

國立交通大學

機械工程研究所

碩士論文

水平同心圓管間自然對流之動態模型



研究生：陳盈立

指導教授：楊文美 博士

中華民國九十三年七月

水平同心圓管間自然對流之動態模型

A dynamic model of natural convection in horizontal  
concentric cylindrical annulus

研究生：陳盈立

Student : Ying-Li Chen

指導教授：楊文美

Advisor : Wen-Mei Yang



**A Thesis**  
**Submitted to Institute of Mechanical Engineering**  
**College of Engineering**  
**National Chiao Tung University**  
**in Partial Fulfillment of The Requirments**  
**for the Degree of**  
**Master of Science**  
**in**  
**Mechanical Engineering**  
**July 2004**  
**Hsinchu, Taiwan, Republic in China**

中華民國九十三年七月

## 摘要

本文探討水平同心圓管在具有溫度差之作用下，所引發自然對流之動態模型，同時觀察給予不同參數所產生的變化。吾人首先建立描述流場及溫度場的統御方程式，並將方程式無因次化。在模型中吾人將變數以傅立葉級數與符合邊界條件的 Chandrasekhar 正交函數作雙重級數展開並取其最低階數項，其係數為時間函數。將之代入微分方程式，利用 Galerkin 法將方程組簡化為聯立非線性常微分方程組，再採用 Runge-Kutta 數值方法求解。由數值解中探討在不同參數範圍的流場與溫度場之行為。

結果顯示，以吾人所建構的 Lorenz 模型分析水平同心圓管間的流場與溫度場會出現第一臨界瑞里數  $Ra_c$  以及第二臨界瑞里數  $Ra_0$ 。在第一臨界瑞里數  $Ra_c$  下流場呈現左右對稱的兩個新月形渦旋，超過第一臨界瑞里數  $Ra_c$  後流場會出現第二對渦旋直到第二臨界瑞里數  $Ra_0$  後流場產生非穩態狀態，這些情形與文獻中所得到的結果吻合。在固定半徑比  $\eta$  下，臨界瑞里數  $Ra_c$  發生的位置隨著普朗特數  $Pr$  的增加而增加，經比較得知吾人的模型在低的普朗特數  $Pr$  下所得到的臨界瑞里數  $Ra_c$  與文獻上的情形較為符合。

## 誌謝

本論文得以順利完成絕非是憑一個人單打獨鬥就可以辦得到的，在此首先要感謝的是指導教授楊文美博士在學習過程中不厭其煩的指導以及督促，使得吾人能在研究的過程中獲得無比的知識以及經驗。

承蒙口試委員傅武雄博士與游明輝博士於口試期間給予本篇論文寶貴的意見及指教，使得論文得以更加嚴謹與完善，在此由衷的表示感謝。

此外論文形成的過程中要感謝鎰清學長多次在百忙之中撥空回實驗室給予意見及協助，雖然很遺憾來不及與你共同分享成果與喜悅，但是相處的時間卻成為往後美好的回憶。

感謝致廣學長、紀元學長、志凱學長、同窗好友勤暉、家棟、家宏、長官、阿亮及實驗室學弟英棋、宏仁、有約，在校期間於課業上及生活上的提攜砥礪，使得這2年研究生涯過得更為精彩且充實。

最後亦將本論文的成果獻給我的父母及關心我的家人，沒有你們的支持論文也無法順利完成，感謝大家。

# 目錄

摘要.....	i
誌謝.....	ii
目錄.....	iii
表目錄.....	v
圖目錄.....	vi
符號說明.....	vii
第一章 緒論.....	1
1.1 文獻回顧.....	1
1.2 研究目的.....	6
第二章 數學模式.....	7
2.1 統御方程式.....	7
2.2 無因次化.....	9
第三章 數值方法.....	12
3.1 求取數值解模式.....	12
3.2 數值解方法—Runge-Kutta 數值方法.....	14
3.3 數值解的分析方法.....	15
3.3.1 時間及數與 FFT 頻譜分析.....	15
第四章 結果與討論.....	17
4.1 水平同心圓管間流場及溫度場之行為.....	17
4.2 穩態流場及其穩定性.....	18
4.2.1 Ra 對流場的影響.....	18
4.2.2 Ra 對溫度場的影響.....	18
4.3 第二臨界瑞里數後水平同心圓管間流場及溫度場之行為...19	
4.3.1 由時間級數與 FFT 頻譜圖探討流場及溫度場的	

行為.....	19
4.4 各參數對流場穩定性的影響.....	21
4.4.1 Pr 數對流場的影響.....	21
4.4.2 半徑比 $\eta$ 對流場的影響.....	22
第五章 結論.....	23
參考文獻.....	25
附錄一.....	48
附錄二.....	49



## 表 目 錄

表一	不同半徑比 $\eta$ 所對應之特徵值 $\alpha$ 、 $\beta$ 。.....	28
表二	Lorenz 模型之展開係數。.....	29



## 圖目錄

圖一	基本物理模式示意圖.....	30
圖二	(a) $\eta = 0.5$ (b) $\eta = 0.75$ 時，隨 Pr 改變所出現臨界瑞里數 $Ra_c$ 以及到達第二臨界瑞里數 $Ra_0$ 的位置。.....	31
圖三	當 $\eta = 0.5$ ，Pr=0.05 在內外圓柱具溫差條件下的流線圖(左)及其溫度分布圖(右)，(a) $Ra=10$ (b) $Ra=100$ (c) $Ra=1000$ (d) $Ra=2000$ (e) $Ra=3000$ (f) $Ra=4000$ (g) $Ra=8000$ (h) $Ra=20000$ 。.....	33
圖四	當 $\eta = 0.75$ ，Pr=0.03 在內外圓柱具溫差條件下的流線圖(左)及其溫度分布圖(右)，(a) $Ra=100$ (b) $Ra=4000$ (c) $Ra=8000$ (d) $Ra=20000$ (e) $Ra=60000$ 。.....	36
圖五	$\eta=0.5$ ，Pr=0.05 時在穩定狀態下，由 Runge-Kutta 法所解出來各函數隨 Ra 值的變化圖。.....	38
圖六	當 $\eta = 0.5$ ，Pr=0.05 在內外圓管具溫差條件下的時間級數圖(上)及其頻譜圖(下)，(a) $Ra=29000$ (b) $Ra=60000$ (c) $Ra=100000$ 。.....	39
圖七	當 $\eta=0.75$ ，Pr=0.03 在內外圓管具溫差條件下的時間級數圖(上)及其頻譜圖(下)，(a) $Ra=77000$ (b) $Ra=120000$ (c) $Ra=200000$ (d) $Ra=300000$ 。.....	42
圖八	$\eta=0.85$ 時在不同的 Pr 下，水平同心圓管在穩定解範圍內所發生 2-渦旋轉 4-渦旋的臨界瑞里數 $Ra_c$ 對照圖。.....	46
圖九	(a)在固定 Pr 之下，不同的半徑比 $\eta=0.5$ 、0.65、0.75 及 0.85 所出現臨界瑞里數 $Ra_c$ 之位置圖。(b)在 Pr=0.7 時，與 Yoo 及 Powe 的 $Ra_c$ 對照圖。.....	47

# 符 號 說 明

## 符 號

A	展弦比
d	內外圓柱半徑差
g	重力加速度
Gr	格雷修夫數 Grashof number
$J(f, g)$	$\frac{1}{R} \left( \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial R} \right)$ Jacobian function
k	Runge-Kutta 係數
L	寬距 gap width
Nu	紐賽數 Nusselt number
Pr	普朗特數 Prandtl number
p	壓力
P	無因次壓力
$r_1, r_2$	內外圓柱半徑
$r, \theta$	圓柱座標
$R, \theta$	無因次座標
$Ra$	瑞里數
$Ra_c$	臨界瑞里數
$Ra_0$	第二臨界瑞里數
t	時間
T	溫度
$u, v$	速度分量
$U, V$	無因次速度分量
$\nu$	為運動黏滯係數
$\alpha$	熱擴散係數
$\beta$	熱膨脹係數
$\phi_m$	r 方向的正交函數
$\eta$	內外圓柱半徑比
$\tau$	無因次時間

