

# 國立交通大學

物理研究所

碩士論文

高斯雷射光對電磁波引發透明的影響

Gaussian Pulse Effect on Electromagnetically Induced  
Transparency

研究生：蕭復升

指導教授：江進福 教授

中華民國一百年七月

# 高斯雷射光對電磁波引發透明的影響

學生：蕭復升

指導教授：江進福

國立交通大學物理研究所碩士班

## 摘要

在本篇論文中，對於 EIT 的問題，將利用傅立葉分析的方法，把高斯脈衝雷射光在頻率空間下分解後，由求解哈密頓算符的特徵態中，藉由其中一個特別的特徵態，來預測幾種可能會產生 EIT 現象的條件，再從這些得到的條件來研究高斯脈衝雷射光在 EIT 現象中低能階躍遷到高能階的吸收率。



# Gaussian Pulse Effect on Electromagnetically Induced Transparency

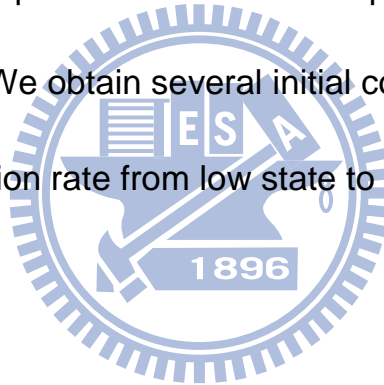
Student : Fu-Sheng Hsiao

Advisors : Dr. Tsin-Fu Jiang

Institute of Physics  
National Chiao Tung University

## Abstract

In this thesis, we decompose a Gaussian laser pulse in frequency space by Fourier Transform. We obtain several initial conditions to study the pulse effect on absorption rate from low state to excited state of EIT effect.



## 誌謝

首先必須要感謝我的指導教授江進福教授的耐心指導，在每次 meeting 或是上課的課程之中都讓我獲益良多，靠著這些收穫，使我在做研究的過程中，創造出許多想法。另外非常感謝博士後研究員的李漢傑博士還有鄭世達學長，常常在我研究過程中觀念不清楚或有疑問的時候，可以不厭其煩的耐心協助我。也感謝研究室吳仁傑同學的陪伴，可以與我一起交換在每個禮拜 meeting 時所獲得的心得。

也要感謝在物理所的各位師長、學長以及同學們陪伴了我碩士兩年的時間，可以在過去修課時一同討論作業，以及在準備考試時分享許多意見。



|   |     |
|---|-----|
| 目錄  |     |
| 中文摘要.....   | I   |
| 英文摘要.....   | II  |
| 誌謝.....   | III |
| 目錄.....   | IV  |
| 圖目錄.....  | V   |
| 第一章 緒論.....   | 1   |
| 第二章 同調居量捕獲.....   | 2   |
| 第三章 密度矩陣算符.....   | 5   |
| 第四章 高斯雷射光用於電磁波引發透明現象的解析方法 .....                           | 8   |
| 第五章 結果.....   | 16  |
| 5.1 連續波雷射( $\Omega_{pr}$ 和 $\Omega_{co}$ 與時間無關).....      | 16  |
| 5.2 高斯雷射光在 $\Omega_{cot} \gg \Omega_{prt}$ 條件 .....       | 18  |
| 5.2 高斯雷射光在 $\Omega_{pr}(t) = c \Omega_{co}(t)$ 的條件下 ..... | 21  |
| 第六章 結論.....   | 23  |
| 附錄 A 交互作用圖像 .....   | 24  |
| 參考資料.....   | 27  |

## 圖目錄

|   |    |
|---|----|
| 圖 1. $\Lambda$ 型三能階系統.....  | 2  |
| 圖 2. 雷射光的頻寬.....  | 11 |
| 圖 3. 使用連續波雷射時 $\tilde{\rho}_{ab}$ 的虛部.....  | 17 |
| 圖 4. 使用高斯雷射 $\Omega_{co}(t) \gg \Omega_{pr}(t)$ 時 $\tilde{\rho}_{ab}$ 的虛部 .....             | 18 |
| 圖 5. 紅色實線為用 Adomian 方法 $\rho_{cb}$ 的虛部.....   | 19 |
| 圖 6. $\rho_{cb}$ 在時域下的虛部 .....  | 19 |
| 圖 7. 紅色實線為用 Adomian 方法 $\rho_{ab}$ 的虛部.....   | 20 |
| 圖 8. 使用高斯雷射 $\Omega_{co}(t) \gg \Omega_{pr}(t)$ 時 $\tilde{\rho}_{ab}$ 在時域下的虛部.....          | 20 |
| 圖 9. 使用高斯雷射 $\Omega_{pr}(t) = c \Omega_{co}(t)$ 時 $\tilde{\rho}_{ab}$ 的虛部 $\tau = 10$ ..... | 21 |
| 圖 10. 使用高斯雷射 $\Omega_{pr}(t) = c \Omega_{co}(t)$ 時 $\tilde{\rho}_{ab}$ 的虛部 $c = 1$ .....    | 22 |
| 圖 11. 雙能階系統.....  | 25 |

## 第一章 緒論

最近幾年中，超短雷射光用於原子能階躍遷的研究越來越受到重視，電磁波引發透明(electromagnetically induced transparency)現象[1, 2, 3, 6, 10]就是三能階原子系統中的其中一個例子。

電磁波引發透明現象的產生是因為三能階中使用兩道雷射光，這兩道雷射光會因為互相干涉的關係，使得本來因為雷射的照射後，由低能階吸收到高能階的現象變成不會吸收，因此介質對雷射而言就像是透明的一樣，所以命名為電磁波引發透明，這個現象可以應用在減慢光的速度，理由是因為先前提到的電磁波引發透明現象影響介質的折射率，而光的群速度會與折射率對光的頻率微分成反比的關係，這個光速變慢的行為已經在實驗被證實了[9]。

儘管電磁波引發透明的現象是個有趣的問題而且有可以讓光速減慢的實際應用，但是大部分的研究所使用的雷射光都是連續波(Continuous wave)，所以這篇論文中將會使用高斯雷射脈衝(Gaussian Pulse)，來研究關於電磁波引發透明在幾種不同情況下，各自不吸收情形和使用連續波之間的差別。

## 第二章 同調居量捕獲

考慮一個 $\Lambda$ 型的三能階加上兩道雷射光的系統，如圖 1

由能階  $|b\rangle$  打到能階  $|a\rangle$  的雷射光這裡稱為探測雷射光(probe laser pulse)，這個雷射光的中心頻率為  $\omega_{pr}$ ，拉比頻率(Rabi frequency)為  $\Omega_{pr}$ ，由能階  $|c\rangle$  打到能階  $|a\rangle$  的雷射光這裡稱為控制雷射光(control laser pulse)，這個雷射光的中心頻率為  $\omega_{co}$ ，拉比頻率(Rabi frequency)為  $\Omega_{co}$ 。 $\delta$  和  $\Delta$  各自代表的是雷射光和能階  $|a\rangle$  之間的失調(detuning)。

