

國立交通大學

管理科學系

碩士論文

三因子之調節複迴歸：斜率差異檢定法的應用

Three-Way Interactions in Moderated Multiple Regression:
Application of a Slope Difference Test

研究生：林益弘

指導教授：謝國文 教授

中華民國一百年六月

三因子之調節複迴歸:斜率差異檢定法的應用

Three-Way Interactions in Moderated Multiple Regression:
Application of a Slope Difference Test

研究生：林益弘

Student：Yi-Hong Lin

指導教授：謝國文

Advisor：Gwo-Wen Shieh



Submitted to Department of Management Science

College of Management

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Management Science

中華民國 一百年 六月


三因子之調節複迴歸:斜率差異檢定法的應用

研究生：林益弘

指導教授：謝國文

交通大學管理科學系 碩士班

摘要



迴歸分析已經是個相對成熟的資料分析工具，不管是管理、心理、生物、經濟等各大領域的研究者、資料分析使用者甚至是決策者無不利用迴歸模型的建立來萃取隱藏在數據裡的重要資訊，因此如何建立適當的模型來了解變數間關係的議題一直是統計學家所關心的。本文專注於了解一般研究者容易忽略的三因子交互作用的迴歸模型，提出對於該模型在資料分析的過程中應該注意的事項以及分析流程的建議，並且推薦利用斜率差異檢定法做為工具來了解：具有三因子交互作用時應該如何做往後的分析，同時也因為斜率差異檢定法的重要性，本文透過蒙地卡羅模擬法來了解其檢定力與自變數相關係數兩者之間的重要關係，此為相關文獻中尚未清楚說明的部分，也為本研究的主要貢獻。

關鍵字：迴歸分析、三因子交互作用、調節分析、斜率差異檢定法、蒙地卡羅模擬法

Three-Way Interactions in Moderated Multiple Regression: Application of a Slope Difference Test

Student : Yi-Hong Lin

Advisor : Gwo-Wen Shieh

Abstract

Regression analysis is a very popular tool for data analysis in many areas, such as management, psychological, biological, economic, and so on. Researchers and decision-makers usually extract important information from the data by using this tool. But how to build an adequate model to understand the relationship between variables is a big problem. This article focus on three-way interactions model of regression analysis (or moderated multiple regression) which sometimes has been overlooked. In fact, slope difference test is the best approach when three-way interactions has been detect. For this reason, this article present a recommended process about three-way interactions model, something must be pay attention and show the relationship between power and intercorrelation between predictor variables about slope difference test by Monte Carlo simulation.

Key words : regression analysis, three-way interactions, moderated multiple regression, slope difference test, Monte Carlo simulation

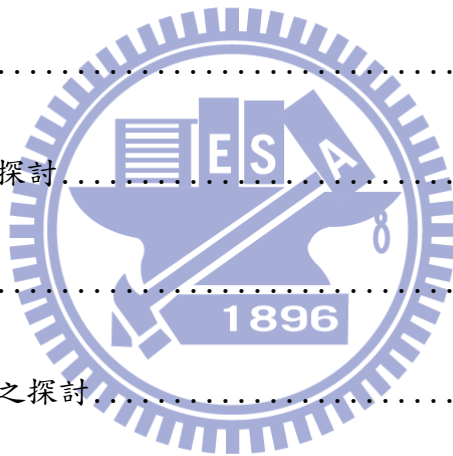
致謝辭

在研究所以及寫論文的過程中，我想最需要感謝的就是謝國文老師了，有賴於老師對於統計這個領域的專業和研究的熱忱，討論起研究的題目時，只有不知道這麼多題目要選哪一個而不是想破頭都找不到好題目，儘管我和一般 MBA 學生所研究的領域較為不同，但這個領域讓我學會了獨立思考、解決問題和客觀判斷的能力，不管是研究的過程當中或是完成後的成就感都讓我感到無比的快樂。當然，究竟不是工程科系畢業背景的我，在學習寫程式的過程中難免遇到挫折和無法和電腦溝通的情形產生，但回頭想想克服難題最後得到的成就感遠比一路順遂更令人開心一百倍。另外，因為師徒兩人都愛打羽毛球的緣故，研究之餘老師還會多少傳授一些訓練的方式讓我覺得有賺到的感覺。最重要的是，我喜歡這種相處模式，亦師亦友。

相較於結果，過程更是充滿回憶的地方，本論文能順利完成，除了老師的幫忙外，女友、家人和朋友更是功不可沒，很開心能夠進入交大認識這麼多優秀和幫過我的人：班上同學、學弟妹甚至是在職專班的學長姊等，也謝謝幾年前決定要考研究所的我，沒有當初明智的決定將錯過了很多美好的回憶。

目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
致謝辭.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	v
圖目錄.....	vi
第一章 研究動機與文獻探討.....	1
第二章 三因子分析流程.....	9
第三章 自變數相關係數之探討.....	18
第四章 結論.....	48
參考文獻.....	50
附錄 未標準化之斜率差異檢定法之估計值、標準差與檢定統計量.....	52

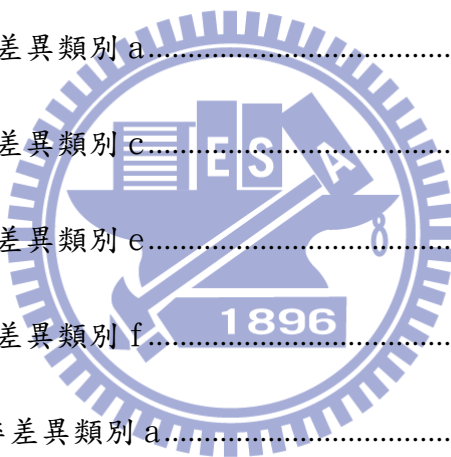


表目錄

表 1	將自變數標準化前與標準化後的斜率差異.....	11
表 2	標準差與檢定統計量.....	12
表 3	相關係數為零之檢定力結果.....	23
表 4	模擬情境(一)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 a).....	25
表 5	模擬情境(一)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 c).....	26
表 6	模擬情境(一)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 e).....	27
表 7	模擬情境(一)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 f).....	28
表 8	模擬情境(二)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 a).....	32
表 9	模擬情境(二)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 c).....	33
表 10	模擬情境(二)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 e).....	34
表 11	模擬情境(二)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 f).....	35
表 12	模擬情境(三)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 a).....	39
表 13	模擬情境(三)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 c).....	40
表 14	模擬情境(三)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 e).....	41
表 15	模擬情境(三)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 f).....	42
表 16	三種模擬情境與四種斜率差異類別的綜合比較.....	47

圖目錄

圖 1	工作需求量與工作滿意度的關係.....	4
圖 2	模擬情境(一)斜率差異類別 a.....	29
圖 3	模擬情境(一)斜率差異類別 c.....	29
圖 4	模擬情境(一)斜率差異類別 e.....	30
圖 5	模擬情境(一)斜率差異類別 f.....	30
圖 6	模擬情境(二)斜率差異類別 a.....	36
圖 7	模擬情境(二)斜率差異類別 c.....	36
圖 8	模擬情境(二)斜率差異類別 e.....	37
圖 9	模擬情境(二)斜率差異類別 f.....	37
圖 10	模擬情境(三)斜率差異類別 a.....	43
圖 11	模擬情境(三)斜率差異類別 c.....	43
圖 12	模擬情境(三)斜率差異類別 e.....	44
圖 13	模擬情境(三)斜率差異類別 f.....	44



第一章 研究動機與文獻探討

1.1 研究動機與目的

迴歸分析在各個領域都是一個非常普遍、常見的分析方法，也因為如此廣泛的使用，研究者對於基本的迴歸分析都已經有相當程度的了解。迴歸分析通常被研究者用來作為了解變數間關係的工具，然而對於一個研究議題來說，背後真實的關係可能是非常複雜的(例如:二次方以上的關係、交互作用的關係等等)，研究者經常希望建構出一個適當、貼近事實的模型。然而模型中出現交互作用的情況是非常常見的，大多數的研究者為了簡化研究的複雜度，只探討兩因子的交互作用而忽略三因子或以上的交互作用也可能存在的事實，進而誤解了變數間的關係，因此對於研究者而言，了解三因子交互作用模型的分析方法是有其必要性的，特別是當模型中的確偵測到具有三因子交互作用時，如何做往後的分析去取得資料裡帶給我們的資訊最為重要。另外，在文獻中我們可以看到 Dawson and Richter 在 2006 年的文章已針對往後分析方法中最有幫助的斜率差異檢定法 (slope differences) 進行檢定力的探討，儘管如此，文章中對於檢定力與自變數間相關係數的關係並未清楚的說明。對此本研究將分為兩部分進行探討，第一個部分仔細地探討對於連續型的變數而言，當模型存在三因子交互作用後應該如何做分析並提出一些建議的程序，而第二部份則是對於 Dawson and Richter 的文章中忽略自變數間相關係數的部分進行完整的探討。

1.2 文獻探討

一般來說，迴歸分析裡面的交互作用項其實就是調節效果分析的概念(Moderated multiple regression 或稱 MMR)，研究者經常會想知道某個自變數(X)對於應變數(Y)的效果是如何，但很不幸的，此效果通常不是一個固定的量，而是隨著各種調節因子的變動而產生不同的效果，因此，為了控制著這些調節因子的變動我們經常會在迴歸模型中試著加入交互作用項(或稱調節因子)來避免估計上的偏誤。有賴於統計軟體的發展快速，使用迴歸分析這項工具在各種軟體皆可以非常短的時間就能計算出結果，然而在文獻中，交互作用模型最常見的為兩因子，其次則為三因子，相較之下會發現三因子模型受重視的程度相對來得低很多，可能的原因有二，其一為就算知道具有顯著的三因子交互作用項的存在但因不知如何下手分析而選擇不揭露，其二為解釋變數間的關係的難度將增加許多。

由文獻可知，發現具有有顯著的三因子交互作用後的分析大部分由兩因子交互作用的方法所延伸而來，大致上可以粗分為四種方法：圖形法、特定設定值法(pick-a-point approach)、子群分析法(subgroup analysis)、斜率差異檢定法(slope differences)，因此以下我們將分為四個部分做文獻探討。

1.2.1 圖形法

圖形法的概念與使用方式為將最有興趣的自變數(X)與應變數(Y)當作是橫軸與縱軸並且把其他兩個調節因子(Z 與 W)分別在不同的水準值下作圖 (Jaccard & Turrisi, 2003), 常見的做法為將調節因子與最有興趣的自變數個別分成高低兩種水準並以平均數加減一倍標準差的方式來代表高低兩個水準。使用圖形法的優點是它提供了一個較為直覺、較容易理解的方式來解釋三因子交互作用, 不過優點即缺點, 因為太過簡易的緣故而忽略了一些重要資訊: 無法提供客觀的準則來判斷該斜率以及不同斜率間的差異是否顯著不為零, 如圖 1 是一個有關於工作滿意度的例子(van Yperen & Janssen, 2002), 橫軸是工作需求量的多寡(job demands), 縱軸則是工作滿意度(job satisfaction), 且其自變數皆經過標準化的處理(將原變數減平均數再除以標準差, 也就是說處理過後的變數其期望值為零且變異數為一), 對於這個例子我們想了解的是工作需求量的多寡與工作滿意度的關係如何受到個人工作績效表現(performance orientation)與工作相關之專業技巧精通程度(mastery orientation)這兩個調節因子水準高低所影響(其中個人工作績效表現為個人認為在公司中工作表現優於同事的程度, 專業技巧精通程度為個人認為在該公司工作的過程中學到專業技巧且熟悉該技術), 由圖中我們可以知道四個斜率中有三個看起來是小於零的、有一條呈現正斜率的狀況, 但我們無法知道的是: 看起來斜率明顯小於或大於零的是否構成統計上的顯著、圖形上斜率較為平緩的是否為統計上的不顯著、不同斜率間差異的大小算不算大等等議題, 唯一的判斷的準則是感覺, 對此我們建

議圖形法僅供研究者做初步的參考，無法依據此方法作為最終做結論的依據。

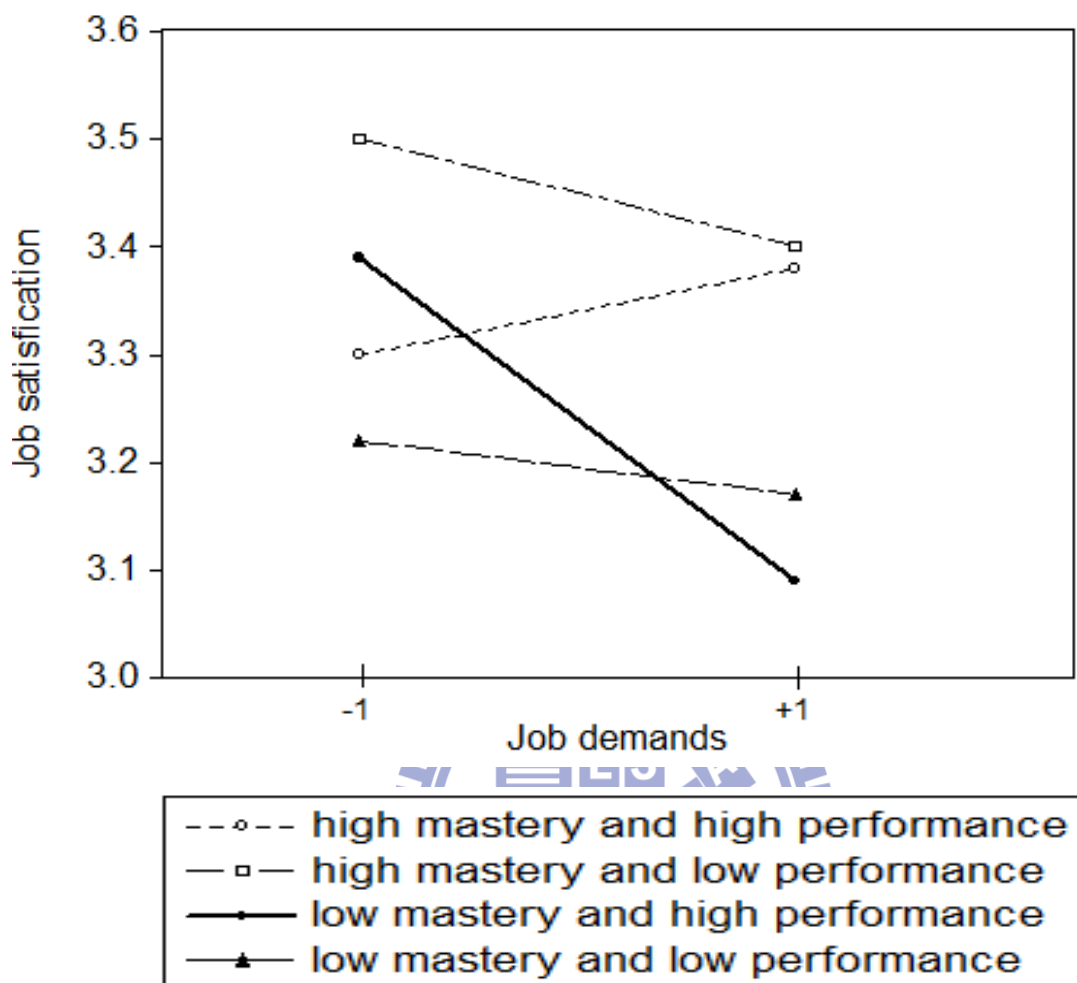


圖 1 工作需求量與工作滿意度的關係

1.2.2 特定設定值法

此方法是在特定的調節因子的設定值下，提供了一個個別計算應變數(Y)與主要想了解自變數(X)的斜率是否顯著的一個方法，根據研究的議題不同可將調節因子設定成該領域中有意義的設定，最常見程序是將調節因子分為高低兩種水準： Z_H 、 Z_L 和 W_H 、 W_L 並且高低兩種水準分別是用平均數加減一個標準差的數字帶入，定義如(1)，因此最後迴歸式

$$Z_H = \bar{Z} + S_Z, \quad Z_L = \bar{Z} - S_Z, \quad W_H = \bar{W} + S_W, \quad W_L = \bar{W} - S_W \quad (1)$$

