Anisotropic Multi-Material Wedges and Junctions", *International Journal of Solids and Structures*, 33(1), pp.33-47, 1996
- [15] F. Delale, "Stress Singularities in Bonded Anisotropic Materials", *International Journal of Solids and Structures*, 40, pp.31-40, 1984
- [16] C.B. Hwu, "A Key Matrix \hat{N} for the Stress Singularity of the Anisotropic Elastic Composite Wedges", *Japan Society of Mechanical Engineers*, 46(1), pp.40-50, 2003
- [17] S.S. Pageau, "Finite Element Analysis of Anisotropic Materials with Singular Inplane Stress Fields", *International Journal of Solids and Structures*, 32(5), pp.571-591, 1995
- [18] Y.P. Tseng, C.S. Huang, C.J. Lin, "Dynamic Stiffness Analysis for In-plane Vibrations of Arches with Variable Curvature", *Journal of Sound and Vibration*, 207(1), pp.15-31, 1997
- [19] P. Ravindran, J. Will, O. Eriksson, "Density functional theory for calculation of elastic properties of orthorhombic crystals: Application to TiSi_2 ", *Journal of Applied Physics*, 84(9), pp.4891-4900, 1998
- [20] R.F.S. Hearmon, "The Elastic Constants of Anisotropic Materials", *Reviews of Modern Physics*, 18(3), pp.409-440, 1946
- [21] "Library of Congress Cataloging-in-Publication Data", pp.46-54, 1995

- [22] R. Shahsavari, M.J. Buehler, R.J.-M. Pellenq, F.-J. Ulm, “First-Principles Study of Elastic Constants and Interlayer Interactions of Complex Hydrated Oxides: Case Study of Tobermorite and Jennite”, *Journal of American Ceramic Society*, 92(10), pp.2323-2330, 2009

