

第二章 漸開線形正齒輪數學模式之推導

2-1 前言

根據 Litvin[5,6]所發展之齒輪原理，漸開線形齒輪可由一把截面為直邊之滾齒刀 (Hob Cutter) 滾製而成。本文將藉由模擬正齒輪創成切製過程，推導出漸開線形正齒輪 (Involute Spur Gear) 的齒形數學模式，以進一步探討齒輪參數對齒形的影響。在模擬其滾製過程時，可視為由一把截面為直線的假想齒條刀 (Imaginary Rack Cutter) (以下簡稱齒條刀) 做平移運動，而齒胚則做旋轉運動來模擬其切製過程。

圖 2.1 顯示齒條刀在滾製齒輪時，齒條刀之節平面 (Pitch Plane) 與齒輪之瞬軸面 (Axode) 的相對運動情形。當滾製齒輪時，齒條刀置於實心之圓筒狀齒胚工件上方，齒胚半徑為被創成齒輪之節圓半徑 (Pitch Radius) 加上齒冠 (Addendum)，齒條刀及齒胚之相對運動關係如圖 2.1 所示，圖中之 $|\mathbf{V}| = r_1 \omega_1$ ，其中 \mathbf{V} 為齒條刀之平移運動速度， r_1 為被創成齒輪之節圓半徑，而 ω_1 則為被創成齒胚之旋轉角速度。

要建立齒輪之齒面數學模式，必須先從齒條刀之幾何數學模式著手，再依微分幾何原理找出齒條刀與被創成齒輪間之共同接觸點(線)的位置，以及其在接觸面上的共同法向量 (Common Normal Vector)，同時配合刀具與被創成齒輪之嚙合方程式 (Equation of Meshing)，如此便可推導出齒輪的齒面數學方程式。

2-2 齒條刀之數學模式

漸開線齒輪可視為由直邊齒條刀所創成，因此，要推導齒輪數學模式，必須先由齒條刀之外形數學方程式著手。茲以 Σ_F 表示漸開線形正齒輪創成時所需滾齒刀具之曲面。如圖 2.2 所示，將齒條刀 Σ_F 的