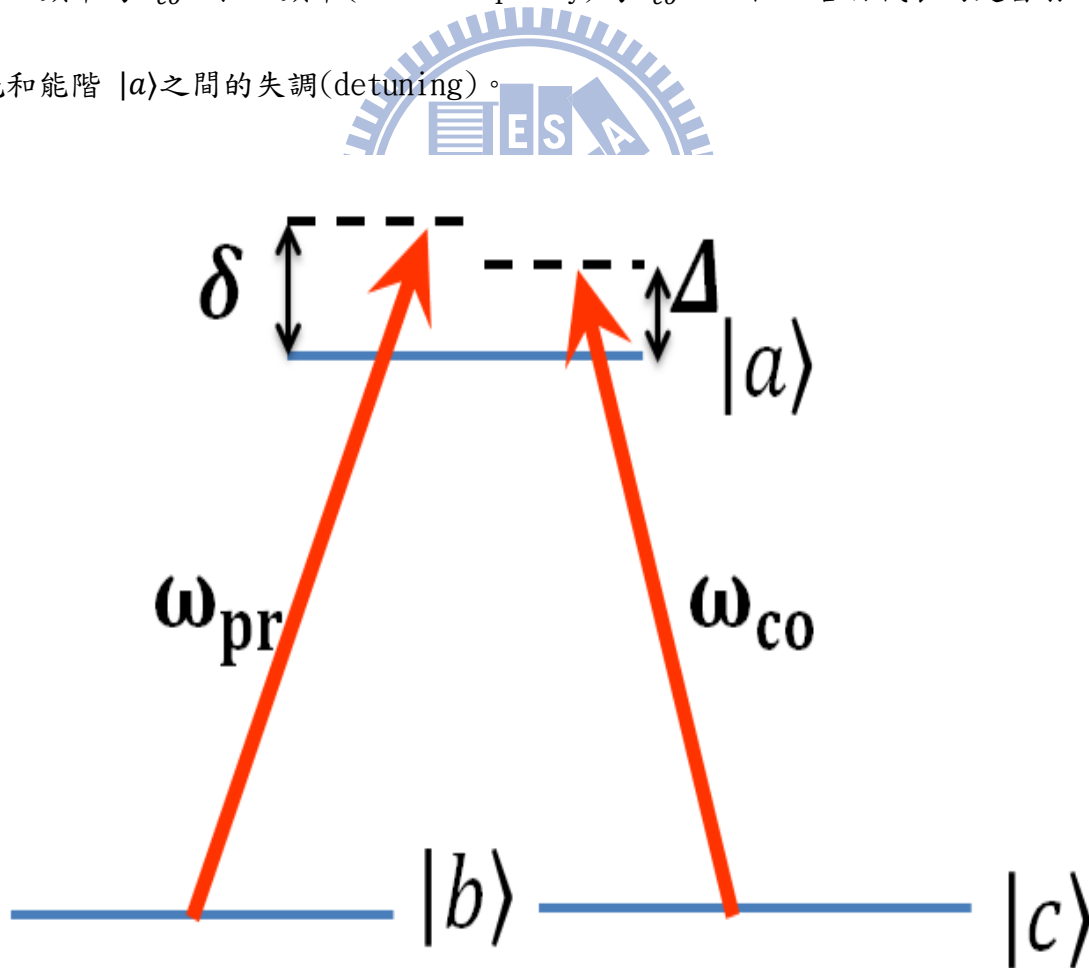


圖 1.  $\Lambda$  型三能階系統



三能階系統的哈密頓算符(Hamiltonian)可以用下式來表示

$$H = H_0 + H_L \quad (2.1)$$

其中

$$H_0 = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| + \hbar\omega_c|c\rangle\langle c|$$

雷射光的哈密頓算符使用偶極近似(dipole approximation)

$$H_L = -d \cdot E = -\frac{\hbar}{2}(|a\rangle\langle b|\Omega_{pr}e^{-i\omega_{pr}t} + |b\rangle\langle a|\Omega_{pr}e^{i\omega_{pr}t} + |a\rangle\langle c|\Omega_{co}e^{-i\omega_{co}t} + |c\rangle\langle a|\Omega_{co}e^{i\omega_{co}t}) \quad (2.2)$$

三能階系統的波函數可以表示為：

$$|\Psi\rangle = C_a|a\rangle + C_b|b\rangle + C_c|c\rangle$$

如果雷射光處於共振，三個哈密頓算符的特徵態(eigenstate)可以用交互作用圖像(Interaction picture)[7]來描述(將會在附錄 A 中推導)

$$\begin{aligned} |C_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|a\rangle + \frac{\Omega_{pr}}{\Omega'}|b\rangle + \frac{\Omega_{co}}{\Omega'}|c\rangle) \\ |C_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + \frac{\Omega_{pr}}{\Omega'}|b\rangle + \frac{\Omega_{co}}{\Omega'}|c\rangle) \\ |NC\rangle &= \frac{\Omega_{co}}{\Omega'}|b\rangle + \frac{\Omega_{pr}}{\Omega'}|c\rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中

$$\Omega' = \sqrt{\Omega_{pr}^2 + \Omega_{co}^2}$$

如果初始時原子的波函數全部都處於新的特徵態  $|NC\rangle$ ，因為這個態的基底中沒有包含本來的高能階態  $|a\rangle$ ，所以新的特徵態  $|NC\rangle$  不論雷射光如何激發原子的能階都不可能會躍遷到另外兩個新的特徵態  $|C_1\rangle$  和  $|C_2\rangle$ 。

因此這個  $|NC\rangle$  不吸收到  $|C_1\rangle$  或是  $|C_2\rangle$  的現象就被稱作同調居量捕獲 (coherent population trapping)，而因為  $|NC\rangle$  不會躍遷到另外兩個能階所以被稱呼為黑暗態 (Dark state)。

接著考慮在同調居量捕獲現象中一種特別的情況，如果同調居量捕獲滿足下面的三種形況 [4]：

情況 1.  $\Omega_{pr}$  和  $\Omega_{co}$  與時間無關 (連續波雷射)

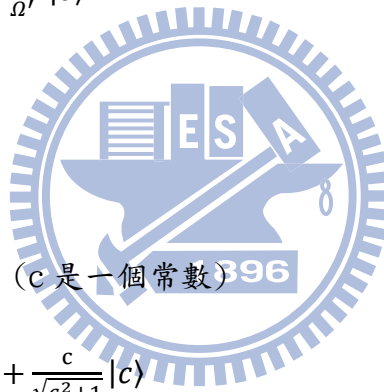
$$|NC\rangle = \frac{\Omega_{co}}{\Omega'} |b\rangle + \frac{\Omega_{pr}}{\Omega'} |c\rangle$$

情況 2.  $\Omega_{pr}(t) \ll \Omega_{co}(t)$

$$|NC\rangle = |b\rangle$$

情況 3.  $\Omega_{pr}(t) = c \Omega_{co}(t)$  ( $c$  是一個常數)

$$|NC\rangle = \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} |b\rangle + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} |c\rangle$$



對這些情況來說，黑暗態  $|NC\rangle$  將會變成一個與時間無關的波方程。

換句話說，經過雷射光的照射之後，本來可能會在黑暗態中能階  $|b\rangle$  和能階  $|c\rangle$  會互相消長的機率密度變成不會有任何改變，也就是雷射光照射後的機率分佈和本來初始的時候機率分佈一模一樣，因此當然也不會由能階  $|b\rangle$  躍遷到能階  $|a\rangle$ ，這個現象就是前面所提到因為雷射光互相干涉所產生的電磁波引發透明。

### 第三章 密度矩陣算符

考慮一個與前面第二章中圖一相同的 $\Lambda$ 型三能階系統。密度矩陣算符可以藉由光學布洛赫方程式(optical Bloch equation)來表示

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] - \gamma\rho \quad (3.1)$$

其中上式最後一項的 $\gamma$ 代表能階衰減係數。

因此

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{ab}}{dt} &= -(i\omega_{ab} + \gamma_1)\rho_{ab} + \frac{i}{2}\Omega_{pr}e^{-i\omega_{prt}}(\rho_{bb} - \rho_{aa}) + \frac{i}{2}\Omega_{co}e^{-i\omega_{cot}}\rho_{cb} \\ \frac{d\rho_{ac}}{dt} &= -(i\omega_{ac} + \gamma_2)\rho_{ac} + \frac{i}{2}\Omega_{co}e^{-i\omega_{cot}}(\rho_{cc} - \rho_{aa}) + \frac{i}{2}\Omega_{pr}e^{-i\omega_{prt}}\rho_{bc} \\ \frac{d\rho_{cb}}{dt} &= -(i\omega_{cb} + \gamma_3)\rho_{cb} - \frac{i}{2}\Omega_{pr}e^{-i\omega_{prt}}\rho_{ca} + \frac{i}{2}\Omega_{co}e^{i\omega_{cot}}\rho_{ab} \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中

$$\omega_{nm} = \omega_n - \omega_m$$

這裡要特別強調接下來的推導使用的雷射光是連續波雷射，也就是探測雷射光和控制雷射光的拉比頻率是一個常數，在下一個章節中將會考慮把連續波雷射改變成高斯雷射光做計算。

在  $\Omega_{pr} \ll \Omega_{co}$  的條件之下，黑暗態  $|NC\rangle$  會變成一個只有能階  $|b\rangle$  所組成的能階，因為這個理由，接下來假設原子波函數的機率分布全部都在能階  $|b\rangle$  之中。