僅剩下 Y 和 X 的關係，透過統計軟體的幫忙即可用來做個別斜率是否顯著異於零的檢定 (Aiken & West, 1991)，故此方法改善圖形法太過直觀的缺點，如以上述工作滿意度的例子即可對於調節因子的不同組合個別做斜率是否顯著的檢定，也就是工作需求量對於工作滿意度是否有顯著的影響，但我們知道 Y 和 X 的關係在不同設定值下的表現會有所不同，僅以一個特定值代表調節因子的表現仍然太過主觀，故此分析方法忽略了調節變數在其他設定值底下應變數(Y)和自變數(X)的關係。另外，和圖形法相同的是：無法進一步的比較不同斜率之間的差異，仍是一個不夠完整的方法。

1.2.3 子群分析法



使用子群分析法的學者通常利用主觀的判斷將調節因子其中之一(如 Z)透過中位數切割的原則(median split)將連續型變數轉換成離散型的變數(故分成 Z_H 與 Z_L ，分別是大於中位數與小於中位數的部分)，之後將兩種可能的情況分別探討 Y 與 X 在另一個調節因子(如 W)的改變下關係是如何(Aiken & West, 1991)。此分析方法仍然太過武斷，原因有三，第一，利用中位數切割的原則隨意地將變數做分類的行為太過主觀；第二，將資料分為兩群的同時，樣本數隨之下降，進而降低檢定力；第三，因著調節因子設定值的不同我們可以找到六種不同的組合，若用此方法只探討其中兩種： $Z_H W_H$ 與 $Z_H W_L$ 的差異以及 $Z_L W_H$ 與 $Z_L W_L$ 的差異，忽略了 $Z_H W_H$ 與 $Z_L W_L$ 、 $Z_H W_L$ 與 $Z_L W_H$ 、 $Z_H W_H$ 與 $Z_L W_H$ 、 $Z_L W_L$ 與 $Z_H W_L$ 四種可能存在

的關係，故子群分析法雖然企圖補足前述兩種方法無法捕捉斜率間差異的部分，但六種組合裡面這個方法只捕捉到兩種組合的角度來看仍然不夠好，使用者必須了解使用此方法的限制跟缺點。

1.2.4 斜率差異檢定法

斜率差異檢定法則是直接將 $Z_{H}W_{H}$ 、 $Z_{L}W_{L}$ 、 $Z_{H}W_{L}$ 、 $Z_{L}W_{H}$ 四種調節因子的搭配，任意兩兩做斜率差異的比較(Y 和 X 的斜率差異比較)，至於比較的方式則是透過推導出來的檢定統計量去做檢定(四種設定兩兩做比較會有六個檢定統計量)，如此即可客觀的分析是何種調節因子的設定讓 Y 和 X 的關係有顯著的差異，進而萃取出具有三因子交互作用的模型中所隱含的資訊 (Dawson & Richter, 2006)，如工作滿意度的例子即可利用斜率差異檢定法客觀地比較不同的工作績效表現與專業技巧精通程度的設定值下工作需求量對工作滿意度所造成影響的差異是否顯著，也就是客觀地得知圖 1 四種斜率中任兩種斜率差異是否顯著。事實上 Dawson and Richter 兩學者曾將當初使用特定設定值法來分析的文章改採斜率差異檢定法來重新分析，學者發現利用斜率差異檢定法重新分析的結果發現具有異於特定設定值法下的結論(Dawson & Richter, 2006)。

由上述文獻的探討中我們不難發現斜率差異檢定法為探討三因子交互作用模型中最佳的分析方法，改進了圖形法沒有判斷基準的缺點、補足了特定設定值法只能判斷個別斜率是否顯著而無從比較斜率相對差異的概念以及彌補了子群分析法只能比較六種差異

裡面的兩種的遺憾，同時也在 Dawson and Richter 這兩名學者的文章中看到對於同一個議題，使用斜率差異檢定法會與其他方法做出不一樣的結論。因此我們對於斜率差異檢定法特別有興趣，尤其是檢定力大小的程度。根據 Dawson and Richter (2006)、Aguinis (1995, 2004)學者的文章，此檢定的檢定力會受到以下幾種因素的影響：

(1)變數的分布(variable distribution):

變數之分布越接近常態分配時迴歸的檢定力越好，反之，越不像常態分配則會隨著不像程度的多寡而決定降低檢定力的多寡(Wilcox, 1998)。

(2)自變數和應變數的操作(operationalization of predictor and dependent variables):

量度誤差 (measurement error)、尺度粗糙程度 (scale coarseness) 以及用人工的方式將連續型變數轉成離散型時的分類程序將導致檢定力的下降 (Stone-Romero & Anderson, 1994 ; Aguinis & Stone-Romero, 1997)。

(3)樣本數大小(sample size):

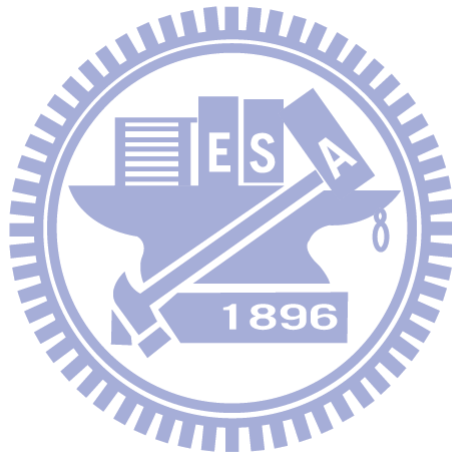
樣本數越大檢定力的表現越好，反之樣本數越小檢定力越低。

(4)自變數的特性(characteristics of the predictor variables) :

檢定力受到自變數與應變數間的關聯性強弱的影響遠大於自變數間相關係數大小的影響。

其中令我們感興趣的是學者認為自變數間相關係數大小與檢定力的關係相對於其他因素是非常小的且尚無具體的描述兩者間的關係是如何(Dawson & Richter, 2006)，因

此不將自變數間相關係數的大小列入影響檢定力的因素之一，對此我們保持著質疑的態度並進行相關的研究分析，最後將此關係詳盡地呈現。



第二章 三因子分析流程

很顯然的，由文獻的探討中我們了解三因子交互作用模型比兩因子的複雜許多，雖然許多分析方法可以拓展到三因子模型上來使用，但也因為複雜度的增加，使用上需要特別注意的細節也增加許多。此外，迴歸分析的使用者經常對於資料的分析僅止於了解其交互作用的顯著與否，並無進一步的了解是何種原因導致交互作用顯著，實屬可惜，為了能讓使用者能更有系統、更有效率地萃取數據中的資訊，我們對於連續型的三因子交互作用模型有些分析流程的整理和建議。以下分為四個部分做討論，2.1 先介紹斜率差異檢定法的完整操作步驟；2.2 為模型的建構到發現具有三因子交互作用的程序和注意事項；2.3 為已知具有三因子交互作用後，接下來的分析流程建議；最後一個部分 2.4 則為小結。



2.1 斜率差異檢定法的操作步驟

由文獻的探討可知斜率差異檢定法在三因子交互作用模型的後續分析中扮演著非常重要的角色，因此，在進行分析流程建議之前將仔細地介紹該方法的完整操作流程。

步驟一：模型的建立

此分析方法的概念為：先將迴歸式，如(2)，透過移項整理成兩個部分：與 X （主要想了解的自變數）無關、與 X 有關，如(3)。

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 Z + \beta_3 W + \beta_4 XZ + \beta_5 XW + \beta_6 ZW + \beta_7 XZW + \varepsilon \quad (2)$$

$$Y = (\beta_0 + \beta_2 Z + \beta_3 W + \beta_6 ZW) + (\beta_1 + \beta_4 Z + \beta_5 W + \beta_7 ZW)X + \varepsilon \quad (3)$$

接著因著研究者的需求將調節因子(Z, W)分成幾個具有代表性的設定值，在這裡我們以常見的分法為例(也就是將個別調節因子分為高與低兩種水準)，故調節效果的組合可能有四種： $Z_H W_H$ 、 $Z_H W_L$ 、 $Z_L W_H$ 、 $Z_L W_L$ ，所以將四種組合分別代入(2)的話會有以下四條式子：

$$Y = (\beta_0 + \beta_2 Z_H + \beta_3 W_H + \beta_6 Z_H W_H) + (\beta_1 + \beta_4 Z_H + \beta_5 W_H + \beta_7 Z_H W_H)X + \varepsilon \quad (4)$$

$$Y = (\beta_0 + \beta_2 Z_H + \beta_3 W_L + \beta_6 Z_H W_L) + (\beta_1 + \beta_4 Z_H + \beta_5 W_L + \beta_7 Z_H W_L)X + \varepsilon \quad (5)$$

$$Y = (\beta_0 + \beta_2 Z_L + \beta_3 W_H + \beta_6 Z_L W_H) + (\beta_1 + \beta_4 Z_L + \beta_5 W_H + \beta_7 Z_L W_H)X + \varepsilon \quad (6)$$

$$Y = (\beta_0 + \beta_2 Z_L + \beta_3 W_L + \beta_6 Z_L W_L) + (\beta_1 + \beta_4 Z_L + \beta_5 W_L + \beta_7 Z_L W_L)X + \varepsilon \quad (7)$$

然而我們想關心的無非是 Y 和 X 的斜率關係，透過(4)~(7)式子的呈現可以很清楚地了解此斜率的關係會因著調節因子設定值的不同而產生差異，接著將四種組合的任意兩種拿來做比較的話，可知哪些組合在 Y 和 X 的關係上有顯著的差異，也就是可以比較(4)與(5)、(4)與(6)、(4)與(7)、(5)與(6)、(5)與(7)、(6)與(7)這六種斜率上的差異，如表 1。

步驟二：參數的估計

有了迴歸模型以及了解各種調節因子下 Y 和 X 的關係是如何後，為了算出斜率差異檢定法的檢定統計量我們可以先透過統計軟體的迴歸分析得到三因子模型中各個參數的估計值($\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1 \dots, \hat{\beta}_7$)。

步驟三：檢定

有了參數估計值以後再進一步的計算四種組合中兩兩斜率估計值的差異和相對應的標準差即可組成檢定統計量，其計算方式可見於表 1 與表 2(此部分僅推導自變數經過標準化後的斜率差異檢定法之檢定統計量，若研究者採用的是未標準化的自變數進行斜率差異檢定法的分析則可參考於附錄；另外，表 1 中自變數標準化後的斜率差異為未標準化的斜率差異公式中將調節因子 Z_H 、 W_H 用 1 代入且 Z_L 、 W_L 用 -1 代入後的結果)，如此即可檢定此兩兩斜率差異是否顯著異於零。此方法和前述幾種方法相較之下較為客觀，因此當研究者發現模型中存在三因子交互作用時，此方法應為最佳選擇。

表 1 將自變數標準化前與標準化後的斜率差異

類別	斜率差異	自變數未標準化的斜率差異	自變數標準化後的斜率差異
a	(4)和(5)	$\beta_5(W_H - W_L) + \beta_7 Z_H(W_H - W_L)$	$2(\beta_5 + \beta_7)$
b	(4)和(6)	$\beta_4(Z_H - Z_L) + \beta_7 W_H(Z_H - Z_L)$	$2(\beta_4 + \beta_7)$
c	(5)和(7)	$\beta_4(Z_H - Z_L) + \beta_7 W_L(Z_H - Z_L)$	$2(\beta_4 - \beta_7)$
d	(6)和(7)	$\beta_5(W_H - W_L) + \beta_7 Z_L(W_H - W_L)$	$2(\beta_5 - \beta_7)$
e	(4)和(7)	$\beta_4(Z_H - Z_L) + \beta_5(W_H - W_L) + \beta_7(Z_H W_H - Z_L W_L)$	$2(\beta_4 + \beta_5)$
f	(5)和(6)	$\beta_4(Z_H - Z_L) + \beta_5(W_L - W_H) + \beta_7(Z_H W_L - Z_L W_H)$	$2(\beta_4 - \beta_5)$

