

國立交通大學

統計學研究所

碩士論文

當管制下共變異矩陣需估計時

多變量製程變異之監控

Monitoring Multivariate Process Dispersion when
the In-control Covariance Matrix is Estimated

研究生：楊捷文

指導教授：洪志真 教授

中華民國一百年六月

當管制下共變異矩陣需估計時
多變量製程變異之監控

Monitoring Multivariate Process Dispersion when
the In-control Covariance Matrix is Estimated

研究生：楊捷文

Student : Chieh-Wen Yang

指導教授：洪志真

Advisor : Jyh-Jen Horng Shiau



Submitted to Institute of Statistics
College of Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in
Statistics

June 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年六月

當管制下共變異矩陣需估計時多變量製程變異之監控

學生：楊捷文

指導教授：洪志真 教授

國立交通大學統計學研究所碩士班

摘要

一般在實際應用管制圖時，通常管制狀態下的製程參數為未知，而必須執行階段一分析以取得管制狀態下之資料來估計製程參數，並用以建構階段二線上監控之管制圖。針對多變量製程之管制下共變異矩陣 Σ_0 未知的狀況，我們利用概似比檢定(LRT)統計量來建構一個單邊與兩個雙邊之監控共變異矩陣的管制圖，並以控制期望假警報率於某一預設水準為準則，提供蒙特卡羅模擬方法來建構出適當的管制界限。我們以統計模擬計算這些管制圖在各種共變異數矩陣改變下之期望警報率來衡量這些管制圖之績效表現，並透過一半導體實例與模擬例子來闡述三種管制圖的應用及績效。

關鍵字：期望假警報率，概似比檢定，多變量製程變異，單邊檢定，雙邊檢定

Monitoring Multivariate Process Dispersion when the In-control Covariance Matrix is Estimated

Student : Chieh-Wen Yang

Advisor: Jyh-Jen Horng Shiau

Institute of Statistics
National Chiao Tung University

Abstract

When implementing a control chart, the in-control parameters of the process are usually unknown and need to be estimated from the in-control data obtained from phase I analysis, and then used to construct the control limits for phase II online monitoring. Assume the in-control covariance matrix Σ_0 is unknown, we establish a one-sided-test-based control chart and two two-sided-test-based control charts based on the likelihood ratio test (LRT) statistics for testing the covariance matrix of the quality characteristic vector of the current process, Σ . Considering the randomness of the estimated covariance matrix, we construct the control limits by controlling the expected false alarm rate at a prescribed level. Algorithms that are computationally feasible are developed for constructing such control limits via Monte Carlo simulation. The performance of these control charts are evaluated in terms of the detecting power of various changes in the covariance matrix through a simulation study. The applicability and effectiveness of the three control charts are illustrated via a semiconductor example and two simulated examples.

KEY WORDS: Expected false alarm rate, likelihood ratio test, multivariate process dispersion, one-sided test, two-sided test

致 謝

時間過得好快，在交大統計所的兩年碩士生活一下子就過去了。首先，最感謝的是我的指導教授 洪志真老師，跟老師一起做研究的一年裡，老師總是不厭其煩地教導我，指導我論文上許多問題，遭遇挫折時，老師也很有耐心地教我如何找出疑難點與進行改善，在整個過程當中我學習到如何做研究的方法與態度，獲益良多，非常感謝老師對我的教導與勉勵，也希望老師能夠開開心心、身體健康。也要謝謝我的口試委員黃榮臣老師、鄭少為老師及陳志榮老師，老師們給予我的建議，讓我的論文能夠更加完整。

另外，我要感謝顏家鈴學姊，在我的論文研究過程中幫助我許多，解決我的困惑，如今論文能夠完成，由衷地感謝學姊對我的鼓勵與幫忙。

再來我要感謝交大統研碩士班的所有同學，在這段最後的學生生涯裡能夠和大家相處，不管是歡笑或淚水，我們每個人都共同參與，讓我這碩士的生活裡增添了許多歡樂的回憶。我特別要感謝我的男朋友兼同學林洋德，因為有你才讓我的論文得以順利，因為有你我們的碩士生活也過得相當精彩，謝謝你。

最後我要感謝我的家人，爸爸和媽媽在我求學的過程中扮演很重要的角色，一直都很支持我，鼓勵我繼續念書，如今碩士可以順利畢業，都要感謝爸爸媽媽對我用心的栽培，家人的陪伴更是一股鼓勵著我的力量，謝謝你們。

楊捷文 謹誌於

交通大學統計學研究所

中華民國一百年六月

目錄

第一章 緒論.....	1
第二章 概似比檢定統計量管制圖.....	4
2.1 雙邊概似比檢定統計量.....	4
2.2 單邊概似比檢定統計量.....	5
2.3 概似比檢定統計量管制圖.....	6
第三章 管制界限之建構.....	7
第四章 管制圖的表現.....	15
第五章 範例說明.....	18
5.1 半導體實例.....	18
5.2 模擬例子.....	19
第六章 結論與未來展望.....	21
參考文獻.....	23
附錄.....	25
附圖.....	28
附表.....	32



圖目錄

圖一	程序一之示意圖.....	10
圖二	程序二之示意圖.....	12
圖三(a)	50 組半導體訓練樣本之 T^2 管制圖.....	28
圖三(b)	50 組半導體訓練樣本之 $ S $ 管制圖.....	28
圖四(a)	監控 25 組半導體線上隨機樣本之單邊 LRT 管制圖.....	29
圖四(b)	監控 25 組半導體線上隨機樣本之雙邊 LRT 管制圖.....	29
圖四(c)	監控 25 組半導體線上隨機樣本之雙邊修正 LRT 管制圖.....	29
圖五	模擬例子情況(i)之三管制圖表現.....	30
圖六	模擬例子情況(ii)之三管制圖表現.....	31



表目錄

表一 設定總運算量為 100,000, 計算 $m = 50, n = 5, p = 2, \alpha = 0.0027$ 之單邊 LRT 管制界限並比較兩個程序.	32
表二 當 $n = 5$, 對於不同 p, m 之雙邊概似比檢定統計量的管制界限與其標準誤(括號內)	33
表三 當 $n = 10$, 對於不同 p, m 之雙邊概似比檢定統計量的管制界限與其標準誤(括號內)	34
表四 當 $n = 5$, 對於不同 p, m 之雙邊修正概似比檢定統計量的管制界限與其標準誤(括號內)	35
表五 當 $n = 10$, 對於不同 p, m 之雙邊修正概似比檢定統計量的管制界限與其標準誤(括號內) ...	36
表六 當 $n = 5$, 對於不同 p, m 之單邊概似比檢定統計量的管制界限與其標準誤(括號內)	37
表七 當 $n = 10$, 對於不同 p, m 之單邊概似比檢定統計量的管制界限與其標準誤(括號內)	38
表八 管制圖的假警報率及偵測力與其標準誤(括號內)當 $m = 25, n = 5$	39
表九 管制圖的假警報率及偵測力與其標準誤(括號內)當 $m = 50, n = 5$	40



第一章

緒論

統計製程管制(Statistical Process Control ; SPC)是將統計方法應用到工業大量生產的產品或零件上，協助工程人員即時發現製程中的問題，使之在可能的重大品質變異出現之前能採取必要的措施，以消除或降低問題所帶來的損失，使製程能力穩定在期望的水準，是生產過程中控制穩定產出的主要技術之一。其中管制圖(control chart)為廣泛應用於監控制程品質特性(quality characteristic)的一重要工具。一個好的管制圖要能快速地偵測到製程的偏移，並即時發出警告訊號，隨後根據可歸屬原因(assignable cause)對製程做出適當的修正。

管制圖之利用在製程監控上，通常可分為兩個階段，階段一(phase I)和階段二(phase II)。在階段一，我們分析歷史資料(historical data)看是否有任何不尋常的模式出現。當有不尋常的模式出現時，代表製程尚未穩定，需要對此製程做些適當的調整。一旦製程沒有任何警訊產生，即認定此製程已在管制下(in control)，隨後此組數據便可以拿來估計品質特性分佈的參數。另一方面，階段二是利用階段一所得的參數來建構管制界限(control limit)，主要目標放在線上監控，希望能越快偵測出警告訊號越好。

隨著製程越來越複雜，很多時候我們會想要同時監控兩個以上的品質特性。多變量管制圖(multivariate control chart)能提供工程人員一個可用來同時監控多項彼此有相關性之品質特性，並診斷偏移訊息的方法，是一項越來越重要的工具。

我們考慮監控制程 p 項品質特性，假設品質特性 \mathbf{X} 為一 $p \times 1$ 向量，且服從多元常態分佈， $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ，其中 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 分別為 \mathbf{X} 的平均值向量(mean vector)和共變異矩陣(covariance matrix)。當製程在管制之下時之 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 分別記為 $\boldsymbol{\mu}_0$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_0$ 。在過去的研究中，大部分都致力於監控平均值向量 $\boldsymbol{\mu}_0$ ，較少專注於研究共變異矩陣 $\boldsymbol{\Sigma}_0$ 之監控。然而，近幾年有越來越多的文獻也開始著重研究製程變異(dispersion)對製程造成的影響，並針對這方面的問題進行改善。對於品質管制來說，監控共變異矩陣也是一項重要的議題。

一般來說，監控共變異矩陣之管制圖的理論推導都建立在 Σ_0 已知之下，Alt (1985)發表了第一個有關監控製程變異的多變量管制圖；假設 μ_0 和 Σ_0 皆已知的狀況下，作者以一個漸近(asymptotic)卡方分佈的統計量來建構管制界限，是建立在廣義變異數 $|S|$ (generalized variance)之下的一修華特型式管制圖(Shewhart-type chart)。Levinson, Holmes, and Mergen (2002)提出一個名稱為G之管制圖(G chart)來監控製程的共變異矩陣，利用 T^2 管制圖結合G管制圖對製程平均值與變異做一個適當的監控，為建立在概似比檢定(likelihood ratio test)之下的一修華特型式管制圖。Runger and Testik (2004)對於幾個不同的多變量累積和(multivariate cumulative sum ; MCUSUM)管制圖做一個全面性的描述與分析來比較其優缺點，並以幾何圖形來說明每種方法的不同之處。Hawkins and Maboudou-Tchao (2008)利用多變量指數加權移動平均(multivariate exponentially weighted moving average ; MEWMA)管制圖與多變量指數加權移動共變異矩陣(multivariate exponentially weighted moving covariance matrix ; MEWMC)管制圖同時監控製程的平均與變異，其中MEWMC管制圖對於製程邊際變異增加與減少皆可偵測到警訊。Bersimis, Psarakis, and Panaretos (2007)針對多變量的各種管制圖，做了一篇整理。Yen and Shiau (2010)在 Σ_0 已知的假設下，提出一個以概似比檢定統計量來監控製程變異增加的單邊管制圖，比起雙邊的管制圖更容易偵測到製程變異偏移。

然而，對於大部分的使用者而言，在大多數的情況下，製程的管制下共變異矩陣 Σ_0 通常是未知的，因此必須使用階段一所估計的在管制下之參數來建構管制界限，進而進行階段二之線上監控。然而如果使用了估計的參數，則會造成假警報率(false alarm rate)，檢定力(power)，平均連串長度(Average Run Length ; ARL)等之理論值與實際值有所偏差。

在單維度的情形下，Chen (1998) 從邊際(marginal)連串長度(Run Length ; RL)分佈的觀點來探討 R 、 S 、 S^2 管制圖估計參數的影響，發現當我們使用估計參數時，在管制下的 ARL 會小於理論值，代表與參數已知時比較，更容易出現警告訊號；而失控時的

ARL 則會大於理論值，即代表比起參數已知時，較不能夠即時地偵測到製程的偏移。Maravelakis, Panaretos, and Psarakis (2002)以模擬的方式來研究 S 管制圖對於估計參數之影響，並列出建議樣本數大小以避免估計參數帶來的影響。在多維度的情形下，Champ, Jones-Farmer, and Rigdon (2005)說明了 T^2 管制圖也會受估計參數的影響；一旦使用了估計參數， T^2 管制圖的統計量就不再是 F 分佈，因此他們對 T^2 管制圖的管制界限做了一個修正。Jensen, Jones-Farmer, Champ, and Woodall (2006)對於單變量與多變量的管制圖，針對估計參數影響這方面的研究，整理出一篇回顧與未來可繼續發展研究的方向。

由於製程在管制狀態下的共變異矩陣 Σ_0 未知的緣故，在推導統計量時必須考量此因素，且根據實作情形，我們須從階段一的歷史資料計算出樣本共變異矩陣作為 Σ_0 之估計量。但因為不同組階段一資料所得之樣本共變異矩陣會不一樣，由特定的樣本共變異矩陣所建構出來的管制圖之假警報率是無法得知與控制的，所以我們提出一個控制期望假警報率的概念，並以此概念當準則來建構管制界限，希望此數值能維持在預設之水準 α ，並針對此準則提出適當的模擬程序來找出管制界限。

此方法可應用於許多管制圖上，當製程參數必須被估計時。此篇論文則著重在於當製程管制狀態下的共變異矩陣 Σ_0 未知的情形，我們提出一種監控制程變異的方法，應用於下列三個管制圖：雙邊概似比檢定統計量管制圖(two-sided LRT-based control chart)、雙邊修正概似比檢定統計量管制圖(modified two-sided LRT-based control chart)和單邊概似比檢定統計量管制圖(one-sided LRT-based control chart)。

第二章

概似比檢定統計量管制圖

令階段一訓練樣本(training sample)， $\{X_{ij}: i=1, \dots, m; j=1, \dots, n\}$ ，是製程在管制下的 m 組樣本數為 n 的隨機樣本，換句話說， $X_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N_p(\mu_0, \Sigma_0)$ ，其中 *i.i.d.* 為獨立且同分佈 (independent and identically distributed) 之簡寫；階段二監控樣本 Y_{tj} ， $j=1, \dots, n$ ，是在時間 t 的線上樣本， $t=1, 2, \dots$ ，並假設 $Y_{tj} \stackrel{iid}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$ ，其中 μ_0 、 Σ_0 、 μ 、 Σ 均未知。

假設由階段一的訓練樣本資料 $\{X_{11}, \dots, X_{mn}\}$ 所計算得到的樣本平均值向量和樣本共變異矩陣分別為

$$\begin{aligned} \bar{X} &\equiv \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}, \\ S_0 &\equiv \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})(X_{ij} - \bar{X})'. \end{aligned} \quad (2.1)$$