Θ

無因次溫度

ψ

流線函數 stream function

Δ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Δ<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \nabla^4 = & \frac{\partial^4}{\partial R^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial R^2 \partial \theta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^3}{\partial R^3} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial R} \\ & - \frac{3}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial R \partial \theta^2} + \frac{4}{R^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \end{aligned}$$



# 第一章

## 緒論

### 1.1 文獻回顧

有關水平同心圓管自然對流現象的研究多年來一直持續在進行著，研究方向由早期的熱交換器到現今的工業應用方面，範圍相當廣泛。這是因為它在理論上的多變化性以及它本身能廣泛的運用在許多工程上，例如材料製程的熱傳分析、熱能的保溫系統、電子零件的散熱系統、傳輸線路、套管熱交換裝置等。

水平同心圓管間之自然對流通常發生於內圓管為高溫而外圓管為低溫時，可經由數值方法以及實驗方法來觀測其流場以及溫度場的變化。基本流場是低瑞里數(Ra)時所形成的兩對稱性有如新月般的渦旋，流線由靠近高溫內管的地方升起，而由靠近低溫外管處落下。而高瑞里數時形成的則是數種不同的對流流場，這些流場的形成又和普朗特數(Pr)息息相關。這種自然對流發生的條件只要是內圓管和外圓管呈現不同溫度的狀況之下，即使非常小的溫度差也足以導致自然對流現象的發生。

最早 Beckmann[1]開始著手研究水平同心圓管等溫下之自然對流，在圓柱間研究空氣(air)、氫氣(hydrogen)和二氧化碳(carbon dioxide)並求出其總熱傳係數(overall heat transfer coefficient)。

Crawford and Lemlich[2]第一位以數值方法研究水平同心圓管間之自然對流，當時使用方法為高斯替代反覆逼近法(Gauss seidel iterative approach)。Abbott[3]在極為薄的同心圓管間使用反矩陣

(matrix inversion)的技巧求解。

Powe et al.[4]是數值方法研究同心圓管間流場的變化，在普朗特數為 0.7 時改變其瑞里數(Ra)，流場逐漸形成逆向渦旋(counter-rotating eddy)。當 Ra 增加到某大小時流體會從穩定流場(steady flow)轉換到不穩定流場(unsteady flow)現象，並推測流場轉換時臨界瑞里數的位置。

Kuehn 和 Goldstein[5]分別以實驗與數值方法，研究同心圓管間局部溫度以及速度分布。並且算出流體在不同的普朗特數像是在空氣(Pr=0.7)和水(Pr=6.0)的熱對流條件下，影響流體速度與溫度分布的局部熱傳轉換係數。實驗方面使用干涉計(A mach-Zehnder interferometer)來決定溫度分部與局部熱轉換係數，與數值方式作比較。另外，數值方面考慮水或空氣的圓管間先假設寬距與內圓管直徑的比率為 0.8，且瑞里數介於  $2.11 \times 10^4 \sim 9.76 \times 10^5$  的範圍下使用有限差分法(finite different method)求得結果。此後，使得各種水平同心圓管間自然對流流場流動的現象之實驗與數值研究有了進一步的發展。

Mojtabi and Caltagirone[6]研究水平同心圓管間自然對流 2-D 流場的穩定性，並使用擾亂法(perturbation method)求解。其研究條件限制在欲觀察的流場圓管間的上層區域範圍內，並假設空氣在瑞里數很小時與半徑比率( $R=R_2/R_1$ )很小時，使用級數展開(power series expansion)求得其解。

Gollub and Benson[7]以實驗的方式證明了流場的轉換會經由半週期(quasi-periodic)、加倍週期(periodic-doubling)或是間歇性週期的狀況下，過程中會產生二至三種多重的頻率。經由這些途徑，流體

會產生瑞里－伯納(Rayleigh-Benard)熱不穩定(thermal instability)對流情形，最後流場會形呈混沌狀態(chaotic)。

Lee and Korpela[8]研究圓管間自然對流流場時發現，內部熱圓管附近有重要之物理系統。他們認為在低普朗特數時，其液動不穩定(hydrodynamic instability)可能發生在圓管間垂直的區域，和 Busse[9]在高普朗特數時圓管頂端的範圍產生瑞里－伯納的熱不穩定現象。此兩種不穩定現象在空間架構上可能誘導出更多種熱轉換現象，和暫態流體的變化，因此由上述可知在極為狹窄的圓管區間時，自然對流的現象和多變化的轉換現象中，普朗特數扮演重要的地位。

Tsui and Tremblay[10]研究以數值分析並使用波斯尼克近似法(Boussinesq approximation)與渦度－流線函數逼近法(vorticity-stream function approach)，來探討水平同心等溫圓管間自然對流熱傳之暫態(transient)解，而數值結果更說明了以半徑比( $R=R_2/R_1$ )當參數，求得符合圓管間自然對流熱傳計算之紐賽數(Nusselt number)－格雷修夫數(Grashof number)曲線圖。

Rao et al.[11]研究水平同心圓管間空氣的自然對流運動型態，他認為空氣的自然對流型態可歸納為為四大模式。其一為兩個如新月般形渦旋的穩定 2-D 流場，第二種是 2-D 的震盪流場，第三種是 3-D 的螺旋形流場，最後一種是 2-D 的多渦旋流場。

Dyko[12]在實驗上與數值研究上，發現當瑞里數大於臨界瑞里數時會發生因浮力所驅動(buoyancy-driven)的流動現象，而理論預測在展弦比  $A$  大時，瑞里數大於臨界瑞里數會產生二次流(secondary flow)的現象，並轉換為 3-D 擾動流。Choi and Kim[13]在研究同心圓管間

自然對流之流體為空氣時，探討 2-D 流場，發現正在逐漸成長的渦旋會有穩定的現象。

Cadiou et al.[14]研究充滿空氣狹窄的水平圓管間自然對流的不穩定現象，在大的半徑比( $R=R_2/R_1$ )下討論熱不穩定與液動不穩定現象。在低瑞里數( $Ra \leq 3000$ )時發現圓管間上部範圍的流場，會有熱不穩定現象發生；在高瑞里數且半徑比( $R=R_2/R_1$ )為 1.14 時，會有液動不穩定現象發生，當瑞里數持續增加時會發生流場由多渦旋流轉化為單渦旋的反向轉換現象。

近年來，Yoo 發表多篇關於水平同心圓管間自然對流現象的文章，首先 Yoo[15]從研究狹窄的水平圓管空間內且  $Pr \leq 0.3$  的現象當中發現，當  $Pr \leq 0.2$  時區間的穩定現象或震盪現象會衍生出某些複雜的轉動胞體；當  $Pr = 0.3$  時，在空間上方會形成一對逆向渦旋； $Pr \sim 0$  時，數個單一渦旋分布在管子的上端及下端，隨著  $Pr$  值增加這些渦旋會往上平移；此外當  $Pr \leq 3$  時還可發現圓管的頂端正逐漸形成一個渦捲式的對流及分歧現象(bifurcation phenomenon)，這些現象都直接與普朗特數有關。

隔年 Yoo[16]持續對因普朗特數所引發的分歧現象展開更深入的探討。在高展弦比  $A=2$  時，發生分歧現象與二次解(dual solution)的普朗特數範圍是  $0.3 \leq Pr \leq 1$ 。當瑞里數超過臨界瑞里數時，流體會在  $0.3 \leq Pr \leq 0.5$  這範圍發生二次流現象流場。當  $0.3 \leq Pr \leq 0.4$  時，流體會有磁滯現象(hysteresis phenomenon)發生。