表 2 標準差與檢定統計量

斜率差異類別	自變數標準化後的標準差	檢定統計量
a	$2\sqrt{S_{55} + S_{77} + 2S_{57}}$	$t = \frac{\hat{\beta}_5 + \hat{\beta}_7}{\sqrt{S_{55} + S_{77} + 2S_{57}}}$
b	$2\sqrt{S_{44} + S_{77} + 2S_{47}}$	$t = \frac{\hat{\beta}_4 + \hat{\beta}_7}{\sqrt{S_{44} + S_{77} + 2S_{47}}}$
c	$2\sqrt{S_{44} + S_{77} - 2S_{47}}$	$t = \frac{\hat{\beta}_4 - \hat{\beta}_7}{\sqrt{S_{44} + S_{77} - 2S_{47}}}$
d	$2\sqrt{S_{55} + S_{77} - 2S_{57}}$	$t = \frac{\hat{\beta}_5 - \hat{\beta}_7}{\sqrt{S_{55} + S_{77} - 2S_{57}}}$
e	$2\sqrt{S_{44} + S_{55} + 2S_{45}}$	$t = \frac{\hat{\beta}_4 + \hat{\beta}_5}{\sqrt{S_{44} + S_{55} + 2S_{45}}}$
f	$2\sqrt{S_{44} + S_{55} - 2S_{45}}$	$t = \frac{\hat{\beta}_4 - \hat{\beta}_5}{\sqrt{S_{44} + S_{55} - 2S_{45}}}$

2.2 偵測三因子交互作用的程序和注意事項

在了解完整的斜率差異檢定法的操作過程後，接下來對於三因子交互作用的迴歸模型的資料分析有些程序上的建議，本節為三因子交互作用建議分析流程的前半段，包括如何建立迴歸模型、資料的處理以及如何檢定是否具有三因子交互作用。

2.2.1 理論的支持

首先，在建構迴歸模型前必須了解：盲目的加入一些主觀認定的自變數去解釋應變數是個盲目的行為，我們建議研究者必須根據研究的議題參考相關的文獻或書籍，找到適當的理論支持再去建構模型是比較適當的，因此對於三因子交互作用模型(也就是同時有兩個調節因子的模型)來說，自變數對於應變數的關係是否具有理論上的基礎是相當重要的(如某自變數對於應變數的效果在理論上會因為某些調節因子的關係導致該效果增強、減弱或扭轉趨勢等，在建構模型時就不能忽略交互作用項的存在)，故一個好的研究者經常會尋找或參考一些理論上的支持才進行三因子交互作用模型的建構。

2.2.2 資料的前置處理

在進行迴歸分析前，除了需要注意是否有理論支撐模型外，另一個需要考慮的議題為：是否需要對資料做一些前置處理。三因子交互作用模型中因為具有交乘項的緣故容易有多元共線性的情形產生(multicollinearity)，有些學者指出共線性的程度太高會造成計算上的誤差 (Marquardt, 1980 ; Smith & Sasaki, 1979 ; Tate, 1984)因此建議可以先對資料做一些前置處理，如：中心化(centering)或標準化(standardizing)以降低共線性導致的計算上的誤差。另外，先將資料進行標準化的動作，除了降低計算上誤差的可能性外，另一個好處則是有利於往後的分析，如：利用斜率差異檢定法時即可操作較為簡易的版本(自變數先經過標準化後的版本)，如表 2，否則尚未標準化的檢定統計量將複雜許多，未標準化的版本可參考 Dawson and Richter (2006)或見附錄。

此外，共線性並不一定是一個問題，甚至是有學者透過模擬的結果發現在具有交互作用的迴歸模型中，在其他條件不變之下，自變數間的相關係數越強反而可以增加偵測交互作用項是否存在的檢定力 (Shieh, 2010)，總而言之，研究者必須先了解運用統計方法的用途為何再綜合的來考量是否需要將變數做轉換。

2.2.3 檢定是否有顯著的三因子交互作用

在考慮資料是否需要做前置處理後即可進行迴歸分析來看三因子交互作用項是否顯著的檢定，此一檢定應可輕易的在各種統計軟體中使用，有關於此檢定的檢定力之討論則可以參考 Shieh (2010), Cronbach (1987), Ganzach (1998) 之文章或 Cohen, Cohen, West and Aiken (2003) 和 Kutner, Nachtsheim, and Neter (2004) 等相關書籍。另外有兩個需要注意的事項：第一，當具有顯著三因子交互作用存在模型中時，其他項係數的檢定不具參考價值，也就是說此時解讀低次方係數是否顯著是沒有意義的；第二，若不顯著具有三因子交互作用時應將三因子交互作用項移除於模型並進行兩因子交互作用的分析。

2.3 顯著三因子交互作用的後續分析流程建議

若模型中的確存在顯著的三因子交互作用，真正的挑戰才真正開始，因為知道交互作用顯著這個資訊並不夠多，頂多只能知道會有顯著的結果的緣由是調節因子組合的不同所導致，至於調節因子是如何影響主要自變數與應變數的關係並不得而知，如：哪些

調節因子的設定會讓 Y 和 X 的斜率關係差異大、哪些差異小等細節無法由一般迴歸分析的檢定所看出，因此，以下為推薦的後續分析方法供使用者參考。

2.3.1 圖形法

首先，我們建議利用圖形法先大致了解交互作用的概況並有一個直覺上的想法，如圖 1 例子，其中專業技巧精通程度高且工作績效表現高的調節因子組合和其他三種調節因子在工作需求量對於工作滿意度的關係上較為不同(由圖 1 可知為正相關)，而其他三種中又以專業技巧精通程度低且工作績效表現高為最明顯的負相關，因此乍看之下會覺得專業技巧精通程度高且工作績效表現高與精通程度低且工作績效表現高兩者對於工作需求與滿意度的關係最為不同。另一方面，乍看之下專業技巧精通程度低且工作績效表現低與專業技巧精通程度高且工作績效表現低兩者差異最為微小、不明顯。

2.3.2 斜率差異檢定法

有了圖形法的一些直覺想法以後，接下來我們建議先用斜率差異檢定法找出是何種調節因子的干擾導致三因子交互作用的產生，以同樣的例子進行斜率差異檢定法的分析會發現，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下居然沒有任何的斜率差異是顯著的，而最接近顯著的組合為專業技巧精通程度高且工作績效表現低與專業技巧精通程度高且工作績效表現高 ($p\text{-value} = 0.06$)，和我們從圖形法中所預期結果大不相同。另外，最不顯著的組合為專業技巧精通程度高且工作績效表現低與專業技巧精通程度低且工作績效表現低

($p\text{-value} = 0.58$)，和圖形法中所預期結果相同。因此由斜率差異檢定法這種客觀檢定斜率差異的結果得知，最有可能造成顯著三因子交互作用產生的來源為專業技巧精通程度高且工作績效表現低與專業技巧精通程度高且工作績效表現高這種調節因子的組合。

2.3.3 特定設定值法

有了圖形法與斜率差異檢定法的幫忙我們已經可以揪出造成顯著交互作用的元兇，但除了知道哪些斜率差異是否顯著外，有些時候研究者會想知道在某些調節因子設定下個別斜率的表現是如何時即可透過特定設定值法來捕捉，以工作滿意度的例子而言，事實上透過特定設定值法的操作的結論為：只有專業技巧精通程度低且工作績效表現高這種組合的斜率是顯著異於零的，也就是說，唯有這種組合的設定，工作滿意度才會受到工作需求量的變化而變化且工作需求量越高工作滿意度越低，至於其他調節因子的設定下不顯著的結果可解讀為工作滿意度不會因為工作需求量的改變而改變。

2.3.4 解釋涵義

在了解是什麼組合的不同導致顯著交互作用的產生後，有必要進一步的整合分析結果並對其研究議題進行解釋。對於同個例子我們可以解讀為工作滿意度與工作需求量的關係會因為專業技巧精通程度與工作績效表現的不同而不同，由斜率差異檢定法可知，Y與X的斜率差異最大、也就是最接近顯著的為專業技巧精通程度高且工作績效表現高與專業技巧精通程度高且工作績效表現低這兩種組合而其他組合皆為不顯著，表示在同樣

是專業技巧精通程度高的情況下，工作滿意度和工作需求量的關係容易因為工作績效表現的不同而改變，但並無顯著地由正斜率變為負斜率或是負斜率變為正斜率(由特定設定值法可知斜率是否顯著為正或為負)。此外，雖然由特定設定值法可知專業技巧精通程度低且工作績效表現高是唯一斜率異於零的組合但該斜率並非顯著的和其他組合有所不同，所以我們只能說專業技巧精通程度低且工作績效表現高這種組合會有工作需求量越高工作滿意度越低的情形但這種反向的關係還不夠明顯地與其他組合有所不同。

2.4 小結




總之，模型中具有顯著的三因子交互作用時，可以先以圖形法了解概況再進行最有用的斜率差異檢定法來了解調節因子是如何造成顯著的三因子交互作用，即可解讀交互作用的涵義和資訊，諸如了解哪兩種調節因子的組合斜率差異最大、哪些差異最小或哪些不顯著具有差異等等。另外，若想了解個別調節因子設定值下的斜率表現則可進行特定設定值法的檢定來幫忙。有了斜率差異檢定法與特定設定值法的相輔相成將可對顯著三因子交互作用模型中變數間的關係進行完整的解讀和呈現。

第三章 自變數相關係數之探討

由上述討論可知斜率差異檢定法為顯著三因子交互作用存在時最主要的後續分析工具，故了解斜率差異檢定法的檢定力有其必要性，然而，除了文獻中學者提出的四個影響檢定力的因素外，我們特別有興趣的是自變數間相關係數與檢定力的關係並認為相關係數的大小應納入影響檢定力的因素之一，故將透過統計軟體 SAS 的模擬來了解此關係，3.1 為模擬的過程，3.2 為模擬的結果。

3.1 模擬過程



此部分將分為兩大部分進行探討：3.1.1 與 3.1.2，分別詳述採用蒙地卡羅模擬法(以統計軟體 SAS 來進行)分別操作自變數間相關係數為零與不為零的兩種情況來了解檢定力的變化並探究相關係數與檢定力間的關係，其中 3.1.1 將參考 Dawson and Richter (2006) 文章中的模擬設定，不同的是：為了細究自變數間相關係數與檢定力的關係，我們僅針對常態分配進行討論，但我們不只討論斜率差異類別 c 的結果而是將六種斜率差異類別裡面具有代表性的四種做最完整的呈現(分別是斜率差異類別 a、c、e、f)。

3.1.1 自變數相關係數為零

在自變數相關係數為零的模擬中，我們參考了 Dawson and Richter(2006)文章中的

設定，利用統計軟體進行第一部分：自變數相關係數為零之模擬，其模擬步驟如下：

步驟一：產生與整理資料

首先，使統計軟體產生不同樣本數($N = 50, 100, 200, 500$)且獨立的四個標準常態分配的亂數分別為主要自變數 X 、兩個調節變數 Z 與 W 與誤差項，並透過設定真實參數的方式來產生應變數 Y ，如(8)所示：

$$Y = -0.8 + 0.9X + 0.5Z + 0.3W + 0.41XZ - 0.25XW + 0.2ZW + 0.2XZW + \varepsilon \quad (8)$$

步驟二：利用迴歸分析進行參數估計

有了應變數 Y 與三個自變數 X 、 Z 、 W 的資料以後即可進行三因子交互作用模型的迴歸分析並進行參數估計($\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_7$)。



步驟三：計算斜率差異檢定法的檢定統計量

利用迴歸分析的參數估計與計算其相對應的標準差可以組成不同斜率差異的檢定統計量，如表 1 與表 2，但我們僅模擬具有代表性的斜率差異類別 a、c、e、f(因為斜率差異類別 b 與 a 類似且斜率差異類別 d 與 c 類似)。

步驟四：重複試驗

利用迴圈的指令重複試驗前述步驟一萬次，並分別計算不同樣本數、不同斜率差異

類別之檢定力的大小。

3.1.2 自變數相關係數不為零

為了比較相關係數為零的情況，在 3.1.2 我們特別利用三種不同相關係數的設定進行模擬，分別是將 $\text{corr}(X, W)$ 與 $\text{corr}(W, Z)$ 設定為兩個正數、一正一負和兩個負數這三種情況來看 $\text{corr}(X, Z)$ 的改變下檢定力的變化是如何，試圖想了解在三種情況裡相關係數與檢定力的關係是否類似且相較於 3.1.1 相關係數為零的結果是如何，其仔細的模擬步驟如下：

模擬情境（一）



首先，讓統計軟體自行產生不同樣本數($N = 50, 100, 200, 500$)的四個標準常態分配的亂數(主要自變數 X 、兩個調節變數 Z 與 W 與誤差項)並透過設定假定的真實參數的方式來產生應變數 Y ，如(8)，但透過程式的撰寫在產生亂數的同時也將 X 、 Z 、 W 間的相關係數設定為： $\text{corr}(X, W) = 0.1$ ， $\text{corr}(W, Z) = 0.3$ ，而 $\text{corr}(X, Z)$ 則分別設定為 $-0.9, -0.8, -0.7, \dots, 0.7, 0.8, 0.9$ 共十九個值來了解當相關係數改變時相對應的檢定力如何變動。接下來則與 3.1.1 的步驟二~步驟四一致：利用迴歸分析進行參數估計進而計算檢定統計量並透過大量的重複試驗來得到檢定力的模擬值。

模擬情境（二）

同模擬情境（一），但將自變數相關係數的設定改成： $\text{corr}(X, W) = 0.1$ ， $\text{corr}(W, Z) = -0.3$ ，一樣去探討 $\text{corr}(X, Z)$ 設定為 $-0.9, -0.8, -0.7, \dots, 0.7, 0.8, 0.9$ 共十九個變動值來了解相關係數改變時相對應的檢定力如何變動。

模擬情境（三）

同模擬情境（一），但將自變數相關係數的設定改成： $\text{corr}(X, W) = -0.22$ ， $\text{corr}(W, Z) = -0.17$ ，去探討 $\text{corr}(X, Z)$ 設定為 $-0.9, -0.8, -0.7, \dots, 0.7, 0.8, 0.9$ 共十九個變動值來了解相關係數改變時相對應的檢定力如何變動。



3.2 模擬結果

以下我們分成三個部分做討論，第一個部分先仿照 Dawson and Richter 學者在 2006 年的文章中設定的條件重新呈現自變數間相關係數為零時檢定力的結果，而第二部分則是討論相關係數設定成不為零的狀況，最後一部分則是比較前兩個部份的差異做為小結。

