国 立 交 通 大 學

機械工程研究所

碩士論文

葉片具傾斜角之葉輪攪拌槽流場分析
Flow Analysis in a Tank Agitated by Pitched-Blade Impellers

研 究 生：邱建仁
指導教授：崔燕勇

中華民國九十三年七月

葉片具傾斜角之葉輪攪拌槽流場分析

Flow Analysis in a Tank Agitated by Pitched-Blade Impellers

研 究 生：邱建仁 Student：Jian-Ren Chou

指導教授：崔燕勇 Advisor：Yeng-Yung Tsui

國 立 交 通 大 學
機械工程研究所

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Institute of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

July 2004

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十三年七月

葉片具傾斜角之葉輪攪拌槽流場分析

研究生：邱建仁　　　　　　　　　指導教授：崔燕勇　博士

國立交通大學機械工程研究所

摘　　要

本研究是對一個具有傾角之葉輪攪拌器作流場之計算，引用 SIMPLE 壓力修正法，用有限容積法來離散統御方程式，假設流場為擬似穩態，所計算的流場是三維紊流流場，紊流模式是使用高雷諾數的$k-\varepsilon$模式，並在近壁面的流場使用壁函數作處理。在葉片旋轉區內和葉片旋轉區以外，分別以旋轉座標系及靜止座標系作計算。由於假設攪拌槽具有對稱性，而且每一葉片的尺寸外型皆相同，為了減少計算量，僅取半個攪拌槽範圍進行流場分析，當流體流經此範圍邊界時，流出與流入的通量需相同，此範圍之邊界為週期性邊界，計算網格是使用非結構性與非交錯式網格。

本研究主要是改變(1)葉片的傾角α、(2)攪拌器的葉片中心與攪拌槽底部之間的間隙 C、(3)攪拌器葉片的直徑 D、(4)攪拌器的轉速Ω等四種參數，探討在改變這四種參數時，流場所產生的變化。

其結果葉片的傾角逐漸加大到臨界角度以後，流場型態會由軸向流場改為徑向流場，功率數也會快速增加，攪拌數卻是加速減少，顯示在葉片旋轉區域內的流體交換速度減低。間隙越大時，當葉片的傾角加大到臨界角度以後，流場型態由軸向流場改為徑向流場的現象會越不明顯，功率數也因間隙變大而使得在臨界角度後的增加幅度減小，攪拌數也是隨著間隙增加而變小。間隙越小會使軸向流場改為徑向流場的現象越明顯，功率數在臨界角度後的增加幅度也越大，攪拌數也變大。加大葉片直徑後，使得流場型態由軸向流場改為徑向流場的現象越不明顯，也會使功率數的增加幅度變小，而攪拌數是減少的幅度變大。轉速的改變，對流場型態以及功率數、ε*、κ*和攪拌數的影響不大。

Flow Analysis in a Tank Agitated by Pitched-Blade Impellers

Student：Jian-Ren Chou　　　　Advisor：Dr. Yeng-Yung Tsui

Institute of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

This thesis is mainly aimed the flow in a tank agitated by pitched-blade impellers. The SIMPLE algorithm were applied to numerical simulation. Assuming that the flow is quasi-steady. I calculate both inside and outside turbulent flow of the impeller swept region in 3-D. Turbulent model is High Reynolds $k-\varepsilon$ model. wall function is used to calculate the flow near wall. I calculate the inside and outside flows of the impeller region by means of rotative and stationary frame of reference individually. Because the sizes and shapes of the blades in a stirred tank are the same and the flow cycles, I select a suitable calculation range as cyclic boundary to reduce the amount of the calculation. Unstructured and no staggered meshes are adopted in our calculation.

This research is mainly to change four kinds of parameters (1) an oblique angle α of the blade,(2)The clearance C of between centre of the blade and bottoms of the tank,(3) Diameter of the blade D,(4) Rotational speed of the blade Ω。

When oblique angle α of blade increase to critical angle, The flow change from axial-flow to radial-flow, and power number increase rapidly, but pumping number decrease rapidly. When the clearance C is larger, and the α increase to critical angle, the phenomenon of flow change from axial-flow to radial-flow will be unobvious, and the increase number of power number are cut down, and pumping number is decrease. After increase the diameter of the blade, the phenomenon of flow change from axial-flow to radial flow will be unobvious, and the increase numbers of power number are cut down, and the decrease numbers of pumping are larger.

誌謝

衷心感謝崔燕勇教授在我研究所兩年的歲月中，無論在課業中或是論文研究上殷切的指導，使我得以完成這篇論文。同時也要感謝吳添成、胡育昌、呂治宇等學長的教導，以及王宏文、黃弼鑫同學們的幫助，還有謝崇民、唐宜甫、沈詩珍等學弟妹們的陪伴，另外也感謝傅武雄教授與黎源欣博士和王家康學長在論文上的建議，在此至上深深的謝意。

特別感謝父母親多年的養育之恩，以及我最可愛的妹妹，在我碩士生涯中，一直不斷鼓勵著我，沒有他們就沒有今日的我，僅以此小小的成就獻給他們。最後感謝每一位在我人生的路途上，伴我成長的師長、朋友、同學、伙伴們，謝謝你們。

邱建仁　2004.7.7

于交大機械研究所　計算流力實驗室

目　　錄

圖目錄

符號說明

符號	定義
a_P, a_C	動量方程式之係數
a_P^p, a_C^p	壓力修正方程式之係數
B	擋板寬度
c	攪拌葉片中心距離容器底部間隙
D	攪拌葉片直徑
α	攪拌葉片傾角
W	攪拌葉片寬度
$\vec{e}$	單位向量
F_f	通量
H	攪拌槽高度
T	攪拌槽直徑
$\dot{m}$	質量流率
N_p	功率數
N_{Q_p}	攪拌數
p	壓力
Q_Φ	源項
R_e	雷諾數
S	面積向量
S_f	控容面之面積向量
U	速度
U_g	網格移動速度

w_P	權重因子
α_ϕ, α_P	鬆弛因子
ρ	密度
μ	分子黏滯係數
ΔV	控容體之體積
τ	壁面之剪應力
Ω	旋轉座標角速度

下標

b	邊界
C	控制體積周圍網格之中心格點
f	控容面面之中點
i	表 x, y, z 三方向
P	主格點
w	壁面
Φ	變數

上標

c	對流項
d	擴散項
p	壓力
UD	上風差分法
n	疊代次數
$//, \perp$	平行，垂直邊界

第一章　緒論

1.1 前言

近年來在工業製造過程中，不同材料的混合是最常見的加工過程，攪拌機性能的優劣直接影響到混合後的均勻程度，而攪拌混合的結果會直接影響產品的好壞，例如在建築工地常見的混泥土，它是由細砂與小石頭、水泥混合而成的，在攪拌過程中如果攪拌的不均勻，會直接影響建築物的強度，進而影響大眾的安全。再舉個例子來說，例如化妝品的製造，也需要用到攪拌機做混合，以生產所需求的乳劑或乳膏，因爲有些藥材的密度不同，並不容易混合，所以必須靠攪拌機使其材料攪拌均勻，如果不均勻，就會影響產品的功效。在化工方面，例如液體的催化加氫反應，烯烴在鉑、鈀等金屬催化劑下，可以與氫生成烷烴，所以攪拌機在加氫反應槽中，將氫氣通入並分散在液體中，假如氫氣無法分散均勻，化學反應就會不完全，因此攪拌機在混合加工過程中，扮演極爲重要的角色。

攪拌槽的外型依照不同的環境，會有不同的形狀，而攪拌器的葉片形狀與材質，也會因不同的需求而有所不同。爲了要提高攪拌器的效能，除了要提高馬達的性能外，最重要的就是攪拌器的設計，至於設計方面有四個要點:

(1)提高攪拌後的均勻度。

(2)減少攪拌的時間。

(3)降低攪拌時需要消耗的功率。

(4)提高在葉片與攪拌物質之間的能量轉換，以減少能量不必要的浪費。

因此攪拌器的葉片會被設計成不同的形狀，去應用於所需要的攪拌環境中，以下舉幾個不同的攪拌器來說明。

(1)框式攪拌器(圖 1.1):此類攪拌器爲慢速型攪拌器，常用於中高粘度液體混合，其主要用途除了混合外，另外就是要刮取粘在攪拌槽壁面上高黏性物質，大多應用在乳化硅油、氯化順丁橡膠、甘酪素、皮革加脂劑和 PU 水性粘合劑的混合。

以下舉出兩種外型的框式攪拌器:

(a)錨框式攪拌器(圖 1.1 (a))在低速旋轉時沿壁面能得到大的剪切力，可防止沉降及壁面附著，底部形狀貼合橢圓形罐與中間的底軸承。

(b)板框式 (圖 1.1 (b))是另一種簡易的慢速攪拌器，板框上開的孔，其形狀數量，分佈型式，都可以因需要而變化。

(2)消泡攪拌器(圖 1.2): 此類攪拌器爲特殊用途的攪拌器，主要是爲消除液面上覆蓋的大量泡沫而用，應用方面例如釀酒場的發酵槽。以下舉出兩種外型的消泡攪拌器:

(a)消泡葉輪(圖 1.2(a))爲高速型，其高速旋轉下產生的離心作用，使從中心吸進的泡沫，沿壁面匯成液珠拋出，消泡效果好，消耗功率大，葉輪製作要求高。

(b)消泡槳(圖 1.2(b))爲中低速型，旋轉蛇形柵條槳，反復碰撞、攪破液面上的氣泡，不斷破壞生成的氣泡，控制了泡沫的增加，在發酵罐中應用廣泛、效果良好，附裝在攪拌軸上部，製造、安裝簡易。

(3)圓盤渦輪式攪拌器(圖 1.3):本類攪拌器的轉軸與葉片之間裝有一圓盤，分散效果較好，一般適用於固、液兩相催化懸浮反應，它可將槽底的固體催化劑完全打碎並充分攪起，用途很廣，在油漆、油墨、塗料、塑料、染料、化妝品等行業都可以見到。以下爲三種不同的型態:

(a)平直葉圓盤渦輪式(圖 1.3(a)):具有高剪切能力和較大的循環能力。

(b)斜葉圓盤渦輪式(圖 1.3(b)):具有傾角，有軸向分流。

(c)彎葉圓盤渦輪式(圖 1.3(c)):徑向排出性能好，動力消耗低。

(4)斜葉渦輪式攪拌器(圖 1.4):本類攪拌器除有徑向流外還有軸向分流，它具有較優的綜合性能，適用於各行業、中粘度物料的混合、溶解、固體懸浮、傳熱、反應、萃取、結晶等攪拌作業都較適合，通常分批混合低粘度、易混合的液體，如原料漿和增塑糊料，這類攪拌器的特點是周轉快，同時因爲它們的低剪切混合作用而被用於剪切敏感的物料。其

它過程也都能應用，因此本論文以此類攪拌器作為探討的重點。

綜合上述的攪拌器所產生的流場型態，大致可分為兩種:

(1)徑流式：流體以順著葉輪直徑的方向流出(圖 1.5)，例如平直葉圓盤渦輪式攪拌器。

(2)軸流式：流體以順著旋轉軸的方向流出(圖 1.6)，例如斜葉渦輪式攪拌器。

在攪拌過程中常會發生漩渦打轉（Swirling）現象，這是在攪拌裝置的葉輪在高速旋轉時，桶內的液體會以旋轉軸為圓心，作規則的等速圓周運動，以致於降低混合效果。

現今改善漩渦打轉的方法有：

(1)側伸：旋轉軸從桶側伸入，可消除漩渦，但因軸封在液位下方，會造成腐蝕而滲漏。

(2)偏心：旋轉軸偏離桶子的中心。

(3)加擋板：在桶內壁等距加裝四～六片擋板。

(4)加導管：在葉輪附近加直立導管，引導流體上下流動，而不會形成漩渦，對懸浮性固體特別有效。

1.2 文獻回顧

文獻回顧分為兩大類，一類是以純實驗量測為主，另外一類是除了量測以外，還有做數值分析。

1.2.1 以實驗量測為主要內容

YIANNESKIS and POPIOLEK(1987)[2] 利用 LDA(Laser-Doppler Anemometer)法量測平直葉圓盤渦輪式攪拌器中的流場速度，以及對三種葉片直徑和三種不同間隙做量測，論文中定義功率數(Power Number)，結果發現在雷諾數到達紊流時（Re ≧40000），功率數會隨著葉片直徑增加，其大小與間隙無關。