Mizushima[17]研究 2-D 流場的同心圓管間自然對流之流體的轉換模式，他用數值方法證實了當瑞里數高於臨界瑞里數時，流場的確

存在二次穩態解，更由Newton-Raphson's 法得到穩態解的分歧圖圖形。

Lorenz[18] (1963)提出由三個一階非線性常微分方程式所構成的方程組，後人稱之為 Lorenz 系統。該文獻的研究主題為熱對流問題，經由聯立解出三條簡單的非線性方程式卻可建構出與實際物理現象符合的模型，大幅節省了其他數值方法所需耗費的時間以及複雜的數值架構。在方程組當中主要控制參數為 $\gamma = Ra/Ra_c$ ，其中 Ra 為瑞里數 (Rayleigh number)，而  $Ra_c$  為臨界雷里數，當以相空間(Phase space)方法探討其結果。當 $\gamma$ 介於 0 到 1 之間時，將相空間投影至相平面(Phase plain)上時，則會發現其軌跡皆會趨向於同一個平衡點，但是當 $\gamma$ 略大於 1 時，其相平面上的軌跡則會隨著初始值的不同，而趨向兩個不同的平衡點，當 $\gamma$ 繼續增大到另一個臨界點時，其投影在相平面上的圖形則轉換成為螺旋的軌跡，而平衡點也隨之改變，最後達到混沌的狀態。



由以上論文中可知道在低普朗特數( $Pr \leq 0.3$ )時，暫態對流和固定邊界條件下的熱通量會造成流場的多變化現象，而目前關於水平同心圓管間自然對流的研究，多集中於圓管表面的熱轉換或是在不同展弦比(A)下的自然對流問題。而本篇研究中將建構一組Lorenz系統，探討水平同心圓管在內外管具溫差條件的邊界影響下，對內外管間的流場所造成的各種自然對流現象，並探討普朗特數(Pr)及瑞里數(Ra)對流場所造成的影響。

## 1.2 研究目的

和自然對流相關的問題一直受到研究者的重視，並藉著不同的數值方法或實驗方法，來瞭解自然對流發生的情形及各種現象。本研究的重點是利用流場的行為特徵展開為 Lorenz 簡化模型，並利用此模型探討水平同心圓管在自然對流之狀況下，各項參數對流場所產生的影響。分為以下數項：

1. 影響水平同心圓管間自然對流的參數普朗特數( $Pr$ )、瑞里數( $Ra$ )及內外圓柱半徑比( $\eta$ )：

在固定  $Pr$  及  $\eta$  下，隨著  $Ra$  增加所造成圓管間流體的流場及溫度場之變化情形。

2. 當不穩定發生後自然對流流場的現象，並探討  $Ra$  所影響流場行為的範圍。



## 第二章 數學模式

本文中所探討的物理模式如圖一所示，兩水平無限長的同心圓管，其間充滿黏滯性牛頓流體， $T_1$ 和 $T_2$ 分別為內外圓柱之溫度， $r_1$ 和 $r_2$ 分別為內外圓柱之半徑。內外圓管之溫度分別固定如下：

$$T_1 = T_0 + \Delta T_0$$

$$T_2 = T_0$$

本文主要探討兩水平無限長的同心圓管在溫差作用下及自然對流作用下，各項參數對流場之影響。本章中將先建立其動量及能量之數學模式，作以數值方法之解題基礎。

### 2.1 統御方程式



在開始分析問題以前我們先作以下之假設：

- A. 兩同心圓管為無限長，流場為 2-D 流場
- B. 流體為牛頓流體
- C. 根據波斯尼克近似法(Boussinesq approximation)，除浮力項外，流體之物理性質皆為定值
- D. 忽略流體之黏滯性耗損

其圓柱座標 $(r, \theta)$ 的統御方程式如下：

連續方程式(continuity equation)：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (2.1)$$

動量方程式(momentum equations)：

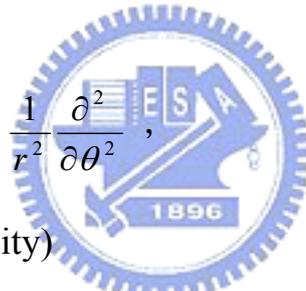
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + g\beta(T - T_0) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[ \left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] - g\beta(T - T_0) \sin \theta \end{aligned} \quad (2.2b)$$

能量方程式(energy equation)：

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.3)$$

上式中  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ ，



$\rho$  為流體密度(density)

$\nu$  為運動黏滯係數(Kinematic viscosity)

$g$  為重力加速度(gravitation acceleration)

$\alpha$  為熱擴散係數(thermal diffusivity)

$\beta$  為熱膨脹係數(thermal expansion coefficient)

Pr 為普朗特數(Prandtl number)

Ra 為瑞里數 (Rayleigh number)

邊界條件(boundary conditions)：

$$r = r_1 \quad : \quad u = v = 0, \quad T = T_0 + \Delta T_0 \quad (2.4a)$$

$$r = r_2 \quad : \quad u = v = 0, \quad T = T_0 \quad (2.4b)$$

## 2.2 無因次化

吾人在此定義無因次參數如下：

$$R = \frac{r}{d} \quad \tau = \frac{\nu}{d^2} t \quad \Theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_0}$$

$$U = \frac{ud}{\alpha} \quad V = \frac{ud}{\alpha} \quad P = \frac{pd^2}{\rho\alpha^2}$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Ra} = \frac{g\beta\Delta T_0 d^3}{\alpha\nu}$$

其中  $d = R_2 - R_1$ 。可將統御方程式無因次為以下形式：

連續方程式(continuity equation)：

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU) + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad (2.5)$$

動量方程式(momentum equations)：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{V^2}{R} \\ = -\frac{\partial P}{\partial R} + \text{Pr} \left[ \left( \Delta - \frac{1}{R^2} \right) U - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] - \Theta \text{Ra Pr} \cos \theta \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{UV}{R} \\ = -\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \text{Pr} \left[ \left( \Delta - \frac{1}{R^2} \right) V + \frac{2}{R^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right] + \Theta \text{Ra Pr} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.6b)$$

能量方程式(energy equation)：

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = \Delta \Theta \quad (2.7)$$

上式中  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  。

邊界條件(boundary conditions)：

$$R = \frac{\eta}{1-\eta} : U = V = 0, \Theta = 1 \quad (2.8a)$$

$$R = \frac{1}{1-\eta} : U = V = 0, \Theta = 0 \quad (2.8b)$$

上式中半徑比(radius ratio)定義為  $\eta = \frac{R_1}{R_2}$  。

將(2.6a)對  $\theta$  偏微分得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial R} + U \frac{\partial^2 U}{\partial R \partial \theta} + \frac{\partial \left( \frac{V}{R} \right)}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{V}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \left( \frac{V^2}{R} \right)}{\partial \theta} \\ = - \frac{\partial P}{\partial R \partial \theta} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \Delta - \frac{1}{R^2} \right) U - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} (\Theta Ra \text{Pr} \cos \theta) \end{aligned} \quad (2.9a)$$

將(2.6b)乘上 R 再對 R 偏微分得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial RV}{\partial R} \right) + \frac{\partial RU}{\partial R} \frac{\partial V}{\partial R} + RU \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{\partial V}{\partial R} \frac{\partial V}{\partial \theta} + V \frac{\partial^2 V}{\partial R \partial \theta} + \frac{\partial UV}{\partial R} \\ = - \frac{\partial P}{\partial R \partial \theta} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \left( \Delta - \frac{1}{R^2} \right) U - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial R} (R \Theta Ra \text{Pr} \sin \theta) \end{aligned} \quad (2.9b)$$

將(2.9b)式減去(2.9a)式消去壓力 P 項，再利用(2.5)式可得：

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial RV}{\partial R} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + U \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial V}{\partial R} + V - \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{V}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( R \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{\partial U}{\partial \theta} + V \right)$$

$$\begin{aligned}
-U \frac{\partial V}{\partial R} + V \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{V}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} = + \text{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (R \nabla^2 V) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 U) \right] \\
+ \left[ \frac{\partial}{\partial R} (R \Theta Ra \text{Pr} \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Theta Ra \text{Pr} \cos \theta) \right]
\end{aligned} \tag{2.10}$$

