

國 立 交 通 大 學

機 械 工 程 研 究 所

碩 士 論 文

非 90° 交錯角之 ZN 型蝸輪與 ZK 型蝸桿之
接觸分析

Contact Analysis of the ZN type Worm Gear and
the ZK type Worm with a non-ninety-degree
crossing angle

研 究 生：廖健雄

指 導 教 授：蔡忠杓 教授

中 華 民 國 九 十 三 年 六 月

非 90 度交錯角之 ZN 型蝸輪與 ZK 型蝸桿之接觸分析

學生：廖健雄

指導教授：蔡忠杓 博士

國立交通大學機械工程學系

摘 要

一般齒輪當齒數太少時，齒輪之齒面會產生過切現象，尤其是單段高減速比齒輪組其輸入軸之齒數很少時，但是蝸桿蝸輪組可以克服此問題，因此，蝸桿蝸輪組可提供一般正齒輪和螺旋齒輪無法提供的大減速比功能。蝸桿蝸輪組屬於高接觸比的傳動機構，提高接觸比除了可以提高定位精度和穩定度之外，亦可增加蝸桿蝸輪組之負載能力，更可以廣泛地使用在某些特定的環境。本論文所探討之蝸桿蝸輪組具有非 90 度之交錯角，除了可以增加齒輪組之接觸比，亦可藉由改變蝸桿蝸輪組之交錯角以獲得不同之特性，增加其應用性。

本論文將應用齒輪原理以及電腦輔助設計技術，對於 ZN 型蝸輪與 ZK 型蝸桿，分別進行其齒面數學模式的建立，再依據所推導之齒面數學模式和齒面接觸分析技術，探討蝸桿蝸輪組兩嚙合齒面之接觸情形，包括運動誤差、瞬時接觸齒數、平均接觸比、接觸比與接觸齒印。本研究亦討論不同之設計參數與交錯角對於蝸桿蝸輪組之接觸情形，並且探討蝸桿蝸輪組在具有裝配誤差時，其接觸情形與接觸齒印。

Contact Analysis of the ZN Type Worm Gear and the ZK Type Worm with a Non-ninety-degree Crossing Angle

Student: Jian-Xiong Liao

Advisor: Dr. Chung-Biau Tsay

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

Tooth undercutting may occur for conventional gear sets with a small number of teeth, especially for a single stage gear-set with a high reduction gear ratio. Nevertheless, worm gear sets can conquer this issue which spur and helical gear sets could not provide. Worm gear sets are transmission mechanism of high contact ratios. Increasing the contact ratio of a worm gear set not only improve position precision and stability, but also increase load capacity of the worm gear set, which enables it to apply to some particular environments. In this research, the worm gear set with a non-ninety-degree crossing angle not only increase the contact ratio but also obtain different properties by changing the crossing angle of a worm gear set.

In this research, the mathematical models for the ZN type worm gear and the ZK type worm are developed based on the theory of gearing and the technique of computer aided design. According to the developed mathematical models and the tooth contact analysis technique, contact situations of a worm gear set, including kinematic error, instantaneous contact teeth, average contact ratio, contact ratio and contact ellipse are investigated. Besides, the influence of different design parameter and different crossing angle on the contact situation of a worm gear set are also studied. Furthermore, contact situation and contact ellipse of a worm gear set under ideal and error assembly conditions are investigated.

誌謝

本論文能順利完成，首先要感謝指導教授 蔡忠杓博士，感謝您在研究方面不斷地指導，在論文寫作方面更是不厭其煩地指正，而您在為人處事與研究方面的執著與努力更是讓學生佩服，學生除了感激之外，對於您的諄諄教誨更是銘記在心。

在研究時遇到困難與瓶頸，家彰學長、瑞堂學長與冠宇學長總是會伸出援手，與我一起討論，並提供我寶貴的經驗與建議，讓我受益匪淺。在日常生活上，有德浩同學與信宏同學以及實驗室的學弟，讓我在研究之餘仍然擁有歡樂與休閒，在此感謝學長與同學以及各位學弟。

感謝父母親二十多年來辛苦的栽培與養育，在我唸書與研究的過程中不斷地給予鼓勵與支持，使我能心無旁騖地投入研究工作，在此由衷地感謝我的父母親。



目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	viii
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 研究方向	3
第二章 ZK 型蝸桿之數學模式	4
2.1 蝸桿之創成原理	4
2.2 蝸桿之數學模式	4
2.3 ZK 型蝸桿之電腦繪圖	11
第三章 ZN 型蝸輪之數學模式	13
3.1 前言	13
3.2 ZN 型滾刀之數學模式	13
3.3 ZN 型蝸輪之數學模式	18
3.4 蝸輪與滾刀之嚙合方程式	22
3.5 蝸輪之電腦繪圖	25
第四章 蝸桿蝸輪之接觸分析	27
4.1 前言	27
4.2 蝸桿蝸輪之齒面接觸模擬	27
4.3 運動誤差、接觸齒數與接觸比	31

4.4 範例	33
4.5 討論	55
第五章 接觸齒印	59
5.1 前言	59
5.2 齒面外形法	60
5.3 接觸齒印範例	65
5.4 討論	71
第六章 結論與未來展望	76
6.1 結論	76
6.2 未來展望	77
參考文獻	78



表目錄

表 2.1 蝸桿與直邊磨輪之主要參數	11
表 3.1 蝸輪與蝸桿型滾刀之主要參數	25
表 4.1 蝸桿蝸輪組之設計參數	33
表 4.2 理想裝配條件下蝸桿 1 與蝸輪 1 之接觸情形	35
表 4.3 理想裝配條件下蝸桿 2 與蝸輪 1 之接觸情形	36
表 4.4 理想裝配條件下蝸桿 1 與蝸輪 2 之接觸情形	37
表 4.5 理想裝配條件下蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	38
表 4.6 理想裝配條件下蝸桿 1 與蝸輪 3 之接觸情形	39
表 4.7 理想裝配條件下蝸桿 2 與蝸輪 3 之接觸情形	40
表 4.8 中心距誤差 $\Delta A = 0.2 \text{ mm}$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	41
表 4.9 中心距誤差 $\Delta A = -0.2 \text{ mm}$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	42
表 4.10 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	43
表 4.11 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	44
表 4.12 垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	45
表 4.13 垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = -0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	46
表 4.14 中心距誤差 $\Delta A = 0.2 \text{ mm}$ ，水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	47
表 4.15 中心距誤差 $\Delta A = 0.2 \text{ mm}$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	48
表 4.16 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	49
表 4.17 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	50

表 4.18 中心距誤差 $\Delta A = 0.2$ mm，水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	51
表 4.19 中心距誤差 $\Delta A = -0.2$ mm，水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形	52
表 4.20 裝配條件與運動誤差值	54
表 5.1 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪組之主要設計參數	65



圖目錄

圖 2.1 磨輪機構磨削蝸桿示意圖	5
圖 2.2 磨輪刀具面設計及參數示意圖	6
圖 2.3 磨輪磨削蝸桿齒面創成機構示意圖	8
圖 2.4 ZK 型蝸桿之電腦繪圖	12
圖 3.1 直邊車刀之法向剖面與位置關係圖	15
圖 3.2 蝸桿型滾刀之成形機構示意圖	16
圖 3.3 蝸桿滾削蝸輪之滾削機構示意圖	19
圖 3.4 蝸桿滾削蝸輪之滾削機構示意圖(續)	20
圖 3.5 ZN 型蝸輪之電腦繪圖	26
圖 4.1 蝸桿蝸輪組之嚙合機構示意圖	29
圖 4.2 理想裝配條件下蝸桿 1 與蝸輪 1 之接觸齒數與運動誤差	35
圖 4.3 理想裝配條件下蝸桿 2 與蝸輪 1 之接觸齒數與運動誤差	36
圖 4.4 理想裝配條件下蝸桿 1 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差	37
圖 4.5 理想裝配條件下蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差	38
圖 4.6 理想裝配條件下蝸桿 1 與蝸輪 3 之接觸齒數與運動誤差	39
圖 4.7 理想裝配條件下蝸桿 2 與蝸輪 3 之接觸齒數與運動誤差	40
圖 4.8 中心距誤差 $\Delta A = 0.2 \text{ mm}$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差	41
圖 4.9 中心距誤差 $\Delta A = -0.2 \text{ mm}$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差	42
圖 4.10 水平軸向誤差 $\Delta \gamma_h = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差	43
圖 4.11 水平軸向誤差 $\Delta \gamma_h = -0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差	44

圖 4.12 垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動 誤差	45
圖 4.13 垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = -0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動 誤差	46
圖 4.14 中心距誤差 $\Delta A = 0.2 \text{ mm}$ ，水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與 蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差	47
圖 4.15 中心距誤差 $\Delta A = 0.2 \text{ mm}$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與 蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差	48
圖 4.16 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸 輪 2 之接觸齒數與運動誤差	49
圖 4.17 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸 輪 2 之接觸齒數與運動誤差	50
圖 4.18 中心距誤差 $\Delta A = 0.2 \text{ mm}$ ，水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$ ，垂直軸向誤 差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差	51
圖 4.19 中心距誤差 $\Delta A = -0.2 \text{ mm}$ ，水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，垂直軸向誤 差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差	52
圖 4.20 蝸桿與蝸輪在不同壓力角時之接觸點軌跡圖	53
圖 4.21 滾刀與蝸輪在 45° 交錯角下嚙合之接觸線	56
圖 4.22 ZN 型滾刀與 ZK 型蝸桿之剖面示意圖	57
圖 5.1 嚙合齒面與其切平面關係圖	61
圖 5.2 接觸點與其切平面座標關係圖	62
圖 5.3 蝸桿壓力角對接觸齒印之影響(範例一)	67
圖 5.4 蝸輪壓力角對接觸齒印之影響(範例二)	68
圖 5.5 磨輪半徑對接觸齒印之影響(範例三)	69
圖 5.6 蝸桿剖面與磨輪節圓半徑之關係	70

圖 5.7 中心距誤差對接觸齒印之影響(範例四)	72
圖 5.8 水平軸向誤差對接觸齒印之影響(範例四)	73
圖 5.9 垂直軸向誤差對接觸齒印之影響(範例四)	74



第一章 緒論

1.1 前言

蝸桿蝸輪組屬於空間交錯軸之動力傳動元件，常用於交錯軸傳動且需要較大減速比的傳動場合。一般齒輪在設計上是以其節圓(Pitch Circle)或節圓面(Axode)為假想圓或假想面，在節點(Pitch Point)或節線(Pitch Line)處以純滾動來傳遞動力，而節圓半徑決定於齒輪之齒數及模數。然而齒輪在特定模數下當齒數太少時，齒輪之齒面會產生過切現象(Undercutting)。因此，若欲以傳統正齒輪來達到大減速比之傳動時，必須使用多級之減速機構才能達成，且會佔據相當大的空間，非常不方便。而以蝸桿蝸輪組而言，蝸桿之節圓半徑設計上是以蝸桿蝸輪之中心距減去蝸輪之節圓半徑而得，因此，蝸桿之節圓半徑與蝸桿齒數並無直接之關聯，使得蝸桿蝸輪組單級傳動即可實現較大之傳動比(一般約為 8 到 100)，因此，單級之蝸桿蝸輪傳動其減速比可代替多級之一般齒輪傳動所可達到之減速比，不僅可以減少齒輪之數目，更可以簡化傳動機構。同時，當蝸桿導程角小於蝸輪組摩擦角時，可以使蝸桿蝸輪組在傳動時具備自鎖(Self Locking)功能，能夠容忍一定的振動與衝擊。

因為蝸輪組在傳動上是以滑動為主，所以齒面之磨耗也比較嚴重，同時也會因嚙合摩擦而導致齒面有溫升現象產生，因此，必須注入潤滑油於兩嚙合齒面之間以排除熱量並降低磨耗。同時，在設計配對嚙合之蝸桿蝸輪組時，亦需考量設有齒隙(Backlash)以排除齒面磨損所造成之鐵屑或外界雜物，但如果主動輪(蝸桿)有反向旋轉時，過大的齒隙會使得齒輪組產生一段非接觸時間，當使用在高速傳動的場合中，將產生主動輪齒面撞擊被動輪齒面的現象而加速齒面之疲勞破壞，這也是齒輪振動噪音的主要原因。在設計上，提高蝸桿蝸輪組的

接觸比能夠改善上述之缺失，並且能夠降低齒面之平均負載，使得齒輪組能運用在較高負載的場合中，增加其使用性與耐久性。

一般齒輪傳遞動力時在齒輪之節點附近係以滾動為主，而蝸桿蝸輪組傳遞動力則以滑動為主。由於蝸桿蝸輪組係屬於多齒接觸（通常為 2 至 3 齒）之傳動，因此，蝸桿蝸輪組在傳動時較為平穩且噪音也較小。因為蝸桿蝸輪組具備以上優點，所以，被廣泛地應用於連續分度機構、汽車轉向機構、高樓電梯之減速機構等需具有較大減速比的場合。而近年來，隨著工業產品對其定位精密度之要求較高，如雷達、大型天文望遠鏡之赤道儀以及精密工具機工作台之定位機構等，也多採用雙導程蝸桿蝸輪機構。

1.2 文獻回顧

Zheng 等[1][2]人於 1989 年，利用一條動線(Generating Line)在空間中運動所產生之軌跡面，用來表示蝸桿之齒面，並討論其製造加工程序。Janninck[3]則於 1988 年提出齒面外形法(Surface Topology Method)，來模擬利用增徑滾刀(Over Size Hob Cutter)滾削蝸輪時其創成齒面之接觸情形。Bair 和 Tsay[4]於 1998 年則探討了 ZK 型蝸桿蝸輪組之接觸齒數、接觸比和運動誤差(kinematic Error)。Fang 和 Tsay[5]於 2000 年推導出 ZN 型蝸桿蝸輪組之齒面數學模式，並研究利用增徑滾刀來滾削 ZN 型蝸輪及此蝸桿蝸輪組之接觸分析(Tooth Contact Analysis)，除計算蝸桿蝸輪組之接觸點及其接觸齒印(Contact Pattern)的大小與形狀，並探討其嚙合接觸路徑(Contact Path)。陳嘉宏[6]於 2003 年進行非 90° 交錯角之飛刀(Fly Cutter)創成的蝸輪與 ZK 型蝸桿之齒面數學模式推導，並進行蝸桿蝸輪組之接觸分析。

1.3 研究方向

本研究將依據 Litvin[7][8]所發展的齒輪原理並配合電腦輔助設計與分析之技術，針對非 90° 交錯角之蝸桿蝸輪組進行齒面接觸特性與齒印分析的研究。本研究共分為下列四大主題：

- 一.首先利用直邊磨輪機構，以創成法求得 ZK 型蝸桿之齒面數學模式。
- 二.以創成法求得用以切削蝸輪之蝸桿型滾刀(Hob Cutter)之齒面數學模式，並利用所得之蝸桿型滾刀來滾切蝸輪。模擬滾切蝸輪的過程中，則是利用創成法求得蝸輪之齒面數學方程式。
- 三.針對此蝸桿與蝸輪兩齒面間的接觸情形進行其齒面嚙合分析與研究，探討齒輪組在正常裝配狀況下與具有軸向之裝配誤差狀況下，以及 ZK 型蝸桿在不同交錯角下，蝸桿蝸輪組之傳動特性與接觸比。
- 四.接觸齒印的大小及位置對於齒輪的負載能力及壽命有很大的影響。因此，本研究亦將探討各種裝配狀況下的接觸齒印。

第二章 ZK 型蝸桿之數學模式

2.1 蝸桿之創成原理

本研究所探討的蝸桿類型屬於單包絡 ZK 型蝸桿, 是利用錐狀盤形磨輪所創成, 圖 2.1 即為磨輪機構在磨削蝸桿時之示意圖。蝸桿為本研究非 90° 交錯角蝸桿蝸輪組之主動機構。當齒面是以創成法所加工出來時, 因為 ZK 型蝸桿之齒面為磨輪刀具之包絡面, 且被創成之蝸桿齒面與磨輪刀具間之接觸恆保持相切之情況, 因此, 在推導蝸桿齒面數學模式時, 除了需考量磨輪刀具在被切削蝸桿座標系之軌跡方程式外, 還需要考慮磨輪刀具與蝸桿齒面間的嚙合方程式。另外, 磨輪之左刀具面創成了蝸桿之右齒面, 而磨輪之右刀具面則創成了蝸桿之左齒面。

2.2 蝸桿之數學模式

如圖 2.2 所示為磨輪之外形設計及參數, 直邊磨輪刀具方程式及其法向量表示在固聯於磨輪直邊刀刃上之座標系 $S_{gf}(X_{gf}, Y_{gf}, Z_{gf})$ 可表示如下:

$$\mathbf{R}_{gf} = \begin{bmatrix} u_1 \cos \alpha_1 \\ 0 \\ \pm(b_1 - u_1 \sin \alpha_1) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{n}_{gf} = \begin{bmatrix} \sin \alpha_1 \\ 0 \\ \pm \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$b_1 = \frac{\pi m_a}{4} \cos \lambda + r_c \tan \alpha_1$$

其中, u_1 為直邊磨輪刀具之刀面設計參數, α_1 為直邊磨輪刀具的法向壓力角, m_a 為直邊磨輪刀具面之軸向模數(Axial Module), λ 為蝸桿齒面之導程角, r_c 為直邊磨輪刀具面之節圓半徑, 在本章中凡有“±”

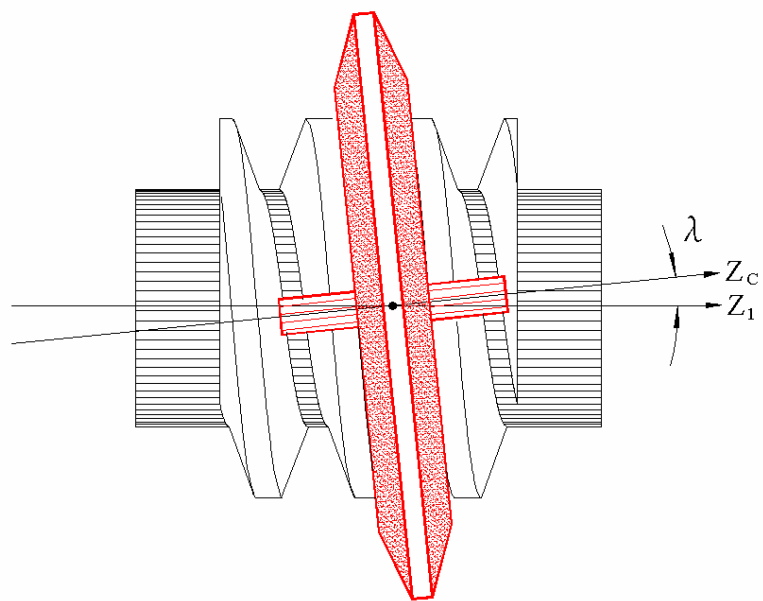
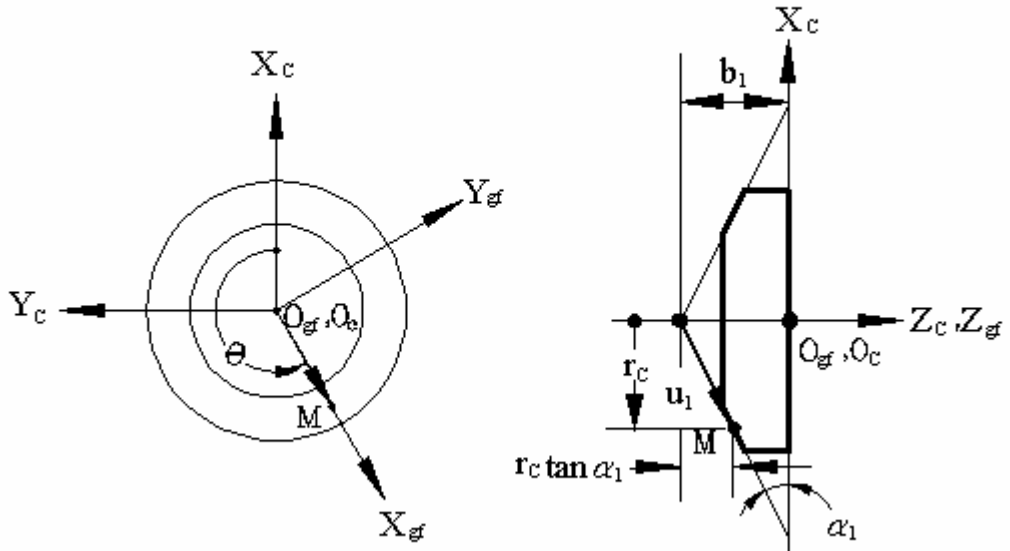


圖 2.1 磨輪機構磨削蝸桿示意圖

(a)左刀具面



(b)右刀具面

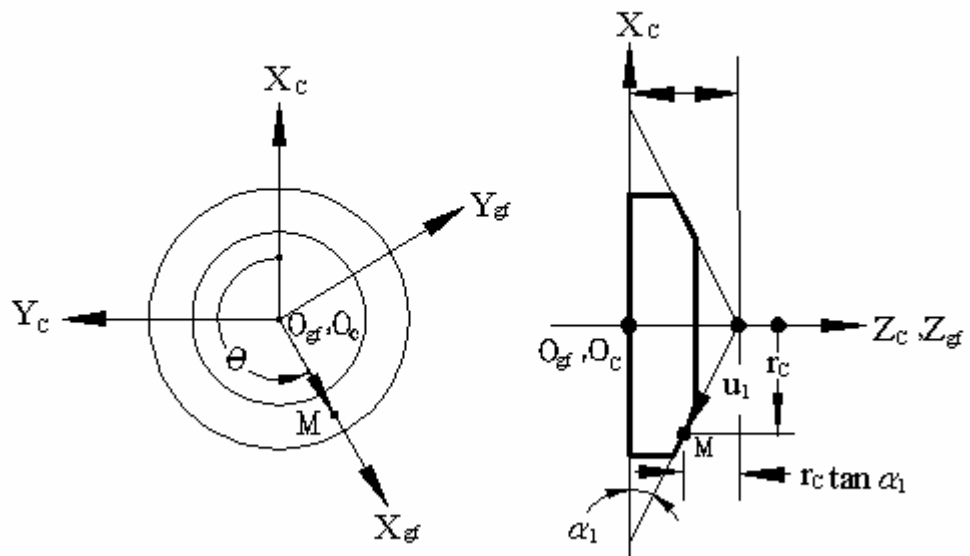


圖 2.2 磨輪刀具面設計及參數示意圖

或“ \mp ”符號，其上方符號均代表磨輪右刀具面或是由磨輪右刀具面所創成之左齒面，下方符號均代表磨輪左刀具面或是由磨輪左刀具面所創成之右齒面。利用齊次座標轉換(Homogeneous Coordinate Transformation)可將刀具面之位置向量及其法向量轉換至固聯於磨輪之參考座標 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 並表示如下：

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \cos\alpha_1 \cos\theta \\ u_1 \cos\alpha_1 \sin\theta \\ \pm(b_1 - u_1 \sin\alpha_1) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{n}_c = \begin{bmatrix} n_{xc} \\ n_{yc} \\ n_{zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\alpha_1 \cos\theta \\ \sin\alpha_1 \sin\theta \\ \pm \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

圖 2.3 為磨削蝸桿機構示意圖， $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 座標系為磨輪之座標系， $S_{fc}(X_{fc}, Y_{fc}, Z_{fc})$ 座標系為參考座標系， $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 座標系為蝸桿之座標系，圖中所示之符號 p_1 表示蝸桿齒面之導程， ϕ_1 則為蝸桿做螺旋運動之旋轉角。經由下列之齊次座標轉換，即可將磨輪刀具面之軌跡方程式表示於蝸桿之 S_1 座標系如下：

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_{1,1f} \mathbf{M}_{1f,fc} \mathbf{M}_{fc,c} \mathbf{R}_c = \mathbf{M}_{1,c} \mathbf{R}_c \quad (2.5)$$

其中

$$\mathbf{M}_{fc,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{1f,fc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -p_1\phi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

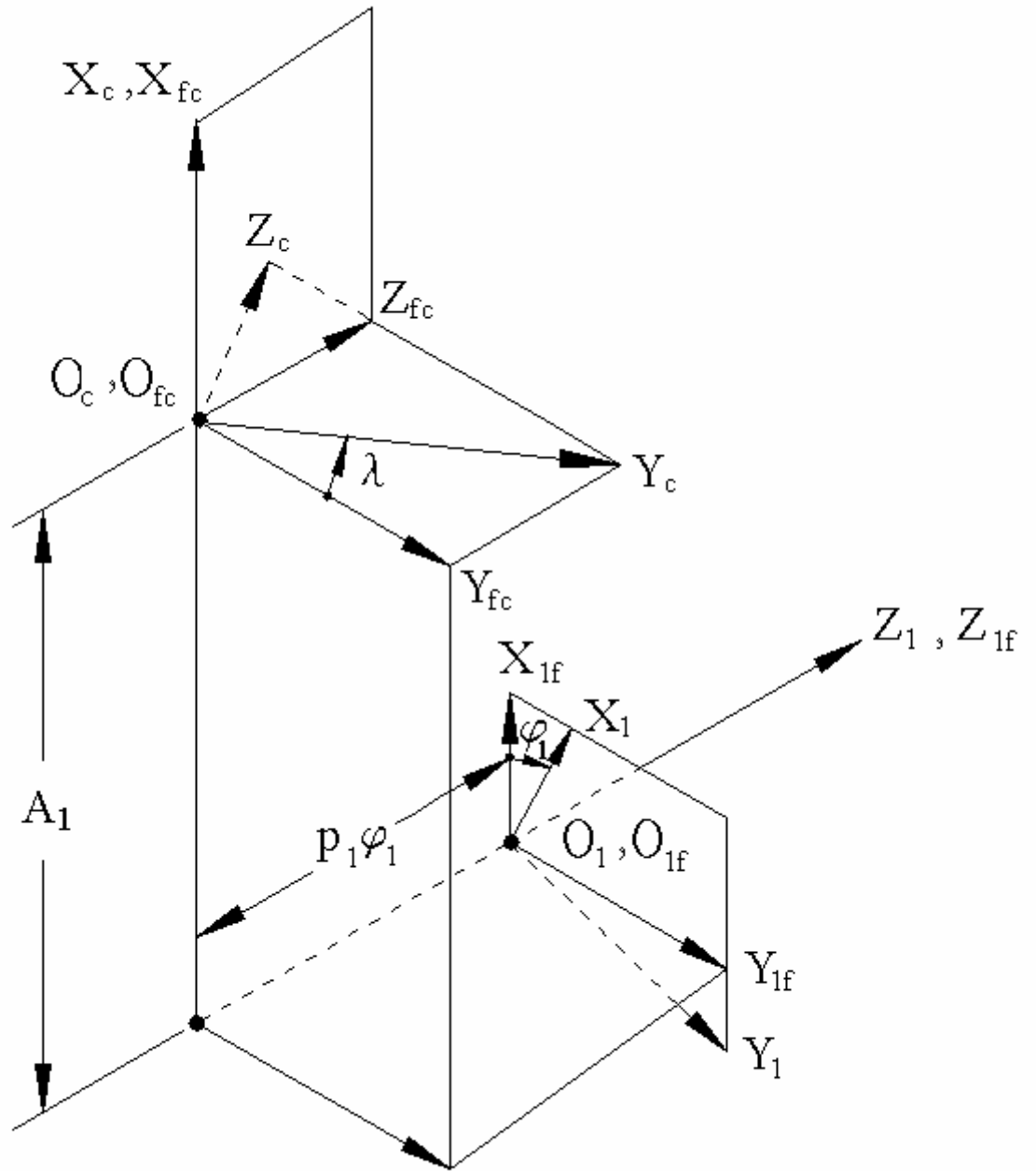


圖 2.3 磨輪磨削蝸桿齒面創成機構示意圖

$$\mathbf{M}_{1,1f} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

亦即由磨輪座標系 S_c 轉換至蝸桿的座標系 S_1 之齊次座標轉換矩陣可表示如下：

$$\mathbf{M}_{1,c} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \cos\lambda & -\sin\varphi_1 \sin\lambda & A_1 \cos\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \cos\lambda & -\cos\varphi_1 \sin\lambda & -A_1 \sin\varphi_1 \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda & -p_1\varphi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將(2.3)式帶入(2.5)式即可求出磨輪刀具面表示於蝸桿座標系之軌跡方程式如下：

