第二章 基本理論

2.1 位置向量轉換 (Position Vector Transformation)

假設空間中有二個座標系$S_f(X_f,Y_f,Z_f)$與$S_i(X_i,Y_i,Z_i)$，其座標間之關係如圖 2.1 所示。在上述空間座標系中有一點 P，其位置向量表示於座標系$S_i(X_i,Y_i,Z_i)$為$\mathbf{R_i}$，如果要把 P 點之位置向量$\mathbf{R_i}$由$S_i(X_i,Y_i,Z_i)$座標系轉換至$S_f(X_f,Y_f,Z_f)$座標系來表示其位置向量$\mathbf{R_f}$，則此兩座標系間之位置向量轉換可用下列之齊次座標轉換矩陣 (Homogeneous Coordinate Transformation Matrix) 方程式表示之：

$$\mathbf{R_f} = \mathbf{M_{fi}} \mathbf{R_i} \tag{2.1}$$

其中

$$\mathbf{M_{fi}} = \begin{bmatrix} \cos(X_f,X_i) & \cos(X_f,Y_i) & \cos(X_f,Z_i) & X_f^{(o_i)} \\ \cos(Y_f,X_i) & \cos(Y_f,Y_i) & \cos(Y_f,Z_i) & Y_f^{(o_i)} \\ \cos(Z_f,X_i) & \cos(Z_f,Y_i) & \cos(Z_f,Z_i) & Z_f^{(o_i)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

上式中$\cos(X_f,X_i)$表示X_f軸與X_i軸間夾角之餘弦值，其餘以此類推；而$X_f^{(o_i)}$、$Y_f^{(o_i)}$及$Z_f^{(o_i)}$為$S_i(X_i,Y_i,Z_i)$座標系之原點O_i表示$S_f(X_f,Y_f,Z_f)$座標系的三個座標軸的分量，$\mathbf{M_{fi}}$則為4×4之齊次座標轉換矩陣，可將位置向量由$S_i(X_i,Y_i,Z_i)$ 座標系轉換至$S_f(X_f,Y_f,Z_f)$座標系。

至於一般之速度及法線向量等之座標轉換，因與座標系原點無關，所以此類向量的座標系間轉換矩陣 $\mathbf{L_{fi}}$為3×3之矩陣，可由方程式 (2.2) 之矩陣刪去最後一行及最後一列而得並表示如下：

