國 立 交 通 大 學

統計學研究所

碩 士 論 文

以兩個 Binomial 之和逼近 Poisson Binomial 分布

Sum of two binomial approximation to

poisson binomial distribution

研 究 生 ：莊千億

指導教授 ：彭南夫 博士

中 華 民 國 一 百 年 六 月

以兩個 Binomial 之和逼近 Poisson Binomial 分布

Sum of two binomial approximation to

poisson binomial distribution

研 究 生：莊于億　　Student : Yu-Yi Chuang

指導教授：彭南夫　　Advisor : Dr. Nan-Fu Peng

國 立 交 通 大 學

統計學研究所

碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Institute of Statistics
College of Science
National Chiao Tung University
In Partial Fulfillment of the Requirements
For the Degree of
Master
In
Statistics
June 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年六月

以兩個 Binomial 之和逼近 Poisson Binomial 分布

研究生：莊于億　　　　　　　　　　指導教授：彭南夫 博士

國立交通大學統計學研究所

摘　要

我們使用兩個 Binomial 之和的分布去逼近 m 個獨立但不同分配的 Bernoulli 相加分布(Poisoon Binomial 分布)，其中兩個 Binomial 裡面的三個變數是利用讓前三階動差一致所得到的。由程式運算，得知兩個 Binomial 之和比利用一個 Binomial 去逼近結果更精準，最後討論其原因。

關鍵字：Poisson binomial distribution

Sum of two binomial approximation to

poisson binomial distribution

Student : Yu-Yi Chuang Advisor : Dr. Nan-Fu Peng

Institute of Statistics
National Chiao Tung University

ABSTRACT

We approximate the distribution of the sum of m independent but not necessarily identically distributed Bernoulli random variables using the distribution of the sum of two binomials, where the three parameters of two binomials are chosen to match the first three moments. Operation by the program, we know the sum of two Binomials is more accurate than one Binomial. Finally, we discuss the reason.

Key word : Poisson binomial distribution

誌　　謝

在研究所這兩年，跟著指導教授彭南夫老師做論文以及和同學們討論問題，慢慢瞭解如何去研究一件事情。了解問題，接著蒐集資料，然後思考解決。在這一系列的過程中，藉由跟著同學討論，學會如何去蒐集資料並挑選哪些資料是有用處的，並且因為討論了解各種思考的角度。以及在指導教授彭南夫老師的啟發下，了解到了面對一個問題或數學式，先了解其各種數學意義，將有助於深入的思考問題。

相信學會了這兩種能力，對於我以後的生活會有很大的幫助，在這邊感謝我的指導教授彭南夫老師以及一起討論問題的陳羽偉、宋瀚宇等等同學們。

在課業以外，平常的球友也讓我學到了，如何思考去打好一場球，或是一起去研究某件事，感謝平常的球友陳羽偉、宋瀚宇、林洋德、林士傑、許為翔等等同學們。

最後感謝父母親的辛苦，讓我沒有顧慮的完成學業，在這邊由衷的感謝你們。在此，將這篇論文獻給各位，謝謝你們。

于億　謹誌于

國立交通大學統計研究所

中華民國一百年六月

目錄

圖表目錄

第一章 介紹

m 個獨立且同分配的 $Bernoulli(p)$ 隨機變數相加，我們知道它會變成一個 $Binomial(m,p)$ 分布，其中 m 是一個正整數， p 是一個機率值。而 m 個獨立但不同分配的 Bernoulli 隨機變數 $X_1 \sim Ber(p_1),\cdots,X_i \sim Ber(p_i),\cdots X_m \sim Ber(p_m)$ 相加所形成的隨機變數 $W=\sum_{i=1}^{m} X_i$ ，稱之為 Poisson Binomial 分布，其中 m 是一個正整數，這是一個應用很廣的分布，可以參考 Pitman(1997)以及 Peköz, Röllin, Čekanavičius, and Shwartz(2009)。這兩者的差異在於 $Binomial(m,p)$ 分布可以輕易得知其機率質量函數，給定一個 k ， $0 \le k \le m$ ，就可以得知

$P(Binomial(m,p)=k)=C_k^m p^k (1-p)^{m-k}$，Poisson Binomial 分布卻不易得到其機率質量函數，儘管使用了 Chen, Dempster, and Liu (1994)所提出的遞迴關係式。

$$P(W=k)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}(1-p_i) & ,\ if\ \ k=0\\ \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}P(W=k-i)T(i) & ,\ if\ \ k>0\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $T(i)=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{p_j}{1-p_j}\right)^i$

當 m 大到一個程度的時候，仍然沒有辦法使用電腦去運算出確切的 Poisson Binomial 分布。原因是因為，當 m 大時， $T(i)$ 也會跟著變大，使得在電腦的運算中沒有辦法記憶這麼大的數，因此無法輕易得知 Poisson Binomial 分布的機率質量函數。

因此，退而求其次，我們尋找一個隨機變數去逼近 Poisson Binomial 分布，而這個隨機變數的機率質量函數是容易計算的。至今已經有人使用單一 poisson 去逼近，也有人使用單一 Binomial 去逼近，而在 Peköz, Röllin, Čekanavičius, and Shwartz(2009)指出使用單一 Binomial 去逼近 Poisson Binomial 分布，結果會比使用單一 poisson 幾乎都好。因此本篇論文也是針對 Binomial 分布繼續做延伸，跟之前不同的地方在於，之前都是使用單一 Binomial 方法，而本篇論文使用的是兩個 Binomial 之和所形成的分布去逼近。

在於第四章圖表分析可以清楚的看到本篇論文的方法優於過去的。

為了更清楚說明過去所使用單一 Binomial 方法跟本篇論文的方法之間的差異，必須先定義兩個符號。

$$\lambda_j=\sum_{i=1}^{m}p_i^j,\ j=1,2,\cdots$$

$\lfloor\ \rfloor$: 高斯符號(取整數部分)

為了比較這些逼近方法的優劣，必須先定義所使用的距離測度。
令 X,Y 為離散型隨機變數，則 *Total* variation *metric* 定義為

$$d_{TV}\left(L(X),\ \mathrm{L(Y)}\right)=\sup_{A}\left|P(X\in A)-P(Y\in A)\right|=\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|P\left(X=i\right)-P\left(Y=i\right)\right|$$

, 其中 $\mathrm{A}\in\forall$Borel set

而 Local metric 定義為

$$d_{loc}\left(L(X),\ \mathrm{L(Y)}\right)=\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left|P\left(X=j\right)-P\left(Y=j\right)\right|$$

定義好了符號跟距離測度，現在我們開始進一步討論單一 *Binomial* 方法跟本篇論文的方法。單一 *Binomial* 方法，根據參數多寡，可以分為三個。

(1)單一 *Binomial* 一個參數法(Ehm(1991) 提出)

$$Binomial(m,p)$$

其中 $p=\dfrac{\lambda_1}{m}$

(2)單一 *Binomial* 兩個參數法(Barbour et al.(1992b, p.190)提出)

$$Binomial(n,p)$$

其中 $n=\left\lfloor\dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_2}\right\rfloor,\ p=\dfrac{\lambda_1}{n}$

(3)單一 *Binomial* 三個參數法(Peköz, Röllin, Čekanavičius, and Shwartz(2009)提出)

$$Binomial(n,p)+s$$

其中 $n=\left\lfloor n^*\right\rfloor,\ p=\dfrac{n^*p^*+\left\{s^*\right\}}{n},\ s=\left\lfloor s^*\right\rfloor$ (平移)

而 $p^*=\dfrac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_2},\ n^*=\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{p^*\left(1-p^*\right)},\ s^*=\lambda_1-n^*p^*$

以上這三個方法的參數，是利用動差法解出，在第二章我們會實際運算動差法，去解兩個 *Binomial* 之和法裡面所需要的參數。

第二章 主要方法

兩個 *Binomial* 之和法，也根據參數多寡，分為兩個。

(1)兩個 *Binomial* 之和-兩個參數法

令 $Y \sim Bin(\frac{m}{2}, p_1) + Bin(\frac{m}{2}, p_2)$

在這邊假設 m 皆為偶數(忽略其為奇數，$\frac{m}{2}$ 需要進位的問題)。

藉由第一、二階動差可得

$$EW = \lambda_1 \qquad EY = \frac{m}{2}p_1 + \frac{m}{2}p_2$$

$$VarW = \lambda_1 - \lambda_2 \qquad VarY = \frac{m}{2}p_1q_1 + \frac{m}{2}p_2q_2$$

為了使 Y 逼近 W 分布，所以令其動差相等，可得

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{m}{2}p_1 + \frac{m}{2}p_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{m}{2}p_1q_1 + \frac{m}{2}p_2q_2 \end{cases}$$

相減➔

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{m}{2}p_1 + \frac{m}{2}p_2 & (2.1) \\ \lambda_2 = \frac{m}{2}p_1^2 + \frac{m}{2}p_2^2 & (2.2) \end{cases}$$

