

國立交通大學

機械工程研究所

碩士論文

三維擴張管分離流之探討

A Study of the Separation Flow in Three-Dimensional Sudden

Expansion Ducts



研究生：王宏文

指導教授：崔燕勇

中華民國九十三年八月

# 三維擴張管分離流之探討

## A Study of the Separation Flow in Three-Dimensional Sudden Expansion Ducts

研 究 生：王宏文

Student : Hong-Wen Wang

指導教授：崔燕勇

Advisor : Yeng-Yung Tsui

國 立 交 通 大 學  
機 械 工 程 研 究 所  
碩 士 論 文

A Thesis  
Submitted to Institute of Mechanical Engineering  
College of Engineering  
National Chiao Tung University  
in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master of Science  
in  
Mechanical Engineering  
August 2004  
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

The logo of National Chiao Tung University is a circular emblem. It features a gear-like outer border. Inside the circle, there is a stylized representation of a building or a bridge structure. The year '1896' is inscribed at the bottom of the inner circle. The text 'A Thesis' is positioned above the logo, and the rest of the text is arranged around and below it.

中華民國九十三年八月

# 三維擴張管分離流之探討

研究生：王宏文

指導教授：崔燕勇 博士

國立交通大學機械工程研究所

## 摘 要

本文是以數值方法探討穩態，不可壓縮流體，層流，且為牛頓流體之三維突張管流體分離現象，使用有限體積法作為離散化的方法，並使用非結構性網格，以 SIMPLE 法則求解。

由於影響流場的主要參數為雷諾數(Reynolds number)，擴張比(expansion ratio)和高寬比(aspect ratio)，因此本文主要是探討擴張比固定不變時，雷諾數(Reynolds number)和高寬比(aspect ratio)對流場的影響。

由於在三維突張管入口之速度分佈為均勻流場，為了使速度分佈能在擴張部前形成完全發展流，因此計算不同高寬比時能形成完全發展流所需之管道長度，而決定三維突張管之入口管道長度。對於計算結果的驗證，則是模擬相關之實驗，並且比對計算結果和實驗數據，同時測試格點對流場的影響。

對於雷諾數對流場的影響，則是計算在不同高寬比時，雷諾數的變化對流場對稱性所造成的影響，並且以管道中之迴流大小作為討論的依據，同時以管道的四週壁面及不同截面之流線圖，來表示流場之結構，以及探討流場之分離現象。

高寬比對流場的影響，則是計算雷諾數在固定不變時，不同高寬比對流場所造成的影響。最後則是探討不同高寬比管道及二維管道之臨界雷諾數，並且計算管道的些微不對稱對流場的影響，同時以迴流大小及速度分歧圖(Bifurcation Diagram) 作為討論的依據。

# **A Study of the Separation Flow in Three-Dimensional Sudden Expansion Ducts**

Student : Hong-Wen Wang

Advisor : Dr. Yeng-Yung Tsui

Institute of Mechanical Engineering  
National Chiao Tung University

## **ABSTRACT**

In this thesis, we study the bifurcation phenomenon of the steady, laminar, and incompressible flow in three-dimensional, sudden expansion ducts by numerical simulation, and the SIMPLE algorithm is applied; in literature, a symmetric flow in sudden expansion duct becomes asymmetric as the Reynolds number is increased beyond a critical value and such a symmetry breaking flow phenomenon is influenced by the expansion ratio, and the aspect ratio of the duct.

Our study is mainly in discussing the influence of the Reynolds number of the flow of ducts with different aspect ratio and using flow topology to describe the flow structure. And compute the critical Reynolds numbers including the two-dimensional sudden expansion duct and compare with slightly asymmetric ducts by using bifurcation diagram.

## 誌謝

感謝崔燕勇教授細心的指導，使我在功課上，思考方式上能有更新的啓發。同時也要感謝吳添成、胡育昌、呂治宇等學長的教導，以及邱建仁、黃弼鑫同學們的幫助，還有謝崇民、唐宜甫、沈詩珍等學弟妹們的陪伴，另外也感謝傅武雄教授與楊文美教授在論文上的建議，在此至上深深的謝意。

特別感謝父母親多年的養育之恩，在我碩士生涯中，一直不斷鼓勵著我，沒有他們就沒有今日的我，僅以此小小的成就獻給他們。最後感謝每一位在我人生的路途上，伴我成長的師長、朋友、同學、伙伴們，謝謝你們。



王宏文 2004.8.30

于交大機械研究所 計算流力實驗室

# 目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
符號說明	ix
第一章 緒論.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.3 研究方向.....	8
第二章 數學模式.....	9
2.1 幾何外形.....	9
2.2 統御方程式.....	9
2.3 邊界條件.....	10
第三章 數值方法.....	11
3.1 離散化.....	11
3.1-1 對流項.....	11
3.1-2 擴散項.....	13
3.1-3 源項.....	14
3.1-4 計算邊界壓力.....	15
3.1-5 求解壁面之剪應力.....	16
3.1-6 計算面上質量流率.....	16
3.2 SIMPLE 法則.....	18



3.2-1 壓力修正式.....	18
3.2-2 求解步驟.....	20
第四章 結果與討論.....	21
4.1 入口長度的計算.....	21
4.2 計算的測試.....	23
4.2-1 管道擴張部長度之測試.....	23
4.2-2 格點之測試.....	24
4.2-3 實驗數據的比對.....	24
4.3 雷諾數對流場的影響.....	25
4.3-1 $A=1/3$ 管道.....	25
4.3-2 $A=1$ 管道.....	26
4.3-3 $A=4$ 管道.....	28
4.3-4 $A=8$ 管道.....	30
4.4 管道高寬比對流場的影響.....	34
4.5 不同高寬比時之臨界雷諾數.....	37
4.5-1 $A=1$ 管道.....	37
4.5-2 $A=4$ 管道.....	38
4.5-3 $A=8$ 管道.....	39
4.5-4 2-D 突張管.....	40
第五章 結論.....	43
參考文獻.....	45



## 圖目錄

表 1	不同高寬比管道格點之安排方式.....	49
表 2	擴張部管道長度測試結果.....	50
表 3	格點測試結果.....	50
圖 2.1	三維平面對稱突張管幾何外形示意圖.....	51
圖 4.1	入口管道幾何外形及格點安排示意圖.....	52
圖 4.2	$a=24, Re=225$ , 管道 $y=0, z=0$ 中心截面, 速度分佈曲線變化圖.....	53
圖 4.3	$a=9, Re=225$ , 管道 $y=0, z=0$ 中心截面, 速度分佈曲線變化圖.....	54
圖 4.4	$a=3, Re=225$ , 管道 $y=0, z=0$ 中心截面, 速度分佈曲線變化圖.....	55
圖 4.5	$a=1, Re=225$ , 管道 $y=0, z=0$ 中心截面, 速度分佈曲線變化圖.....	56
圖 4.6	不同高寬比管道中心截面之完全發展速度分佈曲線和解析解之比較 .....	57
圖 4.7	三維突張管幾何外形及格點安排示意圖( $A=8$ ).....	58
圖 4.8	管道中心截面之速度分佈曲線和實驗數據(Fearn 等人[6])的比對圖...59	
圖 4.9	$A=1/3$ 管道, 不同雷諾數時中心截面之迴流大小.....	60
圖 4.10	$A=1/3$ , 不同雷諾數時, 管道中心截面之速度場流線圖.....	61
圖 4.11	$A=1/3$ , 不同雷諾數時, 管道中心截面之壓力等值線圖.....	62
圖 4.12	$A=1/3, Re=100$ 管道不同截面之流線圖.....	63
圖 4.13	$A=1$ 管道, 不同雷諾數時中心截面之迴流大小.....	64
圖 4.14	$A=1$ , 不同雷諾數時, 管道中心截面之速度場流線圖.....	65
圖 4.15	$A=1$ , 不同雷諾數時, 管道中心截面之壓力等值線圖.....	66
圖 4.16	$A=1, Re=75$ 管道不同截面之流線圖.....	67
圖 4.17	$A=1, Re=180$ 管道不同截面之流線圖.....	68
圖 4.18	$A=4$ 管道, 不同雷諾數時中心截面之迴流大小.....	69
圖 4.19	$A=4$ , 不同雷諾數時, 管道中心截面之速度場流線圖.....	70
圖 4.20	$A=4$ , 不同雷諾數時, 管道中心截面之壓力等值線分佈圖.....	71
圖 4.21	$A=4, Re=45$ 管道不同截面之流線圖.....	72
圖 4.22	$A=4, Re=90$ 管道不同截面之流線圖.....	73
圖 4.23	$A=4, Re=150$ 管道不同截面之流線圖.....	74
圖 4.24	$A=8$ 管道, 不同雷諾數時中心截面之迴流大小.....	75
圖 4.25	$A=8$ , 不同雷諾數時, 管道中心截面之速度場流線圖.....	76
圖 4.26	$A=8$ , 不同雷諾數時, 管道中心截面之壓力等值線分佈圖.....	77
圖 4.27-1	$A=8, Re=40$ 管道不同截面之流線圖.....	78