3.2.1 自變數間相關係數為零

由 3.1.1 的模擬過程，可做出表 3，即為將自變數間相關係數視為零時不同斜率差異類別以及不同樣本數下檢定力的表現，我們可以發現幾個和預期相符的結果：

(1) 當樣本數增加時檢定力會隨之增加但因著斜率差異的不同，增加的程度亦不相同。

(2) 在樣本數固定下同樣的斜率差異類別也會有不同檢定力的表現。其主要原因有二，

其一為在模擬時設定的真實參數就不相同，所以原本就會有不同的斜率差異(事實上，斜

率差異絕對值最大的是斜率差異類別 f： $\beta_5 - \beta_6 = -0.45$ ；其次為斜率差異類別 c：

$\beta_4 - \beta_7 = 0.21$ ；再其次為斜率差異類別 a： $\beta_5 + \beta_7 = -0.05$ 與斜率差異類別 e：

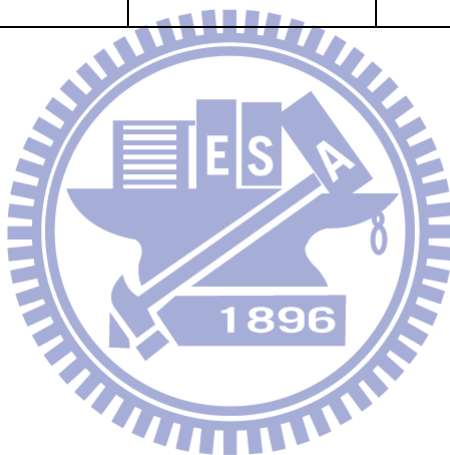
$\beta_5 + \beta_6 = -0.05$ ，故斜率差異類別的檢定力大小和上述斜率差異絕對值得大小順序相同是

非常合理的)；其二為斜率差異檢定統計量分母結構有些許差異(如表 2)。故由以上討論

可了解不同斜率差異類別與不同的樣本數會有不同的檢定力之表現，如表 3 的結果。

表 3 相關係數為零之檢定力結果

		斜率差異類別			
		a	c	e	f
樣本數 (N)	50	0.0546	0.1282	0.1037	0.7069
	100	0.0635	0.2635	0.1755	0.9704
	200	0.0788	0.4868	0.3239	0.9999
	500	0.1211	0.8858	0.6991	1



3.2.2 自變數間相關係數不為零

由 3.1.2 對於自變數相關係數不為零的模擬過程得知我們有三種模擬情境需要討論，將分別利用表格與圖形的方式呈現，值得注意的是為了方便討論，在表 4 至表 15 中我們特別將自變數為零時會高估實際檢定力的部分以*來表示、不高估也不低估的部分以**來表示、低估則為沒有*或**的部分。

模擬情境（一）



第一種情境的模擬結果可見於表 4 到表 7 與圖 2 到圖 5，由圖 2 至圖 5 我們發現其結果與 Dawson and Richter(2006)的文章的對於自變數間相關係數與檢定力的關係有非常大的差異：檢定力和自變數間的相關係數是有明顯的曲線關係，也就是隨著相關係數的上升檢定力會先增後減或先減後增，事實上我們還發現了以下兩個訊息：

- (1) 除了斜率差異類別 c 是先遞減再遞增以外，其他三個斜率的檢定力皆是先遞增後遞減的，而遞增遞減的轉換皆發生在相關係數為零附近，也就是說，除了斜率差異類別 c 在相關係數絕對值小時檢定力表現較差外，相關係數的絕對值越大檢定力的表現越差。
- (2) 除了斜率差異類別 c 中 $N = 500$ 的情形和斜率差異類別 f 外，樣本數越大則曲線的彎曲程度就越大，也就是樣本數越大，檢定力受到相關係數的影響而波動的情形越為明顯，事實上斜率差異類別 f 的結果正好相反，樣本數越小曲線關係越為明顯。

表 4 模擬情境(一)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 a)

		斜率差異類別 a			
		N = 50	N = 100	N = 200	N = 500
X 與 Z 之 相 關 係 數	0.9	0.0493*	0.0575*	0.0608*	0.0771*
	0.8	0.0499*	0.0558*	0.0686*	0.0928*
	0.7	0.0511*	0.0578*	0.0712*	0.1037*
	0.6	0.0528*	0.0591*	0.0749*	0.1089*
	0.5	0.0528*	0.0616*	0.0733*	0.1123*
	0.4	0.0538*	0.0638	0.0729*	0.1165*
	0.3	0.0525*	0.0622*	0.0733*	0.1181*
	0.2	0.052*	0.0636	0.0742*	0.1204*
	0.1	0.0525*	0.0613*	0.0741*	0.122
	0	0.054*	0.0601*	0.076*	0.1206*
	-0.1	0.0555	0.0601*	0.0753*	0.1211**
	-0.2	0.0564	0.0589*	0.0746*	0.121*
	-0.3	0.056	0.0613*	0.0745*	0.1196*
	-0.4	0.0558	0.0612*	0.074*	0.1168*
	-0.5	0.0577	0.0599*	0.072*	0.1154*
	-0.6	0.0582	0.0584*	0.0719*	0.1127*
	-0.7	0.0574	0.0598*	0.0704*	0.109*
	-0.8	0.0545*	0.0578*	0.0692*	0.1012*
	-0.9	0.0487*	0.0533*	0.0654*	0.0869*

*為比表 3 檢定力還低的情況(也就是自變數間相關係數為零會高估的情況),其餘為低估

**表不高估也不低估

表 5 模擬情境(一)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 c)

		斜率差異類別 c			
		N = 50	N = 100	N = 200	N = 500
X 與 Z 之 相 關 係 數	0.9	0.1887	0.3911	0.7173	0.9828
	0.8	0.1781	0.3597	0.6772	0.9744
	0.7	0.1669	0.3374	0.6412	0.9628
	0.6	0.1568	0.3147	0.6041	0.9509
	0.5	0.1487	0.295	0.5735	0.9353
	0.4	0.1416	0.2777	0.5494	0.9228
	0.3	0.1373	0.266	0.5268	0.91
	0.2	0.1324	0.258*	0.5116	0.8966
	0.1	0.1303	0.252*	0.4993	0.8881
	0	0.1288	0.2533*	0.4976	0.8821*
	-0.1	0.1273*	0.2575*	0.4991	0.8827*
	-0.2	0.1292	0.2622*	0.5112	0.8873
	-0.3	0.1368	0.2744	0.5268	0.8991
	-0.4	0.1435	0.2902	0.5488	0.9126
	-0.5	0.1521	0.3075	0.5743	0.9294
	-0.6	0.1614	0.3286	0.6068	0.9451
	-0.7	0.1712	0.354	0.639	0.9592
	-0.8	0.1814	0.3821	0.6755	0.9701
	-0.9	0.1902	0.4024	0.7052	0.9818

*為比表 3 檢定力還低的情況(也就是自變數間相關係數為零會高估的情況),其餘為低估

表 6 模擬情境(一)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 e)

		斜率差異類別 e			
		N = 50	N = 100	N = 200	N = 500
X 與 Z 之 相 關 係 數	0.9	0.0703*	0.096*	0.1649*	0.357*
	0.8	0.0855*	0.1289*	0.2425*	0.5269*
	0.7	0.0929*	0.1518*	0.2969*	0.6348*
	0.6	0.1049	0.1688*	0.3375	0.7017
	0.5	0.1077	0.1806	0.3651	0.7397
	0.4	0.1073	0.1931	0.3802	0.7642
	0.3	0.1074	0.1973	0.3908	0.7787
	0.2	0.1097	0.2003	0.3984	0.7854
	0.1	0.1115	0.2023	0.4021	0.7887
	0	0.1129	0.2072	0.4059	0.7942
	-0.1	0.1145	0.2096	0.405	0.797
	-0.2	0.1137	0.2065	0.4035	0.794
	-0.3	0.111	0.2055	0.397	0.7909
	-0.4	0.109	0.2027	0.3894	0.7833
	-0.5	0.1073	0.1969	0.3776	0.7643
	-0.6	0.1008*	0.1858	0.3528	0.7334
	-0.7	0.0928*	0.1717*	0.3197*	0.6847*
	-0.8	0.0843*	0.1493*	0.278*	0.6007*
	-0.9	0.0735*	0.122*	0.2114*	0.4649*

*為比表 3 檢定力還低的情況(也就是自變數間相關係數為零會高估的情況),其餘為低估

表 7 模擬情境(一)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 f)

		斜率差異類別 f			
		N = 50	N = 100	N = 200	N = 500
X 與 Z 之 相 關 係 數	0.9	0.3401*	0.6797*	0.9474*	0.9999*
	0.8	0.4646*	0.8326*	0.9908*	1**
	0.7	0.5312*	0.6797*	0.9474*	0.9999*
	0.6	0.5583*	0.9086*	0.9981*	1**
	0.5	0.5736*	0.9157*	0.9985*	1**
	0.4	0.5799*	0.9183*	0.9986*	1**
	0.3	0.5852*	0.919*	0.9989*	1**
	0.2	0.5831*	0.9216*	0.9986*	1**
	0.1	0.585*	0.9214*	0.9983*	1**
	0	0.585*	0.9206*	0.9984*	1**
	-0.1	0.5874*	0.9199*	0.9988*	1**
	-0.2	0.5896*	0.9224*	0.9989*	1**
	-0.3	0.5944*	0.925*	0.9989*	1**
	-0.4	0.5922*	0.9271*	0.9993*	1**
	-0.5	0.5874*	0.9266*	0.9992*	1**
	-0.6	0.579*	0.9221*	0.9988*	1**
	-0.7	0.556*	0.9073*	0.9982*	1**
	-0.8	0.5131*	0.8775*	0.9949*	1**
	-0.9	0.4318*	0.7881*	0.9821*	1**