WU and PATTERSON(1989)[3] 利用 LDV(Laser-Doppler Velocimeter)法量測有壁

面擋板的平直葉圓盤渦輪式攪拌器中的紊流因子：紊流強度、自相關函數、紊流尺寸、能量頻譜和紊流能量耗散率。結果發現經由葉片傳輸的能量有 60%消耗在葉片掃過的區域，剩下 40%消耗在容器其它區域。

JAWORSKI and NIENOW (1991)[4]等，利用 LDA 法量測一個等間距，斜角 45 度，直徑爲 1/3 容器直徑長的葉片攪拌器中的平均和擾動紊流速度，採用兩種底部間隙：1/4 和 1/2 容器直徑，紊流場是局部等向和近乎均值。結果發現流場形狀和底部間隙有很大的關係，在距離 1/4 底部間隙的高度有一強度較弱的反向渦流。

LEE and YIANNESKIS(1998)[5] 使用 LDA 法量測一個具有平直葉圓盤渦輪式攪拌器的攪拌槽，並決定紊流時間和長度的尺寸，結果發現愈靠近葉片，紊流能量和耗散率就愈高，隨著遠離葉片，能量與耗散率也隨之降低，愈靠近葉片流場愈沒有等向性。

SCHAFER and YIANNESKIS (1998)[6]等，在等間距斜角 45 度攪拌器中以實驗量測平均速度和紊流結構，結果發現在每個葉片周圍都有一個單一尾端渦流。

MONTANTE and LEE (1999)[7]等，利用 LDA 法量測一個具有平直葉圓盤渦輪式攪拌器的攪拌槽，結果發現葉片底部間隙大約爲容器直徑的 0.2 倍時，雙循環的流場結構漸漸過渡到單一循環的流場外型，而且葉片底部間隙大於容器直徑的 0.2 倍以上，以及小於 0.15 倍以下，葉片轉速對於流場外型與無因次化後的平均速度以及紊流場的影響不大。

AUBIN and MAVROS 等(2001)[8] 使用 LDV 法研究二種軸向攪拌器，單相的紊流場，分成向上循環和向下循環和反向循環三種，結果發現向下循環易形成單一循環，容器上方混合程度較差，向上循環則易形成兩個循環，在容器上方形成第二個循環。

1.2.2 以數值模擬為主要內容

RANADE and BOURNE(1991)[9]用標準 $k-\varepsilon$ 模式模擬紊流流場，所模擬的攪拌槽高度和直徑為直徑 0.3m，攪拌器有 6 片葉片，葉片直徑 0.1m，寬度為 0.03m，葉片與傾角為 45^0，槽內有 4 片擋板，其擋板寬度 0.03m，葉片間隙為 0.1m，其中槽內流場假設為擬似穩態，壁面假設為無滑移壁面，並使用了壁函數，結果所模擬的速度曲線相當接近實驗數據。

DONG 等 (1994) [10]，使用標準 $k-\varepsilon$ 模式和壁函數來模擬一個無擋板，八片平板垂直葉片的攪拌器，結果顯示在葉片區域以外都能很準確的模擬，但是在葉片區域以內計算得結果並不準確。

RANADE and DOMMETI(1996)[11]用高速照相法(Snapshot approach)去模擬外型高度和直徑為 0.3m，攪拌器有 6 片葉片，葉片直徑 0.1m，寬度為 0.03m，葉片與傾角為 45^0，槽內有 4 片擋板，其擋板寬度 0.03m，葉片間隙為 0.1m 的攪拌槽，其中計算範圍為半個流場的區域，並定義兩個無因次的攪拌數和功率數。

ARMENANTE(1997)[12]等使用 LDV 法量測和使用 FLUENT 軟體模擬三維速度場和紊流動能分佈，分別使用 k-ε 模式和 ASM(algebraic stress model)模式模擬紊流場，所模擬的攪拌器的容器直徑和高度皆為 0.293m，是一個六葉，斜角 45 度，等間距葉片，葉片直徑 0.098m，寬度 0.0196m，底部間隙 0.073m，無擋板，平底，有蓋，並且分別使用了 450rpm 與 700rpm 轉速去做分析。其中利用量測到葉片掃過區域上緣和下緣平面的數據當作數值模擬的邊界條件，結果發現使用 ASM 模式在容器的頂部與底部都比 $k-\varepsilon$ 模式來的好。

DURST (1999)[13]，使用擬似穩態和非穩態模擬一個容器直徑和高度皆為 0.152m，攪拌器為 4 片葉片，葉片直徑 0.5m，寬度 0.1m，中心距底部間隙 0.5m，角度 45^0，有 4 片擋板，擋板寬度 0.015m，擋板與容器壁面的間隙為 0.0026m，雷諾數 Re=7280 的攪拌槽。在葉片區域內使用旋轉座標，在葉片區外使用靜止座標，非穩態模擬會使用到動態網格，在葉片區和非葉片區的交界面需使用輔助網

格來達到動態模擬，結果顯示穩態和非穩態模擬結果相距不遠。

胡育昌(2003)[14]參考 RANADE 和 DOMMETI(1996)[10]內所模擬的幾何外型，並改變葉片與傾角的角度，分別使用了 30°、45°、60°、75°等不同的角度去做分析，而使用$k-\varepsilon$模式去對流場做模擬，並且對葉片後方渦流情況做討論。其結果說明葉片的角度越大，主流場向外射出的角度越大，二次循環的範圍也加大，因爲葉片的角度變大，使得更多的流體在葉片的旋轉範圍內，而旋轉產的離心力造成更多的流體往葉片外流動，因而使得向外射出的角度增大。當葉片角度愈大，在葉片下方所產生的軸向射出的速度也愈強，但當葉片大於某個角度時（大約在$60^{o} < \alpha < 75^{0}$或$45^{o} < \alpha < 60^{0}$）速度又減小，也就是說在某兩個角度之間，軸向射出的速度會有一個最大值，且葉片角度愈大，葉片所帶動的圓周方向流動也愈強。

1.3 研究目的

本文引用 SIMPLE 壓力修正法，用有限容積法來離散統御方程式，並採用非交錯式之非結構性網格，紊流流場以標準線性$k-\varepsilon$模式配合壁函數去模擬葉輪攪拌槽流場，目的是經由計算模擬所得的結果了解葉輪攪拌槽內部的流場情況、混合效能等，並且改變設計參數，比較不同參數的改變，對攪拌器的攪拌能力及混合程度的表現有何影響。

第二章　數學模式

2.1 基本假設:

本論文對流場做了幾項假設:

(1) 流場擬似穩態。

(2) 流場為三維不可壓縮流。

(3) 流場內維持等溫狀態。

(4) 忽略重力。

2.2 多重參考座標系之統御方程式

將所計算區域分成葉片旋轉區域內與葉片旋轉區域以外兩個部分(如圖 2.1)，而葉片旋轉區域外使用的是靜止座標系，葉片旋轉區域內則使用旋轉座標系。

2.2.1 靜止座標系之統御方程式:

在葉片旋轉區域外則使用靜止座標系，而靜止座標系是採用尤拉(Eulerian)座標系之統御方程式。

連續方程式　$$\frac{\partial(\rho U_j)}{\partial x_j}=0 \tag{2.1}$$

動量方程式　$$\frac{\partial(\rho U_i U_j)}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{2.2}$$

2.2.2 紊流模式－k-ε 模式

因流場為紊流流場，所以透過雷諾平均 (Reynolds averaging) 過程所形成的時均化方程式，將瞬時速度分成平均項$\tilde{U}_i$與變動項U':

$$U_i=\tilde{U}_i+U_i' \tag{2.3}$$

將(2.3)代入(2.1)(2.2)中並進行時均化過程後可得到

連續方程式 $$\frac{\partial(\rho\tilde{U}_j)}{\partial x_j}=0 \tag{2.4}$$

動量方程式 $$\frac{\partial(\rho\tilde{U}_i\tilde{U}_j)}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial\tilde{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\tilde{U}_j}{\partial x_i}\right)-\rho\left(\widetilde{U_i'U_j'}\right)\right] \tag{2.5}$$

在上式中$-\rho\left(\widetilde{U_i'U_j'}\right)$爲雷諾應力。

根據 Boussinesq(1877)的假設，雷諾應力與平均應變率呈線性關係：

$$\tau_{ij}=-\rho\left(\widetilde{U_i'U_j'}\right)=2\mu_t D_{ij}-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} \tag{2.6}$$

其中:

平均應變率 $$D_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\tilde{U}_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.7}$$

紊流黏滯性 $$\mu_t=\frac{C_\mu\rho k^2}{\varepsilon} \tag{2.8}$$

紊流動能 $$k=\frac{\widetilde{U_i'U_i'}}{2} \tag{2.9}$$

紊流耗散率 $$\varepsilon=\nu\widetilde{\left(\frac{\partial U_i'}{\partial x_j}\right)^2} \tag{2.10}$$

常數 $C_\mu=0.09$

$\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$:加入此項是爲了當 i = j 時，使等式兩邊成立。

將(2.6)代入(2.5)中，可將動量方程式重新整理爲

$$\frac{\partial(\rho\tilde{U}_i\tilde{U}_j)}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_{eff}\left(\frac{\partial\tilde{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\tilde{U}_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}\right] \tag{2.11}$$

其中： $\mu_{eff}=\mu+\mu_t$

k 與 ε 的方程式由 Navier-Stokes 方程式推導可得到：

k 方程式 $$\frac{\partial(\rho\tilde{U}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) + P - \rho\varepsilon \tag{2.12}$$

ε 方程式 $$\frac{\partial(\rho\tilde{U}_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) + C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P - C_{\varepsilon 2}\rho\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{2.13}$$

其中紊流生成項 $$P = -\rho\left(\widetilde{U_i' U_j'}\right)\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = \mu_t\left[\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i}\right]\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} \tag{2.14}$$

根據 Launder and Spalding[15]

$C_{\varepsilon 1}$=1.44；$C_{\varepsilon 2}$=1.92；σ_κ=1.00；σ_ε =1.30

2.2.3 旋轉座標系之統御方程式:

在旋轉座標系中加入一個網格移動速度$\vec{U}_g = \vec{\Omega}\times\vec{r}$ ，因此連續方程式(2.4)式可以改寫為:

連續方程式 $$\frac{\partial[\rho(\tilde{U}_j - U_{gj})]}{\partial x_j} = 0 \tag{2.22}$$

而且動量方程式須加上由於旋轉所產生的物體力(body force)，也就是科氏力與離心力，所以動量方程式(2.11)式必須改為:

動量方程式 $$\frac{\partial[\rho(\tilde{U}_i - U_{gi})(\tilde{U}_j - U_{gj})]}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_{eff}\left(\frac{\partial(\tilde{U}_i - U_{gi})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\tilde{U}_j - U_{gj})}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}\right]$$

$$-\rho\varepsilon_{mni}\Omega_m(\varepsilon_{pqn}\Omega_p x_q) + 2\rho\varepsilon_{mni}\Omega_m(\tilde{U}_n - U_{gn}) \tag{2.23}$$

其中Ω為旋角速度，離心力和科氏力分別為$-\rho\varepsilon_{mni}\Omega_m(\varepsilon_{pqn}\Omega_p x_q)$和

$2\rho\varepsilon_{mni}\Omega_m(\tilde{U}_n - U_{gn})$ 。

因為旋轉座標系有一個旋轉速度，因此 k 跟 ε 方程式(2.12)與(2.13)也要改成:

k 方程式 $$\frac{\partial[\rho(\tilde{U}_j - U_{gj})k]}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) + P - \rho\varepsilon \tag{2.24}$$

ε 方程式 $$\frac{\partial[\rho(\tilde{U}_j - U_{gj})\varepsilon]}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) + C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P - C_{\varepsilon 2}\rho\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{2.25}$$