圖 4.27-2	$A=4, Re=40$ 管道不同截面之流線圖.....	79
圖 4.28-1	$A=8, Re=120$ 管道不同截面之流線圖.....	80
圖 4.28-2	$A=8, Re=120$ 管道不同截面之流線圖.....	81
圖 4.29-1	$A=8, Re=180$ 管道不同截面之流線圖.....	82
圖 4.29-2	$A=8, Re=180$ 管道不同截面之流線圖.....	83
圖 4.30	$Re=90$ , 不同高寬比時, 管道中心截面之迴流大小.....	84
圖 4.31	$Re=90$ , 不同高寬比時, 管道中心截面之迴流大小.....	85
圖 4.32	$Re=90$ , 不同高寬比時, 管道上壁面 limiting streamlines.....	86
圖 4.33	$Re=90$ , 不同高寬比時, 管道下壁面 limiting streamlines.....	87
圖 4.34	$Re=90$ , 不同高寬比時, 管道右側壁面 limiting streamlines.....	88
圖 4.35	$Re=150$ , 不同高寬比時, 管道中心截面之迴流大小.....	89
圖 4.36	$Re=150$ , 不同高寬比時, 管道中心截面之迴流大小.....	90
圖 4.37	$Re=150$ , 不同高寬比時, 管道上壁面 limiting streamlines.....	91
圖 4.38	$Re=150$ , 不同高寬比時, 管道下壁面 limiting streamlines.....	92
圖 4.39	$Re=150$ , 不同高寬比時, 管道右側壁面 limiting streamlines.....	93
圖 4.40	不對稱管道幾何外形示意圖.....	94
圖 4.41	$A=1$ , 對稱及不對稱管道中心截面之迴流大小.....	95
圖 4.42	對稱管道中心截面迴流大小之差距.....	95
圖 4.43	$A=1$ , 不同雷諾數時, $X=6.375$ 截面, 管道中心之 $W$ 速度分量速度分歧圖(Bifurcation diagram).....	96
圖 4.44	$A=4$ , 對稱及不對稱管道中心截面之迴流大小.....	97
圖 4.45	對稱管道中心截面迴流大小之差距.....	97
圖 4.46	$A=4$ , 不同雷諾數時, $X=6.375$ 截面, 管道中心之 $W$ 速度分量速度分歧圖(Bifurcation diagram).....	98
圖 4.47	$A=8$ , 對稱及不對稱管道中心截面之迴流大小.....	99
圖 4.48	對稱管道中心截面迴流大小之差距.....	99
圖 4.49	$A=8$ , 不同雷諾數時, $X=6.375$ 截面, 管道中心之 $W$ 速度分量速度分歧圖(Bifurcation diagram).....	100
圖 4.50	2-D 突張管之幾何外形及格點安排示意圖.....	101
圖 4.51	2-D 突張管, 不同雷諾數時之迴流大小.....	102
圖 4.52	2-D 突張管, 不同雷諾數時迴流大小之差距.....	102
圖 4.53	2-D 突張管, 不同雷諾數時, $X=6.375$ , 管道中心之 $W$ 速度分量速度分歧圖 (Bifurcation diagram) .....	103
圖 4.54	2-D, $A=8$ 突張管, 不同雷諾數時之迴流大小.....	104
圖 4.55	2-D, $A=8$ 突張管, 不同雷諾數時, $X=6.375$ , 管道中心之 $W$ 速度分量速度分歧圖 (Bifurcation diagram) .....	104
圖 4.56	不同突張管時, 中心截面之迴流大小.....	105

## 符號說明

符號	定義
Re	雷諾數
E	擴張比
A	高寬比
$u_{\max}$	最大入口速度
$u_{\text{mean}}$	入口平均速度
Q	入口體積流率
h	入口處管道高度
H	管道擴張部分之高度
W	管道之寬度
$L_1$	入口處管道長度
$L_2$	管道擴張部分之長度
$\vec{V}$	速度向量
u	X 方向之速度分量
v	Y 方向之速度分量
w	Z 方向之速度分量
P	壓力
$\nu$	動摩擦係數
$\rho$	密度
$\mu$	分子黏滯係數
$\dot{m}$	質量流率
$\vec{e}$	單位向量
$F_f$	通量
$S_f$	控容面之面積向量
$w_P$	權重因子

$\alpha_\phi, \alpha_p$	鬆弛因子
$\Delta V$	控容體之體積
$\tau$	壁面之剪應力
$x_1$	管道中心截面之第一迴流長度
$x_2$	管道中心截面之第二迴流長度
$x_3$	管道中心截面由擴張部入口至第三迴流區前端之長度
$x_4$	管道中心截面由擴張部入口至第三迴流區末端之長度
$\varepsilon$	管道之不對稱參數

### 下標

$b$	邊界
$C$	控制體積周圍網格之中心格點
$f$	控容面面之中點
$i$	表 $x, y, z$ 三方向
$P$	主格點
$w$	壁面
$\Phi$	變數

### 上標

$c$	對流項
$d$	擴散項
$p$	壓力
UD	上風差分法

# 第一章 緒論

## 1.1 前言:

本文是以數值方法探討三維突張管於穩態層流之流體分離現象，使用有限體積法作為離散化的方法，並使用非結構性網格，以 SIMPLE 法則求解。

在突張管道流中，由於管道截面的擴張，使流場產生壓力降，而使流體在進入擴張部時形成迴流區；另外，由於流體的不穩定性，當流體的雷諾數達到一臨界值時，會使對稱性流場產生對稱性破壞的現象，而形成不對稱的迴流區，因此流體的不穩定性為產生對稱性破壞的原因。

由於管道壁面的影響，在接近壁面處會因流體流動和非滑動壁面產生剪應力的作用，而使兩側壁面產生之黏滯力影響到管道中心，使管道中流場形成三維流動的現象；且對於對稱性擴張管而言，由於管道高寬比的不同，壁面所造成的影響也不同。

因此，在三維平面對稱突張管流場中，影響流場的主要參數為雷諾數 (Reynolds number,  $Re$ )，擴張比(expansion ratio,  $E$ )和高寬比(aspect ratio,  $A$ )。

## 1.2 文獻回顧

對於三維平面對稱突張管流場中，相關的實驗文獻報告中：在 Durst 等人 [3]的文獻報告中，使用流場視覺化及雷射測量儀，量測擴張比(E=3)，高寬比(A=9.2)之平面對稱突張管流場之中心截面流場之速度，得到以下結果：(1)Re=56:對稱性流場，(2)Re=114:不對稱性流場，且在管道上下分別產生不同大小的迴流區，(3)Re=252:在管道上下的其中一個壁面，會產生第三個迴流區；其中，雷諾數的定義為： $Re \equiv \frac{u_{\max} h}{\nu}$ ， $u_{\max}$ :最大入口速度，h:入口管道高度。

在 Cherdron 等人 [4]的文獻報告中，使用流場視覺化觀察 E=3，E=2 時，高寬比分別為 1，2，4，8 之平面對稱突張管流場之中心截面流場，以 LDV 量測 E=2，A=2 之平面對稱突張管中心截面之速度，得到以下結論：對於平面對稱突張管，當雷諾數在小於某一臨界值時，存在一對稱性流場，並且流場在雷諾數很小的暫態範圍內，由對稱性變為不對稱，其中:E=2，A=8，Re<150 時，流場為對稱性，且迴流大小隨雷諾數增加而變大，當雷諾數介於 150 和 185 時，流場為暫態，Re=185 時，流場變為不對稱;(其中，雷諾數的定義為： $Re \equiv \frac{u_{\max} h}{\nu}$ ， $u_{\max}$ :最大入口速度，h:入口管道高度)而經由速度的量測得知:雷諾數大於臨界值時，在背階角落產生的速度擾動，會在 shear layer 產生放大

的效果。

在 Fearn 等人[6]文獻報告中，分別以實驗及穩定性分析，研究以  $E = 3$ ， $A = 8$  之平面對稱突張管之非線性的流動現象，得到以下結果：經由穩定性分析之計算，得到一臨界雷諾數  $Re = 40.45 \pm 0.17\%$

；當雷諾數大於臨界雷諾數時，流場失去穩定性而產生對稱性破壞之分離現象；另外經由實驗量測及觀察中心截面之速度分佈，得到以下結果：(1)  $Re=26$ ：對稱性流場，(2)  $Re=60$ ：不對稱性流場，且在管道上下分別產生不同大小的迴流區，(3)  $Re=140$ ：在管道上下的其中一

個壁面，產生第三個迴流區。其中，雷諾數的定義為： $Re = \frac{u_{max} h}{\nu}$ ， $u_{max}$ ：最大入口速度， $h$ ：入口管道高度；另外量測及計算在管道出口方向 25.5MM 之截面管道中心之垂直速度分量，繪製速度分離圖(

Bifurcation diagram)，計算結果為：在臨界雷諾數前，可計算出唯一之穩定解，而雷諾數大於臨界雷諾數後，對於完全對稱之管道，計算結果可得到兩個穩定之不對稱解，但實驗量測結果無法觀察到臨界雷諾數，且大於臨界雷諾數後之量測結果於和計算結果無法吻合，因此另外計算一不對稱管道，管道上半部高度增加 0.05MM，計算結果可得到一個穩定之不對稱解，及一個不穩定之不對稱解，且量測結果和計算結果吻合，因此對於實驗而言，無法實驗出完美之對稱管道。

在 Durst 等人 [7]的文獻報告中，使用流場視覺化及 LDV，量測擴張比(E=2)，高寬比(A=8)之平面對稱突張管流場之中心截面流場，並計算二維之非穩態 Navier-Stokes 方程式，均得到以下結果：Re>125：不對稱性流場，且在管道上下分別產生不同大小的迴流區，若雷諾數持續升高，則較小之迴流其長度保持為常數，較大之迴流其長度隨雷諾數升高而變大。 $(Re \equiv \frac{u_{max}h}{\nu}$ ， $u_{max}$ :最大入口速度，h:入口管道高度)

對於流場在管道上下所產生的分離現象(Bifurcation phenomenon)的分析理論為穩定性分析，在 Sobey and Drazin[10]的文獻報告中，分別以線性\非線性穩定性分析及實驗，研究二維管道(E=3)之不穩定性及分歧現象，並且分析了 Jeffery-Hamel flow 之穩定性，結果為：在低雷諾數時，產生唯一的對稱性流場，而提高雷諾數時，流場開始不穩定，並且在管道高度方向產生分離現象，產生了二個穩定的不對稱穩態流場，繼續提高雷諾數時，得到八個穩定的不對稱解及七個不穩定解，當雷諾數相當高時，則得到周期性解，並且推論 Hopf 分歧現象的存在；並且 E=3 之臨界雷諾數為：Re=5.95  
 $(Re \equiv \frac{Q}{2\nu}$ , Q:入口體積流率)。

