國立交通大學

統計學研究所

碩士論文

隨機環境下兩性族群繁衍過程之滅種機率分析

The Extinction Probability of Two-sex Branching Processes with Offspring and Mating in a Random Environment

研 究 生：宋瀚宇

指導教授：彭南夫 博士

中華民國一百年六月

隨機環境下兩性族群繁衍過程之滅種機率分析

The Extinction Probability of Two-sex Branching Processes with Offspring and Mating in a Random Environment

學　　生：宋瀚宇　　　　Student：Han-Yu Sung

指導教授：彭南夫　博士　　　　Advisor：Dr. Nan-Fu Peng

國立交通大學理學院

統計學研究所

碩士論文

A Thesis
Submitted to Institute of Statistics
College of Science
National Chiao Tung University
In Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master
in Statistics
June 2011
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年六月

隨機環境下兩性族群繁衍過程之滅種機率分析

研究生： 宋瀚宇 指導教授： 彭南夫 博士

國立交通大學統計研究所 碩士班

摘要

我們將介紹一個離散時間下的兩性族群繁衍過程，此兩性族群繁衍過程是在隨機環境過程中進行。而隨機環境過程中的環境變數彼此獨立且不一定具有相同分配。利用推導兩性族群繁衍過程的極限機率，找出經過無窮世代交替後極限機率與滅種機率的關係。最後利用模擬實驗估計滅種機率，找出各參數和滅種機率的關係

關鍵字：隨機環境，兩性族群繁衍，滅種機率

The Extinction Probability of Two-sex Branching Processes

with Offspring and Mating in a Random Environment

Student：Han-Yu Sung　　　　　　　　Advisor：Dr. Nan-Fu Peng

Institute of Statistic
National Chiao Tung University

Abstract

We introduce a model of discrete-time two-sex branching processes with offspring and mating in a random environment. The environmental process develops from independent but not necessarily identically distributed random vector. The limiting probability of two-sex branching processes is derived. We determine some relationships among the limiting probability and extinction probability. The simulated examples are given as the estimations of extinction probability.

Keywords: Random environment process; two-sex branching process; extinction probability

誌　謝

大學好像才剛畢業，轉眼間研究所即將進入最後階段。在新竹待了六年，占了人生的四分之一。研究所兩年的時間，雖然比大學四年來的短暫，但是卻很充實，埋頭於書海當中，學習新知識，學得越多，知道的卻覺得越少。人生也該脫離學生身分，邁向新階段。

感謝交大統計所，兩年對我的栽培！感謝指導我論文的彭南夫老師，不管我的問題為何，老師總是充滿耐心的惇惇教誨，讓我在研究的路上充滿安全感。感謝所上的所有教授，營造交大統計所溫馨大家庭的氛圍。感謝所辦助理，郭姐，劉小姐，在研究之餘也陪我們插科打渾。感謝統計所 98 級的所有同學，這兩年我們擁有許多共同的回憶，腳踏車環島，游日月潭，一起打籃球，將來這些回憶將深深存放在我心裡，謝謝你們。特別感謝于億，在我論文遇到瓶頸時與我共同討論，讓我備感貼心。

最後，感謝我的家人及玉清給我支持與鼓勵，讓我充滿信心繼續做研究，感謝新竹以及所有我愛的人和愛我的人。

宋瀚宇　　謹誌于

國立交通大學統計研究所

中華民國一百年八月

目錄

表目錄

圖目錄

第一章　緒論

1.1 研究動機

從生物上的角度來說明，個體指的是生命世界中基本單位，可自行進行生命現象，族群指的是特定時間棲息在特定地區內的單一物種的個體群；而兩性族群指的是族群透過雌雄兩性進行生殖以延續後代的族群。在生物族群繁衍的研究中，滅種一直是人類很關心的問題。而環境中有很多因素會影響種族的繁衍，因此想從一些相關論文的研究中，將環境因子當作隨機變數，去討論環境因子對滅種的影響。並想要透過一開始環境因子的資訊去預測族群滅種的機率。

模型設定上面，採用兩性族群較貼近人類。先將環境因子的個數設為三個，建立模型，並透過統計軟體 R 模擬實驗兩性族群繁衍之後估計滅種機率。討論已知影響環境因子的分配參數，去預測滅種機率。這樣在可能會滅種時，針對影響較甚的環境因子該採取何種做法，可延長物種生存時間。例如，當貓熊數量過少時，可能跟他的生育率有關，所以可對貓熊採取人工受孕的方式，提高其生育率。

理論方面，找出在條件限制下族群只會有滅種跟族群持續擴張，而不會使族群維持一定數量。找出特定條件下，兩性族群繁衍過程將不至於完全滅種。

最後，想透過實際的例子，來解釋環境因子的參數的代表為何，並解釋此模型的現象，因此，在此篇論文中，將透過簡化的模型，估計滅種機率，並討論各參數與滅種機率的關係。

1.2 研究方法

此篇論文主要是提出一個簡化的模型，模型是從 Galton-Watson 兩性繁衍過程及 S. Ma 和 M. Molina(2009)簡化得來，想從環境因子中再增加一個影響死亡率的環境因子。

設計實驗與模型討論當死亡率為隨機變數，與死亡率為固定值上的差異性。實驗分成三個部分，先討論死亡率為隨機變數時，在討論死亡率為隨機變數，最後討論其他環境因子為固定值時，然後總結各環境因子在滅種機率上所造成的影響。

我們從較複雜的繁衍過程開始，並透過逐步簡化模型的過程探討各環境因子對滅種機率的關係，是本篇論文最主要的貢獻。

第二章　兩性族群繁衍模型

2.1 兩性族群繁衍基本概述

此兩性族群繁衍模型是從 Galton-Watson 兩性族群繁衍過程及 S.Ma 和 M.Molina(2009)簡化得來，以下為模型基本概述。

我們將介紹一個在隨機環境過程下進行的兩性族群繁衍過程，其發生在機率空間$(\Omega,\mathbb{F},\mathrm{P})$，先定義兩性族群繁衍世代序列$\{(F_{\mathrm{n}},M_n)\}_{n\geq 1}$，$(F_{\mathrm{n}},M_n)$代表第$n$世代中親代雌性個體及雄性個體的總數（$n$從第一代開始)。隨機環境過程$\{(\theta_n,\eta_n,\alpha_n)\}_{n\geq 0}$代表在第$n$世代影響繁衍的三個不同環境因子，此三個環境因子具有獨立分配但不需要具有相同分配，且$\alpha_n\in(0,1)$，對所 有$n\geq 0$。則兩性繁衍過程可透過下列方式進行繁衍：

$$(F_{n+1,}M_{n+1})=\sum_{i=1}^{Z_n}(f_{n,i;\theta_n,\alpha_n},m_{n,i;\theta_n,\alpha_n})\text{ ， }Z_{n+1}=L_{\eta_n}(F_{n+1},M_{n+1})\text{ ， }n=0,1,...,$$

Z_{n+1}為第n世代兩性所產生的配對數，$(f_{n,i;\theta_n,\alpha_n},m_{n,i;\theta_n,\alpha_n})$為第$n$代第 i 對配對所生下的雌性和雄性個數 ，特別定義Z_0為一開始族群的初始配對數且$Z_0=N_0$為一正整數，而函數$L_\eta(x,y)$則為其配對函數。

希望透過環境因子$(\theta_n,\eta_n,\alpha_n),n=0,1,...$，建構基本模型分別描述出兩性族群繁衍過程中影響繁衍的環境因子，讓$(\theta_n,\eta_n,\alpha_n)=(\theta,\eta,\alpha)$：

- θ：影響生育子代個體性別的環境因子
- η：影響配對個數的環境因子
- α：影響後代的生育個體數的環境因子

下列為有關兩性族群配對函數更詳盡的定義：

$L_\eta : R^+ \times R^+ \to R^+$

$L_\eta(x,0) = L_\eta(0,y) = 0, \quad x, y \in R^+$

$L_\eta(x,y)$ 為非遞減函數

$L_\eta(x_1+x_2, y_1+y_2) \ge L_\eta(x_1,y_1) + L_\eta(x_2,y_2)$ 此為 superadditive 性質

2.2 兩性族群繁衍模型範例

在滿足前面的兩性繁衍模型基本概述，我們建構一個簡單的模型範例，如下所示：

(a) 隨機環境過程 $\{(\theta_n, \eta_n, \alpha_n)\}_{n\ge 0}$ 具有下列獨立分配：

- θ_n 具有 Beta 分配，機率密度函數：

  $f_{\theta_n}(\theta) = \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1},\ \theta \in (0,1)$ ， a,b 為影響 θ_n 分配之參數

- η 具有指數分配，機率密度函數：

  $f_{\eta_n}(\eta) = \lambda e^{-\lambda\eta},\ \eta \in (0,\infty)$ ， $E(\eta) = \dfrac{1}{\lambda}$

- α_n 具有 Beta 分配，機率密度函數：

$$f_{\alpha_n}(\alpha)=\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\alpha^{c-1}(1-\alpha)^{d-1},\ \alpha\in(0,1)$$ ，c,d 為影響 α_n 分配之參數

（b） 當 $(\theta_n,\alpha_n)=(\theta,\alpha)$，且環境因子跟 n 獨立，則同一世代配對後所產下子代雌性及雄性個體數具有下列分配：

$$P(f_{n,1;\theta,\alpha}=k,\ \mathrm{m}_{n,1;\theta,\alpha}=j)=\frac{10!}{k!\,j!(10-k-j)}[(1-\alpha)\theta]^k[(1-\alpha)(1-\theta)]^j\alpha^{10-k-j}$$

$0\le k+j\le 10$

k, j 為非負整數

（c） 當 $\eta_n=\eta$ ，$\eta\in(0,\infty)$，定義配對函數如下：

$L_\eta(x,y)=\min\left\{x,\lfloor 3y\eta(1+\eta)^{-1}\rfloor\right\}$ ，$x,y\in R^+$ 滿足 superadditive 性質

$\lfloor x\rfloor$ 為 x 的整數部分值

在第四章模擬實驗當中我們將會調整 N_0,a,b,c,d,λ 的值，並使環境變數從隨機變數改為定值，運用此兩性族群繁衍模型範例來討論不同條件下各參數對滅種機率的影響。

第三章　兩性族群滅種機率推導

本章分成兩部分：3.1 兩性族群無窮世代繁衍後的狀態 3.2 特定條件下兩性族群繁衍過程的滅種機率。以下證明參照 Ma, S. 和 Molina, M. (2009) 和 Agresti, A. (1975)，本篇論文不同的地方在隨機環境過程中多加入了α代表影響後代的生育個體數的環境因子。

3.1 兩性族群無窮世代繁衍後的狀態

Definition：定義符號

$\Psi = \{(\theta_n, \eta_n, \alpha_n)\}_{n\geq 0}$ 為隨機環境過程

$F_\Psi = \sigma((\theta_0, \eta_0, \alpha_0), (\theta_1, \eta_1, \alpha_1)...)$ 為隨機環境過程的σ域

$q_{N_0,\Psi} = P(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0 \mid Z_0 = N_0, F_\Psi)$ 為固定環境過程兩性族群的滅種機率

我們將證明在特定條件下，兩性族群無窮世代繁衍後的狀態將只會有兩種情形，滅種或族群個體數量持續上升。對初始配對數不為零且在固定環境下:

$$\pi_{N_0;\Psi} = P(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0 \mid Z_0 = N_0, F_\Psi) + P(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty \mid Z_0 = N_0, F_\Psi)\ \textit{almost surely}(\text{a.s.})$$

接下來將利用 proposition3.1 和 proposition3.2 來說明

$P(\pi_{N_0;\Psi} = 1) = 1,\ \mathrm{N}_0 = 1, 2, ...,$(等式 3.1)

Proposition 3.1：n屬於正整數，若滿足下列其一條件

(1) $P(P(f_{n,1;\theta_n,\alpha_n}=0\,|\,\theta_n,\alpha_n)>0)=1$

(2) $P(P(m_{n,1;\theta_n,\alpha_n}=0\,|\,\theta_n,\alpha_n)>0)=1$

則等式 3.1 成立

Proof：

給定$(\theta_n,\eta_n,\alpha_n)=(\theta,\eta,\alpha)$

$$P(L_\eta(\sum_{i=1}^{k} f_{n,i;\theta,\alpha},\sum_{i=1}^{k} m_{n,i;\theta,\alpha})=0)\geq \max\left\{(P(f_{n,i;\theta,\alpha}=0))^k,(P(m_{n,i;\theta,\alpha}=0))^k\right\}>0$$

$$P(Z_{n+1}=0\,|\,Z_n=k,(\theta_n,\eta_n,\alpha_n))=P(L_\eta(\sum_{i=1}^{k} f_{n,i;\theta,\alpha},\sum_{i=1}^{k} m_{n,i;\theta,\alpha})=0)>0$$

$$P(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{Z_{n+m}=k\}\,|\,Z_n=k,F_\Psi)\leq 1-P(Z_{n+1}=0\,|\,Z_n=k,(\theta_n,\eta_n,\alpha_n))<1$$

所以k只會是一個過渡的狀態

$$P(P(\limsup_{n\to\infty}\{Z_n=k\}\,|\,Z_0=N_0,F_\Psi)=0)=1,\ N_0=1,2,...,$$

$$\{\{\lim_{n\to\infty} Z_n=0\}\bigcup\{\lim_{n\to\infty} Z_n=\infty\}\}^c\subset\bigcup_{k\in N}\limsup_{n\to\infty}\{0<Z_n\leq k\}$$

得證

Proposition3.2：n屬於正整數，若滿足下列全部條件

(1) $P(P(f_{n,1;\theta_n,\alpha_n}=0\,|\,\theta_n,\alpha_n)=0)=P(P(m_{n,1;\theta_n,\alpha_n}=0\,|\,\theta_n,\alpha_n)=0)=1$

(2) $P(P(L_{\eta_n}(1,1)=1\,|\,\eta_n)=1)=1$

(3) $P(P(Z_{n+1}=k\,|\,Z_n=k,(\theta_n,\eta_n,\alpha_n))<1)=1,\ k=1,2,...,$

則等式 3.1 成立

Proof：

由(1)、(2)可得

$$Z_{n+1}=L_{\eta_n}(\sum_{i=1}^{Z_n} f_{n,i;\theta_n,\alpha_n},\sum_{i=1}^{Z_n} m_{n,i;\theta_n,\alpha_n})\geq\sum_{i=1}^{Z_n} L_{\eta_n}(f_{n,i;\theta_n,\alpha_n},m_{n,i;\theta_n,\alpha_n})\geq Z_n \quad a.s.$$

藉由(3)可得

$$P(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{Z_{n+m}=k\}\mid Z_n=k,F_\Psi)=P(Z_{n+1}=k\mid Z_n=k,(\theta_n,\eta_n,\alpha_n))\ a.s.$$

$$P(P(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{Z_{n+m}=k\}\mid Z_n=k,F_\Psi)<1)=1$$

推得k只是一個過渡狀態，則$P(\pi_{N;\Psi}=1)=1$。

3.2 特定條件下兩性族群繁衍過程的滅種機率

Proposition3.3 若滿足下列兩項條件

$$(1)\ \sup_{j\geq 0} E(\frac{\zeta''_{j;(\theta_j,\eta_j,\alpha_j)}(1)}{[\zeta'_{j;(\theta_j,\eta_j,\alpha_j)}(1)]^2})<\infty$$

$$(2)\ \sum_{j=0}^{\infty}[\prod_{i=0}^{j} E(\frac{1}{\zeta'_{i;(\theta_i,\eta_i,\alpha_i)}(1)})]<\infty$$

$$\zeta_{n;(\theta,\eta,\alpha)}(s)=E[s^{L_\eta(f_{n,1;\theta,\alpha},m_{n,1;\theta,\alpha})}],\ s\in[0,\ 1],n\in\mathbb{N}$$