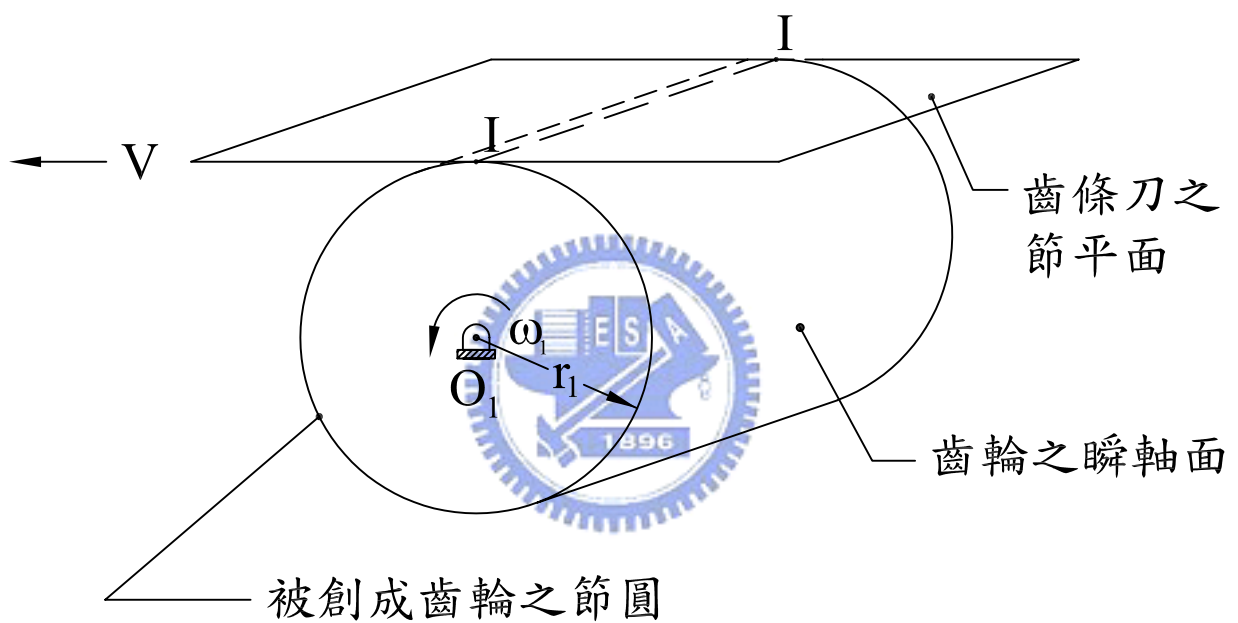


圖 2.1 齒條刀與被滾製齒輪之相對運動關係示意圖

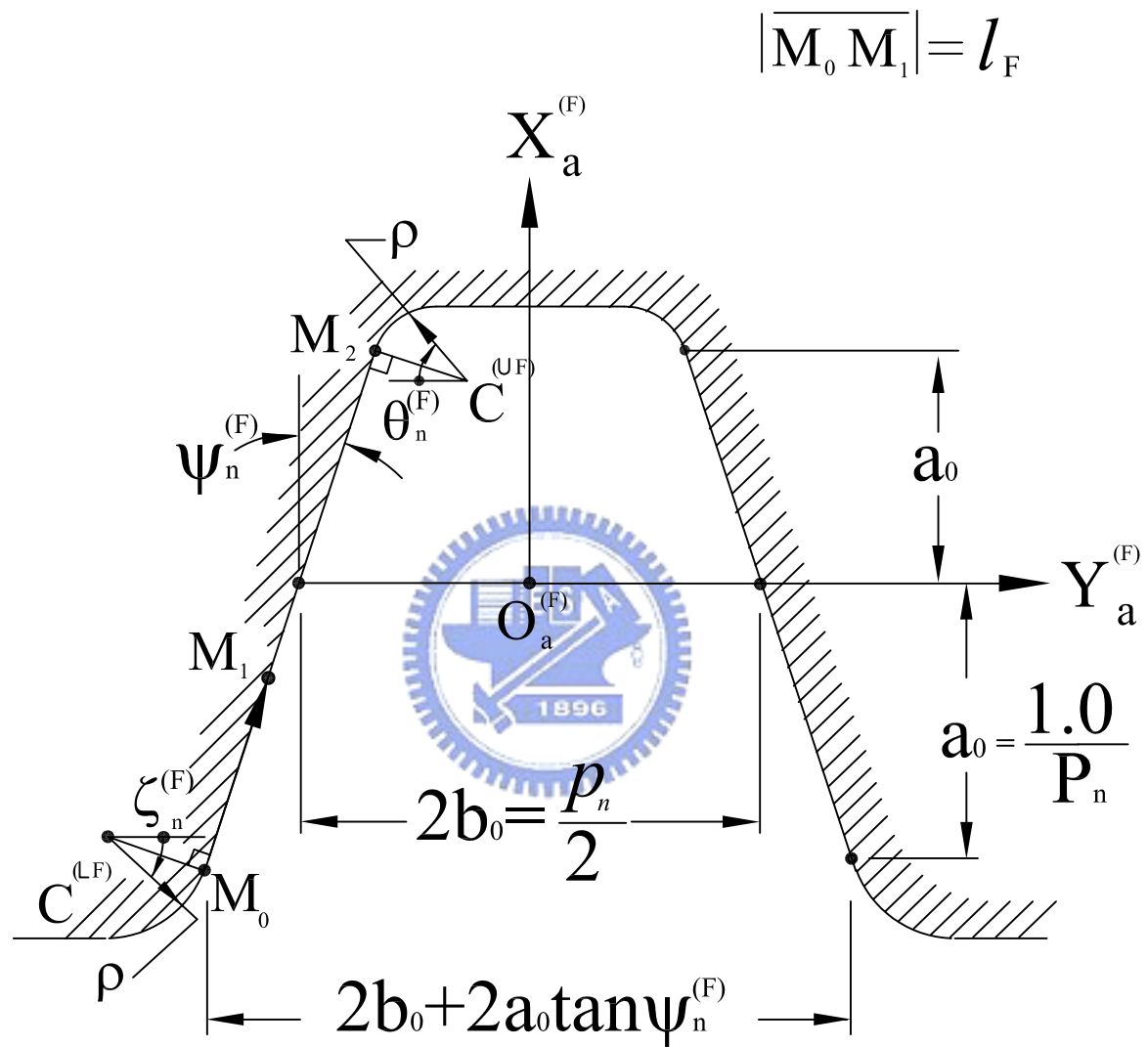


圖 2.2 齒條刀之法向剖面

法向剖面 (Normal Cross Section) 表示在 $S_a (X_a^{(F)}, Y_a^{(F)}, Z_a^{(F)})$ 座標系中，其中 l_F 為齒條刀刀面之設計參數，表示由起始點 M_0 沿著齒條刀刀面移動至直邊刀具上任何一點 M_1 的距離，亦即 $l_F = |\overline{M_0M_1}|$ 。而 M_2 點則為此齒面設計參數的終點。因此，可將齒條刀 Σ_F 之法向剖面直邊部分表示在 S_a 座標系如下：