在 Rusak and Hawa[12] 的文獻報告中，使用弱非線性分析 (weakly nonlinear analysis) ，計算 E=3 之非穩態流場之臨界雷諾數 ( $Re \equiv \frac{uh}{\nu}$  ，u：入口平均速度，h：入口管道高度) ，結果為：當雷諾數小於臨界雷諾數(Re=53.8)時，流場為穩定之對稱狀態；當雷諾數大於臨界雷諾數時，則流場失去了穩定性(stability) ，成為不對稱之狀態。

在 Rusak and Hawa[13] 的文獻報告中，使用分離分析 (Bifurcation analysis) ，線性穩定性分析及直接數值模擬 (direct numerical simulation) ，分析二維對稱突張管(E=3) ，結果為：使用分離分析得到一臨界雷諾數( $Re_c = 53.8$ ) ，小於臨界雷諾數時，流場為穩定之對稱狀態，提高雷諾數  $Re \equiv \frac{uh}{\nu}$  ，u：入口平均速度，h：入口管道高度) ，則使流場產生高度方向之不對稱性，並且不對稱性之擾動分佈，是以  $\sqrt{Re - Re_c} (H / h)$  ，(h：入口高度，H：出口高度)方式成長；對於線性穩定性分析之結果，雷諾數小於臨界雷諾數時，流場為穩定之對稱狀態且擾動為漸進的穩定狀態，雷諾數大於臨界雷諾數時，則流場為不穩定之不對稱狀態且擾動為漸進的穩定狀態，直接數值模擬則是直接模擬背階角落處之流場；並且解釋對於流場失去穩定性的原因為：流場之渦流的擾動造成的對流效應和流場之黏滯力所造成之耗散之間的交互作用。

對於二維流場之計算，在王家康[1]的文獻報告中，以有限體積法，配合非結構性格點，使用 SIMPLE 法則，計算  $E=3$  之二維流場，所得到的流體分離現象與 Durst[4]文獻報告結果相符：(1)  $Re=56$ ：對稱性流場，(2)  $Re=114$ ：不對稱性流場，且在管道上下分別產生不同大小的迴流區，(3)  $Re=252$ ：在管道上下的其中一個壁面，會產生第三個迴流區；其中，雷諾數的定義為： $Re = \frac{u_{max} h}{\nu}$ ， $u_{max}$ ：最大入口速度， $h$ ：入口管道高度。

在潘燕峰[2]的文獻報告中，以有限體積法，分別使用四邊形與三角形之非結構性格點，使用 SIMPLE 法則，計算  $E=3$  之二維流場，所得到的流體分離現象與 Durst[4]的文獻報告結果相符：(1)  $Re=56$ ：對稱性流場，(2)  $Re=114$ ：不對稱性流場，且在管道上下分別產生不同大小的迴流區，(3)  $Re=252$ ：在管道上下的其中一個壁面，會產生第三個迴流區；其中，雷諾數的定義為： $Re = \frac{u_{max} h}{\nu}$ ， $u_{max}$ ：最大入口速度， $h$ ：入口管道高度；且對於動量方程式之對流項，採用不同的方法，比較各種差分的差異性。

對於三維平面對稱突張管流場之數值模擬，在 Schreck and Schafer [18]的文獻報告中，以有限體積法，配合 multigrid 方法，使用 SIMPLE 法則及平行化運算，分別計算  $E=3$  時  $A=2$ ， $A=5$  及二維流場，

在不同雷諾數之流場的迴流大小(reattachment length),由迴流大小的分歧,計算臨界雷諾數,結果為:在  $A=2$ ,  $A=5$  及  $2-D$  時之臨界雷諾數分別為:  $115.3$ ,  $94.2$ ,  $81.6$  ( $Re \equiv \frac{u_{max} h}{\nu}$ ,  $u_{max}$ : 最大入口速度,  $h$ : 入口管道高度)。

在 Chang 等人[19]文獻報告中以有限體積法,配合棋盤式格點安排,使用 SIMPLE 法則計算  $E=3$ ,  $Re=60$  不同的高寬比對流場對稱性所造成的影響,結果為:當  $A \leq 1.167$  時,流場為對稱性,而  $A > 1.167$  時,流場在高度方向產生對稱性破壞之分離現象;且當  $A \geq 4$  時,流

場中心截面則接近於二維平面。其中,雷諾數的定義為:  $Re = \frac{u_{mean} h}{\nu}$ ,  $u_{mean}$ : 入口平均速度,  $h$ : 入口管道高度。

在 Chang 等人 [20]文獻報告中,以有限體積法,配合棋盤式格點安排,使用 SIMPLE 法則計算  $E=3, Re=60$  不同的高寬比對流場對稱性所造成的影響,所得到的結果為:管道除了在高度方向產生分離現象,在管道左右方向也會產生分離現象,因此得到兩種流場模式,模式一為:流場在高度方向產生分離現象且在寬度方向為對稱性,另一種流場模式則在高度方向和寬度方向皆會產生對稱性破壞之分離現象,且臨界高寬比為  $A=7$ ;當  $A > 7$  時,才會產生第二種流場模式。其

中，雷諾數的定義為： $\text{Re} \equiv \frac{u_{mean} h}{\nu}$ ， $u_{mean}$ ：入口平均速度， $h$ ：入口管道高度。

### 1.3 研究方向

本文主要是以有限體積法，配合非結構性格點，使用 SIMPLE 法則，模擬三維突張管，並探討高寬比，雷諾數對流場造成的影響；以及探討不同高寬比突張管和二維突張管之臨界雷諾數，以及些微不對稱突張管對於臨界雷諾數之影響。



## 第二章 數學模式

### 2.1 幾何外形

對於本文中的三維平面對稱突張管，其幾何外形示意圖如(2.1)所示，其中定義擴張比(expansion ratio)， $E = \frac{H}{h}$ ；高寬比(aspect ratio)， $A = \frac{W}{H}$ ；其中  $h$  為入口處管道高度， $L_1$  為入口處管道長度， $H$  為管道擴張部分之高度， $L_2$  為管道擴張部分之長度， $W$  為管道之寬度，且使用直角座標系統為參考座標，定義管道長度方向為  $X$  軸，寬度方向為  $Y$  軸，高度方向為  $Z$  軸，且座標原點置於管道之中心位置。



### 2.2 統御方程式

假設流場為穩態之不可壓縮層流，重力忽略不記，且流體為牛頓流體；則流場之統御方程式如下：

連續方程式(Continuity equation)：

$$\nabla \cdot (\vec{V}) = 0 \quad (2.1)$$

動量方程式(Momentum equation)：

$$\rho \vec{V} \cdot \nabla (\vec{V}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.2)$$

定義無因次化變數為：

$$x_i^* = \frac{x_i}{h}, \quad \vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{u_{mean}}, \quad P^* = \frac{P}{\rho u_{mean}^2}, \quad \nabla^* = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \quad (2.3)$$

則(2.1)，(2.2)式可寫成以下之無因次化型式：

$$\nabla^* \cdot (\vec{V}^*) = 0 \quad (2.4)$$

$$\vec{V}^* \cdot \nabla^* \cdot (\vec{V}^*) = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \vec{V}^* \quad (2.5)$$

$$\text{其中：} \quad Re \equiv \frac{u_{mean} h}{\nu}, \quad (2.6)$$

$u_{mean}$ ：入口平均速度

$h$ ：入口管道高度， $h \equiv 1$

$\nu$ ：動摩擦係數， $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ， $\mu, \rho$ 皆為常數



## 2.3 邊界條件

### (1) 入口及出口

$$\text{入口處之速度爲一均勻流場，} \quad u^* = 1, \quad v^* = w^* = 0. \quad (2.7)$$

$$\text{出口則假設速度梯度等於零，} \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = \frac{\partial v^*}{\partial x^*} = \frac{\partial w^*}{\partial x^*} = 0 \quad (2.8)$$

### (2) 固定壁面

$$\text{壁面採用無滑動(no slip)的流動條件，} \quad u^* = v^* = w^* = 0. \quad (2.9)$$

# 第三章 數值方法

由第二章之統御方程式(2.4)，(2.5)可得下列通式:

$$\nabla \cdot (\bar{V}\Phi) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot (\nabla\Phi) + q \quad (3.1)$$

其中，上式為無因次化型式， $\Phi$  為速度， $q$  為壓力梯度。

本章就(3.1)式，使用有限體積法，將統御方程式離散化；首先將計算區域離散成有限之控制體積(control volume)，再用高斯散度定理(Gauss divergence theorem)，將體積分轉為面積分，然後以中點定理(Midpoint rule) 將面積分化為差分形式。



## 3.1 離散化(Discretization)

### 3.1-1 對流項(Convection term)： $\nabla \cdot (\bar{V}\Phi)$

先以高斯散度定理(Gauss divergence theorem)，將體積分轉為面積分:

$$\iiint_{\Delta v} (\nabla \cdot \bar{V}\Phi) dV = \iint_S (\bar{V}\Phi) \cdot d\bar{S} \quad (3.2)$$

然後以中點定理(Midpoint rule) 將面積分化為差分形式：

$$\iint_S (\bar{V}\Phi) \cdot d\bar{S} \approx \sum_f (\bar{V}\Phi)_f \cdot \bar{S}_f = \sum_f F_f^C \quad \text{因此} \quad F_f^C \equiv \dot{m}_f \Phi_f \quad (3.3)$$

其中， $F^c$ ：對流通量(flux)

下標  $f$ ：控制體積之任一面上之中點

$\dot{m}$  : 質量流率(mass flow rate)