我們可以知道， $A \equiv mnS_0 \sim Wishart_p(mn-1, \Sigma_0)$ 。

另外，假設階段二在時間 t 有一組監控樣本資料 $\{Y_{t1}, \dots, Y_{tn}\}$ 從製程中抽出，這 n 個樣本所計算得到的樣本平均值向量和樣本共變異矩陣分別為

$$\begin{aligned} \bar{Y}_t &\equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{tj}, \\ S_t &\equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (Y_{tj} - \bar{Y}_t)(Y_{tj} - \bar{Y}_t)'. \end{aligned} \quad (2.2)$$

同樣地，我們也可以知道， $B_t \equiv nS_t \sim Wishart_p(n-1, \Sigma)$ 。

2.1 雙邊概似比檢定統計量 (Two-sided LRT and two-sided modified LRT statistic)

假設製程在管制狀態下的平均值向量 μ_0 和共變異矩陣 Σ_0 皆未知。為了檢驗在時間 t 製程變異是否與 Σ_0 相同，我們可檢驗以下雙邊假設檢定：

$$H_0: \Sigma = \Sigma_0 \text{ vs. } H_1: \Sigma \neq \Sigma_0 \quad \circ$$

由 Anderson (2003, p. 413) 可知雙邊概似比檢定統計量為

$$\lambda^* = \frac{\left| \frac{\mathbf{A}}{mn} \right|^{mn/2} \left| \frac{\mathbf{B}_t}{n} \right|^{n/2}}{\left| \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}_t}{mn+n} \right|^{(mn+n)/2}} = \prod_{i=1}^p \left[\frac{\beta_i^w}{w\beta_i + 1 - w} \right]^{\frac{mn+n}{2}}, \quad (2.3)$$

其中 $w = \frac{1}{m+1}$ ， $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_p > 0$ 為方程式 $|\mathbf{S}_t - \beta \mathbf{S}_0| = 0$ 的根(root)。

但很不幸地，根據(2.3)式所對應到的雙邊概似比檢定是有偏差的(biased)。由 Sugiura and Nagao (1968) 可知，只需把(2.3)式次方的 mn 和 n 分別改成 $mn-1$ 和 $n-1$ ，即可得到不偏的(unbiased)雙邊概似比檢定。修正過後的統計量如下，在此稱為雙邊修正概似比統計量，

$$\lambda^{*(Mod)} = \frac{\left| \mathbf{A} \right|^{(mn-1)/2} \left| \mathbf{B}_t \right|^{(n-1)/2}}{\left| \mathbf{A} + \mathbf{B}_t \right|^{(mn+n-2)/2}} \quad \circ \quad (2.4)$$

2.2 單邊概似比檢定統計量(One-sided LRT statistic)

同樣地，假設製程在管制狀態下的平均值向量 $\boldsymbol{\mu}_0$ 和共變異矩陣 Σ_0 皆未知，如果我們想要檢驗在時間 t 時之製程變異是否增加，我們可以如 Yen and Shiau (2010) 在 Σ_0 已知之情形下所提，檢定以下之單邊假設檢定：

$$H_0: \Sigma = \Sigma_0 \text{ vs. } H_1: \Sigma \geq \Sigma_0 \text{ 且 } \Sigma \neq \Sigma_0 \quad ,$$

此處定義 $\Sigma \geq \Sigma_0$ 為 $\Sigma - \Sigma_0$ 是一個半正定矩陣(positive semidefinite)。根據顏家鈴(2002)導出的單邊概似比檢定統計量為

$$\lambda = \begin{cases} \prod_{i=1}^{p^*} \left[\frac{\beta_i^w}{w\beta_i + 1 - w} \right]^{\frac{mn+n}{2}}, & p^* > 0 \\ 1 & p^* = 0 \end{cases}, \quad (2.5)$$

其中 $w = \frac{1}{m+1}$ ， $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_p > 0$ 為方程式 $|\mathbf{S}_t - \beta \mathbf{S}_0| = 0$ 的根， p^* 代表 $\beta_i > 1$ 的個

數。我們可以發現(2.5)式與(2.3)式的型式相同，唯一不同的地方，在於雙邊檢定的統計量使用了所有的根 β_i ， $i=1, \dots, p$ ，而單邊檢定的統計量只使用大於 1 的根 β_i ， $i=1, \dots, p^*$ 。對於概似比檢定，我們常常會以下列統計量來做檢定

$$T \equiv -2 \log \lambda = \begin{cases} (mn+n) \sum_{i=1}^{p^*} [\log(w\beta_i + 1 - w) - w \log \beta_i], & p^* > 0 \\ 0 & , p^* = 0 \end{cases}, \quad (2.6)$$

此假設檢定的拒絕域(rejection region)為 $\{T > T_\alpha\}$ ，其中 T_α 為檢定統計量 T 在 H_0 之下分佈的 $(1-\alpha)$ 分位數(quantile)。

2.3 概似比檢定統計量管制圖

通常，我們可以根據檢定統計量很容易地建立管制圖，亦即只要取檢定統計量的 $(1-\alpha)$ 分位數當作管制界限即可。然而此處我們卻遭遇到困難，因為檢定統計量 T 同時牽涉到階段一與階段二的資料。首先遭遇到的難題為 Σ_0 是未知的，我們無法針對每個由階段一給定的 S_0 找出一個能使假警報率控制在 α 的管制界限；第二個困難是，若將 S_0 看成隨機變量，則在階段二各個不同時間點所得之線上監控統計量 T 則不再是獨立了，因此我們無法直接用 T 的 $(1-\alpha)$ 分位數來建構管制界限。我們將在第三章中針對此問題提出一個可行的解決方法。

第三章

管制界限之建構

理想中，我們想要針對階段一所得之 S_0 建構出能將假警報率控制在所設定之值 α 之管制界限，但這是不可能的。在建構管制界限的過程中，因為每次階段一之訓練樣本資料所估計的樣本共變異矩陣 S_0 皆不同，且在完成階段一抽樣之前， S_0 是具有隨機性的，故建構管制界限時應將此隨機性考量進去。所以我們退而求其次，希望能藉由控制某種「整體性的」假警報率為 α 之準則來建構管制界限，而最簡單且直覺的方法即為期望值，在此稱為期望假警報率，亦即尋找 T_α 使得

$$\alpha = E_{S_0}(P(T > T_\alpha | S_0)) \quad (3.1)$$

然而，(3.1)式並不容易推導出解析式(closed form)，所以我們選擇模擬的方式來建構出管制界限。直覺上，若考慮線上作業情況，由於製程在管制下之共變異矩陣 Σ_0 未知的緣故，我們必須藉由階段一的訓練樣本資料，來計算出在管制下的樣本共變異矩陣 S_0 ，並且條件(conditioned)於此 S_0 之下，大量模擬出階段二的監控樣本資料的樣本共變異矩陣 S_i ，以用來生成檢定統計量 T ；另外一方面，樣本共變異矩陣 S_0 的隨機性也要考慮進來，故也要大量模擬階段一訓練樣本資料的樣本共變異矩陣 S_0 。

通常 Σ_0 皆假設對稱(symmetric)且正定(positive definite)，根據 Golub and Van Loan (1989, p. 395)可知，存在一個唯一的對稱且正定矩陣 $\Sigma_0^{1/2}$ 使得 $\Sigma_0 = (\Sigma_0^{1/2})(\Sigma_0^{1/2})$ 。為簡化符號，在此將 $(\Sigma_0^{1/2})^{-1}$ 記為 $\Sigma_0^{-1/2}$ 。對階段一的訓練樣本資料 $\mathbf{X}_{ij} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_0, \Sigma_0)$ ，令 $\mathbf{Z}_{ij} \equiv \Sigma_0^{-1/2} \mathbf{X}_{ij}$ ， $j = 1, \dots, n$ ， $i = 1, \dots, m$ 。將 $\{\mathbf{Z}_{ij} : j = 1, \dots, n ; i = 1, \dots, m\}$ 看成 m 組樣本數為 n 的隨機樣本，則 $\mathbf{Z}_{ij} \sim N_p(\Sigma_0^{-1/2} \boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{I}_p)$ ，且 $\bar{\mathbf{Z}} = \Sigma_0^{-1/2} \bar{\mathbf{X}}$ 和 $\mathbf{S}_0^{(z)} = \Sigma_0^{-1/2} \mathbf{S}_0 \Sigma_0^{-1/2}$ 將分別為其樣

本平均值向量與樣本共變異矩陣。另一方面，對在時間 t 的線上樣本 $\mathbf{Y}_{ij} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ ，令 $\mathbf{Z}_{ij} \equiv \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2} \mathbf{Y}_{ij}$ ， $j=1, \dots, n$ ，則 $\mathbf{Z}_{ij} \sim N_p(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2} \boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_p)$ ，且 $\bar{\mathbf{Z}}_t \equiv \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2} \bar{\mathbf{Y}}_t$ 和 $\mathbf{S}_t^{(z)} \equiv \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2} \mathbf{S}_t \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}$ 分別為其樣本平均值向量與樣本共變異矩陣。在這裡我們注意到 $mn\mathbf{S}_0^{(z)} \sim \text{Wishart}_p(mn-1, \mathbf{I}_p)$ ， $n\mathbf{S}_t^{(z)} \sim \text{Wishart}_p(n-1, \mathbf{I}_p)$ ，兩者的分佈皆與參數 $\boldsymbol{\mu}_0$ 、 $\boldsymbol{\Sigma}_0$ 、 $\boldsymbol{\mu}$ 無關。

由(2.6)式可知，檢定統計量 T 與方程式 $|\mathbf{S}_t - \beta\mathbf{S}_0| = 0$ 的根有關，若將此方程式乘以 $|\mathbf{S}_0^{-1}|$ 可得

$$|\mathbf{S}_t - \beta\mathbf{S}_0| |\mathbf{S}_0^{-1}| = |(\mathbf{S}_t - \beta\mathbf{S}_0)\mathbf{S}_0^{-1}| = |\mathbf{S}_t\mathbf{S}_0^{-1} - \beta\mathbf{I}| = 0 \quad (3.2)$$

根據 Dykstra (1970) 可知，當 $mn > p$ 時，有機率 1 (with probability 1) \mathbf{S}_0 會是一個正定矩陣，所以可推得 $|\mathbf{S}_0^{-1}| \neq 0$ ，藉由此條件可知 $|\mathbf{S}_t - \beta\mathbf{S}_0| = 0$ 與 $|\mathbf{S}_t\mathbf{S}_0^{-1} - \beta\mathbf{I}| = 0$ 會有相同解，此解相當於求 $\mathbf{S}_t\mathbf{S}_0^{-1}$ 的特徵值(eigenvalue)。而(3.2)式可再進行以下推導過程

$$\begin{aligned} 0 &= |\mathbf{S}_t\mathbf{S}_0^{-1} - \beta\mathbf{I}| \\ &= \left| \boldsymbol{\Sigma}_0^{1/2} \mathbf{S}_t^{(z)} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2} (\boldsymbol{\Sigma}_0^{1/2} \mathbf{S}_0^{(z)} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2})^{-1} - \beta\mathbf{I} \right| \\ &= \left| \boldsymbol{\Sigma}_0^{1/2} \right| \cdot \left| \mathbf{S}_t^{(z)} (\mathbf{S}_0^{(z)})^{-1} - \beta\mathbf{I} \right| \cdot \left| \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2} \right| \end{aligned} \quad (3.3)$$

在(3.3)式中，因為 $|\boldsymbol{\Sigma}_0^{1/2}| \neq 0$ ，可知 $|\mathbf{S}_t - \beta\mathbf{S}_0| = 0$ 與 $|\mathbf{S}_t^{(z)} (\mathbf{S}_0^{(z)})^{-1} - \beta\mathbf{I}| = 0$ 也有相同解，即相當於求 $\mathbf{S}_t^{(z)} (\mathbf{S}_0^{(z)})^{-1}$ 之特徵值。此推導過程首次出現於顏家鈴(2002)之碩士論文。

由此可知，檢定統計量 T 與 $\mathbf{S}_t\mathbf{S}_0^{-1}$ 的特徵值有關，且在虛無假設 H_0 為真之假設下，此特徵值與 $\mathbf{S}_t^{(z)} (\mathbf{S}_0^{(z)})^{-1}$ 的特徵值相同，所以檢定統計量 T 分佈與製程的參數無關，我們可直接以 $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$ 的狀況來模擬。

首先，根據實際作業情形，為了讓期望假警報率等於 α (亦即找出滿足(3.1)式之 T_α)，所以我們希望能透過模擬檢定統計量 T 的分佈來取得其 $(1-\alpha)$ 分位數做為管制界

限。因此，我們選擇模擬的方式為：先生成 (generate) 一組階段一之訓練樣本資料，由此組資料計算出樣本共變異矩陣 S_0 ，然後固定在此 S_0 之下，透過大量模擬階段二之樣本共變異矩陣 S_l 來生成大量之檢定統計量 T ；大量重複上述步驟以考慮樣本共變異矩陣 S_0 的隨機性。如此一來，在相當密集的 S_0 之下，我們即可生成檢定統計量 T 的分佈；這代表我們只需將程式模擬之內外迴圈，所計算得到的 T 全部收集起來，再從此筆資料中計算 $(1-\alpha)$ 樣本分位數 T_α ，即可獲得適當的管制界限。下列所述程序一即為此模擬的演算法(以單邊概似檢定統計量為例)，其中 N 為程式內圈(生成 S_l)的模擬量，而 b 為程式外圈(生成 S_0)的模擬量。

程序一 (用條件分佈來計算管制界限)(以單邊概似檢定統計量為例)

步驟 1. 輸入 p, m, n, α, N 和 b

步驟 2. 從 $l=1$ 到 $l=b$ ，

1) 生成 mn 個 i.i.d. 隨機向量 $\mathbf{X}_{11}, \dots, \mathbf{X}_{mn} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$