所以得到：

$$\rho_{bb} = 1$$

$$\rho_{aa} = \rho_{cc} = \rho_{ac} = 0$$

代入 (3.2) 式中得到：

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{ab}}{dt} &= -(i\omega_{ab} + \gamma_1)\rho_{ab} + \frac{i}{2}\Omega_{pr}e^{-i\omega_{pr}t} + \frac{i}{2}\Omega_{co}e^{-i\omega_{co}t}\rho_{cb} \\ \frac{d\rho_{cb}}{dt} &= -(i\omega_{cb} + \gamma_3)\rho_{cb} + \frac{i}{2}\Omega_{co}e^{i\omega_{co}t}\rho_{ab} \end{aligned} \quad (3.3)$$

接著定義一個新的變數：

$$\tilde{\rho}_{ab} = \rho_{ab}e^{i\omega_{pr}t}$$

$$\tilde{\rho}_{cb} = \rho_{cb}e^{i(\omega_{pr}-\omega_{co})t}$$

因此，(3.3) 式變成為：

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}_{ab}}{dt} &= (i\delta - \gamma_1)\tilde{\rho}_{ab} + \frac{i}{2}\Omega_{pr} + \frac{i}{2}\Omega_{co}\tilde{\rho}_{cb} \\ \frac{d\tilde{\rho}_{cb}}{dt} &= (i(\delta - \Delta) - \gamma_3)\tilde{\rho}_{cb} + \frac{i}{2}\Omega_{co}\tilde{\rho}_{ab} \end{aligned} \quad (3.4)$$

因為上式中的左邊是由連續波的形式所構成，取的新變數已經將連續波時間相關

的部分取出，而要解的是穩態，所以  $\tilde{\rho}_{ab}$  將會變成與時間無關的函數：

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}_{ab}}{dt} &= 0 \\ \frac{d\tilde{\rho}_{cb}}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

所以得到

$$\begin{aligned} (i\delta - \gamma_1)\tilde{\rho}_{ab} + \frac{i}{2}\Omega_{pr} + \frac{i}{2}\Omega_{co}\tilde{\rho}_{cb} &= 0 \\ (i(\delta - \Delta) - \gamma_3)\tilde{\rho}_{cb} + \frac{i}{2}\Omega_{co}\tilde{\rho}_{ab} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

因此，可以從解 (3.5) 式的聯立方程式中得到  $\tilde{\rho}_{ab}$  的虛部：

$$\text{Im}[\tilde{\rho}_{ab}] = \frac{2\Omega_{pr}(4\gamma_1(\gamma_3^2 + (\delta - \Delta)^2) + \gamma_3\Omega_{co}^2)}{16\gamma_3^2\delta^2 + 16\gamma_1^2(\gamma_3^2 + (\delta - \Delta)^2) + 8\gamma_1\gamma_3\Omega_{co}^2 + (-4\delta^2 + 4\delta\Delta + \Omega_{co}^2)^2} \quad (3.6)$$

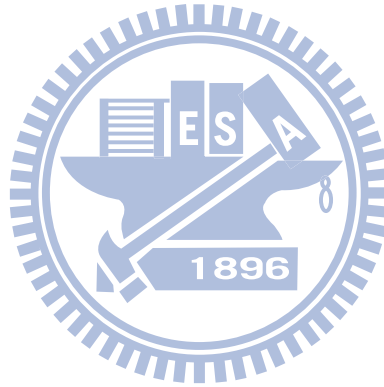
因為使用的雷射光在一開始就已經假設  $\Omega_{co} \gg \Omega_{pr}$ ，所以由上面解出的  $\text{Im}[\tilde{\rho}_{ab}]$  可

以得知

$$\text{Im}[\tilde{\rho}_{ab}] \approx 0$$

$\text{Im}[\tilde{\rho}_{ab}] \approx 0$  意味著能階  $|b\rangle$  不會有任何機率躍遷到高能階  $|a\rangle$ 。因此，利用光學

布洛赫方程式中的密度矩陣算符再一次的驗證了電磁波引發透明的現象。



## 第四章 高斯雷射光用於電磁波引發透明現象的解析方法

在這章中將會考慮把上一章中使用的連續波雷射光改成高斯雷射光。

從 (2.2) 式出發：

$$H_L = -\frac{\hbar}{2} (|a\rangle\langle b| \Omega_{pr}(t) e^{-i\omega_{pr}t} + |b\rangle\langle a| \Omega_{pr}(t) e^{i\omega_{pr}t} + |a\rangle\langle c| \Omega_{co}(t) e^{-i\omega_{co}t} + |c\rangle\langle a| \Omega_{co}(t) e^{i\omega_{co}t}) \quad (4.1)$$

考慮的高斯雷射光有以下形式：

$$\begin{aligned} \Omega_{pr}(t) &= \Omega_{0pr} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\tau_{pr}}\right)^2} \\ \Omega_{co}(t) &= \Omega_{0co} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\tau_{co}}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

上式中的使用參數  $\tau$  代表的是高斯雷射光的半高寬 (full width at half maximum)， $\Omega_{0pr}$  和  $\Omega_{0co}$  分別代表兩個雷射脈衝的振幅。

由傅立葉變換 (Fourier Transform) 和反傅立葉變換 (Inverse Fourier Transform) 可以得到：

$$\begin{aligned} \Omega_{pr}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Omega_{pr}(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \Omega_{0pr} \tau_{pr} e^{-\frac{\tau_{pr}^2 \omega^2}{2}} \\ \Omega_{co}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Omega_{co}(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned} \quad (4.3a)$$

$$\begin{aligned} &= \Omega_{0co} \tau_{co} e^{-\frac{\tau_{co}^2 \omega^2}{2}} \\ \Omega_{pr}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Omega_{pr}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (4.3b)$$

$$\Omega_{co}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Omega_{co}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

(4.3b)式離散化可以被改寫成加法的形式：

$$\begin{aligned} \Omega_{pr}(t) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-pr_{max}}^{pr_{max}} (\Omega_{pr}(\omega_n) e^{i\omega_n t}) \Delta\omega \\ \Omega_{co}(t) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-co_{max}}^{co_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中當  $n = pr_{max}$  時，代表的是高斯雷射光的頻寬  $\omega b_{pr}$ ，也就是  $pr_{max} \times \Delta\omega = \omega b_{pr}$ 。同理當  $m = co_{max}$  時，代表的是高斯雷射光的頻寬  $\omega b_{co}$ 。

將 (4.4)式代入 (3.2)式中：

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{ab}}{dt} &= -(i\omega_{ab} + \gamma_1)\rho_{ab} + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-pr_{max}}^{pr_{max}} (\Omega_{pr}(\omega_n) e^{i\omega_n t}) \Delta\omega e^{-i\omega_{pr}t} (\rho_{bb} - \rho_{aa}) \\ &\quad + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-co_{max}}^{co_{max}} (\Omega_{co}(\omega) e^{i\omega t}) \Delta\omega e^{-i\omega_{co}t} \rho_{cb} \\ \frac{d\rho_{ac}}{dt} &= -(i\omega_{ac} + \gamma_2)\rho_{ac} + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-co_{max}}^{co_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega e^{-i\omega_{co}t} (\rho_{cc} - \rho_{aa}) \\ &\quad + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-pr_{max}}^{pr_{max}} (\Omega_{pr}(\omega_n) e^{i\omega_n t}) \Delta\omega e^{-i\omega_{pr}t} \rho_{bc} \\ \frac{d\rho_{cb}}{dt} &= -(i\omega_{cb} + \gamma_3)\rho_{cb} - \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-pr_{max}}^{pr_{max}} (\Omega_{pr}(\omega_n) e^{i\omega_n t}) \Delta\omega e^{-i\omega_{pr}t} \rho_{ca} \\ &\quad + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-co_{max}}^{co_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega e^{-i\omega_{co}t} \rho_{ab} \end{aligned} \quad (4.5)$$