現我們引用一流線函數(stream function)  $\psi(R, \theta, \tau)$

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{2.11a}$$

$$V = -\frac{\partial \psi}{\partial R} \tag{2.11b}$$

將流線函數代入(2.10)及 (2.7) 中，可得：

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial \tau} - J(\psi, \Delta \psi) = \text{Pr} \Delta^2 \psi - Ra \text{Pr} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial R} \sin \theta + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \cos \theta \right) \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - J(\psi, \Theta) = \Delta \Theta \tag{2.13}$$



其中

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^2 = \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial R^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial R^2 \partial \theta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^3}{\partial R^3} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{3}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial R \partial \theta^2} \\
+ \frac{4}{R^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4}
\end{aligned}$$

$$J(f, g) = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial R} \right)$$

## 第三章

### 數值方法

在求解方面，吾人將流場之  $r$  方向以符合邊界條件的正交函數 Chandrasekhar[24]展開。而  $\theta$  方向因是週期性函數的特徵出現，因此以傅立葉級數(Fourier series)展開，配合徑向函數以雙重級數展開的形式來模擬流場中的速度及溫度。

#### 3.1 求取數值解模式

由於徑向之速度、壓力與溫度在水平圓管間延中切線作對稱性發展，因此我們可展開成

$$\psi(\tau, R, \theta) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} A_{mn}(\tau) \cdot \phi_m(R) \cdot \sin(n\theta) \quad (3.1)$$

$$\Theta(\tau, R, \theta) = \sum_{m=1} \sum_{n=0} B_{mn}(\tau) \cdot \Phi_m(R) \cdot \cos(n\theta) + \left(\frac{1}{1-\eta} - R\right) \quad (3.2)$$

上式中  $\phi_m(R)$  及  $\Phi_m(R)$  根據 Chandrasekhar 可由下列兩式求得：

$$[(DD_*)^2 - \alpha_m^4] \phi_m(R) = 0 \quad (3.3a)$$

$$[DD_* + \beta_m^2] \Phi_m(R) = 0 \quad (3.3b)$$

由(3.3)可以得到：

$$\phi_m(R) = E_m J_1(\alpha_m R) + F_m Y_1(\alpha_m R) + G_m I_1(\alpha_m R) + K_m'(\alpha_m R)$$

$$\Phi_m(R) = H_m J_1(\beta_m R) + M_m' Y_1(\beta_m R)$$

表一為不同內外半徑比  $\eta$  所對應的特徵值  $\alpha_m$ 、 $\beta_m$ ，而當半徑比  $\eta = 0.5$  時，將  $\phi_1(R)$ 、 $\Phi_1(R)$  及  $\Phi_2(R)$  分別的關係表示於附錄一中。

於(3.1)取兩項，於(3.2)式取三項：

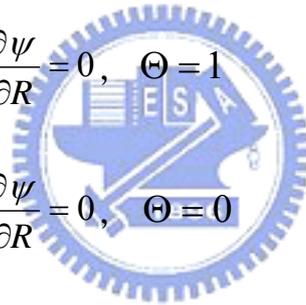
$$\psi(\tau, R, \theta) = A_{11}(\tau) \cdot \phi_1(R) \cdot \sin \theta + A_{12}(\tau) \cdot \phi_1(R) \cdot \sin 2\theta \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\tau, R, \theta) = & B_{11}(\tau) \cdot \Phi_1(R) \cdot \cos \theta + B_{20}(\tau) \cdot \Phi_2(R) \\ & + B_{10}(\tau) \cdot \Phi_1(R) + \left(\frac{1}{1-\eta} - R\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

由於文獻中  $\theta$  方向的流場皆呈現左右對稱且方向相反的現象，所以(3.4)式中的流線函數吾人取正弦函數  $\sin \theta$  作展開；此外為探討高於第一臨界瑞里數後流場的分歧現象，吾人再添以  $\sin 2\theta$  函數來完整模擬流場的速度並設邊界條件(boundary conditions)為：

$$R = \frac{\eta}{1-\eta} : \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0, \quad \Theta = 1$$

$$R = \frac{1}{1-\eta} : \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0, \quad \Theta = 0$$



將(3.4)和(3.5)代入(2.12)式中，先後乘以  $\phi_1 \sin \theta$  及  $\phi_1 \sin 2\theta$  後各對  $R$  及  $\theta$  方向作正交積分；將(3.5)式代入(2.13)式中，先後乘以  $\Phi_1 \cos \theta$ 、 $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  後，亦分別對  $R$  及  $\theta$  方向積分。其中  $R$  方向積分範圍為  $\frac{\eta}{1-\eta}$  到  $\frac{1}{1-\eta}$ ，而  $\theta$  方向積分範圍為  $0$  到  $2\pi$ 。

為了使方程式看來更為簡潔，吾人重新定義以下變數：

$$W = A_{11}$$

$$X = A_{12}$$

$$Y = B_{11}$$

$$Z = B_{20}$$

$$V = B_{10}$$

經過正交積分化之後可得到下列五條聯立一階微分方程式：

$$\frac{dW}{dt} = a_1WX + a_2 \text{Pr}W + a_3Ra \text{Pr}V + a_4Ra \text{Pr}Z + a_5Ra \text{Pr} \quad (3.6a)$$

$$\frac{dX}{dt} = b_1W^2 + b_2 \text{Pr}X + b_3Ra \text{Pr}Y \quad (3.6b)$$

$$\frac{dY}{dt} = c_1XY + c_2YZ + c_3W + c_4Y \quad (3.6c)$$

$$\frac{dZ}{dt} = d_1WY + d_2V + d_3Z + d_4 \quad (3.6d)$$

$$\frac{dV}{dt} = e_1WY + e_2V + e_3Z + e_4 \quad (3.6e)$$

(3.6a)~(3.6e)即為吾人所欲建立的 Lorenz 方程組，係數的積分值表示於表二中。方程式為五條一階非線性常微分方程所構成，無法直接求得其解，因此我們將採用數值方法求解，以了解流場之轉變情形。

### 3.2 數值解方法 — Runge-Kutta 數值方法

在 Lorenz 方程組數值求解部份，在此採用屬於自發式的 Runge-Kutta 數值方法，此方法為早期人們用來解微分方程式數值解的方法之一，其優點在於這是一種自發性的方法，所以程式的設計較為簡易，但由於重複計算的關係，使得其比較起相同準確度的其他方法顯得較為費時，而隨著所使用的階數不同，所推導的形式也會隨著不同的推導過程有所不同，在此採用古典形式的四階 Runge-Kutta 數值方法，考慮以下聯立方程組：

$$\frac{dA_i}{d\tau} = f_i(\tau, A_j) \quad i, j = 1, \dots, 5$$

其運算過程如下

$$A_{i+1} = A_i + \frac{1}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}) \quad i = 1, \dots, 5$$

而在方程式之中，其係數部份  $k_{i1}$ ， $k_{i2}$ ， $k_{i3}$ ， $k_{i4}$  如下所示：

$$\begin{cases} k_{i1} = \Delta\tau \cdot f_i(\tau, A_j) \\ k_{i2} = \Delta\tau \cdot f_i\left(\tau + \frac{\Delta\tau}{2}, A_j + \frac{k_{j1}}{2}\right) \\ k_{i3} = \Delta\tau \cdot f_i\left(\tau + \frac{\Delta\tau}{2}, A_j + \frac{k_{j2}}{2}\right) \\ k_{i4} = \Delta\tau \cdot f_i(\tau + \Delta\tau, A_j + k_{j3}) \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, 5$$