2.3 邊界條件

本篇計算區域為一封閉容器無進出口邊界，而固體壁面需要考慮葉片所造成的移動壁面以及容器內壁的固定壁面，並選取適當範圍作為週期性邊界，以減少計算量。

2.4.1 週期性邊界

本研究的斜葉渦輪式攪拌器具有對稱性，而每一個葉片的幾何、環境與假設均相同，因此僅取半個攪拌槽範圍進行流場分析(如圖 2.2)，而當流體流經此範圍邊界時，流出與流入的通量需相同，此範圍之邊界為週期性邊界。

2.4.2 壁面條件

因為有旋轉葉片和容器外壁，而且流場為非滑移流，所以有移動壁面和固定壁面，由於使用高雷諾數 $k-\varepsilon$ 模式在壁面需使用壁函數，有關壁函數留待數值方法中再詳細介紹。

(1) 固定壁面

容器上蓋，容器底部，容器壁面，擋板皆不動，速度為零 $\bar{U} = 0$

(2) 移動壁面

旋轉軸及葉片具有一旋轉速度 $\bar{U} = \bar{\Omega} \times \bar{r}$，$\bar{r}$ 為葉片所在位置之位置向量。

第三章　數值方法

由第二章的連續方程式、Navier-Stokes 方程式、k 跟 ε 方程式可寫成以下的通式:

$$\nabla \cdot \left[\rho \left(\vec{U} - \vec{U}_g \right) \phi \right] = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + q_\Phi \tag{3.1}$$

其中$\overline{U}_g$爲網格速度

3.1 離散化

對(3.1)式使用有限體積積分法進行離散化，因爲非結構性網格比結構性網格更能使用在複雜的幾何外型上，因而爲本研究所採用，格點安排成非交錯的形式，也就是將所有要求解的獨立變數及流體的性質均置存於控制體積之中心點，對統御方程式之離散均使用有限體積法，首先須將計算域離散成有限個控制容體，再用高斯散度定理將體積分轉爲面積分，再採用中點定理來作二階準確之近似將面積分化爲差分形式。以下分別就對流項、擴散項及源項分別詳述：

3.1.1 對流項(Convection term)

先以高斯散度定理(Gauss divergence theorem)，將體積分轉爲面積分：

$$\oint \nabla \cdot (\rho \vec{v} \phi) dV = \iint_S (\rho \vec{v} \phi) \cdot d\vec{S} \tag{3.2}$$

再以中點定理，將面積分化爲差分形式：

$$\iint_S \left[\rho \left(\vec{U} - \vec{U}_g \right) \phi \right] \cdot d\vec{S} \approx \sum_f \left[\rho \left(\vec{U} - \vec{U}_g \right) \phi \right]_f \cdot S_f = \sum_f \dot{m}_f \phi_f = \sum_f F_f^c \tag{3.3}$$

其中下標 f ：表示控制體積之任一面上之中點

$\dot{m}$ ：質量流率(mass flow rate)

F_f^c ：對流通量(flux)

在求解的過程中，對於對流項的處理，是採用一階上風差分(1st order UD)和二階上風差分(2nd order UD)之混合方式作運算，如此可使疊代過程穩定易於收斂，並同時保持較高準確度：

$$F_f^C = \dot{m}_f \Phi_f = \dot{m}_f (\Phi_f^{UD} + \gamma \nabla \Phi_f^{UD} \cdot \delta \bar{r}) \tag{3.4}$$

其中： Φ_f^{UD} 爲一階上風差分求得之面上值

γ爲一介於 0 與 1 之值，通常取一接近 1 之值以確保爲接近二階準確之上風差分，在程式中γ是設定在 0.9。

重新整理(3.4)式得：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f \Phi_f &= \max(\dot{m}_f, 0)\Phi_P - \max(-\dot{m}_f, 0)\Phi_C \\ &+\gamma \left[\max(\dot{m}_f, 0)\nabla \Phi_P \cdot \delta \bar{r} - \max(-\dot{m}_f, 0)\nabla \Phi_C \cdot \delta \bar{r} \right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

上式中前兩項相當於一階上風差分項，置於係數矩陣中，而第三項，也就是括號內之項則置於源項中。

3.1.2 擴散項(Diffusion term)

經由高斯散度定理及中點定理後，對任意變數ϕ之擴散通量

F_f^D (diffusion flux)可以表示爲：

$$F_f^D = \Gamma_f (\nabla \phi)_f \cdot \overrightarrow{S_f} \tag{3.6}$$

令 $\overrightarrow{S_f} = \vec{d} + (\overrightarrow{S_f} - \vec{d})$ (3.7)

使用 over-relaxed approach 法(如圖 3.1)：

$$\vec{d} \equiv \frac{|\overrightarrow{S_f}|}{\overrightarrow{e_d} \cdot \overrightarrow{e_s}} \overrightarrow{e_d} = \frac{|\overrightarrow{S_f}|^2}{\delta\vec{r} \cdot \overrightarrow{S_f}} \delta\vec{r} \tag{3.8}$$

將(3.7)、(3.8)代入(3.6)中可得：

$$F_f^D = \frac{\Gamma_f |\overrightarrow{S_f}|^2}{\delta\vec{r} \cdot \overrightarrow{S_f}} (\phi_C - \phi_P) + \underline{\Gamma_f \nabla\phi_f (\overrightarrow{S_f} - \vec{d})} \tag{3.9}$$

上式中底線部份以顯項來處理，即使用前一次疊代之值，將它放入源項中。

3.1.3 源項(Source term)

將源項 q_Φ 直接對其進行體積分得：

$$Q_\Phi = \int_{\Delta V} q_\Phi dV \approx (q_\Phi \Delta V)_P \tag{3.10}$$

以下將各個源項分別加以說明:

在壓力梯度項，由高斯散度定理及中點定理得：

$$\nabla P = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \nabla P dV = \frac{1}{\Delta V} \iint_{s} P d\vec{S} \approx \frac{1}{\Delta V} \sum_f P_f \overrightarrow{S_f} \tag{3.11}$$

其在 i 方向的分量：

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} (\nabla p \cdot \bar{e}_i) dV = \frac{1}{\Delta V} \int_S p\bar{e}_i \cdot d\bar{S} \approx \frac{1}{\Delta V} \sum_f p_f \bar{S}_{fi} \tag{3.12}$$

對於邊界上的壓力 p_a，我們可以下列方式求得，過程如下：

$$p_a - p_p = \nabla p_p \cdot \delta \bar{r} \tag{3.13}$$

其中$\delta \bar{r}$代表主格點P到邊界a之距離向量(如圖 3.2 所示)，而壓力梯度∇p_p經由以下處理，將邊界上的壓力與其它面上的壓力分開

$$\nabla p_p = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \nabla p dV = \frac{1}{\Delta V}\int_S p\bar{S} = \frac{1}{\Delta V}\sum_f p_f \bar{S}_f = \frac{1}{\Delta V}\left(p_a \bar{S}_a + \sum_{f \neq b} p_f \bar{S}_f \right) \tag{3.14}$$

將(3.14)式代入(3.13)式，經過整理之後可得到邊界上之壓力為：

$$p_a = \frac{p_p + \frac{1}{\Delta V}\sum_{f \neq a} p_f \bar{S}_f \cdot \delta \bar{r}}{1 - \frac{1}{\Delta V}\bar{S}_a \cdot \delta \bar{r}} \tag{3.15}$$

速度梯度項$\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$可由下式處理：

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dV = \frac{1}{\Delta V}\int_S U_i \bar{e}_j \cdot d\bar{S} = \frac{1}{\Delta V}\sum_f U_{fi} S_{fj} \tag{3.16}$$

另外離心力與科氏力也放入源項中

離心力： $$\int_{\Delta V} -\rho \varepsilon_{mni} \Omega_m (\varepsilon_{pqn} \Omega_p x_q) dV = \left[-\rho \varepsilon_{mni} \Omega_m (\varepsilon_{pqn} \Omega_p x_q) \Delta V \right]_P \tag{3.17}$$

科氏力： $$\int_{\Delta V} 2\rho \varepsilon_{mni} \Omega_m (\tilde{U}_n - U_{gn}) dV = \left[2\rho \varepsilon_{mni} \Omega_m (\tilde{U}_n - U_{gn}) \Delta V \right]_P \tag{3.18}$$

其中ε_{mni}是當 mni 為循環排列由小到大(例 123)，其ε_{mni}的值為 1，當 mmi 為循環排列由大到小(例 321)，其ε_{mni}的值為-1，其他情況其ε_{mni}的值為 0。

3.1.4 合併係數

由前面推得之對流項、擴散項及源項合併可得：

$$a_P \phi_P = \sum_C a_C \phi_C + Q_\Phi \tag{3.19}$$

$$a_C = \frac{\Gamma_f |\overrightarrow{S_f}|^2}{\vec{\delta} \cdot \overrightarrow{S_f}} + \max(-\dot{m}_f, 0) \tag{3.20}$$

其中 $a_P = \sum_C a_C$

$$\begin{aligned} Q_\phi = & \sum_f -\gamma \left[\max(\dot{m}_f, 0)\nabla\Phi_P \cdot \delta\vec{r} - \max(-\dot{m}_f, 0)\nabla\Phi_C \cdot \delta\vec{r} \right] \\ & + \sum_f \Gamma_f \nabla\Phi_f \left(\vec{S}_f - \vec{d}\right) + (q_\phi \Delta V)_p \end{aligned} \tag{3.21}$$

爲了使疊代過程較穩定，引入一鬆弛因子 α_Φ (under-relaxation factor)，對動量代數方程式之修正如下所示：

$$\frac{a_P}{\alpha_\Phi} \Phi_P^{(n+1)} = \sum_C a_C \Phi_C^{(n+1)} + Q_\Phi + (1-\alpha_\Phi)\frac{a_P}{\alpha_\Phi} \Phi_P^{(n)} \tag{3.22}$$

其中上標 $(n+1)$ 代表新值，(n) 則代表前一次疊代之值。

令 $\frac{a_P}{\alpha_\Phi} = a'_p$ 代入(3.22)可得到修正之動量代數方程式：

$$a'_p \Phi_P^{(n+1)} = \sum_C a_C \Phi_C^{(n+1)} + Q_\Phi + (1-\alpha_\Phi) a'_p \Phi_P^{(n)} \tag{3.23}$$

在程式中速度的 α_Φ 是設定 0.5~0.75， κ 與 ε 的 α_Φ 是設定 0.1。

3.2 計算面上質量流率：

爲滿足連續方程式，必須計算面上之速度。由(3.22)式中之壓力項自源項中提出，可得主格點之速度與壓力關係式：

$$\overline{U}_p = \overline{H}_p - \left(\frac{\Delta V}{a_p}\right)_p \nabla p_p \tag{3.24}$$

控容面上之速度與壓力關係式為：

$$\overline{U}_f = \overline{\overline{H}}_f - \left(\overline{\frac{\Delta V}{a_P}}\right)_f \nabla p_f \tag{3.25}$$

其中：

$$\overline{\overline{H}}_f = \overline{\overline{U}}_f + \left(\overline{\frac{\Delta V}{a_P}}\right)_f \overline{\nabla p}_f \tag{3.26}$$

將(3.26)代入(3.25)整理可得：

$$\overline{U}_f = \overline{\overline{U}}_f - \left(\overline{\frac{\Delta V}{a_P}}\right)_f (\nabla p_f - \overline{\nabla p}_f) \tag{3.27}$$