接著由(2.1)可知 $p_1 = \frac{2\lambda_1}{m} - p_2$ 代入(2.2)可得

$$p_2^2 - \frac{2\lambda_1}{m}p_2 + \frac{2\lambda_1^2 - m\lambda_2}{m^2} = 0$$

利用一元二次方程式公式解可得

$$p_1 = \frac{\lambda_1}{m} - \sqrt{\frac{m\lambda_2 - \lambda_1^2}{m^2}}$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{m} + \sqrt{\frac{m\lambda_2 - \lambda_1^2}{m^2}}$$

其中 p_1, p_2 可以對調，因為只差在公式解中的正負號，且原本 $Bin(\frac{m}{2}, p_1) + Bin(\frac{m}{2}, p_2)$ 的位置就可以對調。

由於這個方法假設在 m 為偶數，在 m 夠大時，不太影響結果，但若是當 m 小時，建議使用接下來要說明的方法。

(2)兩個 *Binomial* 之和-三個參數法

令 $Z \sim Bin(n, p_1) + Bin(m-n, p_2)$ ，其中 $A \sim Bin(n, p_1),\ B \sim Bin(m-n, p_2)$

藉由第一、二、三階動差可得

$$EW = \lambda_1 \qquad EZ = np_1 + (m-n)p_2$$

$$VarW = \lambda_1 - \lambda_2 \qquad VarZ = np_1q_1 + (m-n)p_2q_2$$

$$E(W-EW)^3 = \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 \qquad E(Z-EZ)^3 = E(A-EA)^3 + E(B-EB)^3$$

$$= (1-2p_1)np_1q_1 + (1-2p_2)np_2q_2$$

為了使 Z 逼近 W 分布，所以令其動差相等，並且相減運算，可得

$$\begin{cases} \lambda_1 = n^* p_1^* + (m-n^*)p_2^* \\ \lambda_2 = n^* p_1^{*2} + (m-n^*)p_2^{*2} \\ \lambda_3 = n^* p_1^{*3} + (m-n^*)p_2^{*3} \end{cases} \text{移項} \Rightarrow \begin{cases} n^* = \dfrac{\lambda_1 - mp_2^*}{p_1^* - p_2^*} \\ n^* = \dfrac{\lambda_2 - mp_2^{*2}}{p_1^{*2} - p_2^{*2}} \\ n^* = \dfrac{\lambda_3 - mp_2^{*3}}{p_1^{*3} - p_2^{*3}} \end{cases} \qquad (2.3)$$

其中 $n^*,\ p_1^*,\ p_2^*$ 代表動差方程式解出來的參數，其中 n^* 會是一個實數，之後會將它做無條件捨去變為整數 n ，再調整為三個要使用的參數 $n,\ p_1,\ p_2$ 。

由上式可知 $\dfrac{\lambda_1 - mp_2^*}{p_1^* - p_2^*} = \dfrac{\lambda_2 - mp_2^{*2}}{p_1^{*2} - p_2^{*2}} = \dfrac{\lambda_3 - mp_2^{*3}}{p_1^{*3} - p_2^{*3}}$

同乘 $(p_1 - p_2) \Rightarrow \lambda_1 - mp_2^* = \dfrac{\lambda_2 - mp_2^{*2}}{p_1^* + p_2^*} = \dfrac{\lambda_3 - mp_2^{*3}}{p_1^{*2} + p_1^* p_2^* + p_2^{*2}}$

交叉相乘 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 p_1^* + \lambda_1 p_2^* - mp_1^* p_2^* = \lambda_2 & (2.4) \\ \lambda_1 p_1^{*2} + \lambda_1 p_1^* p_2^* + \lambda_1 p_2^{*2} - mp_1^{*2} p_2^* - mp_1^* p_2^{*2} = \lambda_3 & (2.5) \end{cases}$$

由(2.4)代入(2.5)可得 $\lambda_2 p_1^* + \lambda_2 p_2^* - \lambda_1 p_1^* p_2^* = \lambda_3$ (2.6)

移項 $\Rightarrow p_1^* = -p_2^* + \dfrac{\lambda_1\lambda_2 - m\lambda_3}{\lambda_1^2 - m\lambda_2}$ 代入(2.6)

$$\lambda_1 p_2^{*2} - \lambda_1\left(\frac{\lambda_1\lambda_2 - m\lambda_3}{\lambda_1^2 - m\lambda_2}\right)p_2^* - \lambda_3 + \lambda_2\left(\frac{\lambda_1\lambda_2 - m\lambda_3}{\lambda_1^2 - m\lambda_2}\right) = 0$$

利用公式解即可得知 $p_1^*,\ p_2^*$ ，再代入(2.3)即可得到 n^* 。

接著是將 n^* 變為整數 n 的過程。

令 $n = \lfloor n^* \rfloor$

雖然要經過調整，但是我們仍然希望動差方程式仍然可以成立。

$$\begin{cases} \lambda_1 = np_1 + (m-n)p_2 & (2.7) \\ \lambda_2 = np_1^2 + (m-n)p_2^2 & (2.8) \end{cases}$$

$(2.7)*(2.7)-(m-n)*(2.8)$ ➔

$$nmp_1^2 - 2n\lambda_1 p_1 + \lambda_1^2 - (m-n)\lambda_2 = 0$$

利用公式解即可得知 p_1, p_2，再代入(2.7)即可得到 n。

以上解出兩個 *Binomial* 之和法所需要的參數，讀者可以自行練習如何求得單一 *Binomial* 方法中的參數，其方法都一樣，練習求得這些參數，有助於讀者更深一步的了解第四章結論的說明。

接下來第三章將會介紹本篇論文所寫程式的架構，並提供下載本篇論文的程式。

下載連結：

全部檔案

http://www.nakido.com/79EADF913B6F277F162A69F731EC8D49F273AED5

執行檔 EXE

http://www.nakido.com/6EAB8B2CC323BD2AB0CFE3AD5AD549B53F9B245A

需要注意的是，此程式是在 Microsoft visual studio 環境下編寫且呼叫 R，所以必須安裝這兩個軟體才能順利執行。Microsoft visual studio 有些函數會跟其他版本的 C 程式有些差異，建議在 Microsoft visual studio 環境下執行。

在此程式一開始須要先提供 R 執行檔的路徑位置。

第三章 程式架構

整體架構可以分成以下幾個步驟。

(1)給定 $p_1 \sim p_m$

(2)計算確切 W 分布

(3)計算逼近分布的機率質量函數

(4)計算 W 分布與逼近分布之間的 d_{TV} 、 d_{loc} 以及 d_{loc} 發生位置

(5)將各種方法的 d_{TV} 、 d_{loc} 畫圖

接下來照個各步驟一一介紹。

(1)給定 $p_1 \sim p_m$

由於若是自行一個一個輸入自己要的值，會過於費時，所以這個程式提供了兩種分布讓使用者自動給定 $p_1 \sim p_m$ 的值。首先要注意的是在此程式中 m 預設為 30，理由是因為在下一個步驟計算 W 分布時，當 m 過大時，會在運算中產生過大的值，以致於電腦無法運算。

第一種分布是 $Uniform(a,b)$ 分布，而它又以生成方式細分為三類。

第一類是預設 $a=0$，變動 b，且 $0<b\le 1$，接著將 $Uniform(0,b)$ 切成 31 等分，而其中 30 個分割點就是我們的 $p_1 \sim p_{30}$，簡單來說，就是採用分位數的觀念。舉例：當 $b=\frac{1}{11}\approx 0.0909$，則 $p_1 \approx 1\times\frac{0.0909}{31}=0.0029,\ p_2 \approx 2\times\frac{0.0909}{31}=0.00586,\ldots,$ $p_{30}\approx 30\times\frac{0.0909}{31}=0.08797$。這樣便能給定一組 $p_1 \sim p_m$，也就是給定了一個 W 分布，再利用以下步驟可以算出在這個 W 分布下，各種逼近方法的 d_{TV}、d_{loc} 以及 d_{loc} 發生位置，但是我們想要討論的是，當不同的 W 分布時，這些逼近方法的好壞是否會發生改變。因此 b 需要變動，在這個第一類的 $Uniform$ 生成方法就是將 b 在 $(0,1)$ 預設切成 11 等分，而其中 10 個分割點就是每次不同的 b。這種給定方式，可以讓我們觀察到，一開始 $p_1 \sim p_{30}$ 集中在 0 附近，後來漸漸平均分散在 $(0,1)$ (也就是 W 分布圖形由平均值在左邊漸漸變到中間)。

第二類是預設 $b=0$，變動 a，且 $0<a\le 1$，原理跟第一類相似，這種給定可以觀察，一開始 $p_1 \sim p_{30}$ 平均分散在 $(0,1)$，後來漸漸的集中在 1 附近(也就是 W 分布圖形由平均值在中間漸漸變成在右邊)。