以上  $k_{ij}$  為運算的變數，而  $\Delta\tau$  為時間間隔參數，而誤差的等級為  $(\Delta\tau)^5$ 。

### 3.3 數值解的分析方法

#### 3.3.1 時間級數與 FFT 頻譜分析

自然界中存在著一種隨時間而演變的系統，我們稱之為動力系統。動力系統可藉由其與時間有關的函數  $f(\tau)$  或是其動力變數的時間級數(Time series)來表示其隨時間演變的過程。簡單如收斂或發散之類的現象我們可以藉由時間  $\tau$  對函數  $f(\tau)$  作圖而明顯的看出其函數隨時間的變化情形以及其所代表的意義，但是一旦不穩定解出現之後，就沒有辦法輕易的分辨其複雜的解是何種週期現象或是為混沌現象。

而我們知道，任何時間函數  $f(\tau)$  通常可以表示為許多週期性分量的疊代組成，而求取其中各週期性分量的相對強度則稱為頻譜分析(Spectral analysis)，而頻譜分析為研究混沌的一個重要方法。

我們利用傅立葉轉換(Fourier transform)將隨時間變化所得到的函數結果作轉換，求得其頻率函數進而求取函數分量的強度。當時間函數  $f(\tau)$  為一週期性函數時，該頻譜圖將會是其基本頻率及其倍數頻率的組合；當時間級數發展為一非週期性函數時，該頻譜圖則會以振盪的連續頻率，而在圖上為連續曲線。

吾人在此採用快速傅立葉轉換(Fast Fourier Transform)(簡稱 FFT)，為最有效率的演算方法，藉以求取我們所需之頻譜強度圖。該演算法是由離散傅立葉轉換(Discrete Fourier Transform)所演化而來，但其運算速率更為有效率，可較快獲取我們所要的轉換函數。我們可藉由轉換後之頻譜圖來判讀動力系統的運動形態，若為一個同頻(Synchronous)的週期性振盪，則頻譜為基頻與其倍數頻率的組合；而當次調諧(Subharmonic)的週期性運動時，則由基頻之分數倍頻所組成，而對於進入混沌狀態的系統，其頻譜圖則是無法判讀的連續不規則圖形。

## 第四章

### 結果與討論

本章中吾人將討論普朗特數  $Pr$ 、瑞里數  $Ra$  及內外圓柱半徑比  $\eta$  等參數，對水平同心圓管間之自然對流的動態行為有何影響。

#### 4.1 水平同心圓管間流場及溫度場之行為

在固定  $Pr$  下水平同心圓管間自然對流在低  $Ra$  時會呈現左右對稱的兩個新月形渦旋，隨著  $Ra$  之改變而先後出現兩種變化情形。第一種情形是當瑞里數由低往高增加至臨界瑞里數  $Ra_c$  後，同心圓管間流場會由底部開始出現第二對渦旋，並且隨著  $Ra$  之增加而逐漸變大，最後吾人所建構的 Lorenz 模型會在同心圓管的區間形成四個大小相仿並且左右對稱的渦旋。

出現第二對渦旋後，隨著  $Ra$  持續增加到第二臨界瑞里數  $Ra_0$  之後會產生第二種情形。這時候由 Lorenz 模型所解出來的函數值開始出現非穩態的現象，並且隨著  $Ra$  值的增加其震盪的情形愈為顯著。圖二為固定  $\eta$  在不同的  $Pr$  下，所對應的  $Ra_c$  以及  $Ra_0$  的位置。

在溫度場方面，在固定  $Pr$  下隨著  $Ra$  的增加等溫線由原來類似同心圓的情況逐漸往圓管的上方偏移，隨著  $Ra$  持續增加自然對流的效應會逐漸變強，這使得在內管上方及外管下方位置出現等溫圈，並隨著  $Ra$  的增加這兩個等溫圈亦逐漸擴大並包附整個圓管。

## 4.2 穩態流場及其穩定性

### 4.2.1 $Ra$ 對流場的影響

圖三及圖四分別為  $\eta=0.5$ ， $Pr=0.05$  以及  $\eta=0.75$ ， $Pr=0.03$  時，水平同心圓管間流場在不同  $Ra$  下的流線圖以及溫度分布圖。在流場部分由圖三及圖四中可以看出在低  $Ra$  時流場呈現一對對稱的渦旋，渦旋的對稱中心在管子的中間部位。

隨著  $Ra$  的增加，由圖三(c)及圖四(b)可以發現這對渦旋逐漸往上移動，並且在超過  $\eta=0.5$   $Pr=0.05$  時的  $Ra_c=2800$ ；以及  $\eta=0.75$   $Pr=0.03$  時的  $Ra_c=7500$  之後，如圖三(e)、圖四(c)在圓管的底部開始出現第二對渦旋，並且隨著  $Ra$  值的增加而逐漸擴大。

從圖五(a)可以看到隨著  $Ra$  的增加流線函數的展開項係數  $W$  的值隨著  $Ra$  的增加而逐漸增強，這表示  $Ra$  在  $Ra_c$  以下流場的運動主要是由單一對渦旋的係數  $W$  所決定。隨著  $Ra$  的增加， $X$  值逐漸取代  $W$  值的地位，此時流場的行為改由  $X$  值主宰，流場逐漸轉變為兩對渦旋的模式，從圖五(a)可以明顯的看到這個趨勢。

### 4.2.2 $Ra$ 對溫度場的影響

在溫度場方面如圖三及圖四，在低  $Ra$  時的等溫線呈同心圓，大小由內管逐漸向外管減少。隨著  $Ra$  的增加溫度場開始出現變化，可以看出溫度場等溫線在靠近內管下方位置緊密堆集；在內管上方位置的等溫線則變得鬆緩。這代表了當流速逐漸增加之後，流體受溫度及浮力的影響愈來愈顯著。內管下方的流體受熱逐漸往上移動，使得此區域間的溫度變化較內管上方大。

隨著  $Ra$  的增加，如圖三(f)及圖四(c)溫度場在內管的上方以及外管的下方這兩個位置各出現了一個等溫圈，並且隨著  $Ra$  的增加而逐漸擴大。這是因為此時流場新出現的渦旋逐漸增強而影響到溫度場，這亦表示當  $Ra$  增加而流體流速變快時，自然對流的效應也隨之增強。

### 4.3 第二臨界瑞里數 $Ra_0$ 後水平同心圓管間流場及溫度場之行為

在固定  $Pr$  下當瑞里數增加至第二臨界瑞里數  $Ra_0$  之後，由吾人所建構的 Lorenz 模型利用 Runge-Kutta 數值方法所解出來的係數會出現非穩態的解，而非穩態的解會隨著  $Ra$  的增加震盪的情形亦愈加劇烈。為了解內外圓管間流場在  $Ra_0$  之後的流場行為，吾人對於所解出來的解隨時間的變化情形取係數  $X$  做成時間級數圖，並配合 FFT 獲取頻譜圖，藉以了解流場在超越  $Ra_0$  後的行為。

#### 4.3.1 由時間級數與 FFT 頻譜圖探討流場及溫度場的行為

$\eta=0.5$ ,  $Pr=0.05$  時所發生的  $Ra_0=25000$ ，如圖六(a)  $Ra=29000$  時當時間夠長以後可以發現所解出來的  $X$  值並不隨著時間的增加而有所收斂，呈現的是單一週期性的波動圖形。從 FFT 頻譜圖可以看到，頻譜是由在頻率為 0.77 及其倍頻所組成，確為單一週期性運動型態。附錄二為  $\eta=0.5$ ,  $Pr=0.05$ ,  $Ra=29000$  時將非穩態發生的週期分別取時間  $t=128.041$ 、 $128.272$ 、 $128.503$ 、 $128.734$  繪製成的流線圖及溫度分布圖。

圖六(b)  $Ra=60000$  時  $X$  的振幅由圖四(a)的 5000 增加至 120000，而 FFT 則是由較小的頻率為 0.7 及其倍頻所組成，這表示當  $Ra$  增加至 60000 時流的運動仍是單一週期性的。圖六(c)  $Ra=100000$  時  $X$  所