其中：　上標“—”表示由主格點 P 及相鄰控容面之 C 格點內插而得，w_P 為加權因子(weighting factor)。如下所示：

$$\overline{\overline{U}}_f = w_P \overline{U}_C + (1 - w_P)\overline{U}_P \tag{3.28}$$

$$\left(\overline{\frac{\Delta V}{a_P}}\right)_f = w_P \left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_C + (1 - w_P)\left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_P \tag{3.29}$$

$$\overline{\nabla p}_f = w_p \nabla p_c + (1 - w_p)\nabla p_p \tag{3.30}$$

如此質量流率可寫為：

$$\dot{m}_f = \rho_f \left(\overline{U}_f - \overline{U}_{gf}\right)\cdot \vec{S}_f = \rho_f \left(\overline{\overline{U}}_f - \overline{U}_{gf}\right)\cdot \vec{S}_f - \rho_f \left(\overline{\frac{\Delta V}{a_P}}\right)_f (\nabla p_f - \overline{\nabla p}_f)\cdot \vec{S}_f$$

$$\approx \rho_f \left(\overline{\overline{U}}_f - \overline{U}_{gf}\right)\cdot \vec{S}_f - \rho_f \left(\overline{\frac{\Delta V}{a_P}}\right)_f (\nabla p_f - \overline{\nabla p}_f)\cdot \vec{d}$$

$$= \rho_f \left(\overline{\overline{U}}_f - \overline{U}_{gf}\right)\cdot \vec{S}_f - \rho_f \left(\overline{\frac{\Delta V}{a_P}}\right)_f \frac{\left|\vec{S}_f\right|^2}{\delta\vec{r}\cdot\vec{S}_f} \left[\left(p_c - p_p\right) - \overline{\nabla p}_f \cdot \delta\vec{r}\right] \tag{3.31}$$

其中$\overline{U}_{gf}$ 為旋轉座標系之網格面上的速度，而$\vec{d}$ 之定義如(3.8)所示。

3.3 壓力修正式

根據Patankar所提的SIMPLE法則，將前次疊代的壓力P^*，代入動量方程式中(3.22)式，可解出中心格點P之速度場$\vec{V}^*$，此時速度場與壓力並不滿足連續方程式，因此需再做修正，而修正後的速度及壓力爲$\vec{V}^{**}$及P^{**}，根據Pantankar之假設，其速度修正量及壓力修正量表示成下面關係：

$$\overline{U}'_p = -\left(\frac{\Delta V}{a_p}\right)_p \nabla p'_p \tag{3.32}$$

其中 $P_P' = P_P^{**} - P_P^{*}$

$$\overline{U}'_p = \overline{U}_p^{**} - \overline{U}_p^{*}$$

同理可得面上速度修正式：

$$\overline{U}'_f = \overline{U}_f^{**} - \overline{U}_f^{*} = -\left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_f \nabla p'_f \tag{3.33}$$

由以上可得修正之質量流率：

$$\dot{m}_f^{**} = \dot{m}_f^{*} + \rho_f \overline{U}'_f \cdot \overline{S}_f = \dot{m}_f^{*} - \rho_f \left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_f \nabla p'_f \cdot \overline{S}_f$$

$$= \dot{m}_f^{*} - \rho_f \left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_f \nabla p'_f \cdot \vec{d} - \rho_f \left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_f \nabla p'_f \cdot (\overline{S}_f - \vec{d})$$

$$= \dot{m}_f^{*} - \rho_f \left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_f \frac{\left|\overline{S}_f\right|^2}{\delta \vec{r} \cdot \overline{S}_f} (p'_c - p'_p) - \rho_f \left(\frac{\Delta V}{a_P}\right)_f \nabla p'_f \cdot \left(\vec{S}_f - \vec{d}\right) \tag{3.34}$$

令修正後滿足連續方程式：

$$\sum_f \dot{m}_f^{**} = 0 \tag{3.35}$$

可得壓力修正方程式：

$$A_P P_P' = \sum_C A_C P_C' + S_{P1} + S_{P2} \tag{3.36}$$

其中

$$A_c^p = \rho_f \left(\frac{\Delta V}{A_P} \right)_f \frac{|\overrightarrow{S_f}|^2}{\delta \vec{r} \cdot \overrightarrow{S_f}}$$

$$A_p^p = \sum_c A_c^p$$

$$S_{p1} = \sum_f \dot{m}_f^{*}$$

$$S_{P2} = \sum_f \rho_f \left(\frac{\Delta V}{A_P} \nabla P' \right)_f \cdot \left(\overrightarrow{S_f} - \vec{d} \right)$$

由以上可求得壓力修正量 P'，可用來修正速度之值及質量流率求得 $\vec{V}^{**}$ 及 $\dot{m}_f^{*}$ 。

3.3.1 求解壓力修正方程式

因(3.36)中 S_{P2} 項中包含 P'，可以用兩步驟連續修正(successive correction)來近似

第一步只考慮含 S_{P1} 部份，得第一次壓力修正量 $p'^{(1)}$)

$$A_p^p p_p'^{(1)} = \sum_C A_c^p p_c'^{(1)} + S_{P1} \tag{3.37}$$

第二步在以(3.37)所求得的壓力修正量 $p'^{(1)}$計算S_{p2}部份以求得第二次壓力修正量 $p'^{(2)}$

$$A_P p_p'^{(2)} = \sum_C A_C p_c'^{(2)} + S_{P2}^{(1)} \tag{3.38}$$

$$\text{其中} S_{P2}^{(1)} = \sum_f \rho_f \left(\frac{\Delta V}{A_P} \nabla p_f'^{(1)} \right)_f \cdot (\vec{S_f} - \vec{d})$$

爲了使疊代過程穩定，我們引入一鬆弛因子α_p，第一步與第二步壓力修正方程式之修正分別如下：

第一步修正　：$a_p^{p'} p_p'^{(1)(n+1)} = \sum_c a_c^p p_c'^{(1)(n+1)} + Q_{p1}$ (3.39)

第二步修正　：$a_p^{p'} p_p'^{(2)(n+1)} = \sum_c a_c^p p_c'^{(2)(n+1)} + Q_{p2}$ (3.40)

其中：$a_p^{p'} = \dfrac{a_p^p}{\alpha_p}$

在程式中α_p是設定在 0.9~0.93

解答壓力修正方程式後，求得壓力修正量 p_p'，可得修正後之壓力 p_p^{**}：

$$p_p^{**} = p_p^* + p_p'^{(1)} + p_p'^{(2)} \tag{3.41}$$

修正後之速度$\bar{U}^{**}$則爲：

$$\bar{U}_p^{**} = \bar{U}_p^* - \left(\frac{\Delta V}{a_p} \right)_p (\nabla p_p'^{(1)} + \nabla p_p'^{(2)}) \tag{3.42}$$

質量流率修正由(3.34)經過兩步驟修正如下：

第一步修正　：$\dot{m}_f^{**} = \dot{m}_f^* - \rho_f \left(\dfrac{\Delta V}{a_p} \right)_f \dfrac{\left|\bar{S}_f\right|^2}{\delta \bar{r} \cdot \bar{S}_f} (p_c'^{(1)} - p_p'^{(1)})$ (3.43)

第二步修正　：$m_f^{**} = \dot{m}_f^* - \rho_f \left(\dfrac{\Delta V}{a_p} \right)_f \nabla p_f'^{(2)} \cdot \left(\bar{S}_f - \vec{d} \right)$ (3.44)

3.4 邊界條件

3.4.1 週期性邊界條件

因葉片旋轉的緣故，週期性邊界之周期性變動為圓柱座標系統。所以週期性邊界網格之對應值是以圓柱座標表示，然而我們是以卡氏座標系分析此一流場，所以對於向量必須經由座標轉換的步驟才可得到週期性邊界上所對應網格的值。但若是純量則不需作特別的處理，只須給定對應網格之純量即可。

以下分別說明週期性邊界上純量與向量之處理方式：

純量： 對於壓力、κ、ε 等純量因為其不具方向性，所以無需座標轉換，其處理時只要將對應網格之物理量下載即可(圖 2.2)。

$$\phi_1 = \phi_{1'} \text{，} \phi_2 = \phi_{2'} \tag{3.45}$$

向量： 向量包含了速度向量及各種性質之梯度(壓力梯度、速度分量梯度及 κ 與 ε 之梯度)，由於此週期性邊界條件之值為圓柱座標系 r 與 θ 之分量，但我們處理流場時是使用卡氏座標系(x,y,z)，所以在下載週期性邊界相鄰網格的向量時需先將由卡式座標定義的向量轉換為圓柱座標，並以圓柱座標的向量給定其值，然後再將給定的值轉換為其所在位置之卡氏座標。以網格 2 相鄰之網格 1’為例：

(1)將網格 1 之向量由卡氏座標系轉換為圓柱座標系：

$$\phi_{r1} = \vec{\varphi}_1 \cdot \vec{e}_{r1} = (\phi_{x1}\vec{i} + \phi_{y1}\vec{j} + \phi_{z1}\vec{k}) \cdot (\cos\theta_1 \vec{j} + \sin\theta_1 \vec{k}) = \phi_{y1}\cos\theta_1 + \phi_{z1}\sin\theta_1 \tag{3.46}$$

$$\phi_{\theta 1} = \vec{\varphi}_1 \cdot \vec{e}_{\theta 1} = (\phi_{x1}\vec{i} + \phi_{y1}\vec{j} + \phi_{z1}\vec{k}) \cdot (\cos\theta_1 \vec{k} - \sin\theta_1 \vec{j}) = \phi_{z1}\cos\theta_1 - \phi_{y1}\sin\theta_1 \tag{3.47}$$

(2)將對應網格值下載，如(3.45): $\phi_{r1'} = \phi_{r1}$，$\phi_{\theta 1'} = \phi_{\theta 1}$ (3.48)

(3) 最 後 再 將 網 格 1’ 之 向 量 由 圓 柱 座 標 系 轉 換 為 卡 氏 座 標 系 ：

$$\phi_{y1'} = \phi_{r1}\cos\theta_{1'} - \phi_{\theta 1}\sin\theta_{1'} \tag{3.49}$$

$$\phi_{z1'} = \phi_{r1}\sin\theta_{1'} + \phi_{\theta 1}\cos\theta_{1'} \tag{3.50}$$

其中$\vec{e}$表單位方向向量，而φ為一向量，ϕ則是此向量之成份

對於網格 1 之相鄰網格 2’的情形依此類推。

3.4.2 固體壁面邊界條件

(a) 壁函數(wall-function)

本研究所使用的紊流模式，為高雷諾數之線性 k-ε 模式，但在靠近壁面時性質的變化相當快速，因此高雷諾數的 k-ε 模型並不適合。為了處理這種情形，我們採用壁函數來處理相鄰壁面網格的壁面剪應力和 k-ε 方程式。

假設在黏性次層以外的流場遵守 logarithmic law。壁面剪應力可表示為：

$$\vec{\tau}_w = \frac{\mu_{eff}\ \left|\bar{S}_w\right|}{\delta n}\delta \bar{U}^{//}$$

其中:
$$\mu_{eff} = \begin{cases} \mu & for \quad y^+ < 11.63 \\ \dfrac{\mu y^+}{u^+} & for \quad y^+ \geq 11.63 \end{cases} \tag{3.51}$$

$$y^+ = \frac{\rho c_\mu^{1/4} k^{1/2} \delta n}{\mu} \tag{3.52}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+) \tag{3.53}$$

Von-Karmon’s 常數κ=0.4187，E =9.793。

而 k-ε 方程式在相鄰壁面的網格也需要特別的處理。在近壁面，假設紊流動能的耗散與生成達成平衡，可得 ε 關係式：

$$\varepsilon = \frac{c_\mu^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{\kappa \delta n} \tag{3.54}$$

在相鄰壁面的網格，上面的關係式將取代 ε 方程式。對於 k 方程式中的生成項P與耗散項$\rho\varepsilon$也需要改變。耗散項的 ε 在計算中使用(3.54)對體積取平均值可得$\bar{\varepsilon}$

為：$$\bar{\varepsilon} = \frac{c_\mu \rho k^2}{\mu_{eff}} \tag{3.55}$$

生成項則近似爲： $$P \approx \tau_w \frac{\delta U^{//}}{\delta n} \tag{3.56}$$

(b) 壁面剪應力(shear stress)

在相鄰壁面之網格，我們計算其壁面剪應力(如圖 3.3 所示)。以 P 代表相鄰壁面之主格點，w 爲壁面，$\vec{S}_w$ 爲壁面上之面向量，P 點之速度爲 $\overline{U}_P$，壁面之速度爲 $\overline{U}_w$，壁面朝向格子內之法線向量 $\vec{n}$ 爲：

$$\vec{n} = -\frac{S_{wx}\vec{i} + S_{wy}\vec{j} + S_{wz}\vec{k}}{\left|\vec{S}_w\right|} \tag{3.57}$$