在求解對流項的過程中，若採用高階準確的中央差分法(CD)，會造成解的震盪且不易收斂；若採用低階準確之上風法(UD)，會造成很大的數值擴散，所以，爲了求得一高準確度且易收斂之解，在此採用以中央差分和上風差分混合之法： $F^C = F^{UD} + \gamma(F^{CD} - F^{UD})$  (3.4)

上式中， $F^{UD}$  代表以上風差分法所得之對流通量， $F^{CD}$  爲以中央差分之對流通量， $\gamma$  係一介於 0 與 1 之值，此值通常取一接近 1 之值以確保高階準確。

$$F_f^C = \max(\dot{m}_f, 0)\Phi_p + \min(\dot{m}_f, 0)\Phi_C + \gamma[\dot{m}_f(w_f\Phi_p + (1-w_f)\Phi_C) - \max(\dot{m}_f, 0)\Phi_p + \min(\dot{m}_f, 0)\Phi_C] \quad (3.5)$$

其中， $w$  爲加權因子(weighting factor)

另爲確保疊代時之係數矩陣爲對角優勢(diagonally dominate)，而採用 deffered correction 法，上式中以上風法求得之第一項置於係數矩陣中，而將中央差分法與上風差分法之差所得的第二項置於源項中。

### 3.1-2 擴散項(Diffusion term) : $\frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot (\nabla \Phi)$

同理，將擴散項經由高斯散度定理及中點定理處理後可得：

$$\frac{1}{\text{Re}} \iiint_{\Delta V} \nabla(\nabla \Phi) dV \approx \frac{1}{\text{Re}} \sum_f F_f^d \quad (3.6)$$

因此  $F_f^d \equiv (\nabla \Phi)_f \cdot \vec{S}_f$  其中， $F^d$  : 擴散通量(flux) (3.7)

令  $\vec{S}_f = \vec{d} + (\vec{S}_f - \vec{d})$  (3.8)

$\vec{d}$  定義為一沿主格點 P 至相鄰格點 C 方向的向量，

對於  $\vec{d}$  的計算, 本文使用 over-relaxed approach :

$$\vec{d} \equiv \frac{|\vec{S}_f|}{\vec{e}_d \cdot \vec{e}_s} \vec{e}_d = \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta} \cdot \vec{S}_f} \vec{\delta} \quad (3.9)$$

此處  $\vec{e}_s$  表示沿  $\vec{S}_f$  之單位向量。

將(3.8)，(3.9)代入(3.6)分別得：

$$F_f^d = \frac{1}{\text{Re}} \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta} \cdot \vec{S}_f} (\Phi_c - \Phi_p) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \Phi_f (\vec{S}_f - \vec{d}) \quad (3.10)$$

將上式中第一項置於疊代係數中，第二項置於源項中。

### 3.1-3 源項(Source term) :

在源項中之壓力梯度，可同樣由高斯散度定理及中點定理得：

$$\nabla P = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \nabla P dV = \frac{1}{\Delta V} \iint_s P d\vec{S} \approx \frac{1}{\Delta V} \sum_f P_f \vec{S}_f \quad (3.11)$$

$$\text{其在 } \vec{e}_i \text{ 方向之分量：} \quad \frac{\partial P}{\partial x_i} = \nabla P \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{\Delta V} \sum P_f (\vec{S}_f \cdot \vec{e}_i) \quad (3.12)$$

對於可壓縮流，源項中包括部分擴散項因其仍為散度形式，因此仍可利用高斯定理將其轉換成通過格面的擴散通量形式，此通量中的速度

微分  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  及  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  可利用如  $\frac{\partial P}{\partial x_i} = \nabla P \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{\Delta V} \sum P_f (\vec{S}_f \cdot \vec{e}_i)$  般的

近似求得。

由前面推得之對流項、擴散項及源項合併可得：

$$A_p \Phi_p = \sum_c A_c \Phi_c + Q \quad (3.13)$$

$$\text{其中 } A_p = \sum_c A_c \quad (3.14)$$

$$A_c = \frac{1}{\delta \cdot \vec{S}_f} \left[ \frac{\text{Re} |\vec{S}_f|^2}{\delta \cdot \vec{S}_f} + \max(\dot{m}_f, 0) \right] \quad (3.15)$$

$$Q = \sum_c \left\{ -\gamma \left[ \dot{m}_f (w_f \Phi_p + (1 - w_f) \Phi_c) - \max(\dot{m}_f, 0) \Phi_p + \min(\dot{m}_f, 0) \Phi_c \right] \right. \\ \left. + \sum_f \frac{1}{\text{Re}} \nabla \Phi_f (\vec{S}_f - \vec{d}) + q_p \Delta V \right\}$$

$$\text{下標 } C : \text{ 控制體積周圍網格之中心格點} \quad (3.16)$$

下標  $f$  : 控制體積之任一面上之中點

爲了使(3.13)式之非線性方程式能穩定的收斂，在此加入一常用之鬆弛因子  $\alpha$  (under-relaxation factor)，其能有效的使疊代過程穩定，適當的鬆弛因子介於 0 與 1 之間，則上式可表示爲：

$$\frac{A_p}{\alpha} \Phi_p = \sum_c A_c \Phi_c + \frac{Q}{\alpha} \quad (3.17)$$

### 3.1-4 計算邊界壓力：

於計算壓力梯度時須要用到邊界上之壓力，在此壓力可由下列式

子求得： $P_b - P_p = \nabla P \cdot \vec{\delta}$  (3.18)

其中， $b$  表示網格之任意一面； $\vec{\delta}$  代表  $P$  到  $b$  之距離向量。

對於壓力梯度可由下式近似：

$$\nabla P = \frac{1}{\Delta V} \sum_f P_f \vec{S}_f = \frac{1}{\Delta V} \left( P_b \vec{S}_b + \sum_{f \neq b} P_f \vec{S}_f \right) \quad (3.19)$$

此處下標  $f$  表示除了  $b$  之外的其餘面，

因此得到邊界上之壓力爲： $P_b = \frac{\left( P_p + \frac{1}{\Delta V} \sum_{f \neq b} P_f \vec{S}_f \cdot \vec{\delta} \right)}{\left( 1 - \frac{1}{\Delta V} \vec{S}_b \cdot \vec{\delta} \right)}$  (3.20)

### 3.1-5 求解壁面之剪應力(shear stress):

以 P 代表靠近壁面主格點， $\vec{S}$  為格子於壁上之面向量，P 點之速度為  $\vec{V}_p$ ，壁面朝向格子內之法線向量

$$\text{爲: } \vec{n} = -\frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} = \frac{-(S_x \vec{i} + S_y \vec{j})}{|\vec{S}|} \quad (3.21)$$

因此，垂直壁面的速度分量：

$$\vec{V}_p^\perp = (\vec{V}_p \cdot \vec{n})\vec{n} = \frac{1}{|\vec{S}|^2} \left[ (u_p S_x^2 + v_p S_x S_y) \vec{i} + (u_p S_x S_y + v_p S_y^2) \vec{j} \right] \quad (3.22)$$

可得平行壁面之速度分量:

$$\vec{V}_p^\parallel = \vec{V}_p - \vec{V}_p^\perp = \frac{1}{|\vec{S}|^2} \left[ (u_p S_y^2 - v_p S_x S_y) \vec{i} + (-u_p S_x S_y + v_p S_x^2) \vec{j} \right] \quad (3.23)$$

$$\text{所以壁面之剪應力爲: } \vec{\tau} = \mu \frac{|\vec{S}| |\vec{V}_p^\parallel|}{\delta n} \quad (3.24)$$

$\delta n$  : P 點至壁面之垂直距離

### 3.1-6 計算面上質量流率

為滿足連續方程式質量守恆定律，必須計算面上之速度，在此以類似 Rhie & Chow 之線性內插法計算。

將(3.13)式中之壓力項自源項中提出，並將(3.13)式寫成如下的式

$$\text{子: } \vec{V}_p = \vec{H} - \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_p \nabla P_p \quad (3.25)$$

$$\text{其中 } \bar{H} = \frac{\sum A_c \bar{V}_c + Q'}{A_p} \quad ; \quad Q' : \text{ 不含壓力之源項} \quad (3.26)$$

類似(3.25)式之表示方式，格子面上之動量方程式可寫成：

$$\bar{V}_f = \bar{H}_f - \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f \nabla P_f \quad (3.27)$$

$$\text{其中 } \bar{H}_f = \bar{V}_f + \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f \overline{\nabla P}_f \quad (3.28)$$

代入(3.27)式可得：

$$\bar{V}_f = (\bar{V}_f + \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f \overline{\nabla P}_f) - \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f \nabla P_f \quad (3.29)$$

上標” — ” 表示由控制體積之中心格點 P 及另一共面 f 相鄰之

C 格點內插而得，如下所示：

$$\overline{\nabla P}_f = w_p \nabla P_C + (1 - w_p) \nabla P_p \quad (3.30)$$

$$\bar{V}_f = w_p \bar{V}_C + (1 - w_p) \bar{V}_p \quad (3.31)$$

至於  $\left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f$  可由下式近似之：

$$\left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_C + \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_p \right] \quad (3.32)$$

所以質量流率可寫為：

$$\begin{aligned}\dot{m}_f &= \rho \bar{V}_f \cdot \bar{S}_f \\ &= \rho_f \bar{V}_f \cdot \bar{S} - \rho_f \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f (\nabla P_f \cdot \bar{S}_f - \nabla \bar{P}_f \cdot \bar{S}_f) \quad (3.33)\end{aligned}$$