則存在一個正整數N_0，使得$P(q_{\mathrm{N}_0;\Psi}<1)=1$

Proof:Proposition3.3 證明細節可參考 Agresti, A. (1975).。

第四章　模擬實驗

4.1 模擬實驗 1

4.1.1 模擬實驗 1 流程設計

在模擬實驗 1 中，我們想利用繁衍世代 $n=50$，利用模擬進行估計兩性族群世代交替之後滅種的機率。並討論當隨機環境下的各環境變數改為定值，對滅種機率的影響。以下為模擬實驗 1 流程：

利用 R 程式設計模擬實驗函數可輸入值：

N_0 :初始配對數

λ :影響 $\underset{\sim}{\eta}_n=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_{n-1})$ 分配之參數

a,b :影響 $\underset{\sim}{\theta}_n=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n-1})$ 分配之參數

c,d :影響 $\underset{\sim}{\alpha}_n=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1})$ 分配之參數

n:模擬兩性族群繁衍世代數

sim:模擬次數

◆ 步驟一：生成第一代

生成 θ_0 從 Beta(a,b)、η_0 從 Exp(λ)、α_0 從 Beta(c,d)

生成 $(f_{1,i;\theta_0,\alpha_0}=k,\ \mathrm{m}_{1,i;\theta_0,\alpha_0}=j)$ 從下列分配

$$P(f_{1,i;\theta_0,\alpha_0}=k,\ \mathrm{m}_{1,i;\theta_0,\alpha_0}=j)=\frac{10!}{k!\,j!(10-k-j)}[(1-\alpha_0)\theta_0]^k[(1-\alpha_0)(1-\theta_0)]^j\alpha_0^{\ 10-k-j}$$
$$0\le k+j\le 10, i=1,2,...Z_0$$

$$(F_{1,}M_{1})=\sum_{i=1}^{Z_0}(f_{1,i;\theta_0,\alpha_n},m_{1,i;\theta_0,\alpha_0})$$ 產生第一代的親代雌性及雄性個體數

$$Z_1=L_{\eta_0}(F_1,M_1)=\min\left\{F_1,\left\lfloor\frac{3M_1\eta_0}{1+\eta_0}\right\rfloor\right\}$$ 進行第一代配對

- 步驟二：生成第 k 代，$k=2,3,....,n$

生成 θ_{k-1} 從 Beta(a,b)、η_{k-1} 從 Exp(λ)、α_{k-1} 從 Beta(c,d)

生成 $(f_{k,i;\theta,\alpha}=k,\ \mathrm{m}_{k,i;\theta,\alpha}=j)$ 從下列分配

$$P(f_{k,i;\theta_{k-1},\alpha_{k-1}}=k,\ \mathrm{m}_{k,i;\theta_{k-1},\alpha_{k-1}}=j)=\frac{10!}{k!\,j!(10-k-j)}[(1-\alpha_{k-1})\theta_{k-1}]^k[(1-\alpha_{k-1})(1-\theta_{k-1})]^j\alpha_{k-1}{}^{10-k-j}$$

$0\le k+j\le 10, i=1,2,...Z_{k-1}$

$$(F_{k,}M_{k})=\sum_{i=1}^{Z_{k-1}}(f_{k,i;\theta_{k-1},\alpha_{k-1}},m_{k,i;\theta_{k-1},\alpha_{k-1}})$$ 產生第 k 代的親代雌性及雄性個體數

$$Z_k=L_{\eta_{k-1}}(F_k,M_k)=\min\left\{F_k,\left\lfloor\frac{3M_k\eta_{k-1}}{1+\eta_{k-1}}\right\rfloor\right\}$$ 進行第 k 代配對

加入限制式，若 $Z_k>10000000$，則直接算此種族不會滅種

- 步驟三：若 $Z_n>0$，則算此種族不會滅種

- 步驟四：重複步驟一到三，共做模擬次數(sim)次，計算模擬滅種機率 $\hat{\mathrm{P}}_{ext}=1-\dfrac{\text{種族不滅次數}}{\text{總模擬次數}}$

4.1.2 模擬實驗 1 數據分析(此部分資料放置於附錄)

模擬實驗 1-1

$n = 50$

$N_0 = 25, 50$

$\lambda = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5$

$a = 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 2$

$b = 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 2$

$sim = 500$

$c = 0.1, d = 0.9$ 生成 α_n 從 $\mathrm{Beta}(0.1, 0.9)$，$E(\alpha_k) = 0.1\ \forall k = 0, \ldots, n-1$