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_c \cos\varphi_1 + Y_c \sin\varphi_1 \cos\lambda - Z_c \sin\varphi_1 \sin\lambda + A_1 \cos\varphi_1 \\ -X_c \sin\varphi_1 + Y_c \cos\varphi_1 \cos\lambda - Z_c \cos\varphi_1 \sin\lambda - A_1 \sin\varphi_1 \\ Y_c \sin\lambda + Z_c \cos\lambda - p_1\varphi_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

同理，利用向量之座標轉換可將 S_c 座標系上的齒面單位法向量 \mathbf{n}_c 表示在蝸桿座標系 S_1 如下：

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{L}_{1,fc} \mathbf{L}_{fc,c} \mathbf{n}_c$$

其中

$$\mathbf{L}_{fc,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & -\sin\lambda \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{1,fc} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，可求出磨輪之刀具面法向量表示在蝸桿座標系如下：

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{xc} \cos\varphi_1 + n_{yc} \sin\varphi_1 \cos\lambda - n_{zc} \sin\varphi_1 \sin\lambda \\ -n_{xc} \sin\varphi_1 + n_{yc} \cos\varphi_1 \cos\lambda - n_{zc} \cos\varphi_1 \sin\lambda \\ n_{yc} \sin\lambda + n_{zc} \cos\lambda \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

磨輪在磨削蝸桿的過程中，磨輪和蝸桿在每一瞬間皆呈互相嚙合之狀態，亦即兩齒面既不分離也不嵌入對方的齒面內。根據這個概念可以了解，兩齒面的相對速度 $\mathbf{V}_c^{(1c)}$ 必落於其共同的切平面，而共同法向量又與切平面互相垂直，因此，相對速度與齒面法向量之內積(Dot Product)必為零。若將上述之關係用數學式子來表示，即是兩齒面之嚙合方程式，此方程式表示於 S_c 座標係如下：

$$\mathbf{n}_c^{(1c)} \cdot \mathbf{V}_c^{(1c)} = 0 \quad (2.8)$$

磨輪與蝸桿之相對速度可表示為：

$$\mathbf{V}_c^{(1c)} = \mathbf{V}_c^{(1)} - \mathbf{V}_c^{(c)} \quad (2.9)$$

在此假設磨輪為固定不動，即 $\mathbf{V}_c^{(c)} = 0$ ，而 $\mathbf{V}_c^{(1)}$ 為蝸桿齒面速度表示於 S_c 座標系，由圖 2.3 可知

$$\mathbf{V}_c^{(1)} = \boldsymbol{\omega}_c^{(1)} \times \mathbf{R}_c^{(c)} + \boldsymbol{\omega}_c^{(1)} \times \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_c^{(c)} + \mathbf{V}_c^{(t1)} \quad (2.10)$$

$\mathbf{V}_c^{(t1)}$ 代表線速度 $\mathbf{V}_{fc}^{(1)}$ 由 S_{fc} 座標系轉換至 S_c 座標系，而 $\boldsymbol{\omega}_1$ 為蝸桿之旋轉角速度， $\boldsymbol{\omega}_c^{(1)}$ 為蝸桿旋轉角速度表示在 S_c 座標系上。蝸桿與磨輪兩座標系之原點位置向量 $\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_c$ 可表示在 S_c 座標系如下：

$$\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_c^{(c)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_c^{(fc)} = \begin{bmatrix} A_1 \\ -p_1 \phi_1 \sin\lambda \\ -p_1 \phi_1 \cos\lambda \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

又

$$\boldsymbol{\omega}_c^{(1)} = \mathbf{L}_{c,fc} \boldsymbol{\omega}_{fc}^{(1)} = \omega_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\lambda \\ \cos\lambda \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{V}_c^{(t1)} = \mathbf{L}_{c,fc} \mathbf{V}_{fc}^{(1)} = \omega_1 \begin{bmatrix} 0 \\ p_1 \sin\lambda \\ p_1 \cos\lambda \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

其中

$$\mathbf{L}_{c,fc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix}$$

整理(2.3)、(2.11)、(2.12)和(2.13)各式並代入(2.10)式可得

$$\mathbf{V}_c^{(1)} = \omega_1 \begin{bmatrix} \pm(b_1 - u_1 \sin\alpha_1)\sin\lambda - u_1 \cos\alpha_1 \sin\theta \cos\lambda \\ u_1 \cos\alpha_1 \cos\theta \cos\lambda + p_1 \sin\lambda + A_1 \cos\lambda \\ -u_1 \cos\alpha_1 \cos\theta \sin\lambda + p_1 \cos\lambda - A_1 \sin\lambda \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

若將(2.4)、(2.9)和(2.14)三式整理後代入嚙合方程式(2.8)中，再經過化簡後即可得到磨輪刀具面與蝸桿齒面之嚙合方程式如下，其刀具之設計參數 u_1 可以用其它的參數來表示：

$$u_1 = b_1 \sin\alpha_1 - (A_1 - p_1 \cot\lambda) \frac{\cos\alpha_1}{\cos\theta} \pm (A_1 \cot\lambda + p_1) \sin\alpha_1 \tan\theta \quad (2.15)$$

2.3 ZK 型蝸桿之電腦繪圖

表 2.1 為本研究所探討之 ZK 型蝸桿之主要設計參數，茲將先前所推導的蝸桿之齒面軌跡方程式和齒面的嚙合方程式聯立，用數值方法求其齒面之解析解，加上電腦輔助繪圖軟體，即可繪出蝸桿之外形，如圖 2.4 所示。

表 2.1 蝸桿與直邊磨輪之主要參數

名稱	代號	關係式	數值
蝸桿旋向			右旋
蝸桿齒數	T_1		3
磨輪法向壓力角	α_1	= 蝸桿法向壓力角	25°
磨輪導程角	λ	= 蝸桿導程角	30°
磨輪軸向模數	m_a	= 蝸桿軸向模數	4.619 mm
磨輪節圓半徑	r_c		20.0 mm
磨輪齒頂半徑	r_{ca}		25.0 mm
磨輪齒根半徑	r_{cf}		14.0 mm
蝸桿節圓半徑	r_1		12.0 mm
蝸桿單位角度之導程	p_1		6.928mm/rad
蝸桿與磨輪之中心距	A_1		32.0 mm

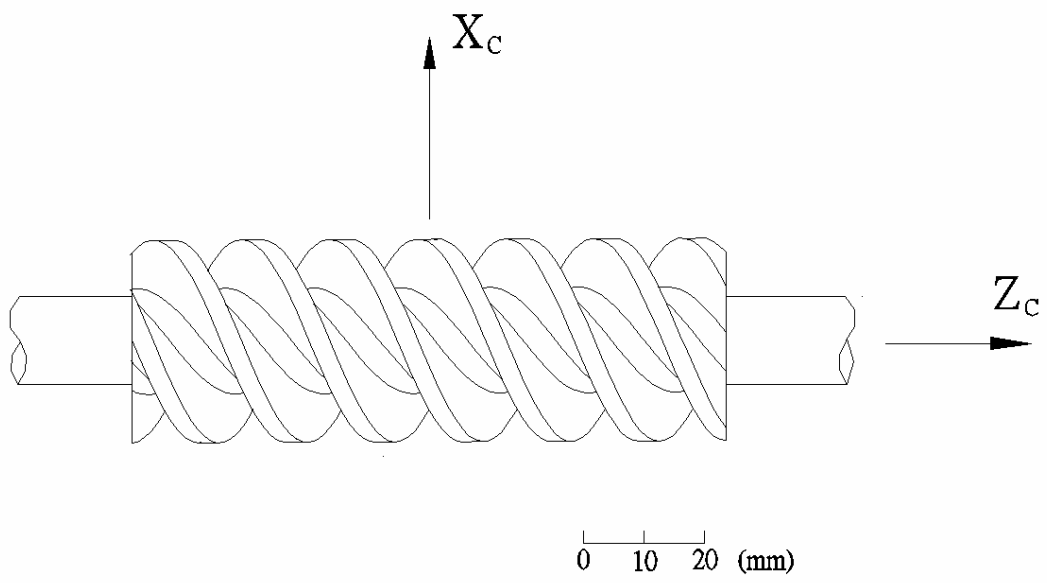


圖 2.4 ZK 型蝸桿之電腦繪圖

第三章 ZN 型蝸輪之數學模式

3.1 前言

在蝸輪的製造上主要有兩種方式，一種是以飛刀切削，另一種是用滾刀滾削。而這兩種切削方式均是模擬蝸桿與蝸輪之嚙合情形來切製蝸輪齒面。一般而言，飛刀切削的優點是少量製造的成本低且齒形精度高，但缺點是切削效率低。滾刀滾削的優點是切製效率高，適合大量生產，目前工業上多以滾刀來滾削蝸輪。當以滾刀滾削蝸輪時，滾刀的外型與蝸桿外型相同，蝸輪的齒面可以用一把與蝸桿外型相同的滾刀滾削而成，因此，可根據滾刀與蝸輪的滾削機構和蝸桿型滾刀的刀面方程式，進而推導出蝸輪之齒面方程式。在本章中，首先推導直邊車刀之數學模式，然後利用座標轉換將車刀之軌跡方程式轉換至 ZN 型滾刀之刀面座標系上，便可以求得 ZN 型滾刀之刀面方程式。接著依據 ZN 型滾刀滾削蝸輪之滾削方式建立 ZN 型蝸輪之滾削機構，並且推導滾刀與被切削之蝸輪間的相對運動速度，再根據 ZN 型蝸桿滾刀之刀面方程式與蝸輪之滾削機構，推導出 ZN 型蝸輪之齒面數學模式。

3.2 ZN 型滾刀之數學模式

圖 3.1(a)為本研究用以切削 ZN 型滾刀之車刀剖面示意圖，首先定義此直邊車刀之刀面方程式，並表示在 $S_l(X_l, Y_l, Z_l)$ 座標系如下：

$$\mathbf{R}_l = \begin{bmatrix} X_l \\ Y_l \\ Z_l \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rt + l \cos \alpha_2 \\ 0 \\ \pm l \sin \alpha_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

在此 l 為直邊刀具之刀面設計參數，其中 $l_{\min} \leq l \leq l_{\max}$ 。如圖 3.1(a)所示， α_2 為車刀之法向壓力角。在方程式(3.1)中，其±符號之上方符號

代表車刀之左邊刀具面，下方符號則代表車刀之右邊刀具面，以下有關車刀和蝸桿之推導，上方符號皆代表由車刀左刀具面所創成蝸桿之右齒面，下方符號則代表由車刀右刀具面所創成蝸桿之左齒面。圖 3.1(b) 為車刀相對於蝸桿型滾刀之位置關係圖。由於 ZN 型滾刀刀面是由一直邊刀具傾斜一角度所切削而成。因此，在推導 ZN 型蝸桿滾刀之數學模式的過程中，僅需考慮刀具在滾刀座標系 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 之軌跡方程式，即可求得 ZN 型滾刀之刀面方程式。

如圖 3.2 所示，ZN 型滾刀之切削機構可由滾刀座標系 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 與車刀座標系 $S_l(X_l, Y_l, Z_l)$ 之相對運動關係來模擬。蝸桿型滾刀座標系 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 之 Z_h 軸與車刀法向外形 $S_l(X_l, Y_l, Z_l)$ 座標系之 Z_l 軸夾一導程角 λ ，座標系 $S_{lf}(X_{lf}, Y_{lf}, Z_{lf})$ 為參考座標系，若將車刀之法向外形相對於 Z_{lf} 軸做螺旋運動，即可利用軌跡法求得 ZN 型蝸桿滾刀之齒面數學模式。其座標轉換如下所示：

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{M}_{h,lf} \mathbf{M}_{lf,l} \mathbf{R}_l = \mathbf{M}_{h,l} \mathbf{R}_l \quad (3.2)$$

其中

$$\mathbf{M}_{lf,l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{h,lf} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -P_2\varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以 $\mathbf{M}_{h,l} = \mathbf{M}_{h,lf} \mathbf{M}_{lf,l}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \cos\lambda & -\sin\varphi_2 \sin\lambda & 0 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \cos\lambda & -\cos\varphi_2 \sin\lambda & 0 \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda & -P_2\varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

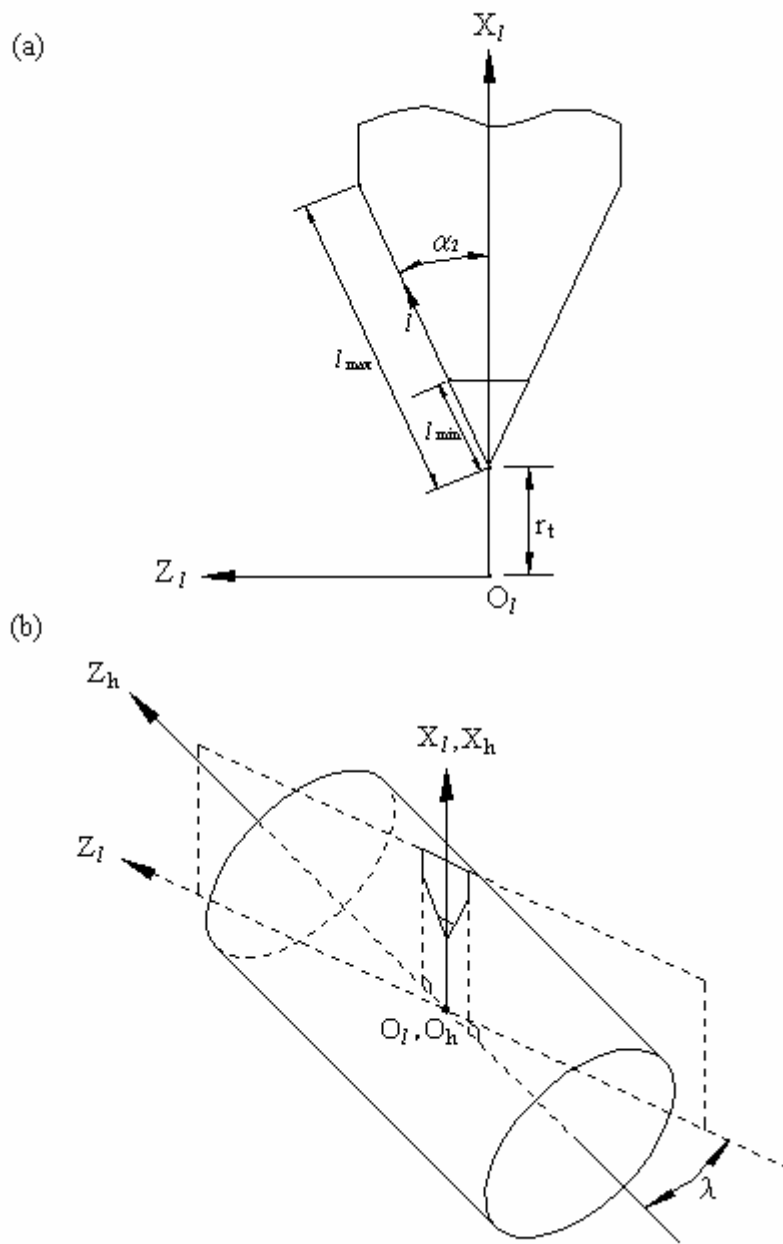


圖 3.1 直邊車刀之法向剖面與位置關係圖

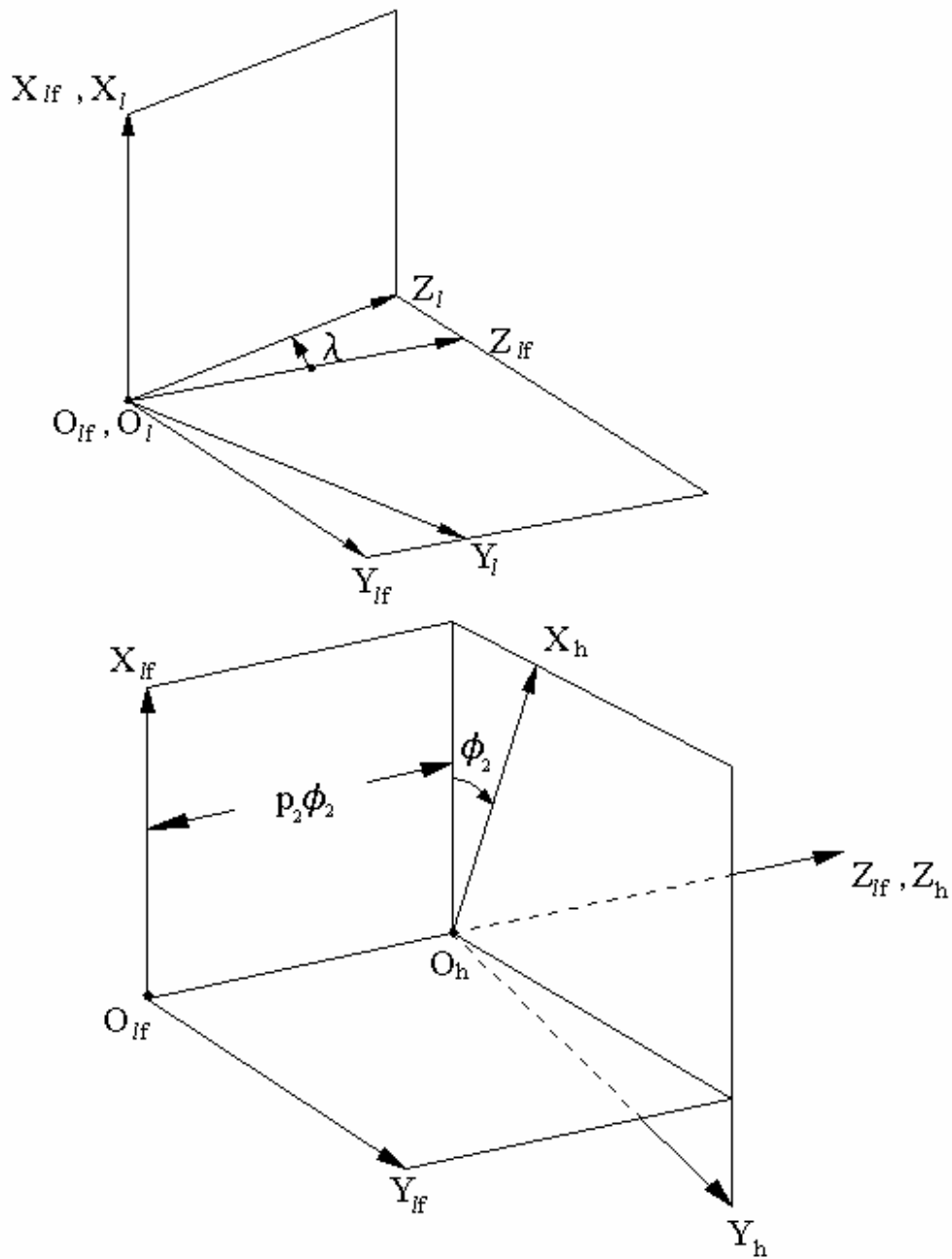


圖 3.2 蝸桿型滾刀之成形機構示意圖

經過整理可求得 ZN 型蝸桿滾刀之齒面方程式表示在 S_h 座標系如下：

$$\mathbf{R}_h = \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ Z_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (rt+l\cos\alpha_2)\cos\varphi_2 \mp l\sin\alpha_2 \sin\varphi_2 \sin\lambda \\ -(rt+l\cos\alpha_2)\sin\varphi_2 \mp l\sin\alpha_2 \cos\varphi_2 \sin\lambda \\ \pm l\sin\alpha_2 \cos\lambda - P_2\varphi_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

由於蝸桿型滾刀之齒面為一規則曲面，因此，可對滾刀之兩個齒面參數之偏微分做外積(Cross Product)，求其齒面之法向量，其表示如下：

$$\mathbf{N}_h = \frac{\partial \mathbf{R}_h}{\partial l} \times \frac{\partial \mathbf{R}_h}{\partial \varphi_2} \quad (3.4)$$

將(3.1)式代入(3.3)式，再分別對 l 與 φ_2 進行偏微分可得到下面兩式：

$$\frac{\partial \mathbf{R}_h}{\partial l} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 \cos\varphi_2 \mp \sin\alpha_2 \sin\varphi_2 \sin\lambda \\ -\cos\alpha_2 \sin\varphi_2 \mp \sin\alpha_2 \cos\varphi_2 \sin\lambda \\ \pm \sin\alpha_2 \cos\lambda \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_h}{\partial \varphi_2} = \begin{bmatrix} -(rt+l\cos\alpha_2)\sin\varphi_2 \mp l\sin\alpha_2 \cos\varphi_2 \sin\lambda \\ -(rt+l\cos\alpha_2)\cos\varphi_2 \pm l\sin\alpha_2 \sin\varphi_2 \sin\lambda \\ -P_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

將(3.5)和(3.6)式代入(3.4)式，即可求得 ZN 型蝸桿滾刀之齒面法向量如下表示：

$$\mathbf{N}_h = \begin{bmatrix} N_{xh} \\ N_{yh} \\ N_{zh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{Nh} \sin\varphi_2 - B_{Nh} \cos\varphi_2 \\ B_{Nh} \sin\varphi_2 + A_{Nh} \cos\varphi_2 \\ C_{Nh} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

其中

$$A_{Nh} = P_2 \cos\alpha_2 - l\sin^2\alpha_2 \sin\lambda \cos\lambda$$

$$B_{Nh} = \mp((rt+l\cos\alpha_2)\sin\alpha_2 \cos\lambda + P_2 \sin\alpha_2 \sin\lambda)$$

$$C_{Nh} = -rt\cos\alpha_2 - l\sin^2\alpha_2 \sin^2\lambda - l\cos^2\alpha_2$$

3.3 ZN 型蝸輪之數學模式

至此已求得 ZN 型蝸桿滾刀之齒面方程式 \mathbf{R}_h 和法向量 \mathbf{N}_h 。ZN 型滾刀滾切蝸輪之滾削機構，如圖 3.3 所示，座標系 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 與 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 分別為固聯在蝸輪與蝸桿型滾刀之座標系，而座標系 $S_g(X_g, Y_g, Z_g)$ 和 $S_o(X_o, Y_o, Z_o)$ 則分別為蝸輪與蝸桿型滾刀之參考座標系， Z_g 軸為蝸輪之旋轉軸， Z_o 軸為蝸桿型滾刀之旋轉軸， γ 為蝸輪旋轉軸與蝸桿型滾刀之旋轉軸所夾之交錯角(Crossed Angle)， A_2 為此兩旋轉軸之最短距離。如圖 3.3(a)所示，固聯於 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 座標系之蝸輪，相對於其參考座標系 $S_g(X_g, Y_g, Z_g)$ 是沿著 Z_2 旋轉軸方向以 ϕ_2 之角度作左旋(順時鐘)方向旋轉；如圖 3.3(b)所示，固聯於 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 座標系之 ZN 型蝸桿滾刀，相對於其參考座標系 $S_o(X_o, Y_o, Z_o)$ 是沿著 Z_o 軸方向以 ϕ_1 之角度作右旋(反時鐘)方向旋轉。依據圖 3.3 所示滾刀與蝸輪之座標系，配合圖 3.4 之蝸輪滾削時蝸桿與蝸輪之關係示意圖，即可將蝸桿型滾刀之齒面方程式以下列之齊次座標轉換矩陣轉換至 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 座標系如下：

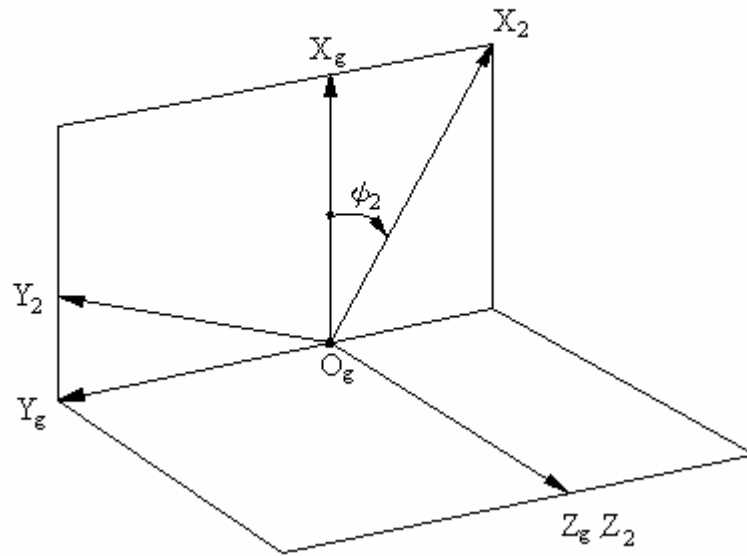
$$\begin{aligned}\mathbf{R}_2(u_2, \phi_2, \phi_1) &= \mathbf{M}_{2,g} \mathbf{M}_{g,o} \mathbf{M}_{o,h} \mathbf{R}_h(u_2, \phi_2) \\ &= \mathbf{M}_{2,h} \mathbf{R}_h(u_2, \phi_2)\end{aligned}\quad (3.8)$$

其中

$$\mathbf{M}_{o,h} = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & 0 & 0 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{g,o} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -A_2 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) 蝸輪座標系 S_2 與參考座標系 S_ε



