

## 第三章 Helipoid 齒輪之齒面數學模式

在本章節中，將討論 Helipoid 齒輪的創成原理以及利用螺旋型刮刨刀創成 Helipoid 齒輪的相對運動關係。接著應用第二章所介紹的齒輪基本原理，先配合軌跡法 (Locus Method) 推導出螺旋型刮刨刀的齒面數學模式，利用位置向量座標轉換求得螺旋型刮刨刀在被創成之齒輪座標系的齒面數學模式，接著應用齒輪嚙合原理以推導其創成機構的嚙合方程式，最後將上述兩項方程式聯立，即可以得到被刨削的 Helipoid 齒輪齒形及其齒面數學模式。

### 3.1 Helipoid 齒輪創成原理及其創成機構

雙曲面體 (Hyperboloid) 乃是由一直線繞著一個固定的旋轉軸旋轉所形成的一個規則曲面，如圖 3.1 (a) 所表示。兩雙曲面體配對嚙合轉動，如同一對齒輪對，在共同的接觸線上接觸，即是所謂的螺旋軸 (Axis of Screw Motion)。在圖中此兩雙曲面體以一定的相對角速度旋轉，並且此運動對 (Kinematic Pair) 之接觸點 P 的相對速度則是沿著前述螺旋軸上做旋轉加平移的運動，如圖 3.1 (b) 所示。

由此可知，空間交錯軸相嚙合的運動對，其兩節曲面之瞬間接觸線即是所謂的螺旋軸，此運動對之相對速度係沿著此螺旋軸做旋轉加平移的運動，而且此兩雙曲面體形成共軛 (Conjugate) 運動對，在理想的狀況下此運動對不會產生運動誤差 (Kinematical Error)。日本工業大學的長田重慶教授係根據此一觀念，提出一新型的交錯軸螺旋齒輪，利用直邊形刨齒刀沿著螺旋軸來加工，以刨切出此 Helipoid 齒輪[8]。

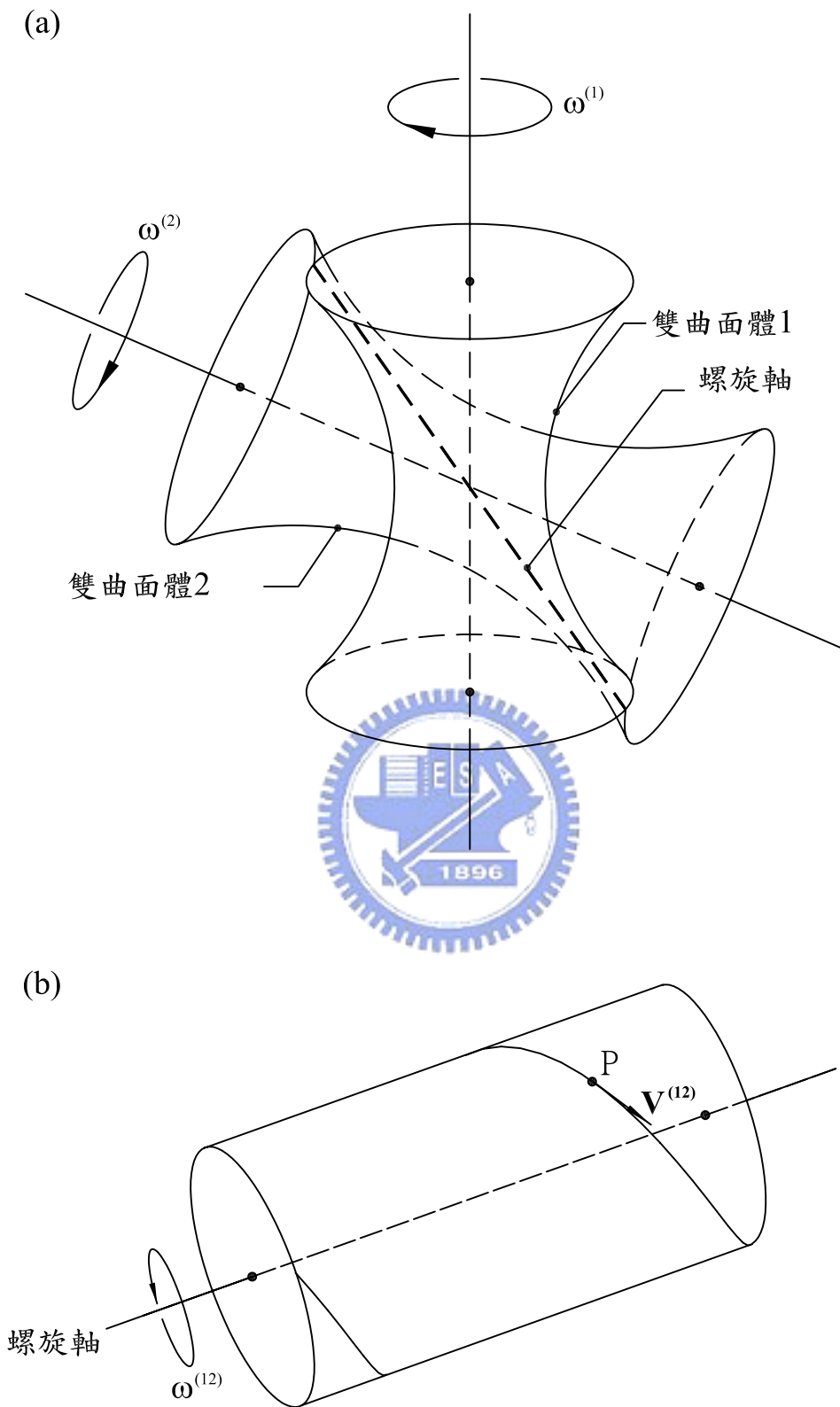
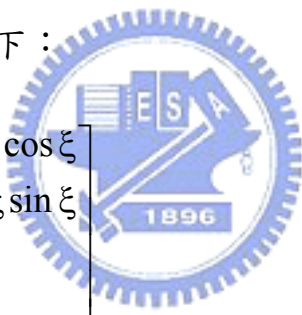


圖 3.1 兩雙曲面體示意圖

在本論文，則是提出由具漸開線齒形的螺旋型刮刨刀沿著其旋轉軸所加工而形成另一種型態的 Helipoid 齒輪，圖 3.2 簡單表示了刮刨刀與被創成齒輪的關係，且刨削加工時，螺旋型刮刨刀移動的方向與工件旋轉軸成一角度  $(\beta + \beta_c)$ ，其中  $\beta$  為被創成齒輪的螺旋角， $\beta_c$  則為螺旋型刮刨刀的螺旋角。藉此，只需調整加大螺旋型刮刨刀的螺旋角就可使工件的節曲面更加趨近雙曲面體。