圖 4-1:模擬實驗 1-1 a=0.5

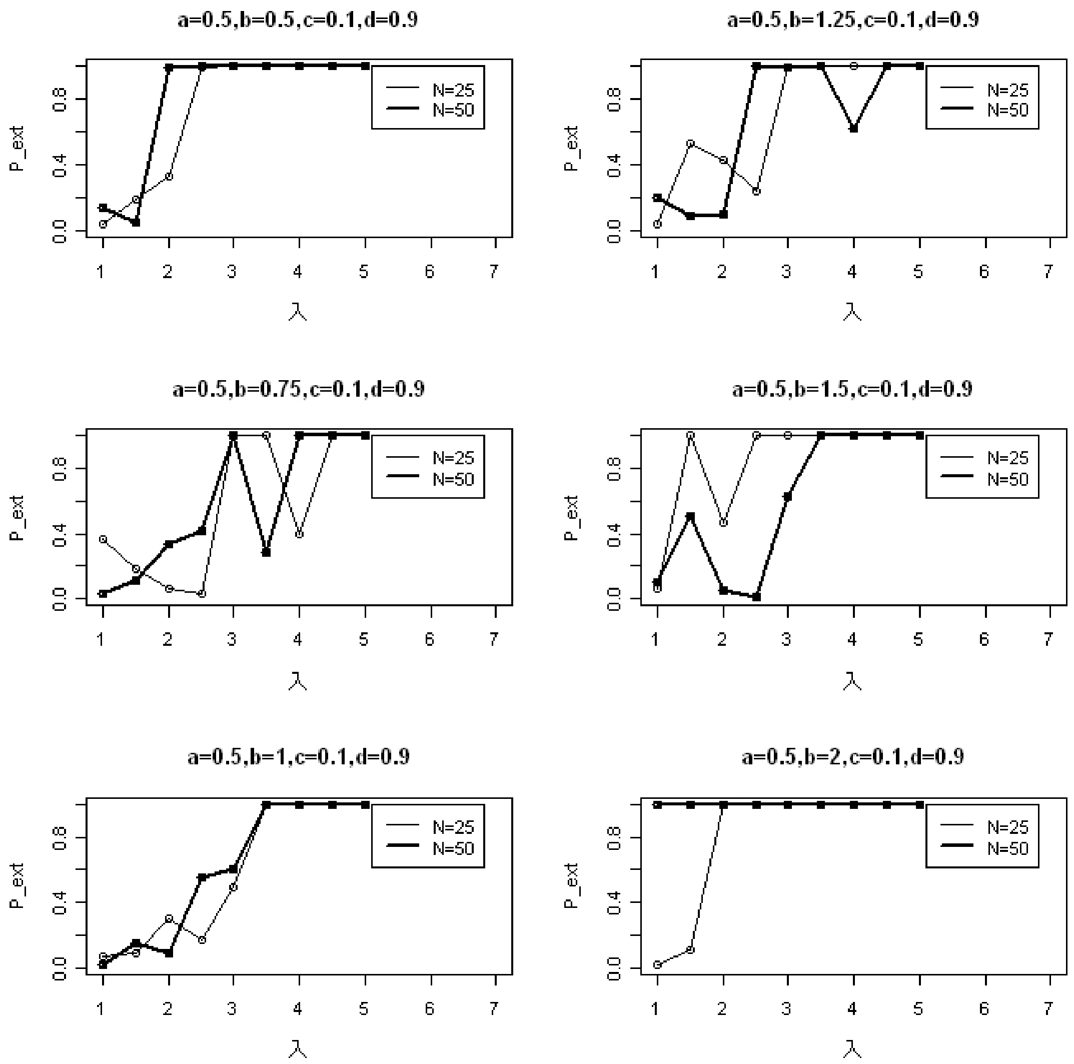


圖 4-2:模擬實驗 1-1 a=0.75

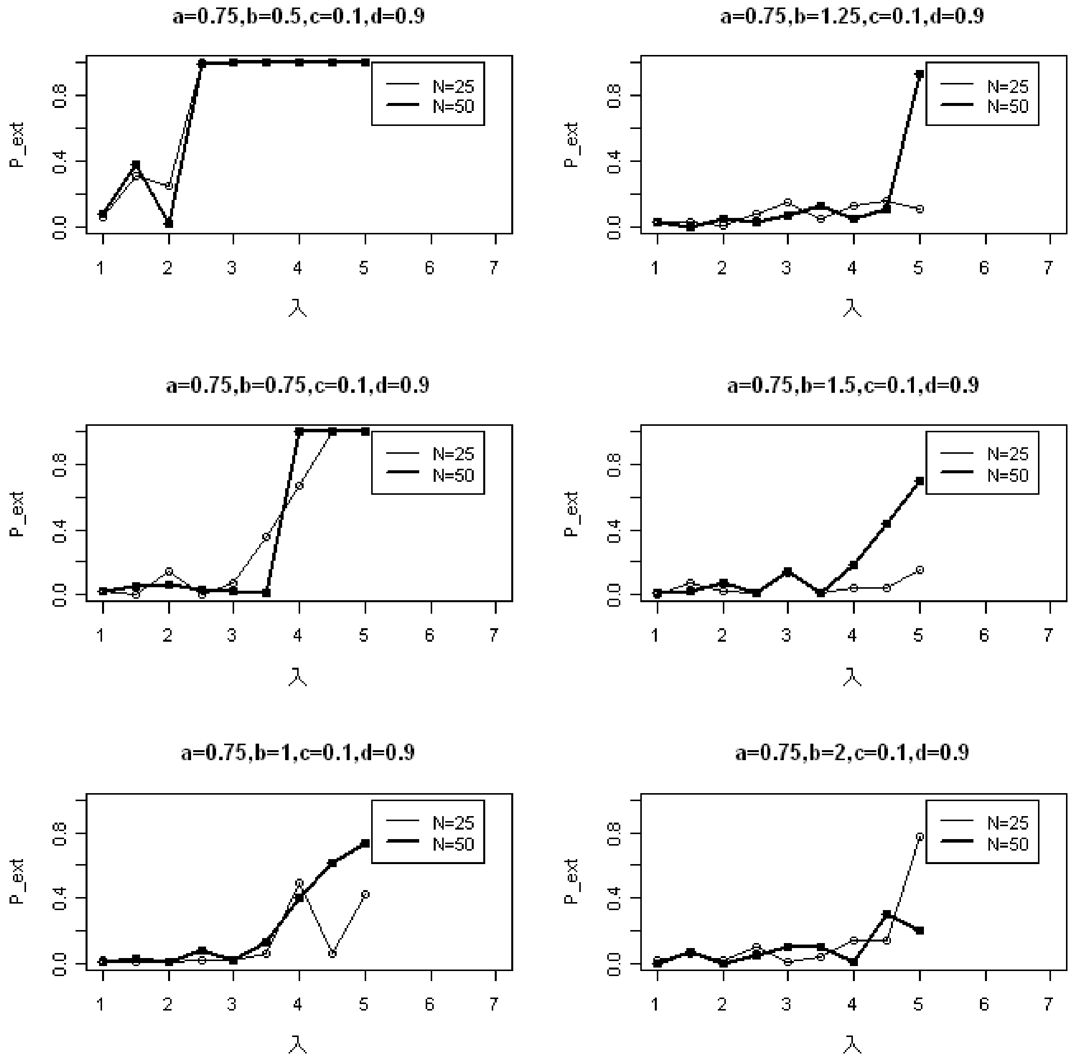


圖 4-3:模擬實驗 1-1 a=1.0

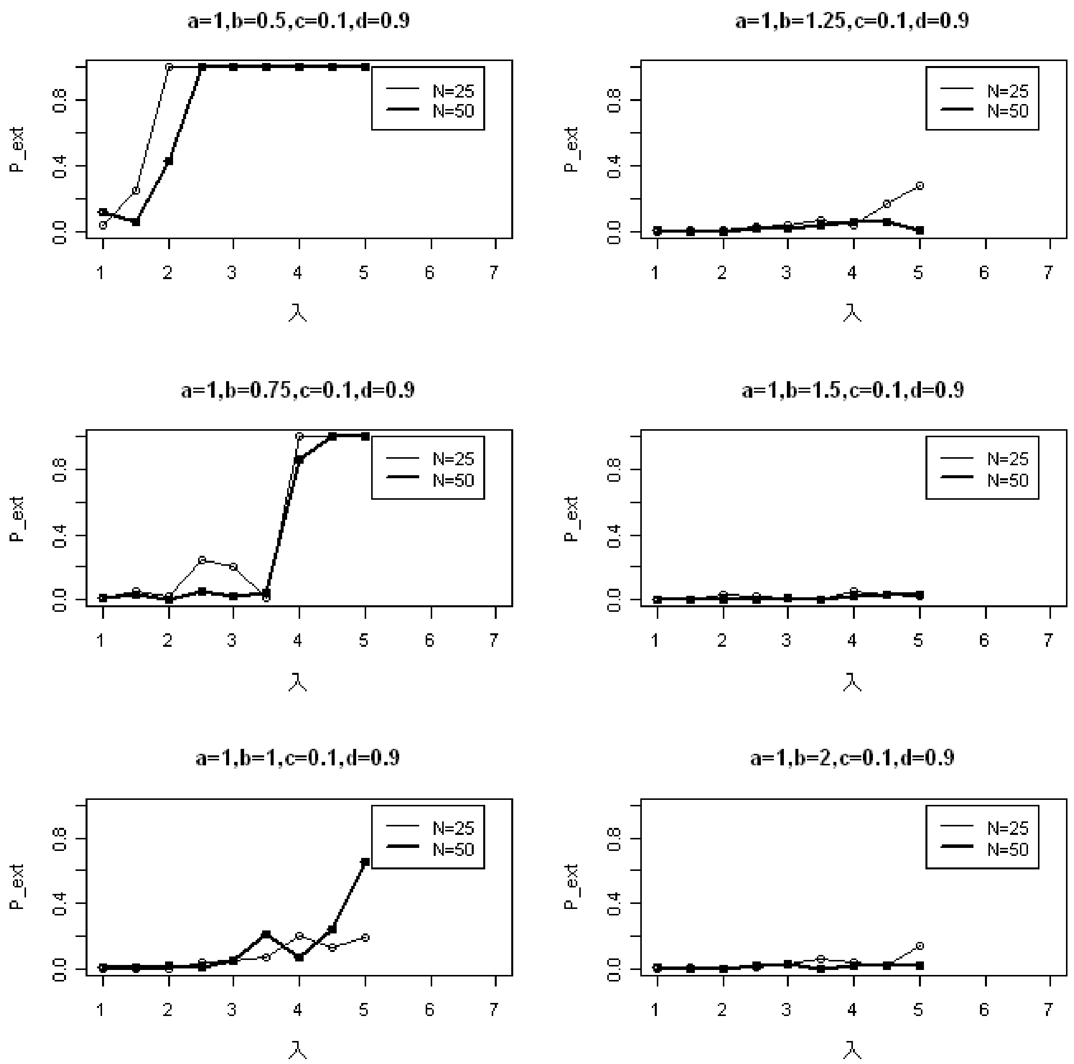


圖 4-4:模擬實驗 1-1 a=1.25

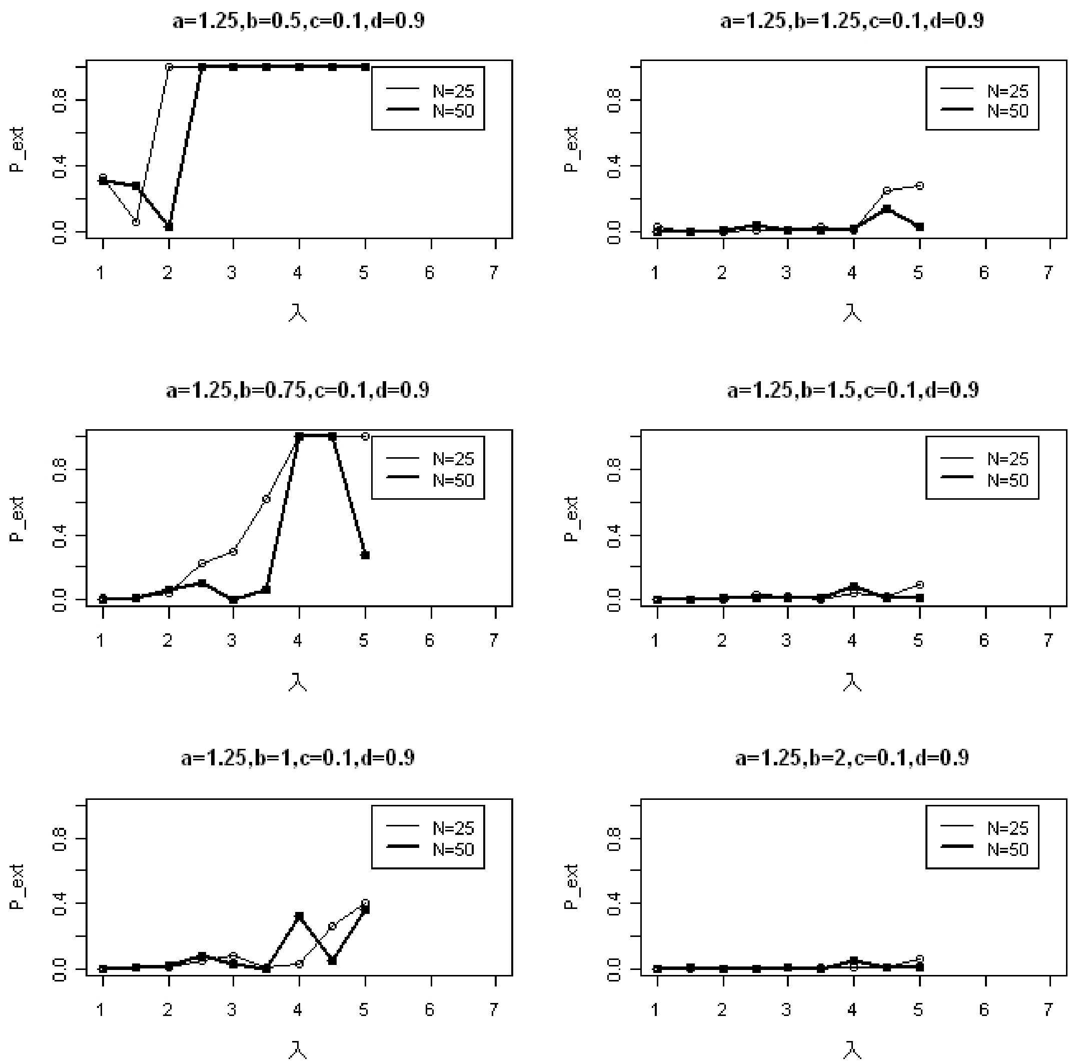


圖 4-5:模擬實驗 1-1 a=1.5

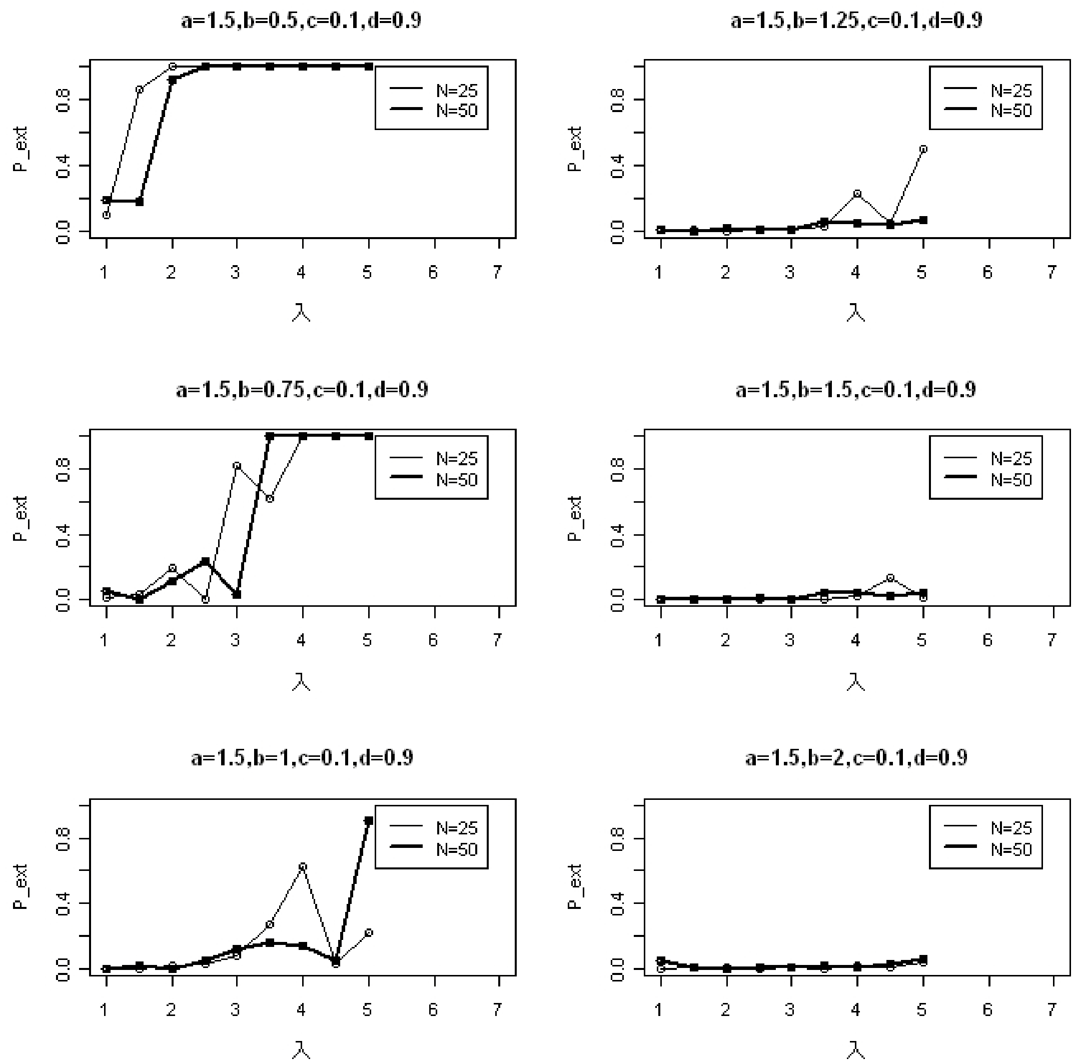
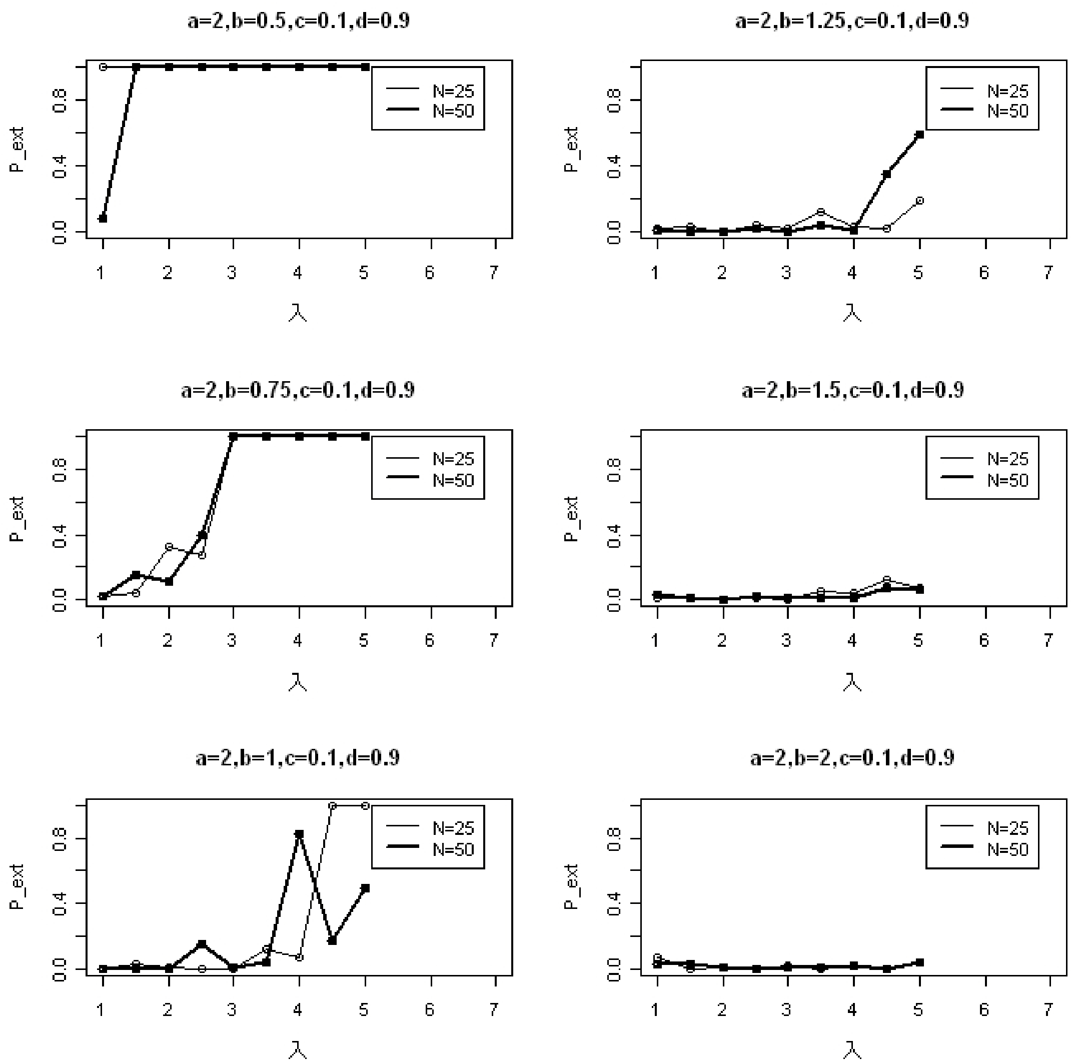


圖 4-6:模擬實驗 1-1 a=2.0



模擬實驗 1-1：推論

觀察圖 4-1 至圖 4-6 可發現下列情形：

現象一：

當λ大於一定程度時，將導致族群滅種，當環境壞到一定程度，將使此生物族群無法繼續繁衍。λ小於一定程度則滅種機率越小，但是在範圍內則有較易導致滅種的λ而這較易導致滅種的λ則跟參數a,b,c,d,Z_0有關。

現象二：

a 固定之下，b 上升則減種機率越小。

假設某一代$Z_k = i \in N$，$\lambda = \lambda_0, \alpha$已知，$E(\theta \mid \alpha) = \dfrac{a(1-\alpha)}{a+b}$

$$E(F_{k+1} \mid \theta = \frac{a}{a+b}, Z_k = i, \alpha) = \frac{a}{b} E(E_{k+1} \mid \theta = \frac{a}{a+b}, Z_k = i, \alpha) = \frac{a(1-\alpha)i}{a+b}$$

$$E(L_{\eta_k}(F_{k+1,} M_{k+1}) \mid \theta = \frac{a}{a+b}, Z_k = i, \alpha) \approx L_{\eta_k}(E(F_{k+1} \mid \theta = \frac{a(1-\alpha)}{a+b}, Z_k = i, \alpha), E(E_{k+1} \mid \theta = \frac{a(1-\alpha)}{a+b}, Z_k = i, \alpha))$$
$$\approx \min\left\{ \frac{a(1-\alpha)i}{a+b}, \left\lfloor \frac{3b(1-\alpha)i\eta}{(a+b)(1+\eta)} \right\rfloor \right\}$$

考慮容易導致滅種的情形，當η過小時，

$$E(L_{\eta_k}(F_{k+1,} M_{k+1}) \mid \theta = \frac{a(1-\alpha)}{a+b}, Z_k = i, \alpha) \approx \left\lfloor \frac{3b(1-\alpha)i\eta}{(a+b)(1+\eta)} \right\rfloor$$