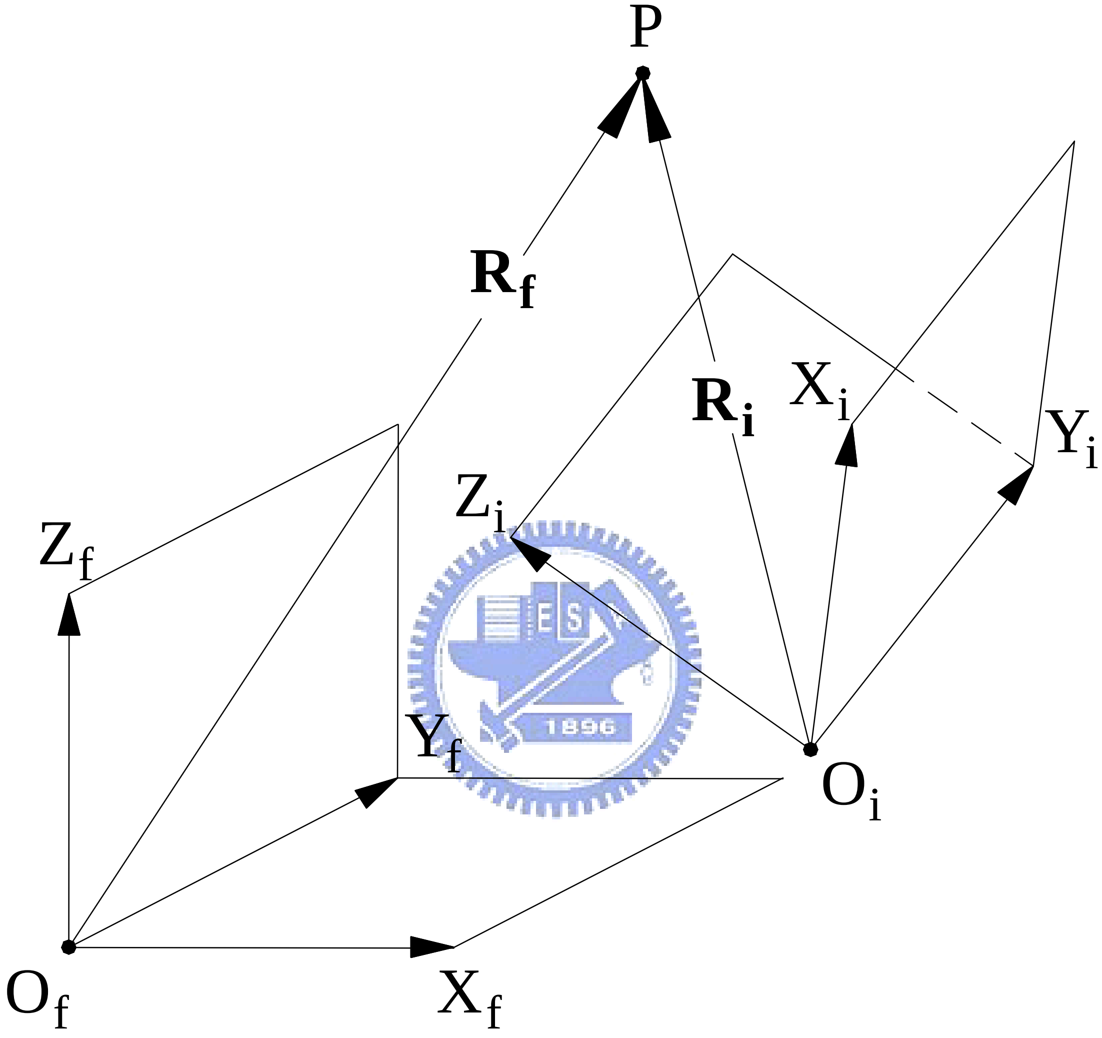

圖 2.1 位置向量與座標之關係示意圖

$$\mathbf{L}_{\mathbf{fi}} = \begin{bmatrix} \cos(X_f, X_i) & \cos(X_f, Y_i) & \cos(X_f, Z_i) \\ \cos(Y_f, X_i) & \cos(Y_f, Y_i) & \cos(Y_f, Z_i) \\ \cos(Z_f, X_i) & \cos(Z_f, Y_i) & \cos(Z_f, Z_i) \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

2.2 嚙合方程式 (Equation of Meshing)

當兩曲面經由直接接觸（Direct Contact）來傳遞共軛運動時，這兩個嚙合曲面必須連續保持接觸狀態。茲考慮空間中有二個互相嚙合運動的曲面$\sum_1$和$\sum_2$，如圖 2.2 所示。P 點為這兩個嚙合運動曲面$\sum_1$和$\sum_2$相切時的共切點（Common Tangent Point），同時也是這二個嚙合運動曲面的瞬時接觸點。兩個嚙合曲面在其共切點 P 點具有共同之曲面法向量（Common Normal Vector）$\mathbf{N}$；圖中$\mathbf{V}^{(12)}$則表示曲面$\sum_1$和$\sum_2$在 P 點的相對速度。

由於兩曲面嚙合運動時，其中一個曲面與另一曲面既不分離亦不嵌入彼此曲面內。因此，兩共軛運動曲面在其共同法向量之方向上將不存在相對速度$\mathbf{V}^{(12)}$，亦即在兩曲面之共同法向量的方向上其相對速度$\mathbf{V}^{(12)}$為零，故兩曲面之相對速度必定垂直於其共同法向量且落在其共同切平面（Common Tangent Plane）$\mathbf{T}$ 上面。因此，共同法向量$\mathbf{N}$必與相對速度$\mathbf{V}^{(12)}$ 互相垂直。

我們可從上述的現象得到結論：兩嚙合運動曲面其相對速度$\mathbf{V}^{(12)}$和共同法向量$\mathbf{N}$，在其共同接觸點 P 處必互相垂直，亦即兩者之內積（Dot Product）為零，所以下式亦必成立：