$$\mathbf{R}_{a(l)}^{(F)} = \begin{bmatrix} l_F \cos \psi_n^{(F)} - a_0 \\ \pm (l_F \sin \psi_n^{(F)} - a_0 \tan \psi_n^{(F)} - b_0) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq l_F \leq \frac{2a_0}{\cos \psi_n^{(F)}} \quad (2.1)$$

上式中之 \pm 符號，正號表示刀具之右刀面，負號則表示刀具之左刀面； $\psi_n^{(F)}$ 為齒條刀之壓力角 (Pressure Angle)； a_0 及 b_0 為用以定義直邊刀面之起始點位置的刀具參數；另外， $\mathbf{R}_{a(l)}^{(F)}$ 表示齒條刀之法向剖面的直邊外形位置向量，其中上標 F 表示齒條刀 Σ_F ，下標 l 表示刀具之直邊部分，下標 a 則代表方程式是表示在 S_a 座標系。圖 2.2 中， P_n 為刀具之法向徑節 (Normal Diametral Pitch)， p_n 為齒輪之法向節徑 (Normal Circular Pitch)， $O_a^{(F)}$ 則表示刀具座標系 S_a 之座標原點，亦為齒胚工件節圓與刀具 Σ_F 之節面在創成時的相切點。

同理，齒條刀 Σ_F 之上圓弧導角及下圓弧導角的部分，亦可分別表示在 S_a 座標系如下：

$$\mathbf{R}_{a(lf)}^{(F)} = \begin{bmatrix} -a_0 + \rho \sin \psi_n^{(F)} - \rho \sin \zeta_n^{(F)} \\ \pm (-a_0 \tan \psi_n^{(F)} - b_0 - \rho \cos \psi_n^{(F)} + \rho \cos \zeta_n^{(F)}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \psi_n^{(F)} \leq \zeta_n^{(F)} \leq 90^\circ \quad (2.2)$$

$$\mathbf{R}_{a(uf)}^{(F)} = \begin{bmatrix} a_0 - \rho \sin \psi_n^{(F)} + \rho \sin \theta_n^{(F)} \\ \pm (a_0 \tan \psi_n^{(F)} - b_0 + \rho \cos \psi_n^{(F)} - \rho \cos \theta_n^{(F)}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \psi_n^{(F)} \leq \theta_n^{(F)} \leq 90^\circ \quad (2.3)$$

(2.2) 及 (2.3) 式中之 $\mathbf{R}_{a(lf)}^{(F)}$ 及 $\mathbf{R}_{a(uf)}^{(F)}$ ，分別為齒條刀 Σ_F 之法向剖面的上、下圓弧導角之位置向量表示在 S_a 座標系之數學方程式；另

外“±”符號中的上方符號表示刀具之右刀面，下方符號則表示左刀面； ρ 表示圓弧導角之半徑；而 $\zeta_n^{(F)}$ 和 $\theta_n^{(F)}$ 則分別為刀具上下圓弧導角區域之幅角 (Span Angle)，分別標示出其圓弧之上限與下限。

茲為創成齒寬 (Tooth Width) 為 u_F 之正齒輪，可將方程式 (2.1) 至 (2.3) 所代表之刀具法向剖面，沿著 $Z_a^{(F)}$ 軸 (垂直於 $X_a^{(F)}$ - $Y_a^{(F)}$ 平面，參見圖 2.2) 平移，即可在三度空間中獲得切製齒輪之假想齒條刀的整個外形。其刀面方程式共可分為三部分：

(a) 直邊刀面部分

$$\mathbf{R}_{a(l)}^{(F)} = \begin{bmatrix} l_F \cos \psi_n^{(F)} - a_0 \\ \pm (l_F \sin \psi_n^{(F)} - a_0 \tan \psi_n^{(F)} - b_0) \\ u_F \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\text{其中 } 0 \leq l_F \leq \frac{2a_0}{\cos \psi_n^{(F)}}$$

(b) 上圓弧導角部分

$$\mathbf{R}_{a(uf)}^{(F)} = \begin{bmatrix} -a_0 + \rho \sin \psi_n^{(F)} - \rho \sin \zeta_n^{(F)} \\ \pm (-a_0 \tan \psi_n^{(F)} - b_0 - \rho \cos \psi_n^{(F)} + \rho \cos \zeta_n^{(F)}) \\ u_F \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\psi_n^{(F)} \leq \zeta_n^{(F)} \leq 90^\circ$$