下一代的平均配對數會隨b遞增。

模擬實驗 1-2 固定 $\underset{\sim}{\alpha}_n$

$n = 50$

$\mathrm{N}_0 = 25, 50$

$\lambda = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5$

$a = 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 2$

$b = 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 2$

$sim = 500$

$\alpha_k = 0.1,\ \forall k = 0, \ldots, n-1$

圖 4-7:實驗 1-2 固定 $\alpha_k = 0.1,\ \forall k = 0, \ldots, n-1$ a=0.5

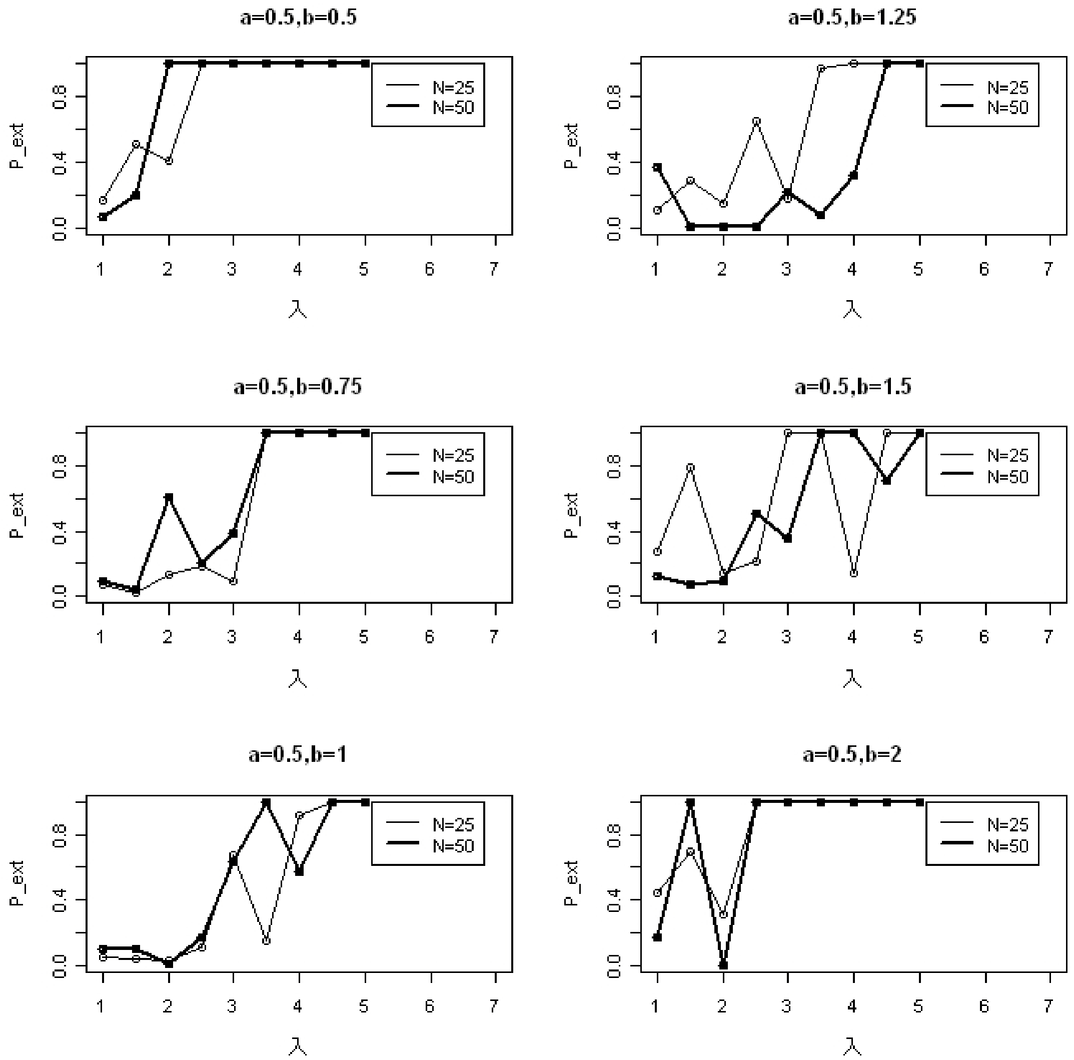


圖 4-8:模擬實驗 1-2 固定 $\alpha_k = 0.1,\ \forall k = 0,\dots,n-1$ a=0.75

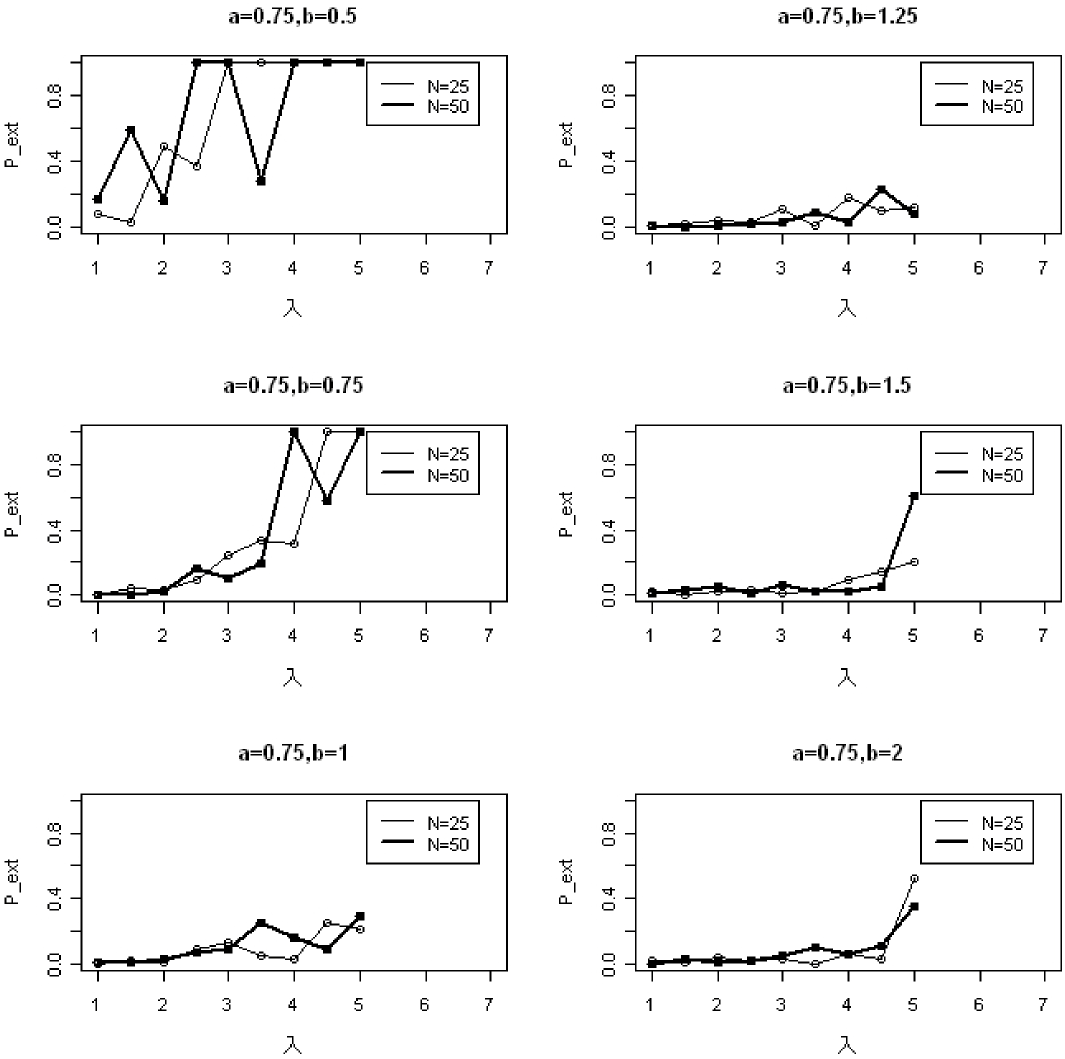


圖 4-9:模擬實驗 1-2 固定 $\alpha_k = 0.1,\ \forall k = 0,\ldots,n-1$ a=1.0

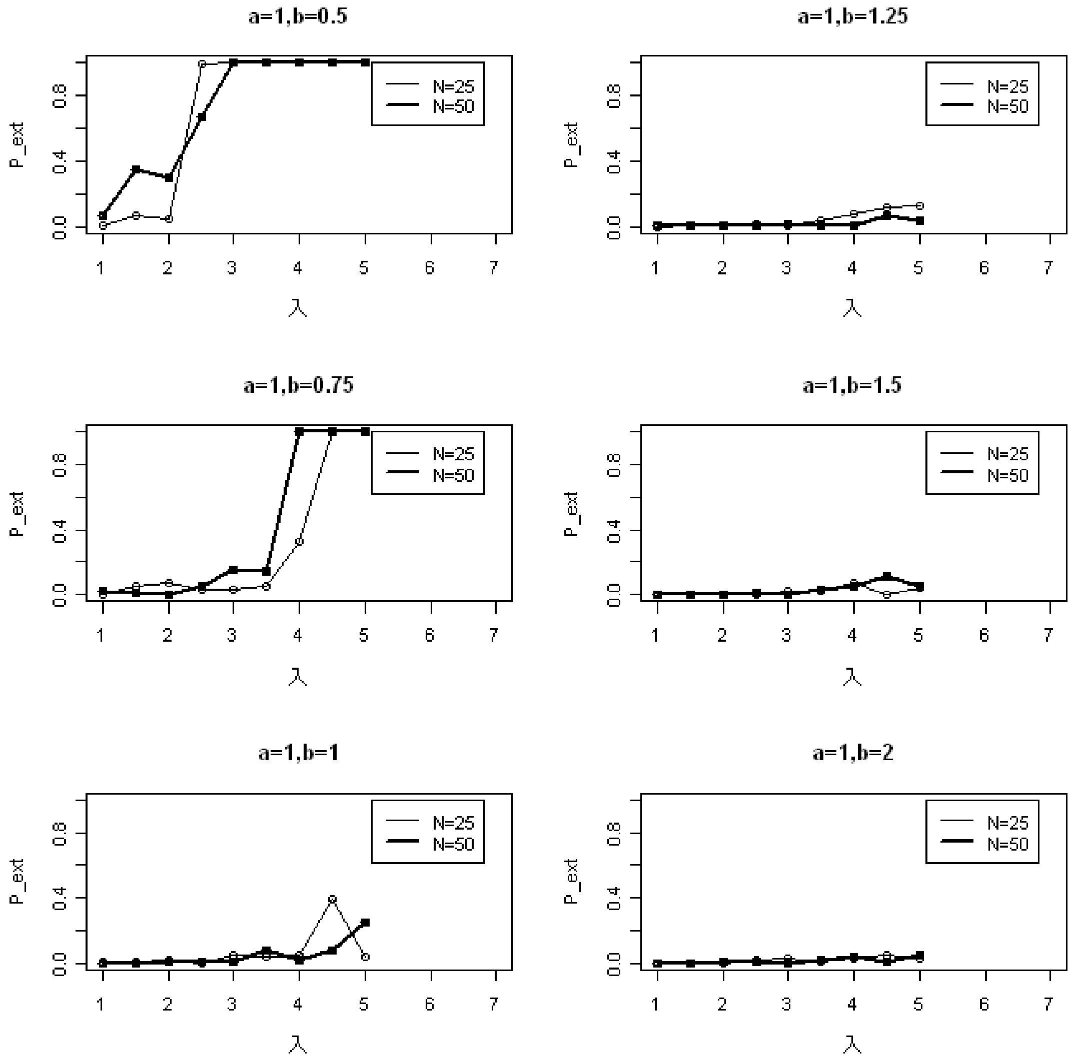


圖 4-10:模擬實驗 1-2 固定 $\alpha_k = 0.1, \ \forall k = 0,\ldots,n-1$ a=1.25

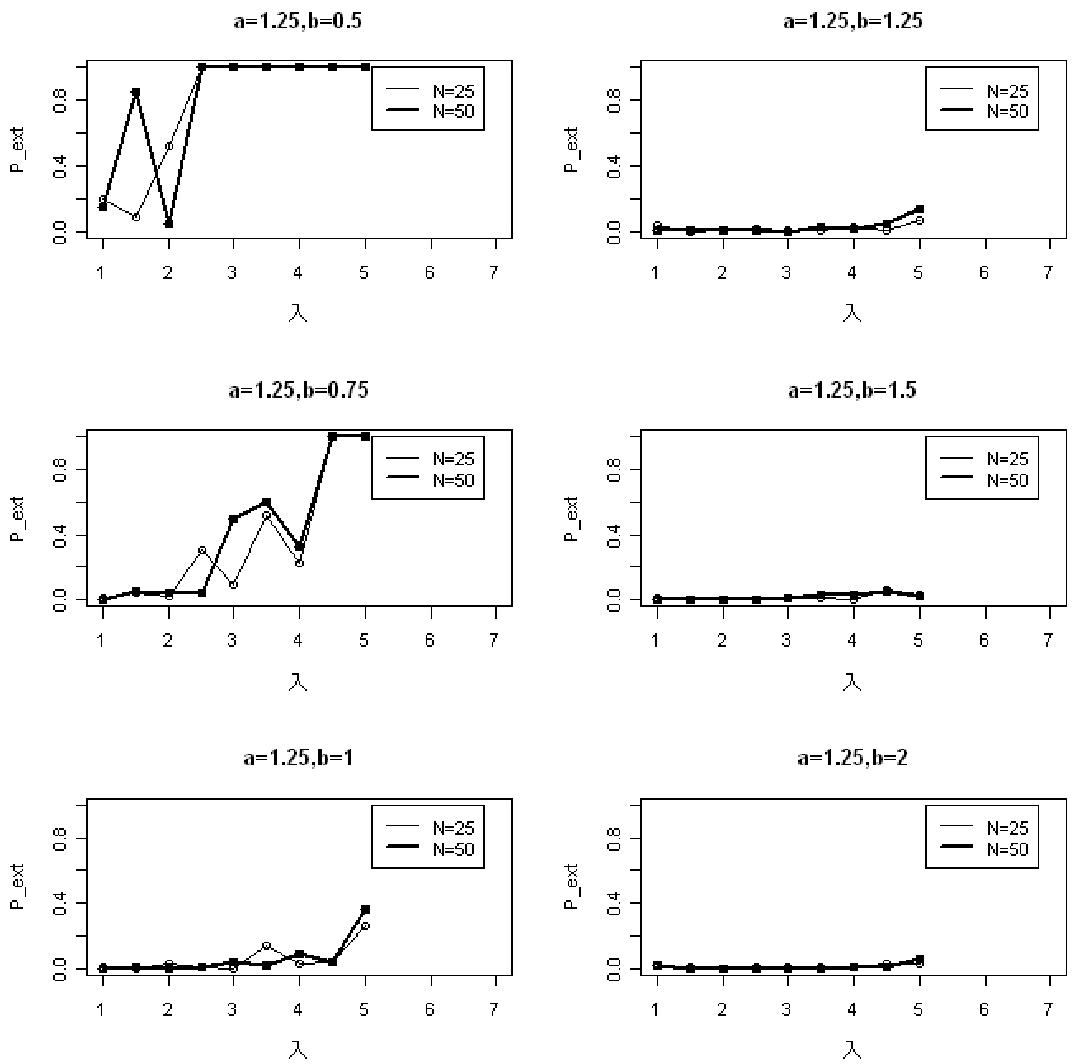


圖 4-11:模擬實驗 1-2 固定 $\alpha_k = 0.1,\ \forall k = 0,\ldots,n-1$ a=1.5

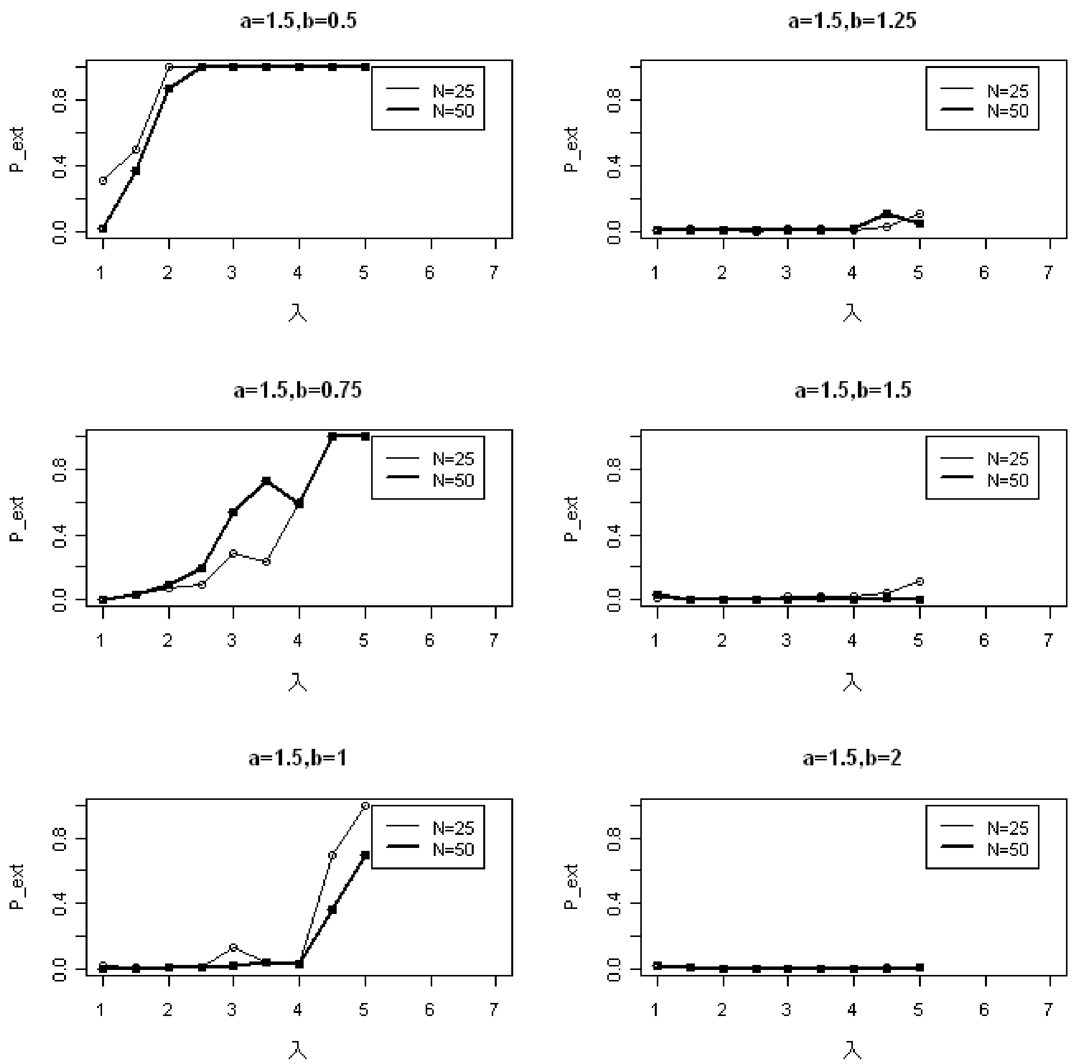
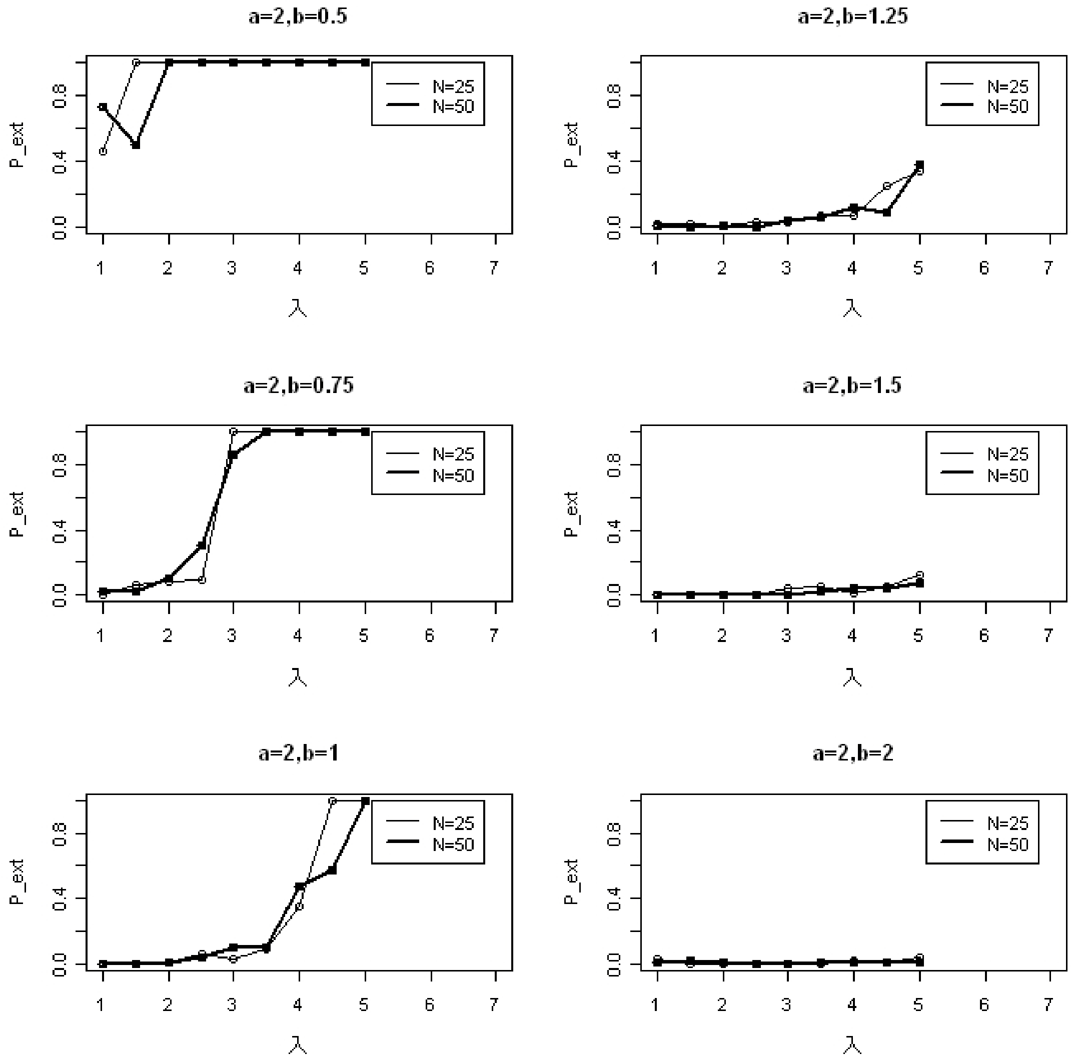