*為比表 3 檢定力還低的情況(也就是自變數間相關係數為零會高估的情況),其餘為低估

**表不高估也不低估

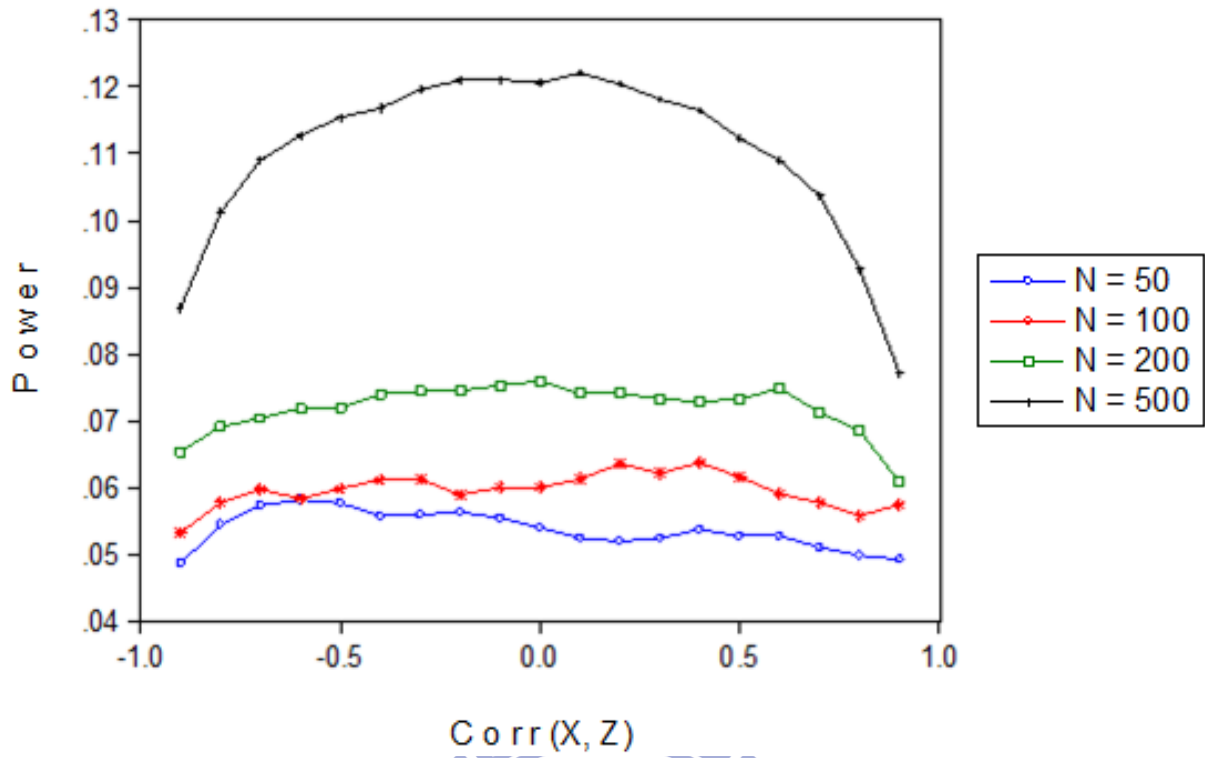


圖 2 模擬情境(一)斜率差異類別 a

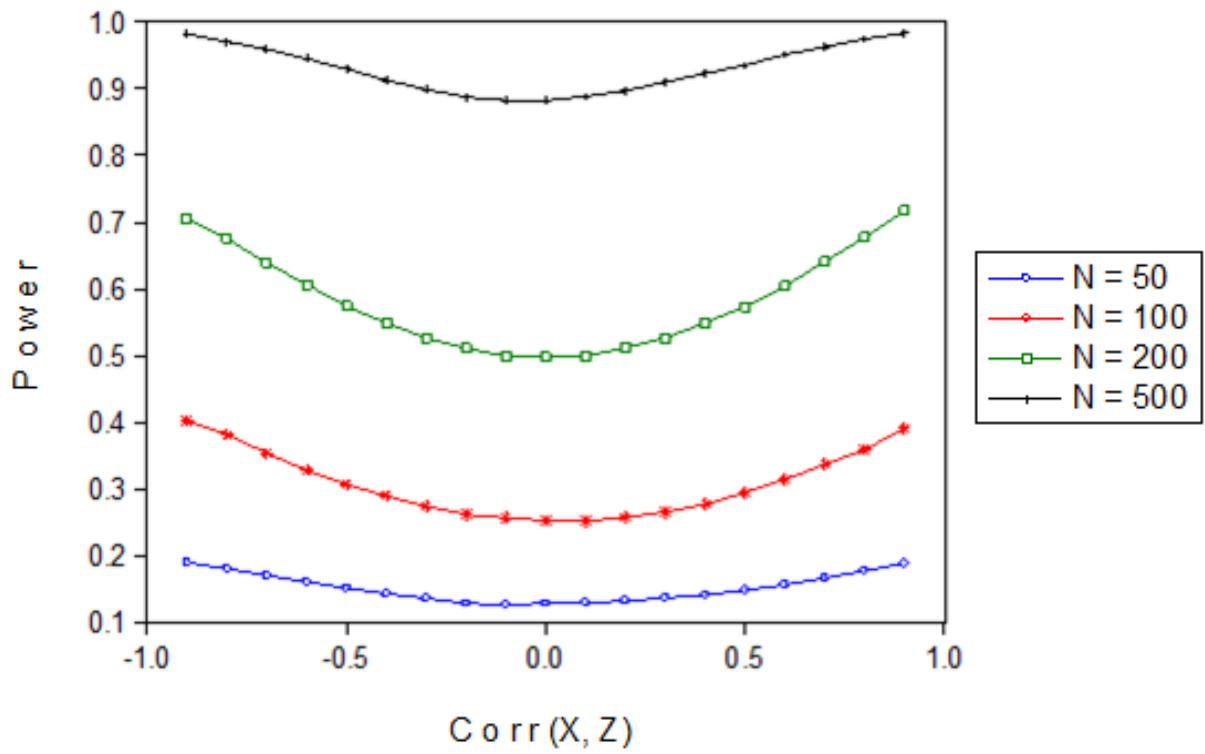


圖 3 模擬情境(一)斜率差異類別 c

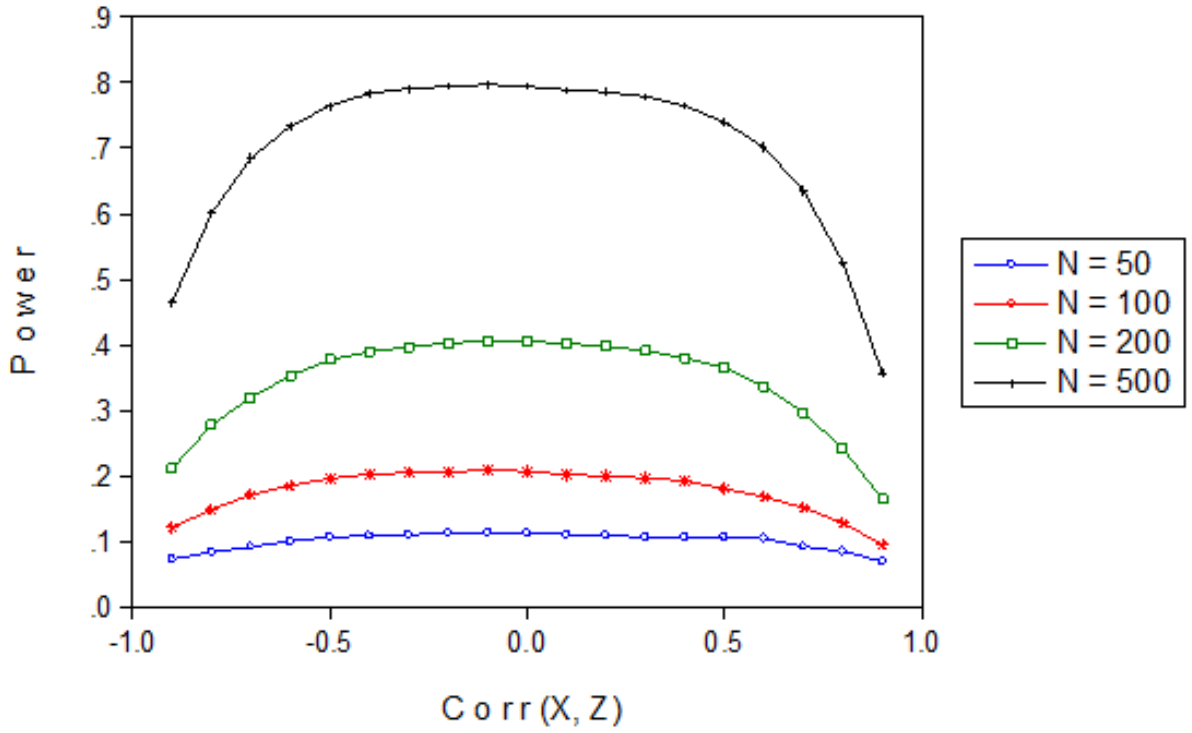


圖 4 模擬情境(一)斜率差異類別 e

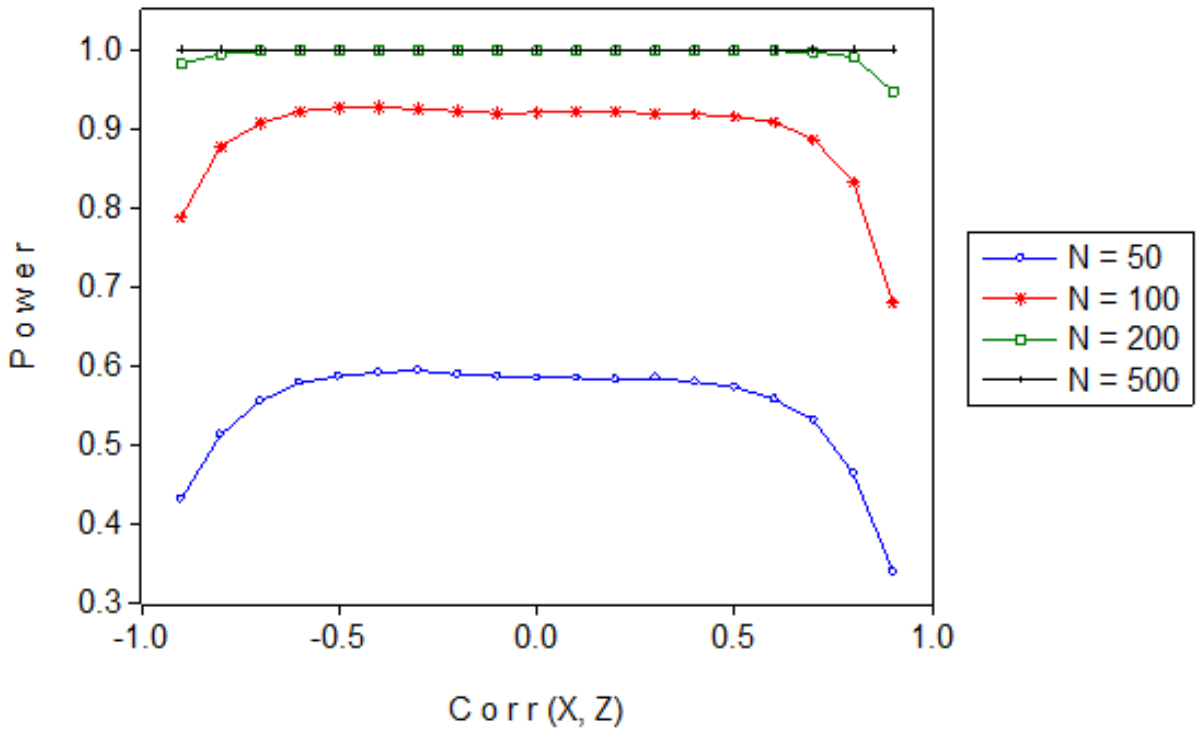


圖 5 模擬情境(一)斜率差異類別 f

模擬情境（二）

第二種模擬情境的結果可見於表 8 至表 11 與圖 6 至圖 9，將發現大致上的情形與第一種情境設定下差不多，檢定力與自變數間相關係數兩者呈現曲線的關係，除了斜率差異類別 c 是上凹的圖形以外其他三種為下凹，稍微不同的地方在於斜率差異類別 a 與 e 的圖形變得更加不對稱，而斜率差異類別 f 則像是第一種模擬情境鏡射後的結果但曲線的幅度在更大一些，也就是檢定力的變動範圍變得更大，因此在模擬情境(二)的結果與模擬情境(一)非常類似，一樣有前述(1)與(2)兩個發現。



表 8 模擬情境(二)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 a)

		斜率差異類別 a			
		N = 50	N = 100	N = 200	N = 500
X 與 Z 之 相 關 係 數	0.9	0.0572	0.0576*	0.062*	0.0893*
	0.8	0.0568	0.0595*	0.0663*	0.1027*
	0.7	0.055	0.0579*	0.0699*	0.1128*
	0.6	0.0552	0.0584*	0.0741*	0.117*
	0.5	0.0581	0.0598*	0.0758*	0.1213
	0.4	0.0585	0.0618*	0.0768*	0.1194*
	0.3	0.0583	0.0616*	0.0782*	0.1192*
	0.2	0.0564	0.0627*	0.0763*	0.1181*
	0.1	0.0554	0.0613*	0.0771*	0.1188*
	0	0.0564	0.0615*	0.0774*	0.1198*
	-0.1	0.0554	0.0619*	0.0771*	0.1208*
	-0.2	0.0566	0.0603*	0.0775*	0.1208*
	-0.3	0.0563	0.0606*	0.0746*	0.1208*
	-0.4	0.0555	0.0602*	0.0734*	0.119*
	-0.5	0.054*	0.0592*	0.0721*	0.115*
	-0.6	0.0532*	0.0598*	0.0704*	0.1105*
	-0.7	0.0548	0.0571*	0.0696*	0.1031*
	-0.8	0.055	0.0564*	0.0646*	0.0907*
	-0.9	0.0531*	0.0536*	0.0592*	0.0748*

*為比表 3 檢定力還低的情況(也就是自變數間相關係數為零會高估的情況),其餘為低估

表 9 模擬情境(二)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 c)

		斜率差異類別 c			
		N = 50	N = 100	N = 200	N = 500
X 與 Z 之 相 關 係 數	0.9	0.1947	0.3921	0.7121	0.981
	0.8	0.1823	0.3628	0.6754	0.9739
	0.7	0.1716	0.3364	0.6407	0.9634
	0.6	0.164	0.3144	0.6093	0.9507
	0.5	0.1515	0.2987	0.5814	0.9373
	0.4	0.1456	0.2862	0.5554	0.9195
	0.3	0.1369	0.2697	0.5335	0.9068
	0.2	0.1357	0.26*	0.5169	0.8932
	0.1	0.1325	0.2561*	0.5081	0.8879
	0	0.1316	0.2517*	0.4994	0.8836*
	-0.1	0.1333	0.2579*	0.5006	0.8838*
	-0.2	0.1326	0.2642	0.5111	0.8909
	-0.3	0.1368	0.2704	0.5289	0.9017
	-0.4	0.1404	0.2842	0.5474	0.9151
	-0.5	0.1494	0.3035	0.5768	0.9295
	-0.6	0.1559	0.3221	0.6026	0.9439
	-0.7	0.1663	0.3441	0.6356	0.9582
	-0.8	0.1761	0.3717	0.6696	0.9698
	-0.9	0.1887	0.4005	0.7045	0.9794

*為比表 3 檢定力還低的情況(也就是自變數間相關係數為零會高估的情況),其餘為低估

表 10 模擬情境(二)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 e)

		斜率差異類別 e			
		N = 50	N = 100	N = 200	N = 500
X 與 Z 之 相 關 係 數	0.9	0.075*	0.1004*	0.1895*	0.4101*
	0.8	0.0799*	0.1165*	0.2277*	0.4958*
	0.7	0.0834*	0.1271*	0.2486*	0.5449*
	0.6	0.0844*	0.1319*	0.2575*	0.5649*
	0.5	0.0876*	0.1341*	0.2656*	0.5689*
	0.4	0.0874*	0.1361*	0.2625*	0.5699*
	0.3	0.0866*	0.1373*	0.2601*	0.5631*
	0.2	0.0879*	0.1372*	0.2541*	0.5565*
	0.1	0.0884*	0.1358*	0.2528*	0.5508*
	0	0.0902*	0.1369*	0.2471*	0.547*
	-0.1	0.0905*	0.1396*	0.2457*	0.5443*
	-0.2	0.0882*	0.1408*	0.2434*	0.548*
	-0.3	0.0891*	0.1414*	0.245*	0.5509*
	-0.4	0.0885*	0.1421*	0.2427*	0.5533*
	-0.5	0.0886*	0.1414*	0.2363*	0.5472*
	-0.6	0.087*	0.1386*	0.2292*	0.5347*
	-0.7	0.0837*	0.1305*	0.2165*	0.5012*
	-0.8	0.0755*	0.1186*	0.1915*	0.4374*
	-0.9	0.0668*	0.0942*	0.1448*	0.313*

*為比表 3 檢定力還低的情況(也就是自變數間相關係數為零會高估的情況),其餘為低估

表 11 模擬情境(二)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 f)

		斜率差異類別 f			
		N = 50	N = 100	N = 200	N = 500
X 與 Z 之 相 關 係 數	0.9	0.5026*	0.862*	0.9925*	1**
	0.8	0.6208*	0.9393*	0.9996*	1**
	0.7	0.6916*	0.9676*	0.9998*	1**
	0.6	0.7314	0.9802	0.9999**	1**
	0.5	0.7549	0.985	0.9999**	1**
	0.4	0.7717	0.9867	0.9999**	1**
	0.3	0.7791	0.988	1	1**
	0.2	0.7822	0.9873	1	1**
	0.1	0.7829	0.9872	1	1**
	0	0.7826	0.9867	1	1**
	-0.1	0.7758	0.9869	1	1**
	-0.2	0.7722	0.9866	1	1**
	-0.3	0.7664	0.9858	1	1**
	-0.4	0.7538	0.985	1	1**
	-0.5	0.7335	0.9813	1	1**
	-0.6	0.7072	0.9735	1	1**
	-0.7	0.6551*	0.9554*	1	1**
	-0.8	0.5616*	0.9048*	0.9989*	1**
	-0.9	0.3969*	0.7473*	0.9718*	1**