第三類則是預設 $Uniform(a,b)$ 的中心點永遠在 0.5，而 a,b 則向兩邊散開，這種給定可以觀察，一開始 $p_1 \sim p_{30}$ 集中在 0.5 附近，後來漸漸的散開(也就是 W 分布的變異越來越大)。

第二種分布是 $Truncated\ Normal(u,sd^2)$ 分布，在給定 u,sd 的條件下，則 $p_1 \sim p_{30}$ 跟 $Uniform$ 的做法是一樣的，取出它的分位數當作我們的 $p_1 \sim p_{30}$。接下來要討論的是 u,sd 要怎麼變動，首先在此程式 u 的變動是預設為在 $(0,1)$ 切成 11 等分，而其中 10 個分割點就是每次不同的 u。而 sd 則是使用者可以自行輸入。

(2)計算確切 W 分布

利用遞迴關係式(1.1)，即可生成。

(3)計算逼近分布的機率質量函數

單一 *Binomial* 方法可以直接在 R 裡面計算出。

兩個 *Binomial* 之和法利用下列公式

令 $C \sim Binomial(n_d, p_d) + Binomial(n_e, p_e)$

其中 $D \sim Binomial(n_d, p_d)$, $E \sim Binomial(n_e, p_e)$

則 $P(C=i) = \sum_{j \le i} P(D=j) \times P(E=i-j)$,其中 $0 \le i \le m,\ 0 \le j \le i$

即可算出。

(4)計算 W 分布與逼近分布之間的 d_{TV} 、 d_{loc} 以及 d_{loc} 發生位置

令逼近分布為 F ，則程式會計算出 $|P(W=i) - P(F=i)|,\ \forall i$ ，有了這些資料就可以計算 $d_{TV}\left(L(W),\ \mathrm{L(F)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i \in \mathbb{Z}} \left|P\left(W=i\right) - P\left(F=i\right)\right|$ 以及 $d_{loc}\left(L(W),\ \mathrm{L(F)}\right) = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left|P\left(W=j\right) - P\left(F=j\right)\right|$ 還有 d_{loc} 發生的位置(稱為 j)。

(5)將各種方法的 d_{TV} 、 d_{loc} 畫圖

此程式共比較了五種方法，單一 *Binomial* 一個參數法、單一 *Binomial* 兩個參數法、單一 *Binomial* 三個參數法、兩個 *Binomial* 之和-兩個參數法以及兩個 *Binomial* 之和-三個參數法，最後將這五種方法所生成的 d_{TV}, d_{loc} 畫圖比較，在此程式第六十行可以自行輸入想要哪一種圖 1. d_{TV} 2. d_{loc} 。

接下來藉由這些圖表，可以明顯的發現兩個 *Binomial* 之和方法會比單一 *Binomial* 方法優異，除了這個結論以外尚可看出一些現象，下面第四章將會一個一個的清楚說明。

第四章 圖表分析

首先將所有要討論的圖表列出，表格部分以 $p_1 \sim p_{30}$ 生成方式的不同分為六個表格，圖部分則以 $p_1 \sim p_{30}$ 生成方式的不同以及 d_{TV} 或 d_{loc} 則分為(6*2)十二個圖。表格和圖以及相關變數的說明，會在全部列出後再一起說明。

表 4.1 為第一種 $Uniform(a,b)$ 分布，第一類預設 $a=0$

單BIN1par										
p1	0.045455	0.090909	0.136364	0.181818	0.227273	0.272727	0.318182	0.363636	0.409091	0.454545
dTV1	0.003946	0.008186	0.012861	0.017845	0.023848	0.030434	0.039068	0.049112	0.059364	0.073962
dloc1	0.002612	0.004043	0.005335	0.00664	0.008684	0.010383	0.012643	0.015875	0.018936	0.02354
j1	0	3	4	6	7	8	10	11	12	14
單BIN2par										
n2*	22.86885	22.86885	22.86885	22.86885	22.86885	22.86885	22.86885	22.86885	22.86885	22.86885
n2	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
p2	0.061983	0.123967	0.18595	0.247934	0.309917	0.371901	0.433884	0.495868	0.557851	0.619835
dTV2	0.000592	0.001225	0.001977	0.003052	0.004175	0.005651	0.007582	0.010176	0.01374	0.018442
dloc2	0.000368	0.0006	0.000856	0.001164	0.001536	0.002045	0.002641	0.003646	0.004631	0.006962
j2	0	3	5	6	8	9	11	12	14	15
單BIN3par										
n3*	23.03957	23.20856	23.36916	23.51074	23.61658	23.66045	23.60171	23.37834	22.89879	22.03695
n3	23	23	23	23	23	23	23	23	22	22
s3*	0.000683	0.006221	0.024069	0.065924	0.150042	0.304825	0.574214	1.025435	1.758782	2.91621
s3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
p3	0.059289	0.118577	0.177866	0.237154	0.296443	0.355731	0.41502	0.43083	0.512397	0.528926
dTV3	0.000197	0.000437	0.000785	0.001343	0.002036	0.002915	0.004368	0.001841	0.008257	0.004888
dloc3	0.000134	0.00024	0.00035	0.000539	0.000789	0.001075	0.00139	0.000494	0.002763	0.001672
j3	1	2	3	5	6	7	8	13	13	16
雙BIN2par										
p41	0.020072	0.040144	0.060216	0.080288	0.10036	0.120432	0.140504	0.160576	0.180648	0.20072
p42	0.070837	0.141674	0.212511	0.283348	0.354185	0.425022	0.49586	0.566697	0.637534	0.708371
dTV4	0.000003	0.000012	0.000028	0.000058	0.000103	0.000181	0.000306	0.000484	0.000786	0.001281
dloc4	0.000002	0.000004	0.000012	0.000023	0.000036	0.000064	0.000108	0.000168	0.000259	0.000463
j4	1	2	5	6	7	9	10	11	13	14
雙BIN3par										
n5*	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
n5	14	14	15	14	14	15	14	14	14	14
p51	0.018319	0.036639	0.060216	0.073278	0.091597	0.120432	0.128236	0.146556	0.164875	0.183195
p52	0.069198	0.138395	0.212511	0.276791	0.345989	0.425022	0.484384	0.553582	0.62278	0.691977
dTV5	0.000014	0.000042	0.000028	0.000161	0.000253	0.000181	0.000575	0.000859	0.001252	0.001829
dloc5	0.000012	0.000025	0.000012	0.000065	0.000091	0.000064	0.00018	0.000268	0.000391	0.000597
j5	1	2	5	4	5	9	11	12	10	15

表 4.1 $Uniform(0,b)$

表 4.2 為第一種 $Uniform(a,b)$ 分布，第二類預設 $b=1$

單BIN1par										
p1	0.545455	0.590909	0.636364	0.681818	0.727273	0.772727	0.818182	0.863636	0.909091	0.954545
dTV1	0.073963	0.059364	0.049112	0.039068	0.030434	0.023848	0.017845	0.012861	0.008186	0.003946
dloc1	0.02354	0.018936	0.015875	0.012643	0.010383	0.008684	0.00664	0.005335	0.004043	0.002612
j1	16	18	19	20	22	23	24	26	27	30
單BIN2par										
n2*	24.65996	26.0993	27.22764	28.09228	28.73974	29.21201	29.54504	29.76858	29.90674	29.9788
n2	24	26	27	28	28	29	29	29	29	29
p2	0.681818	0.681818	0.707071	0.730519	0.779221	0.799373	0.846395	0.893417	0.940439	0.987461
dTV2	0.021354	0.015325	0.014362	0.012559	0.024804	0.012326	0.026148	0.050133	0.095724	0.346934
dloc2	0.007947	0.004853	0.005092	0.004135	0.009325	0.004567	0.010739	0.021323	0.058044	0.337999
j2	18	20	21	22	23	25	25	26	28	29
單BIN3par										
n3*	22.03695	22.89879	23.37834	23.60171	23.66045	23.61658	23.51074	23.36916	23.20856	23.03957
n3	22	22	23	23	23	23	23	23	23	23
s3*	5.046841	5.342425	5.596223	5.82408	6.03473	6.233381	6.423333	6.606776	6.785222	6.95975
s3	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
p3	0.516529	0.578512	0.612648	0.671937	0.687747	0.747036	0.806324	0.865613	0.924901	0.98419
dTV3	0.002677	0.0131	0.010226	0.022483	0.014639	0.023657	0.03577	0.056575	0.09887	0.347208
dloc3	0.000863	0.00421	0.003439	0.007816	0.004999	0.008484	0.014802	0.024898	0.058643	0.33758
j3	16	18	20	21	22	24	25	26	28	29
雙BIN2par										
p41	0.291629	0.362466	0.433303	0.50414	0.574978	0.645815	0.716652	0.787489	0.858326	0.929163
p42	0.79928	0.819352	0.839424	0.859496	0.879568	0.89964	0.919712	0.939784	0.959856	0.979928
dTV4	0.00128	0.000785	0.000485	0.000306	0.000181	0.000103	0.000058	0.000028	0.000012	0.000003
dloc4	0.000463	0.000259	0.000168	0.000108	0.000064	0.000036	0.000023	0.000012	0.000004	0.000002
j4	16	17	19	20	21	23	24	25	28	29
雙BIN3par										
n5*	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
n5	15	14	15	14	15	14	14	14	15	14
p51	0.291629	0.346694	0.433303	0.491873	0.574978	0.637052	0.709642	0.782231	0.858326	0.92741
p52	0.79928	0.804598	0.839424	0.84802	0.879568	0.891443	0.913155	0.934866	0.959856	0.978289
dTV5	0.00128	0.001185	0.000485	0.000512	0.000181	0.00021	0.00013	0.00007	0.000012	0.000012
dloc5	0.000463	0.00037	0.000168	0.000169	0.000064	0.000075	0.00005	0.000028	0.000004	0.000009
j5	16	18	19	21	21	24	25	26	28	29