圖 4-12:模擬實驗 1-2 固定 $\alpha_k = 0.1,\ \forall k = 0,\dots,n-1$ a=2.0



模擬實驗 1-2 推論

觀察圖 4-7 至圖 4-12 可發現下列情形：

現象一：

當 λ 大於一定程度時，將導致族群滅種，當環境壞到一定程度，將無法使此生物族群繼續繁衍。λ 小於一定程度則滅種機率越小，但是在範圍內則有較易導致滅種的 λ，而這較易導致滅種的 λ 則跟參數 a,b,Z_0 有關。

現象二：

a 固定之下，b 上升則滅種機率越小。此部分同 4.2.2

模擬實驗 1-3 固定 $\alpha=0.1, a=0.5$ 之下，固定其他變數

實驗組：

$$
\begin{aligned}
&n=50\\
&N_0=25\\
&\lambda=1,1.5,2,2.5,3,3.5,4,4.5,5\\
&a=0.5\\
&b=0.5,0.75,1,1.25,1.5,2\\
&sim=500\\
&\alpha_k=0.1,\ \forall k=0,\dots,n-1
\end{aligned}
$$

對照組 1：固定變數 $\eta_k=\dfrac{1}{\lambda},k=0,\dots,n-1$

對照組 2：固定變數 $\theta_k=\dfrac{a}{a+b},k=0,\dots,n-1$

對照組 3：固定變數 $\eta_k=\dfrac{1}{\lambda},\theta_k=\dfrac{a}{a+b},k=0,\dots,n-1$

圖 4-13：對照組 1 固定變數$\eta_k = \frac{1}{\lambda}, k = 0, \ldots, n-1$

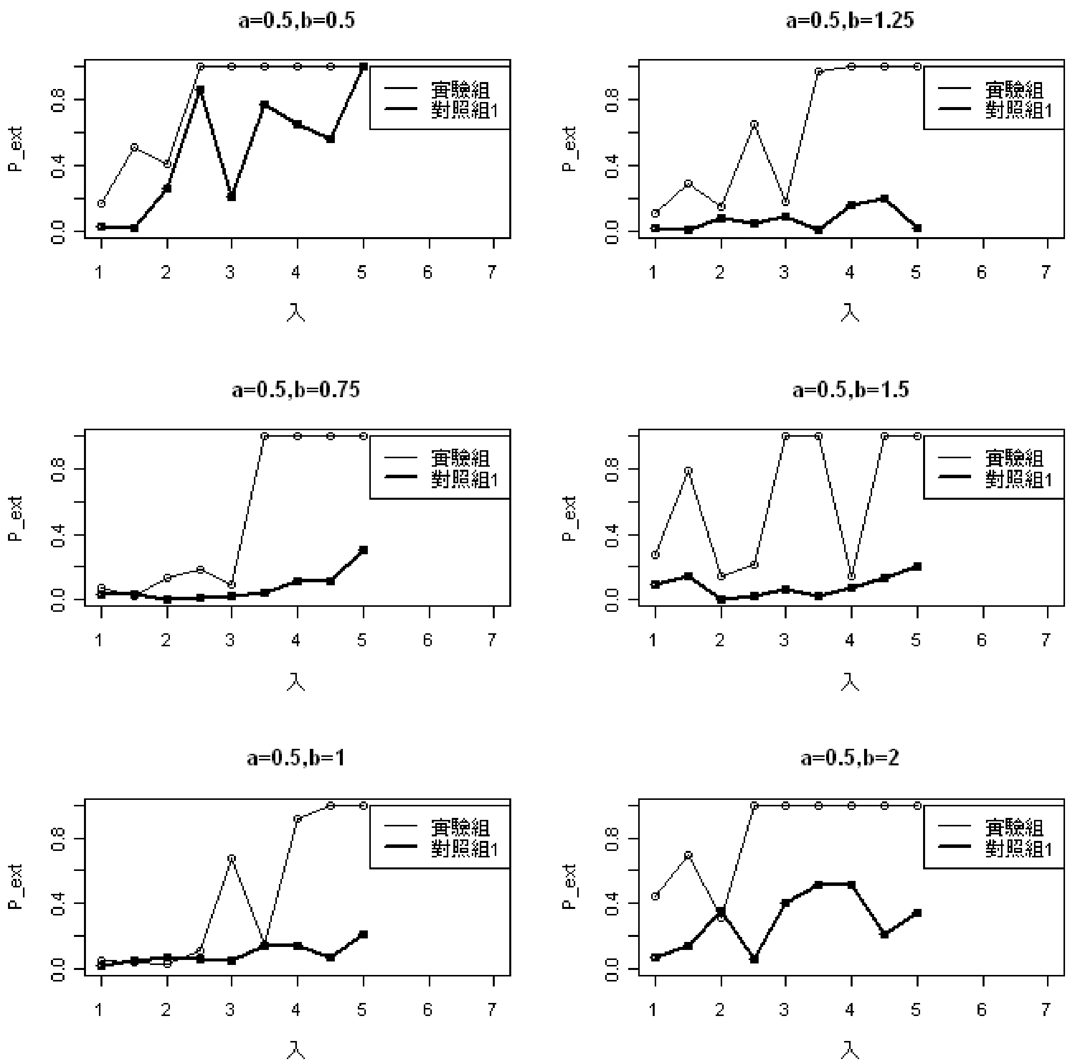


圖 4-14：對照組 2 固定變數$\theta_k = \dfrac{a}{a+b}, k = 0,\ldots,n-1$

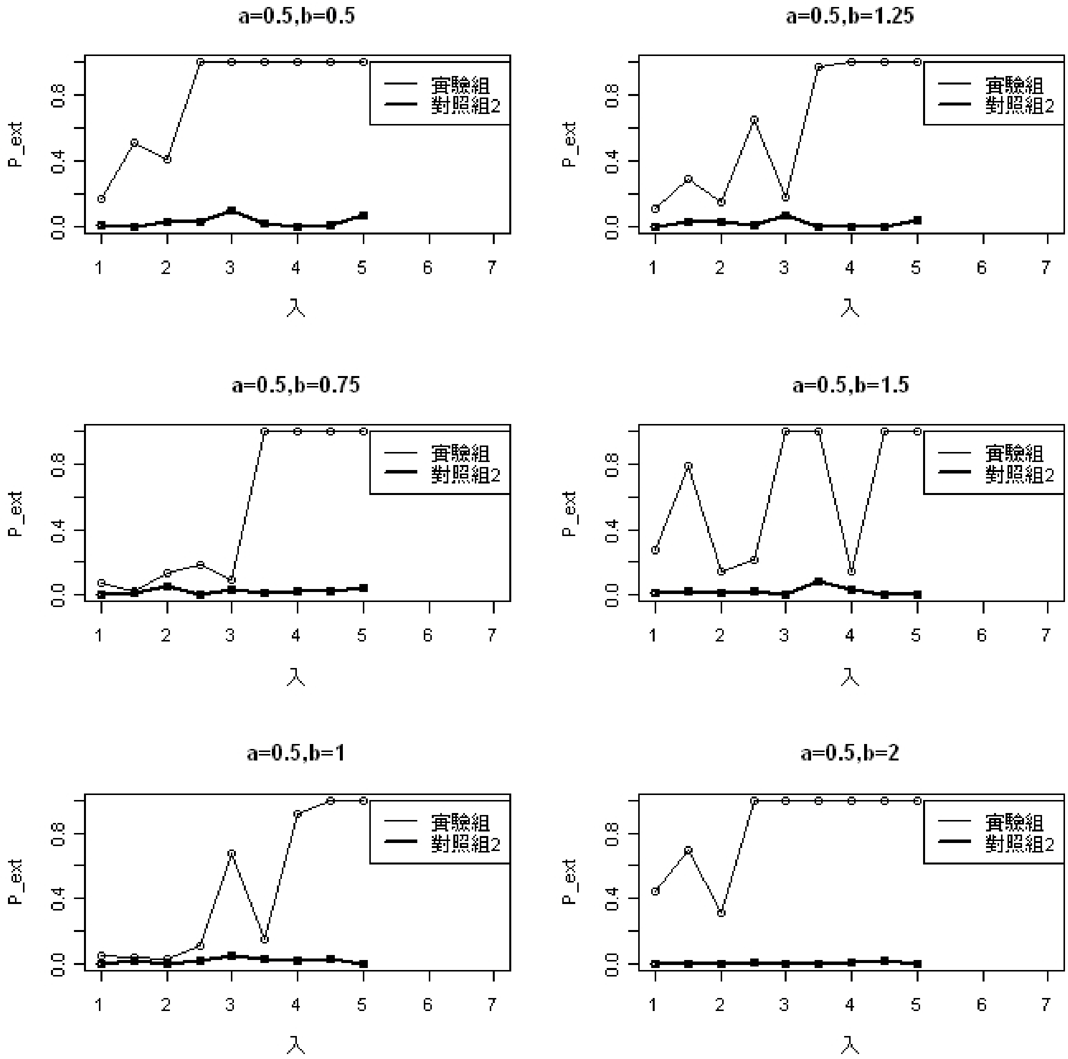
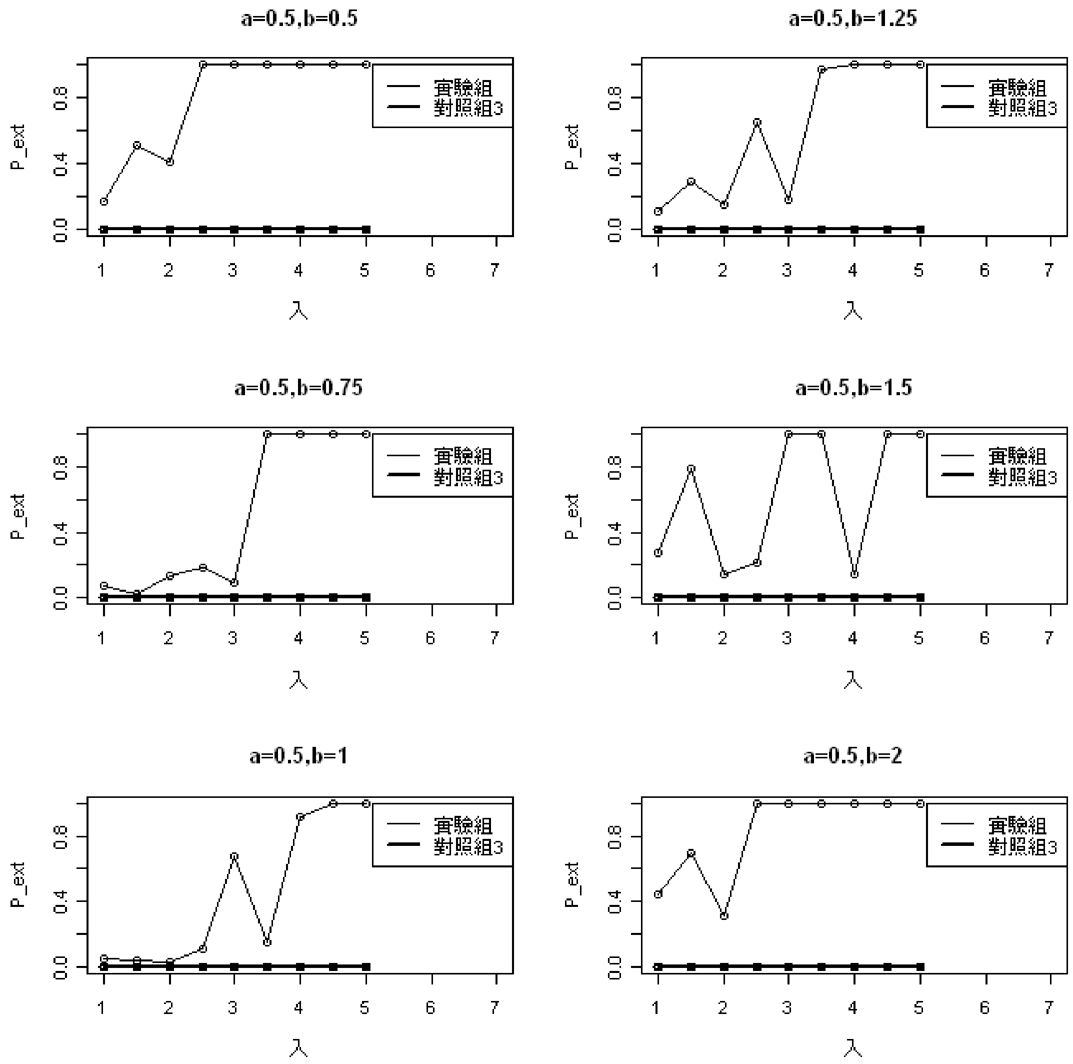