*為比表 3 檢定力還低的情況(也就是自變數間相關係數為零會高估的情況),其餘為低估

**表不高估也不低估

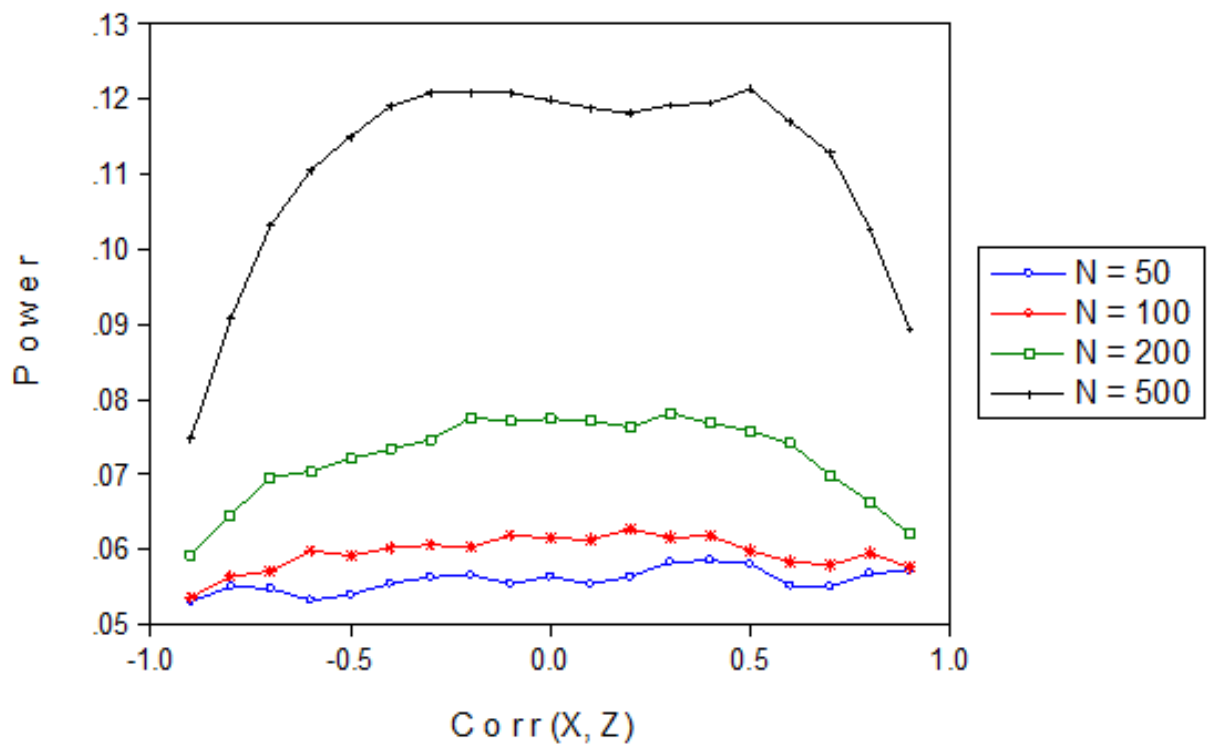


圖 6 模擬情境(二)斜率差異類別 a

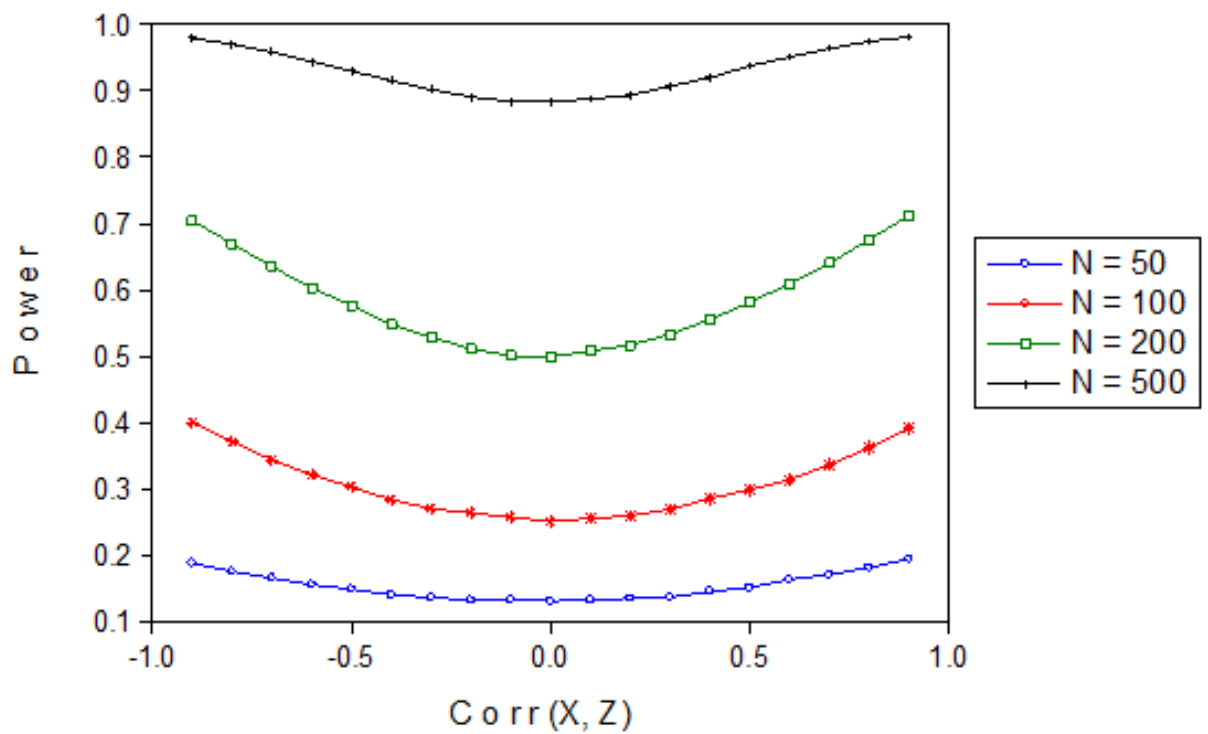


圖 7 模擬情境(二)斜率差異類別 c

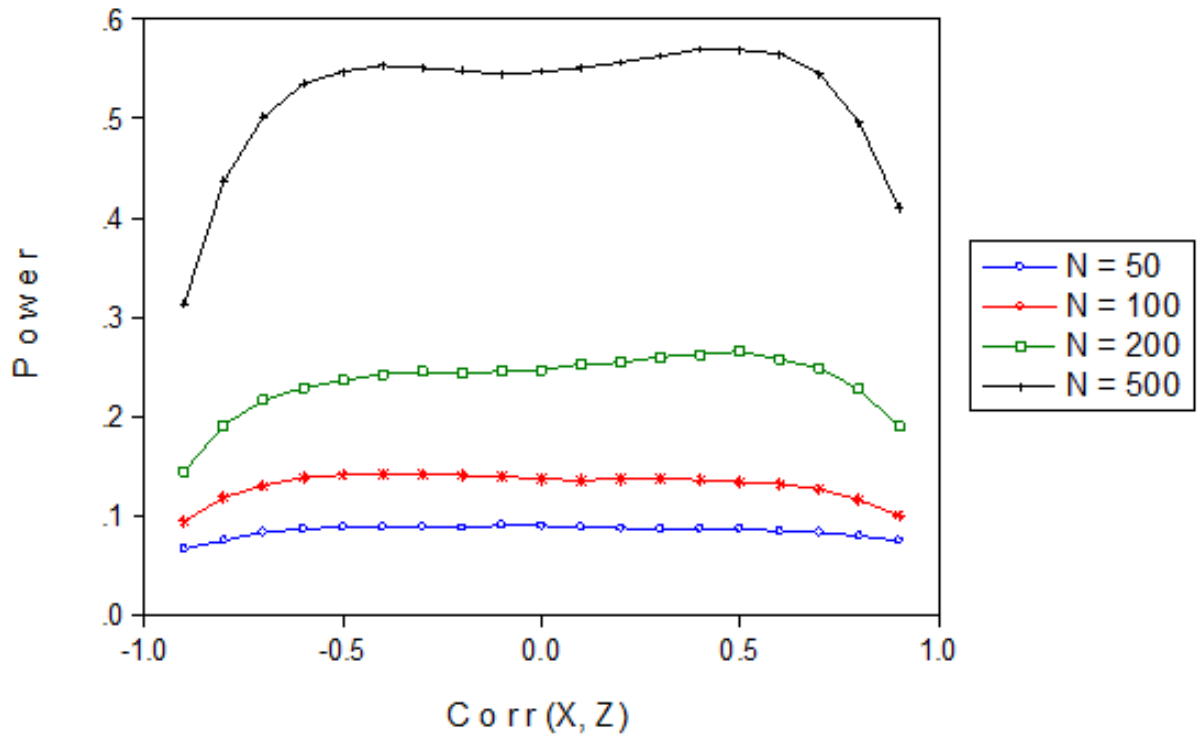


圖 8 模擬情境(二)斜率差異類別 e

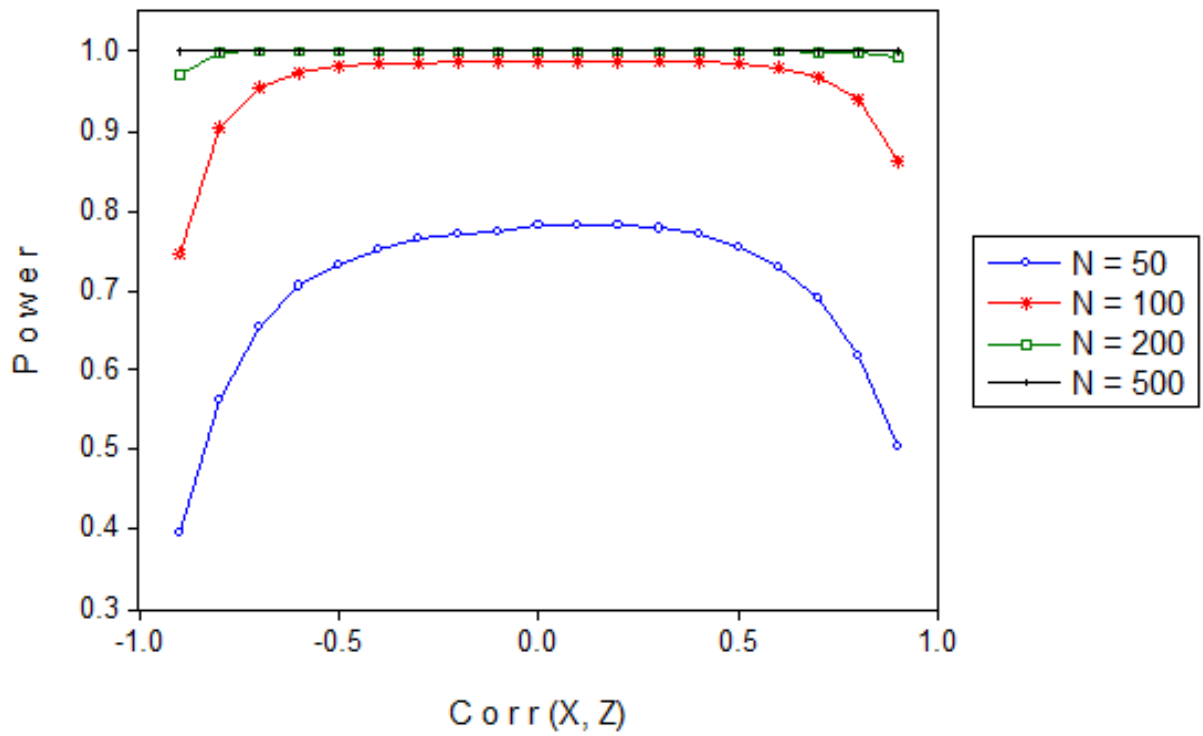


圖 9 模擬情境(二)斜率差異類別 f

模擬情境（三）

最後一種模擬情境可見於表 12 至表 15 與圖 10 至圖 13，大致上仍然保留著前兩種情境下的特性(仍然有(1)與(2)的特徵)，但在此種情境下斜率差異類別 a 的圖相較於第一種情境較為不對稱，呈現類似山峰狀的圖形，而斜率差異類別 a 較類似第一種情境的圖形但變動幅度更大一些(尤其是樣本數小時，檢定力受到相關係數的影響較大)。



表 12 模擬情境(三)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 a)

		斜率差異類別 a			
		N = 50	N = 100	N = 200	N = 500
X 與 Z 之 相 關 係 數	0.9	0.053*	0.0506*	0.0613*	0.0775*
	0.8	0.0537*	0.0531*	0.0682*	0.0938*
	0.7	0.054*	0.0566*	0.073*	0.106*
	0.6	0.0554	0.0585*	0.073*	0.1138*
	0.5	0.0548	0.0588*	0.0727*	0.1162*
	0.4	0.0545*	0.0601*	0.0755*	0.119*
	0.3	0.056	0.0602*	0.0769*	0.1232
	0.2	0.0555	0.06*	0.0764*	0.1218
	0.1	0.0563	0.0602*	0.0747*	0.1216
	0	0.0563	0.0601*	0.0759*	0.123
	-0.1	0.0554	0.0591*	0.076*	0.1254
	-0.2	0.0545*	0.0584*	0.0762*	0.126
	-0.3	0.0544*	0.0615*	0.0773*	0.1239
	-0.4	0.0536*	0.0622*	0.0761*	0.1204*
	-0.5	0.0549	0.0601*	0.0749*	0.1156*
	-0.6	0.0565	0.058*	0.075*	0.1145*
	-0.7	0.0554	0.0581*	0.0741*	0.111*
	-0.8	0.0543*	0.0571*	0.0702*	0.1004*
	-0.9	0.0505*	0.0563*	0.0658*	0.087*

*為比表 3 檢定力還低的情況(也就是自變數間相關係數為零會高估的情況),其餘為低估

表 13 模擬情境(三)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 c)

		斜率差異類別 c			
		N = 50	N = 100	N = 200	N = 500
X 與 Z 之 相 關 係 數	0.9	0.1955	0.3943	0.712	0.9829
	0.8	0.1834	0.3618	0.675	0.974
	0.7	0.1683	0.3365	0.6426	0.9635
	0.6	0.1553	0.3113	0.6068	0.9485
	0.5	0.1495	0.2932	0.5767	0.9325
	0.4	0.1421	0.2793	0.5517	0.9181
	0.3	0.1385	0.2688	0.5308	0.9038
	0.2	0.1377	0.2601*	0.5135	0.8923
	0.1	0.1365	0.2561*	0.508	0.883*
	0	0.1347	0.2563*	0.5021	0.8813*
	-0.1	0.1359	0.262*	0.5057	0.883*
	-0.2	0.1358	0.2653	0.5139	0.8908
	-0.3	0.1395	0.2762	0.5306	0.9013
	-0.4	0.1449	0.2914	0.5515	0.9169
	-0.5	0.1503	0.3102	0.578	0.9321
	-0.6	0.156	0.3263	0.6018	0.9459
	-0.7	0.1654	0.3477	0.6378	0.9591
	-0.8	0.1746	0.3693	0.6781	0.9711
	-0.9	0.1891	0.4036	0.7139	0.9822