(c) 下圓弧導角部分

$$\mathbf{R}_{a(uf)}^{(F)} = \begin{bmatrix} a_0 - \rho \sin \psi_n^{(F)} + \rho \sin \theta_n^{(F)} \\ \pm (a_0 \tan \psi_n^{(F)} - b_0 + \rho \cos \psi_n^{(F)} - \rho \cos \theta_n^{(F)}) \\ u_F \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\text{其中 } \psi_n^{(F)} < \theta_n^{(F)} < 90^\circ$$

2-3 齒條刀與被創成齒面接觸線之共同法向量

齒條刀刀面 Σ_F 與被切製齒輪之齒面 Σ_1 ，在切製的過程中，齒條刀刀面與被切製齒輪之齒面在每一瞬間均有共同接觸線，並且在接觸

線上齒條刀刀面與被創成齒面的單位法向量 (Unit Normal Vector) 是一致的。依微分幾何原理，齒條刀之直邊刀面法向量可依下式求得：

$$\mathbf{N}_{a(l)} = \frac{\partial \mathbf{R}_{a(l)}^{(F)}}{\partial l_F} \times \frac{\partial \mathbf{R}_{a(l)}^{(F)}}{\partial u_F} \quad (2.7)$$

齒條刀直邊刀面之單位法向量為：

$$\mathbf{n}_{a(l)} = \frac{\mathbf{N}_{a(l)}}{|\mathbf{N}_{a(l)}|} \quad (2.8)$$

將方程式 (2.4) 代入方程式 (2.7) 和 (2.8) 後，即可求得齒條刀之直邊刀面的單位法向量如下：

$$\mathbf{n}_{a(l)} = \begin{bmatrix} \pm \sin \psi_n^{(F)} \\ -\cos \psi_n^{(F)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

同理，齒條刀之上、下圓弧導角部分的單位法向量亦可分別求得：

$$\mathbf{n}_{a(lf)} = \begin{bmatrix} \mp \sin \zeta_n^{(F)} \\ \cos \zeta_n^{(F)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{n}_{a(uf)} = \begin{bmatrix} \pm \sin \theta_n^{(F)} \\ -\cos \theta_n^{(F)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$



2-4 嚙合方程式 (Equation of Meshing)

平行軸正齒輪之嚙合可簡化並視為二維的問題來處理，其共軛運動關係如圖 2.3 所示，其中相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 可利用繞瞬時旋轉中心 (Instantaneous Center of Rotation) I 點之運動求得。將其簡化為二維的問題來討論時， $\mathbf{V}^{(12)}$ 可以下式求得：