與上一章類似，將密度算符  $\rho_{ab}$ ,  $\rho_{ac}$  以及  $\rho_{cb}$  用高斯雷射光的頻率成分做傅立

葉展開(Fourier expansion)：

$$\begin{aligned}
\rho_{ab} &= \sum_{n=-pr_{max}}^{pr_{max}} (\tilde{\rho}_{ab}(\omega_n) e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_{pr} t}) \\
\rho_{ac} &= \sum_{m=-co_{max}}^{co_{max}} (\tilde{\rho}_{ac}(\omega_m) e^{i\omega_m t} e^{-i\omega_{co} t}) \\
\rho_{cb} &= \sum_{k=-(pr_{max}+co_{max})}^{pr_{max}+co_{max}} (\tilde{\rho}_{cb}(\omega_k) e^{i\omega_k t} e^{-i(\omega_{pr}-\omega_{co}) t})
\end{aligned} \tag{4.6}$$

所以代入 (4.5) 式中可以得到：

$$\begin{aligned}
0 &= - \sum_{n=-pr_{max}}^{pr_{max}} (i(\omega_n - \delta) + \gamma_1) \tilde{\rho}_{ab}(\omega_n) e^{i\omega_n t} \\
&\quad + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-pr_{max}}^{pr_{max}} (\Omega_{pr}(\omega_n) e^{i\omega_n t}) \Delta\omega (\rho_{bb} - \rho_{aa}) \\
&\quad + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-co_{max}}^{co_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega \sum_{k=-(pr_{max}+co_{max})}^{pr_{max}+co_{max}} (\tilde{\rho}_{cb}(\omega_k) e^{i\omega_k t}) \\
0 &= - \sum_{m=-co_{max}}^{co_{max}} (i(\omega_m - \Delta) + \gamma_2) \tilde{\rho}_{ac}(\omega_m) e^{i\omega_m t} \\
&\quad + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-co_{max}}^{co_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega (\rho_{cc} - \rho_{aa}) \\
&\quad + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-pr_{max}}^{pr_{max}} (\Omega_{pr}(\omega_n) e^{i\omega_n t}) \Delta\omega \sum_{k=-(pr_{max}+co_{max})}^{pr_{max}+co_{max}} (\tilde{\rho}_{bc}(\omega_k) e^{-i\omega_k t}) \\
0 &= - \sum_{k=-(pr_{max}+co_{max})}^{pr_{max}+co_{max}} (i(\omega_k - \delta + \Delta) + \gamma_3) \tilde{\rho}_{cb}(\omega_k) e^{i\omega_k t} \\
&\quad - \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-pr_{max}}^{pr_{max}} (\Omega_{pr}(\omega_n) e^{i\omega_n t}) \Delta\omega \sum_{m=-co_{max}}^{co_{max}} (\tilde{\rho}_{ca}(\omega_m) e^{-i\omega_m t}) \\
&\quad + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-co_{max}}^{co_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega \sum_{n=-pr_{max}}^{pr_{max}} (\tilde{\rho}_{ab}(\omega_n) e^{i\omega_n t})
\end{aligned} \tag{4.7}$$



因為探測雷射光和控制雷射光可能會有不同的頻寬大小，所以不能保證上式中所有的頻率成分接下來都可以被計算到，所以接下來直接把兩個頻寬直接取一樣的大小  $\omega_{max}$  來避免這個問題

$$\omega b_{pr} = \omega b_{co} = \omega_{max}$$

其中  $\omega_{max}$  取的數值將以兩個雷射光的頻寬  $\omega b_{pr}$  與  $\omega b_{co}$  之間較寬的為基準如圖 2。

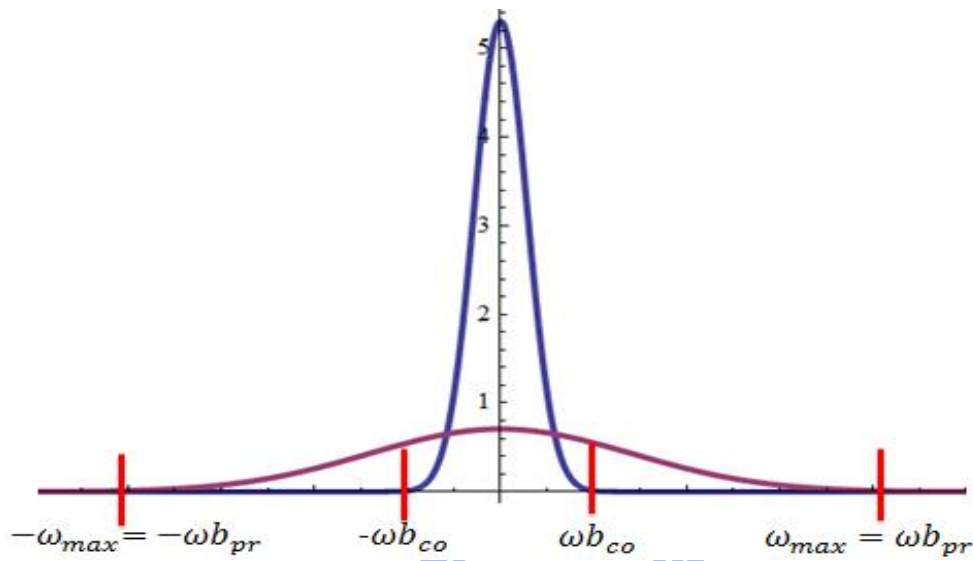


圖 2. 雷射光的頻寬

因為現在兩個雷射光有相同的頻寬，所以可以把(4.7)式中的  $pr_{max}$ 、 $co_{max}$  與  $pr_{max} + co_{max}$  重新用同一個新的參數  $a_{max}$  改寫成下式，其中  $a_{max} \times \Delta\omega = \omega_{max}$ 。

$$\begin{aligned}
0 = & - \sum_{n=-a_{max}}^{a_{max}} (i(\omega_n - \delta) + \gamma_1) \tilde{\rho}_{ab}(\omega_n) e^{i\omega_n t} \\
& + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-a_{max}}^{a_{max}} (\Omega_{pr}(\omega_n) e^{i\omega_n t}) \Delta\omega (\rho_{bb} - \rho_{aa}) \\
& + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-a_{max}}^{a_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega \sum_{k=-2a_{max}}^{2a_{max}} (\tilde{\rho}_{cb}(\omega_k) e^{i\omega_k t}) \\
0 = & - \sum_{m=-a_{max}}^{a_{max}} (i(\omega_m - \Delta) + \gamma_2) \tilde{\rho}_{ac}(\omega_m) e^{i\omega_m t} \\
& + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-a_{max}}^{a_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega (\rho_{cc} - \rho_{aa}) \\
& + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-a_{max}}^{a_{max}} (\Omega_{pr}(\omega_n) e^{i\omega_n t}) \Delta\omega \sum_{k=-2a_{max}}^{2a_{max}} (\tilde{\rho}_{bc}(\omega_k) e^{-i\omega_k t}) \\
0 = & - \sum_{k=-2a_{max}}^{2a_{max}} (i(\omega_k - \delta + \Delta) + \gamma_3) \tilde{\rho}_{cb}(\omega_k) e^{i\omega_k t} \\
& - \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-a_{max}}^{a_{max}} (\Omega_{pr}(\omega_n) e^{i\omega_n t}) \Delta\omega \sum_{m=-a_{max}}^{a_{max}} (\tilde{\rho}_{ca}(\omega_m) e^{-i\omega_m t}) \\
& + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-a_{max}}^{a_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega \sum_{n=-a_{max}}^{a_{max}} (\tilde{\rho}_{ab}(\omega_n) e^{i\omega_n t})
\end{aligned} \tag{4.8}$$

接下來比較每個頻率組成的係數，所以可以得到很多條方程式所組成的聯立方程組，解方程式後可以獲得 $[\tilde{\rho}_{ab}]$ 的虛部，也就是我們所要的答案。