圖 4-15：對照組 3 固定變數$\eta_k = \dfrac{1}{\lambda}, \theta_k = \dfrac{a}{a+b}, k = 0, \ldots, n-1$



模擬實驗 1-3 推論

在圖 4-13 中，我們可發現相同條件下對照組一的滅種機率小於實驗組的滅種機率，而在圖 4-13 a=0.5,b=0.5 的實驗組一滅種機率起伏較大，是因為 Beta(a,b)呈現雙峰分配，所以當生男或生女的機率極低時，較易滅種。

在圖 4-14 中，我們可發現相同條件下對照組二的滅種機率小於實驗組的滅種機率，且固定 $\theta_k = \dfrac{a}{a+b}, k = 0,\ldots,n-1$，滅種機率的變化較圖 4-13 小，因此在模擬實驗 1：實驗 1-1、1-2 造成現象一的主因是 $\underset{\sim}{\theta}_n$ 的隨機性。

在圖 4-15 中，我們可發現對照組三的滅種機率近乎於 0。那是因為當 $\eta_k = \dfrac{1}{\lambda}, k = 0,\ldots,n-1$ 和 $\theta_k = \dfrac{a}{a+b}, k = 0,\ldots,n-1$

設第 k 代有 i 對配對成功：$Z_k = i$

$$E(F_{k+1} \mid \theta, Z_k = i) = 9\theta i, E(M_{k+1} \mid \theta, Z_k = i) = 9(1-\theta)i$$

$$E(Z_{k+1} \mid \theta, Z_k = i) \approx \min\left\{ E(F_{k+1} \mid \theta, Z_k = i), \left\lfloor \frac{3\eta E(M_{k+1} \mid \theta, Z_k = i)}{1+\eta} \right\rfloor \right\} = \min\left\{ 9\theta i, \frac{27(1-\theta)i\eta}{1+\eta} \right\}$$

將 $\theta = \dfrac{a}{a+b}$, $\eta = \dfrac{1}{\lambda}$ 代入

討論 $\dfrac{E(Z_1 \mid \theta, Z_0 = N_0)}{Z_0}$ 是否大於一，若大於一則此種族將持續繁衍擴張，而在模擬實驗 1-3 數據帶入後，$\dfrac{E(Z_1 \mid \theta, Z_0 = N_0)}{Z_0}$ 的值皆大於一，所以導致滅種機率近乎於 0。在模擬實驗 1-3 中當我們固定其中一個環境變數後，消除環境變數的隨機性後，滅種機率隨著降低，這是符合我們所期待的。

4.2 模擬實驗 2

4.2.1 模擬實驗 2 流程設計

跟模擬實驗一不同的地方在於，模擬實驗二將θ視為固定值，不管環境如何影響生男生或女生的比率固定。利用$\mathrm{Exp}(\lambda)$的五個分位數（十分位、三十分位、五十分位、七十分位，九十分位）去模擬η的值，並經由排列組合去模擬環境的各種組合，只模擬$n=5$的情形。以下為模擬實驗二流程：

利用 R 程式設計模擬實驗函數可輸入值：

N_0:初始配對數

λ:影響$\underset{\sim}{\eta}_n$=$(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-1})$分配之參數

n:模擬兩性族群繁衍世代數

sim:模擬次數

$$\theta_k=\theta, \forall k=0,\ldots,n-1$$
$$\alpha_k=0.1, \forall k=0,\ldots,n-1$$

◆ 步驟一：生成$\underset{\sim}{\eta}_5=(\eta_0,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$

將$EXP(\lambda)$的五個分位數（十分位、三十分位、五十分位、七十分位，九十分位），進行不重複排列組合，得到一組$\underset{\sim}{\eta}_5=(\eta_0,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$。

◆ 步驟二：生成第一代

生成$\theta_0=\theta$，生成$(f_{1,i;\theta}=k,\ \mathrm{m}_{1,i;\theta}=j)$從下列分配

$$P(f_{1,i;\theta_0}=k,\ \mathrm{m}_{1,i;\theta_0}=j)=\frac{10!}{k!\,j!(10-k-j)}[(0.9)\theta_0]^k[(0.9)(1-\theta_0)]^j(0.1)^{10-k-j}$$
$$0\le k+j\le 10, i=1,2,\ldots Z_0$$

$(F_1,M_1)=\sum_{i=1}^{Z_0}(f_{1,i;\theta},m_{1,i;\theta})$產生第一代的親代雌性及雄性個體數

$Z_1=L_{\eta_0}(F_1,M_1)=\min\left\{F_1,\lfloor 3M_1\eta_0(1+\eta_0)^{-1}\rfloor\right\}$進行第一代配對

- 步驟三：生成第k代，$k=2,3,\ldots.,n$

生成$\theta_k=\theta,\eta_k$從$\mathrm{Exp}(\lambda)$，生成$(f_{k,i;\theta}=k,\ \mathrm{m}_{k,i;\theta}=j)$從下列分配

$$P(f_{k,i;\theta_{k-1}}=k,\ \mathrm{m}_{k,i;\theta_{k-1}}=j)=\frac{10!}{k!\,j!(10-k-j)}[(0.9)\theta_{k-1}]^k[(0.9)(1-\theta_{k-1})]^j(0.1)^{10-k-j}$$
$$0\le k+j\le 10, i=1,2,\ldots Z_{k-1}$$

$(F_k,M_k)=\sum_{i=1}^{Z_{k-1}}(f_{k,i;\theta_{k-1}},m_{k,i;\theta_{k-1}})$產生第k代的親代雌性及雄性個體數

$Z_k=L_{\eta_{k-1}}(F_k,M_k)=\min\left\{F_k,\lfloor 3M_k\eta_{k-1}(1+\eta_{k-1})^{-1}\rfloor\right\}$進行第k代配對

加入限制式，若$Z_k>10000000$，則直接算此種族不會滅種

- 步驟四：若$Z_n>0$，則算此種族不會滅種

- 步驟五：重複步驟一到四，做模擬次數(sim)次計算模擬的滅種機率$\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{ext}}=1-\frac{\text{種族不滅次數}}{\text{模擬次數}}$

- 步驟六：重複步驟一到五 5!=120 次，將所有五個分位數的所有不重複排列組合考慮進去。

- 步驟七：將步驟六得到的 120 組滅種機率$\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{ext}}=1-\frac{\text{種族不滅次數}}{\text{模擬次數}}$取平均值$\bar{P}_{ext}$。

4.2.2 模擬實驗 2 數據分析(此部分資料放置於附錄)

$n = 5$

$\mathrm{N}_0 = 5, 10, 25$

$\lambda = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5$

$\theta = 0.25, 0.50, 0.75$

$sim = 1000$

模擬實驗 2-1:當初代配對數 Z_0 相同時，帶入不同的 θ

圖 4-16:模擬實驗 2-1 $Z_0 = 5$

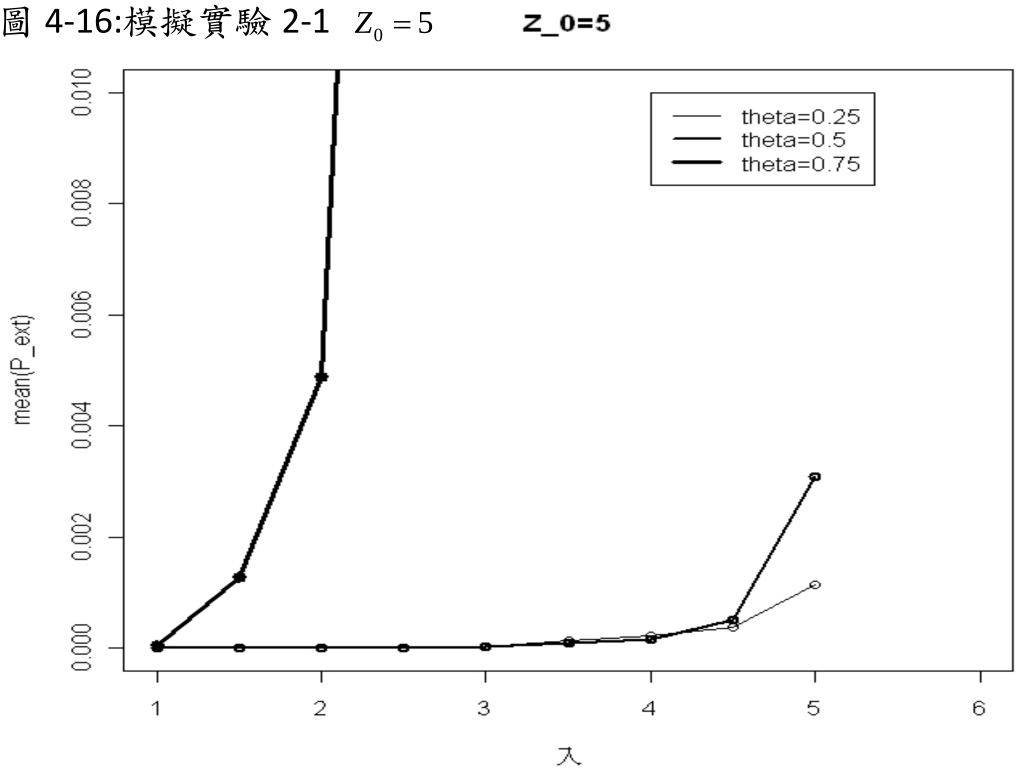


圖 4-17:模擬實驗 2-1 $Z_0 = 10$

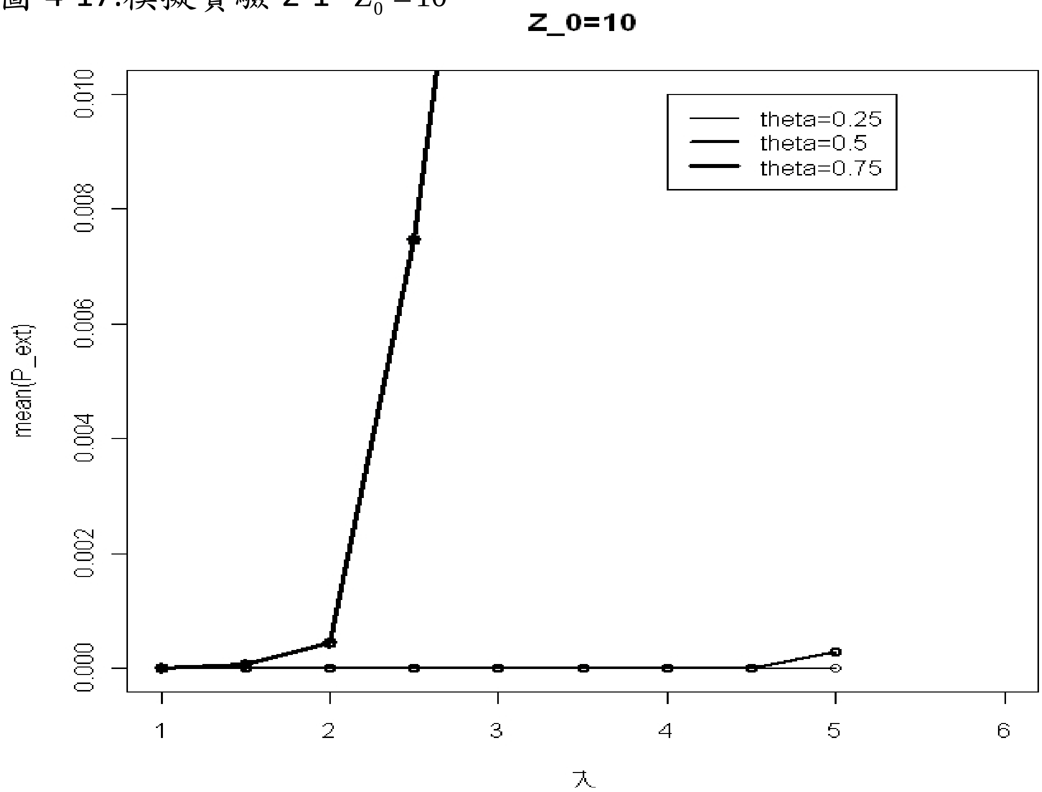
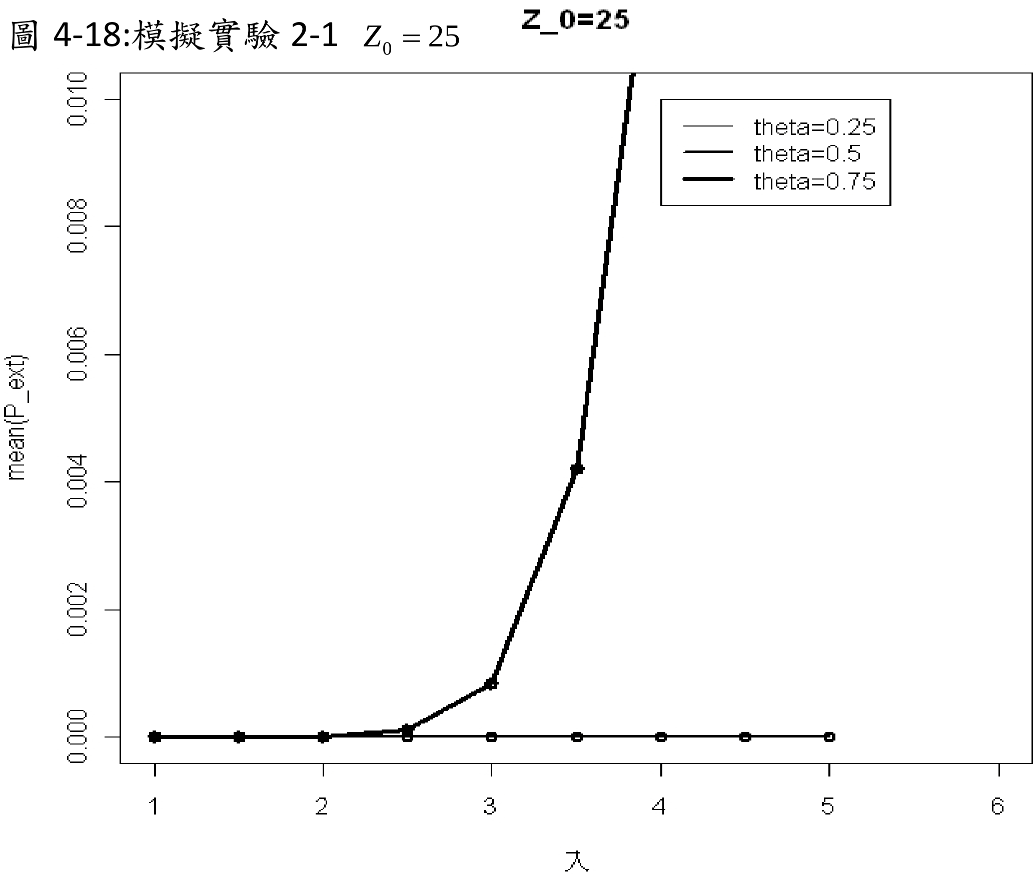