(b) 滾刀座標系 S_h 與參考座標系 S_o

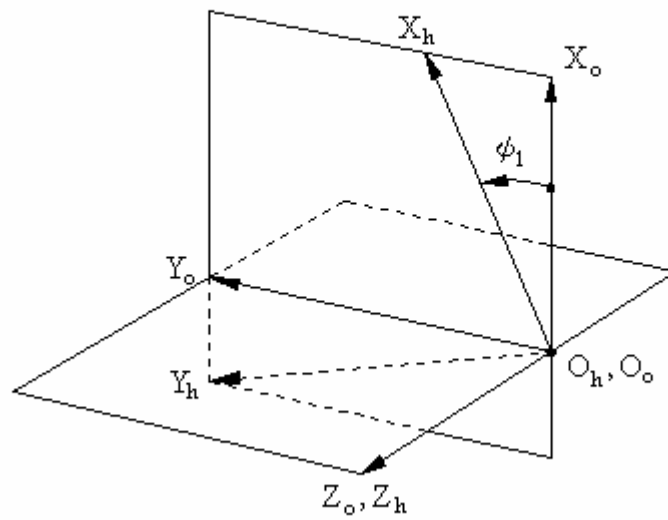


圖3.3 蝸桿滾削蝸輪之滾削機構示意圖

(c) 蝸桿與蝸輪之參考座標系

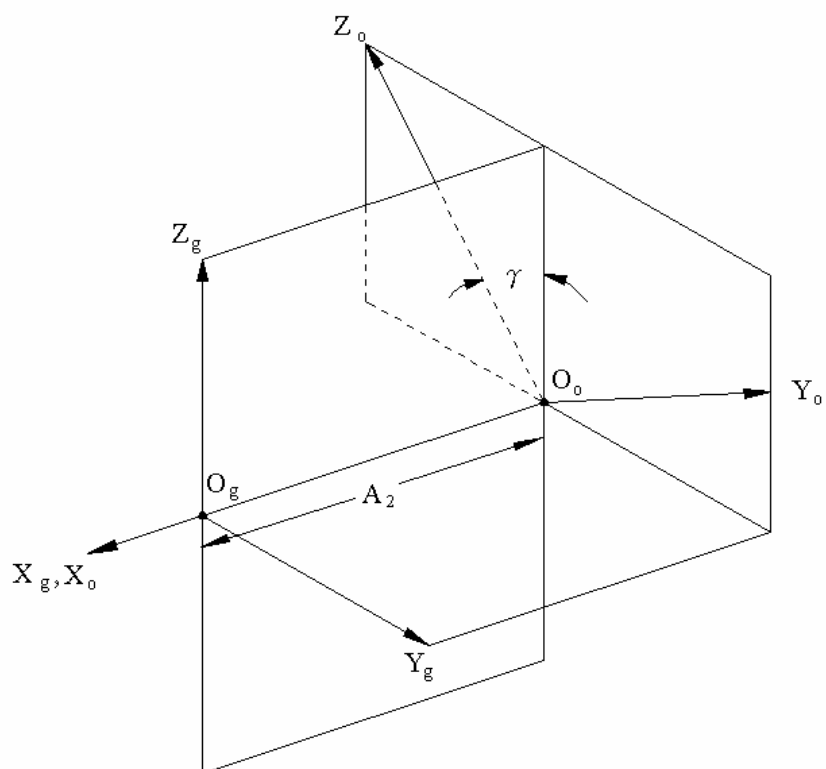


圖 3.4 蝸桿滾削蝸輪之滾削機構示意圖(續)

$$\text{及 } \mathbf{M}_{2,g} = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 & 0 & 0 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

得 $\mathbf{M}_{2,h} = \mathbf{M}_{2,g} \mathbf{M}_{g,o} \mathbf{M}_{o,h}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \sin\phi_2 \sin\gamma & -A_2 \cos\phi_2 \\ a_{21} & a_{22} & -\cos\phi_2 \sin\gamma & -A_2 \sin\phi_2 \\ \sin\gamma \sin\phi_1 & \sin\gamma \cos\phi_1 & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin\phi_2 \cos\gamma \sin\phi_1 + \cos\phi_2 \cos\phi_1 \\ a_{12} &= -\sin\phi_2 \cos\gamma \cos\phi_1 - \cos\phi_2 \sin\phi_1 \\ a_{21} &= \cos\phi_2 \cos\gamma \sin\phi_1 + \sin\phi_2 \sin\phi_1 \\ a_{22} &= \cos\phi_2 \cos\gamma \cos\phi_1 - \sin\phi_2 \sin\phi_1 \end{aligned}$$

依據圖 3.4 可知，蝸桿型滾刀旋轉軸與蝸輪旋轉軸之間的最短距離可由下式表示之：

$$A_2 = r_h + r_2 \quad (3.9)$$

r_h 和 r_2 分別為 ZN 型滾刀與 ZN 型蝸輪之節圓半徑。由於在切削蝸輪之過程中，蝸輪與滾刀為共軛運動對，因此，滾刀與蝸輪之旋轉角 ϕ_1 和 ϕ_2 必滿足下列之關係式：

$$\phi_2 = m_{2h} = \frac{|\omega_2|}{|\omega_h|} = \frac{T_h}{T_2} \phi_1 \quad (3.10)$$

其中 T_h 和 T_2 分別為蝸桿型滾刀之齒數與蝸輪之齒數，而 ω_h 和 ω_2 則分別為蝸輪切削之過程中，蝸桿型滾刀與蝸輪之轉速。將(3.3)式代入(3.8)式即可求得 ZN 型蝸輪之齒面方程式：

$$\mathbf{R}_2(u_2, \phi_2, \phi_1) = \begin{bmatrix} a_{11}X_h + a_{12}Y_h + \sin\gamma\sin\phi_2Z_h - A_2\cos\phi_2 \\ a_{21}X_h + a_{22}Y_h - \sin\gamma\cos\phi_2Z_h - A_2\sin\phi_2 \\ \sin\gamma\sin\phi_1X_h + \sin\gamma\cos\phi_1Y_h + \cos\gamma Z_h \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

其中 X_h 、 Y_h 和 Z_h 分別表示於(3.3)式中。

因為 ZN 型蝸輪之齒面是由 ZN 型滾刀之刀具面所創成，因此，利用下列之齊次座標轉換矩陣方程式亦可將滾刀刀具之法向量轉換至蝸輪之座標系 S_2 ：

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_2(u_2, \phi_2, \phi_1) &= \mathbf{L}_{2,g} \mathbf{L}_{g,o} \mathbf{L}_{o,h} \mathbf{N}_h(u_2, \phi_2) \\ &= \mathbf{L}_{2,h} \mathbf{N}_h(u_2, \phi_2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中

$$\mathbf{L}_{o,h} = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & 0 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{g,o} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{2,g} = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 & 0 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



將(3.7)式代入(3.12)式，可求得 ZN 型蝸輪之齒面法向量如下：

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} N_{x2} \\ N_{y2} \\ N_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}N_{xh} + a_{12}N_{yh} + \sin\gamma\sin\phi_2N_{zh} \\ a_{21}N_{xh} + a_{22}N_{yh} - \sin\gamma\cos\phi_2N_{zh} \\ \sin\gamma\sin\phi_1N_{xh} + \sin\gamma\cos\phi_1N_{yh} + \cos\gamma N_{zh} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.4 ZN 型蝸輪與滾刀之嚙合方程式

要求得蝸輪與滾刀的嚙合方程式，必須將滾刀刀具面和蝸輪齒面速度及滾刀之刀具面法向量全部表示在同一座標系，如 S_h 座標系，所以必須經過下列之齊次座標轉換矩陣：

$$\mathbf{M}_{h,g} = \mathbf{M}_{h,o} \mathbf{M}_{o,g} \quad (3.14)$$

其中

$$\mathbf{M}_{h,o} = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & \sin\phi_1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{o,g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & A_2 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{則 } \mathbf{M}_{h,g} = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & \sin\phi_1 \cos\gamma & \sin\phi_1 \sin\gamma & A_2 \cos\phi_1 \\ -\sin\phi_1 & \cos\phi_1 \cos\gamma & \cos\phi_1 \sin\gamma & -A_2 \sin\phi_1 \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

同理，向量之座標轉換矩陣如下：

$$\mathbf{L}_{h,g} = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & \sin\phi_1 \cos\gamma & \sin\phi_1 \sin\gamma \\ -\sin\phi_1 & \cos\phi_1 \cos\gamma & \cos\phi_1 \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

蝸輪之旋轉角速度可表示在 $S_g(X_g, Y_g, Z_g)$ 座標系如下：

$$\boldsymbol{\omega}_2^{(g)} = \frac{d\phi_2}{dt} \mathbf{k}_g = -\omega_2 \mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

將(3.17)式之蝸輪旋轉角速度經過座標轉換可表示在 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 座標系如下：

$$\boldsymbol{\omega}_2^{(h)} = \mathbf{L}_{h,g} \boldsymbol{\omega}_2^{(g)} = \omega_2 \begin{bmatrix} -\sin\phi_1 \sin\gamma \\ -\cos\phi_1 \sin\gamma \\ -\cos\gamma \end{bmatrix} = \omega_h \begin{bmatrix} -m_{2h} \sin\phi_1 \sin\gamma \\ -m_{2h} \cos\phi_1 \sin\gamma \\ -m_{2h} \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

同理，滾刀之旋轉角速度 ω_h 表示在 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 座標系為：

$$\boldsymbol{\omega}_h^{(h)} = \frac{d\phi_1}{dt} \mathbf{k}_h = \omega_h \mathbf{k}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_h \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

滾刀與蝸輪兩者之中心距位置向量 $\mathbf{O}_h \mathbf{O}_2$ 表示於 S_0 座標系為：

$$\mathbf{O}_h \mathbf{O}_2^{(o)} = A_2 \mathbf{i}_o = \begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

利用(3.14)式所示之齊次座標轉換矩陣，可以把中心距位置向量表示在 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 座標系如下：

$$\mathbf{O}_h \mathbf{O}_2^{(h)} = \mathbf{L}_{h,o} \mathbf{O}_h \mathbf{O}_2^{(o)} = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & \sin\phi_1 & 0 \\ -\sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 \cos\phi_1 \\ -A_2 \sin\phi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

因此，蝸桿型滾刀與蝸輪工件之相對速度表示在 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 座標系可由下式求得：

$$\mathbf{V}_{h2}^{(h)} = (\boldsymbol{\omega}_h^{(h)} - \boldsymbol{\omega}_2^{(h)}) \times \mathbf{R}_h - \mathbf{O}_h \mathbf{O}_2^{(h)} \times \boldsymbol{\omega}_2^{(h)} \quad (3.22)$$

將(3.3)、(3.18)、(3.19)和(3.21)式代入(3.22)式，即可求得蝸桿型滾刀與蝸輪之相對速度表示於 S_h 座標系如下：

$$\mathbf{V}_{h2}^{(h)} = \boldsymbol{\omega}_h \begin{bmatrix} (m_{2h} \cos\phi_1 \sin\gamma)Z_h - (1+m_{2h} \cos\gamma)Y_h - A_2 m_{2h} \sin\phi_1 \cos\gamma \\ (1+m_{2h} \cos\gamma)X_h - (m_{2h} \sin\phi_1 \sin\gamma)Z_h - A_2 m_{2h} \cos\phi_1 \cos\gamma \\ (m_{2h} \sin\phi_1 \sin\gamma)Y_h - (m_{2h} \cos\phi_1 \sin\gamma)X_h + A_2 m_{2h} \sin\gamma \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

根據嚙合條件式，將方程式(3.7)式與(3.23)式做內積，即可求得蝸桿型滾刀刀具面與蝸輪工件齒面的嚙合方程式如下：

$$\mathbf{N}_h^{(h)} \cdot \mathbf{V}_{h2}^{(h)} = 0 \quad (3.24)$$

因為蝸輪之齒面是由蝸桿型滾刀所創成，因此，ZN 型蝸輪之齒面的數學模式可由 ZN 型蝸桿滾刀在 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 座標系之軌跡方程式(3.11)式，與上述之嚙合方程式(3.24)式聯立組成。

3.5 蝸輪之電腦繪圖

表 3.1 為本研究所探討之 ZN 型蝸桿滾刀與所創成之 ZN 型蝸輪的主要設計參數，依據本章所推導 ZN 型蝸輪之齒面軌跡方程式(3.11)式和蝸輪與蝸桿之齒面嚙合方程式(3.24)式，即可利用數值解之方法求得其齒面之解析解，然後再配合電腦繪圖的方法即可繪出 ZN 型蝸輪之外形。

表 3.1 蝸輪與蝸桿型滾刀之主要參數

名稱	代號	關係式	數值
滾刀旋轉方向			右旋
蝸輪旋轉方向			左旋
蝸桿蝸輪組之交錯角	γ		45°
蝸輪之螺旋角	β		15°
蝸輪之節圓半徑	r_2		60.045 mm
蝸輪之齒面寬			50 mm
中心距	A_2	$= r_2 + r_c$	72.045 mm
蝸輪齒數	T_2		29
滾刀齒數	T_h		3
滾刀法向壓力角	α_2		20°
滾刀導程角	λ	$= \text{ZK 型蝸桿導程角}$	30°
滾刀法向模數	m	$= \text{ZK 型蝸桿法向模數}$	4.0 mm/齒
滾刀節圓半徑	r_l	$= \text{ZK 型蝸桿節圓半徑}$	12.0 mm
滾刀工作直邊最小值	l_{\min}		6.0 mm
滾刀工作直邊最大值	l_{\max}		13.5 mm
直邊刀具面之外型參數	r_t		3.373 mm
滾刀法向齒寬	S_n		6.283 mm
滾刀單位角度之導程	p		6.928mm/rad

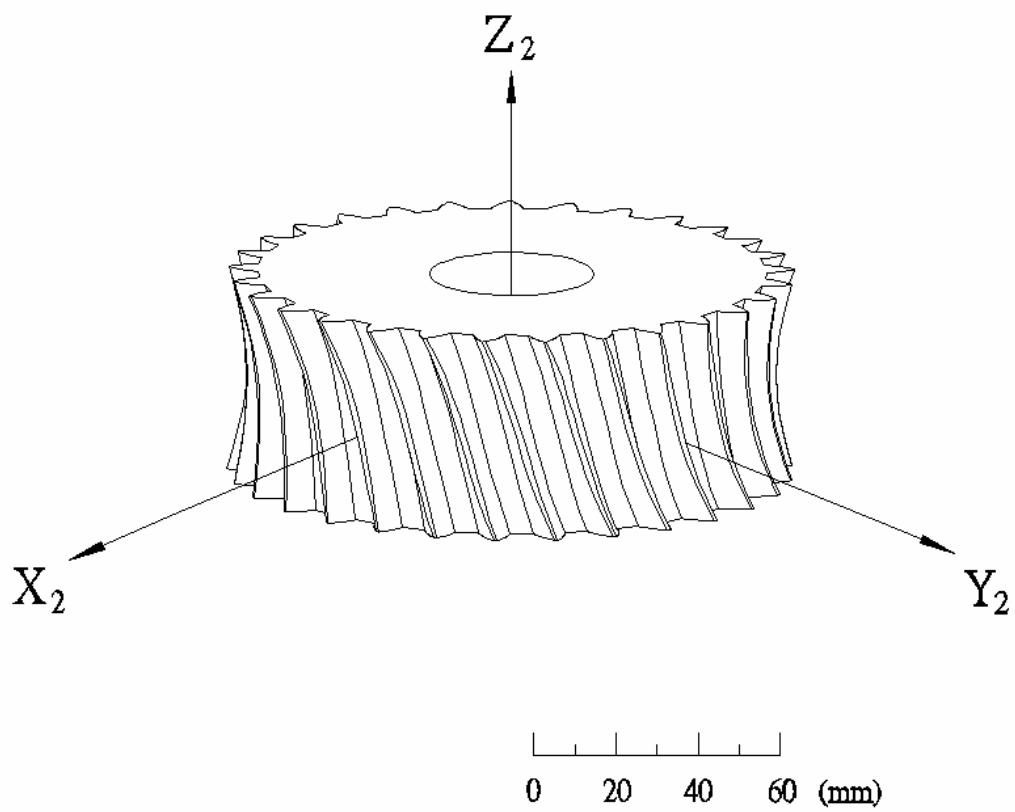


圖 3.5 ZN 型蝸輪之電腦繪圖

第四章 蝸桿蝸輪之接觸分析

4.1 前言

齒輪組是常見的機械傳動元件，其設計與製造上的誤差均會影響齒輪組整體之傳動性能。一般常見的誤差有單一齒形誤差、連續累積齒形誤差、導程角誤差、壓力角誤差、齒厚誤差和接觸比誤差等等。因此，如何提高齒輪設計與製造上的精度便成為相當重要的問題。除了齒形精度，若齒輪組在裝配過程中，產生中心距偏差、水平軸向偏差和垂直軸向偏差亦會影響到其傳動性能。若利用電腦模擬先分析並設計出齒輪組最佳的傳動條件，則可大量節省重複試驗所花費的製造與檢驗費用。根據 Litvin[7][8]提出的齒輪接觸分析(Tooth Contact Analysis)方法，利用模擬齒輪滾削機構所推導的理想齒輪齒面數學模式，即可進一步來模擬齒輪組在傳動時所產生的運動誤差(Kinematic Error)。

在本章中，首先依據蝸桿蝸輪組之嚙合機構，建立其嚙合之數學模式並模擬其接觸情形，假設在各種裝配狀況下，計算出蝸桿蝸輪組的運動誤差、瞬間接觸齒數、平均接觸比及接觸比。平均接觸比定義為齒輪組在滿足嚙合條件下，其嚙合齒面接觸點軌跡上所有瞬間接觸齒數之總合除以所選取之計算嚙合點的總點數。

4.2 蝸桿蝸輪之齒面接觸模擬

在進行蝸桿蝸輪組之齒面接觸分析時，必須先將蝸桿與蝸輪之齒面數學模式和齒面之單位法向量，利用座標轉換至共同的參考座標系，如 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 座標系。如圖 4.1 為蝸桿蝸輪組之嚙合機構示意圖，座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 與座標系 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 分別固聯於 ZK 型蝸桿齒面與 ZN 型蝸輪齒面上，其中， Z_1 軸為 ZK 型蝸桿之旋轉軸， Z_2 軸

為 ZN 型蝸輪之旋轉軸。座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為蝸桿蝸輪組之固定參考座標系，座標系 $S_{fv}(X_{fv}, Y_{fv}, Z_{fv})$ 和座標系 $S_{fw}(X_{fw}, Y_{fw}, Z_{fw})$ 分別為模擬蝸輪具有垂直與水平軸向裝配誤差時之參考座標系。參數 γ 為蝸桿與蝸輪嚙合時之交錯角， A 為蝸桿蝸輪組之中心距，其中 $\Delta\gamma_h$ 、 $\Delta\gamma_v$ 和 ΔA 分別為蝸桿蝸輪組之水平軸向裝配誤差、垂直軸向裝配誤差與中心距裝配誤差。利用下列之齊次座標轉換矩陣及向量轉換矩陣，可將 ZK 型蝸桿齒面方程式 \mathbf{R}_1 與齒面單位法向量 \mathbf{n}_1 轉換至固定參考座標系 S_f 如下：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = \mathbf{M}_{f,1} \mathbf{R}_1$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi'_1 & -\sin\phi'_1 & 0 & 0 \\ \sin\phi'_1 & \cos\phi'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \cos\phi'_1 - Y_1 \sin\phi'_1 \\ X_1 \sin\phi'_1 + Y_1 \cos\phi'_1 \\ Z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

及

$$\mathbf{n}_f^{(1)} = \mathbf{L}_{f,1} \mathbf{n}_1$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi'_1 & -\sin\phi'_1 & 0 \\ \sin\phi'_1 & \cos\phi'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} n_{x1} \cos\phi'_1 - n_{y1} \sin\phi'_1 \\ n_{x1} \cos\phi'_1 + n_{y1} \sin\phi'_1 \\ n_{z1} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

其中， \mathbf{R}_1 與 \mathbf{n}_1 均已分別表示第二章之(2.6)式和(2.7)式。

同理，ZN 型蝸輪也可經由齊次座標轉換矩陣及向量轉換矩陣，將其齒面方程式 \mathbf{R}_2 和齒面法向量 \mathbf{N}_2 轉換至固定參考座標系 S_f 如下：

$$\mathbf{R}_f^{(2)} = \mathbf{M}_{f,f2} \mathbf{M}_{f2,fw} \mathbf{M}_{fw,fv} \mathbf{M}_{fv,2} \mathbf{R}_2 = \mathbf{M}_{f,2} \mathbf{R}_2 \quad (4.3)$$

其中

$$\mathbf{M}_{f,f2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

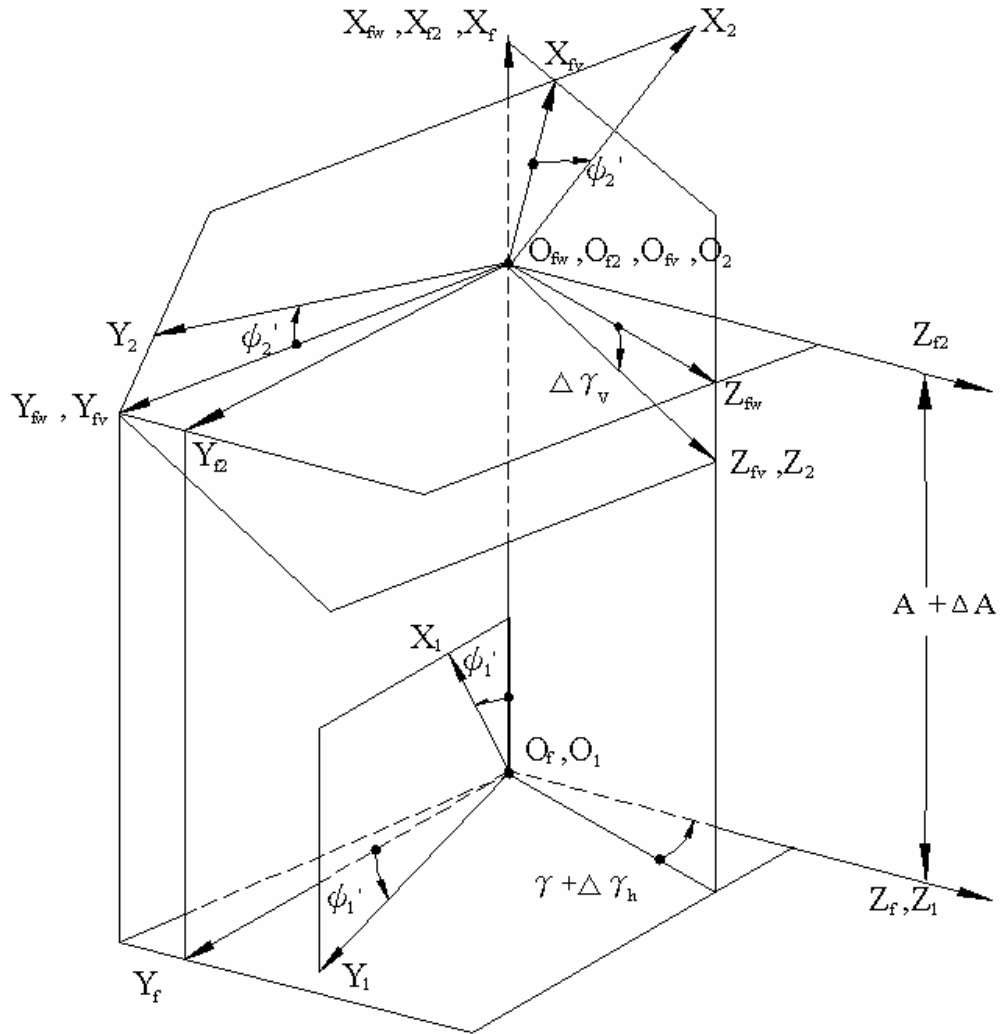


圖 4.1 蝸桿蝸輪組之嚙合機構示意圖

$$\mathbf{M}_{f2,fw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma + \Delta\gamma_h) & \sin(\gamma + \Delta\gamma_h) & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma + \Delta\gamma_h) & \cos(\gamma + \Delta\gamma_h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{fw,fv} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\gamma_v & 0 & -\sin\Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Delta\gamma_v & 0 & \cos\Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{fv,2} = \begin{bmatrix} \cos\phi'_2 & \sin\phi'_2 & 0 & 0 \\ -\sin\phi'_2 & \cos\phi'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

整理之後，可得：

$$\mathbf{M}_{f,2} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\gamma_v \cos\phi'_2 & \cos\Delta\gamma_v \sin\phi'_2 & -\sin\Delta\gamma_v & A + \Delta A \\ b_{21} & b_{22} & \sin(\gamma + \Delta\gamma_h) \cos\Delta\gamma_v & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \cos(\gamma + \Delta\gamma_h) \cos\Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將方程式(3.11)代入方程式(4.3)，即可求得 ZN 型蝸輪齒面方程式 \mathbf{R}_2 表示在 S_f 座標系如下：

$$\mathbf{R}_f^{(2)} = \begin{bmatrix} X_2 \cos\Delta\gamma_v \cos\phi'_2 + Y_2 \cos\Delta\gamma_v \sin\phi'_2 - Z_2 \sin\Delta\gamma_v + (A + \Delta A) \\ b_{21}X_2 + b_{22}Y_2 + Z_2 \sin(\gamma + \Delta\gamma_h) \cos\Delta\gamma_v \\ b_{31}X_2 + b_{32}Y_2 + Z_2 \cos(\gamma + \Delta\gamma_h) \cos\Delta\gamma_v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

其中 \mathbf{R}_2 已表示在第三章的(3.11)式中。

對於 ZN 型蝸輪齒面之法向量而言，亦可經由向量之座標轉換至 S_f 座標系如下：

$$\mathbf{N}_f^{(2)} = \mathbf{L}_{f,f2} \mathbf{L}_{f2,fw} \mathbf{L}_{fw,fv} \mathbf{L}_{fv,2} \mathbf{N}_2 = \mathbf{L}_{f,2} \mathbf{N}_2 \quad (4.5)$$

參考前面之轉換矩陣，可得向量轉換矩陣 $\mathbf{L}_{f,f2}$ 、 $\mathbf{L}_{f2,fw}$ 、 $\mathbf{L}_{fw,fv}$ 和 $\mathbf{L}_{fv,2}$ ，

整理之後，可得向量轉換矩陣 $\mathbf{L}_{f,2}$ ，表示如下：

$$\mathbf{L}_{f,2} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\gamma_v \cos\phi'_2 & \cos\Delta\gamma_v \sin\phi'_2 & -\sin\Delta\gamma_v \\ b_{21} & b_{22} & \sin(\gamma + \Delta\gamma_h)\cos\Delta\gamma_v \\ b_{31} & b_{32} & \cos(\gamma + \Delta\gamma_h)\cos\Delta\gamma_v \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

將(4.6)式代入(4.5)式，即可求得 ZN 型蝸輪齒面之法向量 \mathbf{N}_2 表示於 S_f 座標系如下：

$$\mathbf{N}_f^{(2)} = \begin{bmatrix} N_{x2} \cos\Delta\gamma_v \cos\phi'_2 + N_{y2} \cos\Delta\gamma_v \sin\phi'_2 - N_{z2} \sin\Delta\gamma_v \\ b_{21}N_{x2} + b_{22}N_{y2} + N_{z2} \sin(\gamma + \Delta\gamma_h)\cos\Delta\gamma_v \\ b_{31}N_{x2} + b_{32}N_{y2} + N_{z2} \cos(\gamma + \Delta\gamma_h)\cos\Delta\gamma_v \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

其中 \mathbf{N}_2 亦已表示在第三章的(3.13)式中，其中

$$\begin{aligned} b_{21} &= \sin(\gamma + \Delta\gamma_h)\sin\Delta\gamma_v \cos\phi'_2 - \cos(\gamma + \Delta\gamma_h)\sin\phi'_2 \\ b_{22} &= \sin(\gamma + \Delta\gamma_h)\sin\Delta\gamma_v \sin\phi'_2 + \cos(\gamma + \Delta\gamma_h)\cos\phi'_2 \\ b_{31} &= \cos(\gamma + \Delta\gamma_h)\sin\Delta\gamma_v \cos\phi'_2 + \sin(\gamma + \Delta\gamma_h)\sin\phi'_2 \\ b_{32} &= \cos(\gamma + \Delta\gamma_h)\sin\Delta\gamma_v \sin\phi'_2 - \sin(\gamma + \Delta\gamma_h)\cos\phi'_2 \end{aligned}$$