為了更清楚的解釋前面所使用的數學方法，接著考慮一個例子說明。當

$\Omega_{co}(t) \gg \Omega_{pr}(t)$ 的條件，從 (3.4) 式和 (4.8) 式

$$\begin{aligned}
0 = & - \sum_{n=-a_{max}}^{a_{max}} (i(\omega_n - \delta) + \gamma_1) \tilde{\rho}_{ab}(\omega_n) e^{i\omega_n t} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-a_{max}}^{a_{max}} (\Omega_{pr}(\omega_n) e^{i\omega_n t}) \Delta\omega \\
& + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-a_{max}}^{a_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega \sum_{k=-2a_{max}}^{2a_{max}} (\tilde{\rho}_{cb}(\omega_k) e^{i\omega_k t}) \\
0 = & - \sum_{k=-2a_{max}}^{2a_{max}} (i(\omega_k - \delta + \Delta) + \gamma_3) \tilde{\rho}_{cb}(\omega_k) e^{i\omega_k t} \\
& + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-a_{max}}^{a_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega \sum_{n=-a_{max}}^{a_{max}} (\tilde{\rho}_{ab}(\omega_n) e^{i\omega_n t})
\end{aligned} \tag{4.9}$$

為了簡化上面的式子，假設一些特別的參數：

$$\delta = \Delta = \gamma_1 = \gamma_3 = 0$$

方程式會變成：

$$\begin{aligned}
0 = & - \sum_{n=-a_{max}}^{a_{max}} (i\omega_n) \tilde{\rho}_{ab}(\omega_n) e^{i\omega_n t} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-a_{max}}^{a_{max}} (\Omega_{pr}(\omega_n) e^{i\omega_n t}) \Delta\omega \\
& + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-a_{max}}^{a_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega \sum_{k=-2a_{max}}^{2a_{max}} (\tilde{\rho}_{cb}(\omega_k) e^{i\omega_k t}) \\
0 = & - \sum_{k=-2a_{max}}^{2a_{max}} (i\omega_k) \tilde{\rho}_{cb}(\omega_k) e^{i\omega_k t}
\end{aligned} \tag{4.10a}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-a_{max}}^{a_{max}} (\Omega_{co}(\omega_m) e^{i\omega_m t}) \Delta\omega \sum_{n=-a_{max}}^{a_{max}} (\tilde{\rho}_{ab}(\omega_n) e^{i\omega_n t})
\end{aligned} \tag{4.10b}$$

接著取格點  $\Delta\omega = 1$ ，也就是  $a_{max} = 1$ ，因為  $\omega_{max} = 1$ ，因此

$$\omega_n, \omega_m = -1, 0, 1$$

$$\omega_k = -2, -1, 0, 1, 2$$

在數值計算解問題時高斯雷射光頻率為連續，因此不能只取三個值(-1, 0, 1)，應該要把  $\Delta\omega$  取小，也就是  $a_{max}$  取大，但是這裡只是為了要幫助了解整個數學的流程所講解的例子，所以才這樣取。

展開 (4.10a) 式並比較係數：

$e^{-it}$  :

$$0 = i\tilde{\rho}_{ab}(-1) + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Omega_{pr}(-1) + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [ \Omega_{co}(-1) \tilde{\rho}_{cb}(0) + \Omega_{co}(0) \tilde{\rho}_{cb}(-1) + \Omega_{co}(1) \tilde{\rho}_{cb}(-2) ]$$

$e^0$  :

$$0 = \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Omega_{pr}(0) + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [ \Omega_{co}(-1) \tilde{\rho}_{cb}(1) + \Omega_{co}(0) \tilde{\rho}_{cb}(0) + \Omega_{co}(1) \tilde{\rho}_{cb}(-1) ]$$

$e^{it}$  :

$$0 = -i\tilde{\rho}_{ab}(1) + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Omega_{pr}(1) + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [ \Omega_{co}(-1) \tilde{\rho}_{cb}(2) + \Omega_{co}(0) \tilde{\rho}_{cb}(1) + \Omega_{co}(1) \tilde{\rho}_{cb}(0) ]$$

接著展開(4.10b)式

$e^{-2it}$  :

$$0 = 2i\tilde{\rho}_{cb}(-2) + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Omega_{co}(-1) \tilde{\rho}_{ab}(-1)$$

$e^{-it}$  :

$$0 = i\tilde{\rho}_{cb}(-1) + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} [\Omega_{co}(-1)\tilde{\rho}_{ab}(0) + \Omega_{co}(0)\tilde{\rho}_{ab}(-1)]$$

$e^0$  :

$$0 = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} [\Omega_{co}(-1)\tilde{\rho}_{ab}(1) + \Omega_{co}(0)\tilde{\rho}_{ab}(0) + \Omega_{co}(1)\tilde{\rho}_{ab}(-1)]$$

$e^{it}$  :

$$0 = -i\tilde{\rho}_{cb}(1) + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} [\Omega_{co}(0)\tilde{\rho}_{ab}(1) + \Omega_{co}(1)\tilde{\rho}_{ab}(0)]$$

$e^{2it}$  :

$$0 = -2i\tilde{\rho}_{cb}(2) + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \Omega_{co}(1)\tilde{\rho}_{ab}(1)$$

其中 $\Omega_{co}(\omega)$ 和 $\Omega_{pr}(\omega)$ 從傅立葉變換中，(4.3a)式就可以得知，所以解上面八個

方程式就可以得到  $\tilde{\rho}_{ab}(\omega)$  和  $\tilde{\rho}_{cb}(\omega)$ 。

## 第五章 結果

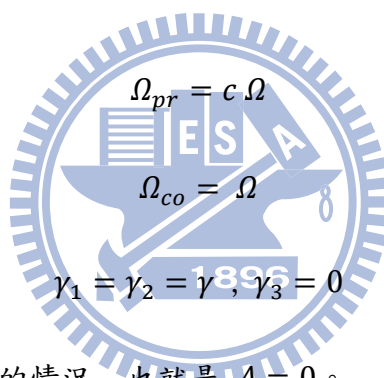
### 5.1 連續波雷射( $\Omega_{pr}$ 和 $\Omega_{co}$ 與時間無關)

連續波雷射只是 $\Omega_{pr}(t) = c \Omega_{co}(t)$ 情況下的一種與時間無關的特例，因為雷射光

只有由一個頻率所組成，所以解 (4.8)式就可以直接得到解析的答案。

因為式子中的參數過多，所以答案是一個非常複雜的形式，為了簡化答案取下面

參數：



以及控制雷射光處在共振的情況，也就是  $\Delta = 0$ 。

$\tilde{\rho}_{ab}(\delta)$ 的解析解如下式：

$$\begin{aligned}Im[\tilde{\rho}_{ab}(\delta)] \\ = \frac{2 c \gamma \delta^2 \Omega (4\gamma^2 + c^2\Omega^2)}{(1 + c^2)(16\gamma^4\delta^2 + 16\gamma^2\delta^4 - 8\gamma^2\delta^2\Omega^2 + \gamma^2\Omega^4 + 2c^2\gamma^2\Omega^4 + c^4\gamma^2\Omega^4 + c^4\delta^2\Omega^4)}\end{aligned}$$