2) 根據(2.1)式計算 S_0

3) 從 $k=1$ 到 $k=N$ ，

i. 生成 n 個 i.i.d. 隨機向量 $\mathbf{Y}_{k1}, \dots, \mathbf{Y}_{kn} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$

ii. 根據(2.2)式計算 S_l

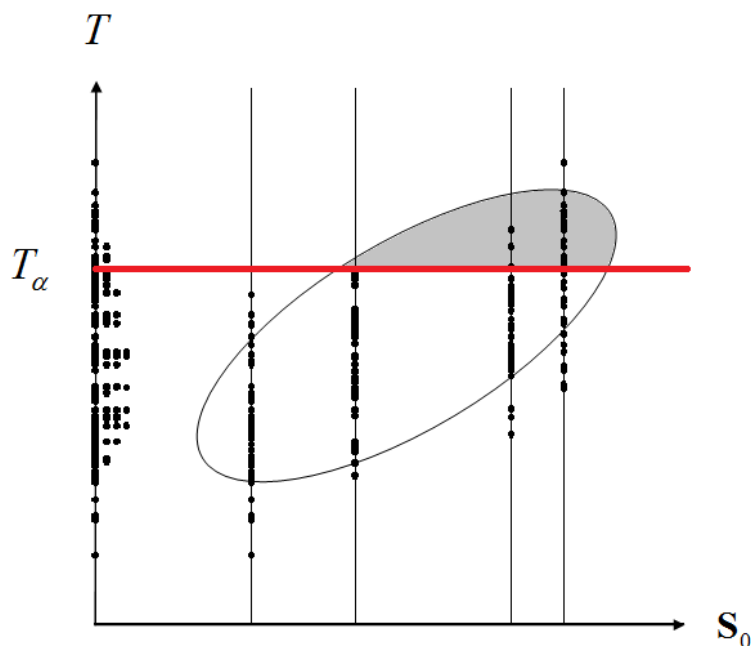
iii. 計算 $S_l S_0^{-1}$ 的特徵值， $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_p$

iv. 根據(2.6)式計算檢定統計量 T_{lk}

步驟 3. 計算 $\{T_{lk}, l=1, \dots, b, k=1, \dots, N\}$ 之 $(1-\alpha)$ 樣本分位數，即為管制界限 $CL_{p,m,n,\alpha}$

程序一中因 $\mathbf{A} \equiv mnS_0$ ， $\mathbf{B}_l \equiv nS_l$ 皆服從 Wishart 分佈，亦可直接從 Wishart 分佈生成樣本以減少電腦計算量。因此程序一之步驟 2 中 S_0 和 S_l 之生成可以更改為生成

Wishart 分佈的樣本。



圖一 程序一之示意圖

圖一為程序一流程之示意圖，其中為簡單計， S_0 以單維的情況來示意。我們用 x 軸代表樣本共變異矩陣 S_0 ， y 軸代表檢定統計量 T ，每次固定一個 S_0 ，則可生成許多個檢定統計量 T ，以圖上標示之黑點示之。在生成相當密集的 S_0 之下，收集所有生成出來的檢定統計量 T ，即相當於模擬出檢定統計量 T 的邊際分佈，而 T_α 則為程序一所得之管制界限，圖中的橢圓則顯示絕大部分 (S_0, T) 的散佈範圍。

我們可以用數學式來說明程序一想法之合理性。假設樣本共變異矩陣 S_0 的機率密度函數(probability density function; p.d.f.) 為 $f_{S_0}(s_0)$ ，檢定統計量 T 的機率密度函數為 $f_T(t)$ ，檢定統計量 T 在給定樣本共變異矩陣 S_0 下的條件機率密度函數(conditional p.d.f.) 為 $f_{T|S_0}(t|s_0)$ ，檢定統計量 T 與樣本共變異矩陣 S_0 的聯合機率密度函數(joint p.d.f.) 為 $f_{T,S_0}(t, s_0)$ 。

程序一的想法是想要在檢定統計量 T 分佈裡找出 $(1-\alpha)$ 分位數，以圖一來看，即尋找

一個 T_α 使得 T 大於 T_α 的機率為 α ，則

$$\alpha = \int_{\Omega} \int_{T_\alpha}^{\infty} f_{T|S_0}(t|s_0) dt \cdot f_{S_0}(s_0) ds_0, \quad (3.4)$$

其中 Ω 為樣本共變異矩陣 S_0 的機率空間(support)。因 S_0 、 T 兩個變數之積分範圍互不影響，(3.4)式經過交換積分順序後可改為

$$\alpha = \int_{T_\alpha}^{\infty} \int_{\Omega} f_{T|S_0}(t|s_0) f_{S_0}(s_0) ds_0 dt = \int_{T_\alpha}^{\infty} \int_{\Omega} f_{T,S_0}(t,s_0) ds_0 dt. \quad (3.5)$$

(3.5)式中的聯合機率密度函數 $f_{T,S_0}(t,s_0)$ 經過一次積分後，可獲得檢定統計量 T 的邊際分佈，則(3.5)式又可改為

$$\alpha = \int_{T_\alpha}^{\infty} f_T(t) dt. \quad (3.6)$$

由(3.6)式可知，要選一個 T_α 來控制假警報率之期望值在 α 之下，相當於找檢定統計量 T 邊際分佈之 $(1-\alpha)$ 分位數。

當 N 不夠大或 S_0 的模擬量不夠密集時，所得之 T_α 可能不夠準確，而大量之模擬又造成運算量太大。在(3.4)式的推導過程當中，我們發現一件有趣的事，原本的想法是依據線上實作的狀況來思考，認為每次階段一所計算出來的樣本共變異矩陣 S_0 皆不同，它具有隨機性，所以我們採用條件機率分佈 $f_{T|S_0}(t|s_0)$ 來討論。但由圖一所示，在取相當密集之 S_0 之下，生成 S_t 所得到的檢定統計量 T 的散佈圖(scatter plot)，即相當於是在模擬聯合分佈 $f_{T,S_0}(t,s_0)$ 的散佈圖；另外一方面，我們由(3.5)式發現，若直接經由隨機生成 S_0 和 S_t 來模擬 $f_{T,S_0}(t,s_0)$ 的分佈，也可以模擬出檢定統計量 T 的分佈。若以此觀點，則可以幫助我們簡化模擬的過程，而改用下述程序二之演算法來尋找適當的管制界限。同樣地，程序二之步驟 2 也可改為生成 Wishart 分佈的樣本。

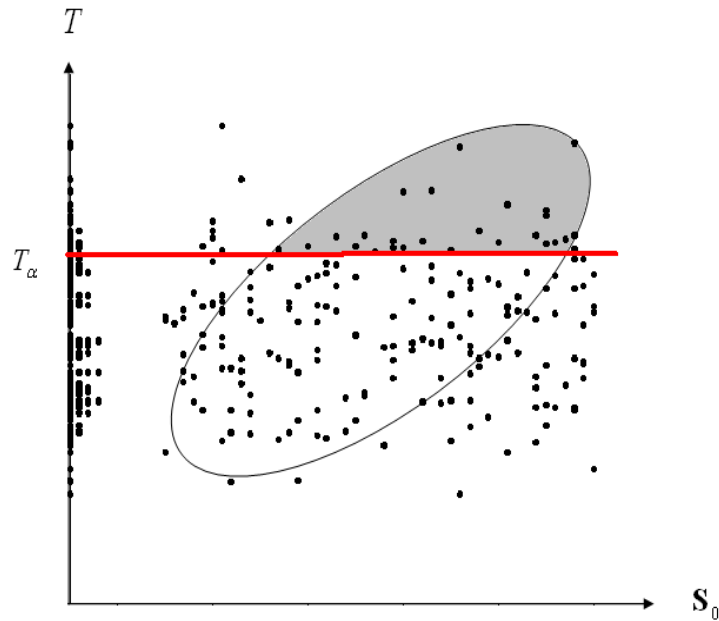
程序二 (用聯合分佈來計算管制界限) (以單邊概似檢定統計量為例)

步驟 1. 輸入 p ， m ， n ， α 和 N

步驟 2. 從 $k=1$ 到 $k=N$,

- i. 生成 mn 個 i.i.d. 隨機向量 $\mathbf{X}_{11}, \dots, \mathbf{X}_{mn} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$
- ii. 生成 n 個 i.i.d. 隨機向量 $\mathbf{Y}_{k1}, \dots, \mathbf{Y}_{kn} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$
- iii. 根據(2.1)式、(2.2)式分別計算出 \mathbf{S}_0 和 \mathbf{S}_t
- iv. 計算 $\mathbf{S}_t \mathbf{S}_0^{-1}$ 的特徵值, $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_p$
- v. 根據(2.6)式計算檢定統計量 T

步驟 3. 計算 $\{T_1, \dots, T_N\}$ 之 $(1-\alpha)$ 樣本分位數當作管制界限 $CL_{p,m,n,\alpha}$



圖二 程序二之示意圖

圖二為程序二流程之示意圖, 表示隨機生成一個 \mathbf{S}_0 和 \mathbf{S}_t , 可產生一個檢定統計量 T , 即產生一個圖上之黑點; 如此重複 N 次, 也可以生成檢定統計量 T 的分佈, 而 T_α 即成為程序二所得之管制界限。

然而, 這兩種模擬方法皆有各自的優缺點, 我們可以舉一個簡單的例子來說明。以 $m=50$, $n=5$, $p=2$, $\alpha=0.0027$ 的情形來計算單邊 LRT 管制圖之管制界限為例, 若我們設定程式模擬的總運算量為 100,000, 將這 100,000 個運算量分配給程式模擬的內圈

及外圈，所有考慮的運算量分配情形列於表一，而每個情形皆模擬 10 次以得到 10 個管制界限。表中 CL 為依照程序之演算法所找出的管制界限， Δ 則為 CL 與管制界限參考值 8.2280 的差距取絕對值，mean 代表此 10 個管制界限的平均值，sd 則代表這 10 個管制界限之樣本標準差，而 N 為程式內圈的運算量， b 為程式外圈的運算量，並列出每個程序得到一個管制界限的運算時間。其中管制界限參考值 8.2280，乃此例子下程序二之 N 取 1,000,000，且重複程序二 100 次後所得的 100 個管制界限之平均；我們認為此模擬量已足夠準確地估計管制界限，所以 8.2280 已相當接近真正之管制界限。從表一我們可以發現：

- 程序一對於內圈模擬量的需求較不嚴重，但外圈模擬量的需求則相當重要，亦即模擬密集的 S_0 對於生成檢定統計量 T 的分佈是必要的，可以較準確地估計 $(1-\alpha)$ 樣本分位數，讓管制界限的估計呈現較穩定的狀態。
- 表一之程序二只有一個運算量為 100,000 的迴圈，所以沒有內圈及外圈的困擾，則可以提高模擬的運算量，對於估計出來的管制界限比較準確，每次的變動幅度也較小。
- 在同種情況之下，若以兩者的運算時間來做比較的話，程序一的運算時間較短，而程序二花費的時間較久，約為程序一之兩倍。這是因為在同樣的總運算量下，程序二每生成一個檢定統計量 T 皆需重新隨機生成一組 S_0 與 S_i ，因此程序二所耗費的時間較多；但考量準確度，這是值得的。

在我們的模擬過程中發現，當程序一選用 $N=1,000$ ， $b=10,000$ ，而程序二選用 $N=1,000,000$ 時，兩者所得到的管制界限會蠻接近的。以總運算量來看，程序二使用了較少的運算量，但精準度卻可與程序一互相比擬；另外，若以總運算時間來比較的話，程序二也花費了較少的時間獲得管制界限。另外，我們發現程序二選用 $N=1,000,000$ 或 $N=10,000,000$ ，兩種情況所獲得之管制界限相差不大，因此，我們認為使用程序二設定 $N=1,000,000$ 時，運算量已足夠準確地估計管制界限。

另外我們可在程序二增加以下兩個步驟：

步驟 4. 重複程序二之步驟 2~3 q 次

步驟 5. 取此 q 個分位數的平均當作管制界限 $CL_{p,m,n,\alpha}$

其中，步驟 4 重複 q 次的目的即為了更精確地估計分位數，以得到更準確的管制界限，同時也提供管制界限之標準誤(standard error)的訊息。

因此，基於計算量及準確度的原因，我們採用程序二且重複 q 次以得到管制界限。表二至表七提供了三種管制圖在不同情況下之管制界限與其標準誤，其中 $n=5, 10$ ， $\alpha=0.01, 0.005, 0.0027$ ，而模擬量 N 取 1,000,000， q 取 100。

由表二至表七我們可以觀察到三個管制圖的管制界限都有下列特性：

- 對於相同的 m ， n ， α 來說，當 p 越大則管制界限 CL 越大。
- α 越小，則會有越大的標準誤。

而三個管制圖的管制界限不同之處則為：

- 對於相同的 p ， n ， α 來說，當 m 越大，兩個雙邊管制圖之管制界限 CL 越大，而單邊管制圖之管制界限 CL 卻越小。
- 對於相同的 m ， p ， α 來說，當 n 越大，單邊管制圖及雙邊修正管制圖管制界限 CL 越大，而雙邊管制圖之管制界限 CL 卻越小。

第四章

管制圖的表現

一般來說，比較各個管制圖之間的表現都是選擇使用 ARL，但如果不同時間所得之檢定統計量 T 之間不服從 i.i.d. 假設的話，此時連串長度 RL 的分佈就不會再是幾何分佈 (geometric distribution)，換句話說， $ARL \neq 1/w$ ，其中 w 為檢定統計量 T 超過管制界限 CL 的機率，亦即警報率 (alarm rate, 又稱 signal probability)。

程序一考慮到實際作業情形，由階段一資料中每生成一個 S_0 ，則生成一連串階段二監控樣本 S_t ， $t=1,2,\dots$ ，並由此 S_0 和 S_t 產生檢定統計量 T_t ， $t=1,2,\dots$ 。若考慮在階段一所得已為 S_0 的條件之下，即將 S_0 視為固定量，那麼檢定統計量 T_t 間彼此會獨立；但若將 S_0 視為隨機變量，則這些檢定統計量 T_t 因為共用同一個 S_0 ，造成 T_t 之間彼此並不獨立，且也不同分佈，這個結果會使得 RL 不服從幾何分佈，所以不能以 $1/w$ 來估計 ARL。