## 3.2. SIMPLE 法則

### 3.2-1. 壓力修正式

根據 Patankar 所提的 SIMPLE 法則，將前次疊代的壓力  $P^*$ ，代入動量方程式中，可解出中心格點  $P$  之速度場  $\bar{V}^*$ ，此時速度場  $\bar{V}^*$  及壓力場  $P^*$  仍不滿足連續方程式，因此需再修正，而修正後之速度及壓力假設為  $\bar{V}^{**}$  及  $P^{**}$ ，根據 Patankar 之假設，其速度修正量及壓力修正量表示成下面之關係：

$$\bar{V}'_p = - \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_p \nabla P'_p \quad (3.34)$$

$$P'_p = P_p^{**} - P_p^* \quad (3.35)$$

同理，格子面上速度之速度修正式：

$$\bar{V}'_f = \bar{V}_f^{**} - \bar{V}_f^* = - \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f \nabla P'_f \quad (3.36)$$

由(3.36)式代入(3.36)式可得修正之質量流率：

$$\begin{aligned}\dot{m}_f^{**} &= \dot{m}_f^* + \rho_f \bar{\mathbf{v}}_f' \cdot \bar{\mathbf{S}}_f = \dot{m}_f^* - \rho_f \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot \bar{\mathbf{S}}_f \\ &= \dot{m}_f^* - \rho_f \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot \bar{\mathbf{d}} - \rho_f \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot (\bar{\mathbf{S}}_f - \bar{\mathbf{d}})\end{aligned}\quad (3.37)$$

此處  $\bar{\mathbf{d}}$  是以 over-relaxed 法：
$$\bar{\mathbf{d}} = \frac{|\bar{\mathbf{S}}_f|^2}{\bar{\boldsymbol{\delta}} \cdot \bar{\mathbf{S}}_f} \bar{\boldsymbol{\delta}} \quad (3.38)$$

將(3.38)代入(3.37)式得：

$$\dot{m}_f' = -\rho_f \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f \frac{|\bar{\mathbf{S}}_f|^2}{\bar{\boldsymbol{\delta}} \cdot \bar{\mathbf{S}}_f} (P_C' - P_p') - \rho_f \left( \frac{\Delta V}{A_p} \nabla P' \right)_f \cdot (\bar{\mathbf{S}}_f - \bar{\mathbf{d}}) \quad (3.39)$$

$$\left( \frac{\Delta V}{A_p} \nabla P' \right)_f = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\Delta V}{A_p} \nabla P' \right)_p + \left( \frac{\Delta V}{A_p} \nabla P' \right)_c \right] \quad (3.40)$$

令修正後之速度場滿足連續方程式：
$$\sum_f \dot{m}_f^{**} = 0 \quad (3.41)$$

則可得到壓力修正方程式：

$$A_p P_p' = \sum_C A_C P_C' + S_{p1} + S_{p2} \quad (3.42)$$

其中 
$$A_C = \rho_f \left( \frac{\Delta V}{A_p} \right)_f \frac{|\bar{\mathbf{S}}_f|^2}{\bar{\boldsymbol{\delta}} \cdot \bar{\mathbf{S}}_f} \quad (3.43)$$

$$S_{p1} = \sum_f \dot{m}_f^* \quad (3.44)$$

$$S_{p2} = \sum_f \rho_f \left( \frac{\Delta V}{A_p} \nabla P' \right)_f \cdot (\bar{\mathbf{S}}_f - \bar{\mathbf{d}}) \quad (3.45)$$

由(3.42)可求得壓力之修正量  $P'$ ，可用來修正速度之值及質量流率

而求得  $\vec{V}^{**}$  及  $m_f^{**}$ 。

### 3.2-2 求解步驟:

1. 給初始速度  $u_i$  及壓力  $P^*$
2. 解動量方程式得到預測之速度場  $\vec{V}_p^*$ ，並解出面上之速度  $\vec{V}_f^*$
3. 由壓力修正式解得  $P'$
4. 由速度修正式計算  $\vec{V}_p^{**}$  及  $\vec{V}_f^{**}$  等
5. 重覆步驟 2~4，直到獲得收斂解

一般結構性網格之係數矩陣為只具有數個對角線的 banded matrix，而使用非結構性網格之係數矩陣不具此性質，因此，一般常用之 line solvers 及 Stone's SIP 皆不適用，point solvers 雖可用於解 unbanded matrix，但其缺點為收斂速度太慢，在此採用 preconditioned conjugate gradient methods。

對於壓力修正方程式，其係數矩陣具對稱性質，因而採 ICCG(Incomplete Cholesky Conjugate Gradients)法，而動量方程式因其係數矩陣不具對稱性質，因此採 BICG(Biconjugate Gradients)法。

## 第四章 結果與討論

### 4.1 入口長度的計算

爲了使進入管道擴張部分時之流場爲完全發展流，則入口處管道須有足夠的長度，才能使入口的均勻流場在進入管道擴張部分前形成完全發展流，而由均勻流場至形成完全發展流所需之距離，稱爲 entrance length。

因此，分別計算高度爲  $h=1$ ，長度爲  $60h$ ，高寬比分別爲  $a=1,3,9,24$  之矩形管道，其中高寬比的定義爲  $a=\frac{W}{h}$ ；由於在管道接近壁面處之流場型態爲邊界層流場，因此格點的安排採用非均勻網格，將三個方向接近壁面處之網格，均以等比級數局部加密；其幾何外形及格點的建立如圖 4.1 所示；採用中央差分和上風差分混合之法，並取  $r=0.5$  計算，且速度和壓力皆收斂至  $10^{-3}$ 。

在本文的計算中，定義管道中最大速度變化小於 1% 時的 X 方向距離作爲 entrance length；計算所得結果爲：

1.  $a=24$ ， $Re=225$  之 entrance length 爲：21.54 最大速度爲 1.5 倍入口速度。圖 4.2

2.  $a=9$ ， $Re=225$  之 entrance length 爲：39.95 最大速度爲 1.58 倍

入口速度。圖 4.3

3.a=3，Re=225 之 entrance length 爲：45.92 最大速度爲 1.82 倍

入口速度。圖 4.4

4.a=1，Re=225 之 entrance length 爲：53.31 速度爲 2.02 倍入口

速度。圖 4.5

另外，對於不同高寬比管道之完全發展流的速度分佈曲線，可由級數求解得到解析解(Spiga and Morini[24])：其中，完全發展流之速度分佈曲線可表示爲：

$$V(y, z) = \frac{16A^2}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin(n\pi \frac{y}{w}) \sin(m\pi \frac{z}{h})}{nm(A^2 n^2 + m^2)} \quad (4.1)$$

因此將計算結果之完全發展流的速度分佈曲線和解析解比較，結果如圖 4.6 所示，解析解所得到之最大速度和計算結果十分接近，但由(4.1)式無法計算出實際之質量流率，所以將解析解之質量流率，換算爲實際之質量流率後，和計算結果有些微差距。

由上述結果可以得到以下結論：

- a. 當管道之高寬比夠大時(a=24)，最大速度爲 1.5 倍入口速度，和假設管道之高寬比無窮大時所得到之解析解的最大速度吻合；而 a=1 時(即管道截面爲正方形)，最大速度爲 2.02 倍入口速度和假

設圓形截面管道達到完全發展流時所得到之解析解的最大速度為 2 倍入口速度接近，即正方形截面管道已接近軸對稱。

- b. 隨著高寬比的增加，最大速度則降低，所需之 entrance length 降低。
- c. 因此，對於本文所計算之各種不同高寬比之管道，除了在  $a=1, 3$  管道計算高雷諾數時( $Re=150-200$ )，採用入口管道長度為  $50h$  外，其餘不同高寬比之管道均採用入口管道長度為  $30h$ ，並且使所有計算之均勻流場，均能在擴張部前形成完全發展流。

## 4.2 計算的測試



依據前述之數學模式及數值方法，格點的安排採用非均勻網格，將三個方向接近壁面處以及背階角落處之網格，均以等比級數局部加密；若所計算之幾何外形長寬高的比例相差太大，會使計算結果較不易收斂，因此格點的安排採用固定  $z$  方向格點數，再依長寬高的比例，分配  $x, y$  方向格點數。其幾何外形如圖 4.7，格點的建立如表 1 所示。

## 4.2-1 管道擴張部長度之測試

爲了使擴張部出口速度梯度爲零之出口條件不影響所計算之迴流區，因此分別計算擴張部管道長度爲 30h，40h，50h，60h， $Re=225$ ， $A=8$  時，擴張部管道長度對於迴流大小的影響。

而由計算結果得知，如表 2，所有計算管道中之最大迴流長度爲 25.6，且擴張部管道長度大於 50h 時，將不影響迴流的大小；因此本文所計算之所有管道，採用擴張部管道長度 50h，且速度梯度爲零之出口條件，均不會影響迴流的大小。

## 4.2-2 格點之測試



依前述之幾何外形及格點的建立，計算  $x,y$  方向格點數固定，入口管道  $z$  方向格點數分別爲 6,8,10,12,14 時， $A=8$ ， $Re=90$  之管道；而計算結果爲  $z$  方向格點數大於 12 時，計算結果得到之中心截面迴流大小接近不變，如表(三)。

因此本文所計算之所有管道，均採用入口管道  $z$  方向格點數爲 12， $x,y$  方向格點數依長寬高的比例分配。

### 4.2-3 實驗數據的比對

其幾何外形及格點的建立如前述；採用中央差分和上風差分混合之法，並取  $r=0.5$  計算，且速度和壓力皆收斂至  $10^{-3}$ ，模擬 Fearn 等人 [6] 的實驗結果 ( $E=3, A=8$ )，比對管道中心截面之速度分佈曲線，經由和實驗數據的比對，所得結果如圖 (4.8) 所示；計算結果在  $Re=39(Re=26, \text{Fearn}[6])$ ， $Re=90(Re=60, \text{Fearn}[6])$  時和實驗結果十分吻合；而計算結果在  $Re=210(Re=140, \text{Fearn}[6])$  時略大於實驗結果；可能原因為，實驗之流場已接近非穩態流場，因此模擬結果有較大之誤差。