*為比表 3 檢定力還低的情況(也就是自變數間相關係數為零會高估的情況),其餘為低估

表 14 模擬情境(三)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 e)

		斜率差異類別 e			
		N = 50	N = 100	N = 200	N = 500
X 與 Z 之 相 關 係 數	0.9	0.0693*	0.0875*	0.1485*	0.2993*
	0.8	0.0803*	0.1175*	0.2065*	0.4551*
	0.7	0.0884*	0.1325*	0.2431*	0.5404*
	0.6	0.0925*	0.1414*	0.2666*	0.5832*
	0.5	0.0943*	0.1497*	0.276*	0.6054*
	0.4	0.095*	0.152*	0.2819*	0.6133*
	0.3	0.0941*	0.1545*	0.2824*	0.6151*
	0.2	0.0954*	0.1548*	0.279*	0.615*
	0.1	0.0946*	0.1549*	0.2781*	0.6182*
	0	0.0939*	0.1561*	0.2796*	0.6186*
	-0.1	0.0946*	0.1602*	0.2823*	0.6205*
	-0.2	0.0942*	0.1655*	0.2834*	0.6262*
	-0.3	0.0937*	0.1647*	0.2848*	0.6306*
	-0.4	0.0933*	0.1655*	0.2855*	0.6322*
	-0.5	0.0938*	0.1625*	0.2838*	0.6309*
	-0.6	0.092*	0.1591*	0.2775*	0.6225*
	-0.7	0.0878*	0.1485*	0.2626*	0.5969*
	-0.8	0.0804*	0.1363*	0.2366*	0.5439*
	-0.9	0.0717*	0.1186*	0.1909*	0.4382*

*為比表 3 檢定力還低的情況(也就是自變數間相關係數為零會高估的情況),其餘為低估

表 15 模擬情境(三)相關係數不為零之檢定力結果(斜率差異類別 f)

		斜率差異類別 f			
		N = 50	N = 100	N = 200	N = 500
X 與 Z 之 相 關 係 數	0.9	0.3588*	0.7003*	0.9522*	0.9998*
	0.8	0.5343*	0.8846*	0.9971*	1**
	0.7	0.6288*	0.9448*	0.9998*	1**
	0.6	0.6758*	0.9673*	0.9999**	1**
	0.5	0.703*	0.9742	0.9999**	1**
	0.4	0.7208	0.9781	0.9999**	1**
	0.3	0.732	0.9801	0.9999**	1**
	0.2	0.7408	0.9809	0.9999**	1**
	0.1	0.7451	0.981	1	1**
	0	0.748	0.9812	1	1**
	-0.1	0.7507	0.9806	1	1**
	-0.2	0.7538	0.9803	1	1**
	-0.3	0.751	0.9809	0.9999**	1**
	-0.4	0.7444	0.98	0.9999**	1**
	-0.5	0.7341	0.9795	0.9999**	1**
	-0.6	0.7107	0.9764	0.9999**	1**
	-0.7	0.6765*	0.9629*	0.9999**	1**
	-0.8	0.6104*	0.9337*	0.9992*	1**
	-0.9	0.4971*	0.8487*	0.9925*	1**