而相鄰壁面之主格點 P 與壁面 w 速度差爲：

$$\delta\overline{U} = \overline{U}_P - \overline{U}_W \tag{3.58}$$

因此，垂直壁面的速度分量爲：

$$\delta\overline{U}^{\perp} = (\delta\overline{U}\cdot\vec{n})\vec{n} = \frac{\delta u S_{wx} + \delta v S_{wy} + \delta w S_{wz}}{\left|\vec{S}_w\right|}\frac{S_{wx}\vec{i} + S_{wy}\vec{j} + S_{wz}\vec{k}}{\left|\vec{S}_w\right|}$$

$$= \frac{1}{\left|\vec{S}_w\right|^2}\left[\delta u S_{wx}^2 + \delta v S_{wx}S_{wy} + \delta w S_{wx}S_{wz}\right]\ \vec{i}$$

$$+ \frac{1}{\left|\vec{S}_w\right|^2}\left[\delta u S_{wx}S_{wy} + \delta v S_{wy}^2 + \delta w S_{wy}S_{wz}\right]\ \vec{j}$$

$$+ \frac{1}{\left|\vec{S}_w\right|^2}\left[\delta u S_{wx}S_{wz} + \delta v S_{wy}S_{wz} + \delta w S_{wz}^2\right]\ \vec{k} \tag{3.59}$$

可得平行壁面之速度分量爲：

$$\delta\overline{U}^{//}=\delta\overline{U}-\delta\overline{U}^{\perp}$$

$$=\frac{1}{\left|\vec{S}_w\right|^2}\left[\delta u(S_{wy}^2+S_{wz}^2)-\delta vS_{wx}S_{wy}+\delta wS_{wx}S_{wz}\right]\ \vec{i}$$

$$+\frac{1}{\left|\vec{S}_w\right|^2}\left[-\delta uS_{wx}S_{wy}+\delta v(S_{wx}^2+S_{wz}^2)-\delta wS_{wy}S_{wz}\right]\ \vec{j}$$

$$+\frac{1}{\left|\vec{S}_w\right|^2}\left[-\delta uS_{wx}S_{wy}+\delta vS_{wy}S_{wz}-\delta w(S_{wx}^2+S_{wy}^2)\right]\ \vec{k} \qquad (3.60)$$

所以壁面之剪應力為： $\vec{\tau}_w=\dfrac{\mu_{eff}\left|\vec{S}_w\right|}{\delta n}\delta\overline{U}^{//}$ (3.61)

其中δn為P點至壁面w之垂直距離。

3.5 旋轉座標與靜止座標介面轉換

在葉片掃過的範圍內是屬於旋轉座標區，此區域內的速度皆為相對旋轉座標的速度，而在葉片掃過的範圍外則是屬於靜止座標區，此區域內的速度皆為絕對速度，因此在旋轉座標與靜止座標之間需做特別的處理。

格點 P 如果位在旋轉座標系內(如圖 3.4(a))，其速度為相對速度，而相鄰格點 Cs 位於靜止座標系，因此相鄰格點 Cs 速度為絕對速度，所以兩格點之間介面中的源項Q_Φ需要修正為Q'_Φ

$$Q'_\Phi=Q_\Phi-a_C\overline{U}_{gf} \qquad (3.62)$$

其中 $\overline{U}_{gf}$為網格交介面上的速度

而其他相鄰格點，如C_{r1}，C_{r2}，C_{r3}都位於旋轉座標內，因此不必作修正。

當格點 P 如果位在靜止座標系內(如圖 3.4(b))，其速度為絕對速度，而相鄰格點

Cr 位於旋轉座標系，因此相鄰的格點 Cr 速度爲相對速度，兩格點之間介面中的源項 Q_Φ 需要修正爲 Q'_Φ

$$Q'_\Phi = Q_\Phi + a_C \overline{U}_{gf} \tag{3.63}$$

而其他相鄰格點，如 C_{s1}， C_{s2}， C_{s3} 都位於靜止座標內，因此不必作修正。

3.6 解題步驟

1.給予初始速度 $\bar{U}^0$ 、壓力 p^0 、 k^0 與 ε^0 及紊流黏性 μ_t^0

2.解答動量方程式得到速度 $\bar{U}^*$

3.計算質量流率 m^* ，由壓力修正方程式解得 p'

4.修正速度、壓力及質量流率，得到 $\bar{U}^{**}$ 、 p^{**} 及 m^{**}

5.解答 k 與 ε 方程式，得到 k^* 與 ε^*，計算新的紊流黏性 μ_t^*

6.將求得的新值作爲初始值，重覆步驟 2~5，直到獲得收斂。

第四章　結果與討論

本文裡的攪拌槽是由一個具有四片檔板的外槽，以及具有六片葉片的攪拌器所組成(如圖 4.1 所示)，而外槽直徑為 T=300 mm、高度 H=300 mm、檔板寬度 B=30 mm，而攪拌槽尺寸(圖 4.2)在本文計算中是不變的，至於攪拌器葉片寬度 W=30 mm，也是不變的參數。

變動的參數是:

(1)葉片的傾角 α 。

(2)攪拌器的葉片中心與攪拌槽底部之間的間隙 C。

(3)攪拌器葉片的直徑 D。

(4)攪拌器的轉速 Ω 。

由於對稱幾何形狀的安排，計算時只考慮半個攪拌槽區域，在對稱面上將用前一章所描述的週期性邊界(見圖 2.2)，將計算區域分成 40 個小區塊，而在每一個區塊中利用簡單的代數方法建立起網格(見圖 4.3)，最後以 indirect addressing 的方式建立所有網格點的編號，參考胡育昌(2003)[14]論文裡面使用了 30432、60096、116208、207520 等四種不同的網格數目，其結果網格數目多寡並不會對流場速度曲線有太大的影響，但是為確保精確度，於是選用 116208 個網格去做模擬。

在紊流流場的模擬則使用線性 k-ε 模式，在葉片傾角 α=45°與攪拌器葉片間隙 100mm(C=T/3)時，計算得到的 θ、r、w 等三種不同方向的速度場，去跟 RANADE and DOMMETI(1996)[11]論文裡的實驗數據去做比較(見圖 4.4)，圖中 Vtip 是指葉片尖端的速度，是因為所有的速度向量圖都除以一個葉片尖端的速度，好把它無因次化，而 r_t 是指攪拌槽的半徑，其結果模擬值接近實驗數據的曲線，但是沒有完全符合，原因可能是因為在做數值模擬時，我們假設葉片是處在一瞬間的位置，而流場假設為擬似穩態，實際上紊流流場為三維非穩態流場，這點跟實際情況不同，因而產生差異。

另外 RANADE and DOMMETI(1996)[11]論文裡的實驗量測方法是固定在攪拌槽內某一個位置進行量測，對於非穩態的紊流流場，在不同的位置與不同的時間所量測到的結果也會不同。

而且 YIANNESKIS and WHITELAW(1993)[16]論文中提到，將 360 度範圍內所有量測到的實驗量測平均值，與實際紊流波動值相差最大約有 400%，而且擬似穩態的模擬是假設葉片旋轉到某一特定位置，所以除非也是針對此一特定位置，設定一誤差範圍，當葉片旋轉到此誤差範內時才進行量測，所得到的實驗數據才有可能與模擬結果相當接近。

另外紊流模式是將流場中的變數因子分為平均項與變動項，而在非穩態的情形下，平均項與變動項皆會改變大小，並且實際的擾動無法分出平均項與變動項的擾動，因此實驗若將平均項的改變也算在擾動中，就會使擾動變大數倍，因此與模擬計算出來的結果差異會很大。

4.1 葉片傾角對流場的影響

固定攪拌器葉片間隙為 100mm(C=T/3)，改變葉片傾角 α，從 30 度到 90 度依序改變角度觀察流場變化，觀察流線圖(圖 4.5)，圖中剖面角度 Φ 為-30 度的垂直剖面 (Φ 可參考圖 2.1，是定義在第二葉片的中心為 0 度，由此順時針角度為正，逆時針角度為負)，可以看出在 75 度以前是軸向流場，76 度以後是徑向流場，特別的是 75 度和 76 度只差一個角度，流場卻由軸向轉為徑向流場。

因此觀察這兩個角度第二葉片上的壓力分佈(圖 4.6)，圖中左片葉片為迎風面，迎風面葉片右邊與圓柱接合，圖中右片葉片為背風面，背風面葉片左邊與圓柱接合，圖中顯示 75 度的時候迎風面壓力分佈是由葉片左上方(葉片尾端上方)，逐漸的向右下方(圓柱接合下方)遞減，76 度則是向正右方遞減，再來觀看背風面，75 度的背風面正上方有一低壓區，而壓力則是逐漸的往下遞減，76 度的背風面也是上方有一低壓區，然後壓力也是往下遞減，但是葉片上左與右邊各有一

個壓力較高的區域，由此可知這兩個角度的葉片上所受的壓力分佈狀況不同。

觀察靠近第二葉片上的流線圖(圖 4.7)，75 度的迎風面(左片葉片)，左上方(葉片尾端上方)有一渦流，流場大都往葉片下流動，背風面(右片葉片)右上方(葉片尾端上方)有一渦流，流場大多往右下方流出，而 76 度迎風面的渦流因為被葉片下方的流場影響，而使流線往左下方流出，而且渦流有往右移動的現象，76 度的背風面(右片葉片)與 75 度的背風面一樣右上方都有一個渦流，但是因受下方流場的影響而使的流線往右邊流動，而差異最大的是 75 度與 76 度的迎風面葉片上的渦流位置有明顯的不同。

再分別計算各個角度的**功率數**(power number) N_p 與葉片的**攪拌數**（pumping number） N_{Q_p} 。

功率數的定義為 $N_p = 2\pi N\tau / \rho N^3 D^5$，$N$為葉片轉速，D 為葉片直徑，$\tau$ 是攪拌器旋轉時受到正向壓力與剪應力產生的轉矩，正向壓力是計算葉片迎風面與背風面上所受的壓力差，而剪應力是由葉片與圓柱表面上的剪應力組成，計算所得的功率數中，正向壓力大約佔了 99%的功率數，葉片上的剪應力約佔了 0.9%的功率數，圓柱表面上的剪應力約佔了 0.1%的功率數，所以對功率數來說，正向壓力是影響功率數最大的因素，於是我們計算所得的功率數 N_p ，可以作為攪拌器中能量消耗的指標。

攪拌數的定義為 $N_{Q_p} = Q_p / ND^3$ ，N 為葉片轉速，Q_p是攪拌溶液流入攪拌葉片的體積流率，其中為了觀察流體在葉片周圍流動的情形，分別在葉片上緣掃過的區域面(upper part)，葉片下緣掃過的區域面(lower part)，以及葉片尖端掃過的區域面(tip part)，分別計算這三個區域面的攪拌數(如圖 4.8)，最後再計算流出這三個區域面的總合體積流率 (overall flow)，質量流率在此設定流出為正流入為負，而不去計算流入的體積流率是因為流出與流入的體積流率相同，符合質量守恆，所以只計算流出的質量流率。

而在圖 4.9 中，ε*是把紊流能量耗散率無因次化，其定義 $\varepsilon^* = \int_v \rho \varepsilon dv / \rho N^3 D^5$，$\varepsilon$ 為紊流能量耗散率，將整個攪拌槽中的 ε 作積分後再無因次化，可視為流場中能量消耗的指標。

而圖 4.9 中，κ*是把紊流動能無因次化，其定義 $\kappa^* = \int_v \rho \kappa dv / \rho N^2 D^5$，$\kappa$ 為紊流動能，是將整個攪拌槽中的 κ 作積分後再無因次化，可視為流場中的動能指標。

在圖 4.9 中，功率數與 ε*隨著角度的增加而逐漸升高，到 76 度時有突然增加的現象，往後繼續升高，而 κ*是隨著角度增加而逐漸的升高，但是 76 度以後並沒有像功率數與 ε*一樣，而是稍微的降低，下圖為攪拌數，此時質量流率流出為正流入為負，圖中可以發現 75 度葉片下方本來為流出但是 76 度的流出量卻突然降的很低，葉片尖端的攪拌數在 75 度以前為流入，而在 76 度以後就轉為流出，很明顯在 75 度以前為軸向流場，76 度以後為徑向流場，而且 75 度時葉片區域內流體流出的量比 76 度還要大，可以說 75 度時葉片區域內流體交換速度較快。