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}^{(12)} = 0 \qquad (2.4)$$

方程式（2.4）就是齒輪原理中探討共軛運動對之嚙合運動條件的嚙合方程式。此嚙合方程式對於二維（Two-Dimensional）曲線及

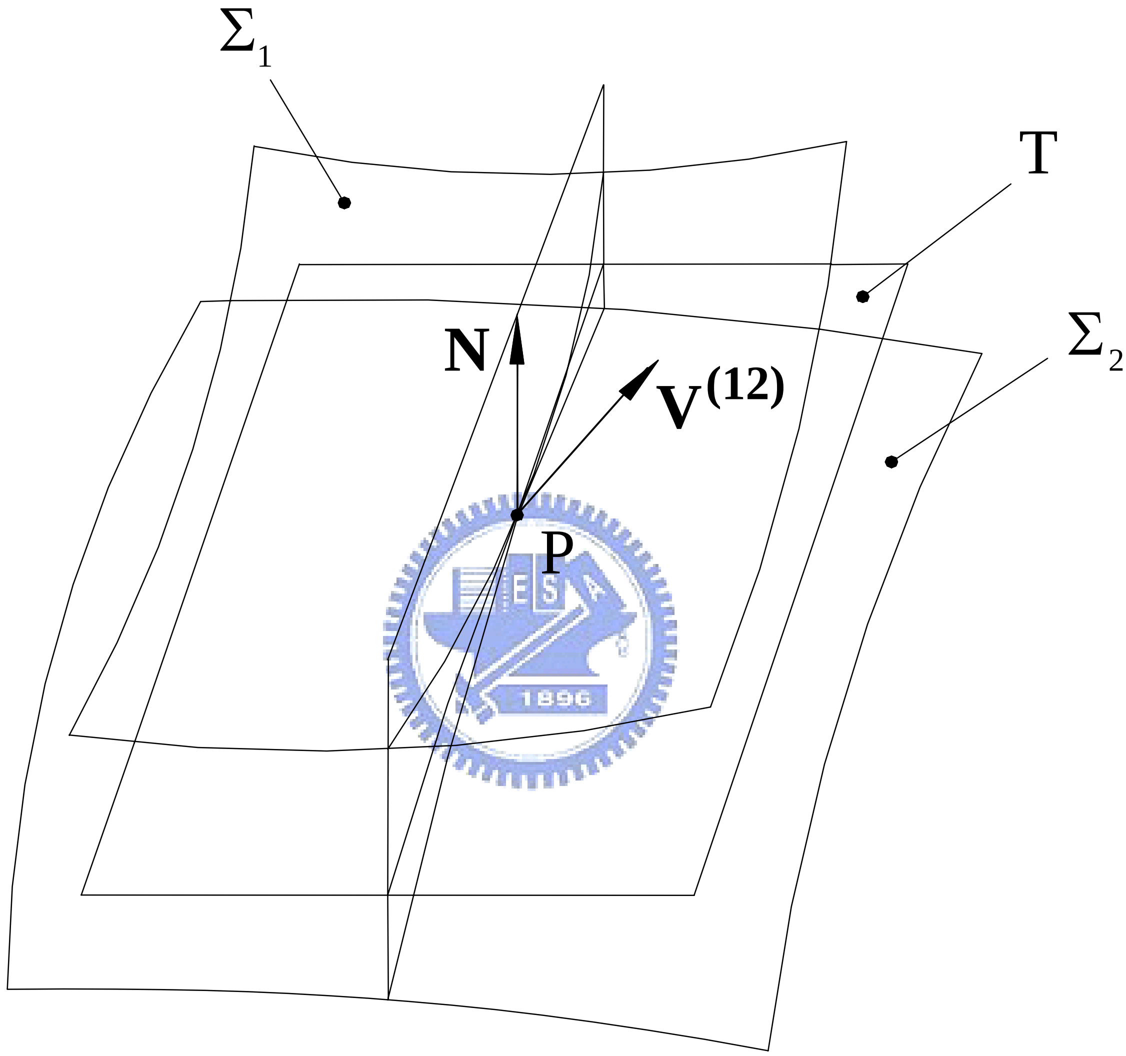

圖 2.2 空間中兩互相嚙合運動曲面之關係示意圖

三維(Three-Dimensional) 曲面的共軛運動對均可適用。

2.3 相對運動速度 (Relative Velocity)

假設空間中有兩個物體，物體 1 與物體 2 分別固聯於座標系 $S_1(X_1,Y_1,Z_1)$ 與 $S_2(X_2,Y_2,Z_2)$，如圖 2.3 所示。Z_1 軸與 Z_2 軸分別為物體 1 與物體 2 之旋轉軸，其旋轉之角速度分別為 ω_1 與 ω_2，γ 為兩旋轉軸之交錯角，C 為其最短距離，P 點為物體 1 與物體 2 之瞬時接觸點。因此，瞬時接觸點 P 在物體 1 上之速度 $\mathbf{V}_1$ 可由下式求得：

$$\mathbf{V}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_1 \tag{2.5}$$

其中 $\mathbf{R}_1$ 乃是由物體 1 旋轉軸之座標原點指向接觸點 P 之位置向量。而瞬時接觸點 P 在物體 2 上之速度 $\mathbf{V}_2$ 則可由下式求得：

$$\mathbf{V}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_2 \tag{2.6}$$

其中 $\mathbf{R}_2$ 乃是由物體 2 旋轉軸之座標原點指向接觸點 P 之位置向量。因此，物體 1 與物體 2 之相對速度可求得如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^{(12)} &= \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_1) - (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_2) \\ &= (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{R}_1 - \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}_2\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中乃 $\mathbf{R}$ 是由物體 1 之參考座標系原點 O_1 指向物體 2 之旋轉軸上任一點之位置向量。在此推導所得之方程式 (2.7) 主要適用於創成刀具和被創成齒輪間的運動屬於交錯軸，亦即兩軸既不相交亦不平行之共軛運動關係。