程序二雖然沒有非 i.i.d. 之困擾，因為 S_0 和 S_t 都是隨機生成，所生成之所有檢定統計量 T_t 為 i.i.d.。然而，這樣的生成方式與實際狀況並不相符，只是因為程序二的生成方式與我們想要建構的情形相符合 (詳細說明請見第三章)，而為了減少計算量，我們才選用程序二的方法來建構管制界限，故所計算出的 $1/w$ 並不能代表實際狀況之 ARL。

因此，為了能夠比較兩種方法之間的差異，我們選擇用期望警報率 w 作為衡量管制圖績效表現之方式。在管制下之 w 即為期望假警報率 α ，而在失控下之 w 即為期望偵測力 (expected detecting power) $1-\beta$ ，其中 α 與 β 分別為假設檢定之型一錯誤 (type I error) 及型二錯誤 (type II error) 之期望機率。

為簡單計，我們考慮 $p=2$ 且 $\Sigma_0 = \mathbf{I}_2$ ，並將階段二製程失控情形之共變異矩陣 Σ ，以下列形式表示：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \rho\sqrt{\Delta_1\Delta_2} \\ \rho\sqrt{\Delta_1\Delta_2} & \Delta_2 \end{bmatrix}。 \quad (4.1)$$

根據 Yen and Shiau (2010)可知， $\Sigma - \Sigma_0$ 的特徵值為

$$\frac{1}{2} \left[(\Delta_1 + \Delta_2 - 2) \pm \sqrt{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + 4\rho^2\Delta_1\Delta_2} \right]。 \quad (4.2)$$

而且，在 $\Sigma - \Sigma_0$ 為半正定的條件下，相關係數 ρ 的範圍則被限制在

$$|\rho| \leq \left[\frac{(\Delta_1 - 1)(\Delta_2 - 1)}{\Delta_1\Delta_2} \right]^{1/2}。 \quad (4.3)$$

可以注意到，當 $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ 且 $\rho \neq 0$ 時並不滿足(4.3)式的限制條件；換句話說，只有兩變數的相關性改變而變異數不變時， $\Sigma - \Sigma_0$ 半正定的條件並不會成立。

設定 $\alpha = 0.0027$ ， $p = 2$ ， $n = 5$ ，考慮下列三種失控狀況：

- (1) $\Delta_1 = \Delta_2 = c$ 且 $\rho = 0$ ，換句話說， $\Sigma = c\Sigma_0$ ，其中 $c = 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3$ 。
- (2) $\Delta_1 \neq \Delta_2$ 且 $\rho = 0$ ，其中 $(\Delta_1, \Delta_2) = (1.25, 1), (1.75, 1), (2.25, 1), (2.75, 1), (1.25, 1.75), (1.75, 2.25), (2.75, 1.25), (2.25, 2.75)$ 。
- (3) $\rho \neq 0$ ，並考慮滿足(4.3)式之條件，我們選擇 $\rho = 0.2, 0.4$ ，其中 $(\Delta_1, \Delta_2) = (1.75, 1.75), (1.75, 2.25), (2.25, 2.25), (2.25, 2.75)$ 。

想要估計出期望警報率 w ，首先我們先生成 N 個統計量 T_1, \dots, T_N ，而 N 是個非常大的數目，然後計算這些統計量 T_i 超過管制界限的比例，用以估計期望假警報率或偵測力；並重複以上步驟 q 次，會得到 q 個比例，再將此 q 個比例取平均，即得到 w 的估計值。此方法可以很容易地估計出 w 的標準誤，只要將 q 個比例的樣本標準差(sample standard deviation)除以 \sqrt{q} 即可獲得。

在我們的模擬過程，發現當程序一選用 $N = 1,000$ ， $b = 10,000$ ，而程序二選用 $N = 1,000,000$ 時，兩種方法 w 的表現結果亦蠻接近的，所以相同地，我們也只列出以程序二生成方式的結果。表八及表九分別列出了 $m = 25$ 和 $m = 50$ 的期望假警報率與偵測力

及其標準誤，其中 $n=5$ ， $\alpha=0.0027$ ，而 $N=1,000,000$ ， $q=100$ 。當 $m=25$ 時，單邊 LRT、雙邊 LRT 及雙邊修正 LRT 的管制界限分別為 8.4065、22.5889、53.2783；而當 $m=50$ 時，管制界限則分別為 8.2280、22.6388、58.7995。由表八、表九我們可以觀察到：

- 如所預期地，當偵測製程變異增加時，單邊概似比檢定統計量管制圖的期望偵測力比其他兩種管制圖來得高。這代表單邊概似比檢定統計量管制圖，對於偵測製程變異增加時，表現優於其他管制圖。可以注意到，雙邊概似比檢定統計量管制圖是有偏差的，即會出現期望偵測力小於期望假警報率的情形。
- 對於表上列出的所有失控情形，當 $m=50$ 時的偵測力皆大於 $m=25$ 時的偵測力。這代表當第一階段的訓練樣本越大時，參數估計得越準確，期望偵測力則越好。對於相同的 m 和 ρ ，當 Δ_1, Δ_2 都增加，或一個增加、另一個固定時，期望偵測力也跟著增加，因為越大的偏移則越容易偵測到。另外，期望偵測力越高，標準誤也越大。
- 當 ρ 越大，期望偵測力也跟著越高。這代表此三種管制圖，對於兩個相關性較強的變數，期望偵測能力較好。
- 對於兩個雙邊的管制圖來說，雙邊修正概似比檢定統計量管制圖的期望偵測力比雙邊概似比檢定統計量管制圖來得更好。

上述結果皆與 Σ_0 已知時的情形類似，詳見 Yen and Shiau (2010)。

第五章

範例說明

此章節以一個半導體的實例來說明如何使用本文所提的管制界限來進行線上監控，並列舉兩個模擬的例子來觀察三個管制圖之績效。

5.1 半導體實例

這是一組從台灣半導體公司，有關於晶圓製程之金屬層的實際數據。此組資料包括兩個品質特性，分別為晶圓顯影後(after-develop-inspection-critical-dimension；ADICD)及蝕刻後(after-etch-inspection-critical-dimension；AEICD)所量測的數值，兩個數值與導電性有密切關係。資料取得方式為在每個晶圓上取五個點測量顯影後與蝕刻後的相關數據，再分別取五個測量值之平均。因為兩個品質特性都是從同一個晶圓上取得的，所以彼此之間可能是具有相關性的。

令 $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ ，其中 X_1 、 X_2 分別為同一晶圓上 ADICD 五個數值的平均及 AEICD 五個數值的平均。原始資料共有 50 組樣本數為 5 的隨機樣本，平均值向量與樣本共變異

矩陣分別為 $\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0.8025 \\ 0.8554 \end{pmatrix}$ 和

$$\mathbf{S} = \frac{1}{(50 \times 5 - 1)} \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^5 (\mathbf{X}_{ij} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_{ij} - \bar{\mathbf{X}})' = \begin{pmatrix} 2.8789 \times 10^{-4} & 1.5423 \times 10^{-5} \\ 1.5423 \times 10^{-5} & 2.7315 \times 10^{-4} \end{pmatrix}。$$

首先，利用 T^2 及廣義變異數 $|\mathbf{S}|$ 管制圖來判斷此組樣本是否在管制下。由圖三(a)、(b)顯示，在假警報率 $\alpha = 0.0027$ 之下，此組資料呈現穩定狀態，可以當作第一階段的訓練樣本資料，且根據(2.1)式，可得 $\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 2.8674 \times 10^{-4} & 1.5362 \times 10^{-5} \\ 1.5362 \times 10^{-5} & 2.7206 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$ 。

對於 $p = 2$ ， $m = 50$ ， $n = 5$ ， $\alpha = 0.0027$ 的情形，單邊 LRT、雙邊 LRT 和雙邊修正 LRT 的管制界限分別為 8.2280、22.6388 和 58.7995。我們利用這些管制界限來監控階段

二之 25 組樣本數為 5 的線上隨機樣本，圖四(a)至(c)分別為單邊 LRT、雙邊 LRT 及雙邊修正 LRT 的管制圖。

由圖四(a)至(c)我們可以觀察到，在單邊 LRT 管制圖裡，有第 1, 6, 8, 12, 23 點超過管制界限；在雙邊 LRT 管制圖裡，卻並沒有任何一點超過管制界限；而在雙邊修正 LRT 管制圖裡，則是第 6, 8, 23 點超過管制界限。因此我們可以說，在這三種管制圖中，單邊 LRT 管制圖對於偵測製程變異的偏移相對地比較敏感(sensitive)，可以偵測到較多警告訊號；而兩個雙邊的管制圖中，雙邊修正 LRT 管制圖則較可偵測到製程偏移。

5.2 模擬例子

假設 \mathbf{X} 為在管制下的一個隨機向量且 $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ ，令 $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}$ ， $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{I}_p$ 。令 $p = 2$ 。首先我們生成了在管制狀態下之 50 組樣本數為 5 的隨機樣本當作階段一的訓練樣本資料，此組數據之樣本平均值向量為 $\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0.2042 \\ -0.0760 \end{pmatrix}$ ，且根據(2.1)式，樣本共變異矩陣為 $\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1.0187 & -0.0305 \\ -0.0305 & 1.3021 \end{pmatrix}$ 。我們模擬了一些在管制下及失控的資料來探討三個管制圖的表現。

所以我們再生成了 60 組樣本數為 5 的隨機樣本，其中第 1 組至第 10 組及第 31 組至第 40 組樣本是從在管制下製程生成出來的資料，第 11 組至第 30 組則是從 $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ 生成出來的資料，而第 41 組至第 60 組則是從 $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_2)$ 生成出來的資料。令 $\boldsymbol{\Sigma}_1 \geq \boldsymbol{\Sigma}_0$ 且

$\boldsymbol{\Sigma}_2 \geq \boldsymbol{\Sigma}_0$ ，其中 $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \rho\sqrt{\Delta_1\Delta_2} \\ \rho\sqrt{\Delta_1\Delta_2} & \Delta_2 \end{bmatrix}$ ， $\boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} \Delta'_1 & \rho\sqrt{\Delta'_1\Delta'_2} \\ \rho\sqrt{\Delta'_1\Delta'_2} & \Delta'_2 \end{bmatrix}$ 。考慮以下兩種失

控的情況：(i) $\rho = 0$ ， $(\Delta_1, \Delta_2) = (1.75, 2.25)$ ， $(\Delta'_1, \Delta'_2) = (1.75, 1)$ ，

(ii) $\rho = 0.2$ ， $(\Delta_1, \Delta_2) = (1.75, 2.25)$ ， $(\Delta'_1, \Delta'_2) = (2.75, 2.25)$ ，

注意到其中 Δ_1 、 Δ_2 、 Δ'_1 、 Δ'_2 均大於等於 1。

圖五、圖六分別為情況(i)、(ii)之單邊 LRT、雙邊 LRT 及雙邊修正 LRT 的管制圖。我們可以發現，如預期地，對於製程變異增加的情況，單邊 LRT 管制圖可以有效率地偵測到偏移，且表現遠比雙邊 LRT 及雙邊修正 LRT 管制圖來得好，且當製程變異增加幅度較小時，單邊 LRT 管制圖也可偵測到製程偏移並提出警告訊號，而兩個雙邊 LRT 管制圖則否；當品質特性具有相關性時，單邊 LRT 管制圖的偵測力也比兩個雙邊 LRT 管制圖強；另一方面，雙邊 LRT 及雙邊修正 LRT 管制圖兩者在此例下之表現則差不多。



第六章

結論與未來展望

本篇論文是以製程在管制狀態下的平均值向量 μ_0 及共變異矩陣 Σ_0 皆未知的假設下，我們考量此因素並使用適當的概似比檢定統計量來建立階段二之線上監控管制圖，用以監控共變異矩陣 Σ 。

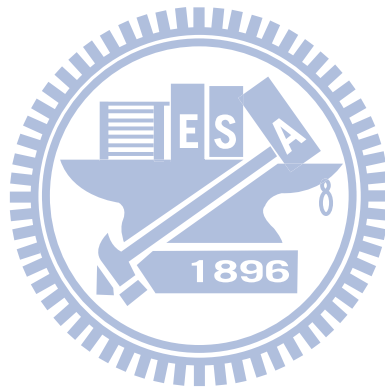
由於檢定統計量牽涉到階段一計算所得之共變異矩陣估計量 S_0 ，而此樣本共變異矩陣 S_0 具有隨機性，所以在管制界限的建構過程中，必須將此隨機性的因素納入考量。另一方面，因檢定統計量的分佈難以推導，在由一組已蒐集到之階段一資料所得之 S_0 下想找一個能控制假警報率為 α 的管制界限，當 Σ_0 未知時是不可能的，所以我們提出利用期望假警報率的準則來建構管制界限，希望將整體性的假警報率維持在所設定之水準 α ，因此，針對此期望假警報率之準則，我們提出了兩種蒙特卡羅模擬方法來為三個管制圖建構適當的管制界限，並比較這兩種尋找管制界限程序的優缺點。

值得一提的是，我們所求出之管制界限與製程在管制狀態下的參數 μ_0 、 Σ_0 無關，可以應用在不同的製程上。表二至表七提供了三種 LRT 管制圖在不同情況下的管制界限，可供實作者直接使用；而對於表上沒有提及的情況，則可使用附錄之 MATLAB 程式碼來計算所需之管制界限。

透過統計模擬的方式，以期望警報率來衡量三個管制圖的績效表現，我們可以觀察到：當製程在管制狀態下之共變異矩陣 Σ_0 未知而必須被估計的狀況下，與 Yen and Shiau (2010) 之 Σ_0 已知的情形有類似的結果。

本篇論文針對製程參數未知而必須估計時，提供一種新的準則來建構適當的階段二管制圖之管制界限，可以應用於各種不同的管制圖上。對於此期望假警報率準則之優劣可在未來繼續探討研究，或將演算法做更完善的改進。而對於一般較常使用的 ARL 準

則，我們也可考慮期望平均連串長度之概念，並將於未來研究中繼續探討，提出適當的模擬程序之演算法，藉由此準則為各種不同管制圖建構出理想的管制界限。



參考文獻

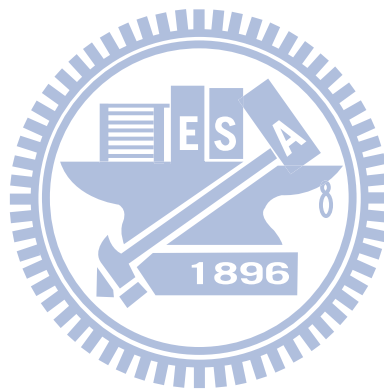
- Alt, F. B. (1985). Multivariate quality control. In *Encyclopedia of Statistical Sciences* **6** (Edited by S. Kotz, N. L. Johnson, and C. B. Read), 110-112. Wiley, New York.
- Anderson, T. W. (2003). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. 3rd edition. Wiley, New York.
- Bersimis, S., Psarakis, S., and Panaretos, J. (2007). Multivariate statistical process control charts: an overview. *Quality and Reliability Engineering International* **23**, 517-543.
- Champ, C. W., Jones-Farmer, L. A., and Rigdon, S. E. (2005). Properties of the T^2 control chart when parameters are estimated. *Technometrics* **47**, 437-445.
- Chen, G. (1998). The run length distribution of the R , S , S^2 control charts when σ is estimated. *Canadian Journal of Statistics* **26**, 311-322.
- Dykstra, R. L. (1970). Establishing the positive definiteness of the sample covariance matrix. *Ann. Math. Statist.* **41**, 2153-2154.
- Golub, G. H. and Van Loan, C. F. (1989). *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- Hawkins, D. M. and Maboudou-Tchao, E. M. (2008). Multivariate exponentially weighted moving covariance matrix. *Technometeics* **50**, 155-166.
- Jensen, W. A., Jones-Farmer, L. A., Champ, C. W., and Woodall, W. H. (2006). Effects of parameter estimation on control chart properties: a literature review. *Journal of Quality Technology* **38**, 349-364.
- Levinson, W., Homles, D. S. and Mergen, A. E. (2002). Variation charts for multivariate process. *Quality Engineering* **14**, 539-545.
- Maravelakis, P. E., Panaretos, J., and Psarakis, S. (2002). Effect of estimation of the process parameters on the control limits of the univariate control charts for process dispersion. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* **31**, 443-461.