綜合以上結果可得知，流場會隨著攪拌葉片的傾角增加而使流場逐漸的變為徑向流場，其中特別的是 75 度和 76 度只差一個角度，流場就從軸向流場轉為徑向流場，所以在葉片間隙為 C=T/3，葉片直徑為 D=T/3 時的臨界角度為 75 度。

4.2 葉片與攪拌槽底之間間隙對流場的影響

在前面的葉片間隙為 C=T/3，於是把間隙縮小到 C=T/4 去分析流場的改變，隨後也把間隙加大 C=T/2，再去比較流場的改變。

把葉片固定在葉片間隙為 75mm(C=T/4)，葉片傾角 α 從 30~90 度逐一的改變，觀察圖 4.10，圖中每一個都是 Φ 為-30 度的垂直剖面，比較每一個角度的流線圖可以發現，在 86 與 87 這兩個角度僅僅只差一度，而流場卻一下子從軸向流場轉為徑向流場，86 度以前為軸向流場，87 度以後就為徑向流場。

再來觀察第二葉片上所受的壓力變化(由圖 4.11 所示)，86 度的迎風面(左片葉片)壓力分佈是由葉片左上方(葉片尾端上方)，逐漸的向右下方(圓柱接合下方)遞

減，因此高壓區在葉片左上方，低壓區在葉片右上方，而 87 度迎風面則是由正左邊逐漸向右遞減，再來觀看背風面(右片葉片)，86 度的背風面正上方有一低壓區，而壓力則是逐漸的往下遞減，87 度的背風面也是上方有一低壓區，然後壓力也是往下遞減，但是與 86 度不同的是，在 87 度的葉片上左與右邊各有一個壓力較高的區域，所以流場的變化也使葉片上的壓力分佈改變。

觀察靠近第二葉片上的流線圖(圖 4.12)，86 度的迎風面(左片葉片)，左上方(葉片尾端上方)有一渦流，流場往葉片下流動，背風面(右片葉片)的右上方(葉片尾端上方)有一渦流，流場大多是往右下方流出，而 87 度迎風面因爲被葉片下方的流場影響，而使流場有往左邊流動的現象，而且渦流出現在葉片的右上方，87 度的背風面(右片葉片)與 86 度的背風面一樣右上方都有一個渦流，但是因受下方流場的影響而使的流線往右邊流動，甚至右下方還出現一個渦流，與右上方形成對稱，因此在 87 度幾乎完全爲徑向流場。

接下來分別計算各個角度的功率數與葉片的攪拌數(如圖 4.13 所示)，功率數與 ε*都是隨著角度的增加而逐漸升高，但是到 87 度時卻有突然增加的現象，然後 88、90 稍微的降低，而 κ*是隨著角度增加而逐漸的升高，但是 87 度以後就稍微的降低，這點與功率數和 ε*不同的地方，而下圖是爲攪拌數，圖中可以發現 86 度與 87 度的攪拌數有很大的變化，86 度葉片下方本來爲流出但是 87 度卻爲流入，葉片尖端的攪拌數在 86 度以前爲流入，但是在 87 度以後就轉爲流出，因此很明顯在 86 度以前爲軸向流場，87 度以後爲徑向流場，而另一個發現是 86 度時葉片區域內流體流出的量很大，比 87 度還要大，這點對於溶液混合會有較佳的效果，也就是說葉片區域內流體交換的越快，對於混合的效果越好。

因此由上述可知在葉片間隙爲 C=T/4，葉片直徑爲 D=T/3 時的臨界角度爲 86 度。

再將葉片間隙調高爲 150mm(C=T/2)，由流場流線圖(圖 4.14)可以發現在 49 與 50 這兩個角度的流場變化最大，但是變化並沒有像 C=T/3 和 C=T/4 那麼明顯，

由 30 度起葉片下的噴流逐漸隨著角度增加緩緩的抬高，到了 49 度變化還沒那麼快速，50 度以後就轉為接近於徑向流場，隨角度增加後徑向流動越來越強，到了 90 度以後流場就為完全為徑向流場。

於是觀察差異較大的兩個角度(49 與 50 度)，由圖 4.15 中可看到這兩個角度葉片上的壓力分佈變化差異並不很明顯，不過還是可以發現的是在 49 度時的迎風面(左片葉片)壓力分佈是由葉片左上方(葉片尾端上方)，逐漸的向右下方(圓柱接合下方)遞減，50 度則是右上方遞減，再來觀看背風面(圖中右片葉片)，49 度與 50 度背風面壓力分佈極為相似，都是正上方有一低壓區然後逐漸的往左下(與圓柱接合下方)遞減。

觀察靠近葉片上的流線圖(圖 4.16)，49 度的迎風面(左片葉片)，左上方有一渦流，流場大都往葉片下流動，背風面(右片葉片)的右上方有一渦流，流場大多是往右下方流出，而 50 度迎風面因為被葉片下方的流場影響，而使流場有往左下流動的現象，渦流出現在葉片的左上方與 49 度的位置相差不多，50 度的背風面(右片葉片)與 49 度的背風面一樣右上方都有一個渦流，而稍微受下方流場的影響使的流線分佈與 49 度有些許不同，但是差異並不大。

計算各個角度的功率數與葉片的攪拌數(如圖 4.17 所示)，功率數與ε^*和κ^*都是隨著角度的增加而逐漸升高，功率數到 50 度時有稍微突增的現象，往後繼續升高，其他功率數並沒有很明顯的變化，除了在 50 度時κ^*有稍微突降的現象外，其他角度都是隨角度的增加，而很緩慢的增加κ^*，下圖攪拌數可以發現 49 度以前葉片下方流出量隨著角度的增加而增加，但是 50 度有明顯突降的情形，隨著角度增加到 60 度，葉片下方流出量是很緩慢的減低，60 度以後就迅速的降低流出量，直到葉片傾角 90 度時轉為流入，而葉片尖端的攪拌數也是相同的情況，49 度以前葉片尖端流入量隨著角度的增加而增加，但是 50 度有明顯突降的情形，隨著角度增加到 60 度，葉片尖端流入量是很緩慢的減低，60 度以後就迅速的降低流入量，直到葉片傾角 90 度時轉為流出，而且 49 度以後葉片區域內流體流出的量變化不大。

因此由上述可知在葉片間隙為 C=T/2，葉片直徑為 D=T/3 時的臨界角度為 49 度。

比較這三種間隙的臨界角度，參考圖 4.18 中的速度向量圖，可以看出在 C=T/4 時流場變化最大，軸向流場與徑向流場分的最明顯，而間隙 T/2 時流場變化並不很明顯，不過可以看出流場在 49 度是近似軸向流場，在 50 度為近似徑向流場，所以間隙(葉片與攪拌槽底之間距離)越小，改變角度而使流場由軸向轉為徑向流動的變化會最明顯。

因為改變三種間隙後，臨界角度大約界在α=49~86 度之間，所以把葉片傾角α定在 75 度，觀察不同間隙時流場內變化的情形。

比較流場結構(圖 4.19 所示)，三種間隙都是Φ為-30 度的垂直剖面。可以發現在間隙越大，流場的徑向流動較強，在間隙 T/2 的流場徑向流動是三種間隙中最強的，而間隙越小時，軸向流動則是漸漸增強，在間隙 T/4 時的軸向流動較其他兩種間隙強。

再觀察不同間隙時葉片背風面後的渦流，圖 4.20 中的α是葉片的傾角，Φ是第二片葉片後方（即葉片背風面）的垂直剖面角度(可參考圖 2.1 裡的Φ)，只顯示葉片周圍的區域來觀察葉片後方渦流的情形，在圖 4.20 裡首先觀察間隙 T/4 傾角 75 度的 4 個Φ角度0^0，8^0，16^0，24^0葉片背風面的局部流場，其中在葉片區域內橫線的上方部分代表在葉片後方(即葉片背風面)的上半部，橫線的下方部分代表在葉片的前方(即葉片迎風面)的下半部，因為葉片的往前移動，所以在葉片的後方形成一個低壓區，在葉片外圍的流體便會繞過葉片流進此低壓區，在$\Phi = 0^{\circ}$時可以看到圖中葉片區右上角的部分，流體由葉片外緣流入此區，形成一渦流，而在右下角的部分，流體則向葉片外緣流動準備繞過此葉片。當$\Phi = 8^{\circ}$由圖中可以看出在葉片的後方有一個類似渦流的發展，Φ增至16^0時渦流隨著遠離葉片逐漸往下移動，不過到了$\Phi = 24^{\circ}$渦流就漸漸消散了。

再比較圖 4.20，在不同間隙時，葉片背風面流場變化的情形，間隙 T/3 與間隙

T/4 的葉片後方渦流移動方向相同，都是隨著遠離葉片，逐漸的向下移動，最後渦流就漸漸消散了，不過葉片間隙 T/2 時，渦流移動方向是隨著遠離葉片逐漸的向葉片右邊移動，然後在 $\Phi = 24^{\circ}$時，渦流並沒有消失，還是停留在葉片的右邊。

再觀察葉片上的壓力分佈(如圖 4.21)，圖中左方葉片爲迎風面，右邊葉片爲背風面，三個圖都是葉片爲水平 75 度夾角，在不同間隙時第二葉片上的壓力分佈圖。首先觀察葉片的迎風面，迎風面的左邊是葉片的尾端，而右邊則是和圓柱接合，葉片間隙在 T/3 與 T/4 的壓力分佈大致相同，不過左上角的高壓區會隨間隙增加逐漸變小，而間隙 T/2 時左上角的高壓區爲最小，而且有逐漸往下移動的趨勢，不過靠近圓柱的低壓帶有逐漸擴大的跡象，但是到了間隙 T/2 時卻由右下角往上移動，而且低壓區範圍逐漸的縮小，形成壓力逐漸的由左往右遞減，而與間隙 T/4 和間隙 T/3 在右上方受壓力較大然後往左下角逐漸遞減不同。

接下來再觀察葉片的背風面，葉片背風面的左邊是與圓柱接合，背風面右邊則是葉片的尾端，先觀察背風面間隙 T/3 與 T/4，此時兩種間隙的壓力分佈相似，都在葉片上方出現一個低壓區，然後壓力逐漸的往下漸增，而間隙 T/2 時也是在上方出現一個低壓區，壓力並逐漸向下方增加，但是與間隙 T/4 與間隙 T/3 時不同的是，是在葉片兩側壓力有逐漸升高的趨勢，因此不管是葉片的迎風面或是背風面，間隙 T/2 的葉片都與間隙 T/4 和 T/3 時有明顯不同。

比較葉片上的流線圖(圖 4.22)，C=T/3 與 C=T/4 不管是迎風面或是背風面流線圖都相差不多，顯示流場型態相當接近，但是在 C=T/2 時流線圖就有很大的變化，在圖中 C=T/2 時的迎風面上的渦流，出現的位置比其他間隙的位置還向右邊靠近，而且由於下方流場的影響，流線流動方向被推往左下角流動，背風面也是因下方流場的影響，從右下流動方向轉往向右邊方向流動。

最後觀察葉片中心水平面剖面的壓力分佈，觀察圖 4.23，圖中葉片是逆時針旋轉，所以葉片的左邊是迎風面，葉片的右邊是背風面，在間隙 T/4 與 T/3 葉片

的迎風面，高壓區都是集中在葉片迎風面的尾端，葉片的背風面都是低壓區，而且葉片旋轉區外的壓力都遠大於背風面的壓力，而流體都會往壓力低的方向流動，因此葉片周圍的流體會向葉片背風面的低壓區流動，間隙升到 T/2 時，此時葉片的迎風面高壓區還是集中在葉片尾端，不過跟間隙 T/4 和 T/3 時的情況有些許不同，在間隙 T/2 時高壓區有往圓柱逐漸發展的趨勢，而且葉片旋轉區外的壓力遠遠比間隙 T/4 和 T/3 時的低，但是唯一相似的就是背風面的壓力在三種間隙中沒有太大變化，不過在間隙 T/2 時因葉片旋轉區外面壓力遠小於迎風面的高壓區，所以流體除了往葉片背風面的低壓區流動外，還會往葉片旋轉區外流動，這點跟其他兩種間隙不同的地方。