### 3.2 螺旋型刮刨刀之齒面數學模式

由於此 Helipoid 齒輪是由漸開線齒形的螺旋型刮刨刀所創成，所以螺旋型刮刨刀之剖面即為漸開線，如圖 3.3 所示。根據漸開線展開原理[2]及 Tsay 等 [6]，此漸開線表示在  $S_s(X_s, Y_s, Z_s)$  座標系中的位置向量  $\mathbf{R}_s$  可推得如下：

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_b \sin \xi - r_b \xi \cos \xi \\ r_b \cos \xi + r_b \xi \sin \xi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$


其中  $\psi = \frac{\pi}{2T} + \text{inv}\alpha$   
 $r_b = r_c \cos \alpha$

參數  $r_b$  和  $r_c$  分別為此漸開線形刮刨刀的基圓與節圓半徑， $\xi$  為螺旋型刮刨刀的齒面設計參數，亦即為漸開線的展開角， $\alpha$  為壓力角， $T$  則為齒數， $\text{inv}\alpha$  則代表漸開線展開  $\alpha$  角後，與漸開線起點所夾之角度。

在推導螺旋型刮刨刀齒面數學模式的過程中，係利用軌跡法所推得。所謂軌跡法，可參考圖 3.4 所示，亦即在空間中，以一條直線或

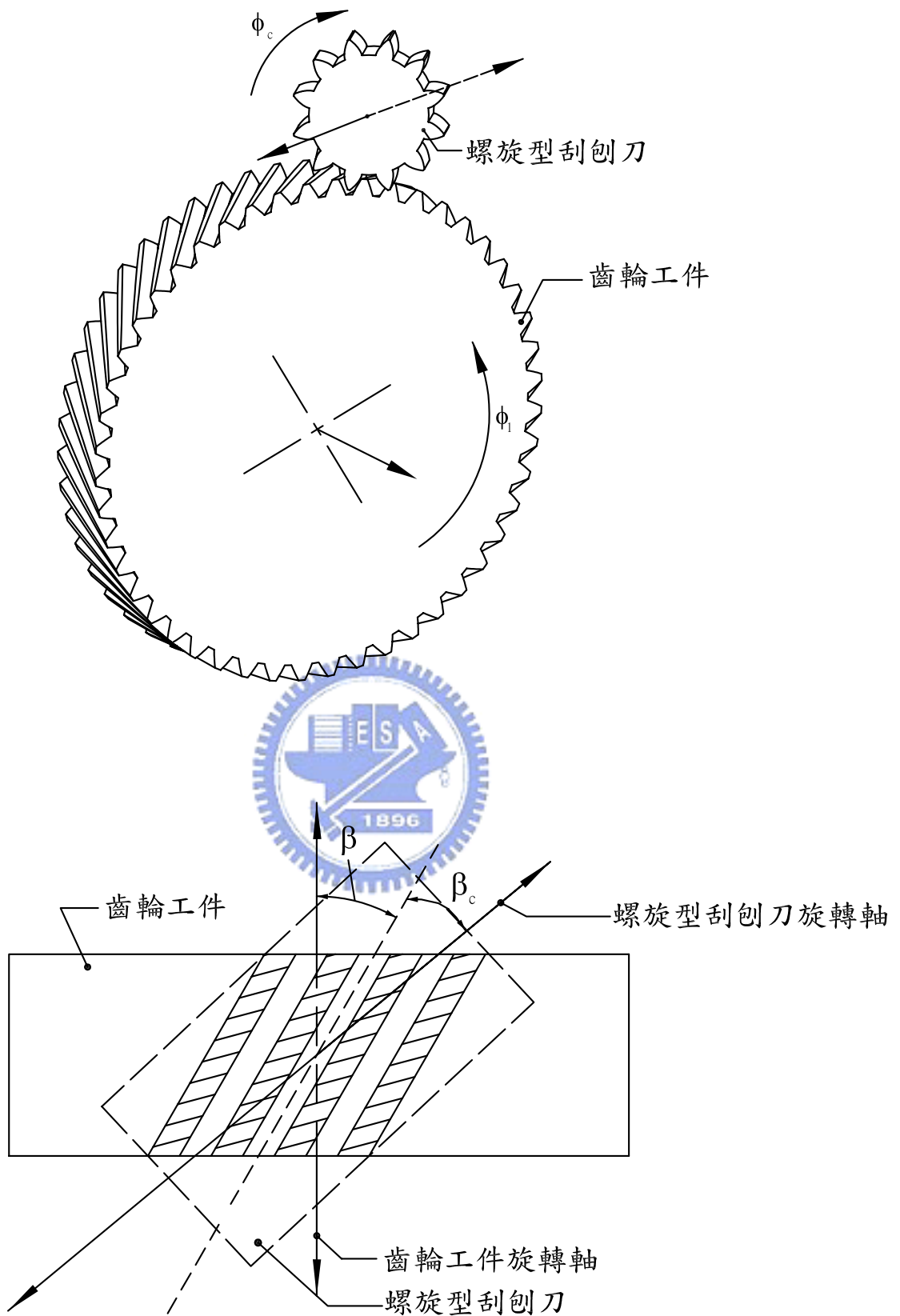


圖 3.2 螺旋型刮刨刀與被創成齒輪關係示意圖