出現解仍然是單一週期性的結果，其 FFT 頻譜圖則是由 0.58 及其倍頻所組成。

$\eta=0.75$ ， $Pr=0.03$  時所發生的  $Ra_0 = 70000$ ，如圖七(a)當  $Ra=77000$  時 X 所得到的解是振幅為  $3.6 \times 10^8$  的不收斂結果，FFT 圖則是由頻率為 0.94 及其倍頻所組成，為單一週期的運動模式。圖七(b)(c)(d) 的  $Ra$  分別為 120000、200000 以及 300000，從 X 的時間級數圖可以看到隨著  $Ra$  的增加其振幅亦愈來愈大，而所構成的頻率隨著  $Ra$  的增加而逐漸縮小但是仍然為單一週期性運動型態。

當非線性系統存在時，理論上應隨著某些係數的增而出現週期倍增的現象，隨著係數的增加呈現的結果也許是更複雜的自我複製現象或是到達混沌狀態。吾人所建構的 Lorenz 模型所解出來的結果，到達  $Ra_0$  之後確有出現不穩定的解，但是隨著  $Ra$  的增加並未出現週期倍增的現象甚至混沌的情形，出現的現象只有解出來的係數振盪的振幅隨著  $Ra$  的增加愈來愈大。超過某一  $Ra$  值之後程式將開始發散，將時間格點變小或是將前一個可以解出解的  $Ra$  所算出來的解當作起始值，仍然無法解出其不穩定的結果。

會影響到這個結果的原因就是非線性項，如表二所示從吾人所建構的 Lorenz 模型可以發現所有非線性項前面的係數的大小相較於其他線性項的係數明顯小很多，隨著半徑比  $\eta$  的增加，非線性項前面的係數亦愈小。這表示吾人用  $\sin$ 、 $\cos$  以及 Chandrasekhar 等函數所展開的模式在正交的時候將非線性的效力減小，所以如圖五可以發現所解出來的 WXYZV 值皆為比較偏向線性的結果。同時非線性項的效力相對於線性項的效力小，使得吾人所建構的 Lorenz 模型能找到 2-渦旋轉化為 4-渦旋的臨界瑞里數  $Ra_c$  所存在的範圍受到半徑比  $\eta$  以

及 Pr 所影響；找不穩定的臨界瑞里數  $Ra_0$  時，也只能在低 Pr 值的範圍發生。

## 4.4 各參數對流場穩定性的影響

### 4.4.1 Pr 數對流場的影響

如圖二(a)(b)在固定一個 Pr 數下  $Ra$  由小逐漸增大，可以看到流場會先通過一條 2-渦旋衍生為 4-渦旋的線。在這條線段以上的位置皆為兩對渦旋的流場；以下則為單一渦旋的流場，線段的趨勢是隨著 Pr 數的增加而逐漸增加。隨著  $Ra$  數的增加又會通過第二條線段，在這條線段以上所解出來的數值皆為不穩定狀態並隨著  $Ra$  的增加而振幅擴大。



在圖二(a)可以發現吾人由模型所解出來的結果在 Pr 為 0.045 左側的部位這兩條線段所相距的位置較遠，而 Pr 在 0.045 右側呈現兩條線段趨勢類似的情形，這部分也與文獻上的結果較為吻合；在圖二(b)之中 Pr 在 0.015 也有相類似的情形。這表示吾人所建構的模型在較低的 Pr 之下，與實際上的趨勢差異較大。

礙於吾人所建構的模型所能發現  $Ra_c$  及  $Ra_0$  的範圍極為狹窄，要找到兩條線共存的範圍更是不易，尤以受到  $Ra_0$  發生範圍的約束為最。因為在不同的半徑比  $\eta$  下吾人所建構的模型能找到  $Ra_c$  和  $Ra_0$  的 Pr 範圍皆極為狹窄，所以吾人能找到  $Ra_0$  的 Pr 範圍內，並未有文獻可以與  $Ra_c$  和  $Ra_0$  同時比較。

但是如圖八如果剔除  $Ra_0$  的部分，可以看到在  $\eta=0.85$  時 Yoo(1998) 所得到的線段與吾人建立的模型所畫出來的線段，在低 Pr 範圍內的

趨勢以及數值上是相仿的。但是隨著 Pr 數的增加，與 Yoo 所得到的結果會逐漸偏遠。這說明吾人的模型在低的 Pr 數下所做出來的  $Ra_c$  與文獻上的情形較為符合，也大概知道在圖二裡低 Pr 數第二臨界瑞里數  $Ra_0$  的部分是與理論上的結果差異較大。

#### 4.4.2 半徑比 $\eta$ 對流場的影響

由圖二(a)和(b)作比較，可以大概看出在這兩個半徑比之內的  $Ra_c$  及  $Ra_0$  所出現的位置是隨著半徑比的增加而增加的。圖九(a)為固定 Pr 下對不同的半徑比所出現  $Ra_c$  的位置圖，其中在  $\eta=0.75$  之前  $Ra_c$  隨著  $\eta$  的增加而增加； $\eta$  大於 0.75 的最高點之後模型所找出來的  $Ra_c$  則又呈現減小的現象。



圖九(b)為吾人的模型在 Pr=0.5 與 Pr=0.7 時與 Yoo(1996)以有限差分法和 Powe(1969)以實驗方式在 Pr=0.7 所得  $Ra_c$  的比較圖。從圖形可以看到 Yoo 的線段隨著半徑比  $\eta$  的增加而減少，而吾人在  $\eta=0.65$  及  $\eta=0.85$  的部分大致上也與 Yoo 及 Powe 的位置符合。在  $\eta=0.65$  之後比較 Pr=0.5 及 Pr=0.7 的線段，從圖形可以看出線段的趨勢是隨著 Pr 的增加而往下平移，在  $\eta=0.65\sim 0.85$  之間的範圍所得到的趨勢大致上與 Yoo 以有限差分法所得到的結果一致。由於吾人的模型無法找出 Pr=0.7 時  $\eta=0.65$  之前的結果，所以  $\eta=0.65$  以下的部分仍有缺陷在。

# 第五章

## 結 論

本文中藉由雙重級數展開法建構 Lorenz 模型，以 Runge-Kutta 數值方法求解水平同心圓管間流場在不同參數下的數值解，藉以探討各項參數對流場及溫度場產生的影響。綜合前一章節所得到的結果，吾人得到以下的結論：

1. 由吾人所建構的 Lorenz 模型分析水平同心圓管間的流場，發現會隨著  $Ra$  的增加而出現兩個階段的變化。第一階段是到達臨界瑞里數  $Ra_c$  後流場會出現兩對渦旋；第二階段是到達第二臨界瑞里數  $Ra_0$  後流線函數的函數值開始出現非穩態的現象。
2. 由吾人所建構的 Lorenz 模型分析水平同心圓管間的溫度場，發現會隨著  $Ra$  的增加而等溫線會由原來的同心圓狀逐漸往上偏移，並形成一對等溫圈。到達第二臨界瑞里數  $Ra_0$  後溫度亦開始出現非穩態的現象。
3. 第二臨界瑞里數  $Ra_0$  後，由吾人所建構的 Lorenz 模型所解出來的函數值隨著  $Ra$  的增加呈現單一週期的波動。並隨著  $Ra$  的增加而頻率逐漸縮小但振幅逐漸擴大，這個波動的波形亦不隨著瑞里數  $Ra$  的增加有其他變化情形。
4. 固定半徑比  $\eta$  下，臨界瑞里數  $Ra_c$  發生的大小隨著普朗特數  $Pr$  的增加而增加，經比較得知吾人的模型在低的普朗特數  $Pr$  數下所做出來的臨界瑞里數  $Ra_c$  與文獻上的情形較為符合。

模型中發現非線性項係數的大小相較於其他線性項係數明顯小很多，這使得非線性系統對模型所造成的影響薄弱，造成不穩定情形只發生在低普朗特數  $Pr$  下的某些範圍內。這與使用 Chandrasekhar 函數所展開的  $\phi_1(r)$ 、 $\Phi_1(r)$  與  $\Phi_2(r)$  有關，因為這些函數的大小相對而言比起三角函數小很多，並且隨著半徑比  $\eta$  的增加差距愈大。