圖 4-18:模擬實驗 2-1 $Z_0 = 25$



模擬實驗 2-2:當生女生的機率值θ相同時，帶入不同的初代配對數Z_0

圖 4-19:模擬實驗 2-2 $\theta = 0.25$

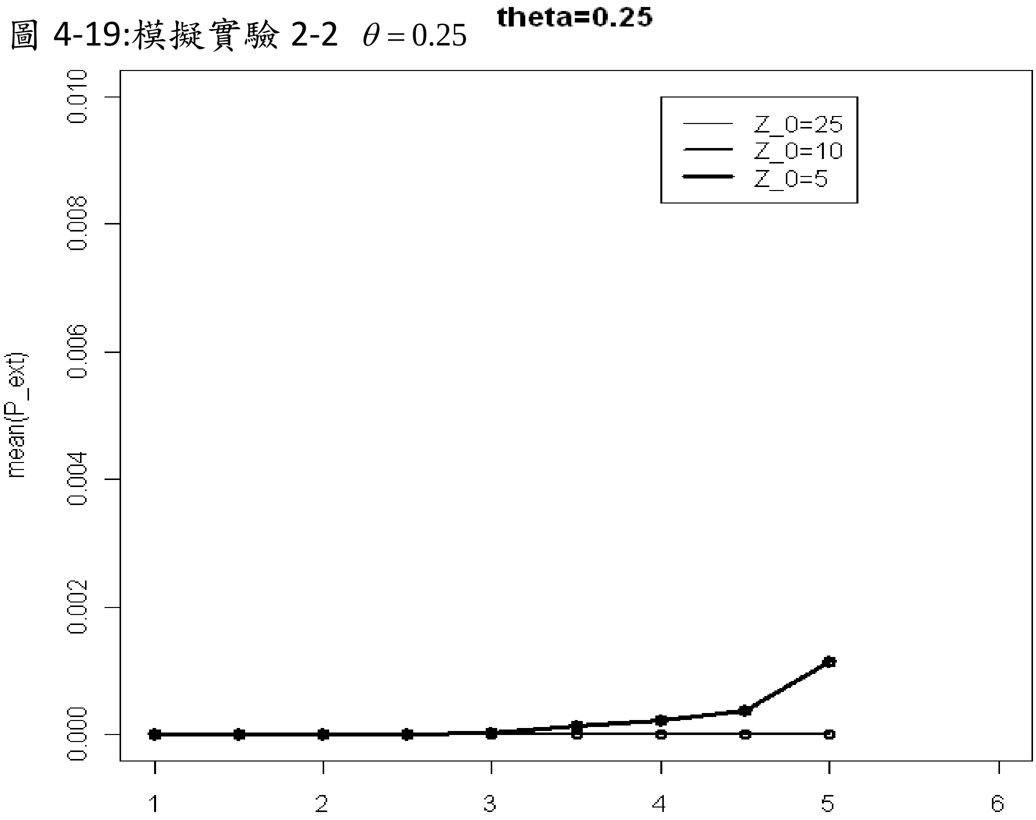


圖 4-20:模擬實驗 2-2 $\theta = 0.5$

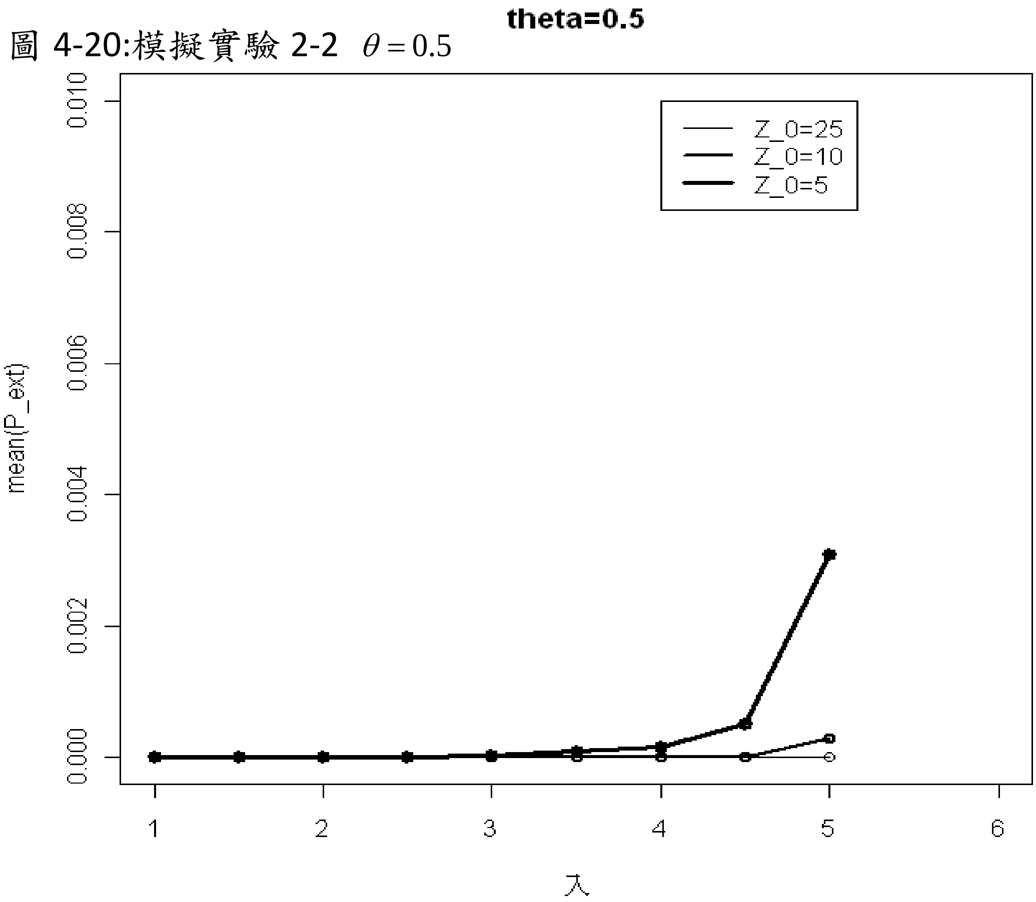
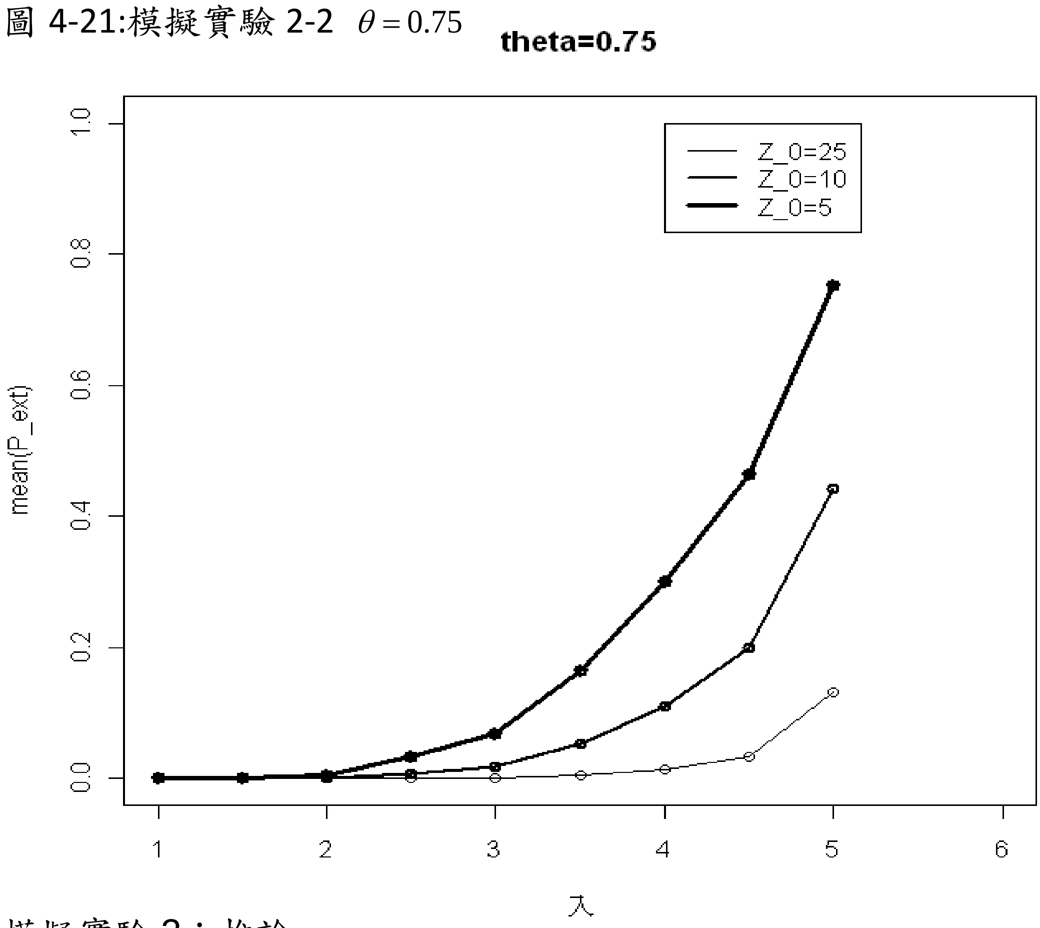


圖 4-21:模擬實驗 2-2 $\theta=0.75$



模擬實驗 2：推論

假設某一代 $Z_k=i\in N$，$\lambda=\lambda_0$

情況一：$\theta=0.25$

$$E(F_{k+1}\mid\theta=0.25,Z_k=i)=\frac{1}{3}E(M_{k+1}\mid\theta=0.25,Z_k=i)=2.5i$$

$$E(L_{\eta_k}(F_{k+1},M_{k+1})\mid\theta=0.25,Z_k=i,\eta_k=\eta)\approx L_\eta(E(F_{k+1}\mid\theta=0.25,Z_k=i),E(M_{k+1}\mid\theta=0.25,Z_k=i))$$
$$\approx\min\left\{2.5i,\left\lfloor\frac{22.5i\eta}{1+\eta}\right\rfloor\right\}$$

情況二：$\theta=0.5$

$$E(F_{k+1}\mid\theta=0.5,Z_k=i)=E(M_{k+1}\mid\theta=0.5,Z_k=i)=5i$$

$$E(L_{\eta_k}(F_{k+1,}M_{k+1})\,|\,\theta=0.5,Z_k=i,\eta_k=\eta)\approx L_\eta(E(F_{k+1}\,|\,\theta=0.5,Z_k=i),E(M_{k+1}\,|\,\theta=0.5,Z_k=i))$$

$$\approx\min\left\{5i,\left\lfloor\frac{15i\eta}{1+\eta}\right\rfloor\right\}$$

情況三：$\theta=0.75$

$$E(F_{k+1}\,|\,\theta=0.75,Z_k=i)=3E(M_{k+1}\,|\,\theta=0.75,Z_k=i)=7.5i$$

$$E(L_{\eta_k}(F_{k+1,}M_{k+1})\,|\,\theta=0.75,Z_k=i,\eta_k=\eta)\approx L_\eta(E(F_{k+1}\,|\,\theta=0.75,Z_k=i),E(E_{k+1}\,|\,\theta=0.75,Z_k=i))$$

$$\approx\min\left\{7.5i,\left\lfloor\frac{7.5i\eta}{1+\eta}\right\rfloor\right\}$$

$$\approx\left\lfloor\frac{7.5i\eta}{1+\eta}\right\rfloor\qquad\left(\because\frac{\eta}{1+\eta}<1,\forall\eta>0\right)$$

當η夠小時，θ愈大下一代的平均配對數越少，導致滅種機率上升。由圖 4-16、圖 4-17、圖 4-18，當初代配對數Z_0相同時，帶入不同的θ，相同λ之下，θ愈大則滅種機率較高。由圖 4-19、圖 4-20、圖 4-21，則看出Z_0越大，則減種機率越低。且滅種機率隨λ遞增而遞增，符合預期。

第五章　結論

在本篇論文中，我們首先透過理論證明得到在特定條件下，滅種機率小於一，並建立簡單兩性繁衍過程的模型在隨機環境下，並模擬其滅種機率機率，討論一開始所給定的參數和最後滅種機率的關係；最後，再將理論與模擬結果做一個比較。

理論方面：雖然可得知在特定條件下，此兩性繁衍過程將不會滅種，但是在執行多維度的積分方面，有一定的難度，所以我們改用有限的世代繁衍之後，去估計滅種機率與各環境參數的關係。

模擬實驗：在模擬實驗 1 當中的各隨機環境變數加乘的影響，並非如我們所預期的滅種機率應該為λ的遞增函數，反而是在λ小於一定程度範圍內有較易導致滅種的λ，滅種機率並非我們事先猜想是λ遞增函數，而是一個複雜的關係式，所以跟其他參數也會有互相影響。在模擬實驗 2 中，雖然我們是用五個分位數去跑模擬，沒辦法代表指數分配下的隨機性，但是也有一定程度上代表指數分配，更簡化兩性族群繁衍模型，進而得到看出 z_0 越大，則滅種機率越低。且滅種機率隨λ遞增而遞增，符合預期。所以我們認為應該是環境因子的隨機性讓我們在模擬實驗一，滅種機率曲線呈現波浪起伏，而非像模擬實驗 2 的隨λ遞增。

參考文獻及附錄

參考文獻

[1] Ma, S. and Molina, M. (2009). Two-sex branching processes with offspring and mating in a random environment. J. Appl. Prob. 46, 993-1004.

[2]Agresti, A. (1975). On the extinction times of varying and random environment branching processes. J. Appl. Prob. 12, 39-46.

[3] Agresti, A. (1974). Bonds on the extinction time distribution of a branching process. Adv. Appl. Prob. 6. 322-335.

[4]Daley, D. J., Hull, D. M. and Taylor, J. M. (1986).Bisexual galton-watson branching processes with superadditive mating functions. J. Appl. Prob. 23, 585-600.