4.3 運動誤差、接觸齒數與接觸比

當蝸桿蝸輪組在嚙合時，由於接觸之兩嚙合齒面需滿足相切之條件，亦即在嚙合齒面之接觸點位置，蝸桿與蝸輪之齒面位置向量及單位法向量必須相同，因此可以下列方程式表示之：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} - \mathbf{R}_f^{(2)} = 0 \quad (4.8)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)} \times \mathbf{n}_f^{(2)} = 0 \quad (4.9)$$

方程式(4.8)表示 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪之齒面在其共同接觸點的位置向量相同，而此條件可以分為 X、Y 和 Z 軸三個方向的分量相等，因此，(4.8)式可以引導出三個獨立方程式。方程式(4.9)表示 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪之齒面在共同接觸點之單位法向量共線，亦即兩單位法向量之外積等於零，因為單位法向量的長度為 $1(|\mathbf{n}_f^{(1)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1)$ ，所以(4.9)式可以引導出兩個獨立方程式。在利用磨輪創成 ZK 型蝸桿以及使用 ZN 型蝸桿滾刀創成 ZN 型蝸輪時，會有兩個獨立的嚙合方程

式存在，所以在進行蝸桿蝸輪組之齒面接觸分析時，共有七個獨立方程式來求解八個未知數： u_1 、 θ 、 ϕ_1 、 l 、 ϕ_2 、 ϕ_1 、 ϕ_1' 和 ϕ_2' 。其中 θ 與 ϕ_1 表示磨輪創成 ZK 型蝸桿時磨輪之齒面設計參數； l 、 ϕ_2 與 ϕ_1 則表示 ZN 型蝸桿滾刀在創成 ZN 型蝸輪時，滾刀之刀面參數與創成機構之運動參數。利用磨輪與蝸桿之嚙合方程式，可將參數 u_1 表示為 θ 的顯函數，而依據滾刀與蝸輪之嚙合方程式，則 l 、 ϕ_2 與 ϕ_1 可表示為隱函數型式，參數 ϕ_1' 為蝸桿蝸輪組在齒輪接觸分析時蝸桿之旋轉角，參數 ϕ_2' 則為蝸輪在齒輪接觸分析時隨蝸桿轉動 ϕ_1' 時蝸輪之旋轉角。一般而言，蝸桿蝸輪組以蝸桿為主動件而蝸輪為被動件，因此，若將蝸桿旋轉角 ϕ_1' 設為已知，則蝸桿蝸輪組之齒面接觸分析模擬即成為七個獨立方程式來求解七個未知數，而此七個非線性方程式可使用數值分析法來求解七個未知數。在求得蝸桿蝸輪組之接觸點及其運動參數後，蝸桿蝸輪組嚙合時的運動誤差可由下式求得：

$$\Delta\phi_1 = (\phi_2 - \phi_2') - \frac{T_1}{T_2}(\phi_1 - \phi_1') \quad (4.10)$$

其中 T_1 和 T_2 分別為 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪之齒數， ϕ_1' 與 ϕ_2' 則分別為 ZK 型蝸桿和 ZN 型蝸輪在嚙合時之旋轉角度。此外， ϕ_1 和 ϕ_2 的關係必須滿足方程式(3.10)。

齒輪組之接觸比一般定義為嚙合齒輪組之齒面從開始接觸至最後離開接觸相對於齒輪中心所包括的作用角，除以相鄰兩齒相對應點的夾角。然而齒輪組實際之嚙合接觸比則不容易求得，一般而言，正齒輪、螺旋齒輪、蝸線傘齒輪和戟齒輪的瞬時接觸齒數不是一齒就是兩齒，也有利用齒輪接觸分析所獲得之運動誤差曲線來推算齒輪組之瞬時接觸齒數；在嚙合時若有兩個運動誤差曲線所包圍，此時瞬時接觸齒數為二，否則即為一齒。蝸桿蝸輪組瞬時接觸齒數為三或四齒，則無法依據運動誤差曲線來判斷蝸桿蝸輪組之瞬時接觸齒數。因此，

利用齒面接觸分析，計算蝸桿蝸輪組開始發生接觸到結束接觸時，蝸桿所經歷的旋轉角度，除以蝸桿旋轉一圈的角度(即 360°)，再除以蝸桿的齒數，即可求得蝸桿蝸輪組之接觸比。利用齒輪接觸分析可以計算求得瞬時接觸齒數，為了使齒輪組之平均接觸比能真正反映在嚙合過程中，蝸桿蝸輪組瞬時接觸齒數的變化，可以定義平均接觸比為在齒輪組之接觸點軌跡上各接觸取樣點(Sampling Points)，從開始接觸點瞬時之接觸齒數至最後接觸點之瞬時接觸齒數的總和，除以蝸桿蝸輪組嚙合傳動一循環時，自開始接觸點至最後接觸點的總取樣接觸點數。

4.4 範例

表 4.1 所示為嚙合之蝸桿蝸輪組之主要設計參數，根據先前所推導的數學模式與兩嚙合方程式，配合本論文所發展之齒面接觸分析程式，即可分析蝸桿蝸輪組之接觸情形。本節主要分為兩個部分，第一部份是理想裝配狀況下的接觸情形，第二部分則是考慮具有裝配誤差下的接觸情形。茲舉兩個例子，以說明蝸桿蝸輪組在不同齒形參數與各種裝配條件下，運動誤差、瞬時接觸齒數、平均接觸比和接觸比的變化情形。

表 4.1 蝸桿蝸輪組之主要設計參數

	蝸桿 1	蝸桿 2	蝸輪 1	蝸輪 2	蝸輪 3
法向模數 $m(\text{mm}/\text{齒})$	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
齒數	3	3	29	29	29
法向壓力角	20°	22.5°	20°	20°	20°
與蝸桿之交錯角 γ			30°	45°	60°

範例一：

以 ZK 型蝸桿和 ZN 型蝸輪進行齒輪組之嚙合測試，蝸桿之法向壓力角分別為 20° 與 22.5° ，蝸輪之法向壓力角為 20° ，假設在理想裝配條件下，探討蝸桿蝸輪組在 30° 、 45° 和 60° 之交錯角的運動誤差、瞬時接觸齒數、平均接觸比和接觸比。

依據本章所推導並發展之電腦輔助齒輪接觸分析模擬，各蝸桿蝸輪之搭配組合的齒輪組在理想裝配條件下之接觸情形如表(4.2)至(4.7)所示。在沒有裝配誤差下，蝸桿蝸輪組之運動誤差(K.E.)皆為零，其運動誤差及接觸齒數如圖(4.2)至(4.7)所示。本研究係探討非 90° 交錯角之蝸桿蝸輪組嚙合，由分析之結果顯示，蝸桿蝸輪組在 60° 交錯角以內，其平均接觸比與接觸比隨著交錯角之增大而變大。

範例二：

以 ZK 型蝸桿和 ZN 型蝸輪進行齒輪組之嚙合測試，其中蝸桿之法向壓力角為 22.5° ，而蝸輪之法向壓力角則為 20° 。假設蝸桿蝸輪組具有中心距之裝配誤差及水平和垂直軸向之裝配誤差，來探討蝸桿蝸輪組在 45° 交錯角之下的運動誤差、瞬時接觸齒數、平均接觸比、與接觸比。

依據本章所發展之電腦輔助齒輪接觸分析模擬，蝸桿蝸輪組之接觸情形如表(4.8)至表(4.19)所示，由分析之結果顯示，齒輪組在有裝配誤差狀況下，會有運動誤差產生。圖(4.8)至圖(4.19)則表示蝸桿蝸輪組在具有裝配誤差下進行嚙合傳動時，其接觸齒數和運動誤差的情形。其運動誤差值會隨著不同的裝配誤差組合而改變。表 4.20 為蝸桿蝸輪組之裝配條件與運動誤差值之關係表，由結果可知，運動誤差值隨著交錯角之增加而越來越大。並且，當蝸桿蝸輪組之交錯角越來

表 4.2 理想裝配條件下蝸桿 1 與蝸輪 1 之接觸情形

ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-224.8	-23.2604	22.4239	179.8742	-238.9561	8.0646	-239.1751	-224.8504	-23.2604	0.0000	3.61
-200.0	-20.6897	22.4239	179.8742	-212.4282	8.0646	-212.6472	-200.0195	-20.6917	0.0000	
-160.0	-16.5517	22.4239	179.8742	-169.7651	8.0646	-169.9842	-160.0196	-16.5537	0.0000	
-120.0	-12.4138	22.4239	179.8742	-127.2014	8.0646	-127.4204	-120.0195	-12.4158	0.0000	
-80.0	-8.2759	22.4239	179.8742	-84.7494	8.0646	-84.9684	-80.0195	-8.2779	0.0000	
-40.0	-4.1379	22.4239	179.8742	-42.4184	8.0646	-42.6374	-40.0195	-4.1400	0.0000	
0.0	0.0000	22.4239	179.8742	-0.2148	8.0646	-0.4338	-0.0195	-0.0020	0.0000	
40.0	4.1379	22.4239	179.8742	41.8577	8.0646	41.6387	39.9805	4.1359	0.0000	
80.0	8.2759	22.4239	179.8742	83.7986	8.0646	83.5795	79.9805	8.2738	0.0000	
120.0	12.4138	22.4239	179.8742	125.6093	8.0646	125.3903	119.9805	12.4118	0.0000	
160.0	16.5517	22.4239	179.8742	167.2936	8.0646	167.0745	159.9805	16.5497	0.0000	
208.4	21.5548	22.4239	179.8742	217.5520	8.0646	217.3330	208.3631	21.5548	0.0000	

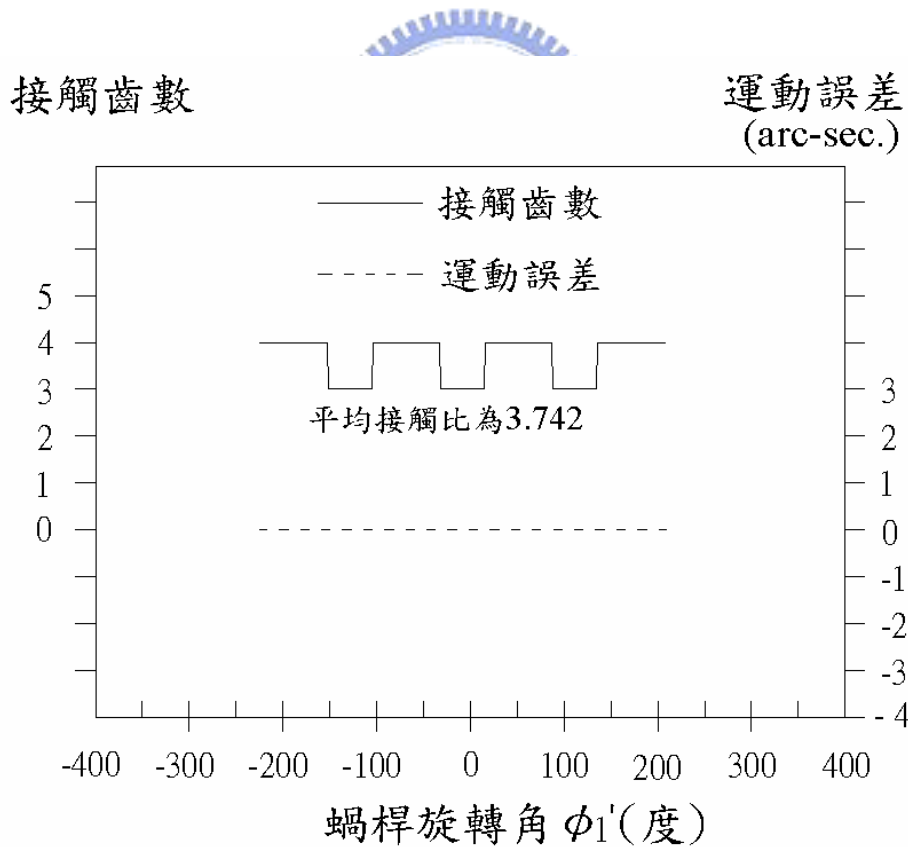


圖 4.2 理想裝配條件下蝸桿 1 與蝸輪 1 之接觸齒數與運動誤差

表 4.3 理想裝配條件下蝸桿 2 與蝸輪 1 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-209.9	-21.7911	23.9915	177.3102	-227.2390	7.0487	-232.7296	-210.6472	-21.7911	0.0000	3.62
-200.0	-20.6897	23.9915	177.3102	-216.7127	7.0487	-222.2034	-200.7727	-20.7696	0.0000	
-160.0	-16.5517	23.9915	177.3102	-174.1105	7.0487	-179.6012	-160.7727	-16.6317	0.0000	
-120.0	-12.4138	23.9915	177.3102	-131.5782	7.0487	-137.0688	-120.7726	-12.4937	0.0000	
-80.0	-8.2759	23.9915	177.3102	-89.1275	7.0487	-94.6181	-80.7726	-8.3558	0.0000	
-40.0	-4.1379	23.9915	177.3102	-46.7682	7.0487	-52.2588	-40.7726	-4.2179	0.0000	
0.0	0.0000	23.9915	177.3102	-4.5085	7.0487	-9.9991	-0.7726	-0.0799	0.0000	
40.0	4.1379	23.9915	177.3102	37.6460	7.0487	32.1554	39.2274	4.0580	0.0000	
80.0	8.2759	23.9915	177.3102	79.6914	7.0487	74.2008	79.2274	8.1959	0.0000	
120.0	12.4138	23.9915	177.3102	121.6259	7.0487	116.1353	119.2274	12.3339	0.0000	
160.0	16.5517	23.9915	177.3102	163.4498	7.0487	157.9592	159.2274	16.4718	0.0000	
200.0	20.6897	23.9915	177.3102	205.1646	7.0487	199.6739	199.2273	20.6097	0.0000	
225.3	23.2257	23.9915	177.3102	231.4817	7.0487	225.9911	224.5153	23.2257	0.0000	



接觸齒數

運動誤差
(arc-sec.)

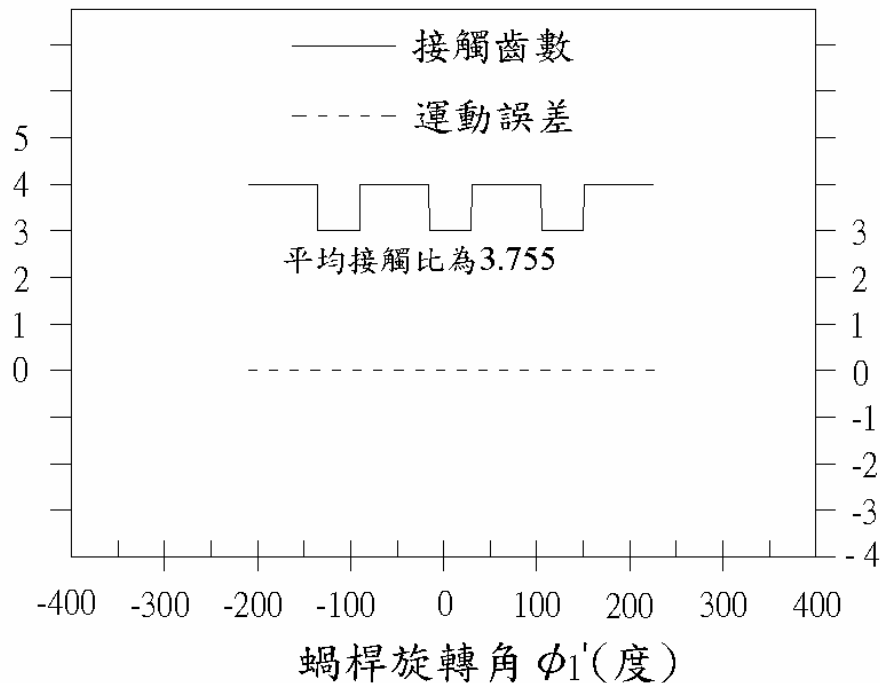


圖 4.3 理想裝配條件下蝸桿 2 與蝸輪 1 之接觸齒數與運動誤差

表 4.4 理想裝配條件下蝸桿 1 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-222.2	-22.9932	22.4239	179.8742	-254.1506	8.0646	-254.3696	-222.2677	-22.9932	0.0000	3.86
-200.0	-20.6897	22.4239	179.8742	-228.3273	8.0646	-228.5463	-200.0195	-20.6917	0.0000	
-160.0	-16.5517	22.4239	179.8742	-181.9484	8.0646	-182.1674	-160.0195	-16.5537	0.0000	
-120.0	-12.4138	22.4239	179.8742	-135.8000	8.0646	-136.0191	-120.0195	-12.4158	0.0000	
-80.0	-8.2759	22.4239	179.8742	-90.0631	8.0646	-90.2822	-80.0196	-8.2779	0.0000	
-40.0	-4.1379	22.4239	179.8742	-44.8696	8.0646	-45.0887	-40.0196	-4.1400	0.0000	
0.0	0.0000	22.4239	179.8742	-0.2844	8.0646	-0.5034	-0.0195	-0.0020	0.0000	
40.0	4.1379	22.4239	179.8742	43.6903	8.0646	43.4713	39.9805	4.1359	0.0000	
80.0	8.2759	22.4239	179.8742	87.0970	8.0646	86.8780	79.9805	8.2738	0.0000	
120.0	12.4138	22.4239	179.8742	130.0011	8.0646	129.7820	119.9805	12.4118	0.0000	
160.0	16.5517	22.4239	179.8742	172.4747	8.0646	172.2557	159.9805	16.5497	0.0000	
200.0	20.6897	22.4239	179.8742	214.5867	8.0646	214.3676	199.9805	20.6876	0.0000	
241.9	25.0265	22.4239	179.8742	258.4215	8.0646	258.2025	241.9231	25.0265	0.0000	

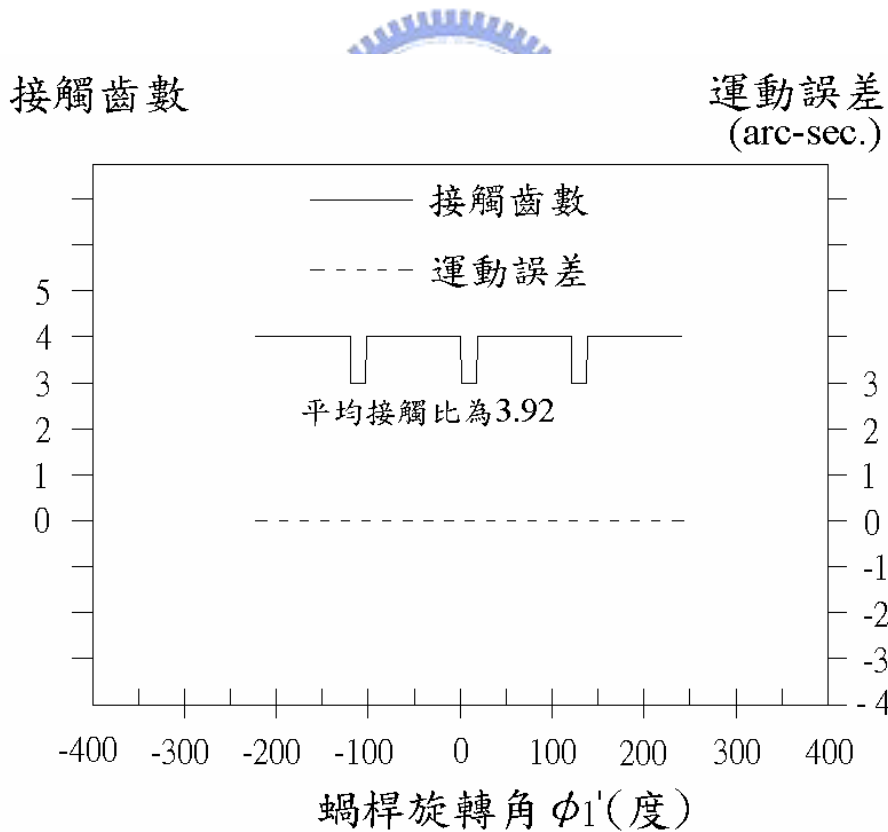


圖 4.4 理想裝配條件下蝸桿 1 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.5 理想裝配條件下蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-208.8	-21.6818	23.9915	177.3102	-243.7539	7.0487	-249.2445	-209.5909	-21.6818	0.0000	3.92
-200.0	-20.6897	23.9915	177.3102	-233.6341	7.0487	-239.1247	-200.7727	-20.7696	0.0000	
-160.0	-16.5517	23.9915	177.3102	-187.7056	7.0487	-193.1962	-160.7727	-16.6317	0.0000	
-120.0	-12.4138	23.9915	177.3102	-141.8459	7.0487	-147.3367	-120.7728	-12.4937	0.0000	
-80.0	-8.2759	23.9915	177.3102	-96.2041	7.0487	-101.6948	-80.7727	-8.3558	0.0000	
-40.0	-4.1379	23.9915	177.3102	-50.9128	7.0487	-56.4034	-40.7727	-4.2179	0.0000	
0.0	0.0000	23.9915	177.3102	-6.0667	7.0487	-11.5573	-0.7727	-0.0799	0.0000	
40.0	4.1379	23.9915	177.3102	38.2849	7.0487	32.7943	39.2273	4.0580	0.0000	
80.0	8.2759	23.9915	177.3102	82.1355	7.0487	76.6448	79.2273	8.1959	0.0000	
120.0	12.4138	23.9915	177.3102	125.5096	7.0487	120.0190	119.2273	12.3339	0.0000	
160.0	16.5517	23.9915	177.3102	168.4506	7.0487	162.9600	159.2273	16.4718	0.0000	
200.0	20.6897	23.9915	177.3102	211.0093	7.0487	205.5186	199.2273	20.6097	0.0000	
240.0	24.8276	23.9915	177.3102	253.2369	7.0487	247.7462	239.2273	24.7477	0.0000	
262.3	27.0504	23.9915	177.3102	276.6112	7.0487	271.1206	261.4877	27.0504	0.0000	

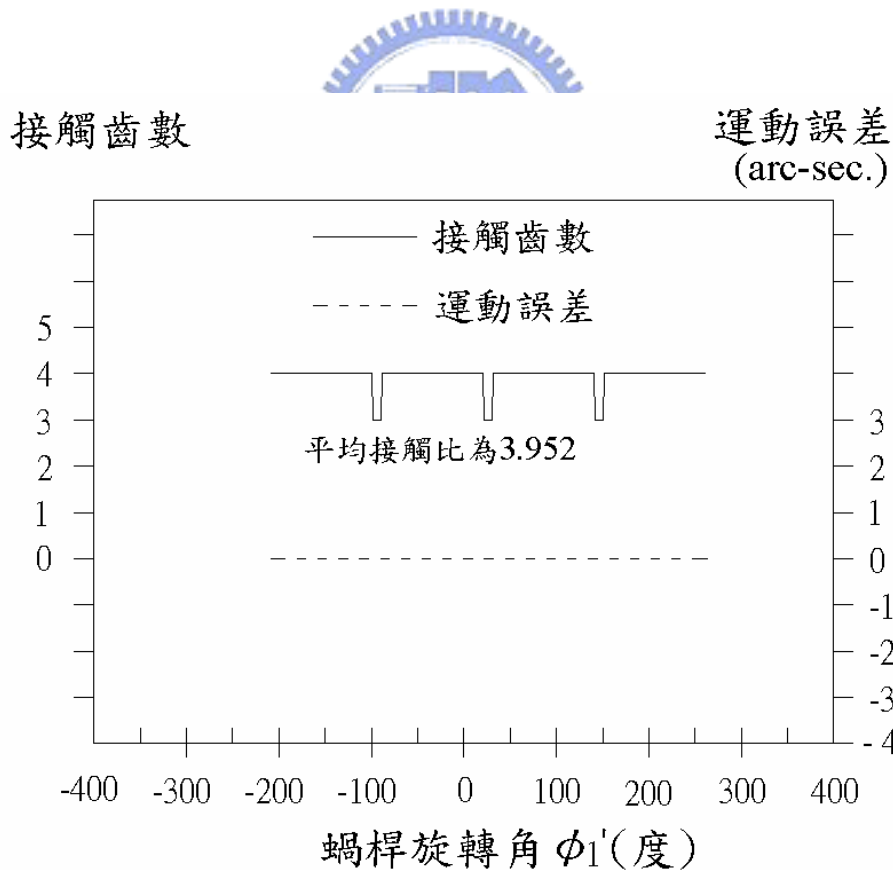


圖 4.5 理想裝配條件下蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.6 理想裝配條件下蝸桿 1 與蝸輪 3 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-209.6	-21.6870	22.4239	179.8742	-279.1186	8.0646	-279.3376	-209.6412	-21.6870	0.0000	4.42
-160.0	-16.5517	22.4239	179.8742	-214.5829	8.0646	-214.8019	-160.0195	-16.5537	0.0000	
-120.0	-12.4138	22.4238	179.8742	-159.7027	8.0646	-159.9216	-120.0194	-12.4158	0.0000	
-80.0	-8.2759	22.4239	179.8742	-104.0043	8.0646	-104.2233	-80.0195	-8.2779	0.0000	
-40.0	-4.1379	22.4239	179.8742	-50.4480	8.0646	-50.6671	-40.0195	-4.1400	0.0000	
0.0	0.0000	22.4239	179.8742	-0.4170	8.0646	-0.6360	-0.0195	-0.0020	0.0000	
40.0	4.1379	22.4239	179.8742	46.6238	8.0646	46.4047	39.9805	4.1359	0.0000	
80.0	8.2759	22.4239	179.8742	91.6124	8.0646	91.3933	79.9805	8.2738	0.0000	
120.0	12.4138	22.4239	179.8742	135.2540	8.0646	135.0350	119.9805	12.4118	0.0000	
160.0	16.5517	22.4239	179.8742	177.9994	8.0646	177.7804	159.9805	16.5497	0.0000	
200.0	20.6897	22.4239	179.8742	220.1304	8.0646	219.9113	199.9805	20.6876	0.0000	
240.0	24.8276	22.4239	179.8742	261.8264	8.0646	261.6074	239.9805	24.8256	0.0000	
280.0	28.9655	22.4239	179.8742	303.2053	8.0646	302.9863	279.9805	28.9635	0.0000	
321.7	33.2755	22.4239	179.8742	346.0731	8.0646	345.8540	321.6631	33.2755	0.0000	

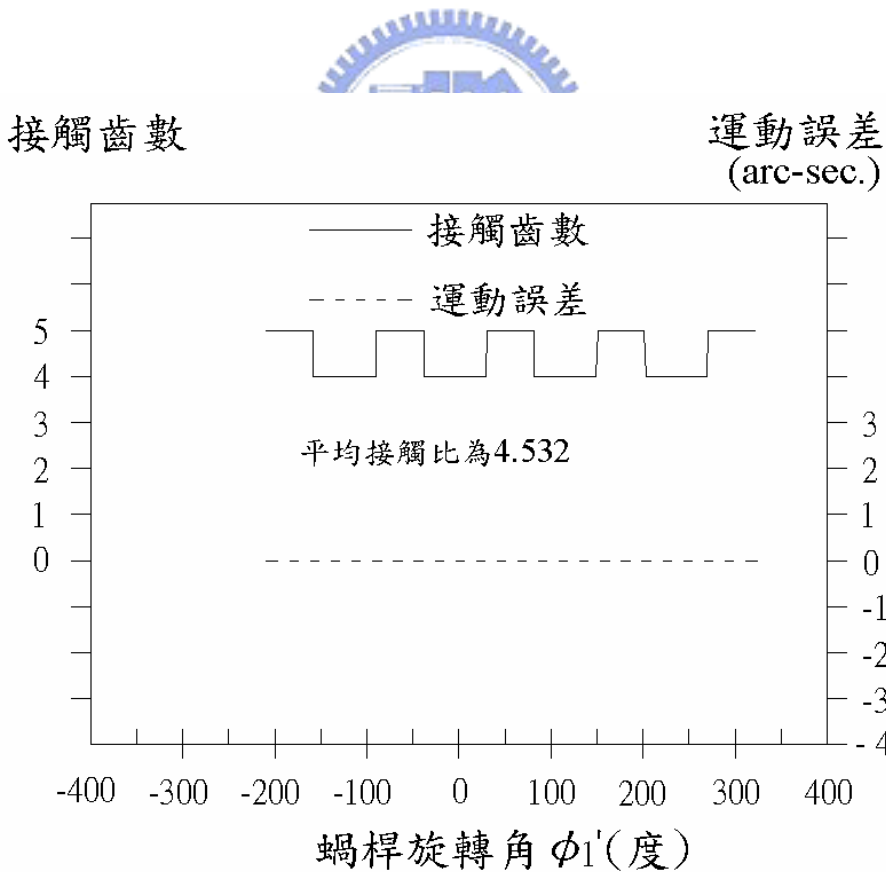


圖 4.6 理想裝配條件下蝸桿 1 與蝸輪 3 之接觸齒數與運動誤差

表 4.7 理想裝配條件下蝸桿 2 與蝸輪 3 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-209.6	-21.7675	23.9915	177.3102	-281.9290	7.0487	-287.4196	-210.4189	-21.7675	0.0000	4.62
-160.0	-16.5517	23.9915	177.3102	-220.0536	7.0487	-225.5443	-160.7727	-16.6317	0.0000	
-120.0	-12.4138	23.9915	177.3102	-167.8727	7.0487	-173.3632	-120.7726	-12.4937	0.0000	
-80.0	-8.2759	23.9915	177.3102	-114.1971	7.0487	-119.6877	-80.7727	-8.3558	0.0000	
-40.0	-4.1379	23.9915	177.3102	-60.7419	7.0487	-66.2326	-40.7727	-4.2179	0.0000	
0.0	0.0000	23.9915	177.3102	-9.3305	7.0487	-14.8212	-0.7727	-0.0799	0.0000	
40.0	4.1379	23.9915	177.3102	39.4411	7.0487	33.9505	39.2273	4.0580	0.0000	
80.0	8.2759	23.9915	177.3102	85.9591	7.0487	80.4684	79.2273	8.1959	0.0000	
120.0	12.4138	23.9915	177.3102	130.8244	7.0487	125.3337	119.2273	12.3339	0.0000	
160.0	16.5517	23.9915	177.3102	174.5274	7.0487	169.0367	159.2273	16.4718	0.0000	
200.0	20.6897	23.9915	177.3102	217.4111	7.0487	211.9204	199.2273	20.6097	0.0000	
240.0	24.8276	23.9915	177.3102	259.7068	7.0487	254.2161	239.2273	24.7477	0.0000	
280.0	28.9655	23.9915	177.3102	301.5709	7.0487	296.0802	279.2273	28.8856	0.0000	
320.0	33.1034	23.9915	177.3102	343.1110	7.0487	337.6203	319.2273	33.0235	0.0000	
345.3	35.6374	23.9915	177.3102	369.2195	7.0487	363.7288	344.4948	35.6374	0.0000	



接觸齒數

運動誤差
(arc-sec.)