表 4.2 $Uniform(a,1)$

表 4.3 為第一種$Uniform(a,b)$分布，第三類預設中心點$=0.5$

單BIN1par										
p1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
dTV1	0.000645	0.002591	0.005871	0.010537	0.016668	0.024375	0.033796	0.045108	0.058537	0.074359
dloc1	0.000193	0.000777	0.001764	0.003178	0.005054	0.007441	0.010404	0.014031	0.018439	0.023787
j1	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
單BIN2par										
n2*	29.92289	29.6939	29.31996	28.81198	28.18417	27.45304	26.63642	25.75254	24.81914	23.85289
n2	29	29	29	28	28	27	26	25	24	23
p2	0.517241	0.517241	0.517241	0.535714	0.535714	0.555556	0.576923	0.6	0.625	0.652174
dTV2	0.007933	0.006053	0.003024	0.008002	0.003607	0.006481	0.009694	0.013094	0.016819	0.02108
dloc2	0.00232	0.001736	0.000927	0.002451	0.00113	0.002084	0.003246	0.004495	0.005923	0.007673
j2	15	15	16	16	17	16	16	16	16	16
單BIN3par										
n3*	29.92269	29.69075	29.30419	28.763	28.06718	27.21674	26.21168	25.05199	23.73767	22.26873
n3	29	29	29	28	28	27	26	25	23	22
s3*	0.038656	0.154625	0.347907	0.618502	0.966409	1.391629	1.894162	2.474007	3.131165	3.865636
s3	0	0	0	0	0	1	1	2	3	3
p3	0.517241	0.517241	0.517241	0.535714	0.535714	0.518519	0.538462	0.52	0.521739	0.545455
dTV3	0.007933	0.006053	0.003024	0.008002	0.003607	0.002265	0.004258	0.002406	0.006754	0.005593
dloc3	0.00232	0.001736	0.000927	0.002451	0.00113	0.000741	0.001445	0.000736	0.002058	0.002049
j3	15	15	16	16	17	17	17	18	16	17
雙BIN2par										
p41	0.474617	0.449235	0.423852	0.39847	0.373087	0.347705	0.322322	0.29694	0.271557	0.246175
p42	0.525383	0.550765	0.576148	0.60153	0.626913	0.652295	0.677678	0.70306	0.728443	0.753825
dTV4	0.000004	0.000005	0.000009	0.000019	0.000049	0.000108	0.000219	0.000411	0.000737	0.001278
dloc4	0	0.000001	0.000002	0.000006	0.000016	0.000036	0.000074	0.000141	0.000259	0.000461
j4	11	19	11	15	15	15	15	15	15	15
雙BIN3par										
n5*	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
n5	15	15	14	15	14	15	14	14	15	15
p51	0.474617	0.449235	0.418595	0.39847	0.364325	0.347705	0.310055	0.28292	0.271557	0.246175
p52	0.525383	0.550765	0.57123	0.60153	0.618716	0.652295	0.666202	0.689945	0.728443	0.753825
dTV5	0.000004	0.000005	0.000026	0.000019	0.000129	0.000108	0.000419	0.000696	0.000737	0.001278
dloc5	0	0.000001	0.000007	0.000006	0.000035	0.000036	0.000126	0.000219	0.000259	0.000461
j5	11	19	13	15	16	15	16	16	15	15

表 4.3 $Uniform(a,b)$, $\frac{a+b}{2}=0.5$

表 4.4 為第二種 $Truncated\ Normal(u, sd^2)$ 分布，預設 $sd = 0.05$

單BIN1par										
p1	0.094315	0.181833	0.272727	0.363636	0.454545	0.545455	0.636364	0.727273	0.818167	0.905685
dTV1	0.005428	0.003443	0.002527	0.002219	0.00204	0.00204	0.002219	0.002527	0.003443	0.005428
dloc1	0.002691	0.001254	0.000849	0.000686	0.000604	0.000604	0.000686	0.000849	0.001254	0.002691
j1	3	6	8	11	14	16	19	22	24	27
單BIN2par										
n2*	24.96292	28.2627	29.20161	29.54561	29.7076	29.79634	29.8501	29.8851	29.90919	29.9345
n2	24	28	29	29	29	29	29	29	29	29
p2	0.117893	0.194821	0.282131	0.376175	0.470219	0.564264	0.658308	0.752351	0.84638	0.936916
dTV2	0.001184	0.000563	0.000676	0.002675	0.005123	0.008318	0.012977	0.02155	0.03854	0.095001
dloc2	0.000558	0.000202	0.000228	0.000806	0.001535	0.002503	0.003956	0.007159	0.015671	0.052312
j2	3	6	9	11	14	17	20	22	25	28
單BIN3par										
n3*	25.30308	28.5296	29.37869	29.6526	29.7458	29.7458	29.6526	29.37869	28.5296	25.30308
n3	25	28	29	29	29	29	29	29	28	25
s3*	0.005552	0.015934	0.031116	0.054626	0.093181	0.161018	0.292772	0.590199	1.454465	4.691373
s3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4
p3	0.113178	0.194821	0.282131	0.376175	0.470219	0.564264	0.658308	0.752351	0.840893	0.926822
dTV3	0.000306	0.000563	0.000676	0.002675	0.005123	0.008318	0.012977	0.02155	0.0401	0.097614
dloc3	0.000169	0.000202	0.000228	0.000806	0.001535	0.002503	0.003956	0.007159	0.016213	0.052514
j3	2	6	9	11	14	17	20	22	25	28
雙BIN2par										
p41	0.051948	0.136751	0.227631	0.31854	0.409449	0.500359	0.591268	0.682177	0.773085	0.863319
p42	0.136681	0.226915	0.317823	0.408732	0.499641	0.590551	0.68146	0.772369	0.863249	0.948052
dTV4	0.000026	0.000005	0.000003	0.000004	0.000003	0.000003	0.000004	0.000003	0.000005	0.000026
dloc4	0.000014	0.000001	0.000001	0.000001	0.000001	0.000001	0.000001	0.000001	0.000001	0.000014
j4	2	6	8	12	19	11	18	22	24	28
雙BIN3par										
n5*	16.04725	15.00574	15	15	15	15	15	15	14.99426	13.95276
n5	16	15	15	14	15	14	14	14	14	13
p51	0.054685	0.136751	0.227631	0.315427	0.409449	0.497246	0.588155	0.679064	0.769972	0.857237
p52	0.139606	0.226915	0.317823	0.405819	0.499641	0.587638	0.678547	0.769456	0.860337	0.942734
dTV5	0.00001	0.000005	0.000003	0.000007	0.000003	0.000007	0.000007	0.000007	0.000011	0.000019
dloc5	0.000004	0.000001	0.000001	0.000002	0.000001	0.000001	0.000002	0.000002	0.000004	0.000008
j5	4	6	8	12	19	14	21	23	25	28