$$\mathbf{V}^{(12)} = \omega^{(12)} \times \overrightarrow{IM} \quad (2.12)$$

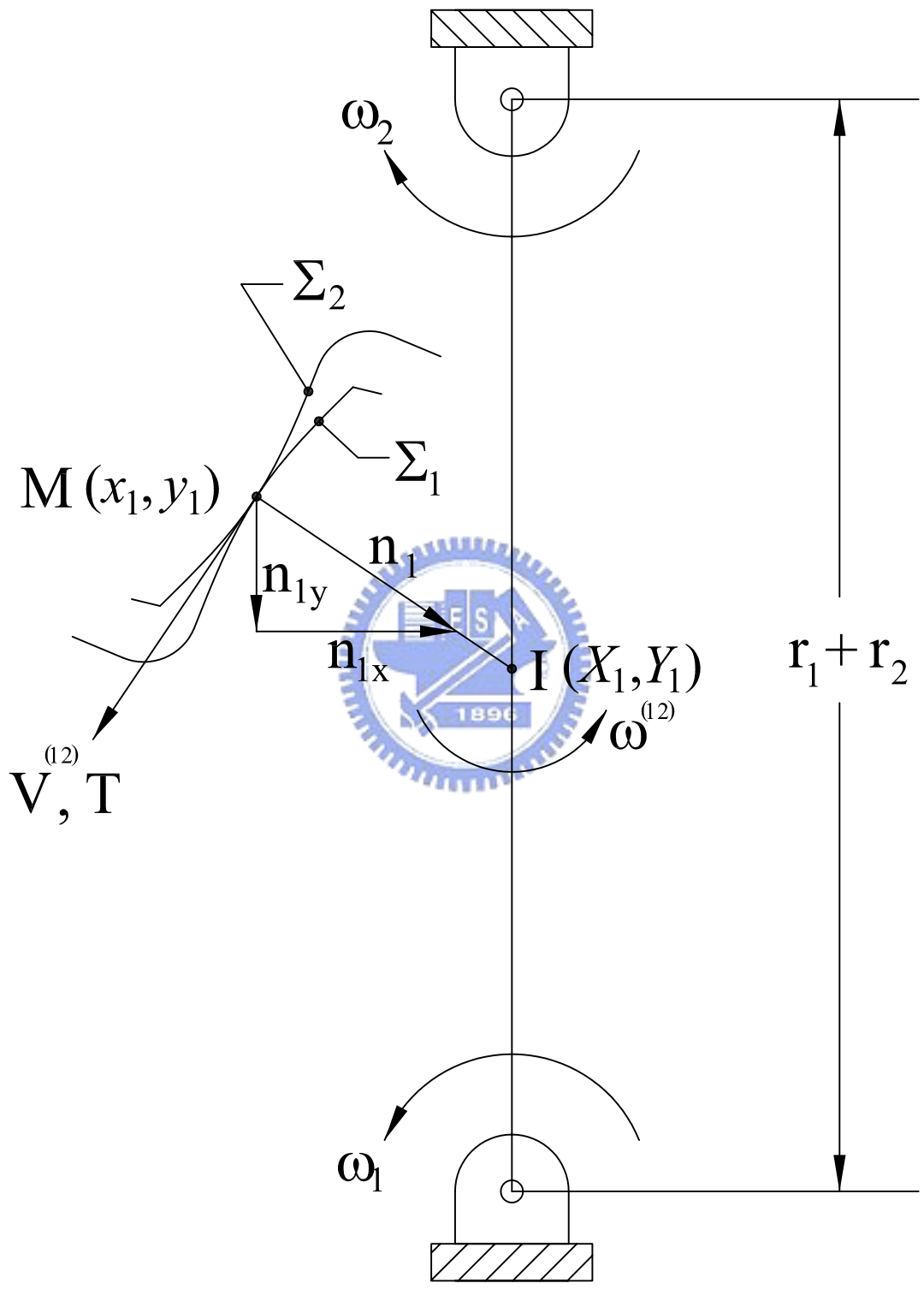


圖 2.3 平行軸齒輪組之共軛運動關係示意圖

上式中 $\omega^{(12)}$ 為兩齒輪之相對旋轉角速度， \overrightarrow{IM} 為兩齒輪之瞬時旋轉中心 I 點至兩齒面之瞬時嚙合接觸點 M 點之位置向量。由於兩嚙合齒面瞬時接觸點之共同單位法向量 \mathbf{n}_1 與此相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 互相垂直，因此兩共軛嚙合 (Conjugate Meshing) 齒面之嚙合方程式為：

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{V}^{(12)} = 0 \quad (2.13)$$

根據共軛運動原理，兩共軛曲面在其共同接觸點 M 點之共同法向量必通過兩共軛運動對之瞬時旋轉中心。對於平行軸之兩嚙合曲面，其嚙合方程式亦可利用下列關係式求得：

$$\frac{X_1 - x_1}{n_{1x}} = \frac{Y_1 - y_1}{n_{1y}} \quad (2.14)$$

上式中 X_1 和 Y_1 為瞬時旋轉中心 I 點之座標， x_1 和 y_1 為瞬時接觸點 M 之座標，而 n_{1x} 和 n_{1y} 則為共同接觸點之單位法向量。現就齒條刀刀面 Σ_F 與其切製之齒輪齒面 Σ_1 來推導兩者在創成過程時之嚙合方程式。圖 2.4 所示為齒條刀 Σ_F 在創成齒輪齒面時之創成機構示意圖，圖中之 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 座標系為參考座標系，平面 Π 為假想齒條刀之節平面，而被切製齒輪之齒胚則與座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 固聯且其座標原點 O_1 與 S_h 座標系之原點 O_h 重合。在切製齒輪 Σ_1 時，齒條刀 Σ_F 由右向左平移一水平距離 $r_1\phi_1$ ，而齒胚工件則以反時鐘方向旋轉 ϕ_1 角度。將方程式(2.4)及(2.9)由座標系 S_a 轉換至座標系 S_1 ，再代入嚙合方程式(2.14)式中，即可求得齒條刀 Σ_F 與被創成齒輪 Σ_1 之嚙合方程式如下：

$$F_1(l_F, \phi_1) = l_F - \frac{a_0}{\cos \psi_n^{(F)}} - (b_0 \pm r_1\phi_1) \sin \psi_n^{(F)} = 0 \quad (2.15)$$