*為比表 3 檢定力還低的情況(也就是自變數間相關係數為零會高估的情況),其餘為低估

**表不高估也不低估

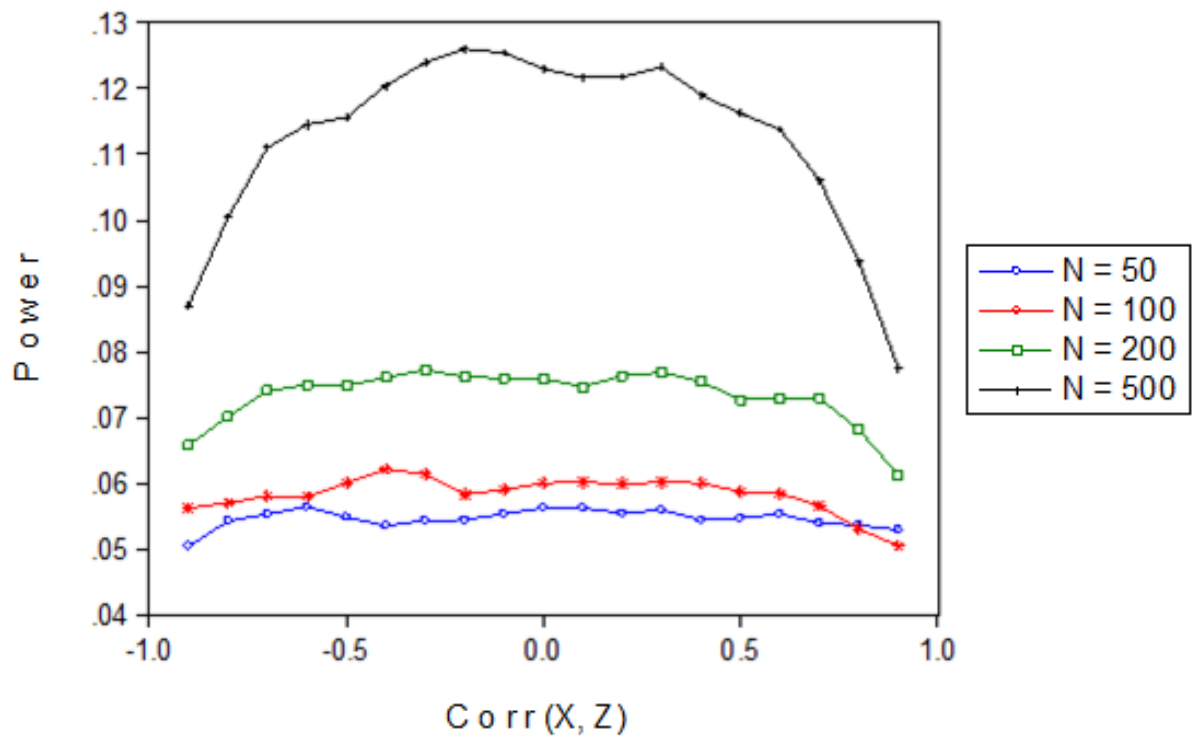


圖 10 模擬情境(三)斜率差異類別 a

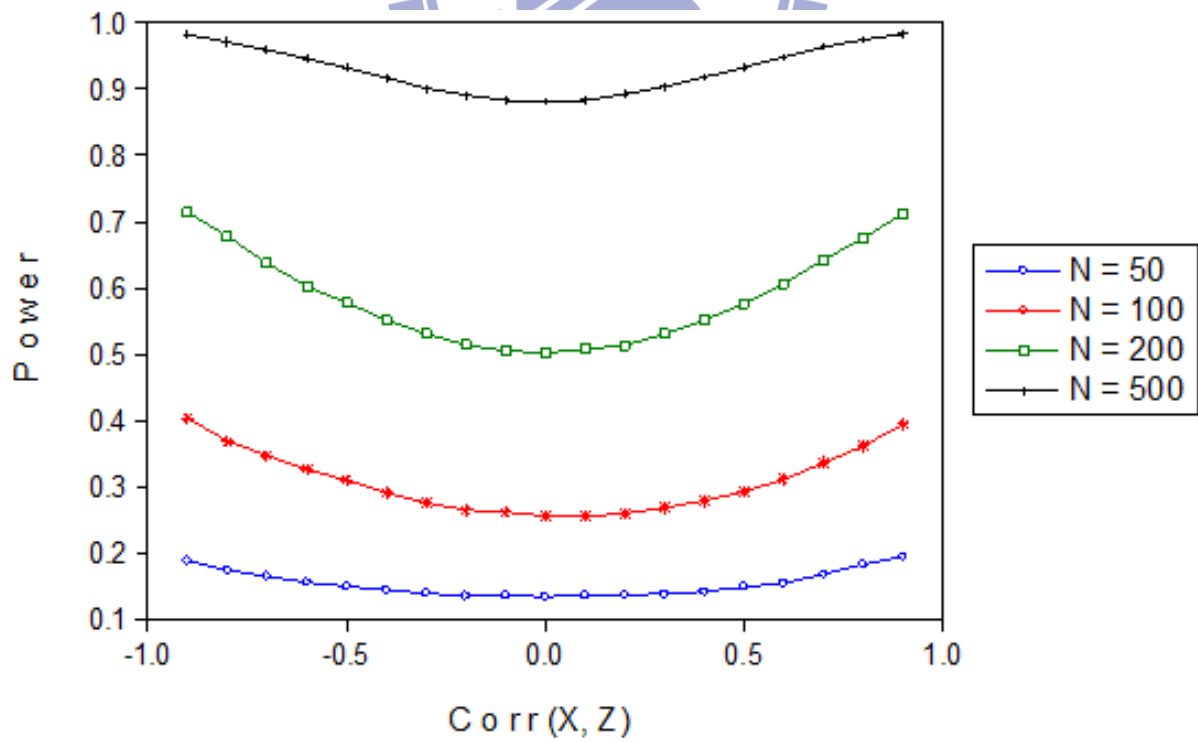


圖 11 模擬情境(三)斜率差異類別 c

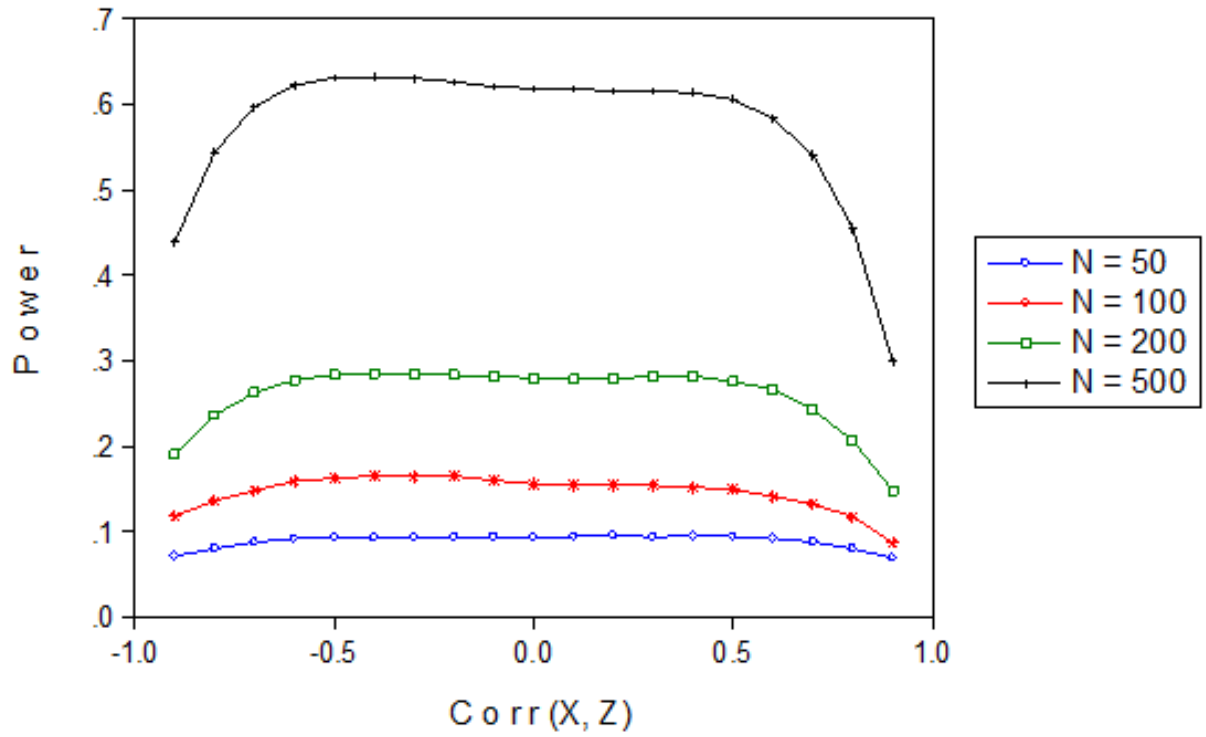


圖 12 模擬情境(三)斜率差異類別 e

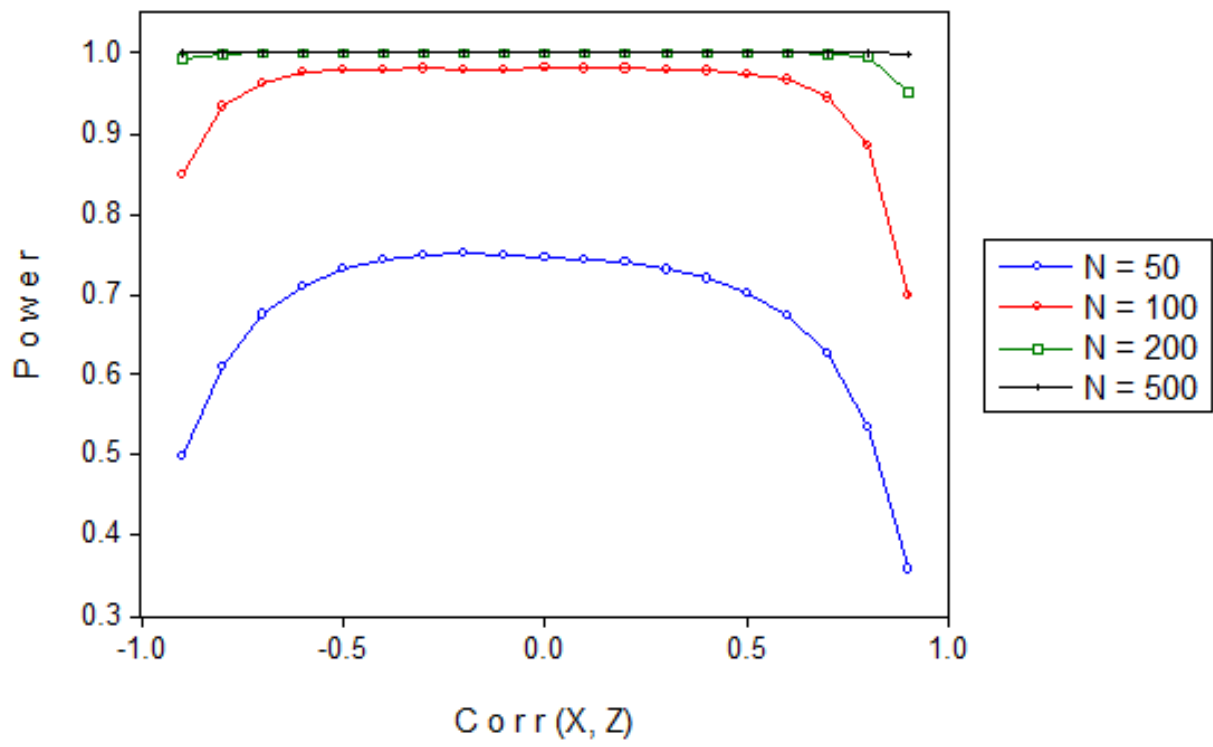


圖 13 模擬情境(三)斜率差異類別 f

3.2.3 小結

綜合 3.2.1 與 3.2.2 兩個部分，我們可以將 3.2.2 相關係數不為零的結果(也就是表 4 至表 15)分別和表 3 自變數間相關係數為零的結果做比較，可更清楚地了解兩者之間的差異：因為自變數間的相關係數和檢定力為曲線關係的緣故，很自然地，自變數間相關係數為零的結果會產生低估或高估檢定力的情形，但高低估的程度隨著樣本數以及斜率差異類別的不同而有所差異，為了凸顯高低估的現象，在表 4 至表 15 中我們特別將自變數為零時會高估實際檢定力的部分以*來表示、不高估也不低估的部分以**來表示、低估則為沒有*或**的部分。為了整理在各種情況下檢定力高低估的情形，我們進一步地將三種模擬情境與四種斜率差異類別的結果整理為表 16，由表 16 的比較可以發現相同的斜率差異類別但不同的情境(也就是相關係數設定值的不同)對檢定力與相關係數的關係只有非常些許的差異、相同的情境不同的斜率差異類別其檢定力和相關係數的關係有非常大的不同。另外，曲線關係越明顯也同時伴隨著高低估程度越明顯的現象，由分析知除了斜率差異類別 f 在檢定力與相關係數的關係中樣本數越多曲線關係反而越不明顯外，其它斜率差異類別皆呈現樣本數越多曲線關係越明顯的情形，故除了斜率差異類別 f 外，高低估的情形會隨著樣本數增加而放大；反之，斜率差異類別 f 檢定力高低估的情形反而隨著樣本數增加而縮小。

總之，在其他情況不變之下，自變數間相關係數的大小的確會對檢定力造成一定程度的影響且不管是何種斜率差異類別皆為類似拋物線的曲線關係，只是曲線的長相不同

罷了，相較於 Dawson and Richter 的文章中模擬自變數間獨立所計算出來的檢定力的數值將不夠精確(也就是低估或高估了真實狀況)，甚至在某些斜率差異類別與樣本數下偏離真實狀況的情形實屬嚴重，因此若要精確地衡量斜率差異檢定法檢定力的大小應納入自變數間相關係數的大小的因素才不至於失真。



表 16 三種模擬情境與四種斜率差異類別的綜合比較

斜率 差異 類別 模擬 情境	a	c	e	f
一	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 除了 $N = 50$ 有時高估有時低估外其他樣本數的表現皆為高估 ▪ 樣本數越大高低估情形越嚴重 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 皆為低估 ▪ 樣本數越大低估情形越嚴重 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 在相關係數絕對值低時低估、高時高估 ▪ 樣本數越大高低估情形越嚴重 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 皆為高估 ▪ 樣本數越大高估情形越嚴重
二	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 除了 $N = 50$ 有時高估有時低估外其他樣本數的表現皆為高估 ▪ 樣本數越大高低估情形越嚴重 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 皆為低估 ▪ 樣本數越大低估情形越嚴重 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 高估 ▪ 樣本數越大高估情形越嚴重 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 在相關係數絕對值低時低估、高時高估 ▪ 樣本數越小高低估情形越嚴重
三	<ul style="list-style-type: none"> ▪ $N = 50$ 有時高估有時低估 ▪ $N = 100, 200$ 時高估 ▪ $N = 500$ 在相關係數絕對值低時低估、高時高估 ▪ 樣本數越大高低估情形越嚴重 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 皆為低估 ▪ 樣本數越大低估情形越嚴重 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 皆為高估 ▪ 樣本數越大高估情形越嚴重 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 在相關係數絕對值低時低估、高時高估 ▪ 樣本數越小高低估情形越嚴重

第四章 結論

迴歸模型是資料分析工具中非常有用且充滿變化的模型，有賴於學者對於迴歸模型的深入討論以及統計軟體的快速發展，萃取資料中的資訊變得容易許多，但也因為軟體操作的快速，使用者常常忽略了分析資料的過程中應該注意的細節。

本篇文章即針對連續型變數的三因子交互作用迴歸模型進行細節上的探討，首先提出應用該模型進行資料分析時建議的程序和注意事項，其次則是透過模擬的方式，展示出斜率差異檢定法(發現具有三因子交互作用存在後最適合用來做後續分析的方法)的檢定力和自變數間相關係數其實是曲線的關係，相較於 Dawson and Richter 的文章，自變數間視為獨立所模擬出來檢定力的結果事實上常高估或低估了真實檢定力的表現，此為本文最重要的貢獻。另外，透過本文的研究將有助於社會科學研究者更深入地了解三因子交互作用模型，其貢獻有二，第一為增加研究的可信度：若非正確地了解如何分析三因子交互作用模型，研究者將可能簡化該模型為兩因子交互作用模型或用錯誤的方式來分析(最常見的錯誤即為採用子群分析法來分析顯著之三因子交互作用模型)，若模型中的確存在顯著三因子交互作用而誤用分析方法將會導致錯估或扭曲變數之間的關係，故了解正確的分析方法將會讓研究的結果更為可信和客觀；第二為資料中資訊量的增加，透過適當的統計方法，研究者不僅只是侷限於了解是否有顯著三因子交互作用的存在，而是可進行深入地探討產生此顯著交互作用的原因為何、是何種調節因子的設定導致交互作用的產生等議題將提供更多資訊供研究者參考。

然而，本文章的主要目的在於探究連續變數之三因子交互作用模型分析中斜率差異檢定法之檢定力與自變數間相關係數的關係，為了專於此目的的緣故，無法將資料的信度(reliability)納入考量為本文的研究限制，事實上，有學者認為信度對於該檢定的檢定力是會有影響的(Dunlap & Kemery, 1988)。總而言之，斜率差異檢定法為發現具有顯著三因子交互作用時最為推薦的後續分析方法，且透過本文的研究，在使用該方法的同時，研究者必須將自變數間相關係數的大小關係納入評量該檢定力的因素之一，如此才能正確地衡量該方法真實檢定力的大小且讓資料分析的過程更為客觀、精確以及嚴謹。



參考文獻

- Aguinis, H. (1995). Statistical power problems with moderated regression in management research. *Journal of Management*, 21, 1141–1158.
- Aguinis, H. (2004). *Regression analysis for categorical moderators*. New York: Guilford Press.
- Aguinis, H., & Stone – Romero, E. F. (1997). Methodological artifacts in moderated multiple regression and their effects on statistical power. *Journal of Applied Psychology*, 82, 192–206.
- Aiken, L. S., & West, S. G. (1991). *Multiple regression: Testing and interpreting interactions*. Newbury Park, CA: Sage.
- Cohen, J., Cohen, P., West, S. G., & Aiken, L. S. (2003). *Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences* (3rd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Cronbach, L. J. (1987). Statistical tests for moderator variables: Flaws in analyses recently proposed. *Psychological Bulletin*, Vol. 102, 414 – 17.
- Dawson, J.F., & Richter, A.W. (2006). Probing Three – Way Interactions in Moderated Multiple Regression: Development and Application of a Slope Difference Test. *Journal of Applied Psychology*, 2006, Vol. 91, No. 4, 917–926.
- Dunlap, W. P., & Kemery, E. R. (1988). Effects of predictor intercorrelations and reliabilities on moderated multiple regression. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 41, 248-258.

Ganzach, Y. (1998). Nonlinearity, multicollinearity and the probability of type II error in detecting interaction. *Journal of Management*, 24, 615–622.

Jaccard, J., & Turrisi, R. (2003). *Interaction effects in multiple regression* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J. & Neter, J. (2004). *Applied Linear Regression Models*(4th ed.). New York: McGraw – Hill.

Shieh, G. (2010). On the Misconception of Multicollinearity in Detection of Moderating Effects: Multicollinearity Is Not Always Detrimental. *Multivariate Behavioral Research*, v45 n3 p483 – 507 2010.

Stone – Romero, E. F., & Anderson, L. E. (1994). Relative power of moderated multiple regression and the comparison of subgroup correlation coefficients for detecting moderating effects. *Journal of Applied Psychology*, 79, 354–359.

van Yperen, N. W., & Janssen, O. (2002). Fatigued and dissatisfied or fatigued but satisfied? Goal orientations and responses to high job demands. *Academy of Management Journal*, 45, 1161–1171.

Wilcox, R. R. (1998). How many discoveries have been lost by ignoring modern statistical methods? *American Psychologist*, 53, 300–314.

附錄

未標準化之斜率差異檢定法之估計值、標準差與檢定統計量

斜率差異類別	斜率差異估計值
a	$\hat{\beta}_5(W_H - W_L) + \hat{\beta}_7 Z_H(W_H - W_L)$
b	$\hat{\beta}_4(Z_H - Z_L) + \hat{\beta}_7 W_H(Z_H - Z_L)$
c	$\hat{\beta}_4(Z_H - Z_L) + \hat{\beta}_7 W_L(Z_H - Z_L)$
d	$\hat{\beta}_5(W_H - W_L) + \hat{\beta}_7 Z_L(W_H - W_L)$
e	$\hat{\beta}_4(Z_H - Z_L) + \hat{\beta}_5(W_H - W_L) + \hat{\beta}_7(Z_H W_H - Z_L W_L)$
f	$\hat{\beta}_4(Z_H - Z_L) + \hat{\beta}_5(W_L - W_H) + \hat{\beta}_7(Z_H W_L - Z_L W_H)$

標準差	檢定統計量
$(W_H - W_L)\sqrt{S_{55} + Z_H^2 S_{77} + 2Z_H S_{57}}$	$t = \frac{\hat{\beta}_5 + \hat{\beta}_7 Z_H}{\sqrt{S_{55} + Z_H^2 S_{77} + 2Z_H S_{57}}}$
$(Z_H - Z_L)\sqrt{S_{44} + W_H^2 S_{77} + 2W_H S_{47}}$	$t = \frac{\hat{\beta}_4 + \hat{\beta}_7 W_H}{\sqrt{S_{44} + W_H^2 S_{77} + 2W_H S_{47}}}$
$(Z_H - Z_L)\sqrt{S_{44} + W_L^2 S_{77} + 2W_L S_{47}}$	$t = \frac{\hat{\beta}_4 + \hat{\beta}_7 W_L}{\sqrt{S_{44} + W_L^2 S_{77} + 2W_L S_{47}}}$
$(W_H - W_L)\sqrt{S_{55} + Z_L^2 S_{77} + 2Z_L S_{57}}$	$t = \frac{\hat{\beta}_5 + \hat{\beta}_7 Z_L}{\sqrt{S_{55} + Z_L^2 S_{77} + 2Z_L S_{57}}}$
$\sqrt{\begin{aligned} &(Z_H - Z_L)^2 S_{44} + (W_H - W_L)^2 S_{55} \\ &+ (Z_H W_H - Z_L W_L)^2 S_{77} \\ &+ 2 \left[\begin{aligned} &(Z_H - Z_L)(W_H - W_L)S_{45} \\ &+ (Z_H - Z_L)(Z_H W_H - Z_L W_L)S_{47} \\ &+ (W_H - W_L)(Z_H W_H - Z_L W_L)S_{57} \end{aligned} \right] \end{aligned}}$	$t = \frac{\hat{\beta}_4(Z_H - Z_L) + \hat{\beta}_5(W_H - W_L) + \hat{\beta}_7(Z_H W_H - Z_L W_L)}{\sqrt{\begin{aligned} &(Z_H - Z_L)^2 S_{44} + (W_H - W_L)^2 S_{55} \\ &+ (Z_H W_H - Z_L W_L)^2 S_{77} \\ &+ 2 \left[\begin{aligned} &(Z_H - Z_L)(W_H - W_L)S_{45} \\ &+ (Z_H - Z_L)(Z_H W_H - Z_L W_L)S_{47} \\ &+ (W_H - W_L)(Z_H W_H - Z_L W_L)S_{57} \end{aligned} \right] \end{aligned}}}$
$\sqrt{\begin{aligned} &(Z_H - Z_L)^2 S_{44} + (W_L - W_H)^2 S_{55} \\ &+ (Z_H W_L - Z_L W_H)^2 S_{77} \\ &+ 2 \left[\begin{aligned} &(Z_H - Z_L)(W_L - W_H)S_{45} \\ &+ (Z_H - Z_L)(Z_H W_L - Z_L W_H)S_{47} \\ &+ (W_L - W_H)(Z_H W_L - Z_L W_H)S_{57} \end{aligned} \right] \end{aligned}}$	$t = \frac{\hat{\beta}_4(Z_H - Z_L) + \hat{\beta}_5(W_L - W_H) + \hat{\beta}_7(Z_H W_L - Z_L W_H)}{\sqrt{\begin{aligned} &(Z_H - Z_L)^2 S_{44} + (W_L - W_H)^2 S_{55} \\ &+ (Z_H W_L - Z_L W_H)^2 S_{77} \\ &+ 2 \left[\begin{aligned} &(Z_H - Z_L)(W_L - W_H)S_{45} \\ &+ (Z_H - Z_L)(Z_H W_L - Z_L W_H)S_{47} \\ &+ (W_L - W_H)(Z_H W_L - Z_L W_H)S_{57} \end{aligned} \right] \end{aligned}}}$