表 4.4 $Truncated\ Normal(u, 0.05^2)$

表 4.5 為第二種 $Truncated\ \ Normal(u, sd^2)$ 分布，預設 $sd = 0.1$

單BIN1par										
p1	0.121341	0.188629	0.273412	0.363666	0.454546	0.545454	0.636334	0.726588	0.811371	0.878659
dTV1	0.01225	0.011841	0.010057	0.008986	0.008244	0.008244	0.008986	0.010057	0.011841	0.01225
dloc1	0.005486	0.004538	0.003398	0.002794	0.002459	0.002459	0.002794	0.003398	0.004538	0.005486
j1	4	6	8	11	14	16	19	22	24	26
單BIN2par										
n2*	22.29754	24.96292	27.09185	28.2627	28.86363	29.20162	29.40955	29.55083	29.67635	29.80366
n2	22	24	27	28	28	29	29	29	29	29
p2	0.165465	0.235787	0.303791	0.389642	0.487013	0.564263	0.658277	0.751643	0.839349	0.908958
dTV2	0.000891	0.002901	0.001152	0.001736	0.006865	0.002739	0.007018	0.014129	0.029097	0.062593
dloc2	0.000396	0.001046	0.000353	0.000569	0.002082	0.000871	0.002261	0.004738	0.011863	0.031043
j2	5	6	10	12	14	18	20	23	25	27
單BIN3par										
n3*	22.92029	25.61069	27.63979	28.62355	28.98409	28.98409	28.62355	27.63979	25.61069	22.92029
n3	22	25	27	28	28	28	28	27	25	22
s3*	0.023628	0.057904	0.119836	0.216478	0.372401	0.643514	1.159973	2.240379	4.331407	7.056084
s3	0	0	0	0	0	0	1	2	4	7
p3	0.165465	0.226355	0.303791	0.389642	0.487013	0.584415	0.646072	0.733246	0.813645	0.87999
dTV3	0.000891	0.001031	0.001152	0.001736	0.006865	0.013969	0.010737	0.019636	0.036163	0.068283
dloc3	0.000396	0.000384	0.000353	0.000569	0.002082	0.004285	0.003278	0.006591	0.014073	0.033354
j3	5	5	10	12	14	17	20	22	25	27
雙BIN2par										
p41	0.050024	0.103897	0.183833	0.273502	0.364355	0.455264	0.54617	0.637009	0.726638	0.807342
p42	0.192658	0.273362	0.362991	0.45383	0.544736	0.635645	0.726498	0.816167	0.896103	0.949976
dTV4	0.000247	0.000096	0.000035	0.000024	0.000022	0.000022	0.000024	0.000035	0.000096	0.000247
dloc4	0.000114	0.000037	0.000012	0.000008	0.000007	0.000007	0.000008	0.000012	0.000037	0.000114
j4	3	4	9	11	14	16	19	21	26	27
雙BIN3par										
n5*	18.05782	16.04725	15.12776	15.00574	15.00011	14.99989	14.99426	14.87225	13.95276	11.94218
n5	18	16	15	15	15	14	14	14	13	11
p51	0.063111	0.109369	0.183833	0.273502	0.364355	0.449037	0.539945	0.630824	0.714475	0.78493
p52	0.208686	0.279213	0.362991	0.45383	0.544736	0.62982	0.720675	0.810382	0.885467	0.932923
dTV5	0.000042	0.000042	0.000035	0.000024	0.000022	0.000047	0.00005	0.000054	0.000073	0.000072
dloc5	0.00002	0.000016	0.000012	0.000008	0.000007	0.000013	0.000015	0.000017	0.000027	0.000032
j5	2	6	9	11	14	14	20	22	25	27

表 4.5 $Truncated\ \ Normal(u, 0.1^2)$

表 4.6 為第二種 $Truncated\ \ Normal(u,sd^2)$ 分布，預設 $sd=0.3$

單BIN1par										
p1	0.268564	0.310507	0.358802	0.41268	0.47043	0.52957	0.58732	0.641198	0.689493	0.731436
dTV1	0.043908	0.047242	0.052251	0.053512	0.056575	0.056575	0.053512	0.052251	0.047242	0.043908
dloc1	0.01549	0.015773	0.016857	0.016906	0.01778	0.01778	0.016906	0.016857	0.015773	0.01549
j1	8	9	11	12	14	16	18	19	21	22
單BIN2par										
n2*	20.78375	21.55283	22.43036	23.39591	24.4076	25.40635	26.33048	27.13279	27.791	28.3077
n2	20	21	22	23	24	25	26	27	27	28
p2	0.402846	0.443582	0.489276	0.538278	0.588037	0.635484	0.677677	0.712442	0.766103	0.783681
dTV2	0.008133	0.008012	0.009133	0.010145	0.01165	0.01325	0.013905	0.01313	0.026189	0.017005
dloc2	0.002938	0.002942	0.002983	0.003525	0.003997	0.004281	0.004773	0.004568	0.009823	0.006371
j2	9	11	12	14	16	18	19	21	22	23
單BIN3par										
n3*	22.05838	22.6591	23.20198	23.61798	23.84447	23.84447	23.61798	23.20198	22.6591	22.05838
n3	22	22	23	23	23	23	23	23	22	22
s3*	0.607597	0.903104	1.327856	1.906104	2.641957	3.51357	4.475913	5.470168	6.437797	7.334025
s3	0	0	1	1	2	3	4	5	6	7
p3	0.366224	0.423419	0.424525	0.4948	0.526648	0.560309	0.592156	0.618954	0.66749	0.679231
dTV3	0.010453	0.00791	0.003237	0.005433	0.008842	0.010989	0.010914	0.006969	0.018786	0.006087
dloc3	0.003736	0.00278	0.001207	0.001943	0.002923	0.003575	0.003477	0.002271	0.006452	0.002133
j3	8	8	10	14	15	17	18	20	21	23
雙BIN2par										
p41	0.089725	0.116117	0.150365	0.193425	0.245249	0.304389	0.368065	0.432761	0.495102	0.552596
p42	0.447404	0.504898	0.567239	0.631935	0.695611	0.754751	0.806575	0.849635	0.883883	0.910275
dTV4	0.002615	0.002548	0.002236	0.001622	0.001051	0.001051	0.001622	0.002236	0.002548	0.002615
dloc4	0.000832	0.000789	0.000702	0.000515	0.000342	0.000342	0.000515	0.000702	0.000789	0.000832
j4	6	8	9	10	15	15	20	21	22	24
雙BIN3par										
n5*	19.31145	18.58161	17.71298	16.70329	15.58214	14.41786	13.29671	12.28702	11.41839	10.68856
n5	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
p51	0.132488	0.151788	0.176529	0.207586	0.245249	0.288842	0.336592	0.385916	0.434014	0.478519
p52	0.503605	0.548586	0.597159	0.647074	0.695611	0.740207	0.779053	0.811386	0.837402	0.857894
dTV5	0.000635	0.000818	0.000982	0.001059	0.001051	0.001007	0.000914	0.00083	0.000747	0.000692
dloc5	0.000221	0.00029	0.000301	0.000361	0.000342	0.000345	0.000322	0.000287	0.000273	0.000261
j5	9	10	11	13	15	16	18	19	21	22