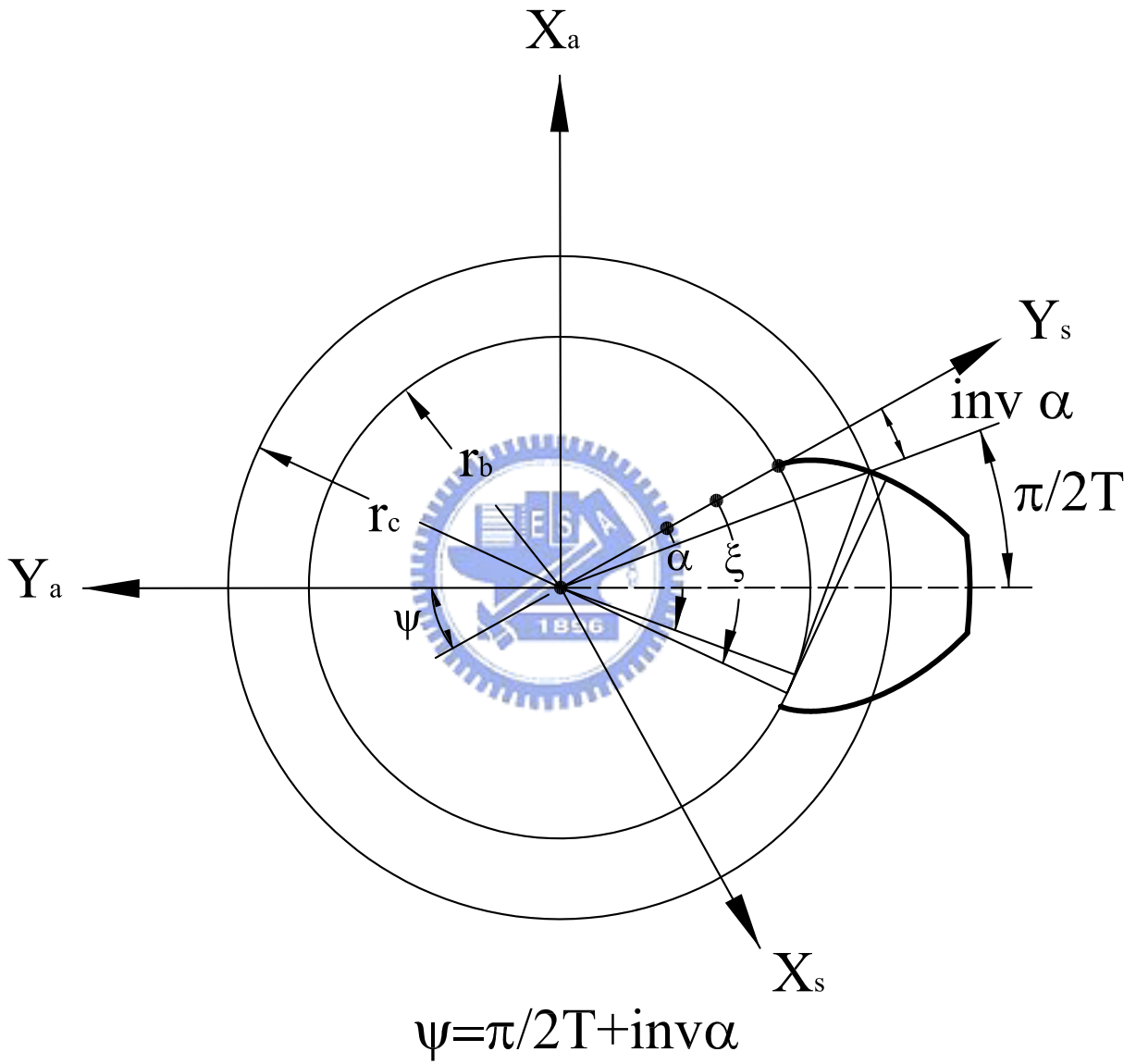


圖 3.3 漸開線形刮刨刀剖面示意圖

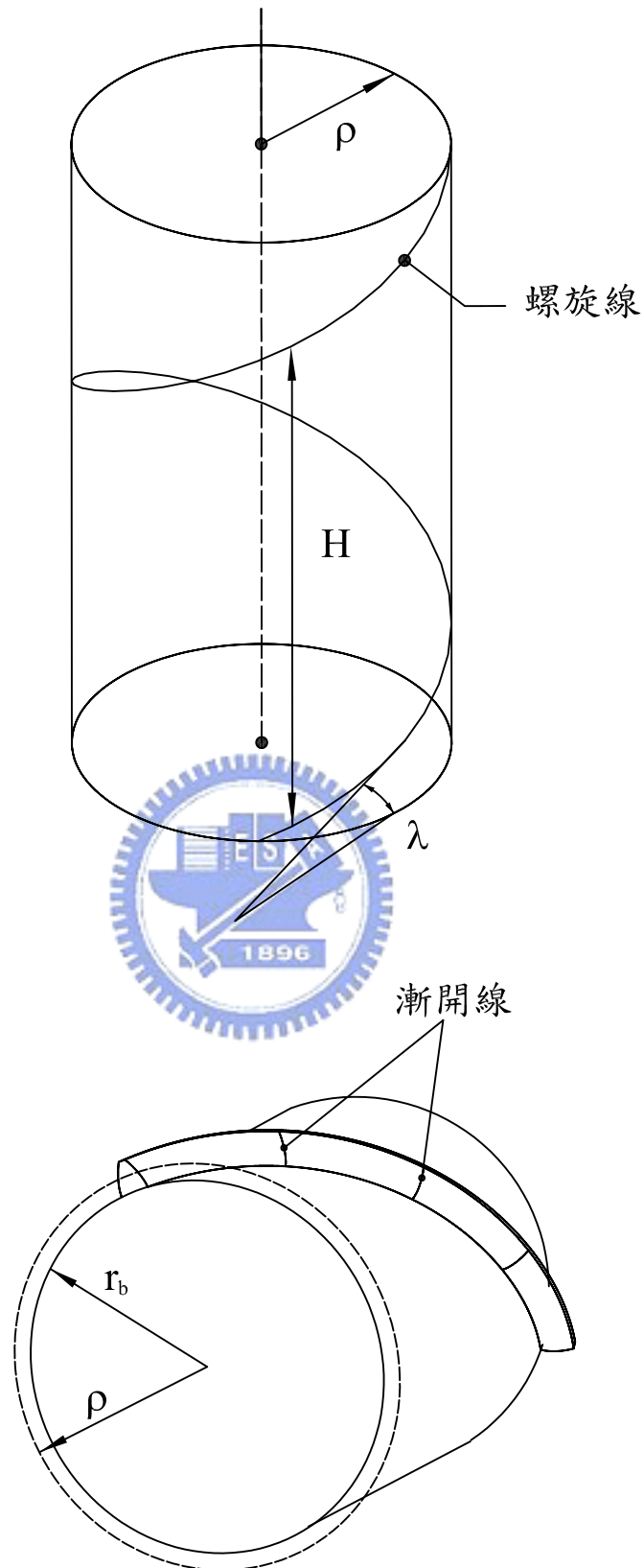


圖 3.4 螺旋成形機構示意圖

曲線為動線，並令該動線沿著某一螺旋體的旋轉軸做螺旋運動(Screw Motion)，在圖中H為此螺旋體的導程， $\lambda$ 則是半徑為 $\rho$ 的圓柱體之導程角，且此三個參數間有下列關係：

$$\rho \tan \lambda = \frac{H}{2\pi} = p \quad (3.2)$$

其中 $p$ 為單位徑度 (radium) 之導程。因此，這條動線在空間中所形成的軌跡，便是螺旋型刮刨刀的齒面。

為求得螺旋型刮刨刀位於刮刨刀齒面座標系 $S_a(X_a, Y_a, Z_a)$ 的齒面數學模式，由圖3.3所示，先將座標系 $S_s(X_s, Y_s, Z_s)$ 上的位置向量 $\mathbf{R}_s$ 轉換到座標系 $S_a(X_a, Y_a, Z_a)$ 後，再如圖3.5所示之螺旋成形機構示意圖，相對於刮刨刀齒面座標系 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 之 $Z_c$ 軸做螺旋運動，如此便可得到螺旋型刮刨刀的軌跡方程式。由於螺旋型刮刨刀是利用軌跡法所形成的，因此，螺旋型刮刨刀的軌跡方程式，亦即為其齒面數學模式。茲利用下列齊次座標轉換矩陣方程式 (Homogeneous Coordinate Transformation Matrix Equation)，即可獲得螺旋型刮刨刀的齒面數學模式如下：