## 参考文献

1. W. Beckmann, 1931, "Die Wärmeübertragung in zylindrischen Gasschichten natürlicher Konvektion", *Forsch. Geb. d. Ingenieurwesen*, 2(5), pp.165-178.
2. L. Crawford and R. Lemlich, 1962, "Natural convection in horizontal concentric annuli", *I.E.C. Fund. 1*, pp.260-264.
3. M. R. Abbott, 1964, "A numerical method for solving the equations of natural convection in a narrow concentric cylinder annulus with a horizontal axis", *Q. Jl Mech. Appl. Math.* pp.471-481.
4. R. E. Powe, C. T. Carley and S. L. Carruth, 1971, "A numerical solution for natural convection in cylinder annuli", *International Journal of Heat Transfer*, Vol.93, pp.210-220.
5. T. H. Kuehn and R. J. Goldstein, 1976, "An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.74, pp.695-729
6. M. C. Charrier-Mojtabi and A. Mojtabi, J. P. Caltagirone, 1979, "Numerical solution of a flow due to natural convection in horizontal cylinder annulus", *Journal of Heat Transfer*, Vol.101, pp.171-173.
7. J. P. Gollub and S. V. Benson, 1980, "Many routes to turbulent convection", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.100, pp.449-470.
8. Y. Lee and S. A. Korpela, 1983, "Multicellular natural convection in a vertical slot", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.126, pp.91-121.
9. F. H. Busse, 1981, "Transition to turbulence in Rayleigh-benard

convection”, in: H. L. Swinney, J. P. Gollub(Eds.). *Topics in Applied Physics, Vol.45, Springer-Verlag, 97-137.*

10. Y. T. Tsui and B. Tremblay, 1984, “On transient natural convection heat transfer in the annulus between concentric horizontal cylinders with isothermal surfaces”, *International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 27, pp.103-111.*
11. Y. F. Rao, Y. Miki, K. Fukuda, Y. Takata and S. Hasegawa, 1985, ”Flow patterns of natural convection in horizontal cylinder annuli”, *International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 28, pp.705-714.*
12. M. K. Dyko, K. Vafai, and A. K. Mojtabi, 1999, “A numerical and experimental investigation of stability of natural convection flows within a horizontal annulus”, *Journal of Fluid Mechanics, Vol.381, pp. 27-61.*
13. J. Y. Choi and M. U. Kim, 1993, “Three-dimensional linear stability of natural convection flow between concentric horizontal cylinders”, *International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 36, pp.4173-4180.*
14. P. Cadiou, G. Desrayaud and G. Lauriat, 1998, “Natural convection in a narrow horizontal annulus: The effects of thermal and hydrodynamic instabilities”, *Journal of Heat Transfer, Transactions ASME 120, pp. 1019-1025.*
15. Joo-Sik Yoo, 1998, “Natural convection in a narrow horizontal cylindrical annulus  $Pr \leq 0.3$ ”, *International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 41, pp.3055-3073.*
16. Joo-Sik Yoo, 1999, “Transition and multiplicity of flows in natural convection in a narrow horizontal cylindrical annulus  $Pr = 0.4$ ”,

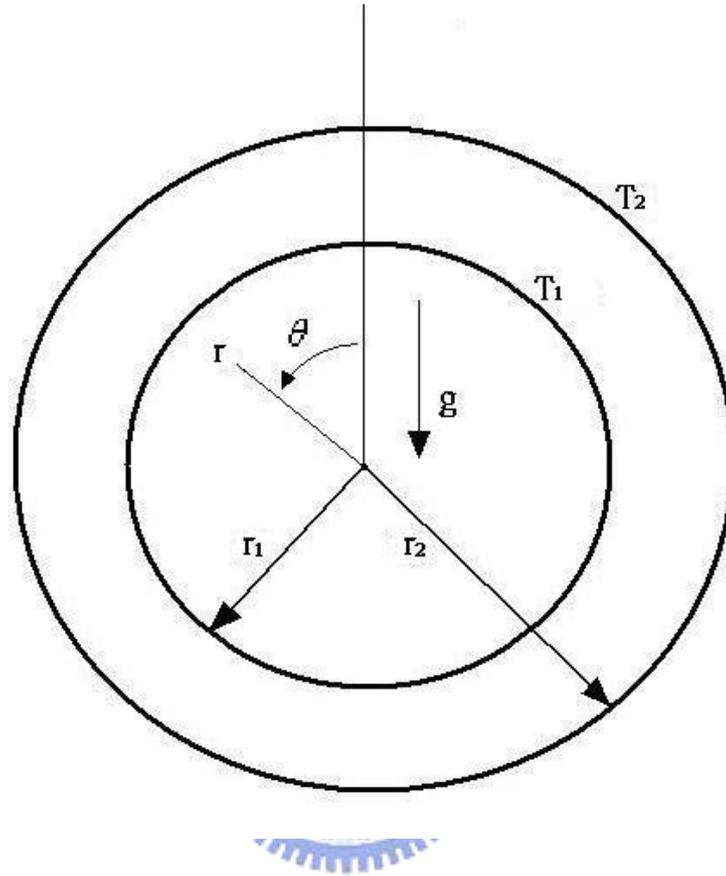
- International Journal of Heat and Mass Transfer* Vpl.42, pp.709-722.
17. J. Mizushima , S. Hayashi and T. Adachi, 2001, “Transitions of natural convection in a horizontal annulus”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*”, Vol.44, pp.1249-1257.
  18. Lorenz, E. N. 1963 Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* **20**, 130-141.
  19. Joo-Sik Yoo, 1996 “Dual steady solutions in nature convection between horizontal concentric cylinder”, *Int. J. Heat and Fluid Flow* , Vol.17, No.6
  20. F. A. Hamad and M. K. Khan, 1998, “Natural convection heat transfer in horizontal and inclined annuli of different diameter ratios”, *Energy Convers. Mgmt Vol. 39, No. 8, pp. 797-807.*
  21. Joo-Sik Yoo, 1999, ”Prandtl number effect on bifurcation and dual solutions in natural convection in a horizontal annulus”, *International Journal of Heat and Mass Transfer* Vpl.42, pp.3279-3290.
  22. Joo-Sik Yoo, 1999, “Prandtl number effect on transition of free-convective flows in a wide-gap horizontal annulus”, *Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol.26, No.6, pp.811-817.*
  23. Joo-Sik Yoo, 2003, “Dual free-convective flows in a horizontal annulus with a constant heat flux wall”, *International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.46, pp.2499–2503.*
  24. Chandrasekhar, S., 1961, “Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability”, 637-642.

$\eta$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$
0.5	4.7495	7.8699	3.1966	6.3123
0.65	4.7379	7.8598	3.1634	6.2943
0.75	4.7336	7.8561	3.1514	6.2881
0.85	4.7312	7.8541	3.1447	6.2848
0.9	4.7305	7.8536	3.1429	6.2838