Runger, G. C. and Testik, M. C. (2004). Multivariate extensions to cumulative sum control charts. *Quality and Reliability Engineering International* **20**, 587-606.

Sugiura, N. and Nagao, H. (1968). Unbiasedness of some test criteria for equality of one or two covariance matrices. *Ann. Math. Statist.* **39**, 1686-1692.

Yen, C. L. and Shiau, J.-J. H. (2010). A multivariate control chart for detecting increases in process dispersion. *Statistica Sinica* **20**, 1683-1707.

顏家鈴(2002) 監控多變量製程變異性增加之管制圖。國立交通大學統計所碩士論文。



附錄

尋找管制界限的 MATLAB 程式碼(以單邊 LRT 管制圖為例)

1. 程序一

```
m=50;           %phase I 歷史樣本組數
n=5;           %subgroup size
p=2;           %品質特性的維度
w=1/(m+1);     %(2.6)式檢定統計量T之參數
mu=zeros(1,p); %製程的平均值向量，以零向量來做模擬
sigma=eye(p);  %製程的共變異矩陣，以單位矩陣來做模擬
alpha=0.0027; %預設之假警報率
N=10000;       %內圈之模擬量
b=1000;        %外圈之模擬量
T=zeros(N*b,1); %暫存檢定統計量T
tic;           %計算程式運算時間
for i=1:b
    x=mvnrand(mu,sigma,m*n); %生成phase I 資料
    A=(m*n-1)*cov(x);
    S0=A/(m*n);
    clear x;
    for j=1:N
        y=mvnrand(mu,sigma,n); %生成phase II 資料
        Bt=(n-1)*cov(y);
        St=Bt/n;
        clear y;
        E1=eig(St/S0); %St*inv(S0)的特徵值
        E2=E1(find(E1>1)); %尋找特徵值大於1的位置
        Pr=length(E2);
        if Pr>0
            T(j+(i-1)*N)=(m*n+n)*sum(log(w*E2+1-w)-w*log(E2)); %根據(2.6)式計算T
        else
            T(j+(i-1)*N)=0; %若沒有特徵值大於1的情形，則令T=0
        end
        clear Bt St;
    end
    clear A S0;
end
```

```
CL=quantile(T,(1-alpha)); %在T中取出(1-alpha)樣本分位數即為管制界限
toc
```

```
%若是使用雙邊LRT，只須將檢定統計量T改為
% (m*n+n)*log(det((A+Bt)/(m*n+n)))-m*n*log(det(A/(m*n)))-n*log(det(Bt/n))
```

```
%若是使用雙邊修正LRT，只須將檢定統計量T改為
% (m*n+n-2)*log(det(A+Bt))-(m*n-1)*log(det(A))-(n-1)*log(det(Bt))
```

2. 程序二

```
m=50; %phase I 歷史樣本組數
n=5; %subgroup size
p=2; %品質特性的維度
w=1/(m+1); %(2.6)式檢定統計量T之參數
mu=zeros(1,p); %製程的平均值向量，以零向量來做模擬
sigma=eye(p); %製程的共變異矩陣，以單位矩陣來做模擬
alpha=0.0027; %預設之假警報率
N=1000000; %總模擬量
q=100; %重複程序次數
T=zeros(N,1); %暫存檢定統計量T
z=zeros(q,1); %暫存樣本分位數CL
tic; %計算程式運算時間
for i=1:q
    for j=1:N
        x=mvnrnd(mu,sigma,m*n); %生成phase I 資料
        A=(m*n-1)*cov(x);
        S0=A/(m*n);
        clear x;
        y=mvnrnd(mu,sigma,n); %生成phase II 資料
        Bt=(n-1)*cov(y);
        St=Bt/n;
        clear y;
        E1=eig(St/S0); %St*inv(S0)的特徵值
        E2=E1(find(E1>1)); %尋找特徵值大於1的位置
        Pr=length(E2);
        if Pr>0
            T(j)=(m*n+n)*sum(log(w*E2+1-w)-w*log(E2)); %根據(2.6)式計算T
        else T(j)=0; %若沒有特徵值大於1的情形，則令T=0
```

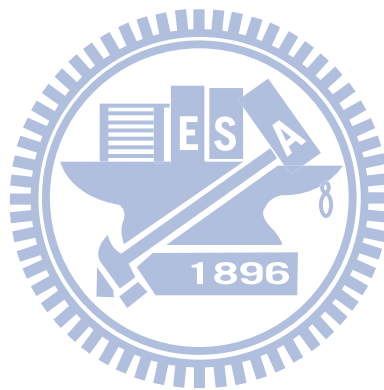
```

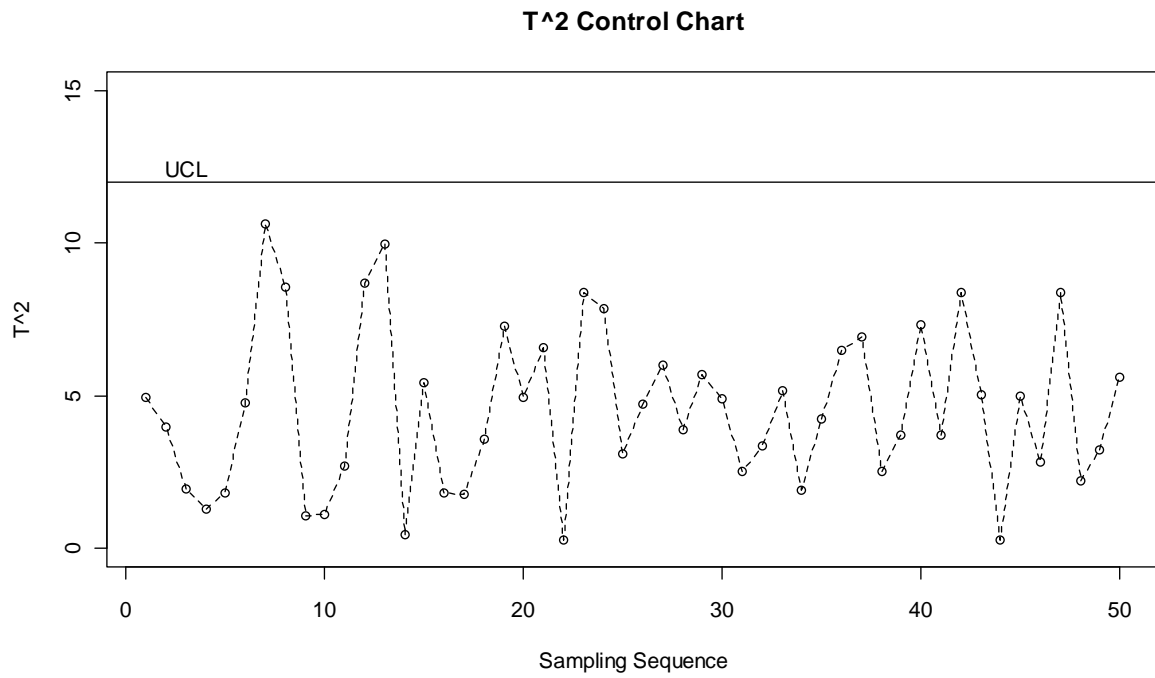
end
clear A Bt S0 St;
end
z(i)= quantile(T,(1-alpha));    %在T裡取出(1-alpha)樣本分位數
end
CL=mean(z);    %此q個分位數之平均即為管制界限
toc

%若是使用雙邊LRT，只須將檢定統計量T改為
% (m*n+n)*log(det((A+Bt)/(m*n+n)))-m*n*log(det(A/(m*n)))-n*log(det(Bt/n))

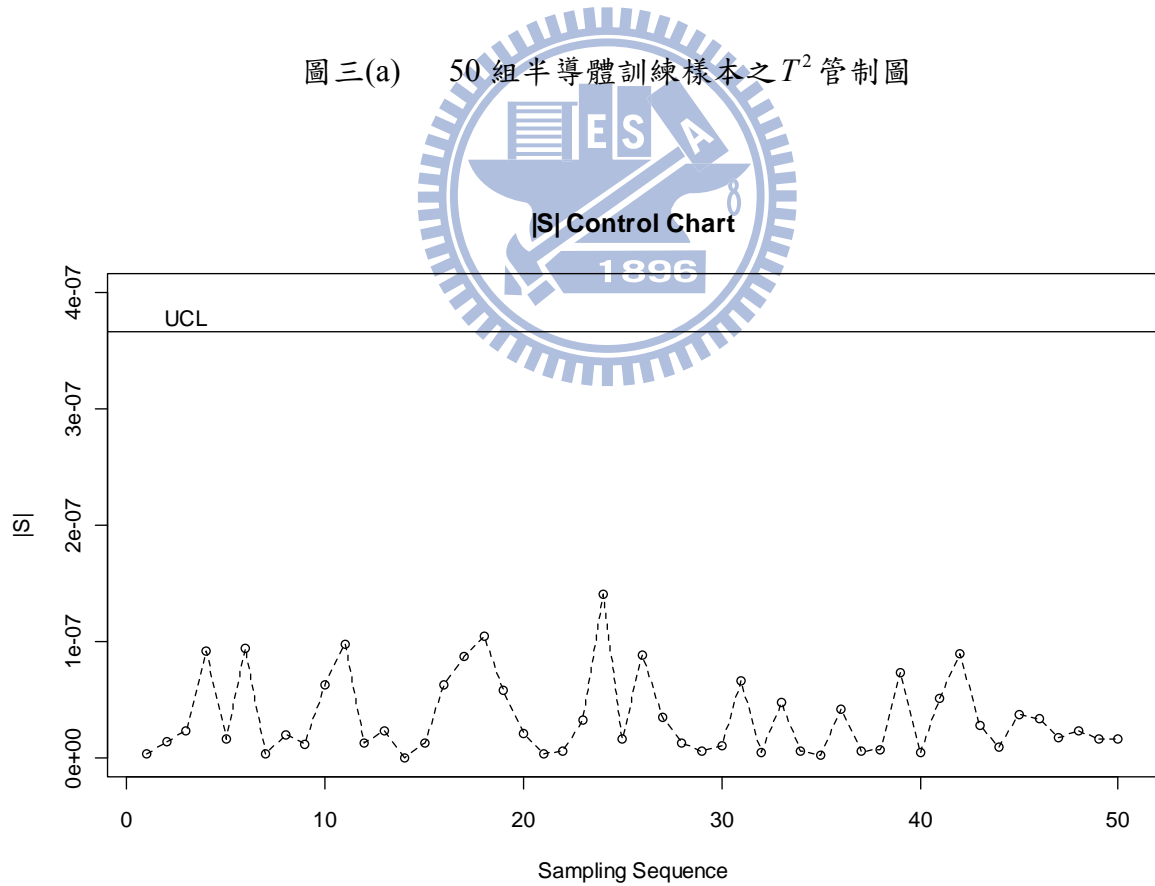
%若是使用雙邊修正LRT，只須將檢定統計量T改為
% (m*n+n-2)*log(det(A+Bt))-(m*n-1)*log(det(A))-(n-1)*log(det(Bt))