表 4.6 $Truncated\ \ Normal(u,0.3^2)$

圖 4.1 為第一種 $Uniform(a,b)$ 分布，第一類預設 $a=0$ 的 d_{TV} 圖

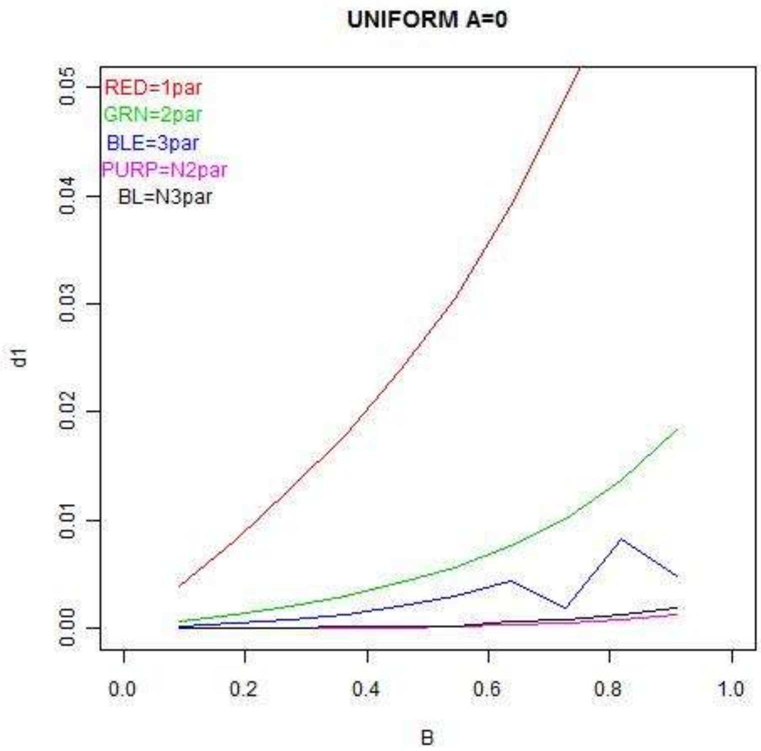

圖 4.1 $Uniform(0,b)-d_{TV}$

圖 4.2 為第一種 $Uniform(a,b)$ 分布，第二類預設 $b=1$ 的 d_{TV} 圖

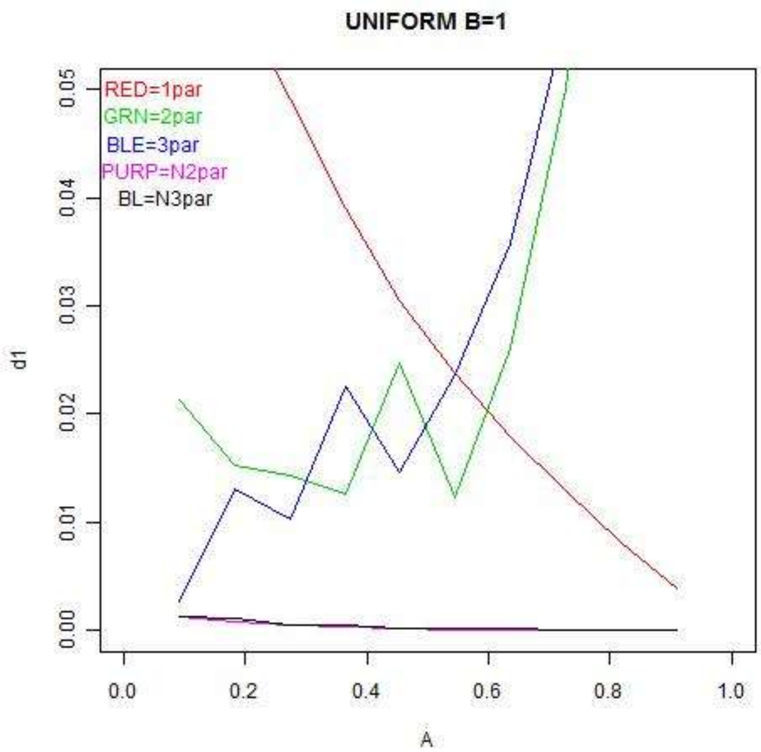

圖 4.2 $Uniform(a,1)-d_{TV}$

圖 4.3 為第一種 $Uniform(a,b)$ 分布，第三類預設中心點=0.5 的 d_{TV} 圖

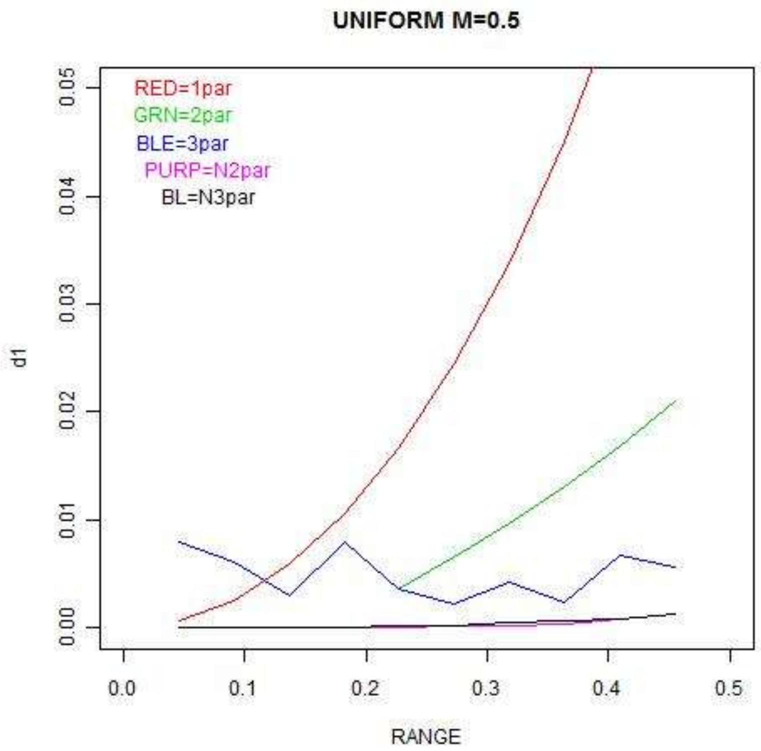

圖 4.3 $Uniform(a,b)-d_{TV}$

圖 4.4 為第二種 $Truncated\ Normal(u,sd\wedge 2)$ 分布，預設 $sd=0.05$ 的 d_{TV} 圖

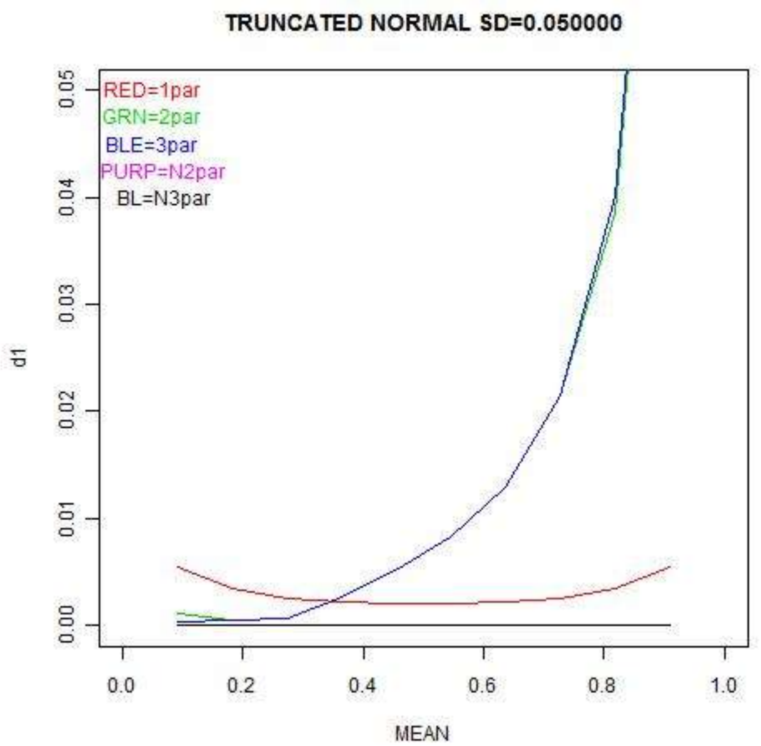

圖 4.4 $Truncated\ Normal(u,0.05^2)-d_{TV}$

圖 4.5 為第二種 $Truncated\ Normal(u, sd^2)$ 分布，預設 $sd = 0.1$ 的 d_{TV} 圖

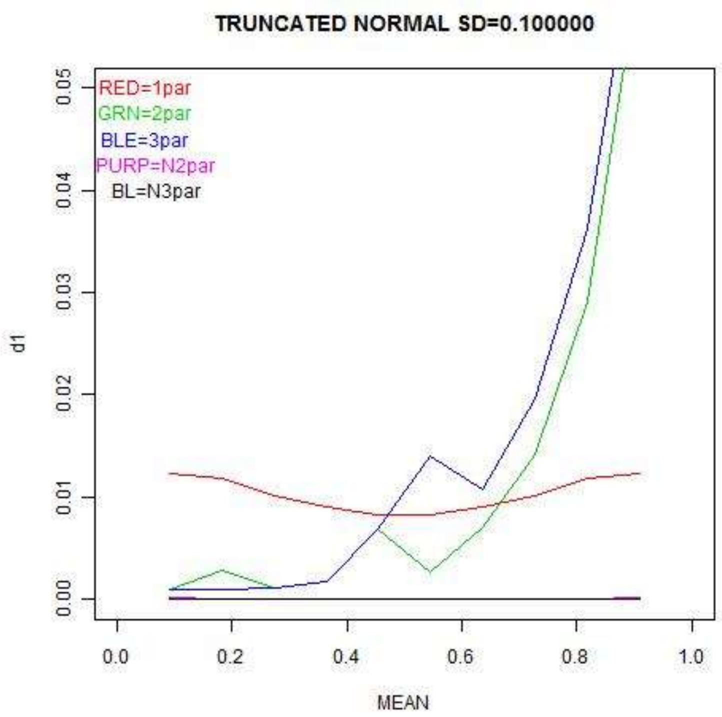

圖 4.5 $Truncated\ Normal(u, 0.1^2) - d_{TV}$

圖 4.6 為第二種 $Truncated\ Normal(u, sd \wedge 2)$ 分布，預設 $sd = 0.3$ 的 d_{TV} 圖

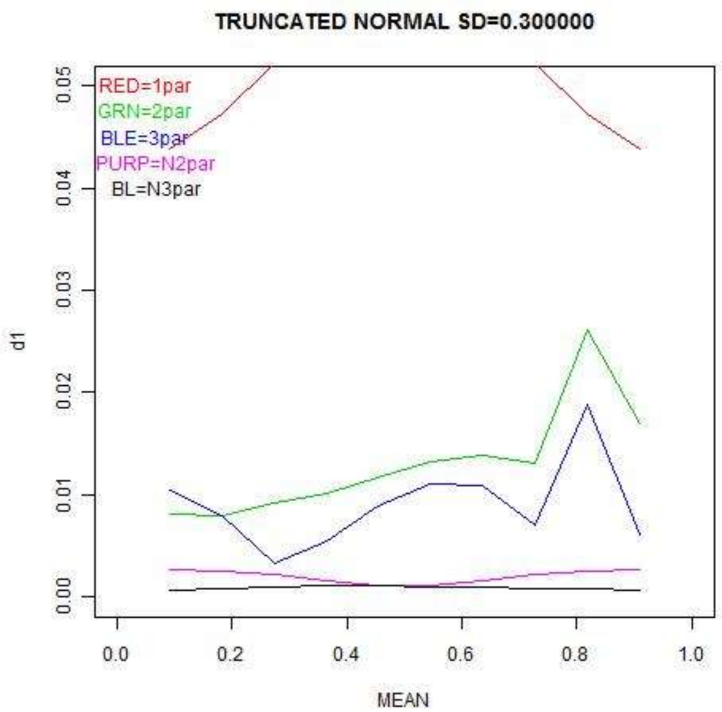

圖 4.6 $Truncated\ Normal(u, 0.3^2) - d_{TV}$

圖 4.7 為第一種 $Uniform(a,b)$ 分布，第一類預設 $a=0$ 的 d_{loc} 圖

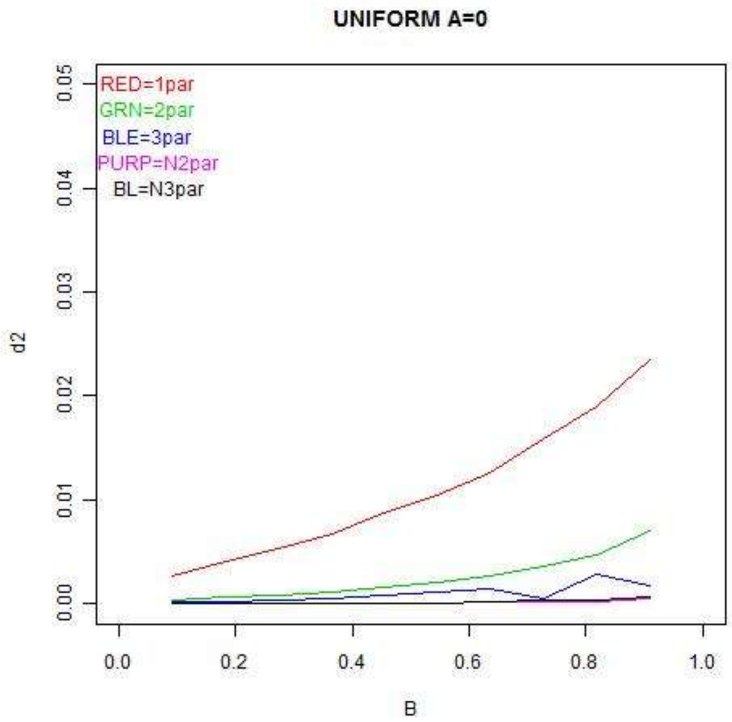

圖 4.7 $Uniform(0,b)-d_{loc}$

圖 4.8 為第一種 $Uniform(a,b)$ 分布，第二類預設 $b=1$ 的 d_{loc} 圖

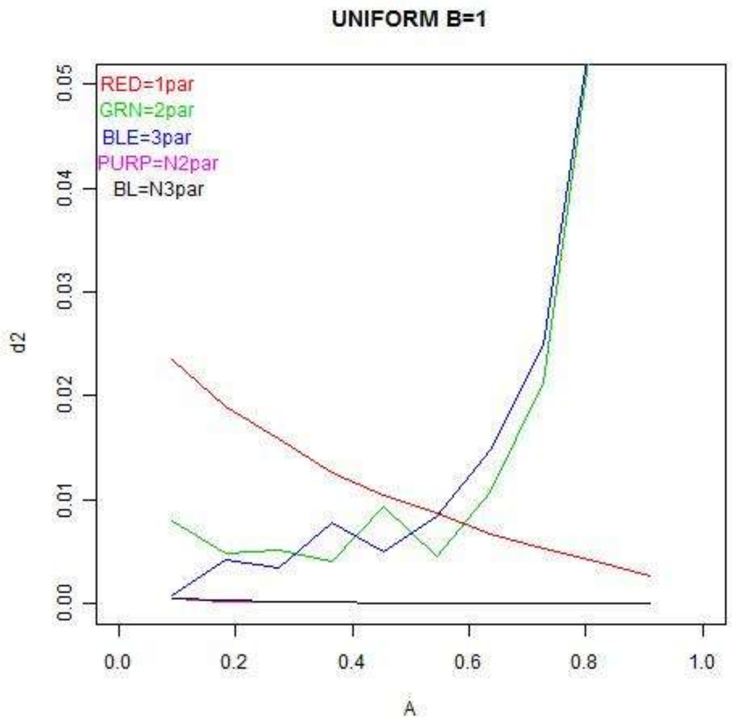

圖 4.8 $Uniform(a,1)-d_{loc}$

圖 4.9 為第一種 $Uniform(a,b)$ 分布，第三類預設中心點=0.5 的 d_{loc} 圖

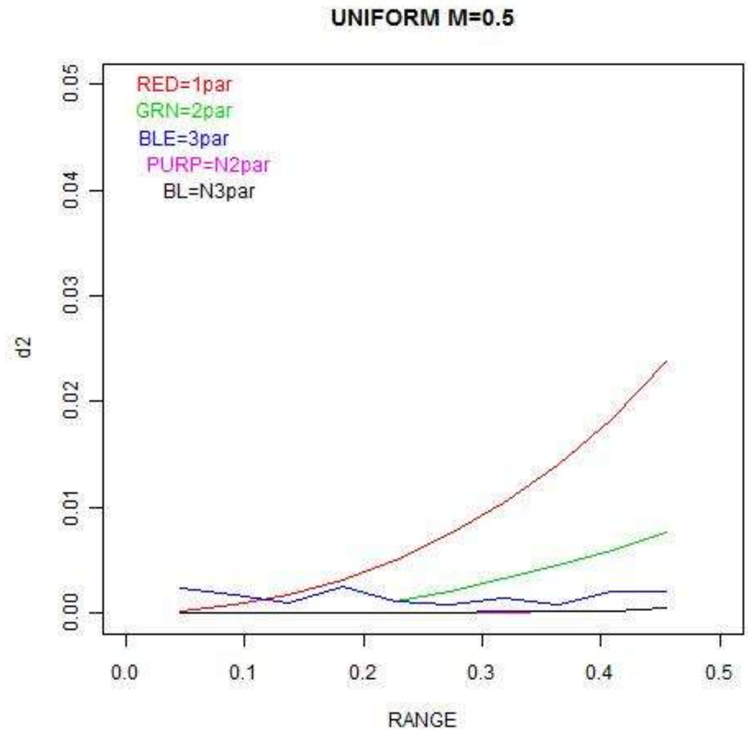

圖 4.9 $Uniform(a,b)-d_{loc}$

圖 4.10 為第二種 $Truncated\ Normal(u,sd\wedge 2)$ 分布，預設 $sd=0.05$ 的 d_{loc} 圖

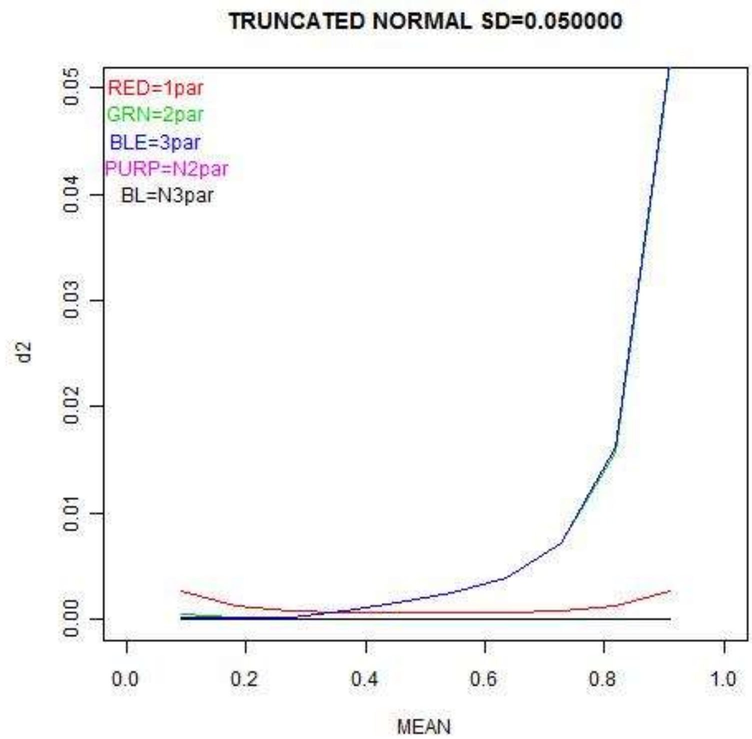

圖 4.10 $Truncated\ Normal(u,0.05^2)-d_{loc}$

圖 4.11 為第二種 $Truncated\ Normal(u, sd\wedge 2)$ 分布，預設 $sd = 0.1$ 的 d_{loc} 圖