## 4.3 雷諾數對流場的影響

### 4.3-1 $A=1/3$ 管道

以  $A=1/3$  之幾何外形(即入口管道截面為正方形)，計算不同之雷諾數，並且計算迴流在中心截面的大小(reattachment length)，所得結果如圖(4.9)，隨雷諾數之增加，流場上下迴流的大小完全相等，而不會產生不對稱性。圖(4.10)為管道中心截面之速度場流線圖，圖(4.11)為管道中心截面之壓力等值線分佈圖。

另外，由圖(4.12)， $A=1/3$ ， $Re=100$  管道不同截面之流線圖，管

道中之迴流在四週接近壁面處最大，愈接近管道中心則迴流愈小，即管道之流場已接近軸對稱；經由不同截面之流線圖，可看出管道流場之立體結構，且由最接近壁面之流線(limiting streamlines)，[21]可看出管道流場之分離現象。

依據流線在幾何上之定義[21]，因流線流動方向不同產生之界面，可分為兩種：若流線方向是由此界面朝四周流動，稱為 line of reattachment [21]，若流線方向是由四周朝此界面流動，稱為 line of separation [21]；而流線在幾何上之奇點，可分為兩種：若流線方向由此奇點向四周流出，稱為節點(nodal point) [21]，若流線方向由四周朝此奇點流入，則稱為鞍點(saddle point) [21]，且兩個節點之間，一定會有一個鞍點；而迴流之中心焦點(spiral-focal point) [21]，可分為兩種：若流線由此中心焦點流入，稱為 attracting spiral-focal point，若流線由此中心焦點流出，稱為 repelling spiral-focal point，因此在四周接近壁面處，各會產生 line of reattachment，且在管道兩側接近壁面處，會產生上下對稱之 attracting spiral-focal point，在管道上下接近壁面處，各會產生 nodal point of attachment。

## 4.3-2 A=1 管道

以 A=1 之幾何外形(即擴張部管道截面為正方形)，計算不同之雷諾數，並且計算迴流在中心截面的大小(reattachment length)。

所得結果如圖(4.13)，當雷諾數小於臨界值時( $Re_c = 103$ )，流場上下迴流的大小接近相等，且不對稱性隨著雷諾數持續增加而變大，當雷諾數大於  $Re_c = 103$  時，開始變為一大一小之不對稱迴流；且隨雷諾數之增加，小迴流趨近於一定值，而大迴流則隨雷諾數之增加而變大，圖(4.14)為管道中心截面之速度場流線圖，圖(4.15)為管道中心截面之壓力等值線分佈圖。

另外，由圖(4.16)， $Re=75$ ，管道不同截面之流線圖，其中：管道中之迴流和 A=1/3 管道相同，在四週接近壁面處最大，愈接近管道中心則迴流愈小，即管道之流場已接近軸對稱；且在四周接近壁面處，各會產生 line of reattachment，在管道兩側接近壁面處，會產生上下對稱之 attracting spiral-focal point，在管道上下接近壁面處，各會產生 nodal point of attachment。

由圖(4.17)， $Re=180$ ，管道不同截面之流線圖，其中：由於雷諾數已大於臨界雷諾數，管道中之迴流開始變為上下不對稱但左右對稱；因此在四周接近壁面處，各會產生 line of reattachment，但因迴流大

小不同，在管道上下接近壁面處之 line of reattachment 位置不同，在管道兩側接近壁面處之 line of reattachment，則由上下對稱變為不對稱；同時，在管道上下接近壁面處之流線，開始產生分離現象，而產生兩個 nodal point of attachment 及一個 saddle point，而在管道兩側接近壁面處，除了產生上下不對稱之 attracting spiral-focal point，也因分離現象而產生一個 saddle point，以及一個 repelling spiral-focal point。

### 4.3-3 A=4 管道

以 A=4 之幾何外形，計算不同之雷諾數，並且經由計算找出最接近壁面且速度為零之位置，作為迴流長度(reattachment length)；且以計算管道中心截面之迴流長度，作為討論的依據。

所得結果如圖(4.18)，當雷諾數小於臨界值  $Re_{c1} = 66$  時，流場上下迴流的大小完全相等，當  $Re > 66$  時，迴流大小開始產生些微的不對稱，且不對稱性隨著雷諾數持續增加而變大，當雷諾數大於  $Re_{c2} = 68.25$  時，開始變為一大一小之不對稱迴流；且隨雷諾數之增加，小迴流趨近於一定值，而大迴流則隨雷諾數之增加而變大；雷諾數大於  $Re_{c3} = 142.5$  時，流場中心截面開始產生第三個迴流，隨雷諾數之增加，最大迴流隨雷諾數之增加而變大，其餘兩個迴流則趨近於一定值；圖

(4.19)為不同雷諾數時，管道中心截面之速度場流線圖，圖(4.20)為管道中心截面之壓力等值線分佈圖。

另外,由圖(4.21)，為  $Re=45$ ，管道不同截面之流線圖。其中：因雷諾數尚未達到臨界雷諾數，在四周接近壁面處，各會產生 line of reattachment，且皆為對稱；在管道兩側接近壁面處，會產生上下對稱之 attracting spiral-focal point，nodal point of attachment 及 saddle point，而在管道上下接近壁面處，則因分離現象產生對稱之 nodal point of attachment 及一個 saddle point。

由圖(4.22)，為  $Re=90$ ，管道不同截面之流線圖，其中：由於雷諾數已大於臨界雷諾數，管道中之迴流開始變為上下不對稱但左右對稱，且在管道中小迴流區之兩側壁面，產生較小之迴流；因此在接近上壁面處，除了會產生 line of reattachment，同時在  $x=4.5$ ， $y=-4.5$  及  $y=0$  處產生 nodal point of attachment；而在接近下壁面處，因兩側壁面產生之較小迴流的影響，除了會產生 line of reattachment，同時在  $y=0$ ，接近兩側壁面及較小迴流處產生 nodal point of attachment，且分別在兩個 nodal point of attachment 間產生 saddle point；在管道兩側接近壁面處因產生之較小迴流的影響，除了產生 attracting spiral-focal point，也因分離現象而產生兩個 saddle point，以及一個 repelling spiral-focal point。

由圖(4.23)，爲  $Re=150$ ，管道不同截面之流線圖，其中：由於雷諾數已大於第三臨界雷諾數，管道中之迴流開始變爲上下不對稱但左右對稱，且在管道中小迴流區之兩側壁面產生之較小迴流發展成管道中第三個迴流區；因此在接近上壁面處，除了會產生 line of reattachment，同時在  $y=2$  及  $y=-2$  處產生 nodal point of attachment 及在  $y=0$  處產生 saddle point；而在接近下壁面處，因第三個迴流區的影響，除了會產生 line of reattachment，在兩個迴流區間產生 line of separation，同時產生五個 nodal point of attachment 及三個 saddle point，而在 line of separation 上則產生三個 nodal point of separation 及兩個 saddle point。

在管道兩側接近壁面處因產生之第三個迴流區的影響，除了產生 attracting spiral-focal point，也因分離現象而產生兩個 saddle point，以及一個 repelling spiral-focal point。

#### 4.3-4. $A=8$ 管道

以  $A=8$  之幾何外形，計算不同之雷諾數，並且經由計算找出最接近壁面且速度爲零之位置，作爲迴流長度(reattachment length)；且以計算管道中心截面之迴流長度，作爲討論的依據。

所得結果如圖(4.24),當雷諾數小於臨界值  $Re_{c1} = 61.5$ 時,迴流的

大小完全相等，當  $Re > 61.5$  時，迴流大小開始產生些微的不對稱，且不對稱性隨著雷諾數持續增加而變大，當雷諾數大於  $Re_{c_2} = 67.5$  時，開始變為一大一小之不對稱迴流；且隨雷諾數之增加，小迴流趨近於一定值，而大迴流則隨雷諾數之增加而變大；當雷諾數大於  $Re_{c_3} = 120$  時，流場中心截面開始產生第三個迴流，隨雷諾數之增加，最大迴流隨雷諾數之增加而變大，其餘兩個迴流則趨近於一定值；當雷諾數增加至 210 時，三個迴流產生明顯的增大，若持續增加雷諾數，流場即將開始便為非穩態。圖(4.25)為不同雷諾數時，管道中心截面之速度場流線圖，圖(4.26)為管道中心截面之壓力等值線分佈圖。

另外，由圖(4.27-1)，(4.27-2)，為  $Re=40$ ，管道不同截面之流線圖。其中：因雷諾數尚未達到臨界雷諾數，在四周接近壁面處，各會產生 line of reattachment，且皆為對稱；在管道兩側接近壁面處，會產生上下對稱之 attracting spiral-focal point，nodal point of attachment 及 saddle point，而在管道上下接近壁面處，則因分離現象產生對稱之 nodal point of attachment 及一個 saddle point。

由圖(4.28-1)，(4.28-2)，為  $Re=120$ ，管道不同截面之流線圖，其中：由於雷諾數已大於臨界雷諾數，管道中之迴流開始變為上下不對稱但左右對稱，且在管道中小迴流區之兩側壁面，產生較小之迴流；

因此在接近上壁面處，除了會產生 line of reattachment，同時在  $y=6$  及  $y=-6$  處產生 nodal point of attachment 及在  $y=0$  處產生 saddle point；而在接近下壁面處，因兩側壁面產生之較小迴流的影響，除了會產生 line of reattachment，同時在  $y=0$ ，接近兩側壁面及較小迴流處產生 nodal point of attachment，且分別在兩個 nodal point of attachment 間產生 saddle point；在管道兩側接近壁面處因產生之較小迴流的影響，除了產生 attracting spiral-focal point，也因分離現象而產生兩個 saddle point，以及一個 repelling spiral-focal point。