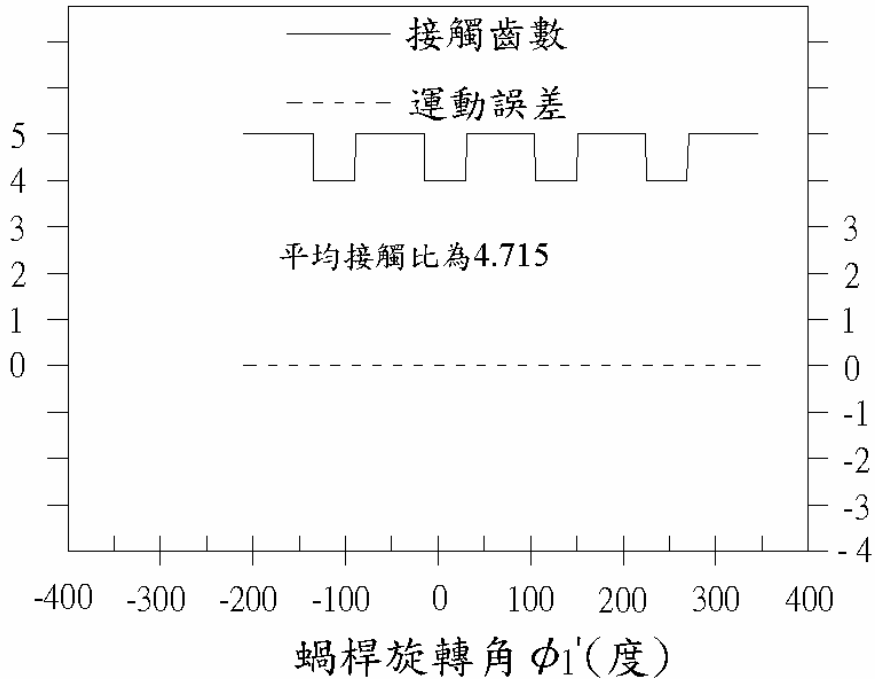


圖 4.7 理想裝配條件下蝸桿 2 與蝸輪 3 之接觸齒數與運動誤差

表 4.8 中心距誤差 $\Delta A = 0.2$ mm，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-212.5	-21.9412	23.6897	178.0115	-246.6302	7.1818	-249.7547	-211.0707	-21.8349	2.2110	3.91
-200.0	-20.6559	23.6786	178.0373	-232.1467	7.1894	-235.1308	-198.4059	-20.5247	2.1232	
-160.0	-16.5230	23.6437	178.1190	-185.9562	7.2126	-188.4930	-158.0345	-16.3484	1.8017	
-120.0	-12.3914	23.6123	178.1925	-139.8904	7.2321	-142.0140	-117.6971	-12.1756	1.4044	
-80.0	-8.2607	23.5885	178.2483	-94.1397	7.2457	-95.9265	-77.4275	-8.0097	0.9538	
-40.0	-4.1303	23.5748	178.2804	-48.8533	7.2522	-50.4083	-37.2477	-3.8532	0.4772	
0.0	0.0000	23.5715	178.2881	-4.1133	7.2519	-5.5487	2.8379	0.2936	0.0000	
40.0	4.1306	23.5772	178.2747	40.0636	7.2463	38.6475	42.8402	4.4317	-0.4580	
80.0	8.2618	23.5895	178.2458	83.7064	7.2373	82.2315	82.7783	8.5633	-0.8845	
120.0	12.3935	23.6061	178.2070	126.8681	7.2264	125.2802	122.6721	12.6902	-1.2736	
160.0	16.5259	23.6249	178.1630	169.6096	7.2148	167.8752	162.5391	16.8144	-1.6238	
200.0	20.6588	23.6444	178.1172	211.9903	7.2033	210.0920	202.3924	20.9371	-1.9367	
240.0	24.7923	23.6639	178.0719	254.0641	7.1923	251.9954	242.2412	25.0594	-2.2151	
256.8	26.5351	23.6718	178.0533	271.6072	7.1879	269.4672	258.9323	26.7861	-2.3155	

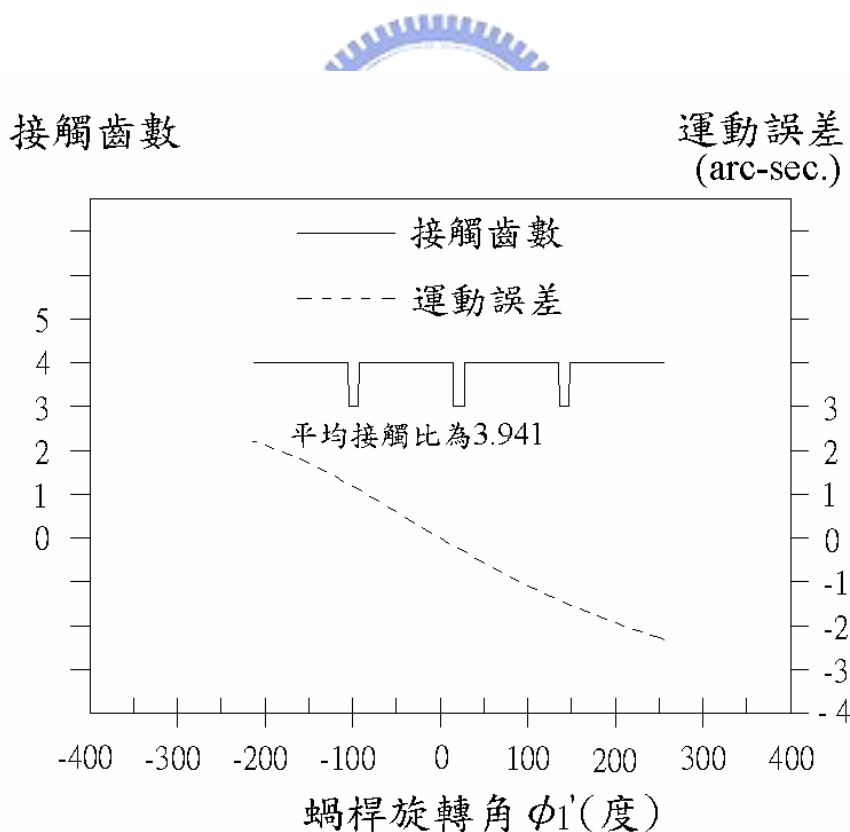


圖 4.8 中心距誤差 $\Delta A = 0.2$ mm，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.9 中心距誤差 $\Delta A = -0.2$ mm，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-205.3	-21.4488	24.2807	176.6450	-241.0591	6.9263	-248.8156	-208.2751	-21.5457	-2.0449	3.94
-160.0	-16.5792	24.3138	176.5691	-189.2591	6.9041	-197.4659	-163.3192	-16.8951	-1.7269	
-120.0	-12.4355	24.3409	176.5073	-143.5789	6.8870	-152.1641	-123.6312	-12.7894	-1.3633	
-80.0	-8.2908	24.3630	176.4567	-98.0466	6.8739	-106.9603	-83.8971	-8.6790	-0.9392	
-40.0	-4.1455	24.3782	176.4221	-52.7772	6.8659	-61.9440	-44.0969	-4.5618	-0.4768	
0.0	0.0000	24.3853	176.4059	-7.8674	6.8634	-17.1975	-4.2199	-0.4365	0.0000	
40.0	4.1454	24.3845	176.4076	36.6149	6.8656	27.2124	35.7336	3.6966	0.4697	
80.0	8.2904	24.3772	176.4244	80.6366	6.8715	71.2417	75.7538	7.8366	0.9161	
120.0	12.4349	24.3649	176.4525	124.1970	6.8798	114.8727	115.8258	11.9820	1.3291	
160.0	16.5788	24.3494	176.4878	167.3205	6.8895	158.1109	155.9338	16.1311	1.7041	
200.0	20.7221	24.3323	176.5269	210.0468	6.8996	200.9792	196.0636	20.2824	2.0405	
240.0	24.8648	24.3146	176.5673	252.4222	6.9095	243.5107	236.2042	24.4349	2.3400	
267.6	27.5462	24.3025	176.5950	281.4616	6.9161	272.6609	263.8847	27.2984	2.5197	

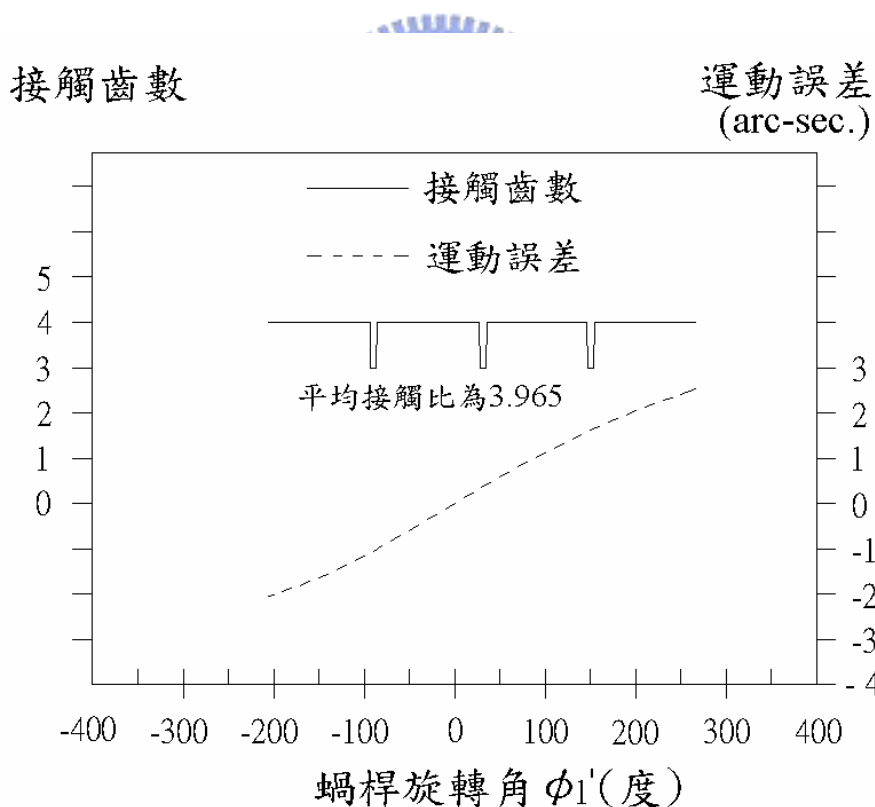


圖 4.9 中心距誤差 $\Delta A = -0.2$ mm，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.10 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-209.3	-21.7503	23.9501	177.4059	-244.2753	7.0649	-249.3041	-209.7681	-21.7001	-0.9965	3.94
-200.0	-20.7056	23.9559	177.3927	-233.6550	7.0604	-238.7427	-200.5310	-20.7446	-0.9992	
-160.0	-16.5669	23.9807	177.3352	-187.8941	7.0407	-193.2409	-160.7460	-16.6289	-0.9542	
-120.0	-12.4269	24.0046	177.2800	-142.1990	7.0221	-147.8000	-120.9519	-12.5123	-0.8217	
-80.0	-8.2856	24.0255	177.2315	-96.6961	7.0058	-102.5270	-81.1328	-8.3931	-0.6094	
-40.0	-4.1432	24.0421	177.1933	-51.5005	6.9930	-57.5204	-41.2763	-4.2700	-0.3304	
0.0	0.0000	24.0533	177.1675	-6.7005	6.9839	-12.8586	-1.3750	-0.1422	0.0000	
40.0	4.1438	24.0590	177.1542	37.6501	6.9783	31.4069	38.5718	3.9902	0.3663	
80.0	8.2879	24.0599	177.1522	81.5335	6.9759	75.2537	78.5595	8.1268	0.7555	
120.0	12.4322	24.0568	177.1594	124.9617	6.9758	118.6852	118.5806	12.2670	1.1573	
160.0	16.5766	24.0507	177.1735	167.9670	6.9774	161.7243	158.6266	16.4096	1.5647	
200.0	20.7211	24.0424	177.1926	210.5927	6.9801	204.4054	198.6902	20.5542	1.9732	
240.0	24.8655	24.0327	177.2150	252.8852	6.9835	246.7680	238.7654	24.6999	2.3801	
263.8	27.2489	24.0265	177.2294	277.9267	6.9858	271.8557	262.6296	27.1686	2.6104	

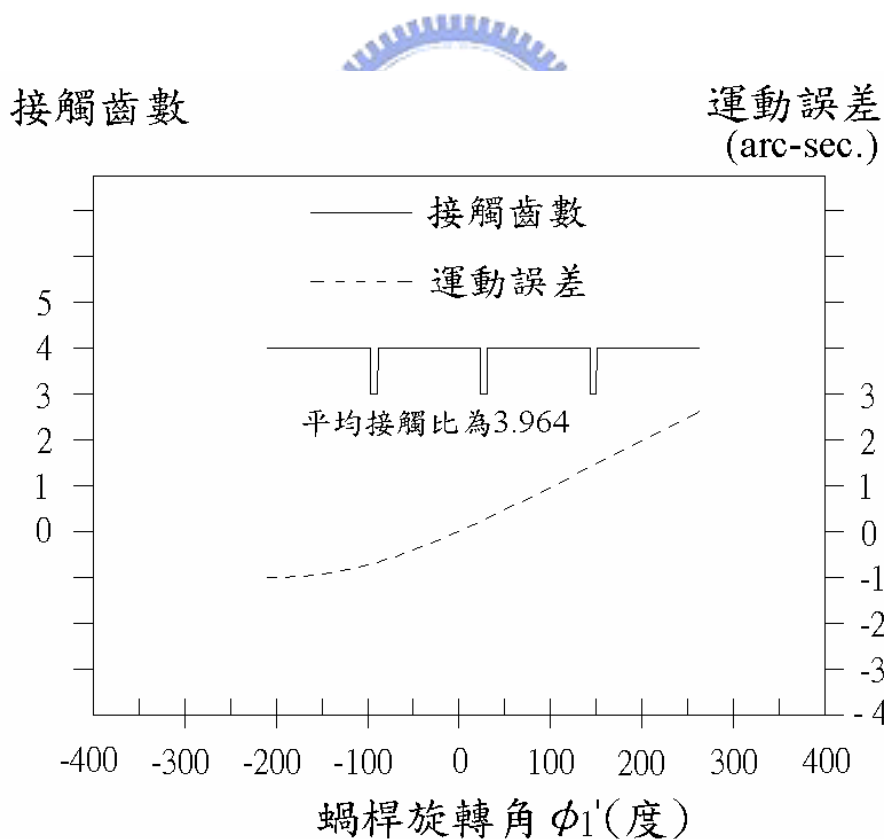


圖 4.10 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.11 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-208.4	-21.6136	24.0327	177.2151	-243.2345	7.0327	-249.1862	-209.4162	-21.6637	1.0192	3.9
-200.0	-20.6734	24.0274	177.2272	-233.6148	7.0369	-239.5121	-201.0177	-20.7949	1.0224	
-160.0	-16.5362	24.0017	177.2867	-187.5123	7.0573	-193.1415	-160.7951	-16.6340	0.9767	
-120.0	-12.4004	23.9766	177.3447	-141.4789	7.0768	-146.8432	-120.5808	-12.4739	0.8401	
-80.0	-8.2660	23.9544	177.3960	-95.6900	7.0939	-100.8147	-80.3926	-8.3165	0.6216	
-40.0	-4.1326	23.9371	177.4362	-50.2987	7.1073	-55.2294	-40.2458	-4.1634	0.3358	
0.0	0.0000	23.9257	177.4626	-5.4071	7.1166	-10.2001	-0.1482	-0.0153	0.0000	
40.0	4.1321	23.9202	177.4753	38.9415	7.1218	34.2292	39.9008	4.1277	-0.3695	
80.0	8.2638	23.9198	177.4760	82.7541	7.1239	78.0721	79.9077	8.2663	-0.7594	
120.0	12.3953	23.9236	177.4674	126.0696	7.1236	121.3780	119.8816	12.4015	-1.1600	
160.0	16.5268	23.9303	177.4518	168.9427	7.1216	164.2120	159.8314	16.5343	-1.5649	
200.0	20.6583	23.9390	177.4316	211.4317	7.1186	206.6417	199.7649	20.6653	-1.9701	
240.0	24.7898	23.9491	177.4083	253.5925	7.1149	248.7299	239.6879	24.7953	-2.3734	
260.7	26.8487	23.9547	177.3954	275.2674	7.1128	270.3637	260.3158	26.9292	-2.5740	

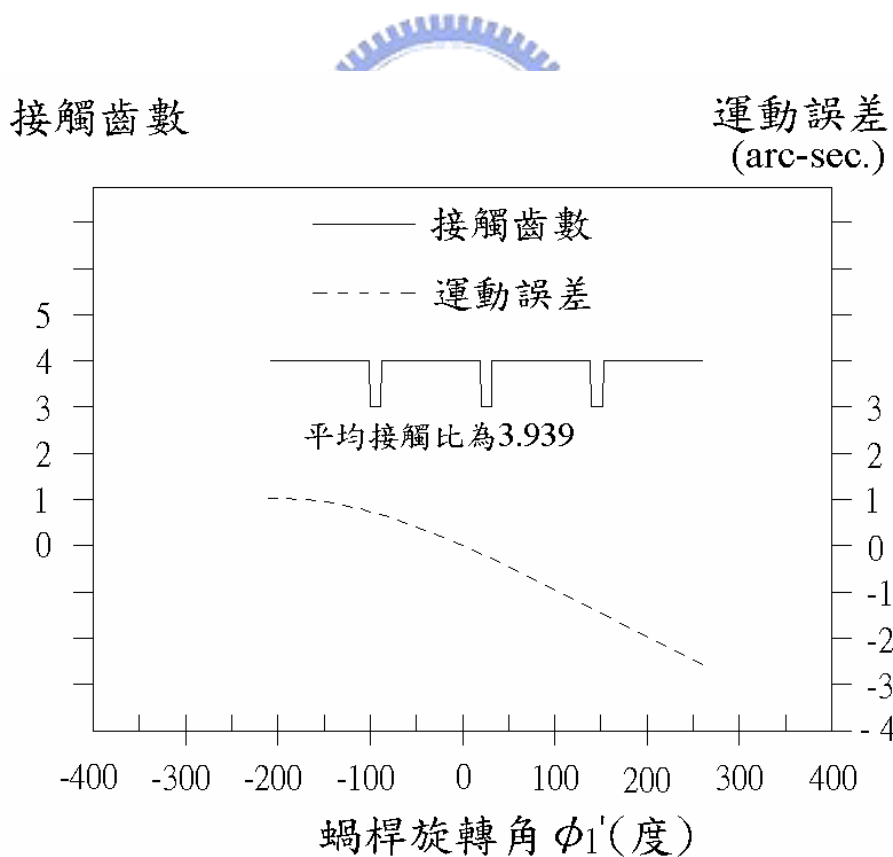


圖 4.11 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.12 垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	φ_1 (deg.)	l (mm)	φ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-204.3	-21.3007	24.2045	176.8194	-240.1542	6.8880	-248.6895	-207.8729	-21.5041	-3.1406	3.88
-200.0	-20.7384	24.2037	176.8213	-235.1656	6.8884	-243.6978	-203.5187	-21.0537	-3.0610	
-160.0	-16.5889	24.1926	176.8468	-189.2101	6.8947	-197.6716	-163.4228	-16.9058	-2.3388	
-120.0	-12.4401	24.1743	176.8888	-143.2446	6.9064	-151.5535	-123.2592	-12.7510	-1.6519	
-80.0	-8.2922	24.1489	176.9472	-97.4225	6.9229	-105.4974	-83.0301	-8.5893	-1.0234	
-40.0	-4.1454	24.1178	177.0187	-51.8990	6.9428	-59.6735	-42.7498	-4.4224	-0.4702	
0.0	0.0000	24.0836	177.0977	-6.8029	6.9643	-14.2363	-2.4401	-0.2524	0.0000	
40.0	4.1441	24.0488	177.1779	37.7850	6.9854	30.7045	37.8749	3.9181	0.3886	
80.0	8.2871	24.0158	177.2541	81.8374	7.0048	75.0971	78.1752	8.0871	0.7033	
120.0	12.4290	23.9859	177.3230	125.3715	7.0217	118.9427	118.4482	12.2533	0.9553	
160.0	16.5701	23.9599	177.3833	168.4322	7.0360	162.2785	158.6883	16.4160	1.1559	
200.0	20.7106	23.9376	177.4349	211.0766	7.0480	205.1605	198.8951	20.5754	1.3159	
240.0	24.8506	23.9188	177.4785	253.3635	7.0577	247.6497	239.0708	24.7315	1.4438	
262.1	27.0246	23.9098	177.4994	276.5758	7.0624	270.9601	261.2389	27.0247	1.5007	

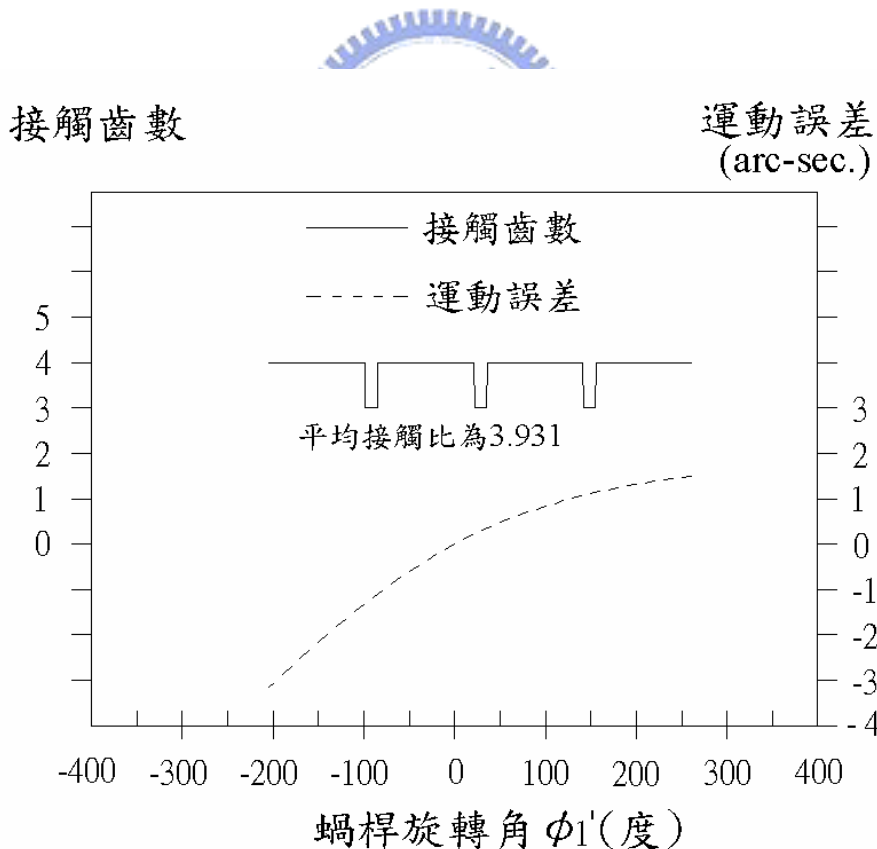


圖 4.12 垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.13 垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = -0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-213.6	-22.0899	23.7638	177.8386	-247.5506	7.2203	-249.9106	-211.5076	-21.8801	3.1889	3.96
-200.0	-20.6428	23.7669	177.8315	-231.9999	7.2186	-234.3749	-197.9811	-20.4808	2.9436	
-160.0	-16.5161	23.7812	177.7982	-186.1245	7.2094	-188.5999	-158.1013	-16.3553	2.2363	
-120.0	-12.3888	23.8034	177.7464	-140.4046	7.1946	-143.0667	-118.2916	-12.2371	1.5725	
-80.0	-8.2604	23.8326	177.6786	-94.9749	7.1753	-97.9004	-78.5424	-8.1251	0.9719	
-40.0	-4.1308	23.8663	177.6002	-49.9363	7.1536	-53.1801	-38.8345	-4.0174	0.4465	
0.0	0.0000	23.9019	177.5177	-5.3483	7.1314	-8.9378	0.8548	0.0884	0.0000	
40.0	4.1320	23.9367	177.4369	38.7681	7.1103	34.8312	40.5466	4.1945	-0.3709	
80.0	8.2651	23.9692	177.3617	82.4217	7.0914	78.1551	80.2565	8.3024	-0.6742	
120.0	12.3992	23.9983	177.2946	125.6414	7.0750	121.0745	119.9937	12.4131	-0.9198	
160.0	16.5339	24.0236	177.2361	168.4671	7.0611	163.6343	159.7619	16.5271	-1.1179	
200.0	20.6693	24.0453	177.1860	210.9429	7.0496	205.8795	199.5612	20.6443	-1.2775	
240.0	24.8052	24.0636	177.1437	253.1129	7.0401	247.8517	239.3893	24.7644	-1.4063	
262.4	27.0747	24.0726	177.1229	276.6338	7.0356	271.2748	261.7270	27.0752	-1.4649	