然而，當創成刀具和被創成齒輪間的運動屬於平行軸之共軛運動關係時，將可以簡化成二維的情況來討論，如圖 2.4 所示，$\mathbf{V}^{(12)}$ 可以表示成：

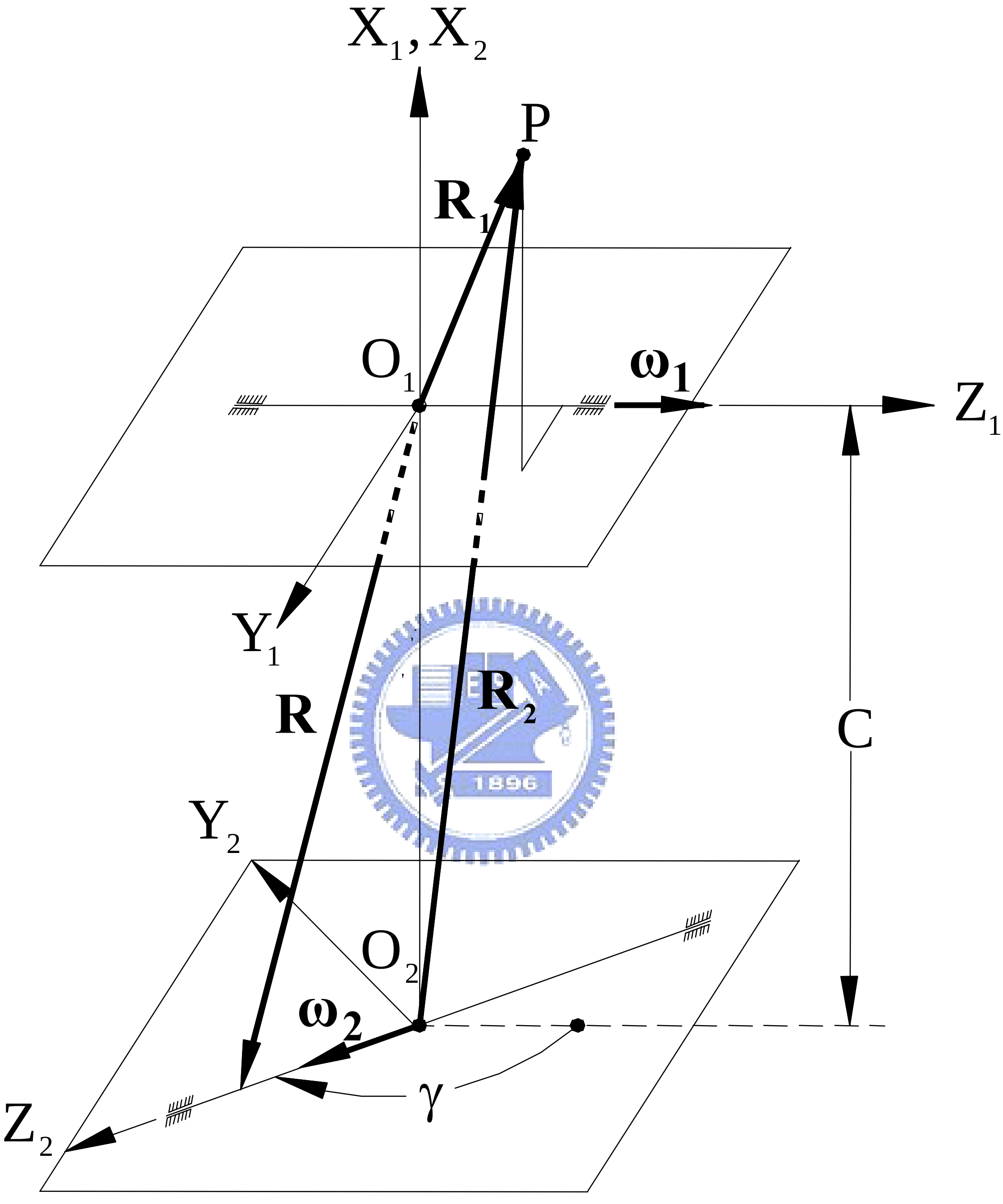

圖 2.3 空間物體之相對速度示意圖

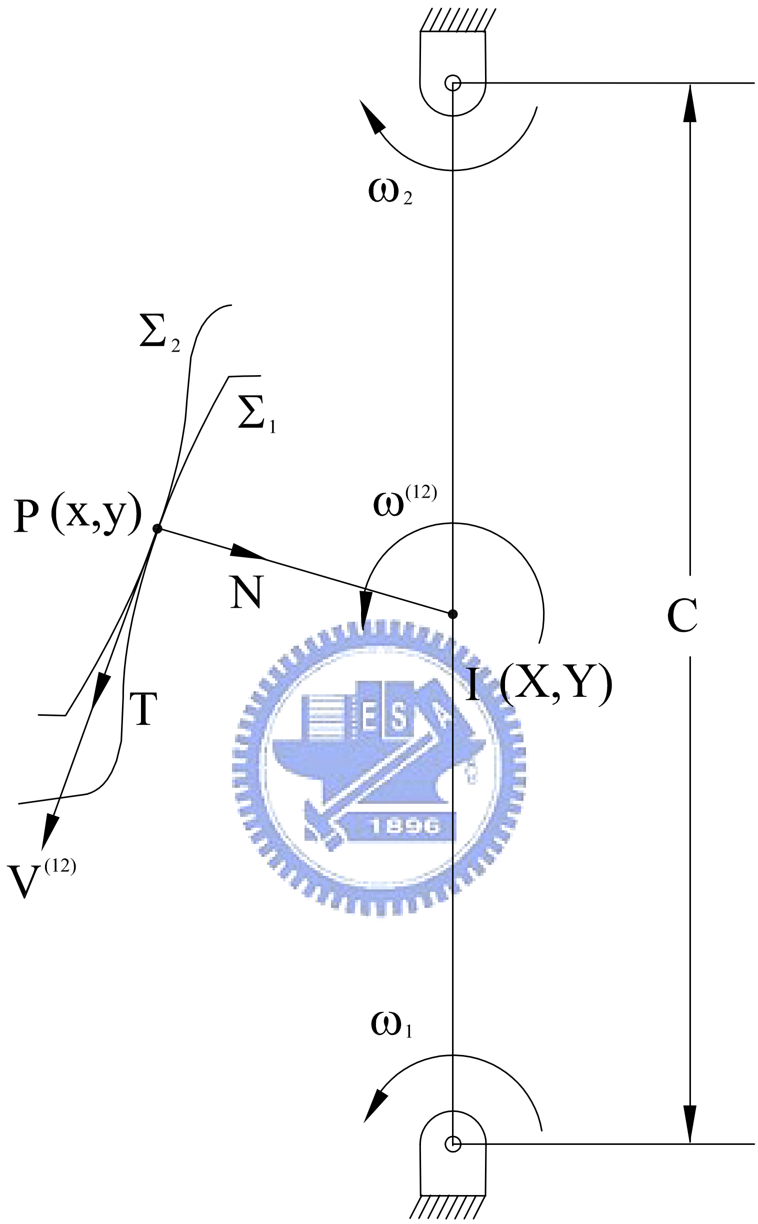

圖 2.4 平行軸共軛運動關係示意圖

$$\mathbf{V}^{(12)} = \boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \overline{\mathrm{IP}} \tag{2.8}$$

其中 I 點為創成刀具和被創成之齒輪做共軛運動時的瞬心(Instantaneous Center of Rotation)。

茲考慮兩嚙合曲面在嚙合狀態時之二維關係如圖2.4可知，相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 必指向共同切線向量 **T**，又共同切線向量 **T** 與共同法向量 **N** 相互垂直，兩曲面的共同接觸點 P 上的共同法向量 **N** 必定通過其瞬心 I ，因此相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 與 $\overline{\mathrm{IP}}$ 互相垂直，所以下式亦必成立：

$$\frac{X(\phi) - x(\theta)}{N_x^{(\theta)}} = \frac{Y(\phi) - y(\theta)}{N_y^{(\theta)}} \tag{2.9}$$

其中 $X(\phi)$ 及 $Y(\phi)$ 為瞬心 I 點之座標，$x(\theta)$ 及 $y(\theta)$ 是 P 點的座標，而 $N_x^{(\theta)}$ 及 $N_y^{(\theta)}$ 則為其共同法向量在 X 軸及 Y 軸之分量。利用方程式(2.8) 即可推導出二維共軛運動對之嚙合方程式。