```

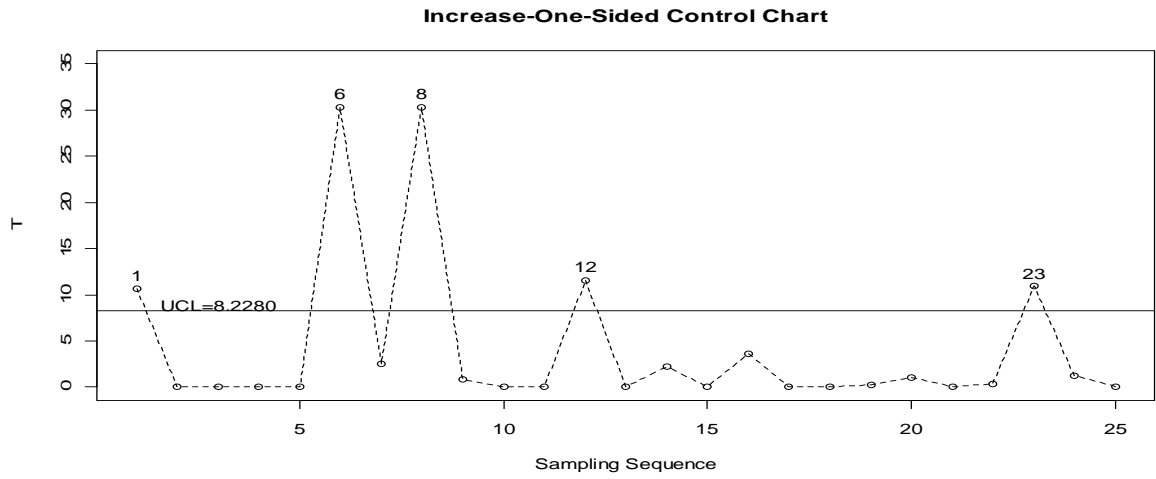




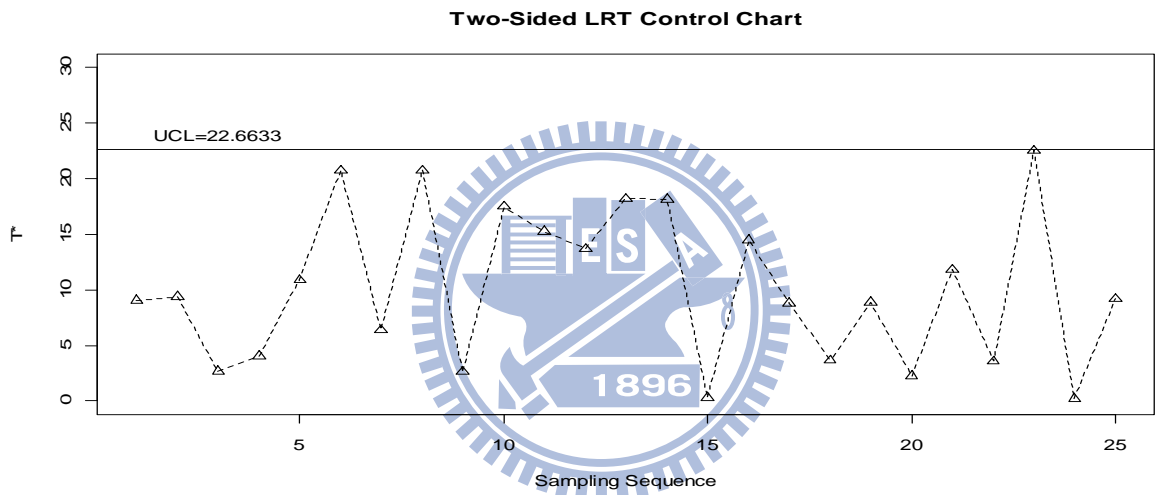
圖三(a) 50組半導體訓練樣本之 T^2 管制圖



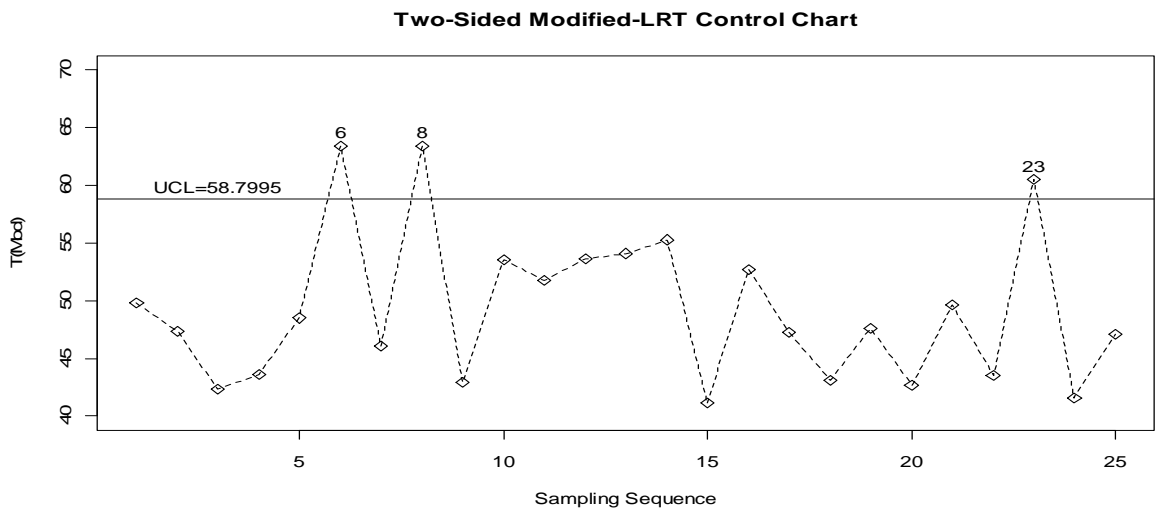
圖三(b) 50組半導體訓練樣本之 $|S|$ 管制圖



圖四(a) 監控 25 組半導體線上隨機樣本之單邊 LRT 管制圖

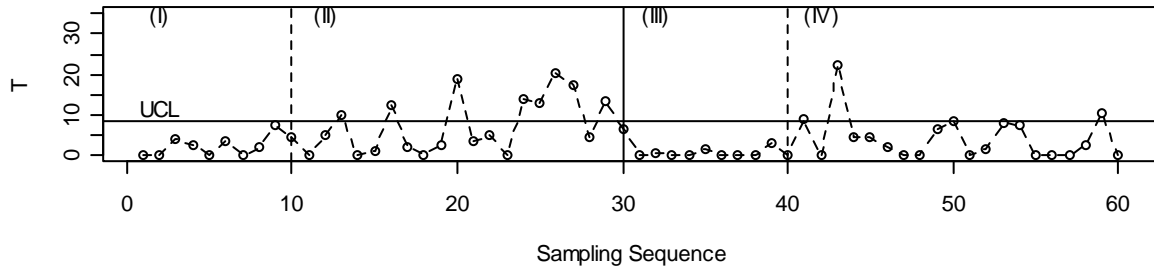


圖四(b) 監控 25 組半導體線上隨機樣本之雙邊 LRT 管制圖

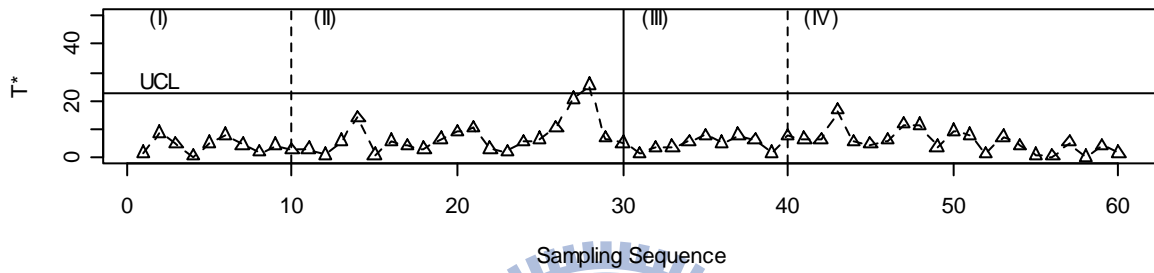


圖四(c) 監控 25 組半導體線上隨機樣本之雙邊修正 LRT 管制圖

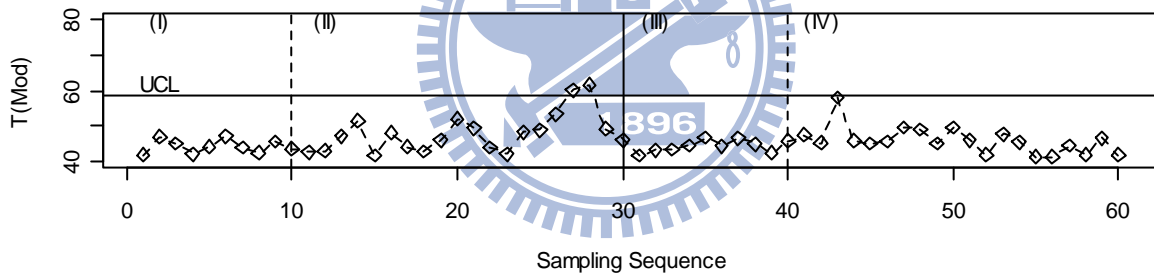
Increase-One-Sided Control Chart



Two-Sided LRT Control Chart

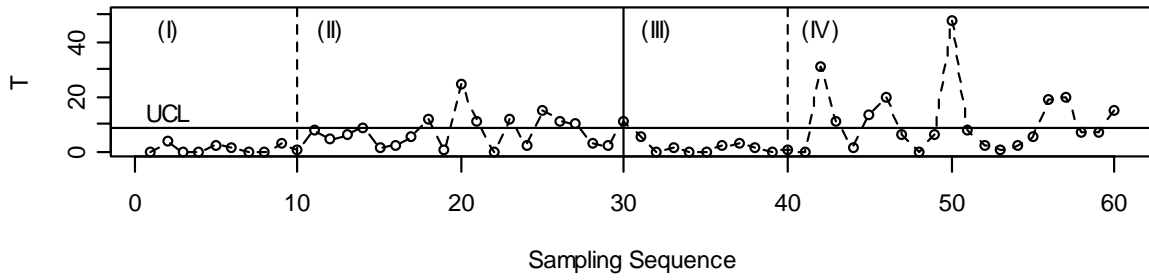


Two-Sided Modified-LRT Control Chart

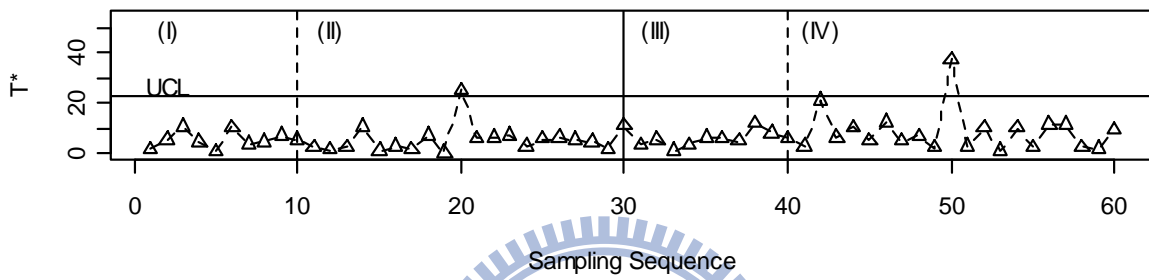


圖五 模擬例子情況(i)之三種管制圖表現

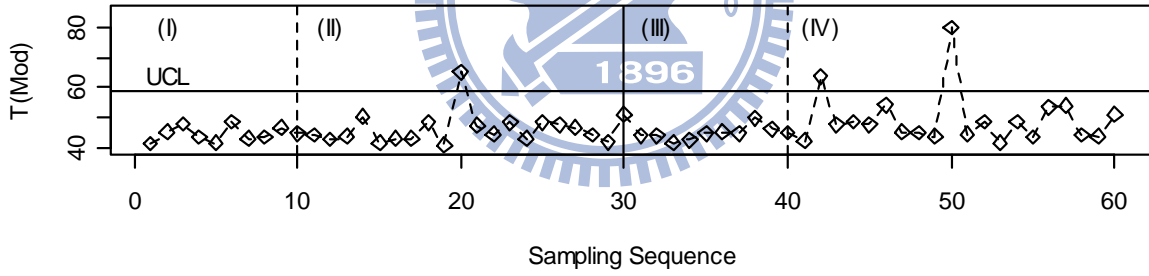
Increase-One-Sided Control Chart



Two-Sided LRT Control Chart



Two-Sided Modified-LRT Control Chart



圖六 模擬例子情況(ii)之三種管制圖表現

表一 設定總運算量為 100,000，計算 $m = 50, n = 5, p = 2, \alpha = 0.0027$ 之單邊 LRT 管制界限並比較兩個程序

程序一		程序二 (N=100000)				平均 CPU 使		
CL		Δ		CL		Δ		用時間
N=10 b=10000	8.1851	0.0429	mean=8.2510 sd=0.0593	8.3030	0.0750	mean=8.2152 sd=0.0810	程序一 9.38 秒	程序二 20.75 秒
	8.2665	0.0385		8.2680	0.0400			
	8.2327	0.0047		8.0654	0.1626			
	8.2039	0.0241		8.1889	0.0391			
	8.2584	0.0304		8.2801	0.0521			
	8.1475	0.0805		8.2459	0.0179			
	8.3311	0.1031		8.1681	0.0599			
	8.2784	0.0504		8.1903	0.0377			
	8.2803	0.0523		8.3144	0.0864			
8.3266	0.0986	8.1277	0.1003					
N=100 b=1000	8.4776	0.2496	mean=8.2222 sd=0.1434	8.3657	0.1377	mean=8.2386 sd=0.0800	程序一 8.27 秒	程序二 21.22 秒
	8.0095	0.2185		8.2261	0.0019			
	8.2730	0.0450		8.2008	0.0272			
	8.1050	0.1230		8.2839	0.0559			
	8.2363	0.0083		8.0780	0.1500			
	8.1327	0.0953		8.2698	0.0418			
	8.2797	0.0517		8.2844	0.0564			
	8.2403	0.0123		8.1662	0.0618			
	8.0820	0.1460		8.2163	0.0117			
8.3856	0.1576	8.2947	0.0667					
N=1000 b=100	8.0379	0.1901	mean=8.2104 sd=0.1719	8.2984	0.0704	mean=8.2307 sd=0.0635	程序一 8.13 秒	程序二 21.26 秒
	8.3214	0.0934		8.2759	0.0479			
	8.0899	0.1381		8.2220	0.0060			
	8.4055	0.1775		8.1681	0.0599			
	8.3833	0.1553		8.2688	0.0408			
	8.4654	0.2374		8.3053	0.0773			
	8.1001	0.1279		8.1041	0.1239			
	8.2355	0.0075		8.2612	0.0332			
	8.0389	0.1891		8.1986	0.0294			
8.0258	0.2022	8.2043	0.0237					
N=10000 b=10	8.5988	0.3708	mean=8.2656 sd=0.3951	8.2894	0.0614	mean=8.2306 sd=0.0914	程序一 8.01 秒	程序二 20.49 秒
	8.3314	0.1034		8.2250	0.0030			
	8.1769	0.0511		8.1739	0.0541			
	7.5107	0.7173		8.3207	0.0927			
	8.4230	0.1950		8.1908	0.0372			
	8.6116	0.3836		8.1680	0.0600			
	8.1146	0.1134		8.2650	0.0370			
	8.4068	0.1788		8.0629	0.1651			
	8.7526	0.5256		8.2204	0.0076			
7.7296	0.4984	8.3901	0.1621					