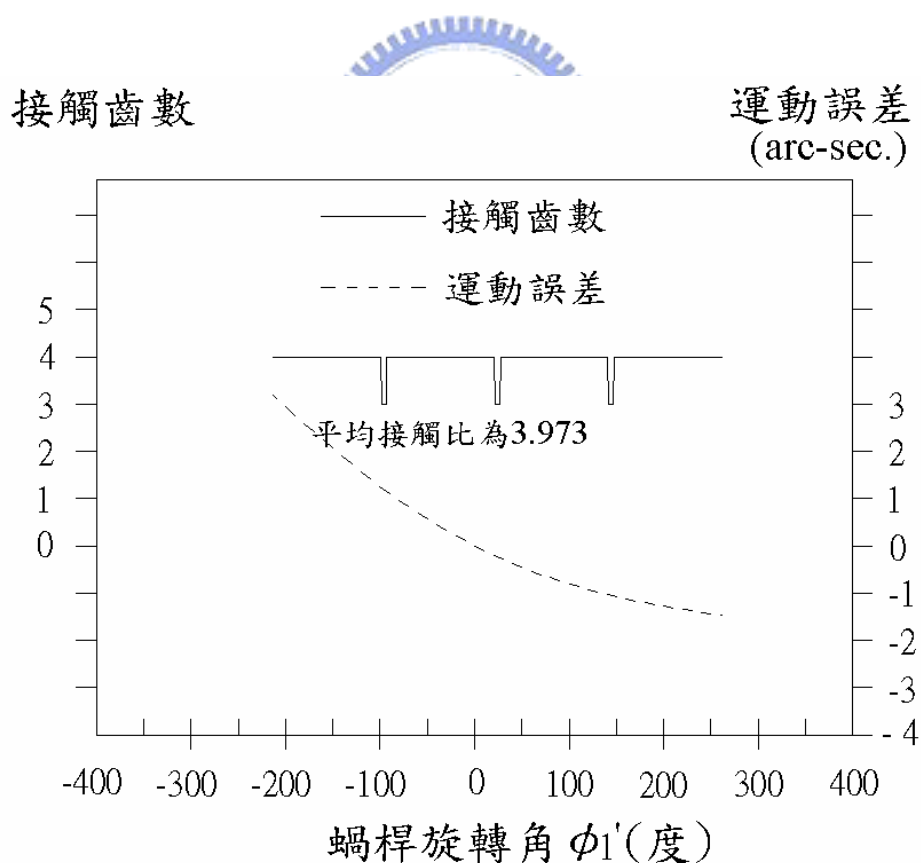


圖 4.13 垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = -0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.14 中心距誤差 $\Delta A = 0.2$ mm，水平軸向誤差 $\Delta \gamma_h = -0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-212.1	-21.8742	23.7302	177.9170	-246.1208	7.1664	-249.6932	-210.8965	-21.8169	3.3296	3.89
-200.0	-20.6382	23.7110	177.9618	-232.1032	7.1805	-235.4534	-198.6158	-20.5465	3.2346	
-160.0	-16.5064	23.6467	178.1121	-185.7104	7.2267	-188.3142	-157.9976	-16.3446	2.8484	
-120.0	-12.3773	23.5865	178.2528	-139.4442	7.2684	-141.3407	-117.4240	-12.1473	2.2921	
-80.0	-8.2504	23.5381	178.3665	-93.5321	7.3005	-94.8354	-76.9545	-7.9608	1.6015	
-40.0	-4.1248	23.5065	178.4408	-48.1482	7.3205	-49.0258	-36.6300	-3.7893	0.8224	
0.0	0.0000	23.4929	178.4727	-3.3775	7.3285	-4.0122	3.5401	0.3662	0.0000	
40.0	4.1247	23.4951	178.4674	40.7774	7.3268	40.2211	43.5733	4.5076	-0.8299	
80.0	8.2497	23.5094	178.4340	84.3648	7.3184	83.7579	83.5001	8.6379	-1.6431	
120.0	12.3752	23.5317	178.3816	127.4544	7.3059	126.7060	123.3528	12.7606	-2.4262	
160.0	16.5012	23.5588	178.3179	170.1186	7.2913	169.1703	163.1584	16.8785	-3.1729	
200.0	20.6279	23.5884	178.2486	212.4236	7.2759	211.2418	202.9376	20.9935	-3.8821	
240.0	24.7551	23.6188	178.1774	254.4267	7.2606	252.9952	242.7046	25.1074	-4.5551	
255.1	26.3241	23.6302	178.1505	270.1846	7.2550	268.6573	257.6869	26.6573	-4.7826	

接觸齒數

運動誤差
(arc-sec.)

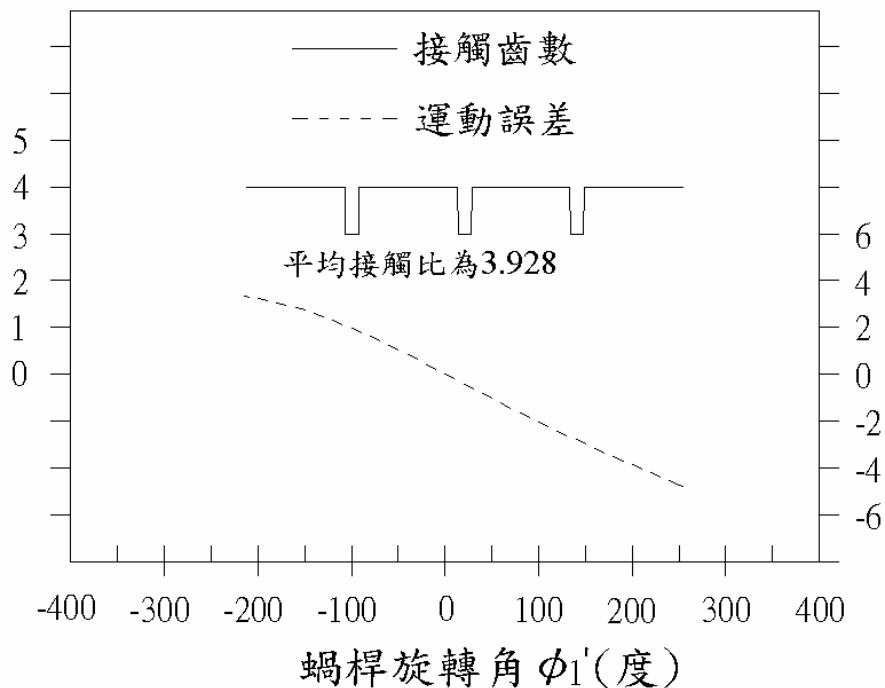


圖 4.14 中心距誤差 $\Delta A = 0.2$ mm，水平軸向誤差 $\Delta \gamma_h = -0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.15 中心距誤差 $\Delta A = 0.2$ mm，垂直軸向誤差 $\Delta \gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-207.8	-21.5328	23.9164	177.4840	-242.8361	7.0102	-249.1057	-209.1729	-21.6386	-0.9942	3.86
-200.0	-20.7040	23.9085	177.5024	-233.8167	7.0154	-239.9958	-201.2716	-20.8212	-0.8997	
-160.0	-16.5594	23.8632	177.6075	-187.6039	7.0449	-193.2650	-160.8015	-16.6346	-0.4852	
-120.0	-12.4169	23.8118	177.7269	-141.4148	7.0780	-146.4878	-120.2800	-12.4428	-0.1921	
-80.0	-8.2762	23.7586	177.8508	-95.4467	7.1113	-99.9068	-79.7460	-8.2496	-0.0231	
-40.0	-4.1374	23.7086	177.9674	-49.8849	7.1415	-53.7631	-39.2454	-4.0599	0.0335	
0.0	0.0000	23.6661	178.0666	-4.8589	7.1659	-8.2325	1.1844	0.1225	0.0000	
40.0	4.1364	23.6335	178.1430	39.5763	7.1838	36.6046	41.5240	4.2956	-0.0971	
80.0	8.2721	23.6107	178.1963	83.4305	7.1954	80.7547	81.7721	8.4592	-0.2339	
120.0	12.4076	23.5964	178.2297	126.7538	7.2020	124.2795	121.9397	12.6144	-0.3914	
160.0	16.5429	23.5889	178.2472	169.6127	7.2049	167.2635	162.0422	16.7630	-0.5563	
200.0	20.6782	23.5865	178.2530	212.0758	7.2052	209.7934	202.0954	20.9064	-0.7201	
240.0	24.8136	23.5874	178.2507	254.2056	7.2039	251.9476	242.1128	25.0462	-0.8780	
256.5	26.5052	23.5886	178.2480	271.5435	7.2030	269.2862	258.6537	26.7573	-0.9368	

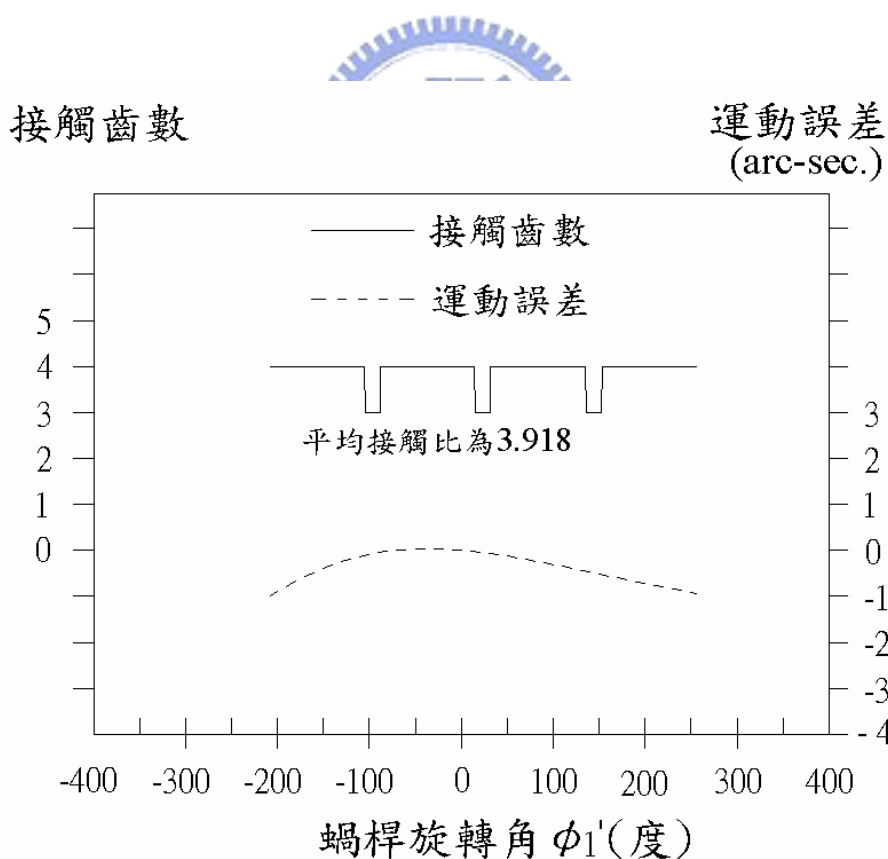


圖 4.15 中心距誤差 $\Delta A = 0.2$ mm，垂直軸向誤差 $\Delta \gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.16 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	φ_1 (deg.)	l (mm)	φ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-204.8	-21.3690	24.1633	176.9142	-240.6731	6.9044	-248.7429	-208.0441	-21.5218	-4.1078	3.9
-200.0	-20.7537	24.1652	176.9099	-235.1670	6.9026	-243.2627	-203.2476	-21.0256	-4.0230	
-160.0	-16.6038	24.1775	176.8816	-189.3672	6.8902	-197.6431	-163.3619	-16.8995	-3.2720	
-120.0	-12.4530	24.1824	176.8702	-143.5615	6.8836	-151.9381	-123.4052	-12.7661	-2.4658	
-80.0	-8.3019	24.1784	176.8795	-97.8821	6.8834	-106.2624	-83.3649	-8.6240	-1.6334	
-40.0	-4.1507	24.1651	176.9101	-52.4646	6.8895	-60.7473	-43.2400	-4.4731	-0.8035	
0.0	0.0000	24.1435	176.9597	-7.4263	6.9008	-15.5214	-3.0415	-0.3146	0.0000	
40.0	4.1500	24.1159	177.0232	37.1511	6.9154	29.3113	37.2104	3.8493	0.7611	
80.0	8.2993	24.0848	177.0949	81.2308	6.9316	73.6865	77.4925	8.0165	1.4725	
120.0	12.4477	24.0524	177.1695	124.8167	6.9480	117.5837	117.7845	12.1846	2.1334	
160.0	16.5955	24.0205	177.2433	167.9414	6.9638	161.0173	158.0712	16.3522	2.7477	
200.0	20.7425	23.9899	177.3138	210.6536	6.9784	204.0243	198.3436	20.5183	3.3208	
240.0	24.8890	23.9613	177.3800	253.0065	6.9916	246.6523	238.5972	24.6825	3.8590	
263.7	27.2251	23.9454	177.4169	277.9055	6.9989	271.7035	262.3929	27.1441	4.1510	

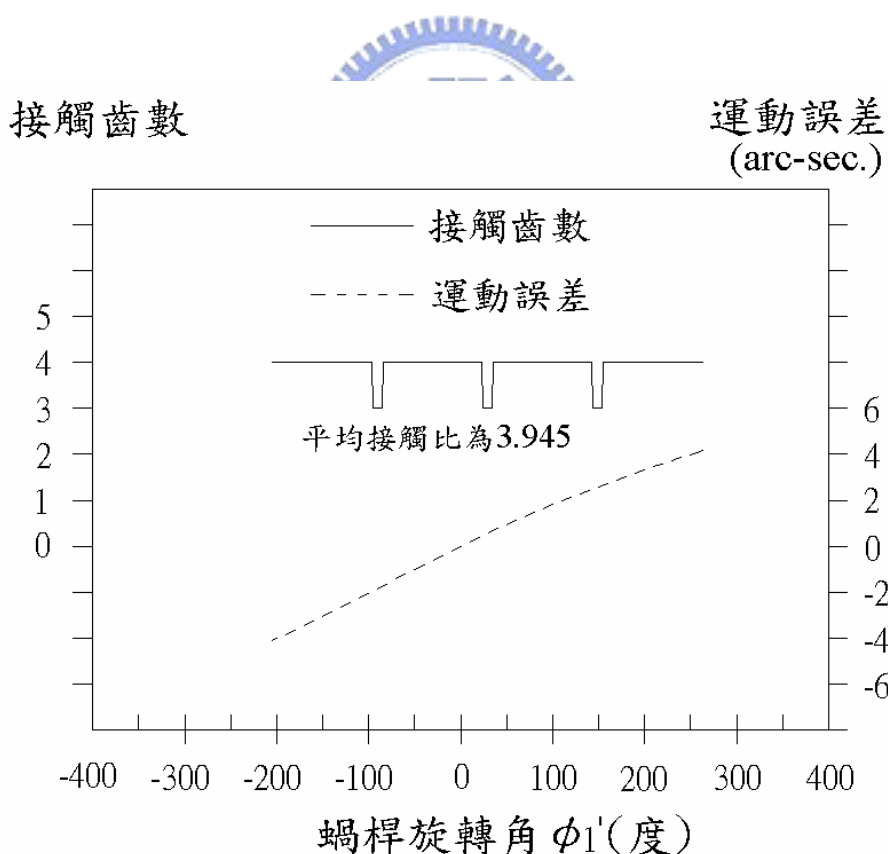


圖 4.16 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.17 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-203.9	-21.2328	24.2456	176.7253	-239.6373	6.8719	-248.6372	-207.7040	-21.4866	-2.1506	3.87
-200.0	-20.7227	24.2426	176.7321	-235.1662	6.8740	-244.1391	-203.7936	-21.0821	-2.0766	
-160.0	-16.5737	24.2074	176.8130	-189.0499	6.8995	-197.6939	-163.4812	-16.9118	-1.3834	
-120.0	-12.4268	24.1647	176.9109	-142.9165	6.9304	-151.1444	-123.1025	-12.7347	-0.8192	
-80.0	-8.2822	24.1167	177.0213	-96.9432	6.9645	-104.6895	-82.6772	-8.5528	-0.4008	
-40.0	-4.1400	24.0670	177.1358	-51.3086	6.9989	-58.5453	-42.2370	-4.3693	-0.1312	
0.0	0.0000	24.0196	177.2452	-6.1540	7.0308	-12.8952	-1.8161	-0.1879	0.0000	
40.0	4.1381	23.9779	177.3418	38.4410	7.0582	32.1468	38.5584	3.9888	0.0124	
80.0	8.2747	23.9434	177.4214	82.4613	7.0804	76.5457	78.8715	8.1591	-0.0705	
120.0	12.4102	23.9168	177.4832	125.9389	7.0974	120.3284	119.1202	12.3228	-0.2266	
160.0	16.5448	23.8972	177.5286	168.9318	7.1099	163.5571	159.3093	16.4803	-0.4370	
200.0	20.6787	23.8836	177.5600	211.5058	7.1188	206.3072	199.4472	20.6325	-0.6870	
240.0	24.8122	23.8750	177.5800	253.7246	7.1249	248.6530	239.5432	24.7803	-0.9656	
260.5	26.8208	23.8722	177.5866	275.2169	7.1271	270.1944	260.0542	26.9022	-1.1131	

接觸齒數

運動誤差
(arc-sec.)

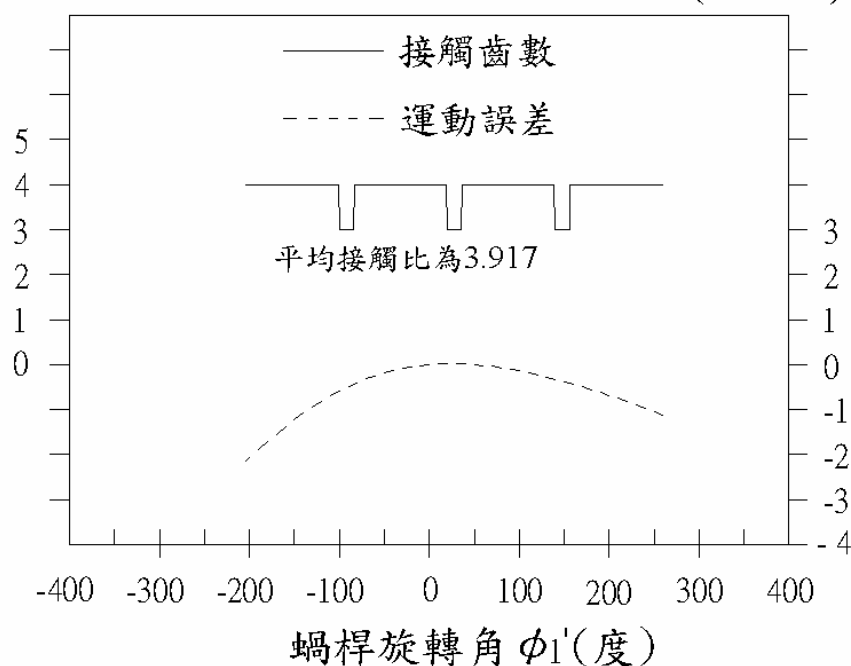


圖 4.17 水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.18 中心距誤差 $\Delta A = 0.2$ mm，水平軸向誤差 $\Delta \gamma_h = 0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta \gamma_v = 0.1^\circ$ ，
 蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-208.3	-21.6000	23.8757	177.5784	-243.3466	7.0261	-249.1624	-209.3446	-21.6563	-2.0654	3.88
-200.0	-20.7207	23.8726	177.5857	-233.8356	7.0274	-239.6105	-201.0291	-20.7961	-1.9480	
-160.0	-16.5754	23.8535	177.6300	-187.8005	7.0361	-193.3332	-160.7887	-16.6333	-1.4880	
-120.0	-12.4306	23.8284	177.6882	-141.7935	7.0487	-147.0172	-120.4937	-12.4649	-1.0554	
-80.0	-8.2864	23.7990	177.7566	-95.9835	7.0638	-100.8505	-80.1617	-8.2926	-0.6617	
-40.0	-4.1429	23.7679	177.8291	-50.5303	7.0796	-55.0237	-39.8192	-4.1192	-0.3111	
0.0	0.0000	23.7378	177.8991	-5.5531	7.0942	-9.6869	0.5077	0.0525	0.0000	
40.0	4.1424	23.7109	177.9620	38.8871	7.1066	35.0748	40.7993	4.2206	0.2797	
80.0	8.2844	23.6881	178.0153	82.7844	7.1164	79.2436	81.0462	8.3841	0.5380	
120.0	12.4263	23.6694	178.0588	126.1723	7.1238	122.8515	121.2477	12.5429	0.7839	
160.0	16.5680	23.6545	178.0937	169.1046	7.1291	165.9572	161.4084	16.6974	1.0247	
200.0	20.7098	23.6425	178.1218	211.6416	7.1329	208.6289	201.5354	20.8485	1.2653	
240.0	24.8516	23.6328	178.1446	253.8415	7.1356	250.9330	241.6358	24.9968	1.5090	
258.2	26.7148	23.6289	178.1537	272.9505	7.1366	270.0813	259.8795	26.8841	1.6326	

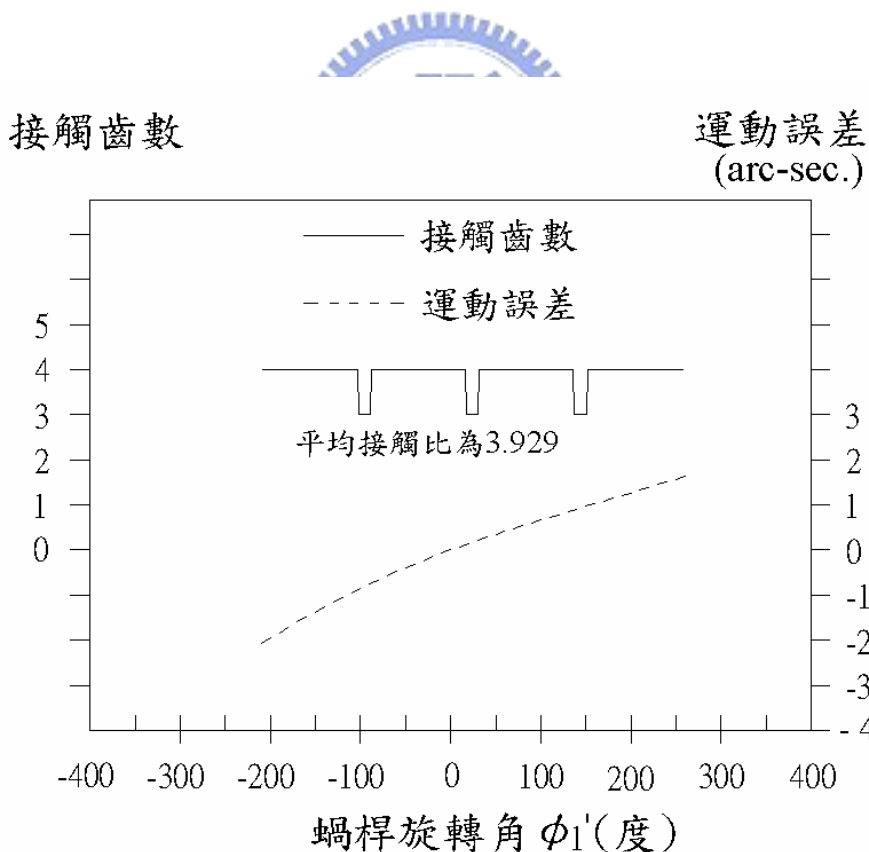


圖 4.18 中心距誤差 $\Delta A = 0.2$ mm，水平軸向誤差 $\Delta \gamma_h = 0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta \gamma_v = 0.1^\circ$ ，
 蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

表 4.19 中心距誤差 $\Delta A = -0.2 \text{ mm}$ ，水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸情形

ϕ'_1 (deg.)	ϕ'_2 (deg.)	u_1 (mm)	θ (deg.)	ϕ_1 (deg.)	l (mm)	ϕ_2 (deg.)	ϕ_1 (deg.)	ϕ_2 (deg.)	K.E. (arc-sec.)	接觸比
-200.6	-21.0217	24.5237	176.0908	-237.0971	6.7582	-248.2882	-206.5379	-21.3660	-4.2162	3.88
-160.0	-16.6029	24.5196	176.1002	-190.5217	6.7624	-201.8054	-165.9737	-17.1697	-3.2181	
-120.0	-12.4500	24.5078	176.1271	-144.5998	6.7729	-155.8841	-125.9391	-13.0282	-2.2758	
-80.0	-8.2983	24.4870	176.1743	-98.7768	6.7901	-109.9562	-85.8186	-8.8778	-1.4075	
-40.0	-4.1482	24.4575	176.2414	-53.2013	6.8130	-64.1699	-45.6138	-4.7187	-0.6425	
0.0	0.0000	24.4211	176.3242	-8.0066	6.8398	-18.6750	-5.3398	-0.5524	0.0000	
40.0	4.1461	24.3807	176.4163	36.7114	6.8682	26.4036	34.9792	3.6185	0.5128	
80.0	8.2902	24.3395	176.5105	80.9065	6.8961	70.9869	75.3161	7.7913	0.8996	
120.0	12.4324	24.2999	176.6010	124.5796	6.9219	115.0471	115.6480	11.9636	1.1721	
160.0	16.5731	24.2637	176.6838	167.7650	6.9448	158.5988	155.9591	16.1337	1.3452	
200.0	20.7125	24.2318	176.7570	210.5154	6.9645	201.6831	196.2404	20.3007	1.4346	
240.0	24.8507	24.2043	176.8200	252.8889	6.9812	244.3535	236.4888	24.4644	1.4550	
265.9	27.3287	24.1888	176.8556	280.1637	6.9905	271.8006	262.5439	27.1597	1.4378	

接觸齒數

運動誤差
(arc-sec.)