由圖(4.29-1)，(4.29-2)，為  $Re=180$ ，管道不同截面之流線圖，其中：由於雷諾數已大於第三臨界雷諾數，管道中之迴流開始變為上下不對稱但左右對稱，且在管道中小迴流區之兩側壁面產生之較小迴流發展成管道中第三個迴流區；因此在接近上壁面處，除了會產生 line of reattachment，同時在  $y=6$  及  $y=-6$  處產生 nodal point of attachment 及在  $y=0$  處產生 saddle point；而在接近下壁面處，因第三個迴流區的影響，除了會產生 line of reattachment，在兩個迴流區間產生 line of separation，同時產生九個 nodal point of attachment 及七個 saddle point，而在 line of separation 上則產生三個 nodal point of separation 及兩個 saddle point；在管道兩側接近壁面處因產生之第三個迴流區的影響，除了產生

attracting spiral-focal point，也因分離現象而產生兩個 saddle point，以及一個 repelling spiral-focal point。

由於壓力為造成流體流動的原因，而且流場中壓力的變化會導致流體流動方向的改變；由本文的計算結果，如圖(4.11)，(4.15)，(4.26)，在不同雷諾數時，管道中心截面之壓力分佈情形；當雷諾數增大時，在背階角落開始產生壓力的劇烈變化，當雷諾數達臨界值時，則開始產生對稱性破壞的現象。

對於對稱之流場，在管道出口處時，壓力瞬間下降，且管道上下之壓力均相等，遠離出口處後，壓力反而變為上升，過了迴流區後壓力才開始下降；而對於不對稱之流場，在管道出口處時，壓力變為不對稱，一邊為下降，另一邊則為上升，遠離出口處後，壓力變為上升，過了迴流區後壓力才開始下降。

## 4.4 管道高寬比對流場的影響

依據前述之數學模式及數值方法，計算不同高寬比突張管道在  $Re=90$  及  $Re=150$  時之流場；其幾何外形及格點的安排如圖(4.7)及表(二)所示。

當  $Re=90$  時，計算結果如圖(4.30)，圖(4.31)

1. 當  $A \leq 0.08$  時，管道中不會產生迴流。
2. 當  $A \leq 1.25$  時，擴張部中心截面上下壁面之迴流長度皆相等，即流場為對稱性流場且迴流長度隨高寬比增加而變大。
3. 當  $1.25 \leq A \leq 3.75$  時，擴張部中心截面上下壁面之迴流長度變為一大一小，即流場變為不對稱性流場，且較大迴流長度隨高寬比增加而變大，較小迴流長度隨高寬比增加而變小。
4. 當  $A > 3.75$  時，擴張部中心截面上下壁面之迴流長度為一大一小，且皆接近於一定值；其中較大迴流長度接近於 10.15，較小迴流長度接近於 3.67。

由圖(4.32)-(4.34)，分別為  $Re=90$ ，不同高寬比時，上下及右側壁面之 limiting streamlines：由上下壁面之 limiting streamlines 可知，隨著高寬比的增加，流場在  $y$  方向開始產生分離現象，當  $A=1.67$  時，開始產生 nodal point of attachment 及 saddle point, 而下

壁面在  $A \geq 4$  時,兩側壁面開始產生較小迴流;而由右側壁面之 limiting streamlines, 當  $A=1.67$  時, 流場在  $Z$  方向也產生分離現象, 開始變為一大一小之迴流, 且在小迴流之兩側壁面開始產生 nodal point of attachment, 當  $A \geq 4$  時, nodal point of attachment 則發展成兩側壁面之較小迴流。

當  $Re=150$  時, 計算結果如圖(4.35), (4.36)

1. 當  $A \leq 0.08$  時, 管道中不會產生迴流。
2. 當  $A \leq 1/3$  時(即入口管道截面之高度大於寬度), 擴張部中心截面上下壁面之迴流長度皆相等, 即流場為對稱性流場, 且迴流長度隨高寬比增加而變大。
3. 當  $1/3 \leq A \leq 1$  時, 擴張部中心截面上下壁面之迴流長度變為一大一小, 即流場變為不對稱性流場, 且較大迴流長度隨高寬比增加而變大, 較小迴流長度隨高寬比增加而變小。
4. 當  $1 \leq A \leq 2$  時, 擴張部中心截面上下壁面之迴流長度則接近一定值。
5. 當  $2 \leq A \leq 3$  時, 擴張部中心截面上下壁面之迴流長度為一大一小, 其中較大迴流長度隨高寬比增加而變小, 較小迴流長度隨高寬比增加而些微變小。

6. 當  $3 < A < 6$  時，管道中在其中一個壁面開始產生第三個迴流，且最小迴流長度接近一定值，其餘兩個迴流長度則隨高寬比增加而變小。
7. 當  $A > 6$  時，最小迴流長度依然保持一定值，其餘兩個迴流長度則隨高寬比增加而持續增大。

由圖(4.37)-(4.39)，分別為  $Re=150$ ，不同高寬比時，上下及右側壁面之 limiting streamlines：由上壁面之 limiting streamlines 可知，當  $A=1$  時，流場在  $y$  方向開始產生分離現象，產生 nodal point of attachment 及 saddle point，而在下壁面之 limiting stream lines：當  $A \geq 1.25$  時，兩側壁面開始產生較小迴流，當  $A \geq 4$  時，兩側壁面之較小迴流發展成管道中之第三個迴流區；而由右側壁面之 limiting streamlines：當  $A=1$  時，流場在  $Z$  方向也產生分離現象，開始變為一大一小之迴流，且在小迴流之兩側壁面開始產生 nodal point of attachment，當  $A \geq 1.25$  時，nodal point of attachment 則發展成兩側壁面之較小迴流。

## 4.5 不同高寬比時之臨界雷諾數

在本節中，將針對  $A=1$ ， $A=4$ ， $A=8$ ，2-D 之突張管的臨界雷諾數作探討，而且分別計算些微不對稱之突張管，探討幾何外形些微不對稱對臨界雷諾數及流場對稱性的影響；並且分別以中心截面之迴流大小及速度分歧圖(Bifurcation diagram)作為探討的依據。

對於些微不對稱之突張管，其幾何外形之定義為： $\varepsilon$  為管道之不對稱參數，則管道之不對稱量為： $H/2+\varepsilon h$ ，且  $\varepsilon=0.05$ ，即擴張部管道頂端之高度尺寸，增加 0.05，其餘幾何尺寸，則維持不變，如圖(4.40)。



### 4.5-1 $A=1$ 突張管

在  $Re=75-120$  範圍內，分別計算對稱及些微不對稱管道，且以等間距逐漸增加雷諾數，而在臨界雷諾數附近，則以逼近的方式，求出臨界雷諾數。

計算結果如圖(4.41)，圖(4.42)所示，對於對稱管道，隨著雷諾數增加，迴流大小開始產生些微的不對稱性，但無明顯之臨界雷諾數；當  $Re>103$  時，則開始變為明顯之一大一小之迴流，而隨著雷諾數增加，迴流大小的差距也隨之增加，因此  $A=1$  管道之臨界雷諾數為

$Re_c = 103$ 。

而對於些微不對稱管道，迴流大小一開始就產生些微的不對稱性，而隨著雷諾數增加，迴流大小的差距也隨之增加，但無明顯之臨界雷諾數；而雷諾數大於對稱管道之臨界雷諾數後，則流場開始變為接近對稱管道。

另外，分別計算不同雷諾數時在管道  $x=6.375$  截面，管道中心處之高度(Z)方向之速度分量(w)，如圖(4.43)所示，對於對稱管道，由於可以計算出迴流上下相反之兩個不同解，因此可以得到兩條對稱之曲線；而對於些微不對稱管道，則只能求出一個不對稱解；計算結果類似迴流大小之計算結果，當  $Re > 103$  時，開始產生明顯的分歧現象。

#### 4.5-2 A=4 突張管

在  $Re=45-80$  範圍內，分別計算對稱及些微不對稱管道，計算結果如圖(4.44)，圖(4.45)所示，對於對稱管道，當  $Re < 66$  時，管道中心截面上下迴流大小均相等，當  $Re > 66$  時，管道中心截面上下迴流大小開始產生些微的不對稱性，當  $Re > 68.25$  時，隨著雷諾數增加，迴流

大小的差距也隨之增加，因此定義  $A=4$  管道之臨界雷諾數為  $Re_{c1} = 66$ ， $Re_{c2} = 68.25$ ；而對於些微不對稱管道，迴流大小一開始就產生些微的不對稱性，而隨著雷諾數增加，迴流大小的差距也隨之增加，但無明顯之臨界雷諾數；而雷諾數大於對稱管道之臨界雷諾數後，則流場開始變為接近對稱管道。

另外，分別計算不同雷諾數時在管道  $x=6.375$  截面，管道中心處之高度( $Z$ )方向之速度分量( $w$ )，如圖(4.46)所示，對於對稱管道，由於可以計算出迴流上下相反之兩個不同解，因此可以得到兩條對稱之曲線；而對於些微不對稱管道，則只能求出一個不對稱解；計算結果類似迴流大小之計算結果，當  $Re>68.25$  時，開始產生明顯的分歧現象。

### 4.5-3 $A=8$ 突張管

在  $Re=40-75$  範圍內，分別計算對稱及些微不對稱管道，計算結果如圖(4.47)，圖(4.48)所示，對於對稱管道，當  $Re<61.5$  時，管道中心截面上下迴流大小均相等，當  $Re>61.5$  時，管道中心截面上下迴流大小開始產生些微的不對稱性，而當  $Re>67.5$  時，隨著雷諾數增加，迴流大小的差距也隨之增加，且雷諾數在  $61.5-67.5$  範圍內，迴流大小

的變化產生震盪的現象，因此 A=8 管道之臨界雷諾數為  $Re_{c1} = 61.5$  ( $Re_c = 61.3$ ，Fearn 等人[6]； $Re_c = 61.83$ ，Schreck and Schafer [18]； $Re_c = 60.62$ ，Drikakis[22]； $Re_c = 62.44$ ，Shapira 等人[23])， $Re_{c2} = 67.5$ ；而對於些微不對稱管道，迴流大小一開始就產生些微的不對稱性，而隨著雷諾數增加，迴流大小的差距也隨之增加，但無明顯之臨界雷諾數；而雷諾數大於對稱管道之臨界雷諾數後，則流場開始變為接近對稱管道。