表二 當 $n = 5$ ，對於不同 p ， m 之雙邊概似比檢定統計量的管制界限與其標準誤(括號內)

		$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$	$\alpha=0.0027$
$p=2$ ($n=5$)	$m=25$	18.1126 (.0031)	20.4904 (.0047)	22.5889 (.0064)
	$m=30$	18.1280 (.0035)	20.5008 (.0051)	22.5959 (.0063)
	$m=35$	18.1461 (.0035)	20.5248 (.0046)	22.6184 (.0061)
	$m=40$	18.1486 (.0036)	20.5317 (.0052)	22.6262 (.0067)
	$m=45$	18.1669 (.0032)	20.5357 (.0053)	22.6328 (.0063)
	$m=50$	18.1702 (.0031)	20.5393 (.0053)	22.6388 (.0067)
	$m=55$	18.1733 (.0031)	20.5408 (.0054)	22.6426 (.0064)
	$m=60$	18.1733 (.0037)	20.5526 (.0051)	22.6538 (.0069)
	$m=65$	18.1752 (.0031)	20.5561 (.0050)	22.6574 (.0060)
	$m=70$	18.1780 (.0038)	20.5552 (.0051)	22.6602 (.0068)
	$m=80$	18.1812 (.0034)	20.5610 (.0051)	22.6663 (.0065)
$m=90$	18.1851 (.0033)	20.5613 (.0053)	22.6763 (.0062)	
$m=100$	18.1865 (.0035)	20.5678 (.0054)	22.6846 (.0062)	
$p=3$ ($n=5$)	$m=25$	32.4446 (.0053)	36.0077 (.0079)	39.1486 (.0101)
	$m=30$	32.4518 (.0058)	36.0120 (.0069)	39.1598 (.0102)
	$m=35$	32.4577 (.0055)	36.0304 (.0074)	39.1664 (.0088)
	$m=40$	32.4751 (.0056)	36.0594 (.0078)	39.1857 (.0100)
	$m=45$	32.4929 (.0053)	36.0614 (.0081)	39.1977 (.0103)
	$m=50$	32.4941 (.0047)	36.0686 (.0067)	39.1991 (.0089)
	$m=55$	32.4972 (.0056)	36.0784 (.0079)	39.2071 (.0098)
	$m=60$	32.4977 (.0053)	36.0798 (.0072)	39.2146 (.0096)
	$m=65$	32.5078 (.0052)	36.0807 (.0072)	39.2183 (.0093)
	$m=70$	32.5151 (.0052)	36.0875 (.0077)	39.2204 (.0088)
	$m=80$	32.5263 (.0050)	36.0945 (.0072)	39.2363 (.0095)
$m=90$	32.5279 (.0047)	36.0958 (.0074)	39.2375 (.0097)	
$m=100$	32.5311 (.0057)	36.0988 (.0071)	39.2509 (.0095)	
$p=4$ ($n=5$)	$m=25$	64.5020 (.0109)	71.4704 (.0152)	77.6340 (.0201)
	$m=30$	64.5214 (.0103)	71.4759 (.0131)	77.6621 (.0205)
	$m=35$	64.5421 (.0106)	71.4765 (.0132)	77.6674 (.0205)
	$m=40$	64.5567 (.0097)	71.5121 (.0127)	77.6766 (.0178)
	$m=45$	64.5604 (.0092)	71.5133 (.0142)	77.6908 (.0203)
	$m=50$	64.5744 (.0110)	71.5149 (.0141)	77.6913 (.0173)
	$m=55$	64.5759 (.0102)	71.5223 (.0147)	77.6970 (.0197)
	$m=60$	64.5829 (.0095)	71.5324 (.0155)	77.6979 (.0175)
	$m=65$	64.5866 (.0089)	71.5368 (.0155)	77.7050 (.0189)
	$m=70$	64.5910 (.0094)	71.5405 (.0151)	77.7207 (.0184)
	$m=80$	64.5925 (.0097)	71.5474 (.0129)	77.7355 (.0190)
$m=90$	64.5956 (.0093)	71.5652 (.0131)	77.7480 (.0188)	
$m=100$	64.6107 (.0087)	71.5687 (.0133)	77.7511 (.0190)	

表三 當 $n = 10$ ，對於不同 p ， m 之雙邊概似比檢定統計量的管制界限與其標準誤(括號內)

		$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.0027$
$p=2$ ($n=10$)	$m=25$	14.0169 (.0027)	15.8561 (.0040)	17.4691 (.0057)
	$m=30$	14.0230 (.0027)	15.8661 (.0039)	17.4839 (.0055)
	$m=35$	14.0309 (.0030)	15.8701 (.0037)	17.4933 (.0051)
	$m=40$	14.0341 (.0025)	15.8797 (.0038)	17.5064 (.0050)
	$m=45$	14.0398 (.0023)	15.8804 (.0038)	17.5042 (.0051)
	$m=50$	14.0432 (.0026)	15.8843 (.0042)	17.5075 (.0052)
	$m=55$	14.0496 (.0027)	15.8851 (.0036)	17.5103 (.0049)
	$m=60$	14.0530 (.0022)	15.8867 (.0035)	17.5130 (.0049)
	$m=65$	14.0556 (.0027)	15.8912 (.0035)	17.5210 (.0054)
	$m=70$	14.0566 (.0026)	15.8960 (.0038)	17.5213 (.0050)
	$m=80$	14.0585 (.0027)	15.8991 (.0034)	17.5230 (.0053)
$m=90$	14.0602 (.0027)	15.9023 (.0035)	17.5235 (.0050)	
$m=100$	14.0636 (.0030)	15.9064 (.0036)	17.5242 (.0047)	
$p=3$ ($n=10$)	$m=25$	21.7866 (.0034)	24.0467 (.0043)	26.0194 (.0053)
	$m=30$	21.7974 (.0027)	24.0552 (.0043)	26.0313 (.0066)
	$m=35$	21.8040 (.0032)	24.0637 (.0049)	26.0437 (.0061)
	$m=40$	21.8154 (.0032)	24.0752 (.0041)	26.0535 (.0059)
	$m=45$	21.8197 (.0035)	24.0829 (.0041)	26.0550 (.0057)
	$m=50$	21.8279 (.0032)	24.0831 (.0044)	26.0578 (.0065)
	$m=55$	21.8283 (.0028)	24.0874 (.0051)	26.0602 (.0060)
	$m=60$	21.8290 (.0033)	24.0899 (.0044)	26.0661 (.0060)
	$m=65$	21.8319 (.0030)	24.1008 (.0044)	26.0675 (.0063)
	$m=70$	21.8393 (.0034)	24.1024 (.0044)	26.0735 (.0064)
	$m=80$	21.8424 (.0033)	24.1028 (.0045)	26.0759 (.0060)
$m=90$	21.8443 (.0030)	24.1084 (.0044)	26.0835 (.0063)	
$m=100$	21.8463 (.0032)	24.1087 (.0045)	26.0855 (.0062)	
$p=4$ ($n=10$)	$m=25$	31.7960 (.0042)	34.5504 (.0055)	36.9462 (.0069)
	$m=30$	31.8171 (.0037)	34.5700 (.0050)	36.9623 (.0076)
	$m=35$	31.8195 (.0034)	34.5788 (.0060)	36.9729 (.0066)
	$m=40$	31.8342 (.0039)	34.5909 (.0054)	36.9898 (.0070)
	$m=45$	31.8370 (.0046)	34.5955 (.0058)	36.9942 (.0087)
	$m=50$	31.8488 (.0039)	34.6053 (.0055)	36.9974 (.0076)
	$m=55$	31.8536 (.0039)	34.6097 (.0065)	37.0023 (.0074)
	$m=60$	31.8565 (.0043)	34.6119 (.0056)	37.0075 (.0076)
	$m=65$	31.8571 (.0035)	34.6135 (.0056)	37.0129 (.0080)
	$m=70$	31.8613 (.0038)	34.6175 (.0056)	37.0152 (.0077)
	$m=80$	31.8662 (.0037)	34.6195 (.0054)	37.0214 (.0074)
$m=90$	31.8686 (.0040)	34.6238 (.0060)	37.0246 (.0066)	
$m=100$	31.8731 (.0044)	34.6284 (.0057)	37.0280 (.0072)	

表四 當 $n = 5$ ，對於不同 p ， m 之雙邊修正概似比檢定統計量的管制界限與其標準誤(括號內)

	$\alpha=0.01$	$A=0.005$	$\alpha=0.0027$	
$p=2$ ($n=5$)	$m=25$	49.7274 (.0026)	51.6152 (.0037)	53.2783 (.0052)
	$m=30$	51.1755 (.0027)	53.0578 (.0041)	54.7232 (.0052)
	$m=35$	52.4032 (.0028)	54.2919 (.0038)	55.9578 (.0050)
	$m=40$	53.4620 (.0028)	55.3571 (.0041)	57.0155 (.0055)
	$m=45$	54.4102 (.0026)	56.2834 (.0043)	57.9586 (.0058)
	$m=50$	55.2439 (.0026)	57.1226 (.0040)	58.7995 (.0051)
	$m=55$	56.0042 (.0027)	57.8828 (.0045)	59.5550 (.0049)
	$m=60$	56.6977 (.0027)	58.5828 (.0043)	60.2496 (.0049)
	$m=65$	57.3326 (.0023)	59.2185 (.0037)	60.8884 (.0053)
	$m=70$	57.9208 (.0028)	59.7988 (.0037)	61.4835 (.0056)
$p=3$ ($n=5$)	$m=25$	78.9956 (.0043)	81.8385 (.0062)	84.3510 (.0080)
	$m=30$	81.1543 (.0045)	83.9950 (.0057)	86.5165 (.0086)
	$m=35$	82.9882 (.0042)	85.8371 (.0058)	88.3434 (.0078)
	$m=40$	84.5896 (.0043)	87.4441 (.0060)	89.9441 (.0081)
	$m=45$	85.9992 (.0040)	88.8429 (.0063)	91.3673 (.0089)
	$m=50$	87.2572 (.0039)	90.0967 (.0066)	92.6211 (.0075)
	$m=55$	88.3850 (.0037)	91.2333 (.0057)	93.7357 (.0072)
	$m=60$	89.4311 (.0039)	92.2840 (.0058)	94.7882 (.0080)
	$m=65$	90.3889 (.0042)	93.2460 (.0049)	95.7526 (.0079)
	$m=70$	91.2837 (.0041)	94.1104 (.0063)	96.6326 (.0070)
$p=4$ ($n=5$)	$m=25$	122.4545 (.0085)	128.0220 (.0122)	132.9587 (.0161)
	$m=30$	125.3449 (.0081)	130.9139 (.0110)	135.8570 (.0159)
	$m=35$	127.7959 (.0083)	133.3464 (.0106)	138.3035 (.0156)
	$m=40$	129.9247 (.0078)	135.4848 (.0099)	140.4238 (.0150)
	$m=45$	131.7939 (.0076)	137.3555 (.0105)	142.2971 (.0155)
	$m=50$	133.4811 (.0087)	139.0413 (.0108)	144.0104 (.0158)
	$m=55$	134.9809 (.0084)	140.5434 (.0113)	145.4740 (.0158)
	$m=60$	136.3737 (.0073)	141.9283 (.0113)	146.8687 (.0135)
	$m=65$	137.6497 (.0075)	143.2171 (.0123)	148.1497 (.0145)
	$m=70$	138.8379 (.0076)	144.3938 (.0129)	149.3487 (.0155)
$m=80$	140.9710 (.0079)	146.5260 (.0109)	151.4848 (.0154)	
$m=90$	142.8487 (.0074)	148.4208 (.0102)	153.3243 (.0151)	
$m=100$	144.5330 (.0071)	150.0902 (.0102)	155.0268 (.0165)	

表五 當 $n = 10$ ，對於不同 p ， m 之雙邊修正概似比檢定統計量的管制界限與其標準誤(括號內)

	$\alpha=0.01$	$A=0.005$	$\alpha=0.0027$	
$p=2$ ($n=10$)	$m=25$	90.4637 (.0024)	92.0988 (.0033)	93.5327 (.0047)
	$m=30$	93.7034 (.0025)	95.3402 (.0034)	96.7833 (.0048)
	$m=35$	96.4478 (.0027)	98.0802 (.0033)	99.5201 (.0049)
	$m=40$	98.8264 (.0021)	100.4659 (.0032)	101.9096 (.0042)
	$m=45$	100.9356 (.0022)	102.5605 (.0032)	104.0091 (.0046)
	$m=50$	102.8112 (.0022)	104.4441 (.0034)	105.8908 (.0047)
	$m=55$	104.5198 (.0023)	106.1481 (.0033)	107.5913 (.0042)
	$m=60$	106.0762 (.0023)	107.7130 (.0036)	109.1462 (.0046)
	$m=65$	107.5100 (.0025)	109.1389 (.0029)	110.5898 (.0042)
	$m=70$	108.8359 (.0024)	110.4682 (.0033)	111.9143 (.0043)
$p=3$ ($n=10$)	$m=25$	136.4899 (.0030)	138.5086 (.0036)	140.2718 (.0049)
	$m=30$	141.3476 (.0025)	143.3698 (.0041)	145.1317 (.0055)
	$m=35$	145.4641 (.0027)	147.4833 (.0042)	149.2466 (.0054)
	$m=40$	149.0384 (.0026)	151.0551 (.0036)	152.8241 (.0053)
	$m=45$	152.1947 (.0031)	154.2101 (.0039)	155.9772 (.0053)
	$m=50$	155.0090 (.0034)	157.0294 (.0041)	158.7905 (.0055)
	$m=55$	157.5769 (.0031)	159.5872 (.0046)	161.3558 (.0058)
	$m=60$	159.9051 (.0029)	161.9197 (.0041)	163.6891 (.0049)
	$m=65$	162.0549 (.0029)	164.0780 (.0039)	165.8340 (.0053)
	$m=70$	164.0494 (.0031)	166.0669 (.0042)	167.8289 (.0056)
$p=4$ ($n=10$)	$m=25$	184.5305 (.0035)	186.9963 (.0049)	189.1528 (.0063)
	$m=30$	191.0186 (.0033)	193.4833 (.0040)	195.6163 (.0064)
	$m=35$	196.4976 (.0033)	198.9688 (.0054)	201.1169 (.0062)
	$m=40$	201.2641 (.0035)	203.7345 (.0051)	205.8731 (.0063)
	$m=45$	205.4662 (.0040)	207.9402 (.0053)	210.0845 (.0076)
	$m=50$	209.2384 (.0033)	211.7072 (.0053)	213.8474 (.0066)
	$m=55$	212.6414 (.0036)	215.1110 (.0053)	217.2381 (.0070)
	$m=60$	215.7560 (.0038)	218.2206 (.0046)	220.3701 (.0077)
	$m=65$	218.6217 (.0035)	221.0868 (.0052)	223.2264 (.0062)
	$m=70$	221.2743 (.0033)	223.7417 (.0049)	225.8781 (.0070)
$m=80$	226.0597 (.0030)	228.5336 (.0051)	230.6690 (.0069)	
$m=90$	230.2828 (.0036)	232.7481 (.0053)	234.8962 (.0059)	
$m=100$	234.0604 (.0039)	236.5310 (.0053)	238.6673 (.0073)	