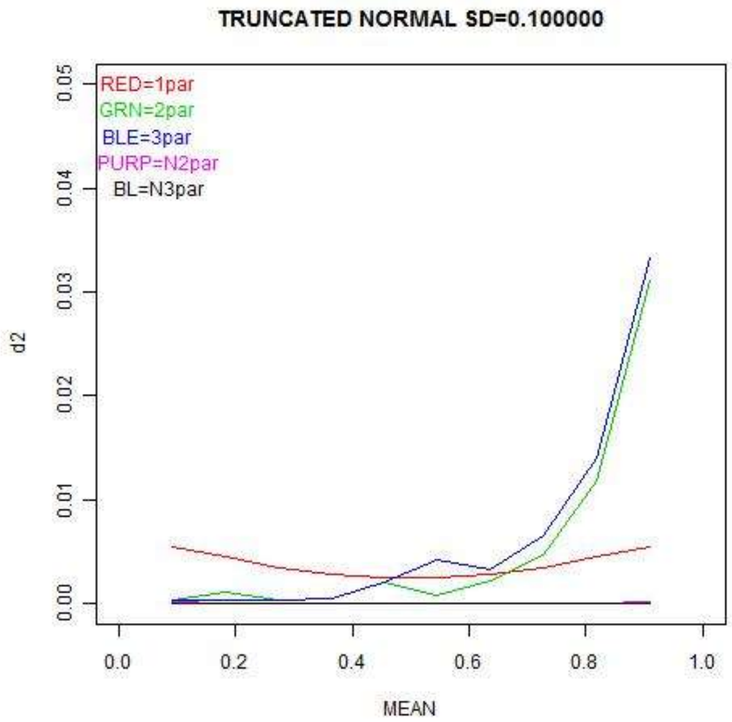

圖 4.11 $Truncated\ Normal(u, 0.1^2) - d_{loc}$

圖 4.12 為第二種 $Truncated\ Normal(u, sd\wedge 2)$ 分布，預設 $sd = 0.3$ 的 d_{loc} 圖

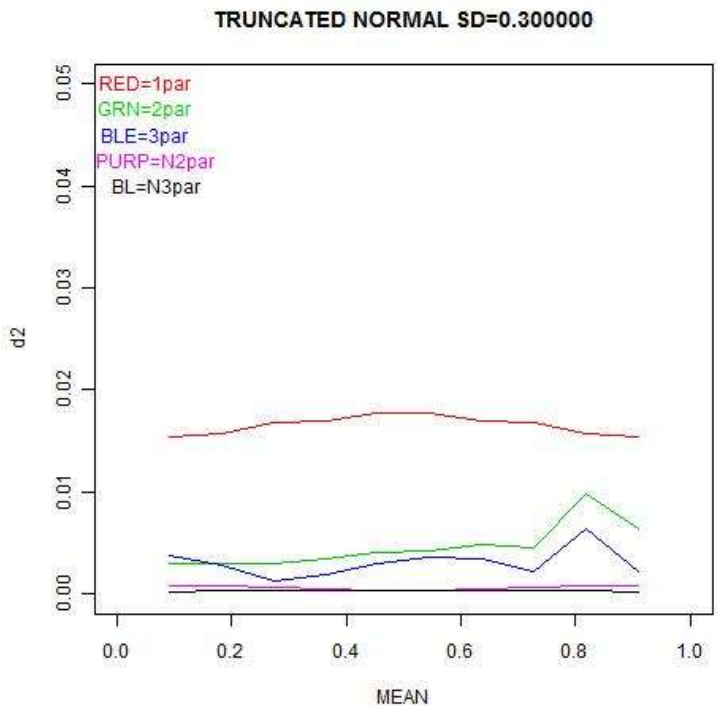

圖 4.12 $Truncated\ Normal(u, 0.3^2) - d_{loc}$

表格上參數說明，以各種方法分成五類。

(1)單 BIN1par(單一 *Binomial* 一個參數法)底下的參數。

p1 ：此法的機率值

(2)單 BIN2par(單一 *Binomial* 兩個參數法)底下的參數。

n2* ：經由動差方程式解出的 n^* (實數)

n2 ：利用高斯符號將 n^* 轉為整數

p2 ：此法的機率值

(3)單 BIN3par(單一 *Binomial* 三個參數法)底下的參數。

n3* ：經由動差方程式解出的 n^* (實數)

n3 ：利用高斯符號將 n^* 轉為整數

s3* ：經由動差方程式解出的 s^* (實數)

s3 ：利用高斯符號將 s^* 轉為整數

p3 ：此法的機率值

(4)雙 BIN2par(兩個 *Binomial* 之和-兩個參數法)底下的參數。

p41 ：第一個 *Binomial* 的機率值

p42 ：第二個 *Binomial* 的機率值

(5)雙 BIN3par(兩個 *Binomial* 之和-三個參數法)底下的參數。

n5* ：經由動差方程式解出的 n^* (實數)

n5 ：利用高斯符號將 n^* 轉為整數

p51 ：對應 n5 的機率值

p52 ：另一個 *Binomial* 的機率值

另外 dTVi, dloci, ji 分別代表各種方法的 d_{TV}， d_{loc}， d_{loc} 的發生位置，$1 \le i \le 5$。

圖表上 y 軸說明，y 軸上顯示 d1 代表 d_{TV} 圖，d2 代表 d_{loc} 圖。

接下來藉由這些圖表，可以得到以下幾個結論。

結論一 單一 *Binomial* 方法比較

我們可以知道，參數使用的越多大部分情形會逼近的越準確，理由是越多階的動差一致，這樣便可以使得分布越像，但從圖 4.2, 4.4,4.5,4.8,4.10,4.11，這些圖的後半段可以知道當 $p_1 \sim p_{30}$ 都很接近 1 的時候，單一 *Binomial* 兩個參數法和單一 *Binomial* 三個參數法誤差會快速的增加。原因是單一 *Binomial* 兩個參數法中的 n 和單一 *Binomial* 三個參數法中的 n 和 s 會使得定義域減縮。舉例，W 的定義域是從 $0 \sim 30$，這時如果單一 *Binomial* 兩個參數法中的 $n = 28$，這會造成我們放棄去逼近 $P(W=29)$ 以及 $P(W=30)$，所以當 $P(W=29)+P(W=30)$ 大到不能忽略的時候，就會造成很大的誤差。也就是圖 4.2, 4.4,4.5,4.8,4.10,4.11 所顯示出來的現象。

這個結論告訴我們，單一 *Binomial* 方法會根據不同的 $p_1 \sim p_{30}$ 而有所優缺。

結論二 解釋跳動