取下列參數後，所得到的答案如圖 3 所示。

$$c = 2, \gamma = 1, \Omega = 1$$

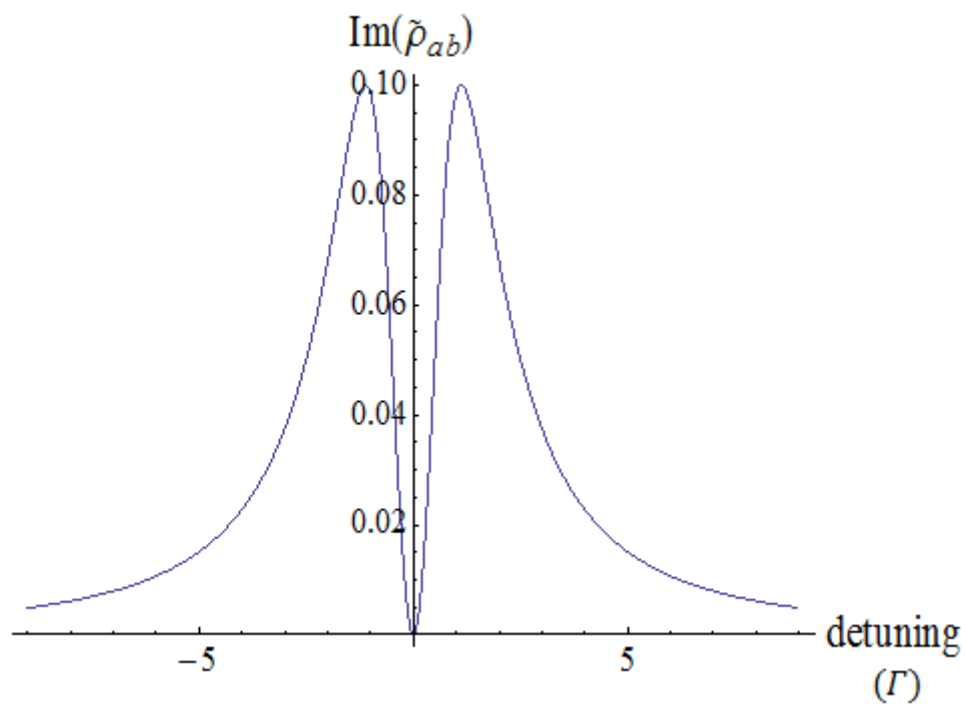


圖 3 使用連續波雷射時 $\tilde{\rho}_{ab}$  的虛部



## 5.2 高斯雷射光在 $\Omega_{co}(t) \gg \Omega_{pr}(t)$ 條件

計算展開 (4.9) 式並比較係數，這裡取參數：

$$\gamma_1 = 0.5\Gamma, \gamma_3 = 0.001\Gamma$$

$$\Omega_{co} = 0.3\Gamma \text{ (使用連續波雷射並且雷射處於共振狀態)}$$

$$\Omega_{pr}(t) = \Omega_{0pr} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\tau_{pr}}\right)^2}$$

其中

$$\Omega_{0pr} = 7.667 * 10^{-3}\Gamma, \tau_{pr} = 282/\Gamma$$

結果如圖 4 所示。

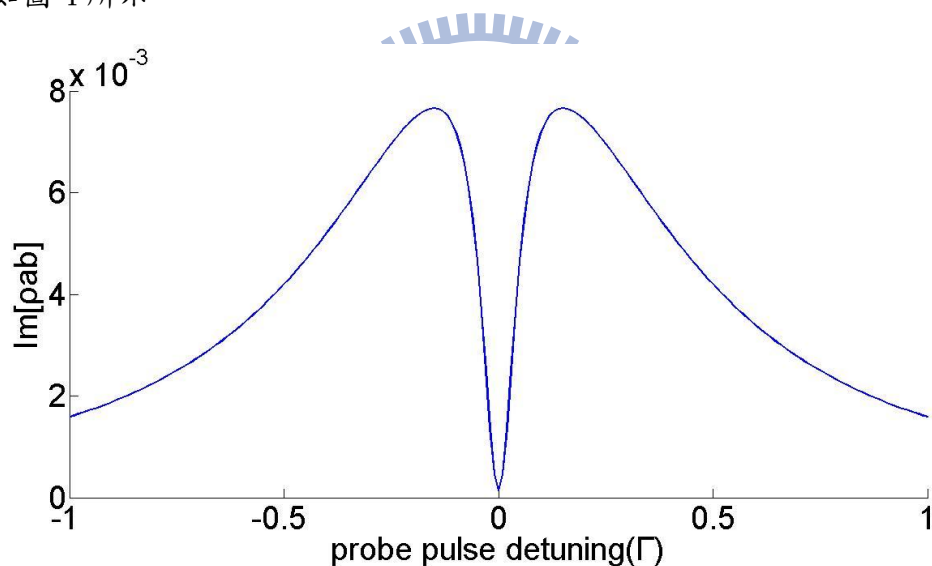


圖 4. 使用高斯雷射  $\Omega_{co}(t) \gg \Omega_{pr}(t)$  時  $\tilde{\rho}_{ab}$  的虛部

為了與 Adomian 方法在雷射光共振時[5]，時域下的結果做比較，所以將解出來的頻域  $\tilde{\rho}_{ab}(\omega)$  和  $\tilde{\rho}_{cb}(\omega)$  用傅立葉分析轉回時域  $\rho_{ab}(t)$  和  $\rho_{cb}(t)$ ，結果如下圖。



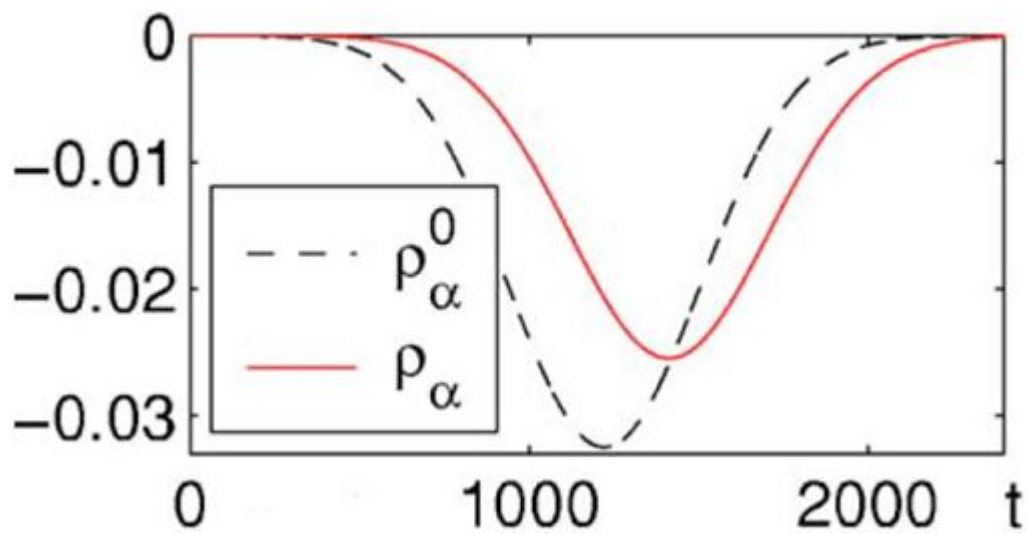


圖 5. 實線為用 Adomian 方法計算出的  $\rho_{cb}$ , 時間單位為  $(\frac{1}{\Gamma})$ , 虛線為 Adomian 方