表六 當 $n = 5$ ，對於不同 p ， m 之單邊概似比檢定統計量的管制界限與其標準誤(括號內)

		$\alpha=0.01$	$A=0.005$	$\alpha=0.0027$
$p=2$ ($n=5$)	$m=25$	6.0333 (.0018)	7.2771 (.0024)	8.4065 (.0037)
	$m=30$	5.9850 (.0018)	7.2252 (.0025)	8.3444 (.0036)
	$m=35$	5.9499 (.0019)	7.1829 (.0028)	8.2983 (.0035)
	$m=40$	5.9269 (.0017)	7.1633 (.0025)	8.2696 (.0037)
	$m=45$	5.9047 (.0016)	7.1367 (.0027)	8.2452 (.0030)
	$m=50$	5.8913 (.0019)	7.1128 (.0025)	8.2280 (.0037)
	$m=55$	5.8764 (.0017)	7.0998 (.0024)	8.2040 (.0034)
	$m=60$	5.8651 (.0017)	7.0887 (.0026)	8.1993 (.0042)
	$m=65$	5.8546 (.0016)	7.0778 (.0025)	8.1797 (.0031)
	$m=70$	5.8477 (.0016)	7.0675 (.0028)	8.1660 (.0034)
	$m=80$	5.8326 (.0016)	7.0489 (.0025)	8.1492 (.0033)
$m=90$	5.8256 (.0017)	7.0396 (.0027)	8.1392 (.0037)	
$m=100$	5.8166 (.0017)	7.0345 (.0024)	8.1343 (.0033)	
$p=3$ ($n=5$)	$m=25$	8.3647 (.0021)	9.7778 (.0030)	11.0203 (.0037)
	$m=30$	8.2945 (.0021)	9.6932 (.0030)	10.9382 (.0036)
	$m=35$	8.2427 (.0020)	9.6352 (.0029)	10.8668 (.0038)
	$m=40$	8.2018 (.0022)	9.5888 (.0024)	10.8271 (.0035)
	$m=45$	8.1784 (.0019)	9.5569 (.0027)	10.7893 (.0035)
	$m=50$	8.1528 (.0020)	9.5250 (.0029)	10.7608 (.0040)
	$m=55$	8.1293 (.0021)	9.5033 (.0030)	10.7233 (.0038)
	$m=60$	8.1099 (.0018)	9.4842 (.0025)	10.7070 (.0035)
	$m=65$	8.0977 (.0020)	9.4733 (.0028)	10.6927 (.0035)
	$m=70$	8.0817 (.0020)	9.4513 (.0028)	10.6784 (.0037)
	$m=80$	8.0700 (.0019)	9.4375 (.0029)	10.6627 (.0041)
$m=90$	8.0518 (.0020)	9.4239 (.0027)	10.6423 (.0036)	
$m=100$	8.0383 (.0020)	9.4038 (.0030)	10.6216 (.0038)	
$p=4$ ($n=5$)	$m=25$	10.7839 (.0025)	12.3420 (.0035)	13.7104 (.0050)
	$m=30$	10.6755 (.0022)	12.2211 (.0034)	13.5865 (.0042)
	$m=35$	10.6000 (.0023)	12.1366 (.0031)	13.4954 (.0042)
	$m=40$	10.5489 (.0020)	12.0758 (.0032)	13.4343 (.0039)
	$m=45$	10.5044 (.0023)	12.0308 (.0035)	13.3813 (.0037)
	$m=50$	10.4662 (.0024)	11.9890 (.0028)	13.3284 (.0040)
	$m=55$	10.4380 (.0023)	11.9581 (.0033)	13.2964 (.0043)
	$m=60$	10.3977 (.0022)	11.9282 (.0028)	13.2533 (.0043)
	$m=65$	10.3946 (.0023)	11.9073 (.0030)	13.2488 (.0043)
	$m=70$	10.3770 (.0020)	11.8891 (.0028)	13.2318 (.0038)
	$m=80$	10.3446 (.0226)	11.8626 (.0029)	13.1959 (.0419)
$m=90$	10.3286 (.0214)	11.8344 (.0032)	13.1711 (.0384)	
$m=100$	10.3112 (.0195)	11.8191 (.0032)	13.1433 (.0379)	

表七 當 $n = 10$ ，對於不同 p ， m 之單邊概似比檢定統計量的管制界限與其標準誤(括號內)

		$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$	$\alpha=0.0027$
$p=2$ ($n=10$)	$m=25$	6.7130 (.0019)	7.9997 (.0030)	9.1429 (.0038)
	$m=30$	6.6848 (.0019)	7.9602 (.0027)	9.1087 (.0031)
	$m=35$	6.6581 (.0017)	7.9361 (.0026)	9.0815 (.0034)
	$m=40$	6.6394 (.0020)	7.9120 (.0024)	9.0531 (.0036)
	$m=45$	6.6282 (.0018)	7.9050 (.0027)	9.0391 (.0037)
	$m=50$	6.6152 (.0018)	7.8889 (.0022)	9.0248 (.0035)
	$m=55$	6.6086 (.0020)	7.8775 (.0025)	9.0140 (.0037)
	$m=60$	6.6018 (.0018)	7.8674 (.0025)	9.0098 (.0039)
	$m=65$	6.5964 (.0016)	7.8647 (.0026)	9.0018 (.0032)
	$m=70$	6.5900 (.0019)	7.8563 (.0024)	8.9930 (.0037)
$p=3$ ($n=10$)	$m=25$	9.2979 (.0019)	10.7394 (.0026)	12.0361 (.0039)
	$m=30$	9.2460 (.0022)	10.6904 (.0029)	11.9650 (.0039)
	$m=35$	9.2119 (.0020)	10.6475 (.0031)	11.9201 (.0041)
	$m=40$	9.1830 (.0022)	10.6144 (.0025)	11.8903 (.0044)
	$m=45$	9.1624 (.0020)	10.5954 (.0030)	11.8670 (.0038)
	$m=50$	9.1459 (.0020)	10.5774 (.0032)	11.8515 (.0039)
	$m=55$	9.1344 (.0022)	10.5599 (.0028)	11.8308 (.0043)
	$m=60$	9.1233 (.0020)	10.5488 (.0028)	11.8226 (.0041)
	$m=65$	9.1123 (.0019)	10.5442 (.0027)	11.8047 (.0042)
	$m=70$	9.1077 (.0021)	10.5293 (.0027)	11.7967 (.0039)
$p=4$ ($n=10$)	$m=25$	12.0280 (.0026)	13.6260 (.0034)	15.0391 (.0041)
	$m=30$	11.9540 (.0024)	13.5461 (.0030)	14.9575 (.0045)
	$m=35$	11.9024 (.0025)	13.4999 (.0033)	14.8913 (.0042)
	$m=40$	11.8657 (.0020)	13.4504 (.0031)	14.8543 (.0045)
	$m=45$	11.8370 (.0025)	13.4242 (.0033)	14.8185 (.0046)
	$m=50$	11.8128 (.0024)	13.3949 (.0030)	14.7907 (.0045)
	$m=55$	11.7903 (.0022)	13.3781 (.0033)	14.7599 (.0045)
	$m=60$	11.7788 (.0024)	13.3556 (.0029)	14.7479 (.0041)
	$m=65$	11.7624 (.0021)	13.3392 (.0031)	14.7292 (.0041)
	$m=70$	11.7508 (.0026)	13.3301 (.0033)	14.7139 (.0045)
	$m=80$	11.7309 (.0024)	13.3022 (.0034)	14.6997 (.0045)
	$m=90$	11.7141 (.0022)	13.2920 (.0031)	14.6714 (.0041)
	$m=100$	11.7051 (.0022)	13.2788 (.0038)	14.6606 (.0039)

表八 管制圖的期望假警報率及偵測力與其標準誤(括號內)當 $m = 25$, $n = 5$

$p=2, n=5$		$m=25$		
Δ_1	Δ_2	one-sided (increase)	two-sided LRT	Modified two-sided LRT
[$\rho=0$]				
1	1	0.002694 (.000005)	0.002705 (.000005)	0.002707 (.000005)
1.25	1.25	0.013092 (.000011)	0.002270 (.000005)	0.003535 (.000005)
1.5	1.5	0.036874 (.000019)	0.002660 (.000005)	0.006891 (.000008)
1.75	1.75	0.075558 (.000026)	0.004205 (.000006)	0.014618 (.000012)
2	2	0.126842 (.000033)	0.007656 (.000009)	0.028404 (.000016)
2.25	2.25	0.186727 (.000041)	0.013945 (.000012)	0.049282 (.000024)
2.5	2.5	0.250739 (.000046)	0.023938 (.000017)	0.077123 (.000025)
2.75	2.75	0.315667 (.000047)	0.038166 (.000015)	0.111213 (.000029)
3	3	0.378687 (.000044)	0.056718 (.000025)	0.150111 (.000035)
1.25	1	0.007165 (.000009)	0.002482 (.000005)	0.003113 (.000005)
1.75	1	0.031009 (.000017)	0.003485 (.000006)	0.007806 (.000009)
2.25	1	0.075759 (.000026)	0.007730 (.000009)	0.021010 (.000014)
2.75	1	0.134589 (.000034)	0.017089 (.000012)	0.044474 (.000020)
1.25	1.75	0.040517 (.000021)	0.003208 (.000006)	0.008390 (.000009)
1.75	2.25	0.129424 (.000035)	0.008549 (.000009)	0.030290 (.000017)
2.75	1.25	0.149584 (.000030)	0.016240 (.000014)	0.045596 (.000021)
2.25	2.75	0.251875 (.000046)	0.025043 (.000016)	0.078748 (.000028)
[$\rho=0.2$]				
1.75	1.75	0.081960 (.000026)	0.005620 (.000007)	0.018115 (.000013)
1.75	2.25	0.135915 (.000034)	0.010839 (.000009)	0.035047 (.000017)
2.25	2.25	0.192468 (.000041)	0.017313 (.000012)	0.055106 (.000025)
2.25	2.75	0.256322 (.000045)	0.029374 (.000017)	0.085031 (.000032)
[$\rho=0.4$]				
1.75	1.75	0.100436 (.000029)	0.010549 (.000011)	0.029162 (.000017)
1.75	2.25	0.155000 (.000038)	0.018500 (.000014)	0.049700 (.000021)
2.25	2.25	0.210128 (.000040)	0.027872 (.000018)	0.072806 (.000028)
2.25	2.75	0.271000 (.000041)	0.042700 (.000021)	0.104000 (.000031)

表九 管制圖的期望假警報率及偵測力與其標準誤(括號內)當 $m = 50$, $n = 5$

$p=2, n=5$		$m=50$		
Δ_1	Δ_2	one-sided (increase)	two-sided LRT	Modified two-sided LRT
[$\rho=0$]				
1	1	0.002694 (.000006)	0.002688 (.000005)	0.002703 (.000005)
1.25	1.25	0.013704 (.000011)	0.002257 (.000004)	0.003591 (.000006)
1.5	1.5	0.039250 (.000018)	0.002697 (.000005)	0.007296 (.000009)
1.75	1.75	0.080777 (.000023)	0.004428 (.000006)	0.015905 (.000013)
2	2	0.135327 (.000032)	0.008417 (.000009)	0.031405 (.000016)
2.25	2.25	0.198512 (.000036)	0.015687 (.000012)	0.054650 (.000022)
2.5	2.5	0.265278 (.000046)	0.027226 (.000016)	0.085435 (.000027)
2.75	2.75	0.332213 (.000043)	0.043537 (.000020)	0.122658 (.000032)
3	3	0.396849 (.000053)	0.064592 (.000024)	0.164746 (.000038)
1.25	1	0.007411 (.000009)	0.002465 (.000004)	0.003134 (.000006)
1.75	1	0.033141 (.000018)	0.003553 (.000006)	0.008269 (.000010)
2.25	1	0.081093 (.000028)	0.008310 (.000010)	0.022960 (.000015)
2.75	1	0.143545 (.000034)	0.018997 (.000015)	0.049039 (.000023)
1.25	1.75	0.043267 (.000024)	0.003271 (.000005)	0.008944 (.000010)
1.75	2.25	0.138146 (.000034)	0.009428 (.000009)	0.033495 (.000018)
2.75	1.25	0.159280 (.000034)	0.018223 (.000013)	0.050494 (.000019)
2.25	2.75	0.266368 (.000049)	0.028490 (.000018)	0.087145 (.000030)
[$\rho=0.2$]				
1.75	1.75	0.087604 (.000031)	0.006043 (.000008)	0.019852 (.000016)
1.75	2.25	0.144839 (.000033)	0.012063 (.000010)	0.038806 (.000016)
2.25	2.25	0.204313 (.000048)	0.019550 (.000013)	0.061098 (.000025)
2.25	2.75	0.270937 (.000045)	0.033458 (.000019)	0.094053 (.000033)
[$\rho=0.4$]				
1.75	1.75	0.107411 (.000028)	0.011568 (.000010)	0.032083 (.000016)
1.75	2.25	0.164704 (.000037)	0.020649 (.000014)	0.054942 (.000022)
2.25	2.25	0.222676 (.000043)	0.031508 (.000015)	0.080433 (.000027)
2.25	2.75	0.285000 (.000047)	0.048500 (.000021)	0.115000 (.000031)