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{M}_{ca} \mathbf{M}_{as} \mathbf{R}_s \quad (3.3)$$

其中

$$\mathbf{M}_{as} = \begin{bmatrix} -\cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

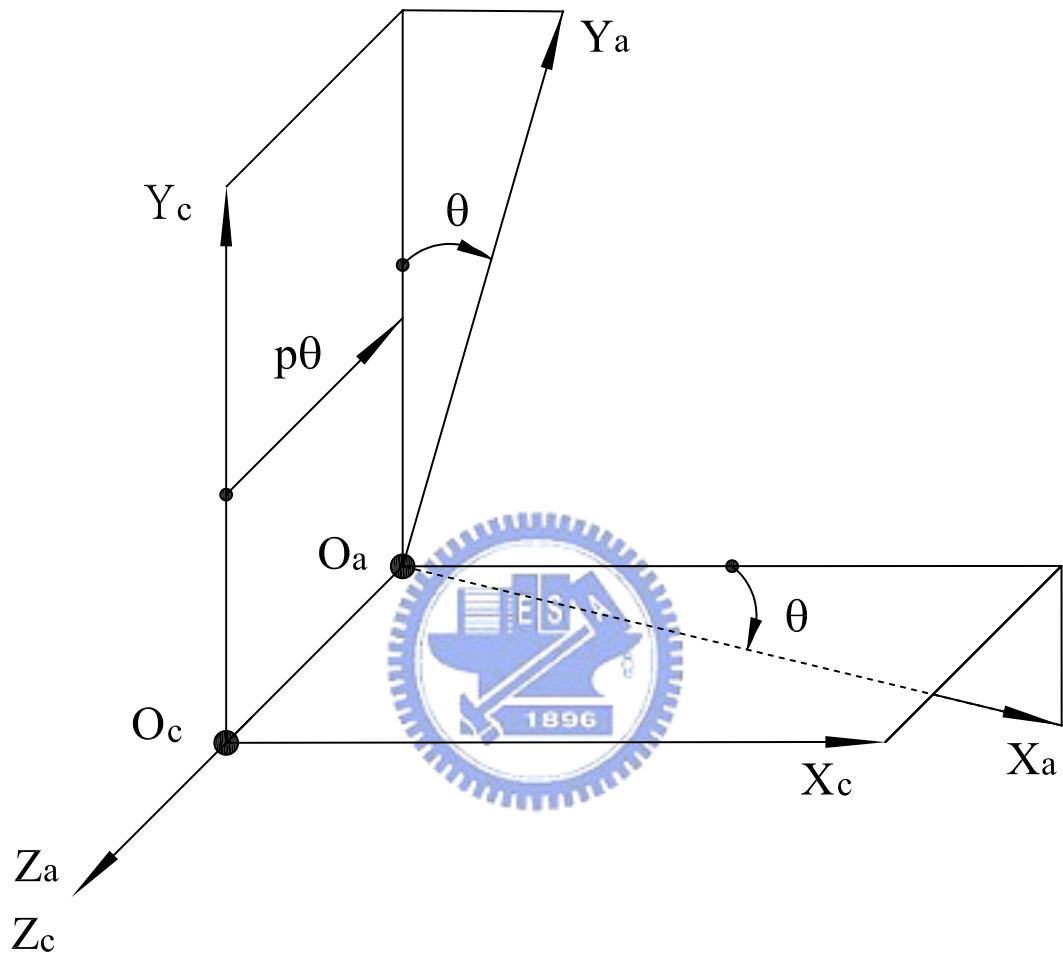


圖 3.5 螺旋型刮刨刀之成形機構示意圖



$$\mathbf{M}_{ca} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -p\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將方程式 (3.1) 代入方程式 (3.3) 中，即可求得刮刨刀齒面的數學模式並表示在  $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$  座標系如下：

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_b \sin(\xi - \psi + \theta) + r_b \xi \cos(\xi - \psi + \theta) \\ -r_b \cos(\xi - \psi + \theta) - r_b \xi \sin(\xi - \psi + \theta) \\ -p\theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

其中  $\theta$  為螺旋動線的轉動角度， $p$  為單位徑度的導程。由 (3.4) 式可得知螺旋型刮刨刀的齒面參數為  $\xi$  以及  $\theta$ 。

上述 (3.4) 式為螺旋型刮刨刀表示在  $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$  的左側齒面數學模式；然而，其右側齒面數學模式亦可用類似的方法求得，惟將漸開線刮刨刀座標系  $S_s(X_s, Y_s, Z_s)$  轉換至  $S_a(X_a, Y_a, Z_a)$  後，必須先將  $X$  之方向分量變號，如圖 3.3 所示，再行轉換到刮刨刀齒面座標系  $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ ，螺旋型刮刨刀之右側刀面數學模式推導如下：

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{M}_{as} \mathbf{R}_s \quad (3.5)$$

其中

$$\mathbf{M}_{as} = \begin{bmatrix} -\cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ -\sin\psi & -\cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以代入 (3.1) 式可得：

$$\mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mp r_b \sin(\xi - \psi) \pm r_b \xi \cos(\xi - \psi) \\ -r_b \cos(\xi - \psi) - r_b \xi \sin(\xi - \psi) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

在方程式 (3.6)  $X_a$  分量中，其「 $\pm$ 」符號之上方符號代表刮刨刀之左側齒面，下方符號則表示刮刨刀的右側齒面。所以，螺旋型刮刨刀表示在  $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$  座標系的右側齒面數學模式為：

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{M}_{ca} \mathbf{R}_a$$

$$= \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_b \sin(\xi - \psi - \theta) - r_b \xi \cos(\xi - \psi - \theta) \\ -r_b \cos(\xi - \psi - \theta) - r_b \xi \sin(\xi - \psi - \theta) \\ -p\theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

茲將螺旋型刮刨刀的齒面數學模式整理表示如下：

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mp r_b \sin(\xi - \psi \pm \theta) \pm r_b \xi \cos(\xi - \psi \pm \theta) \\ -r_b \cos(\xi - \psi \pm \theta) - r_b \xi \sin(\xi - \psi \pm \theta) \\ -p\theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

其中「 $\pm$ 」符號之上方符號代表螺旋型刮刨刀左側齒面的齒面數學模式，下方符號則表示螺旋型刮刨刀右側齒面的齒面數學模式。

### 3.3 Helipoid 齒輪創成時之嚙合方程式

藉由圖 3.2 中螺旋型刮刨刀與 Helipoid 齒輪創成關係示意圖，可建構螺旋型刮刨刀與被創成齒輪工件之座標關係圖，如圖 3.6 所示。其中座標系  $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$  與  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  分別表示固聯在螺旋型刮刨刀與被創成之齒輪工件的座標系，座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  為固聯在