綜合上面的結果，當葉片角度一定時，改變間隙會使流場產生變化，間隙越小，流體軸向流動越強烈，而當間隙越大，徑向流動就越強烈，直到達到間隙 C=T/2 時，流場就幾乎是屬於徑向流場，所以間隙的改變也是流場變化的原因之一。

4.3 葉片直徑對流場的影響

把葉片直徑從原本的 100mm(D=T/3)改爲 150mm(D=T/2)，再從不同的間隙與傾角觀看流場的變化。

4.3.1 改變葉片直徑後葉片傾角對流場的影響

還是一樣先固定葉片間隙爲 100mm(C=T/3)，觀察流線圖(圖 4.24)，圖中剖面角度都是Φ爲-30 度的垂直剖面，可以看到流場是從 30 度軸向流場逐漸隨著角度的增加而轉爲徑向流場，觀察不同角度的流線圖還是可以發現 69 與 70 度的流場變化較大。

觀察這兩個角度葉片上的壓力分佈(圖 4.25)，圖中顯示兩個角度的迎風面(左片葉片)壓力分佈情形非常接近，都是從左上角(葉片尾端)的高壓區逐漸的向右上方(圓柱接合上方)遞減，再來觀看背風面(右片葉片)，除了 70 度的背風面左下角(圓柱接合下方)方有一比較高壓的區域以外，其他的都跟 69 度的壓力分佈情況相

似。

觀察靠近第二葉片上的流線圖(圖 4.26)，69 度的迎風面(左片葉片)，左上方有一渦流，而背風面(右片葉片)在右上方有一渦流，而 70 度迎風面的渦流被葉片下方的流場影響，使流線往左下方流出，而且渦流位置比 69 度還往右移動，70 度的背風面(右片葉片)與 69 度的背風面一樣右上方都有一個渦流，但是因受下方流場的影響而使的流線往右邊流動。

再分別計算各個角度的功率數與葉片的攪拌數(如圖 4.27 所示)，功率數與 ε * 隨著角度的增加而逐漸升高，到 70 度時有突然增加的現象，往後繼續升高，而 κ *是隨著角度增加而逐漸的升高，但是 70 度以後並沒有像功率數與 ε *一樣，而是稍微的降低，下圖攪拌數可以發現 69 度葉片下方本來為流出但是 70 度的流出量卻突然降低，葉片尖端的攪拌數在 69 度以前為流入，而在 70 度以後就轉為流出，而在 69 度時葉片區域內流體流出的量比 70 度還要大，可以說 69 度時葉片區域內流體交換速度較快。

結果顯示葉片直徑為 D=T/3 時，臨界角度為 75 度，當葉片直徑改為 D=T/2 時，臨界角度改為 69 度。

4.3.2 改變葉片直徑後葉片間隙對流場的影響

隨後把葉片固定在葉片間隙為 75mm(C=T/4)，葉片傾角 α 從 30~90 度逐一的改變，觀察圖 4.28，圖中每一個同樣都是 Φ 為-30 度的垂直剖面，比較每一個角度的流線圖可以發現，在 86 與 87 這兩個角度的流場卻一下子從軸流轉為徑向流場，86 度以前為軸向流場，87 度以後就為徑向流場。

再來觀察葉片上所受的壓力變化(由圖 4.29 所示)，圖中 86 度的迎風面壓力分佈是由葉片左上方，逐漸的向右方遞減，高壓區在葉片左上方，低壓區在葉片正右方，而 87 度迎風面則是由正左邊逐漸向右遞減，再來觀看背風面，86 度的背風面正上方有一低壓區，而壓力則是逐漸的往下遞減，87 度的背風面也是上方偏左有一低壓區，壓力也是往下遞減，但是與 86 度不同的是，在 87 度的葉片上左右兩邊各有一個壓力較高的區域。

於是觀察靠近第二葉片上的流線圖(圖 4.30)，86 度的迎風面，左上方有一渦流，流場大多一致的往葉片下流動，背風面的渦流在右上方，流場大多是往右下方流出，而 87 度迎風面因爲被葉片下方的流場影響，而使流場有往左邊流動的現象，而且渦流出現在葉片的右上方，而且下方流場的推移，以致渦流機乎被推出葉片外，87 度的背風面右上與右下都各有一渦流，流場都往右邊流出，所以在 87 度幾乎完全爲徑向流場。

接下來分別計算各個角度的功率數與葉片的攪拌數(如圖 4.31 所示)，功率數與 ε*都是隨著角度的增加而逐漸升高，但是到 87 度時突然的增加，而 κ*是隨著角度增加而逐漸的升高，但是 87 度以後明顯降低，88 度又上升，到 90 度又稍微降低，與功率數和 ε*不同。

下圖中攪拌數可以發現 86 度與 87 度的攪拌數有很明顯的變化，86 度葉片下方本來爲流出但是 87 度卻爲流入，葉片尖端的攪拌數在 86 度以前爲流入，但是在 87 度以後就轉爲流出，因此很明顯在 86 度以前爲軸向流場，87 度以後爲徑向流場，還有是 86 度時葉片區域內流體流出流入的量很大，比 87 度還要大，說明葉片區域內流體交換的較快。

因此由上述可知在葉片間隙爲 C=T/4，葉片直徑爲 D=T/2 時的臨界角度爲 86 度。

最後將葉片間隙調高爲 150mm(C=T/2)，由流場流線圖(圖 4.32)可以發現在 39 與 40 這兩個角度的流場變化最大，由 30 度起葉片下的噴流逐漸隨著角度增加緩緩的抬高，到了 40 度後就轉爲接近於徑向流場，隨角度增加後徑向流動越來越強，到了 90 度以後流場就爲完全爲徑向流場。

觀察差異較大的兩個角度(39 與 40 度)，由圖 4.33 中可看到這兩個角度葉片上的壓力分佈變化極爲類似，迎風面(左片葉片)壓力分佈都是由葉片左上方(葉片尾端上方)，逐漸的向右上方(圓柱接合上方)遞減，背風面(圖中右片葉片)，都是右上方有一低壓區然後逐漸的往左下(與圓柱接合下方)遞減。

觀察靠近葉片上的流線圖(圖 4.34)，39 度的迎風面，渦流出現在正下方，背風面的右上方有一渦流，而 40 度迎風面因爲被葉片下方的流場影響，渦流被推往左上方，40 度的背風面與 39 度的背風面一樣右上方都有一個渦流，但渦流位置比 39 度高一點。

最後是分別計算各個角度的功率數與葉片的攪拌數(如圖 4.35 所示)，功率數與 ε*都是隨著角度的增加而逐漸升高，功率數到 90 度都是逐漸升高，沒有很明顯的突升的情形，而觀察下圖攪拌數，葉片尖端掃過區域的攪拌數在 39 與 40 之間流體流入的量有突降的情況，到角度升到 60 度以後流體就轉爲流出了。

因此由上述可知在葉片間隙爲 C=T/2，葉片直徑爲 D=T/2 時的臨界角度爲 39 度。

比較這三種間隙的臨界角度，參考圖 4.36 中的速度向量圖，可以看出在 C=T/4 時流場變化最大，軸向流場與徑向流場分的最明顯，而間隙 T/2 時流場變化並不很明顯，不過可以看出流場在 39 度是近似軸向流場，在 40 度爲近似徑向流場。

綜合以上所有的數據顯示，葉片直徑大小會改變臨界角度，使得本來 C=T/2 的臨界角度從 49 度(葉片直徑 D=T/3)，改變爲 39 度(葉片直徑 D=T/2)，兩個角度相差爲 10 度範圍。C=T/3 的臨界角度從 75 度(葉片直徑 D=T/3)，改變爲 69 度(葉片直徑 D=T/2)，兩個角度相差爲 6 度範圍。但是在間隙 C=T/4 時不管葉片直徑是 D=T/3 還是 D=T/2，臨界角度同樣爲 86 度，可知當葉片直徑增加時，間隙越大臨界角度改變越大，間隙越小臨界角度改變越小。

但是爲了和葉片直徑 D=T/3 作總比較，一樣定葉片傾角 α 爲 75 度，改變三種不同的間隙去做比較。

比較流場結構(圖 4.37 所示) ，三個間隙都是 Φ 爲-30 度的垂直剖面。可以發現在間隙越大，流場的徑向流動較強，在間隙 T/2 的流場徑向流動同樣是三種間隙中最強的，而間隙越小時，軸向流動則是越強，在間隙 T/4 時的軸向流動較其他兩種高度強。

再觀察不同間隙時葉片背風面的渦流，圖 4.38 中的 α 是葉片的傾角，Φ 是第二

片葉片後方（即葉片背風面後方）的垂直剖面流場，圖中只顯示葉片周圍的區域來觀察葉片後方渦流的情形，在圖 4.38 裡首先觀察間隙 T/4、傾角 75°的 4 個 Φ 角度 0^0 ，8^0 ，16^0 ，24^0 葉片背風面的局部流場，再次說明一下，在葉片區域內橫線的上方部分代表在葉片後方(即葉片背風面)的上半部，橫線的下方部分代表在葉片的前方(即葉片迎風面)的下半部，因爲葉片往前移動，所以在葉片後方形成一個低壓區，在葉片外圍的流體便會繞過葉片流進此低壓區，在 Φ= 0°時可以看到圖中葉片區右上角的部分，流體由葉片外緣流入此區，形成一渦流，而在右下角的部分，流體則向葉片外緣流動準備繞過此葉片。當 Φ= 8°由圖中可以看出在葉片的後方有一個小渦流的發展，Φ 增至 16^0 時渦流隨著遠離葉片逐漸往下移動，不過到了 Φ= 24°渦流就漸漸消散了。

而間隙 T/3 與 T/2 的葉片後方渦流移動方向相同，都是隨著遠離葉片，逐漸的向下移動，最後到 Φ 增至 16^0 時渦流就停留在葉片右邊，到了 Φ= 24°渦流還是停留在葉片右邊，不過葉片間隙在 T/4 時，渦流移動方向是隨著遠離葉片逐漸的向葉片下方移動，然後逐漸消失。

再觀察葉片上的壓力分佈(如圖 4.39)，圖中左方葉片爲迎風面，右邊葉片爲背風面，三個圖都是葉片爲水平 75 度夾角，在不同間隙時第二葉片上的壓力分佈圖。首先觀察葉片的迎風面，迎風面的左邊是葉片的尾端，而右邊則是和圓柱接合，葉片間隙在 T/3 與 T/2 的壓力分佈大致相同，都是壓力逐漸的由左往右遞減，而間隙 T/4 時壓力由左上角向右下角遞減，到達右邊時低壓區集中在右邊中間高度，接下來再觀察葉片的背風面，葉片背風面的左邊是與圓柱接合，背風面右邊則是葉片的尾端，先觀察背風面間隙 T/3 與 T/2 的壓力分佈極爲相似，都在葉片上方出現一個低壓區，然後壓力逐漸的往下漸增，而左右各有一個壓力較高的區域，而間隙 T/4 時也是在上方出現一個低壓區，壓力並逐漸向下方增加，所以不管是葉片的迎風面或是背風面，間隙 T/4 的葉片都與間隙 T/3 和 T/2 時明顯不同。

比較葉片上的流線圖(圖 4.40)，間隙 T/4 時流線圖顯示爲軸向流動，間隙 T/3 與 T/2 以後爲徑向流動，而背風面上的渦流位置三個都相差不多，只是流動方向

不同，但是迎風面渦流的位置變化就很大了，渦流的位置三種間隙都不相同，但是三種間隙的流線圖比較起來，間隙 T/3 與 T/2 流線圖分佈是比較相似的，顯示這兩種間隙的流場型態較接近。