亦即

$$\phi_1 = \pm \left(\frac{a_0}{r_1 \sin \psi_n^{(F)} \cos \psi_n^{(F)}} + \frac{b_0}{r_1} - \frac{l_F}{r_1 \sin \psi_n^{(F)}} \right) \quad (2.16)$$

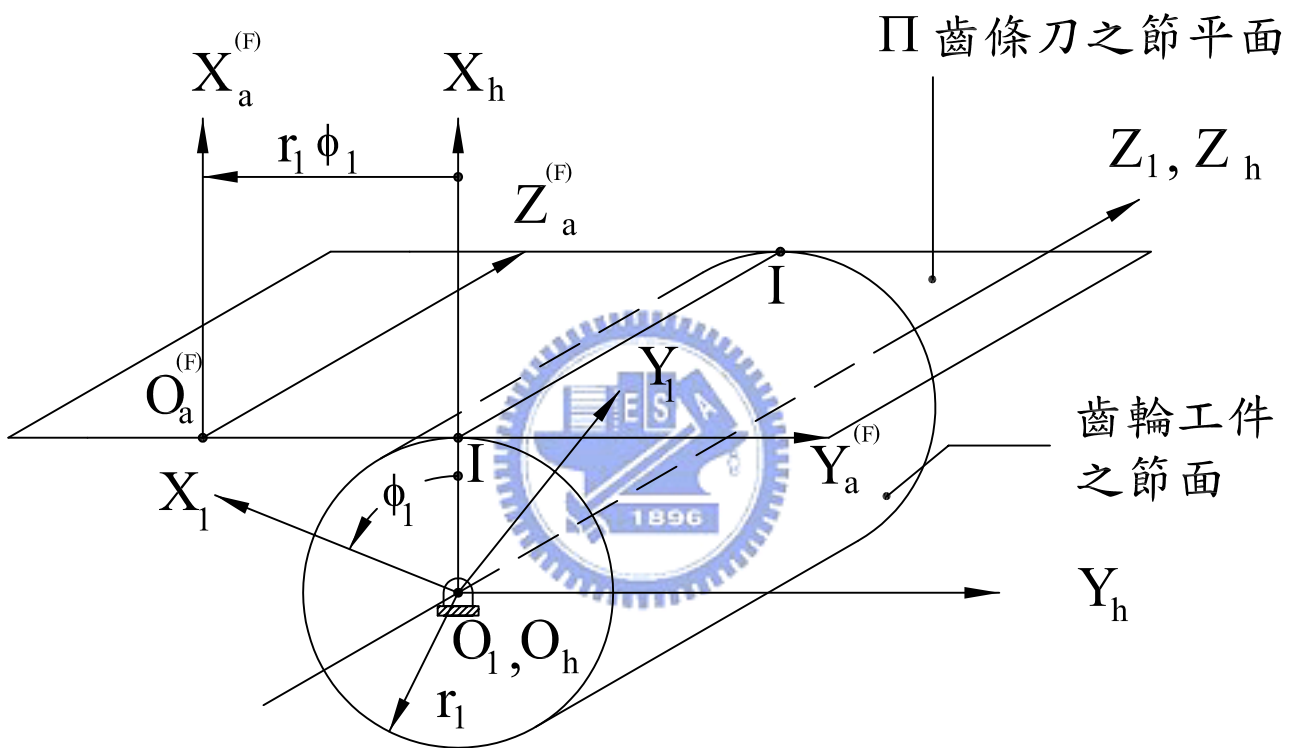


圖 2.4 齒條刀與被切製齒輪之機構運動關係圖

同理，上、下圓弧導角刀面與被創成齒輪 Σ_1 之嚙合方程式亦可表示如下：

$$\phi_1 = \pm \left(\frac{b_0 - a_0 (\cot \zeta_n^{(F)} + \tan \psi_n^{(F)}) + \rho (\sin \psi_n^{(F)} \cot \zeta_n^{(F)} - \cos \psi_n^{(F)})}{r_1} \right) \quad (2.17)$$

$$\phi_1 = \pm \left(\frac{b_0 - a_0 (\cot \theta_n^{(F)} + \tan \psi_n^{(F)}) + \rho (\sin \psi_n^{(F)} \cot \theta_n^{(F)} - \cos \psi_n^{(F)})}{r_1} \right) \quad (2.18)$$