法在第零階展開的結果, 在這裡不考慮

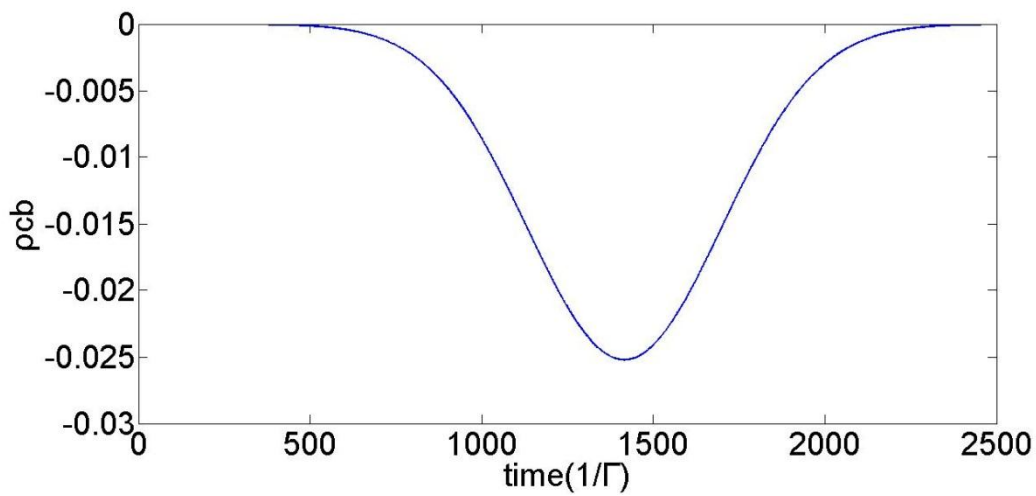


圖 6. 使用高斯雷射  $\Omega_{co}(t) \gg \Omega_{pr}(t)$  時, 所解出在時域下的  $\rho_{cb}$

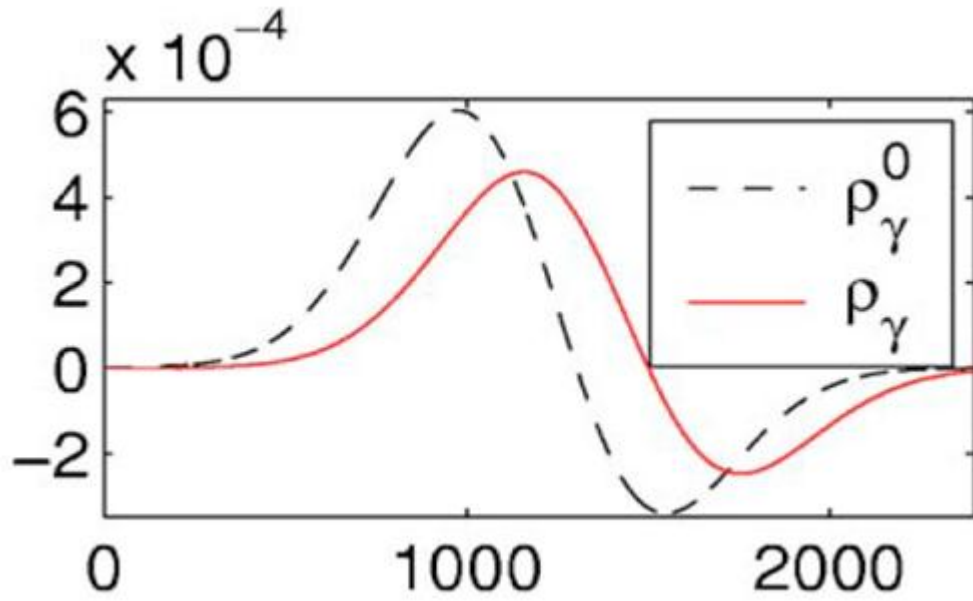


圖 7. 實線為用 Adomian 方法  $\rho_{ab}$  的虛部時間單位為  $(\frac{1}{\Gamma})$ ，虛線為 Adomian 方法在

第零階展開的結果，在這裡不考慮

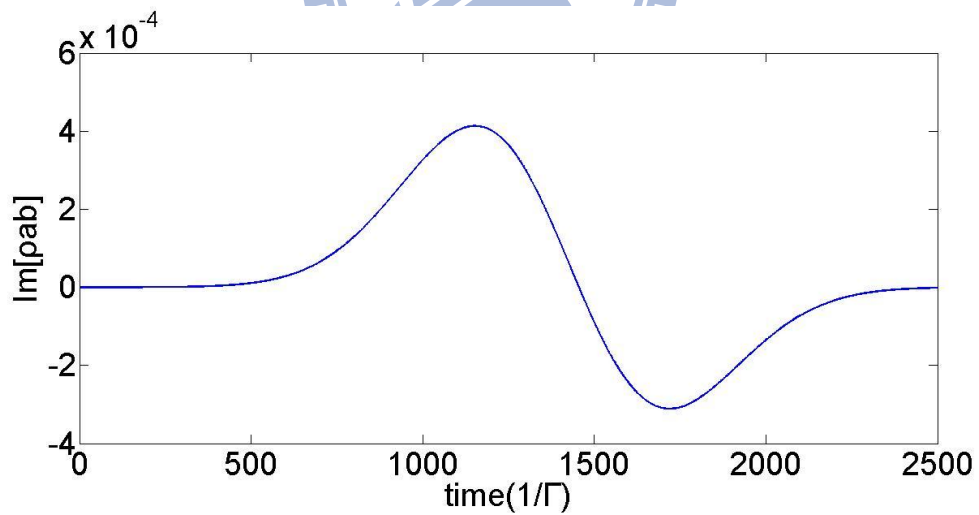


圖 8. 使用高斯雷射  $\Omega_{co}(t) \gg \Omega_{pr}(t)$  時，所解出  $\tilde{\rho}_{ab}$  在時域下的虛部

## 5.2 高斯雷射光在 $\Omega_{pr}(t) = c \Omega_{co}(t)$ 的條件下

計算展開 (4.8) 式並比較係數，這裡取參數：

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1\Gamma, \quad \gamma_3 = 0.001\Gamma, \quad \Delta = 0$$

$$\Omega_{pr}(t) = c \Omega_0 e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\tau}\right)^2}$$

$$\Omega_{co}(t) = \Omega_0 e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\tau}\right)^2}$$

其中

$$\Omega_0 = \sqrt{2\pi}(\Gamma)$$

在 $\Omega_{pr}(t) = c \Omega_{co}(t)$ 的關係下，黑暗態會變成：

$$|NC\rangle = \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}|b\rangle + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}|c\rangle$$

所以得到以下變數：

$$\rho_{bb} = \frac{1}{c^2+1}, \quad \rho_{cc} = \frac{c^2}{c^2+1}$$

$$\rho_{aa} = 0$$

結果如下圖：

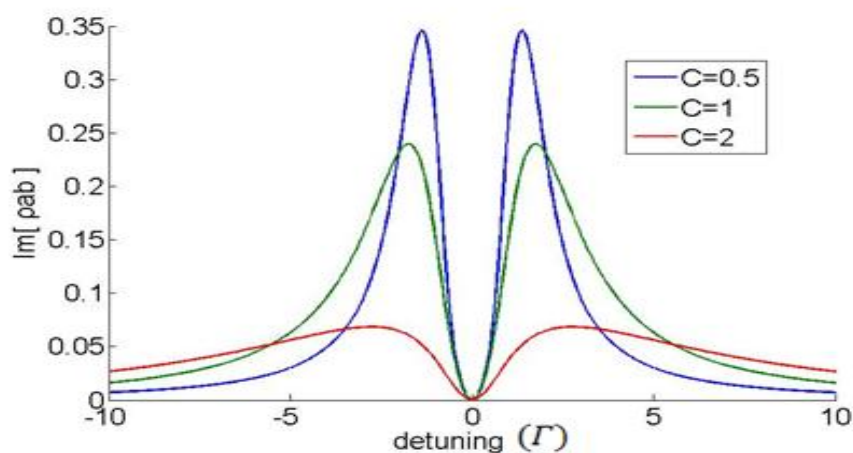


圖 9. 使用高斯雷射 $\Omega_{pr}(t) = c \Omega_{co}(t)$ 時  $\tilde{\rho}_{ab}$  的虛部， $\tau = 10(1/\Gamma)$

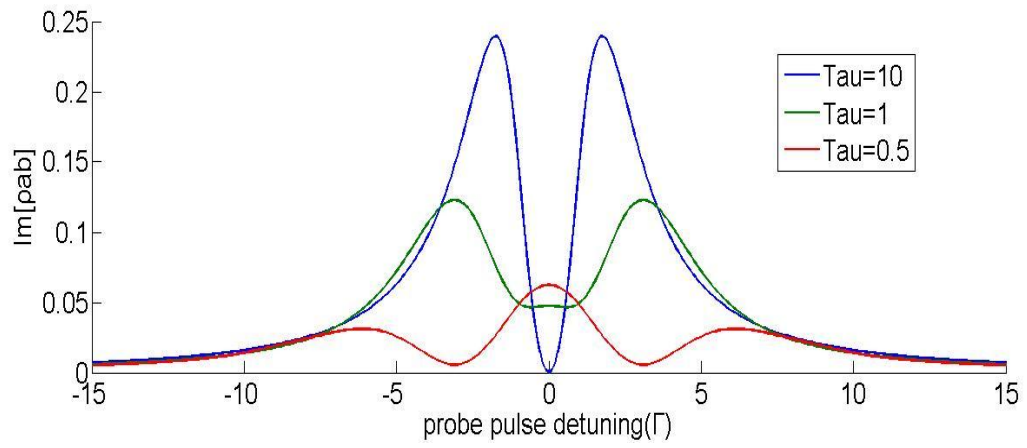


圖 10. 使用高斯雷射  $\Omega_{pr}(t) = c \Omega_{co}(t)$  時  $\tilde{\rho}_{ab}$  的虛部,  $c = 1$ ,  $\tau$  單位為  $(1/\Gamma)$