附錄：

表格 1:模擬實驗 1-1 $Z_0 = 25$

$Z_0 = 25, c$=0.1,d=0.9,n=50,sim=50,										
A	b	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=5)$
0.5	0.5	0.04	0.188	0.328	0.998	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	0.75	0.364	0.182	0.062	0.032	1.0	1.0	0.396	1.0	1.0
0.5	1	0.072	0.086	0.298	0.17	0.496	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	1.25	0.034	0.534	0.426	0.236	0.998	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	1.5	0.06	0.998	0.466	0.998	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	2	0.02	0.114	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.75	0.5	0.058	0.3.06	0.248	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.75	0.75	0.024	0.004	0.148	0.002	0.078	0.36	0.67	1.0	1.0
0.75	1	0.016	0.008	0.008	0.018	0.02	0.058	0.498	0.062	0.426
0.75	1.25	0.026	0.024	0.008	0.08	0.146	0.044	0.13	0.158	0.102
0.75	1.5	0.004	0.068	0.018	0.012	0.136	0.01	0.044	0.042	0.15
0.75	2	0.02	0.058	0.022	0.1	0.008	0.036	0.136	0.138	0.78
1	0.5	0.038	0.252	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1	0.75	0.01	0.056	0.018	0.246	0.208	0.008	1.0	1.0	1.0
1	1	0.002	0.004	0.0	0.038	0.046	0.068	0.196	0.126	0.194
1	1.25	0.0	0.002	0.004	0.022	0.032	0.064	0.036	0.166	0.274
1	1.5	0.0	0.004	0.028	0.026	0.014	0.006	0.054	0.028	0.024
1	2	0.004	0.006	0.0	0.008	0.032	0.058	0.044	0.018	0.144
1.25	0.5	0.328	0.054	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.25	0.75	0.014	0.008	0.044	0.224	0.298	0.622	0.998	1.0	1.0
1.25	1	0.0	0.008	0.008	0.05	0.078	0.008	0.034	0.258	0.402
1.25	1.25	0.026	0.0	0.0	0.004	0.008	0.028	0.006	0.246	0.282
1.25	1.5	0.002	0.002	0.0	0.034	0.026	0.002	0.038	0.026	0.092
1.25	2	0.004	0.0	0.002	0.004	0.01	0.01	0.012	0.008	0.062
1.5	0.5	0.1	0.866	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.5	0.75	0.01	0.03	0.192	0.002	0.818	0.622	1.0	1.0	1.0
1.5	1	0.0	0.0	0.02	0.034	0.084	0.27	0.628	0.03	0.222
1.5	1.25	0.008	0.01	0.0	0.006	0.002	0.026	0.23	0.05	0.502
1.5	1.5	0.002	0.0	0.002	0.006	0.0	0.002	0.018	0.136	0.016
1.5	2	0.004	0.006	0.006	0.0	0.006	0.002	0.02	0.008	0.04
2	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

2	0.75	0.022	0.042	0.324	0.274	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	1	0.002	0.026	0.008	0.004	0.002	0.116	0.074	1.0	1.0
2	1.25	0.018	0.024	0.0	0.036	0.02	0.112	0.028	0.018	0.184
2	1.5	0.008	0.014	0.006	0.01	0.002	0.048	0.046	0.126	0.078
2	2	0.07	0.002	0.01	0.002	0.024	0.002	0.024	0.002	0.036

表格 2:模擬實驗 1-1 $Z_0 = 50$

$Z_0 = 50, c$=0.1,d=0.9,n=50,sim=50,										
A	b	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=5)$
0.5	0.5	0.132	0.05	0.998	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	0.75	0.032	0.116	0.332	0.418	1.0	0.286	1.0	1.0	1.0
0.5	1	0.02	0.15	0.094	0.552	0.602	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	1.25	0.2	0.088	0.098	1.0	0.998	1.0	0.622	1.0	1.0
0.5	1.5	0.104	0.508	0.048	0.014	0.626	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.75	0.5	0.076	0.378	0.014	0.998	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.75	0.75	0.022	0.052	0.064	0.032	0.018	0.016	1.0	1.0	1.0
0.75	1	0.006	0.028	0.006	0.076	0.024	0.128	0.4	0.614	0.734
0.75	1.25	0.03	0.0	0.044	0.022	0.062	0.13	0.048	0.102	0.938
0.75	1.5	0.012	0.02	0.07	0.014	0.14	0.016	0.18	0.434	0.698
0.75	2	0.004	0.068	0.004	0.054	0.104	0.104	0.01	0.304	0.202
1	0.5	0.12	0.054	0.432	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1	0.75	0.012	0.032	0.006	0.052	0.026	0.042	0.862	1.0	1.0
1	1	0.006	0.014	0.022	0.01	0.054	0.212	0.07	0.244	0.652
1	1.25	0.01	0.0	0.0	0.012	0.014	0.034	0.056	0.052	0.004
1	1.5	0.0	0.002	0.0	0.002	0.016	0.006	0.02	0.032	0.03
1	2	0.006	0.0	0.002	0.016	0.028	0.0	0.024	0.018	0.02
1.25	0.5	0.31	0.276	0.022	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.25	0.75	0.004	0.01	0.062	0.102	0.006	0.062	1.0	1.0	0.274
1.25	1	0.0	0.012	0.024	0.078	0.032	0.002	0.318	0.05	0.36
1.25	1.25	0.0	0.0	0.004	0.038	0.008	0.008	0.014	0.14	0.03
1.25	1.5	0.0	0.004	0.01	0.008	0.016	0.014	0.082	0.01	0.016
1.25	2	0.0	0.008	0.002	0.0	0.008	0.002	0.054	0.014	0.008
1.5	0.5	0.192	0.182	0.922	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.5	0.75	0.052	0.006	0.114	0.232	0.03	1.0	0.998	1.0	1.0
1.5	1	0.004	0.016	0.002	0.048	0.118	0.164	0.142	0.054	0.904

1.5	1.25	0.006	0.0	0.016	0.006	0.004	0.056	0.042	0.036	0.064
1.5	1.5	0.002	0.002	0.004	0.01	0.006	0.038	0.038	0.024	0.046
1.5	2	0.05	0.006	0.004	0.01	0.008	0.016	0.006	0.026	0.062
2	0.5	0.078	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	0.75	0.022	0.15	0.118	0.394	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	1	0.004	0.002	0.0	0.15	0.014	0.038	0.828	0.166	0.492
2	1.25	0.008	0.0	0.0	0.02	0.0	0.038	0.002	0.348	0.592
2	1.5	0.028	0.01	0.002	0.022	0.01	0.008	0.012	0.074	0.058
2	2	0.034	0.032	0.01	0.002	0.014	0.008	0.02	0.0	0.044

表格 3:模擬實驗 1-2 $Z_0 = 25$

$Z_0 = 25$,n=50,sim=50,										
A	b	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=5)$
0.5	0.5	0.166	0.508	0.408	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	0.75	0.074	0.02	0.134	0.186	0.096	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	1	0.048	0.04	0.026	0.11	0.67	0.154	0.916	1.0	1.0
0.5	1.25	0.11	0.288	0.152	0.654	0.178	0.974	1.0	1.0	1.0
0.5	1.5	0.278	0.788	0.144	0.212	1.0	0.998	0.146	1.0	1.0
0.5	2	0.446	0.694	0.316	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.75	0.5	0.072	0.024	0.488	0.368	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.75	0.75	0.006	0.044	0.032	0.09	0.246	0.332	0.32	1.0	1.0
0.75	1	0.004	0.016	0.012	0.086	0.126	0.05	0.028	0.252	0.208
0.75	1.25	0.002	0.016	0.036	0.022	0.106	0.006	0.178	0.1	0.116
0.75	1.5	0.018	0.006	0.02	0.034	0.01	.002	0.092	0.144	0.2
0.75	2	0.02	0.008	0.038	0.02	0.032	0.004	0.058	0.03	0.522
1	0.5	0.002	0.062	0.046	0.998	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1	0.75	0.002	0.048	0.078	0.028	0.032	0.054	0.322	1.0	1.0
1	1	0.008	0.006	0.016	0.004	0.054	0.036	0.05	0.388	0.042
1	1.25	0.0	0.002	0.002	0.012	0.002	0.038	0.074	0.116	0.128
1	1.5	0.002	0.004	0.002	0.006	0.018	0.018	0.068	0.0	0.042
1	2	0.004	0.004	0.002	0.024	0.028	0.008	0.03	0.054	0.03
1.25	0.5	0.2	0.084	0.518	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.25	0.75	0.014	0.046	0.024	0.304	0.092	0.52	0.224	1.0	1.0
1.25	1	0.014	0.0	0.034	0.006	0.004	0.144	0.03	0.042	0.264
1.25	1.25	0.034	0.0	0.002	0.012	0.004	0.008	0.024	0.01	0.068

1.25	1.5	0.01	0.0	0.002	0.002	0.012	0.012	0.002	0.062	0.028
1.25	2	0.018	0.01	0.002	0.012	0.008	0.01	0.014	0.03	0.032
1.5	0.5	0.304	0.498	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.5	0.75	0.002	0.036	0.076	0.094	0.284	0.232	0.6	1.0	1.0
1.5	1	0.024	0.008	0.014	0.012	0.13	0.042	0.026	0.69	1.0
1.5	1.25	0.004	0.02	0.002	0.0	0.012	0.016	0.008	0.024	0.108
1.5	1.5	0.008	0.0	0.0	0.0	0.018	0.018	0.02	0.04	0.11
1.5	2	0.016	0.002	0.0	0.0	0.0	0.004	0.0	0.006	0.01
2	0.5	0.464	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	0.75	0.002	0.062	0.082	0.098	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	1	0.004	0.004	0.008	0.064	0.028	0.088	0.354	1.0	1.0
2	1.25	0.012	0.018	0.004	0.028	0.028	0.064	0.068	0.25	0.34
2	1.5	0.004	0.002	0.0	0.006	0.044	0.048	0.012	0.048	0.126
2	2	0.026	0.0	0.002	0.002	0.0	0.002	0.018	0.012	0.038

表格 4:模擬實驗 1-2 $Z_0 = 50$

$Z_0 = 50$,n=50,sim=50,										
a	b	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=5)$
0.5	0.5	0.066	0.196	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	0.75	0.092	0.044	0.606	0.208	0.384	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	1	0.096	0.096	0.012	0.166	0.63	1.0	0.578	1.0	1.0
0.5	1.25	0.37	0.006	0.008	0.01	0.214	0.078	0.316	1.0	1.0
0.5	1.5	0.126	0.074	0.092	0.51	0.354	1.0	1.0	0.704	1.0
0.5	2	0.17	0.998	0.004	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.75	0.5	0.168	0.59	0.162	1.0	1.0	0.28	1.0	1.0	1.0
0.75	0.75	0.0	0.004	0.018	0.164	0.1	0.194	1.0	0.574	1.0
0.75	1	0.006	0.008	0.028	0.07	0.09	0.256	0.16	0.088	0.288
0.75	1.25	0.002	0.0	0.006	0.02	0.028	0.088	0.03	0.232	0.078
0.75	1.5	0.012	0.032	0.052	0.008	0.06	0.018	0.022	0.048	0.608
0.75	2	0.002	0.034	0.008	0.02	0.05	0.1	0.062	0.106	0.348
1	0.5	0.068	0.346	0.3	0.672	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1	0.75	0.018	0.01	0.0	0.052	0.156	0.148	1.0	1.0	1.0
1	1	0.0	0.002	0.012	0.012	0.014	0.078	0.022	0.084	0.248
1	1.25	0.004	0.01	0.006	0.004	0.018	0.006	0.002	0.062	0.04
1	1.5	0.0	0.0	0.002	0.008	0.002	0.03	0.048	0.118	0.056
1	2	0.004	0.0	0.006	0.006	0.004	0.02	0.044	0.008	0.054

1.25	0.5	0.142	0.858	0.044	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.25	0.75	0.0	0.048	0.046	0.044	0.492	0.596	0.33	1.0	1.0
1.25	1	0.002	0.008	0.0	0.008	0.04	0.024	0.088	0.044	0.364
1.25	1.25	0.002	0.004	0.002	0.004	0.0	0.022	0.018	0.044	0.136
1.25	1.5	0.006	0.0	0.004	0.002	0.014	0.032	0.03	0.052	0.018
1.25	2	0.022	0.0	0.0	0.0	0.0	0.002	0.004	0.012	0.01
1.5	0.5	0.37	0.878	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.5	0.75	0.0	0.032	0.09	0.19	0.534	0.724	0.586	1.0	1.0
1.5	1	0.002	0.004	0.01	0.008	0.016	0.038	0.03	0.364	0.7
1.5	1.25	0.002	0.004	0.002	0.004	0.002	0.008	0.02	0.11	0.048
1.5	1.5	0.028	0.004	0.0	0.004	0.006	0.008	0.002	0.014	0.004
1.5	2	0.016	0.01	0.0	0.0	0.004	0.0	0.0	0.002	0.012
2	0.5	0.736	0.498	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	0.75	0.026	0.02	0.104	0.304	0.862	1.0	1.0	1.0	1.0
2	1	0.0	0.0	0.014	0.036	0.098	0.102	0.47	0.572	1.0
2	1.25	0.01	0.0	0.01	0.0	0.038	0.058	0.114	0.086	0.376
2	1.5	0.006	0.0	0.006	0.0	0.004	0.026	0.042	0.038	0.076
2	2	0.01	0.018	0.008	0.0	0.0	0.01	0.008	0.014	0.006

表格 5:模擬實驗 1-3 固定 $\eta_k = \frac{1}{\lambda}, \forall k = 0,\ldots,n-1$

$Z_0 = 25$,n=50,sim=50,$\eta_k = \frac{1}{\lambda}, \forall k = 0,\ldots,n-1$										
a	b	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=5)$
0.5	0.5	0.028	0.012	0.256	0.866	0.206	0.772	0.656	0.56	1.0
0.5	0.75	0.032	0.034	0.0	0.012	0.026	0.04	0.112	0.114	0.3
0.5	1	0.022	0.054	0.068	0.06	0.046	0.14	0.14	0.068	0.214
0.5	1.25	0.016	0.004	0.078	0.048	0.084	0.008	0.158	0.198	0.018
0.5	1.5	0.09	0.142	0.006	0.024	0.058	0.024	0.074	0.13	0.206
0.5	2	0.07	0.136	0.354	0.064	0.398	0.512	0.514	0.208	0.34

表格 6:模擬實驗 1-3 固定 $\theta_k = \frac{a}{a+b}, \forall k = 0,\ldots,n-1$

$Z_0 = 25$,n=50,sim=50,$\theta_k = \frac{a}{a+b}, \forall k = 0,\ldots,n-1$										
a	b	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=5)$
0.5	0.5	0.01	0.0	0.03	0.03	0.1	0.02	0.0	0.01	0.07
0.5	0.75	0.0	0.01	0.05	0.0	0.03	0.01	0.02	0.02	0.04
0.5	1	0.0	0.02	0.0	0.02	0.05	0.03	0.02	0.03	0.0
0.5	1.25	0.0	0.03	0.03	0.01	0.07	0.0	0.0	0.0	0.04
0.5	1.5	0.01	0.02	0.01	0.02	0.0	0.08	0.03	0.0	0.0
0.5	2	0.0	0.0	0.0	0.01	0.0	0.0	0.01	0.02	0.0

表格 7:模擬實驗 1-3 固定 $\theta_k = \frac{a}{a+b}, \forall k = 0,\ldots,n-1$

$Z_0 = 25$,n=50,sim=50,$\eta_k = \frac{1}{\lambda}, \theta_k = \frac{a}{a+b}, \forall k = 0,\ldots,n-1$										
a	b	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=5)$
0.5	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	0.75	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	1.25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	1.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

表格 8:模擬實驗 2

n=5,sim=1000										
Z_0	θ	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=1.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=2.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=3.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=4.5)$	$\hat{P}_{ext}(\lambda=5)$
5	0.25	1.0	1.0	1.0	0.999983333	0.999966667	0.999858333	0.999766667	0.999616667	0.998858333
5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999966667	0.999916667	0.999833333	0.999483333	0.996908333
5	0.75	0.99995	0.998725	0.995116667	0.967166667	0.931133333	0.836641667	0.701041667	0.5364	0.247975
10	0.25	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999991667	1.0
10	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9997
10	0.75	1.0	0.999925	0.999558333	0.99255	0.981716667	0.946841667	0.890841667	0.800675	0.558808333
25	0.25	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
25	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
25	0.75	1.0	1.0	0.999991667	0.999875	0.999158333	0.995791667	0.986375	0.965841667	0.869383333