另外，分別計算不同雷諾數時在管道  $x=6.375(x=22.25)$ ，Fearn 等人[6]截面，管道中心處之高度(Z)方向之速度分量(w)，如圖(4.49)所示，對於對稱管道，由於可以計算出迴流上下相反之兩個不同解，因此可以得到兩條對稱之曲線；而對於些微不對稱管道，則只能求出一個不對稱解；計算結果類似迴流大小之計算結果，當  $Re > 61.5$  時，開始產生明顯的分歧現象。

#### 4.5-4 2-D 突張管

對於 2-D 之突張管，其幾何外形即為本文之三維突張管之 X-Z 平面，但入口長度為  $10h$ ，格點安排則將背階角落處以等比級數方式加

密，如圖(4.50)所示；而對於 2-D 之突張管，可視為高寬比趨近於無窮大之突張管，因此將管道之入口條件設為完全發展流之二次速度分佈曲線，出口條件為：速度梯度為零，邊界條件為：無滑動邊界條件；且對流項之差分方法，採用中央差分法，並且速度及壓力均收斂至  $10^{-3}$ 。

在  $Re=45-75$  範圍內，計算結果如圖(4.51)，圖(4.52)所示，當  $Re < 60$  時 ( $Re_c = 61.3$ ，Fearn 等人[6]； $Re_c = 61.83$ ，Schreck and Schafer [18]； $Re_c = 60.62$ ，Drikakis[22]； $Re_c = 62.44$ ，Shapira 等人[23])，管道中心截面上下迴流大小均相等，當  $Re > 60$  時，管道中心截面上下迴流大小開始產生明顯的不對稱性，而  $Re > 66.75$  後，隨著雷諾數增加，迴流大小的差距也隨之增加；因此 2-D 管道之臨界雷諾數為  $Re_{c1} = 60$ ， $Re_{c2} = 66.75$ 。

另外，計算不同雷諾數時在管道  $x=6.375$  截面，管道中心處之高度(Z)方向之速度分量(w)，如圖(4.53)所示，對於對稱管道，由於可以計算出迴流上下相反之兩個不同解，因此可以得到兩條對稱之曲線；計算結果類似迴流大小之計算結果，當  $Re > 60$  時，開始產生明顯的分歧現象。

另外，比較 2-D 及  $A=8$  突張管在不同雷諾數時中心截面之迴流大小，及速度分歧圖(Bifurcation diagram)如圖(4.54)，圖(4.55)，結果為中心截面之迴流大小及臨界雷諾數非常接近，但對於速度分歧圖(Bifurcation diagram)則有較大之差距；因此，對於  $A=8$  管道，其中心截面之流場已十分接近於高寬比趨近於無窮大時之 2-D 流場。

而經由本節的計算結果，隨著高寬比的增加，臨界雷諾數隨之降低，如圖(4.56)，且會產生對稱性破壞的臨界高寬比為  $A=1/3$ ；當  $A>1/3$ ，且雷諾數達臨界值時，流場開始產生對稱性破壞現象。



## 第五章 結論

經由本文之計算結果，可以得到下列結論：

1. 當管道之擴張比不變時，迴流大小和雷諾數成正比，即增加雷諾數時，會增加流體之黏滯力，而使迴流隨之變大。
2. 當高寬比  $A \leq 0.08$  時，管道中不會產生迴流。
3. 當高寬比  $0.08 < A \leq 1/3$  時，流場皆為對稱性，不會因雷諾數的增加，而產生不對稱之流場；且管道中除了上下對稱之迴流區，也會產生左右對稱之迴流區。
4. 當高寬比  $A > 1/3$  時，當雷諾數達到某一臨界值時，則流場開始失去穩定性，而使原本為對稱性之流場，變為不對稱，而產生一大一小之迴流區；且隨高寬比的增加，臨界雷諾數隨之降低，如圖(4.56)所示；其中： $A=1$ ， $Re_c = 103$ ； $A=4$ ， $Re_c = 68.25$ ； $A=8$ ， $Re_c = 67.5$ ； $2-D$ ， $Re_c = 66.75$ 。
5. 當  $A$  趨近於無窮大時，即管道之中心截面可視為  $2-D$  之平面，而由計算結果得知， $A=8$  和  $2-D$  之突張管之臨界雷諾數非常接近，所以對於  $A \geq 8$  管道，中心截面可視為趨近於  $2-D$  平面。

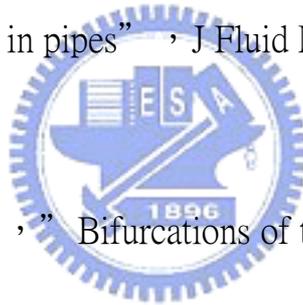
6. 對於些微不對稱管道，因管道在高度方向為不對稱，因此產生不對稱之壓力降，而使流場形成上下不對稱；但雷諾數大於對稱管道之臨界雷諾數時，則因黏滯力的影響遠大於壓力的影響，而使流場接近於對稱性管道。



## 參考文獻

1. Yeng-Yung Tsui, and Chia-Kang Wang, 1995, " Calculation of Laminar Separated Flow in Symmetric Two-Dimensional Diffusers" Transactions of the ASME, Vol.117, pp.612-616
2. 利用任意形狀非結構性網格之壓力修正流場分析法  
潘燕峰，國立交通大學機械工程研究所碩士論文，2000
3. F. Durst, A. Melling and J.H. Whitelaw, 1974, " Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion" , J Fluid Mech , 1974, vol.64, part 1, pp.111-128
4. W. Cherdron, F. Durst and J.H. Whitelaw, "Asymmetry flows and instabilities in symmetry ducts with sudden expansions" , J Fluid Mech , 1978, vol.84, part 1, pp.13-31
5. IAN J. Sobey , "Observation of waves during oscillatory channel flow" , J Fluid Mech , 1985, vol.151, pp.395-426
6. Fearn RM, Mullin T, Cliffe KA, " Nonlinear flow phenomena in a symmetry sudden expansion" , J Fluid Mech , 1990, vol.211, pp.595-608

7. Durst F , Pereira JCF , Tropea C , ” The plane symmetry sudden-expansion flow at low Reynolds number” , J Fluid Mech , 1993 , vol.248 , pp.567-581
8. S.R.N.De Zilwa , L.Khezzar and J.H.Whitelaw , ” Flows through plane sudden-expansions” , INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS , 2000 , 32 , 313-329
9. R.G.Teyssandier and M.P.Wilson , ” An analysis of flow through sudden enlargements in pipes” , J Fluid Mech , 1974 , vol.64 , part 1 , pp.85-95
10. Sobey IJ , Drain PG. , ” Bifurcations of two-dimensional channel flows” , J Fluid Mech , 1986 , vol.171 , pp.263-287
11. N.Alleborn , K.Nandakumar , H.Raszillier and F.Durst  
“ Further contributions on the two-dimensional flow in a sudden expansion” , J Fluid Mech , 1997 , vol.330 , pp.169-188
12. Zvi Rusak and Takumi Hawa , ” A weakly nonlinear analysis of the dynamics of a viscous flow in a symmetric channel with a sudden expansion” , PHYSICS OF FLUIDS , vol.11 , no.12 ,



13. Zvi Rusak and Takumi Hawa , ” Viscous flow in a slightly asymmetric channel with a sudden expansion” , PHYSICS OF FLUIDS , vol.12 , no.9 , SEPT. 2000
14. J.Mizushima and Y.Shiotani , ” Structural instability of the bifurcation diagram for two-dimensional flow in a channel with a sudden expansion” , J Fluid Mech , 2000 , vol.420 , pp.131-145
15. T.Hawa and Z.Rusak , ” The dynamics of a laminar flow in a symmetric channel with a sudden expansion” , J Fluid Mech , 2001 , vol.436 , pp.283-320
16. Tao Tang and D.B.Ingham , ” Multigrid solutions of steady two-dimensional flow past a cascade of sudden expansions” , Computers Fluids , Vol.21 , No.4 , pp.647-660 , 1992
17. Sanjay Mishra and K.Jayaraman , ” Asymmetric flows in planar symmetric channels with large expansion ratio” , Int.J.Numer.Meth Fluids , 2002 , 38 , 945-962
18. Schreck E , Schafer M , ” Numerical study of bifurcation in three-dimensional sudden channel expansions” , Computers and Fluids ,

2000 , 29(5) , pp.583-593

19. T.P. Chang , Tony W.H.Sheu , S.K. Wang , ” Side wall effects on the structure of laminar flow over a plane-symmetric sudden expansion”  
 , Computers & Fluids , 29(2000) , 467-492
20. T.P. Chang , Tony W.H.Sheu , Robert R.Hwang , and A.Sau ,  
 ” Spanwise bifurcation in plane-symmetric sudden-expansion flows” , PHYSICAL REVIEW E , VOL.65 , 016306
21. M.J. Lighthill , in Laminar Boundary Layer , edited by L. Rosenhead  
(Oxford University Press,Oxford,1963),Vol. II .
22. Dirkakis D. , ” Bifurcation phenomena in incompressible sudden expansion flows” , Physics of Fluids , 1997 ; 9 : 76-87.
23. Shapira M. , Degani D. , Weihs D. , ” Stability and existence of multiple solutions for viscous flow in suddenly enlarge channels”  
 , Computers and Fluids , 1990 ; 18 : 239-58.
24. M.Spiga and G.L.Morini , ” A Symmetric Solution for Velocity Profile in Laminar Flow Through Rectangular Ducts” , International Communications in Heat and Mass Transfer , Vol.21 , No.4 , 1994