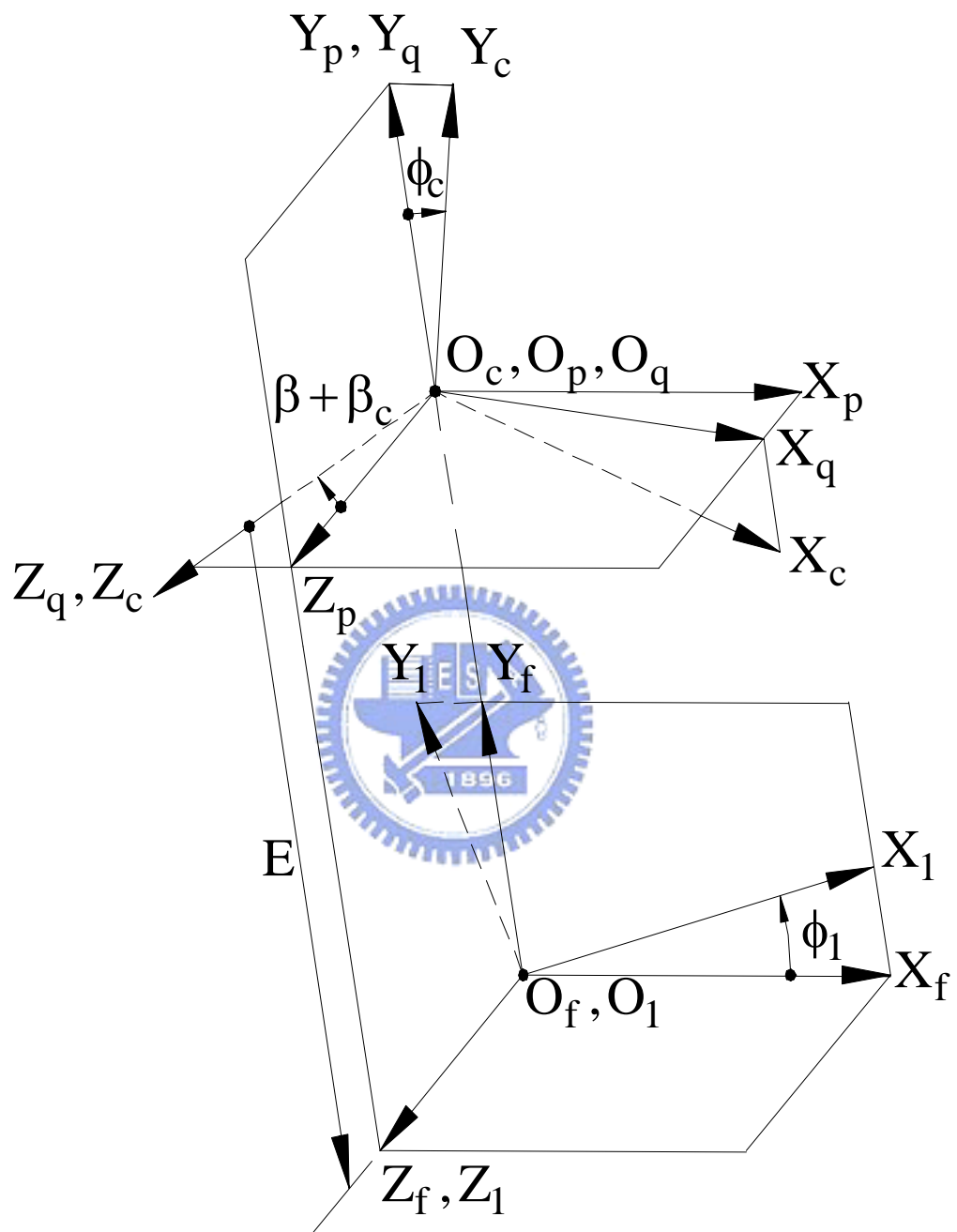


圖 3.6 螺旋型刮刨刀與被創成齒輪工件之座標關係圖

齒輪創成機器上之參考座標系， $S_p(X_p, Y_p, Z_p)$ 和 $S_q(X_q, Y_q, Z_q)$ 皆為螺旋型刮刨刀的參考座標系。 $Z_q$ 軸為刮刨刀的旋轉軸，刮刨刀沿著 $Z_q$ 軸方向以 $\phi_c$ 之角度作左旋方向旋轉。 $Z_q$ 與 $Z_p$ 夾著 $(\beta + \beta_c)$ 角，其中 $\beta$ 為被創成齒輪的螺旋角， $\beta_c$ 則為螺旋型刮刨刀的螺旋角。 $Z_f$ 軸為被創成齒輪工件的旋轉軸，齒輪工件沿著 $Z_f$ 軸方向以 $\phi_1$ 之角度作右旋方向旋轉。 $E$ 為刮刨刀旋轉軸與被創成齒輪工件旋轉軸之最短距離。

根據齒輪原理[1]，被創成齒輪外形可由刀具在被創成齒輪座標系上之軌跡方程式與嚙合方程式聯立而求得。在本節先推導其嚙合方程式，為求得 Helipsoid 齒輪與螺旋型刮刨刀的嚙合方程式，由第二章的齒輪基本理論得知，必須將螺旋型刮刨刀齒面與 Helipsoid 齒輪齒面之接觸點的相對速度及螺旋型刮刨刀的齒面法向量表示在同一座標系，若表示在 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 座標系則下列的嚙合方程式必成立：

$$\mathbf{N}_c \cdot \mathbf{V}_c^{(c1)} = 0 \quad (3.9)$$

為求得嚙合方程式 (3.9) 之關係，將先後個別求出其刮刨刀齒面法向量 $\mathbf{N}_c$ 與兩共軛曲面的相對速度 $\mathbf{V}_c^{(c1)}$ 再做內積(Dot Product)。

由於螺旋型刮刨刀之齒面為一規則曲面，因此，可藉由螺旋型刮刨刀齒面數學模式 (3.8) 以及對刮刨刀的兩個齒面參數之偏微分的乘積 (Cross Product)，求出其齒面法向量如下：

$$\mathbf{N}_c = \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \theta} \quad (3.10)$$

其中

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_c}{\partial \xi} \\ \frac{\partial Y_c}{\partial \xi} \\ \frac{\partial Z_c}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mp r_b \xi \sin(\xi - \psi \pm \theta) \\ -r_b \xi \cos(\xi - \psi \pm \theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_c}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y_c}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Z_c}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_b \cos(\xi - \psi \pm \theta) - r_b \xi \sin(\xi - \psi \pm \theta) \\ \pm r_b \sin(\xi - \psi \pm \theta) \mp r_b \xi \cos(\xi - \psi \pm \theta) \\ -p \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

將方程式 (3.11) 與 (3.12) 代入方程式 (3.10) 並經化簡後，可得到螺旋型刮刨刀的齒面法向量如下：

$$\mathbf{N}_c = \begin{bmatrix} N_{cx} \\ N_{cy} \\ N_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pr_b \xi \cos(\xi - \psi \pm \theta) \\ \mp pr_b \xi \sin(\xi - \psi \pm \theta) \\ -r_b^2 \xi \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