2-5 正齒輪之數學模式

將齒條刀之刀面數學模式，也就是方程式 (2.4) 式，利用齊次座標轉換 (Homogeneous Coordinate Transformation) 原理，由座標系 S_a ($X_a^{(F)}, Y_a^{(F)}, Z_a^{(F)}$) 轉換至座標系 S_1 (X_1, Y_1, Z_1)，即可求得齒條刀之刀面 Σ_F 表示在 S_1 座標系的軌跡方程式：

$$\mathbf{R}_1 = [\mathbf{M}_{1a}] \mathbf{R}_a^{(F)} \quad (2.19)$$

其中

$$[\mathbf{M}_{1a}] = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 & r_1 (\cos \phi_1 + \phi_1 \sin \phi_1) \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & r_1 (\sin \phi_1 - \phi_1 \cos \phi_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

將嚙合方程式 (2.16) 代入 (2.4) 式後，再將其代入 (2.19) 式之 \mathbf{R}_1 ，此即為正齒輪之漸開線工作區域之齒面方程式並表示如下：

$$\begin{aligned} x_1 &= (l_F \cos \psi_n^{(F)} - a_0 + r_1) \cos \phi_1 \pm (l_F \sin \psi_n^{(F)} - a_0 \tan \psi_n^{(F)} - b_0 \mp r_1 \phi_1) \sin \phi_1 \\ y_1 &= (l_F \cos \psi_n^{(F)} - a_0 + r_1) \sin \phi_1 \pm (l_F \sin \psi_n^{(F)} - a_0 \tan \psi_n^{(F)} - b_0 \mp r_1 \phi_1) \cos \phi_1 \\ z_1 &= u_F \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\text{其中 } \phi_1 = \pm \left(\frac{a_0}{r_1 \sin \psi_n^{(F)} \cos \psi_n^{(F)}} + \frac{b_0}{r_1} - \frac{l_F}{r_1 \sin \psi_n^{(F)}} \right)$$

至於正齒輪齒面之單位法向量，則可將齒條刀單位法向量方程式 (2.9) 式利用下列之向量座標轉換矩陣方程式，由 S_a 座標系轉換至 S_1 座標系：

$$\mathbf{n}_1 = [\mathbf{L}_{1a}] \mathbf{n}_a \quad (2.22)$$

其中

$$[\mathbf{L}_{1a}] = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

若將 (2.9) 式代入 (2.22) 式，即可求得正齒輪直邊齒面之單位法向量：

$$\mathbf{n}_{1(l)} = \begin{bmatrix} \sin(\phi_1 \pm \psi_n^{(F)}) \\ -\cos(\phi_1 \pm \psi_n^{(F)}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

而齒條刀之上圓弧導角以及下圓弧導角之刀面數學模式，亦可利用上述之方法及座標矩陣轉換方程式，來求得齒條刀具其上、下圓弧導角所創成之齒輪齒根與齒頂圓弧齒面方程式。

齒頂圓弧齒面方程式為：

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_0 - \rho \sin \psi_n^{(F)} + \rho \sin \theta_n^{(F)} + r_1) \cos \phi_1 \pm (a_0 \tan \psi_n^{(F)} - b_0 + \rho \cos \psi_n^{(F)} - \rho \cos \theta_n^{(F)} \mp r_1 \phi_1) \sin \phi_1 \\ y_1 &= (a_0 - \rho \sin \psi_n^{(F)} + \rho \sin \theta_n^{(F)} + r_1) \sin \phi_1 \pm (a_0 \tan \psi_n^{(F)} - b_0 + \rho \cos \psi_n^{(F)} - \rho \cos \theta_n^{(F)} \mp r_1 \phi_1) \cos \phi_1 \\ z_1 &= u_F \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\text{其中 } \phi_1 = \pm \left(\frac{b_0 - a_0 (\cot \theta_n^{(F)} + \tan \psi_n^{(F)}) + \rho (\sin \psi_n^{(F)} \cot \theta_n^{(F)} - \cos \psi_n^{(F)})}{r_1} \right)$$