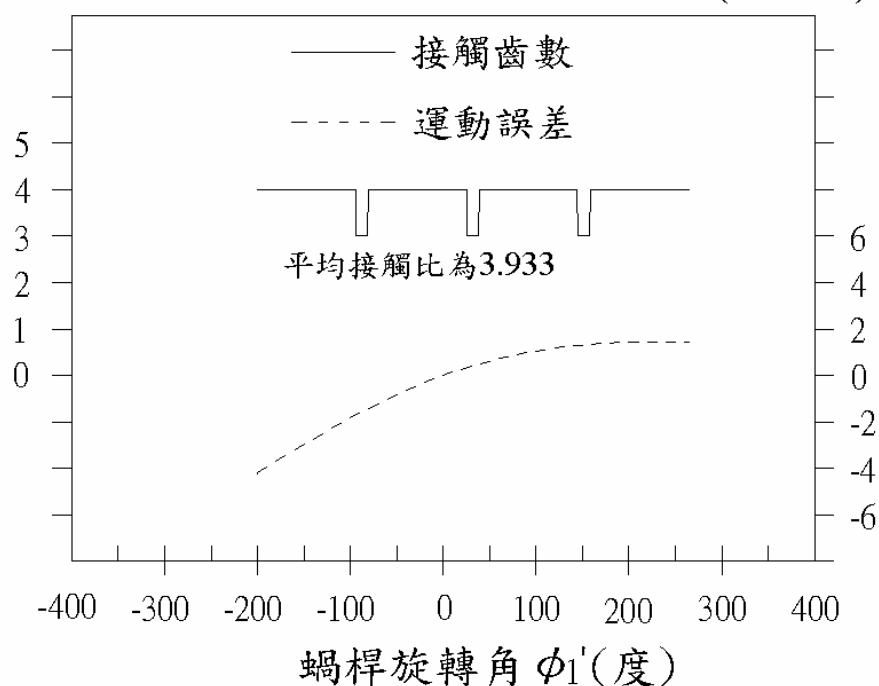
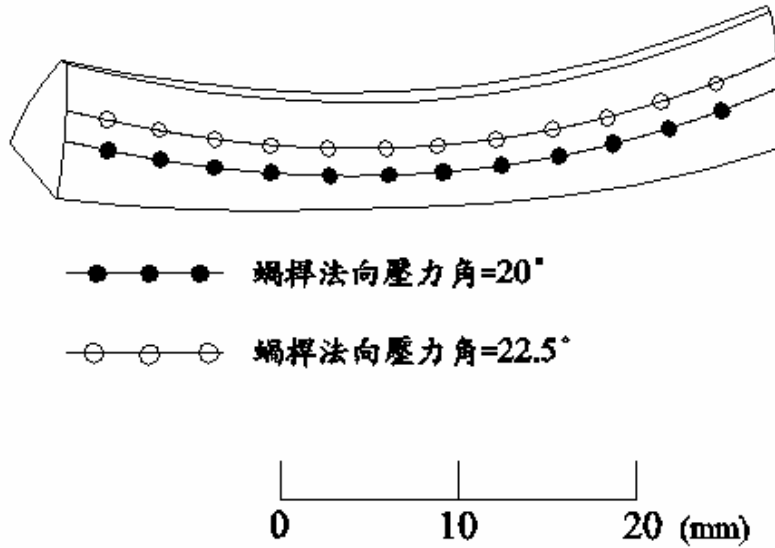


圖 4.19 中心距誤差 $\Delta A = -0.2 \text{ mm}$ ，水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$ ，垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$ ，蝸桿 2 與蝸輪 2 之接觸齒數與運動誤差

(a) 蝸輪之法向壓力角為 20° ，改變蝸桿之壓力角



(b) 蝸桿之法向壓力角為 20° ，改變蝸輪之壓力角

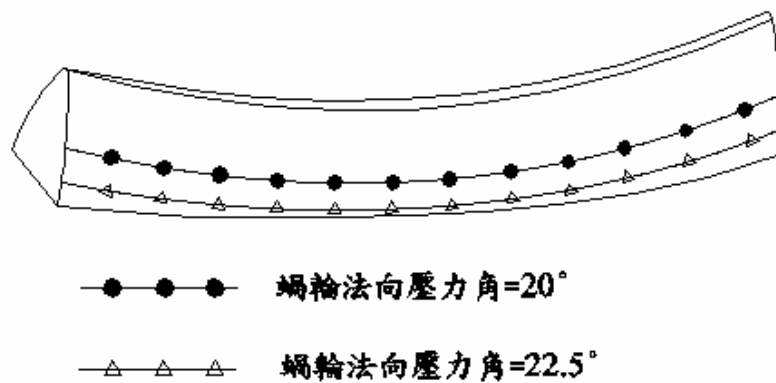


圖 4.20 蝸桿與蝸輪在不同壓力角時之接觸點軌跡圖

表 4.20 裝配條件與運動誤差值

	蝸桿 1($\alpha_1=20^\circ$)			蝸桿 2($\alpha_1=22.5^\circ$)		
	蝸輪 1 ($\gamma=30^\circ$)	蝸輪 2 ($\gamma=45^\circ$)	蝸輪 3 ($\gamma=60^\circ$)	蝸輪 1 ($\gamma=30^\circ$)	蝸輪 2 ($\gamma=45^\circ$)	蝸輪 3 ($\gamma=60^\circ$)
$\Delta A=0.2\text{ mm}$	2.413	4.531	6.09	2.419	4.526	6.203
$\Delta A=-0.2\text{ mm}$	2.436	4.567	6.155	2.439	4.563	6.225
$\Delta \gamma_h=0.1^\circ$	3.364	3.661	4.255	3.22	3.606	4.436
$\Delta \gamma_h=-0.1^\circ$	3.259	3.659	4.225	3.213	3.593	4.433
$\Delta \gamma_v=0.1^\circ$	2.651	3.847	6.628	3.263	4.64	7.647
$\Delta \gamma_v=-0.1^\circ$	2.644	3.868	6.45	3.258	4.652	7.468

越大時，則可發現中心距誤差和垂直軸向誤差對蝸桿蝸輪組之運動誤差的影響較為顯著。

在理想之裝配條件下，當蝸桿之法向壓力角改變時，接觸點落在齒面之位置有上下移動的情形，一般而言，讓接觸點保持在齒面中央處比較佳。茲改變蝸桿和蝸輪之法向壓力角，以探討其接觸點落在齒面之位置的變化情形，如圖 4.20 所示；圖 4.20(a)顯示壓力角為 20° 之蝸輪與不同壓力角(20° 及 22.5°)之蝸桿的接觸情形，圖 4.20(b)則為壓力角 20° 之蝸桿與不同壓力角(20° 及 22.5°)之蝸輪的接觸情形。

4.5 討論

對偶創成之蝸桿蝸輪組，在理想裝配條件下，皆屬於線接觸傳動機構。根據方宏聲[10]的研究結果顯示，在 90° 交錯角之下，將不同型態的蝸桿和蝸輪(非對偶創成)做配對，其蝸桿蝸輪組之齒面接觸屬於點接觸之型態，而且在理想裝配條件下，齒輪組會有運動誤差產生，此運動誤差值隨著不同之蝸桿蝸輪組而有所改變，同時，他也提出利用增徑滾刀(Over Size Hob Cutter)的方式來滾切蝸輪，也可以有效的改變其運動誤差值，進而可以找到較適合的滾刀節圓半徑來切製蝸輪，以減少蝸桿蝸輪組之運動誤差值。本研究所探討之非 90° 交錯角之 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪組，屬於非對偶創成之蝸桿蝸輪組，若將 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪做配對嚙合，根據前節之分析結果顯示，在理想裝配條件下，此蝸桿蝸輪組之特點為沒有運動誤差值，同時，接觸比與平均接觸比也隨著不同之交錯角而有所改變。在 60° 交錯角以內，此蝸桿蝸輪組之接觸比與平均接觸比隨著交錯角之增大而增大。其次，分析之結果亦顯示，藉由改變蝸桿和蝸輪之壓力角，可以改變齒輪組之接觸點軌跡的位置，如圖 4.20 所示。一般而言，蝸桿

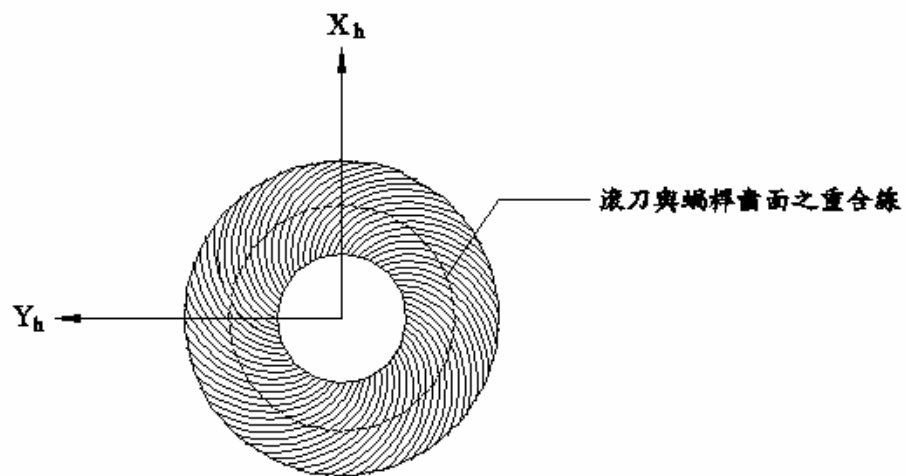
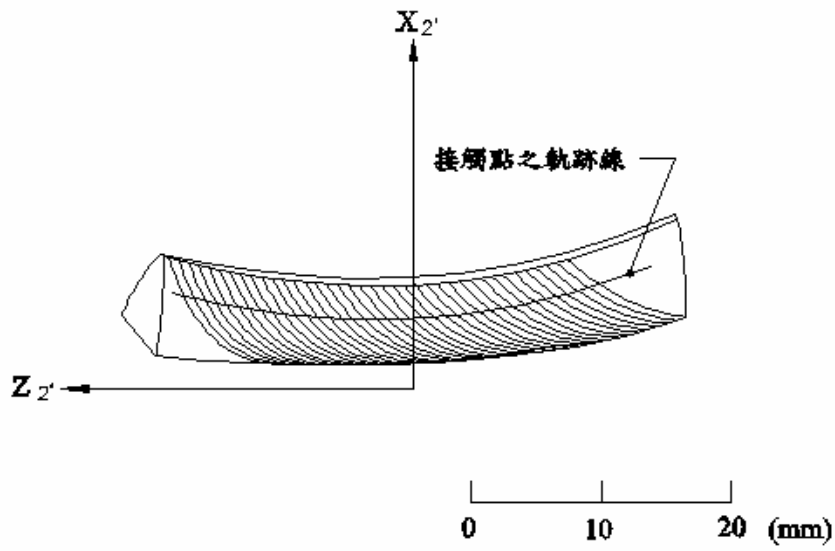
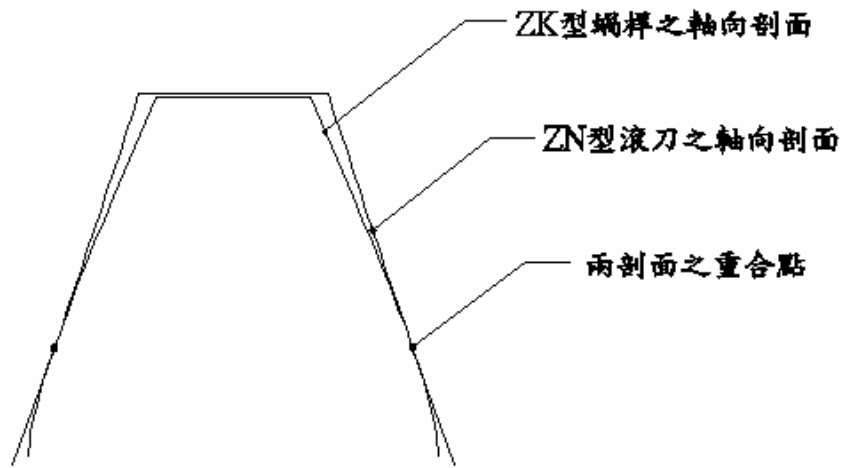


圖 4.21 滾刀與蝸輪在 45° 交錯角下嚙合之接觸線

(a) 兩型蝸桿之剖面比較



(b) 蝸桿之軸向剖面

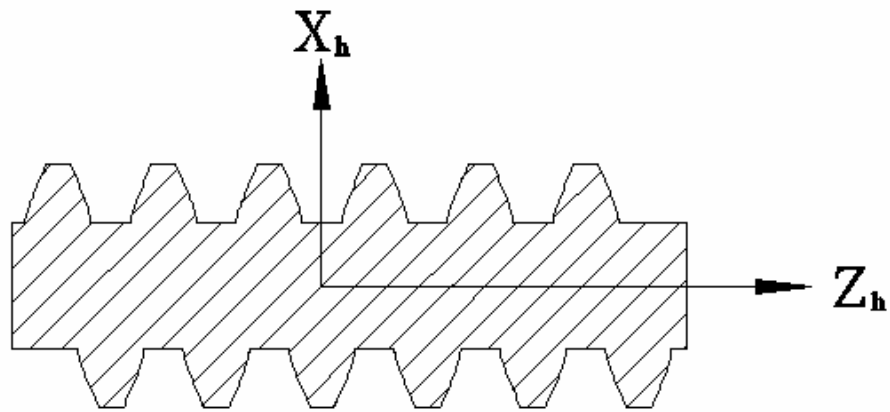


圖 4.22 ZN 型滾刀與 ZK 型蝸桿之剖面示意圖

與蝸輪兩者之壓力角不要相差太大，同時，接觸點軌跡最好也能夠保持落在齒面中央區域，因為，在齒輪組傳動時，齒面會因負載作用而產生應變，如果接觸點軌跡太靠近齒底，則接觸點有可能會因而落在齒面過切線與齒底之間的現象產生，反之，若接觸點軌跡太接近齒頂，則蝸輪齒面會因受力太接近齒頂位置而崩壞，同時負載能力也會降低。

圖 4.21 顯示 ZN 型滾刀創成 ZN 型蝸輪時之接觸線，當滾刀在 45° 交錯角下創成蝸輪時，此接觸線表示在滾刀座標系 S_h 為放射狀分布，如圖 4.21(b) 所示。圖 4.22 則為 ZN 型滾刀與 ZK 型蝸桿齒面之剖面圖，根據第二章之 ZK 型蝸桿創成方法，以及第三章所述之 ZN 型滾刀創成法可知，ZK 型蝸桿被磨輪所切削之部分會比 ZN 型蝸桿被車刀所切削之部分來得多，因此，ZK 型蝸桿之剖面其齒面曲率會比較大，並且會有重合點。將 ZK 型蝸桿代替滾刀，使之與 ZN 型蝸輪做嚙合配對時，則蝸桿蝸輪組會由線接觸變成點接觸，若將其接觸點軌跡表示在蝸桿上，即為一條螺旋線。如圖 4.21 所示，其放射狀的接觸線，使得蝸桿和蝸輪隨時都有接觸點，並不會有旋轉角落後或超前的情形發生。因此，此蝸桿蝸輪組在理想裝配條件下並不會有運動誤差，此現象也可以由陳嘉宏[6]之研究結果獲得驗證。

第五章 接觸齒印

5.1 前言

本研究討論之 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪屬於非對偶創成之齒輪對，理論上齒輪之齒面在嚙合傳動時呈現點接觸，此現象也由第四章之齒輪接觸分析結果獲得印証。然而，一對齒輪在嚙合時因齒面承受負荷，將使得齒面在其接觸點的附近產生彈性變形，因此，兩齒面的接觸會從理論上的點接觸變成一個區域的接觸，這樣的接觸變形區域稱為接觸齒印（Contact Pattern）。通常這個接觸區域的形狀相當接近橢圓形，因此又稱為接觸橢圓（Contact Ellipse）。齒輪之接觸齒印可以用電腦數值模擬或是由實驗量測的方式求得。

實驗上量測接觸齒印可以用齒印量測儀來進行量測，其方法是在被量測的齒輪對之其中一個齒輪的齒面上塗抹上一層紅丹後，放置於齒印量測儀上進行嚙合運轉，齒輪之齒面因負載而產生彈性變形的接觸區域內之紅丹，就會被刮除並轉印到另一個齒輪上，形成接觸齒印。

至於齒面接觸齒印之電腦數值模擬方式則有兩種方法，其中一種方法為 Litvin[7]所提出之曲率分析法，係依據微分幾何的原理求得兩齒面之主軸方向（Principal Directions）及主軸曲率（Principal Curvatures），若經實驗測得齒面彈性變形量，即可求得接觸齒印長短軸之長度及接觸齒印之分布情形。另一種方法是 Janninck[3]所提出之接觸齒面外形(Contact Surface Topology)法(以下簡稱齒面外形法)，此法係將齒輪之齒面視為不變形的剛體，並將接觸點附近兩齒面間距小於紅丹顆粒大小（約為 0.00632mm）之齒面區域，因嚙合時紅丹顆粒將會脫落或被刮落，此被刮落的區域可視為齒面因受力變形後將會產生接觸的區域，即為接觸齒印。相較而言，齒面外形法較簡單而且不需推導繁雜的齒面曲率與主軸方向之關係式，可以電腦數值計算與模擬的

方式快速求得近似的接觸齒印。因此，本論文採用齒面外形法來進行齒輪接觸齒印的分析，詳細的分析過程如下節所述。

5.2 齒面外形法

齒面外形法其原理如圖 5.1(a)所示，其中 O_T 為兩齒面 Σ_1 及 Σ_2 之瞬間接觸點， n 為兩齒面在接觸點 O_T 之共同單位法向量， T 為兩齒面之共同切平面(Tangent Plane)。在此定義座標系 $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$ 為接觸點座標系，其座標系原點與兩齒面之瞬間接觸點 O_T 重合， Z_T 軸選定為與兩齒面接觸點共同法向量 n 同方向，因此 $X_T - Y_T$ 平面必為兩齒面之切平面。齒面外形法主要是模擬齒輪對在嚙合時，在接觸點附近的紅丹顆粒將因齒面間距小於紅丹顆粒而被刮除，此刮除的區域即形成接觸齒印。因此，使用數值模擬來計算接觸點附近齒面間距時，齒面間距小於紅丹顆粒大小的區域即為接觸齒印。

齒面外形法的實際做法是將兩嚙合的齒輪之齒面方程式，利用座標轉換至兩齒輪嚙合齒面之共同切平面座標系 $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$ 上，再沿著與 X_T 軸夾一 θ_T 角之 r 方向，如圖 5.1(a)所示，計算兩齒面之間的距離。圖 5.1(b)為固定一個 θ_T 角而沿著 r 方向之截面圖，由該圖可知，若將兩齒面方程式轉換至切平面座標系 $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$ 之後，齒面到切平面的距離等於在 Z_T 軸的分量大小，因此，兩齒面在 Z_T 軸之分量兩者相減之絕對值即為兩齒面之間的距離。當計算所得之間距等於紅丹顆粒大小($6.32 \mu m$)時，此點正是齒印輪廓上的一點，故予以紀錄此點之極座標值 (r, θ_T) ，接著再改變一個 θ_T 值重複進行上述步驟，即可求得齒印輪廓上其他的相對應點，而這些點的集合即是接觸齒印的外形。

首先將兩嚙合之蝸桿與蝸輪之齒面方程式經由座標轉換至切平

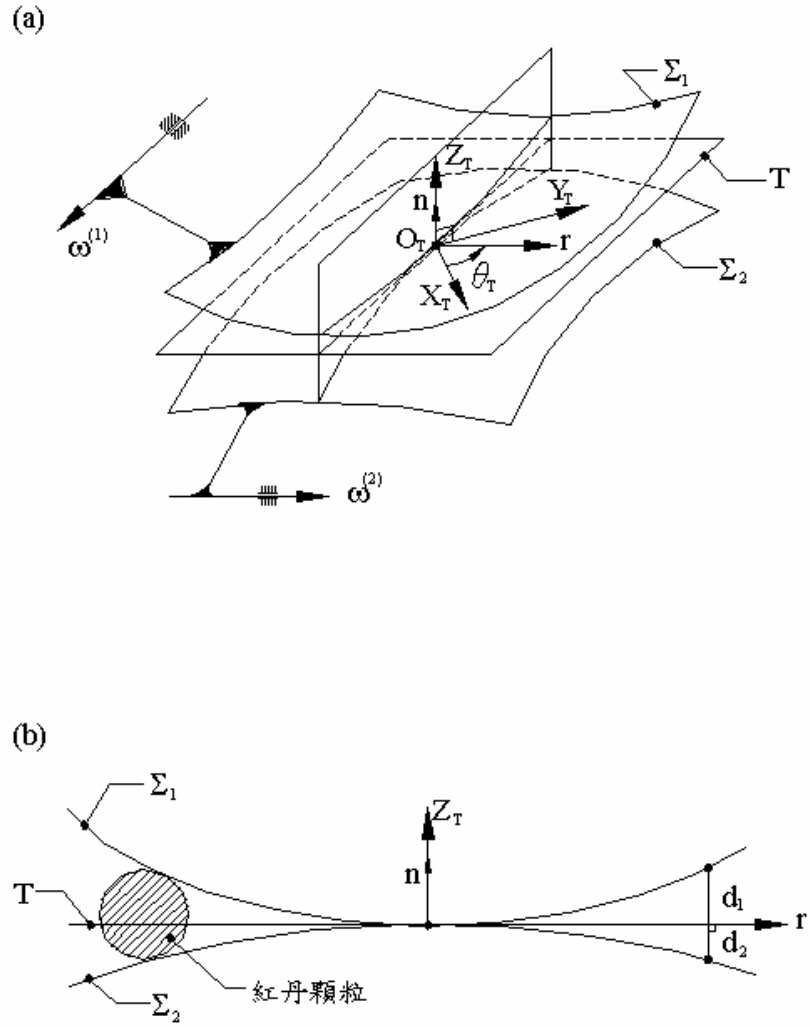


圖 5.1 嚙合齒面與其切平面關係圖

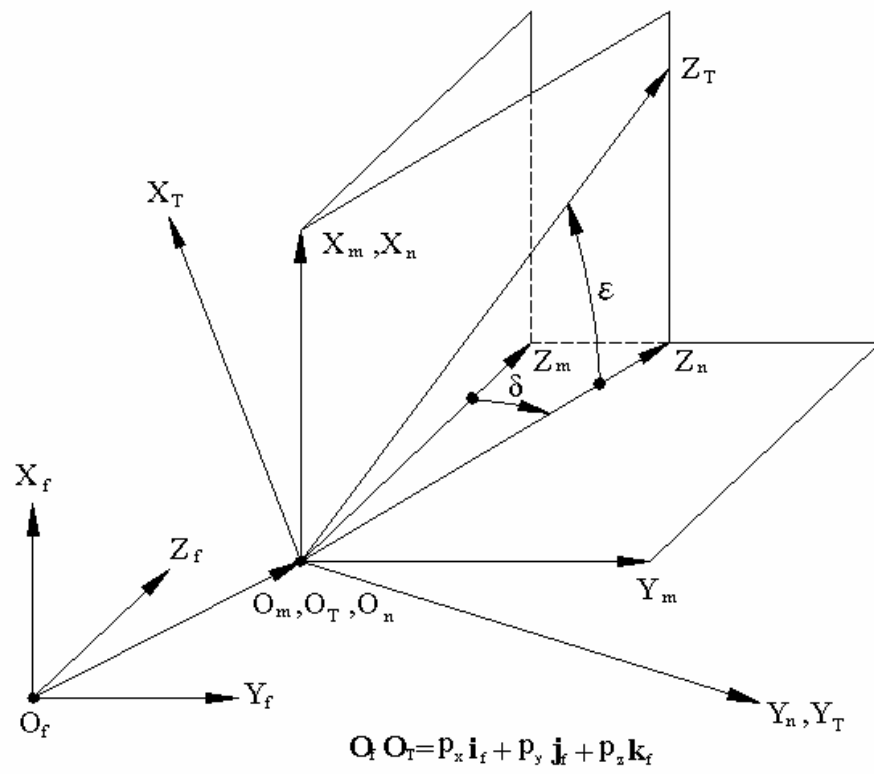


圖 5.2 接觸點與其切平面座標關係圖

面座標系 $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$ ，如圖 5.2 所示，其中座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為蝸桿蝸輪組之固定座標系，座標系 $S_m(X_m, Y_m, Z_m)$ 和 $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ 為輔助座標系， δ 角為 Z_m 軸與 Z_n 軸之夾角， ε 角則為 Z_T 軸與 Z_n 軸之夾角。位置向量 \mathbf{R}_f 由座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 轉換至座標系 $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$ 之齊次座標轉換矩陣方程式如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_T^{(i)} &= \mathbf{M}_{T,n} \mathbf{M}_{n,m} \mathbf{M}_{m,f} \mathbf{R}_f^{(i)} \\ &= \mathbf{M}_{T,f} \mathbf{R}_f^{(i)} \quad (i=1,2)\end{aligned}\quad (5.1)$$

其中

$$\mathbf{M}_{m,f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{n,m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ 0 & \sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{T,n} = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon & 0 & -\sin\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varepsilon & 0 & \cos\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

經整理之後可得座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 轉換至座標系 $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$ 之齊次座標轉換矩陣如下：

$$\mathbf{M}_{T,f} = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon\sin\delta & -\sin\varepsilon\cos\delta & -p_x \cos\varepsilon + \sin\varepsilon(p_y \sin\delta + p_z \cos\delta) \\ 0 & \cos\delta & -\sin\delta & -p_y \cos\delta + p_z \sin\delta \\ \sin\varepsilon & \sin\varepsilon\sin\delta & \sin\varepsilon\cos\delta & -p_x \sin\varepsilon - \sin\varepsilon(p_y \sin\delta + p_z \cos\delta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，可求得 ZK 型蝸桿齒面方程式表示在其共同切平面座標係 $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$ 如下：

$$\mathbf{R}_T^{(1)} = \begin{bmatrix} R_{xT}^{(1)} \\ R_{yT}^{(1)} \\ R_{zT}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$= \begin{bmatrix} R_{xf}^{(1)} \cos \varepsilon - R_{yf}^{(1)} \sin \varepsilon \sin \delta - R_{zf}^{(1)} \sin \varepsilon \cos \delta - p_x \cos \varepsilon + \sin \varepsilon (p_y \sin \delta + p_z \cos \delta) \\ R_{yf}^{(1)} \cos \delta - R_{zf}^{(1)} \sin \delta - p_y \cos \delta + p_z \sin \delta \\ R_{xf}^{(1)} \sin \varepsilon + R_{yf}^{(1)} \sin \varepsilon \sin \delta + R_{zf}^{(1)} \sin \varepsilon \cos \delta - p_x \sin \varepsilon - \sin \varepsilon (p_y \sin \delta + p_z \cos \delta) \end{bmatrix}$$

同理，亦可求得 ZN 型蝸輪齒面方程式表示在共同切平面座標系

$S_T(X_T, Y_T, Z_T)$ 如下：

$$\mathbf{R}_T^{(2)} = \begin{bmatrix} R_{xT}^{(2)} \\ R_{yT}^{(2)} \\ R_{zT}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$= \begin{bmatrix} R_{xf}^{(2)} \cos \varepsilon - R_{yf}^{(2)} \sin \varepsilon \sin \delta - R_{zf}^{(2)} \sin \varepsilon \cos \delta - p_x \cos \varepsilon + \sin \varepsilon (p_y \sin \delta + p_z \cos \delta) \\ R_{yf}^{(2)} \cos \delta - R_{zf}^{(2)} \sin \delta - p_y \cos \delta + p_z \sin \delta \\ R_{xf}^{(2)} \sin \varepsilon + R_{yf}^{(2)} \sin \varepsilon \sin \delta + R_{zf}^{(2)} \sin \varepsilon \cos \delta - p_x \sin \varepsilon - \sin \varepsilon (p_y \sin \delta + p_z \cos \delta) \end{bmatrix}$$