(3.13) 式為螺旋型刮刨刀齒面法向量方程式，其中「±」符號之上方符號代表螺旋型刮刨刀左側齒面的齒面法向量數學模式，下方符號則表示螺旋型刮刨刀右側齒面的齒面法向量數學模式。

由圖 3.6 之螺旋型刮刨刀與齒輪工件之間的座標關係，若要表示在  $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$  座標系，則必須先求得由座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  轉換至  $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$  的齊次座標轉換矩陣如下：

$$\mathbf{M}_{cf} = \mathbf{M}_{cq} \mathbf{M}_{qp} \mathbf{M}_{pf} \quad (3.14)$$

其中

$$\mathbf{M}_{pf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -E \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{qp} = \begin{bmatrix} \cos(\beta + \beta_c) & 0 & \sin(\beta + \beta_c) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta + \beta_c) & 0 & \cos(\beta + \beta_c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{cq} = \begin{bmatrix} \cos\phi_c & -\sin\phi_c & 0 & 0 \\ \sin\phi_c & \cos\phi_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

亦即

$$\mathbf{M}_{cf} = \begin{bmatrix} \cos\phi_c \cos(\beta + \beta_c) & -\sin\phi_c \cos\phi_c \sin(\beta + \beta_c) & E \sin\phi_c \\ \sin\phi_c \cos(\beta + \beta_c) & \cos\phi_c \sin\phi_c \sin(\beta + \beta_c) & -E \cos\phi_c \\ -\sin(\beta + \beta_c) & 0 & \cos(\beta + \beta_c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

至於向量之相對座標轉換矩陣可表示如下：

$$\mathbf{L}_{cf} = \begin{bmatrix} \cos\phi_c \cos(\beta + \beta_c) & -\sin\phi_c \cos\phi_c \sin(\beta + \beta_c) \\ \sin\phi_c \cos(\beta + \beta_c) & \cos\phi_c \sin\phi_c \sin(\beta + \beta_c) \\ -\sin(\beta + \beta_c) & 0 & \cos(\beta + \beta_c) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

根據圖 3.6 之螺旋型刮刨刀與齒輪工件之間的座標關係圖以及第二章中相對速度的理論推導，刮刨刀與齒輪工件之間的相對速度可以利用下式求得：

$$\mathbf{V}_c^{(c1)} = (\boldsymbol{\omega}_c^{(c)} - \boldsymbol{\omega}_c^{(1)}) \times \mathbf{R}_c - \mathbf{E}_c \times \boldsymbol{\omega}_c^{(1)} \quad (3.16)$$

其中，螺旋型刮刨刀之旋轉角速度 $\omega^{(c)}$ 表示在座標系 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 為：

$$\omega_c^{(c)} = \frac{d\phi_c}{dt} \mathbf{k}_c = -\omega^{(c)} \mathbf{k}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega^{(c)} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

齒輪工件之旋轉角速度 $\omega^{(1)}$ 表示在座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 則為：

$$\omega_f^{(1)} = \frac{d\phi_1}{dt} \mathbf{k}_f = \omega^{(1)} \mathbf{k}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

根據方程式 (3.18) 與 (3.15)，齒輪工件之旋轉角速度表示在 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 座標系為：

$$\begin{aligned} \omega_c^{(1)} = \mathbf{L}_{cf} \omega_f^{(1)} &= \begin{bmatrix} \cos\phi_c \cos(\beta + \beta_c) & -\sin\phi_c & \cos\phi_c \sin(\beta + \beta_c) \\ \sin\phi_c \cos(\beta + \beta_c) & \cos\phi_c & \sin\phi_c \sin(\beta + \beta_c) \\ -\sin(\beta + \beta_c) & 0 & \cos(\beta + \beta_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^{(1)} \end{bmatrix} \\ &= \omega^{(1)} \begin{bmatrix} \cos\phi_c \sin(\beta + \beta_c) \\ \sin\phi_c \sin(\beta + \beta_c) \\ \cos(\beta + \beta_c) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

而 $\mathbf{E}_c$ 為螺旋型刮刨刀旋轉軸與齒輪工件軸之最短距離向量，可表示如下：

$$\mathbf{E}_c = \begin{bmatrix} E \sin\phi_c \\ -E \cos\phi_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

然而，在創成過程中，螺旋型刮刨刀與齒輪工件為共軛運動對，因此，刮刨刀與齒輪工件的旋轉角 $\phi_c$ 和 $\phi_1$ 必滿足下列關係式：

$$m_{c1} = \frac{\omega^{(c)}}{\omega^{(1)}} = \frac{\phi_c}{\phi_1} = \frac{T_1}{T_c} \quad (3.21)$$

利用方程式 (3.8)、(3.17)、(3.19)、(3.20)、(3.21) 代入方程式 (3.16)，即可求得螺旋型刮刨刀與齒輪工件的相對速度表示於  $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$  座標系如下：

$$\mathbf{V}_c^{(c1)} = \begin{bmatrix} V_{cx} \\ V_{cy} \\ V_{cz} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

其中

$$\begin{aligned} V_{cx} &= \omega^{(1)} \{Y_c[m_{c1} + \cos(\beta + \beta_c)] - Z_c \sin(\beta + \beta_c) \sin \phi_c + E \cos \phi_c \cos(\beta + \beta_c)\} \\ V_{cy} &= \omega^{(1)} \{-X_c[m_{c1} + \cos(\beta + \beta_c)] + Z_c \sin(\beta + \beta_c) \cos \phi_c + E \sin \phi_c \cos(\beta + \beta_c)\} \\ V_{cz} &= \omega^{(1)} \{X_c \sin(\beta + \beta_c) \sin \phi_c - Y_c \sin(\beta + \beta_c) \cos \phi_c - E \sin(\beta + \beta_c)\} \end{aligned}$$

將方程式 (3.13) 和 (3.22) 代入方程式 (3.9) 計算其內積，即可得到螺旋型刮刨刀與齒輪工件創成時之嚙合關係式。

### 3.4 Helipoid 齒輪之齒面數學模式

根據齒輪原理，欲求得被創成齒輪的齒面數學模式，除了嚙合方程式外還須求得刀具表示在被創成齒輪座標系的軌跡方程式。在本論文中，螺旋型刮刨刀齒面在齒輪工件座標系所形成的軌跡方程式，可由已知且固聯在座標系  $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$  上的位置向量  $\mathbf{R}_c$ ，進行座標轉換到座標系  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  以求得位置向量  $\mathbf{R}_1$ ，其座標轉換矩陣方程式如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1(\xi, \theta, \phi_c) &= \mathbf{M}_{1f} \mathbf{M}_{fp} \mathbf{M}_{pq} \mathbf{M}_{qc} \mathbf{R}_c(\xi, \theta) \\ &= \mathbf{M}_{1c} \mathbf{R}_c(\xi, \theta) \end{aligned} \quad (3.23)$$