齒根圓弧齒面方程式為：

$$\begin{aligned} x_1 &= (-a_0 + \rho \sin \psi_n^{(F)} - \rho \sin \zeta_n^{(F)} + r_1) \cos \phi_1 \pm (-a_0 \tan \psi_n^{(F)} - b_0 - \rho \cos \psi_n^{(F)} + \rho \cos \zeta_n^{(F)} \mp r_1 \phi_1) \sin \phi_1 \\ y_1 &= (-a_0 + \rho \sin \psi_n^{(F)} - \rho \sin \zeta_n^{(F)} + r_1) \sin \phi_1 \pm (-a_0 \tan \psi_n^{(F)} - b_0 - \rho \cos \psi_n^{(F)} + \rho \cos \zeta_n^{(F)} \mp r_1 \phi_1) \cos \phi_1 \\ z_1 &= u_F \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\text{其中 } \phi_1 = \pm \left(\frac{b_0 - a_0 (\cot \zeta_n^{(F)} + \tan \psi_n^{(F)}) + \rho (\sin \psi_n^{(F)} \cot \zeta_n^{(F)} - \cos \psi_n^{(F)})}{r_1} \right)$$

2-6 正齒輪之電腦輔助繪圖

本文研究對象之粉末冶金正齒輪由台灣保來得公司所提供，其主要設計參數，如表 2.1 所示，茲配合本章所推導出之齒面數學模式及 Auto-CAD 電腦繪圖軟體，即可繪製出所設計之正齒輪外形，如圖 2.5 及 2.6 所示。本章所推導出來之齒輪齒面數學模式將可作為未來進行齒形變異分析的標準齒形。

表 2.1 正齒輪之主要設計參數 (台灣保來得公司提供)

齒輪圖號	CCJ030F
齒輪設計參數	
齒 數	22
壓力角 (D/M/S)	20/00/00
模 數 (mm/tooth)	1.75
齒面寬 (mm)	10.00
齒外徑 (mm)	42.00

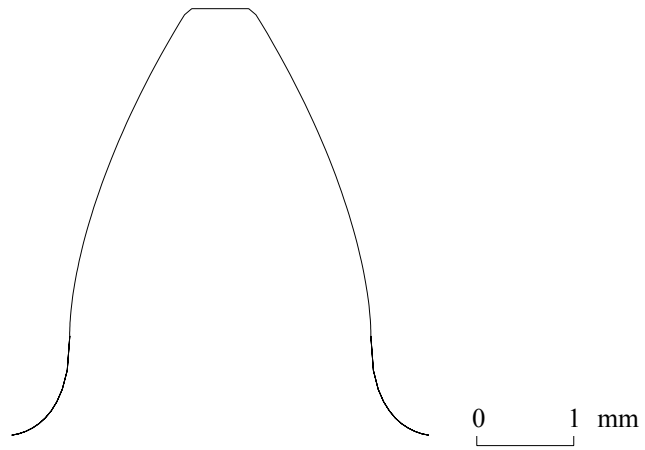


圖 2.5 CCJ030F 標準齒形之電腦繪圖

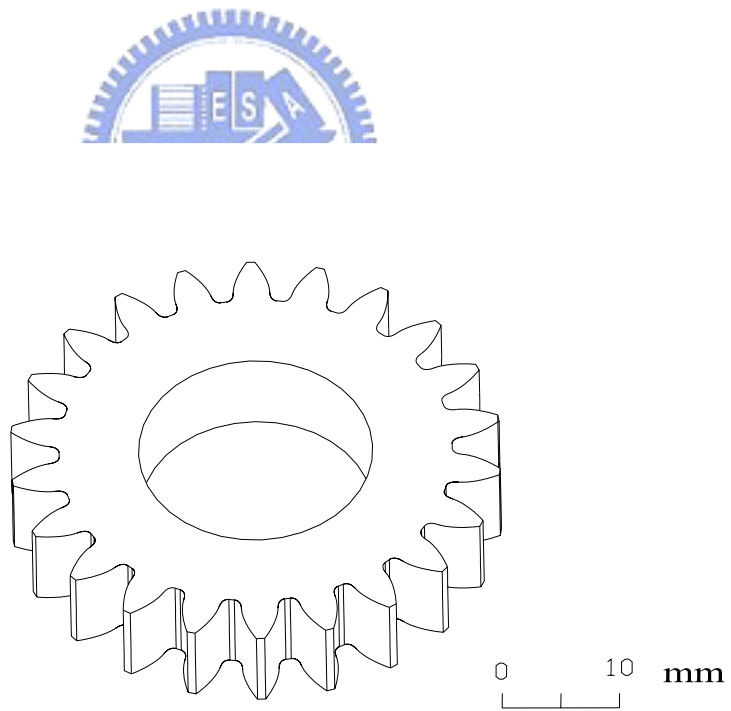


圖 2.6 CCJ030F 正齒輪之電腦繪圖