上述之 p_x, p_y, p_z 為接觸點 O_T 在座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 之座標值，也就是接觸點之位置向量，另外，

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = \begin{bmatrix} R_{xf}^{(1)} \\ R_{yf}^{(1)} \\ R_{zf}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{與} \quad \mathbf{R}_f^{(2)} = \begin{bmatrix} R_{xf}^{(2)} \\ R_{yf}^{(2)} \\ R_{zf}^{(2)} \end{bmatrix}$$

已分別表示在(4.1)式和(4.4) 式中。

由於 Z_T 軸與接觸點之法向量 n 係同一方向，由圖 5.2 的幾何關係可知：

$$\tan \delta = \frac{n_y}{n_z}$$

$$\tan \varepsilon = \frac{n_x}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}},$$

其中， n_x 、 n_y 和 n_z 為接觸點之單位法向量的三個分量。依照齒面外形法，接觸齒印可定義為兩齒面間距為 $6.32 \mu\text{m}$ 之點的集合，因此，接觸齒印可由下列非線性方程組來定義：

$$X_T^{(1)} = X_T^{(2)} , \quad (5.4)$$

$$Y_T^{(1)} = Y_T^{(2)} , \quad (5.5)$$

$$\tan(\theta_T) = \frac{Y_T^{(1)}}{X_T^{(1)}} , \quad (5.6)$$

$$\text{及 } |Z_T^{(1)} - Z_T^{(2)}| = 6.32\mu\text{m} , \quad (5.7)$$

其中 $-\pi \leq \theta_T \leq \pi$

以上四個非線性方程組包含五個未知數： θ 、 φ_1 、 φ_2 、 ϕ_1 和 θ_T ，其中 θ 與 φ_1 為 ZK 型蝸桿之齒面參數， φ_2 與 ϕ_1 則為 ZN 型蝸輪之齒面參數，以參數 θ_T 為輸入值，其範圍定義由 $-\pi$ 至 π 。利用數值方法可求解以上聯立非線性方程組，並可求得接觸橢圓之外形及大小。

5.3 接觸齒印範例

以下範例將探討 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪組在不同之設計參數及不同之裝配條件下，蝸桿蝸輪組之接觸齒印分布情形，並將接觸齒印繪於蝸輪之齒面上。

表 5.1 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪組之主要設計參數

	蝸桿 1	蝸桿 2	蝸桿 3	蝸輪 1	蝸輪 2	蝸輪 3
法向模數 $m(\text{mm}/\text{齒})$	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
齒數	3	3	3	29	29	29
法向壓力角	17.5°	20°	22.5°	17.5°	20°	22.5°
交錯角 γ	45°					

範例一：

蝸桿蝸輪組之設計參數如表 5.1 所示，蝸桿之法向壓力角分別為 17.5°、20°和 22.5°，蝸輪之法向壓力角為 20°，假設在理想裝配條件

下，探討此 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪組之接觸齒印。

利用前節所述之齒印分析方法，可求得接觸齒印並繪於蝸輪之齒面上，如圖 5.3 所示。圖中所繪之接觸齒印是蝸桿轉動角度從-140 度至 180 度，每 20 度繪出一個接觸齒印之結果。圖 5.3 顯示齒印跟水平線呈一個斜角，再參考前章之圖 4.21 亦可發現，接觸橢圓的長軸方向近似於蝸輪的接觸線方向。

範例二：

ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪組之設計參數如表 5.1 所示，蝸桿之法向壓力角為 20° ，蝸輪之法向壓力角分別為 17.5° 、 20° 與 22.5° ，依然假設在理想裝配條件下，探討其接觸齒印的變化情形。

齒印分析結果如圖 5.4 所示，當蝸輪之法向壓力角為 22.5° 時，其接觸齒印相當靠近齒底，因此，以此配對之蝸桿蝸輪組並非合適之組合。

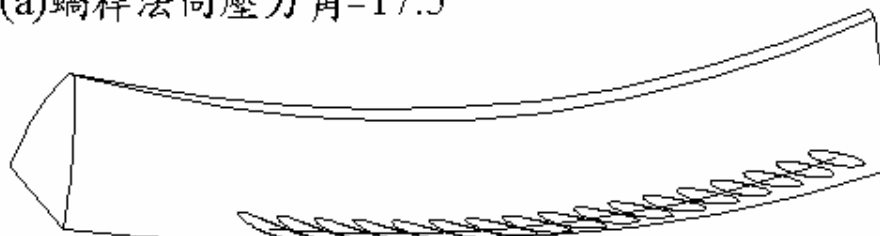


範例三：

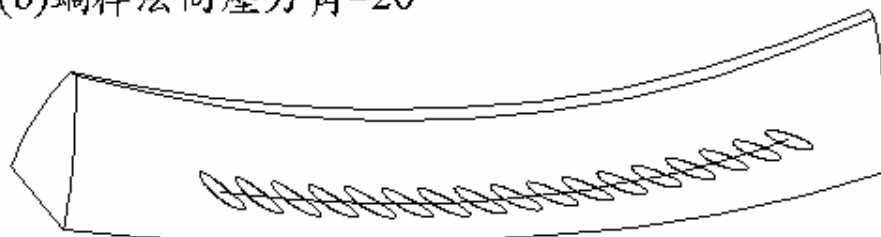
茲以表 5.1 所列之蝸桿 3 和蝸輪 2 進行嚙合配對，依然假設此 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪組在理想裝配條件下，而改變創成 ZK 型蝸桿之磨輪的節圓半徑 r_c ，其值分別為 12mm、20mm 與 28mm，探討此蝸桿蝸輪組嚙合接觸之兩齒面的接觸齒印變化情形，並將接觸齒印繪於蝸輪齒面上。

齒印分析結果如圖 5.5 所示，當磨輪的節圓半徑從 12mm 增加至 28mm 時，其兩齒面之接觸點軌跡隨著磨輪節圓半徑之增加而向下移動，但長軸的傾斜角度並沒有明顯改變。由接觸橢圓之放大圖可知，接觸齒印的長軸長度隨著磨輪節圓半徑之減小而有些微的增加，參考第二章所述之 ZK 型蝸桿創成原理，以及第三章所述之 ZN 型滾刀創成原理，比較磨輪與車刀，當磨輪節圓半徑越小，則所磨削去除蝸桿

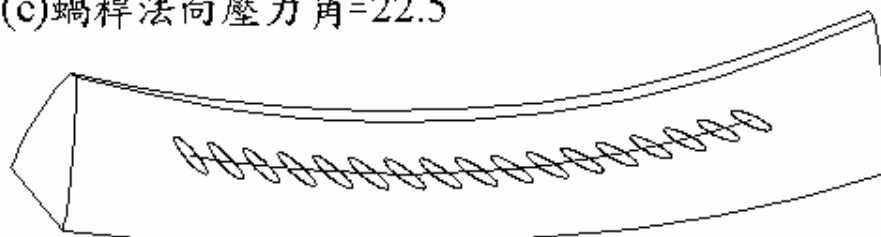
(a) 蝸桿法向壓力角=17.5°



(b) 蝸桿法向壓力角=20°



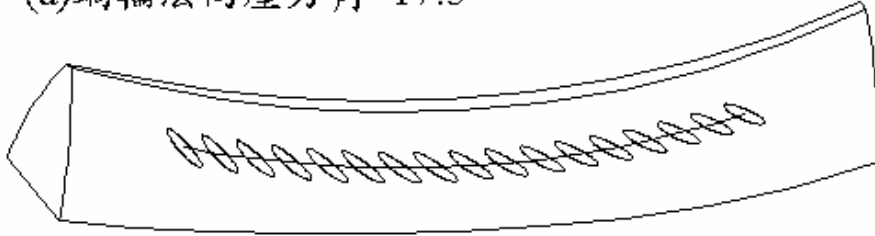
(c) 蝸桿法向壓力角=22.5°



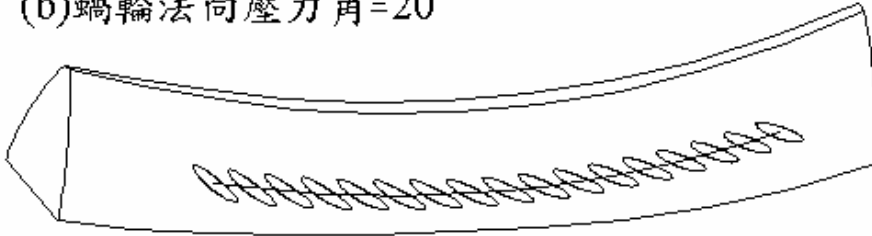
0 10 20 (mm)

圖 5.3 蝸桿壓力角對接觸齒印之影響(範例一)

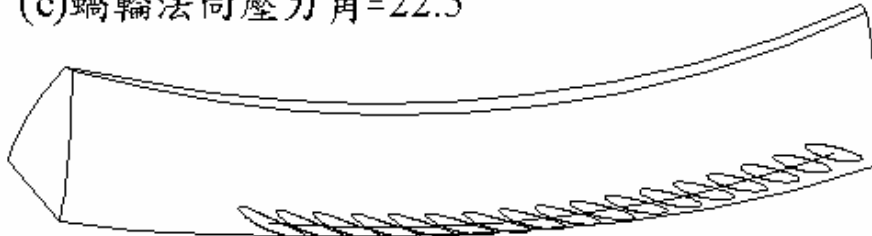
(a) 蝸輪法向壓力角 = 17.5°



(b) 蝸輪法向壓力角 = 20°



(c) 蝸輪法向壓力角 = 22.5°



0 10 20 (mm)

圖 5.4 蝸輪壓力角對接觸齒印之影響(範例二)

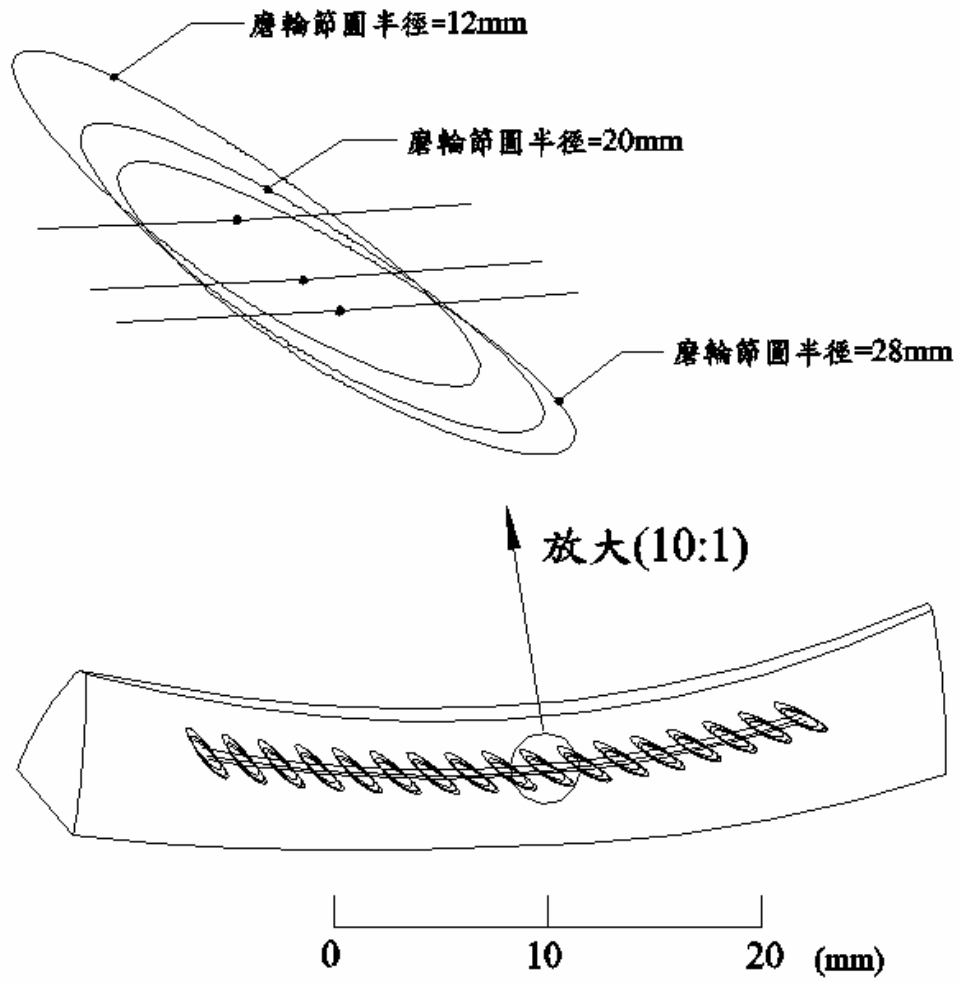


圖 5.5 磨輪半徑對接觸齒印之影響(範例三)

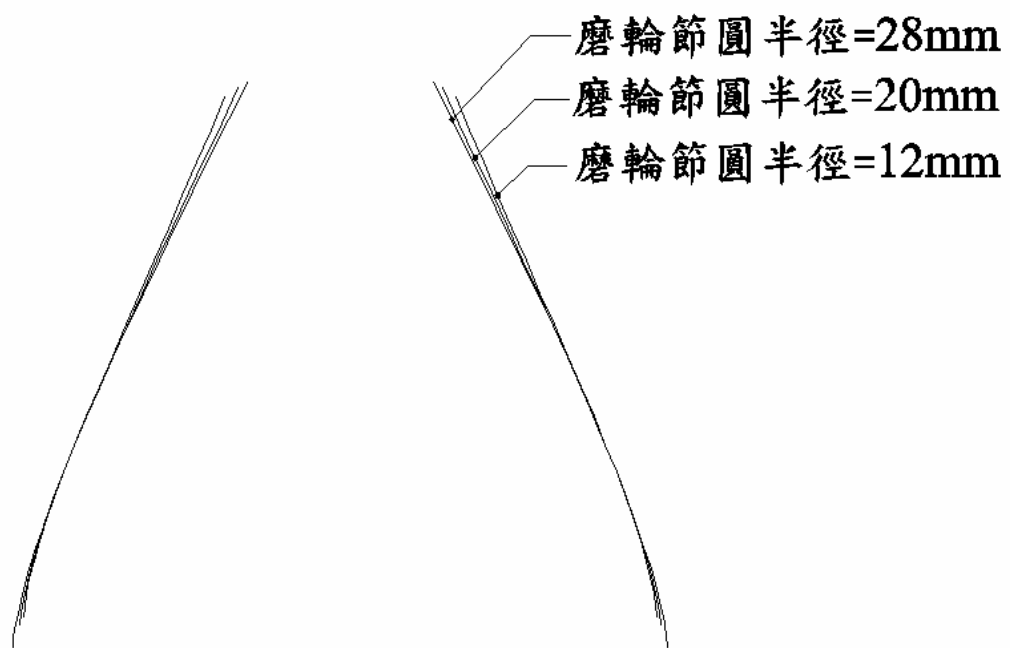


圖 5.6 蝸桿剖面與磨輪節圓半徑之關係

工件的體積將隨之減少，如圖 5.6 所示。換言之，就是蝸桿剖面之齒面曲率隨之變小。因此，ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪組兩齒面將更為貼近，由本章前節所述之齒印分析方法可知，接觸齒印也會隨著兩齒面更貼近而變大。

範例四：

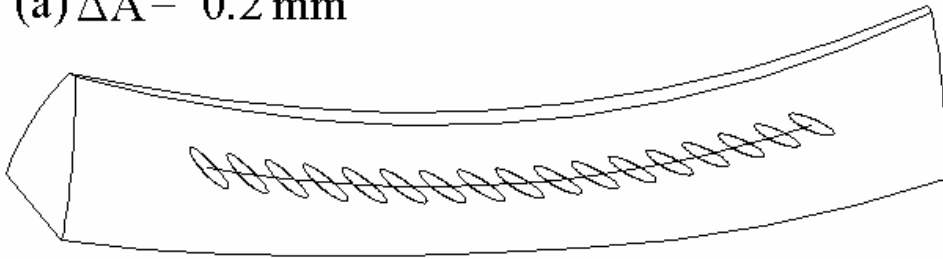
本例探討表 5.1 所列之蝸桿 3 與蝸輪 2 在具有裝配誤差之條件下，探討其接觸齒印之分布情形。其裝配誤差為中心距誤差 ΔA 、水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h$ 和垂直軸向誤差 $\Delta\gamma_v$ ，在此範例中僅考慮單一個裝配誤差對接觸齒印之影響。

圖 5.7 所示為蝸桿蝸輪組具有中心距誤差 $\Delta A = \pm 0.2 \text{ mm}$ 時的接觸齒印分布情形，圖 5.8 則為蝸桿蝸輪組具有水平軸向誤差 $\Delta\gamma_h = \pm 0.1^\circ$ 時，蝸桿蝸輪組之接觸齒印分布情形，圖 5.9 所示為蝸桿蝸輪組在有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = \pm 0.1^\circ$ 之狀況下，其接觸齒印之分析結果。將以上三種裝配誤差的分析結果，和理想裝配條件下的接觸齒印做比較，可發現在考慮裝配誤差之下的接觸齒印，其外形與大小並沒有太大的變化。

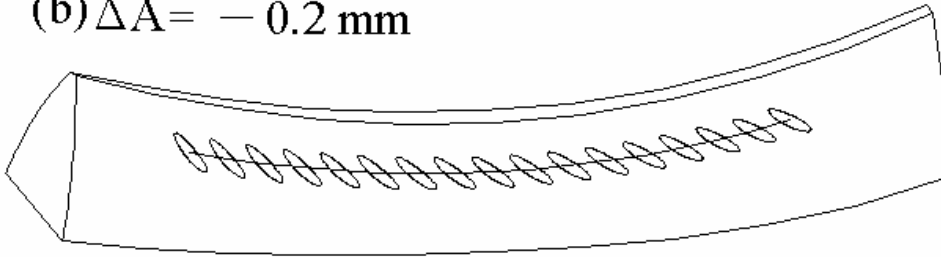
5.4 討論

依據範例一與範例二之分析結果可知，ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪之接觸齒印，其接觸齒印的長軸方向會近似於滾刀創成蝸輪之接觸線方向，可參考圖 4.21，同時越靠近蝸輪齒頂處，其接觸齒印會有些微的改變，長軸會相對變短。由蝸桿蝸輪組的嚙合以及裝配機構可知，若接觸點較靠近蝸輪齒面之齒頂處，此時，相對於蝸桿而言，此接觸點反而較接近蝸桿齒面之底部，因此，參考圖 4.22 之蝸桿剖面放大圖，從圖中可看到蝸桿齒面的剖面曲率會有所不同。若接觸點位置是在蝸桿齒面的下方處，其曲率較大，根據齒印的分析方法可知，此時

(a) $\Delta A = 0.2 \text{ mm}$



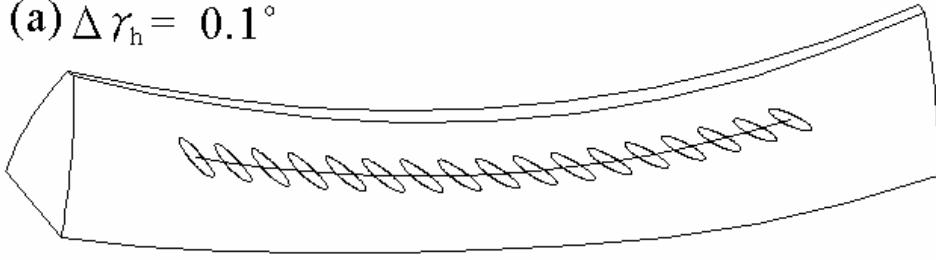
(b) $\Delta A = -0.2 \text{ mm}$



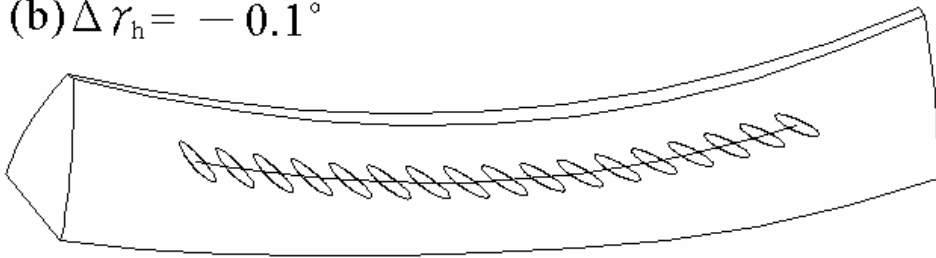
0 10 20 (mm)

圖 5.7 中心距誤差對接觸齒印之影響(範例四)

(a) $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$



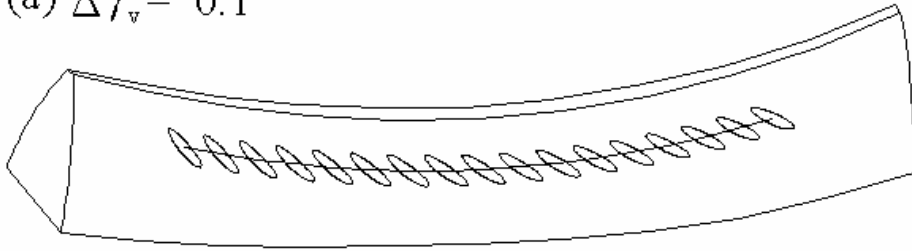
(b) $\Delta\gamma_h = -0.1^\circ$



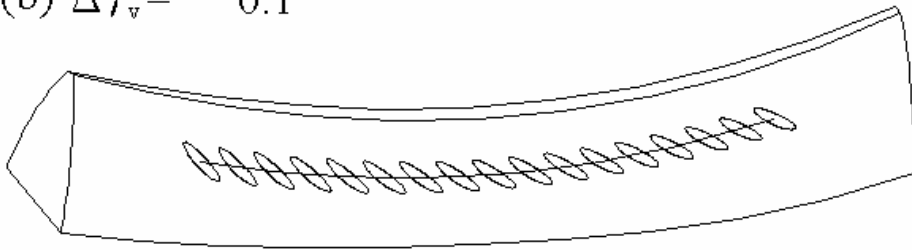
0 10 20 (mm)

圖 5.8 水平軸向誤差對接觸齒印之影響(範例四)

(a) $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$



(b) $\Delta\gamma_v = -0.1^\circ$



0 10 20 (mm)

圖 5.9 垂直軸向誤差對接觸齒印之影響(範例四)

蝸桿蝸輪組的接觸齒印將較小。反之，若接觸點位置是在蝸桿齒面的上方靠近齒頂處，則蝸桿蝸輪組之接觸齒印將相對較大。

由範例三與範例四顯示，蝸桿蝸輪組的接觸齒印其外形和長軸方向並不會因裝配誤差而有太明顯的改變。接觸齒印的大小與創成 ZK 型蝸桿之磨輪的節圓半徑大小較有關係。



第六章 結論與未來展望

6.1 結論

本研究首先建立 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪之齒面數學模式，並利用電腦輔助繪圖，繪出蝸桿與蝸輪之外形。本研究亦建立此蝸桿蝸輪組之接觸分析數學模式，分析蝸桿蝸輪組之運動誤差、接觸齒數、平均接觸比與接觸比，同時也發展齒輪組接觸齒印之數學模式，並分析蝸桿蝸輪組在不同設計參數以及不同裝配條件下的接觸齒印。綜合以上的分析結果，本研究可歸納獲得以下之四點結論：

- (1) 本研究之蝸桿蝸輪組是以非 90° 之交錯角進行配對嚙合，為防止蝸桿蝸輪組之接觸點位置過於接近齒根區域，可調整蝸桿與蝸輪之壓力角，使得嚙合之兩齒面的接觸點軌跡落於接近齒面中央處。
- (2) 本研究之 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪組雖屬於非對偶創成，但其所配對之 ZK 型蝸桿與切製蝸輪之 ZN 型滾刀在齒面外形有重合處，故此非 90° 交錯角之蝸桿蝸輪組在理想裝配條件下不會有運動誤差。然而蝸桿蝸輪組在具有中心距裝配誤差與垂直軸向裝配誤差時，對於蝸桿蝸輪組之運動誤差值之影響較為明顯。
- (3) 將相同設計參數之 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪做不同交錯角之配對嚙合，則齒輪組之平均接觸比與接觸比亦有所差異，平均接觸比與接觸比隨著交錯角之增加而變大。當蝸桿蝸輪組之接觸比較大時，其所能承受負載的能力也相對提高。
- (4) 本研究之蝸桿蝸輪組，其接觸齒印的外形隨著接觸點位置而做稍許的改變，接觸點越靠近蝸輪齒面之上方時(即靠近齒頂附近)，其接觸橢圓的長軸較短，但方向還是與滾刀與蝸輪之接觸線相近，同時，接觸齒印的外形並不會因有裝配誤差而有明顯的改變。此蝸桿蝸輪組之蝸桿為磨輪所創成之 ZK 型蝸桿，當改變磨輪之

半徑時，蝸桿蝸輪組之接觸齒印的外形也會有所變化；磨輪半徑越小，則接觸齒印越大，同時，其長軸方向的長度也會變大，但短軸方向的長度則沒有明顯的改變。

6.2 未來展望

本研究主要探討 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪在非 90° 交錯角下的配對嚙合，並分析其嚙合時蝸桿蝸輪組的運動誤差、瞬時接觸齒數、平均接觸比、與接觸比以及接觸齒印。對於其他類型之蝸桿蝸輪組，如 ZA 型與 ZE 型等，尚未探討其非對偶創成之蝸桿蝸輪組在非 90° 交錯角下的接觸情形。另外，由於蝸桿蝸輪組屬於高接觸比之傳動機構，以本研究為例，其瞬時接觸齒數為 3 至 4 齒，甚至 5 齒，因此，未來可探討在承受負載時，其各個齒的負載狀況，並可利用有限元素法分析其應力與應變情形。



參考文獻

- [1]Zheng, C., Lei, J., and Savage, M., “A General Method for Computing Worm Gear Conjugate Mesh Property: Part 1 – the Generating Surface,” Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 111, pp. 143-147, March 1989.
- [2]Zheng, C., Lei, J., and Savage, M., “A General Method for Computing Worm Gear Conjugate Mesh Property: Part 2 – the Mathematical Model of Worm Gear Manufacturing and Working Process,” Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 111, pp. 148-152, March 1989.
- [3]Jannink, W. L., “Contact Surface Topology of Worm Gear Teeth,” Gear Technology, pp. 31-47, March/April 1988.
- [4]Bair, B. W. and Tsay, C. B., “ZK-type dual-lead worm and worm gear drives: Contact teeth, contact ratios and kinematic errors,” Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, Vol 120, No3, 1998, pp. 422-428.
- [5]Fang, H. S. and Tsay, C. B., “Mathematical Model and Bearing Contacts of the ZN-Type Worm Gear Sets Cut by Oversize Hob Cutters,” Mechanism and Machine Theory, Vol. 35, No. 12, 2000, pp. 1689-1708.
- [6]陳嘉宏，「飛刀創成之蝸輪與 ZK 型蝸桿之接觸分析」，國立交通大學機械工程研究所，碩士論文，九十二年六月。
- [7]Litvin, F. L., Gear Geometry and Applied Theory, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
- [8]Litvin, F. L., Theory of Gearing, NASA Reference Publication 1212, Washington D. C., 1989.
- [9]白炳文，「ZK 型雙導程蝸桿蝸輪組之特性研究」，國立交通大學機械工程研究所，博士論文，八十七年六月。

[10]方宏聲，「蝸桿蝸輪組之製造分析」，國立交通大學機械工程研究所，博士論文，八十五年六月。