其中

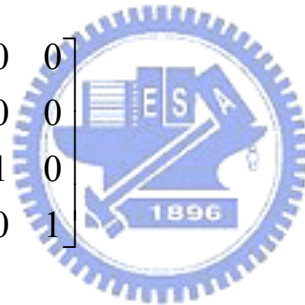


$$\mathbf{M}_{qc} = \begin{bmatrix} \cos \phi_c & \sin \phi_c & 0 & 0 \\ -\sin \phi_c & \cos \phi_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{pq} = \begin{bmatrix} \cos(\beta + \beta_c) & 0 & -\sin(\beta + \beta_c) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta + \beta_c) & 0 & \cos(\beta + \beta_c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{fp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{1f} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



將 (3.8) 式代入 (3.23) 式即可求得：

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

其中

$$\begin{aligned} X_1 = & [\mp r_b \sin(\xi - \psi \pm \theta \pm \phi_c) \cos(\beta + \beta_c) \\ & \pm r_b \xi \cos(\xi - \psi \pm \theta \pm \phi_c) \cos(\beta + \beta_c) \\ & + p\theta \sin(\beta + \beta_c)] \cos \phi_1 + [-r_b \cos(\xi - \psi \pm \theta \pm \phi_c) \\ & - r_b \xi \sin(\xi - \psi \pm \theta \pm \phi_c) + E] \sin \phi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 = & -[\mp r_b \sin(\xi - \psi \pm \theta \pm \phi_c) \cos(\beta + \beta_c) \\
& \pm r_b \xi \cos(\xi - \psi \pm \theta \pm \phi_c) \cos(\beta + \beta_c) \\
& + p\theta \sin(\beta + \beta_c)] \sin \phi_1 + [-r_b \cos(\xi - \psi \pm \theta \pm \phi_c) \\
& - r_b \xi \sin(\xi - \psi \pm \theta \pm \phi_c) + E] \cos \phi_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_1 = & \mp r_b \sin(\xi - \psi \pm \theta \pm \phi_c) \sin(\beta + \beta_c) \\
& \pm r_b \xi \cos(\xi - \psi \pm \theta \pm \phi_c) \sin(\beta + \beta_c) \\
& - p\theta \cos(\beta + \beta_c)
\end{aligned}$$

(3.24) 式即為螺旋型刮刨刀的齒面表示在齒輪工件座標系  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  的軌跡方程式。

最後，將軌跡方程式 (3.24) 與嚙合方程式 (3.9) 聯立，即可得到 Helipoid 齒輪之齒面數學方程式。

### 3.5 Helipoid 齒輪之電腦輔助繪圖

依據上一節所建立之 Helipoid 齒輪齒面數學模式，加上電腦輔助繪圖軟體，即可繪出齒輪之外形。在此舉一例以驗證本章所推導之 Helipoid 齒輪之齒面數學模式。齒輪之主要設計參數如表 3.1 所列，再配合本章所建立之 Helipoid 齒輪的齒面數學模式，藉由電腦輔助設計與輔助繪圖軟體即可畫出 Helipoid 齒輪之齒面外形，如圖 3.7 所示。

表 3.1 Helipoid 齒輪之主要設計參數

	螺旋型刮刨刀	Helipoid 齒輪
法向模數 (mm/teeth)	3	3
齒數	24	48
壓力角 (度)	20	20
法向節圓半徑 (mm)	36	72
螺旋角 (度)	30	45
齒面寬 (mm)	30	30