## 第六章 結論

解非線性微分方程式是一個困難並且花時間的問題，這篇論文中，對於解電磁波引發透明問題中提供了一種不一樣的方法。在 5.2 章中，用了 Adomian 方法在時域計算中的結果做對照，由結果所示確認了這篇論文裡所使用的方法是可靠的。所以如選擇了合適的初始機率分佈和與其分佈所對應的探測雷射光和控制雷射光，就可以得到電磁波引發透明系統中低能階躍吸收到高能階的吸收率。

在圖 10 之中，可以發現如果將雷射光的半高寬漸漸改小的話，就會出現即使是兩個雷射光都處在共振時也會出現一些吸收的情形，原因就出在於高斯雷射光俱有許多不同的頻率，當中也包含非共振的，又因為衰減比率相較於雷射的影響變得更顯著，因此吸收的現象就會變得明顯。

所以，如果計算的光學布洛赫方程式中使用的雷射光在可以用傅立葉級數展開的話，計算電磁波引發透明系統的問題可以從一個解非線性的微分方程式問題簡化成一個解聯立方程式的問題。

## 附錄 A 交互作用圖像

在這篇附錄裡，將會推導同調居量捕獲系統中如何用交互作用圖像得到黑暗態。

由時間相關的薛丁格方程式(time-dependent Schrodinger equation)：

$$i\hbar \frac{\partial \psi_s}{\partial t} = H_s \psi_s = (H_{s0} + H_{sL}) \psi_s \quad (\text{A.1})$$

其中下標“s”代表描述薛丁格圖像， $H_{s0}$  是自由原子的哈密頓算符，而  $H_{sL}$  是外加雷射光的哈密頓算符。

交互作用圖像中所定義的新變數

$$\begin{aligned} \psi_{int} &= e^{\frac{iH_{s0}t}{\hbar}} \psi_s \\ H_{int} &= e^{\frac{iH_{s0}t}{\hbar}} (H_{sL}) e^{-\frac{iH_{s0}t}{\hbar}} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

下標中 “int” 所描述的是交互作用圖像

因此

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_{int}}{\partial t} &= -e^{\frac{iH_{s0}t}{\hbar}} H_{s0} \psi_s + i\hbar e^{\frac{iH_{s0}t}{\hbar}} \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \\ &= e^{\frac{iH_{s0}t}{\hbar}} (-H_{s0} + H_s) \psi_s = e^{\frac{iH_{s0}t}{\hbar}} (H_{sL}) \psi_s \\ &= e^{\frac{iH_{s0}t}{\hbar}} (H_{sL}) \left( e^{-\frac{iH_{s0}t}{\hbar}} e^{\frac{iH_{s0}t}{\hbar}} \right) \psi_s \\ &= H_{int} \psi_{int} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

所以交互作用圖像的薛丁格方程式為

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{int}}{\partial t} = H_{int} \psi_{int} \quad (\text{A.4})$$

接著考慮如圖 11 中雙能階系統

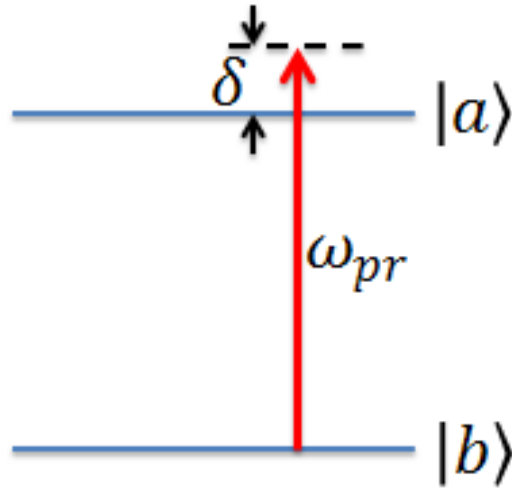


圖 11 雙能階系統

由偶極近似和旋波近似(Rotating wave approximation)

$$H_{SL} = -d \cdot E = -\frac{\hbar}{2} (|a\rangle\langle b| \Omega e^{-i\omega_{pr}t} + |b\rangle\langle a| \Omega e^{i\omega_{pr}t}) \quad (\text{A.5})$$

因此

$$H_{int} = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} (H_{SL}) e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} = -\frac{\hbar}{2} (\Omega e^{-i\delta t} |a\rangle\langle b| + \Omega e^{i\delta t} |b\rangle\langle a|) \quad (\text{A.6})$$

所以  $\Lambda$  型的三能階系統如圖 1，也可以用同樣的作法得到：

$$H_{int} = -\frac{\hbar}{2} (\Omega_{pr} e^{-i\delta t} |a\rangle\langle b| + \Omega_{pr} e^{i\delta t} |b\rangle\langle a|) - \frac{\hbar}{2} (\Omega_{co} e^{-i\Delta t} |a\rangle\langle c| + \Omega_{co} e^{i\Delta t} |c\rangle\langle a|) \quad (\text{A.7})$$

接著將  $H_{int}$  用矩陣來表示

$$H_{int} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{pr} e^{-i\delta t} & \Omega_{co} e^{-i\Delta t} \\ \Omega_{pr} e^{i\delta t} & 0 & 0 \\ \Omega_{co} e^{i\Delta t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

所以可以很容易得到三個歸一化(normalization)後的特徵態

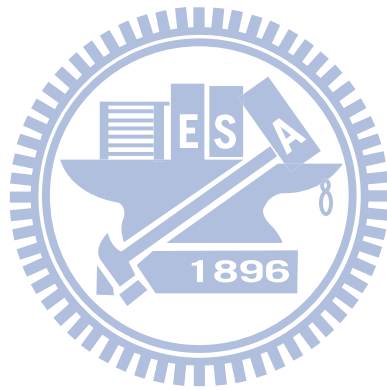
$$|C_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|a\rangle + \frac{\Omega_{pr}}{\Omega'} |b\rangle + \frac{\Omega_{co}}{\Omega'} |c\rangle)$$

$$|C_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a\rangle + \frac{\Omega_{pr}}{\Omega'} |b\rangle + \frac{\Omega_{co}}{\Omega'} |c\rangle)$$

$$|NC\rangle = \frac{\Omega_{co}}{\Omega'} |b\rangle + \frac{\Omega_{pr}}{\Omega'} |c\rangle$$

其中

$$\Omega' = \sqrt{\Omega_{pr}^2 + \Omega_{co}^2}$$





## 參考資料

- [1] A. Kasapi, M. Jain, G. Y. Yin, and S. E. Harris, Physical Review Lett.  
Volume 74, Number 13, 1995
- [2] J. P. Marangos , Journal of Modern Optics , vol. 45, no3 471-503 1998
- [3] Michael Fleischhauer, Atac Imamoglu, Jonathan P. Marangos , Reviews  
of modern physics, Volume 77 , April 2005
- [4] J. R. Kuklinski, U. Gaubatz, F. T. Hioe, K. Bergamann, Physical Review  
A, Volume 40, Number 11, 1989
- [5] Yee-Mou Kao, T. F. Jiang, Ite A. Yu, Physical Review E, Volume  
72, 066703, 2005
- [6] Fam Le Kien, K. Hakuta, Department of Applied Physics and  
Chemistry , University of Electro-Communications, Lecture notes , 2004
- [7] Binayak Dutta-Roy, Elements of Quantum Mechanics (New Age Science)
- [8] Graham Thomas Purves, Department of Physics, University of Durham,  
A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the  
degree of Doctor of Philosophy, August 2006.
- [9] 陳應誠, 余怡德, 物理雙月刊 23 卷 5 期, 2001 年 10 月
- [10] Sher Alam, Laser without Inversion and Electromagnetically Induced

Transparency (SPIE)

- [11] B. H. Bransden, C. J. Joachain, *Physics of Atoms and Molecules*, second edition (Pearson Education)