在所有圖中我們可以看到單一 *Binomial* 一個參數法的誤差始終都是近乎平滑的，但單一 *Binomial* 兩個參數法、單一 *Binomial* 兩個參數法的誤差卻是有些很大的跳動，理由是因為參數取完高斯之後，會使得原本成立的動差方程式，產生了偏差，以致於圖形的結構沒辦法達到原本應該有的一致。舉例，在單一 *Binomial* 兩個參數法中的 n^* 和 p^* 是利用一、二階動差方程式，但要轉成整數 n 和 p 時，卻只用了一階動差方程式，這會導致二階動差方程式的偏差。我們可以看表 4.2 的第六行單 BIN2par 中的 n2*=28.73974, n2=28, p2=0.779221 以及雙 BIN2par 的 p41=0.574978, p42=0.879568 得知 $\lambda_1 = 15\times(p41+p42) = 21.81819$, $\lambda_2 = 15\times(p41\wedge 2+p42\wedge 2) = 11.9352$，依據一、二階動差方程式以下方程式應該要滿足 $\lambda_1 = n2\times p2$, $\lambda_2 = n2\times\left(p2\right)^2$，但實際上 $n2\times p2 = 21.81819$,

$n2\times\left(p2\right)^2 = 17.0012$，很明顯的二階動差方程式已經有了很大的偏差，這會導致單 BIN2par 誤差的增大，也就是圖 4.2 綠線中間突然突起的原因。

至於，兩個 *Binomial* 之和-三個參數法也會有這個問題，原理是一樣的。

由這個結論可以知道，增加參數可以使我們的精準度提升，但若我們選的參數是需要經過調整為整數的，這又會導致精準度的變動。

結論三 兩個 *Binomial* 之和方法

在所有圖中明顯的可以看出兩個 *Binomial* 之和方法皆比單一 *Binomial* 方法的誤差還小。原因是因為參數較多所以較多階動差一致，以及結論一的理由，不需要犧牲定義域。

参考文獻

[1]Pitman, J.(1997) Probabilistic bounds on the coefficients of polynomial with only real zero. J. Combinatorial Theory A 77, 279-303.

[2]Peköz, E. A., Röllin, A., Čekanavičius, V. and Shwartz, M.(2009) A three-parameter binomial approximation. J.Appl. Prob. 46, 1073-1085.

[3]Chen, X. H, Dempster, A. P., Liu, J. S. (1994). Weighted finite population sampling to maximize entropy. *Biometrika* 81,3, 457-469.

[4]Ehm, W.(1991) Binomial approximation to the poisson binomial distribution. Statist. Prob. Lett. 11, 7-16

[5]Barbour, A. D., Holst, L. and Janson, S.(1992b) Poisson approxition(Oxford Stud. Prob. 2). Clarendon Press, Oxford.