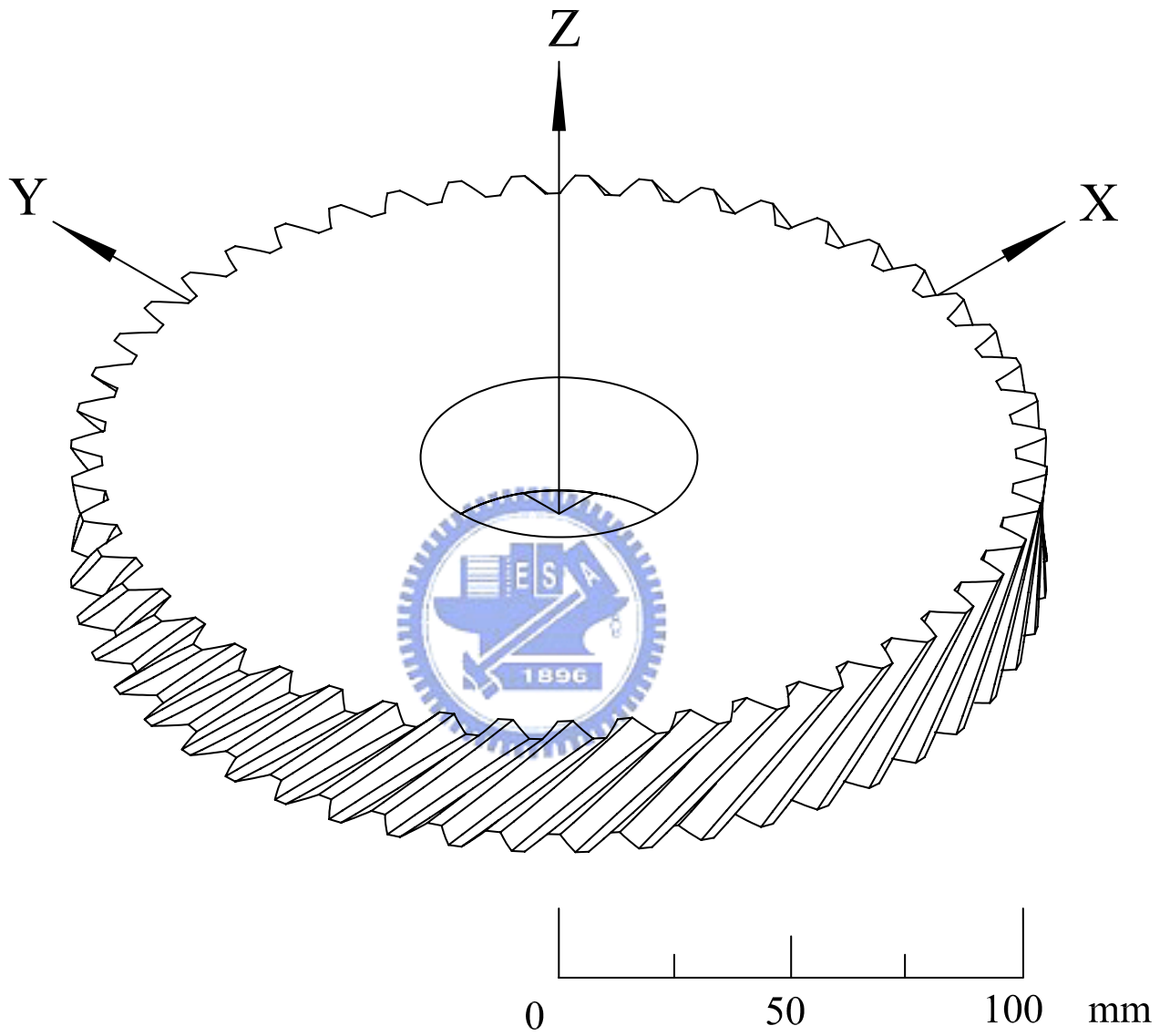


圖 3.7 Helipoid 齒輪的電腦繪圖

### 3.6 Helipoid 齒輪之齒面差異

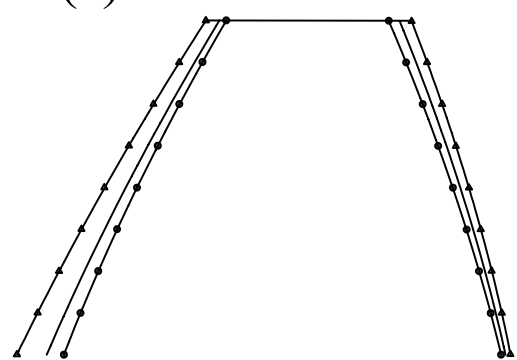
經由前述螺旋型刮刨刀刨削出 Helipoid 齒輪的模擬過程中可發現，以不同齒數或不同螺旋角角度的螺旋型刮刨刀去創成齒面設計參數皆固定的 Helipoid 齒輪時，Helipoid 齒輪的齒面會有所差異。

茲利用 24 齒、48 齒及 96 齒等不同齒數以及 0 度、30 度及 45 度等不同螺旋角角度的螺旋型刮刨刀來創成 48 齒且螺旋角 30 度的 Helipoid 齒輪，經比較其齒輪之齒形差異如圖 3.8 及圖 3.9 所示，亦即分別為不同齒數及不同螺旋角的螺旋型刮刨刀所創成之 Helipoid 齒輪其齒形的剖面差異圖。

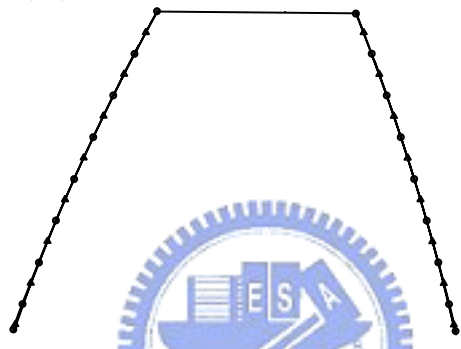
根據圖 3.8 (b) 及圖 3.9 (b) 所示，齒形剖面的差異在齒寬的中央剖面 ( $z=0\text{mm}$ ) 為最小，不論螺旋型刮刨刀的齒數或螺旋角角度如何變化，所創成的齒形剖面幾乎相同，差異甚小幾可忽略；而愈遠離齒寬的中央位置時，則其齒形剖面的差異量便逐漸擴大。由圖 3.8 (a) 及圖 3.8 (c) 所示，隨著螺旋型刮刨刀齒數的增加，被創成的 Helipoid 齒輪齒形剖面就會愈往內縮，反之則愈往外擴。而由圖 3.9 (a) 及圖 3.9 (c) 所示，隨著螺旋型刮刨刀螺旋角度的增加，被創成的 Helipoid 齒輪其齒形剖面則是有愈往外擴的趨勢。

當 Helipoid 齒輪相嚙合時，若其齒面有往內縮的情況，則在齒輪齒面受力變形後，其接觸點上接觸面積也會因此縮小。反之，若其齒面有往外擴的情況，則接觸點上接觸面積會因此擴大。這樣的特性可以在往後分析齒輪的接觸齒印時來相互驗證。

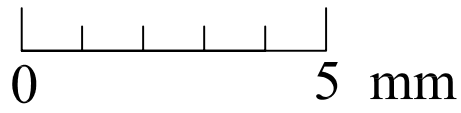
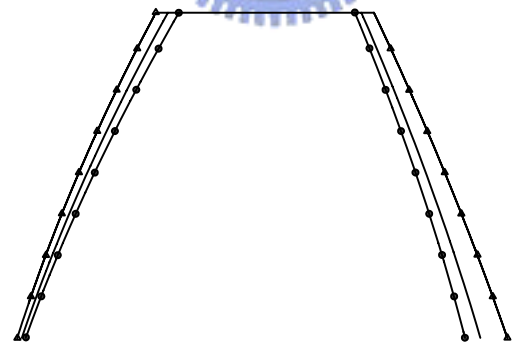
(a)  $z = -15$  mm 剖面



(b)  $z = 0$  mm 剖面



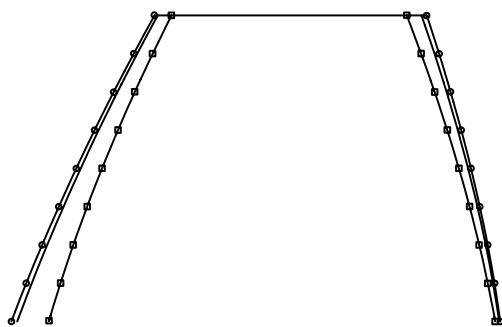
(c)  $z = 15$  mm 剖面



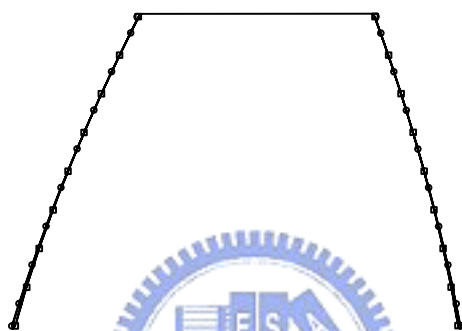
←••••• 24齒      ——— 48齒      •••••→ 96齒

圖 3.8 不同齒數的螺旋刮刨刀創成之 Helipoid 齒輪外形差異圖

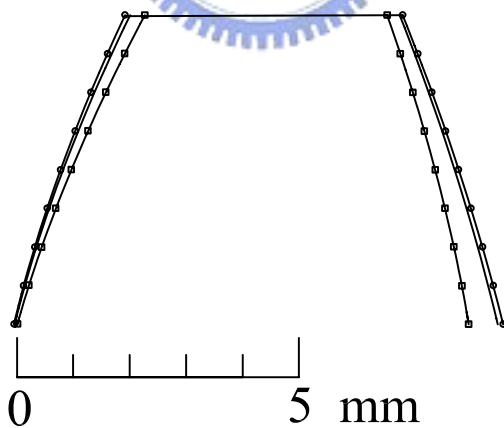
(a)  $z = -15$  mm 剖面



(b)  $z = 0$  mm 剖面



(c)  $z = 15$  mm 剖面



□—○—0度      ————30度      ○—○—45度

圖 3.9 不同螺旋角的螺旋刮刨刀創成之 Helipoid 齒輪外形差異圖