最後觀察葉片中心水平面剖面的壓力分佈，觀察圖 4.41，圖中葉片是逆時針旋轉，所以葉片的左邊是迎風面，葉片的右邊是背風面，在間隙 T/4 葉片的迎風面，高壓區都是集中在葉片迎風面的尾端，葉片的背風面都是低壓區，而且葉片旋轉區外的壓力都遠大於背風面的壓力，而流體都會往壓力低的方向流動，因此葉片周圍的流體會向葉片背風面的低壓區流動，間隙升到 T/3 與 T/2 時，此時葉片的迎風面高壓區還是集中在葉片尾端，不過跟間隙 T/4 時的情況有些許不同，在間隙升到 T/3 與 T/2 時高壓區有往圓柱逐漸發展的趨勢，而且葉片旋轉區外的壓力遠遠比間隙 T/4 時的低，在間隙 T/3 與 T/2 時因葉片旋轉區外面壓力遠小於迎風面的高壓區，所以流體除了往葉片背風面的低壓區流動外，還會往葉片旋轉區外流動。

綜合上面的結果，葉片直徑加長後，隨著間隙逐漸加大時，會比原來葉片為直徑 D=T/3 更快的轉為徑向流場，所以在葉片間隙 T/3，直徑為 D=T/3 時，屬於軸向流場，而增加葉片直徑為 D=T/2 後，流場就轉為徑向流場，因此可得知，後除了間隙的改變是流場變化的原因以外，葉片的長度也會直接影響流場的型態。

4.4 轉速對流場的影響

將葉片間隙固定為 100mm(C=T/3)，葉片直徑也固定為 100mm (D=T/3)，然後將葉片傾角由 30 度依序增加至 90 度，並使用四種轉速 100、212、400、700RPM 分析流場的變化。

計算功率數、ε*、κ*，觀察圖 4.42 可得知，攪拌器的轉速並不會影響功率數，所以四條曲線都近乎重合在一起，另外 ε*、κ*也非常的接近，所以結論是轉速的改變對功率數、ε*、κ*的影響不大。

最後觀察圖 4.43，可以發現攪拌數在四個轉速時曲線近乎重疊在一起，所以轉速的改變也不會影響攪拌數，也因此流場型態也沒有因轉速的影響而有所改變。

將以上資料整理後發現，在 75 度時，各種轉速數據近乎相等，而在 45 度時有些許差異，比較圖 4.44 與圖 4.45，發現速度場的徑向分佈在傾角 75 度與 45 度有些許不同，在 75 度時是完全重合，而 45 度時速度曲線會因轉速的不同而有些許差異，但是數值相差並不大，功率數最大相差只有 2%，攪拌數最大相差也只有 2%。

綜合分析以上資料可得知，攪拌器轉速的改變，對流場的型態與功率數和攪拌數影響都不大。

4.5 討論結果

將以上所有資料整合起來，整理而成以下結果。

軸向流場中，觀察葉片的迎風面上的壓力分佈，大都是高壓集中在葉片左上方(靠近葉片尾端上方)，流線圖中的渦流位置也是在左上方，背風面則是葉片上方有個低壓區，渦流出現位置是在葉片的右上方(靠近葉片尾端上方)，隨著遠離葉片，渦流會從葉片背風面的右上方然後逐漸的往下方移動。

徑向流場中，葉片的迎風面上的高壓大都是集中在葉片中間高度靠近尾端的地方，流線圖中的渦流出現位置是在右上方(靠近圓柱接合處上方)，背風面則是葉片上方也有個低壓區，不過在中間高度的左右兩邊，會出現明顯較高壓的區域，渦流出現位置是在葉片的右上方與右下方，流線圖幾乎形成上下對稱分佈，隨著遠離葉片，渦流最初從葉片背風面的右上方然後逐漸的往下方移動，到達葉片中心高度後逐漸向外移出。

比較圖 4.46、圖 4.47 這兩個圖，當葉片直徑相同而間隙改變時，功率數與 ε * 都在臨界角度之後有突然升高的情形，隨著間隙的增加，功率數與 ε *在臨界角

度之後突然升高的情形會越來越不明顯，κ*的曲線則沒有上述的情況，所以功率數與ε*變化趨勢相同。

而總流出的質量流率的三種曲線，都在臨界角度後有突然降低的現象，比較三種曲線，以間隙 T/4 時的總流出的質量流率為最大，因此可知，在間隙 T/4 時葉片旋轉區域內的流體交換速度為最快，但是三種間隙都達到臨界角度之後，總質量流率會非常接近，近乎相等。

比較圖 4.48、圖 4.49 這兩個圖，功率數與ε*都在臨界角度之後有突然升高的情形，但是與原直徑 D=T/3 時比起來，升高的幅度比較小，同樣隨著間隙的增加，功率數與ε*在臨界角度之後突然升高的情形會越來越不明顯，但是三種間隙都達到臨界角度之後，功率數有明顯的接近重合，κ*的曲線則沒有上述的情況，κ*的三個曲線近乎相同。

總流出的質量流率，也是以間隙 T/4 時增加的斜率最大，但是 40 度以前，總流出的質量流率三種曲線近乎相同，而當間隙 T/2 達到臨界角度以後，增加的斜率與其他兩種間隙小很多，不過在三種間隙都達到臨界角度之後，總質量流率會非常接近。

再觀察軸向噴流的水平夾角β(見圖 4.50)，此夾角β是從攪拌軸上兩個渦流的交界點上，再到壁面上兩個渦流的交界點，這兩點所形成的直線與水平直線所夾的角度，視為軸向噴流的水平夾角，比較圖 4.51 可以發現三種間隙在 30 度時角度介於 65~75 度，在臨界角度後，軸向噴流的水平夾角會大幅變小，於是噴流改為徑向噴流，再到 90 度時，三種間隙的夾角都為 0 度，此時流場為徑向流場。

最後攪拌器轉速的改變，對流場的型態與功率數、ε*、κ*和攪拌數影響都不大。

第五章　結論

(1) 流場會因爲攪拌葉片的傾角不同而改變，傾角越小，流場越接近軸向流場，傾角越大越接近徑向流場。

(2) 逐漸改變攪拌葉片的傾角，發現到有一臨界角度，當角度在臨界角以下時，流場屬於軸向流場，只要一超過此臨界角度時，流場就轉爲徑向流場。

(3) 功率數與 ε *在臨界角度以後有快速增加的情形，而 κ *沒有此現象。

(4) 攪拌數在臨界角度以後會迅速降低，顯示在葉片旋轉區域範圍內的流體交換速度降低。

(5) 每一個葉片間隙都有臨界角度，C=T/2 爲 49 度，C=T/3 爲 75 度，C=T/4 爲 86 度，而且間隙越小，在臨界角以後轉爲徑向流場的變化越明顯，間隙越大則越不明顯。

(6) 葉片間隙越小，會使功率數與 ε *會在臨界角度以後快速增加的幅度越大，葉片間隙越大在臨界角度以後快速增加的幅度會越小，而間隙對 κ *的曲線變化影響不大。

(7) 葉片間隙越小，攪拌數就越大，間隙越大攪拌數則越小。

(8) 流場會因攪拌葉片間隙的不同而改變，在相同角度時攪拌葉片越接近槽底(間隙越小)，流場越接近軸向流場，攪拌葉片越離開槽底(間隙越大)，流場越接近徑向流場。

(9) 葉片直徑大小會改變臨界角度，使得本來 C=T/2 的臨界角度從 49 度(葉片直徑 D=T/3)，改變爲 39 度(葉片直徑 D=T/2)，兩個角度相差爲 10 度範圍。C=T/3 的臨界角度從 75 度(葉片直徑 D=T/3)，改變爲 69 度(葉片直徑 D=T/2)，兩個角度相差爲 6 度範圍。但是在間隙 C=T/4 時不管葉片直徑是 D=T/3 還是 D=T/2，臨界角度同樣爲 86 度，可知當葉片直徑增加時，間隙越大臨界角度改變越大，間隙越小臨界角度改變越小。

(10) 功率數與 ε *會因葉片直徑增大而使得在臨界角度以後快速增加的幅度減

小，而葉片直徑對κ*的曲線變化影響不大。

(11) 攪拌數在葉片直徑加大後，在臨界角度以後快速減少的幅度變大。

(12) 轉速並不會影響流場型態，也不會影響功率數、ε*、κ*的大小，對攪拌數的影響也不大。

參考文獻

[1] 浙江長城減速機有限公司, http://www.aaar.com.cn/

[2] M. YIANNESKIS, Z. POPIOLEK and J. H. WHITELAW , 1987 , “An experimental study of the steady and unsteady flow characteristics of stirred reactors” , J. Fluid Mech. , Vol. 175 , pp. 537-555 .

[3] H. WU and G. K. PATTERSON , 1989 , “LASER-DOPPLER MEASURMENTS OF TURBULENT-FLOW PARAMETERS IN A STIRRED MIXER” , Chemical Engineering Science , Vol. 44 , pp. 2207-2221 .

[4] Z. JAWORSKI, A. W. NIENOW, E. KOUTSAKOS , 1991 , “AN LDA STUDY OF TURBULENT FLOW IN A BAFFLED VESSEL AGITATED BY A PITCHED BLADE TURBINE” , Trans IChemE , Vol. 69 , Part A , pp.313-320 .

[5] K. C. LEE and M. YIANNESKIS , 1998 , “Turbulence Properties of the Impeller Stream of a Rushton Turbine” , AIChE Journal , Vol. 44 , No. 1 , pp. 13-24 .

[6] M. SCHAFER, M. YIANNESKIS, P. WACHTER , 1998 , “Trailing Vortices around a 45 °Pitched-Blade Impeller” , AIChE Journal , Vol. 44 , No. 6 , pp. 1233-1246 .

[7] G. MONTANTE, K. C. LEE and M. YIANNESKIS , 1999 , “An Experimental Study of Double-to-Single-Loop Transition in Stirred Vessels” , THE CANADIAN JOURNAL OF CHEMICAL ENGINEERING , Vol. 77 , pp. 649-659 .

[8] J. AUBIN, P. MAVROS, D. F. FLETCHER , 2001 , “EFFECT OF AXIAL AGITATOR CONFIGURATION (UP-PUMPING, DOWN-PUMPING, REVERSE ROTATION) ON FLOW PATTERNS GENERATED IN STIRRED VESSELS , Trans IChemE , Vol. 79 , Part A , pp. 845-856 .

[9] V. V. RANADE, J. R. BOURNE and J. B. JOSHI , 1991 , “FLUID MECHANICS AND BLENDING IN AGITATED TANKS” , Chemical Engineering Science , Vol.46 , NO. 8 , pp. 1883-1893 .

[10] L. DONG, S. T. JOHANSEN and T. A. ENGH , 1994 , “FLOW INDUCED BY AN IMPELLER IN AN UNBALLED TANK-II. NUMERICAL MODELLING” , Chemical Engineering Science , Vol. 49 , No. 20, pp. 3511-3518 .

[11] V. V. RANADE and S. M. S. DOMMETI , 1996 , “COMPUTATIONAL SNAPSHOT OF FLOW GENERATED BY AXIAL IMPELLERS IN BAFFLED STIRRED VESSELS” , Trans IChemE , Vol. 74 , Part A , pp. 476-484 .

[12] PIERO M. ARMENANTE, CHANGGEN LUO , 1997 , “Velocity profiles in a closed, unbaffled vessel：comparison between experimental LDV data and numerical CFD predictions” , Chemical Engineering Science , Vol. 52 , No. 20 , pp. 3483-3492 .

[13] K. WECHSLER, M. BREUER and F. DURST , 1999 , “Steady and Unsteady Computations of Turbulent Flows Induced by a 4/45 °Pitched-Blade Impeller” ,

Transactions of the ASME , Journal of Fluids Engimeernig , Vol. 121 , pp. 318-329 .
[14] 胡育昌 ，“葉輪攪拌槽中之流場計算”，國立交通大學機械工程研究所碩士論文 , 2003 .
[15] D. B. Spalding and B. E. Launder, “The numerical computation of turbulent flows”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3:269-289, 1974.K.
[16] M. YIANNESKIS and J. H. WHITELAW , 1993 , “ON THE STRUCTURE OF THE TRAILING VORTICES AROUND RUSHTON TURBINE BLADES” , Trans IChemE , Vol. 71 , Part A , pp. 543-550 .