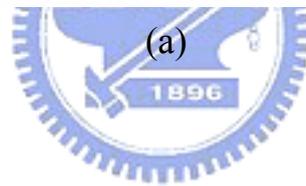
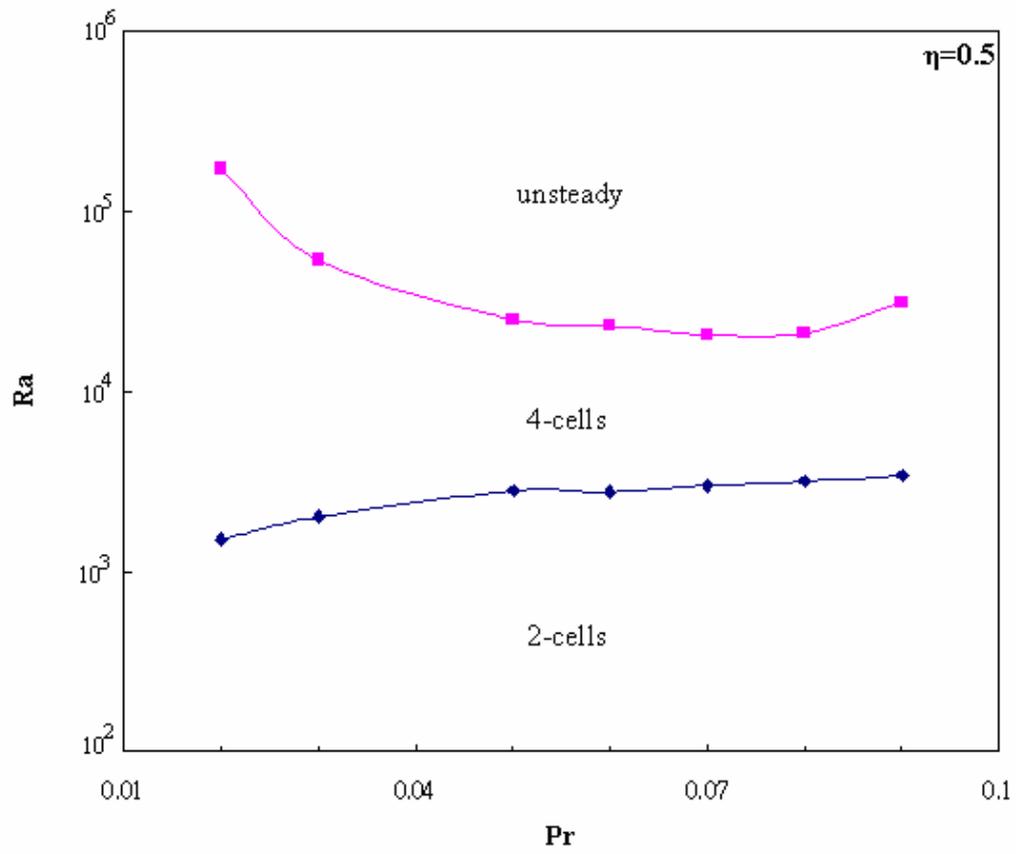
表一 不同半徑比 $\eta$ 所對應之特徵值 $\alpha$ 、 $\beta$ 。

	$\eta=0.5$	$\eta=0.65$	$\eta=0.75$	$\eta=0.85$
a1	1.5105196e-3	8.3243810e-6	1.3807562e-8	-5.9668725e-13
a2	-3.9380286e+1	-4.0162089e+1	-4.0449872e+1	-4.0577459e+1
a3	-1.5059819	5.8282392e+1	8.9195977e+3	1.5230933e+9
a4	1.1580179e+1	6.9401283e+2	1.5695355e+5	4.7617326e+10
a5	-1.4826765e+1	-1.1212021e+3	-3.0970934e+5	-1.2481121e+11
b1	-2.0388776e-3	-1.8792281e-5	-4.7384931e-8	-2.1581940e-11
b2	-5.8148493e+1	-9.3967672e+1	-1.4107332e+2	-2.4993819e+2
b3	-3.0996635	1.9861155e+2	-4.6045102e+4	1.4110635e+10
c1	-3.8182239e-25	8.6352365e-26	-1.2699431e-30	1.0199933e-31
c2	-1.0841603e-2	9.1757166e-5	-2.2420820e-7	3.1589123e-13
c3	-1.1342907e-2	1.2077091e-4	-3.6006815e-7	6.7377343e-13
c4	-1.0218114e+1	-1.0007014e+1	-9.9313225	-9.8893777
d1	1.0819384e-2	-9.1725660e-5	2.2419221e-7	-3.1588883e-13
d2	-1.6132570e-1	3.9959929e-2	-1.2028225e-2	2.1816970e-3
d3	-3.9355899e+1	-3.9431645e+1	-3.94576510e+1	-3.9471807e+1
d4	2.8719646e-1	1.4116253e-1	7.7104154e-2	3.2752662e-2
e1	-1.1856343e-4	-6.6791212e-7	-1.1152965e-9	-8.7700424e-16
e2	-9.7537722	-9.8238212	-9.8490333	-9.8630132
e3	-8.0828962e-2	1.9986247e-2	-6.0143779e-3	1.0917665e-3
e4	-2.3300917	1.8484810	-1.5141054	1.1395259

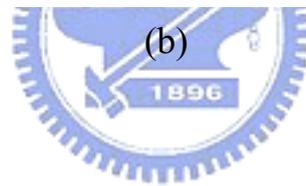
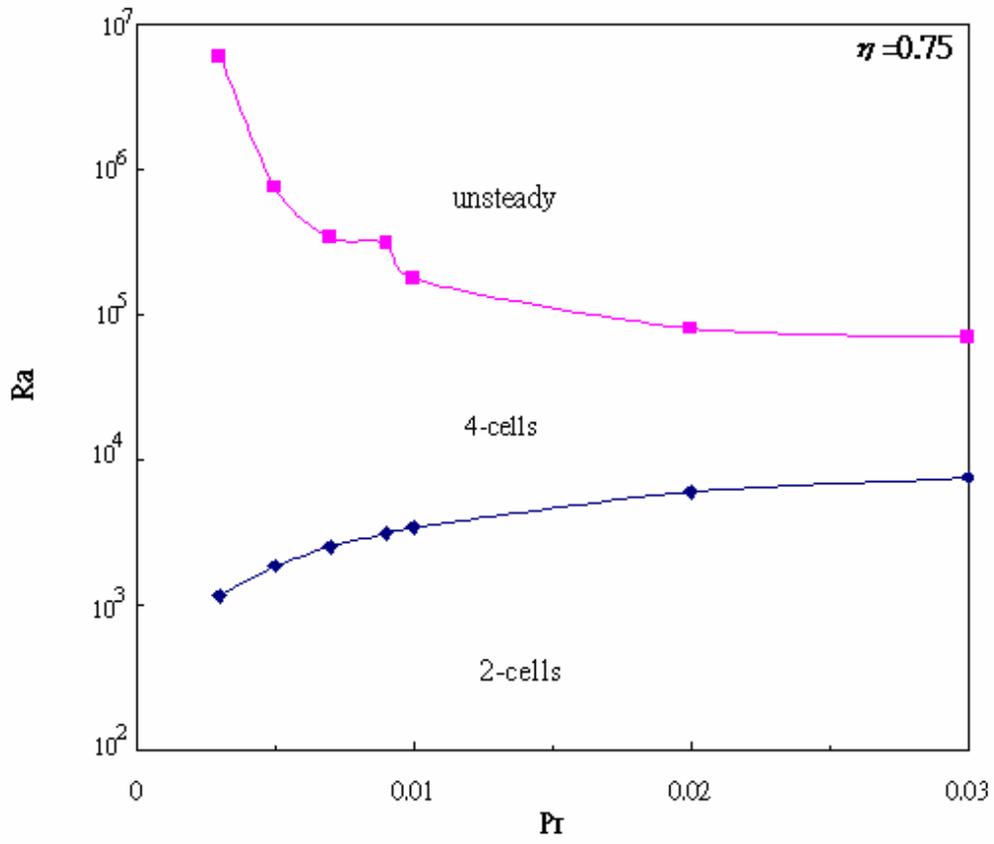
表二 Lorenz 模型之展開係數



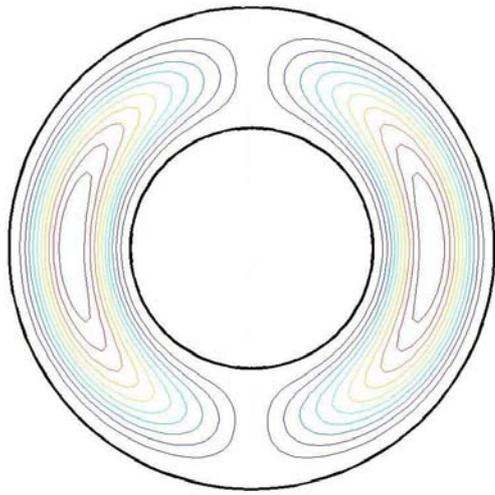
圖一 基本物理模式示意圖



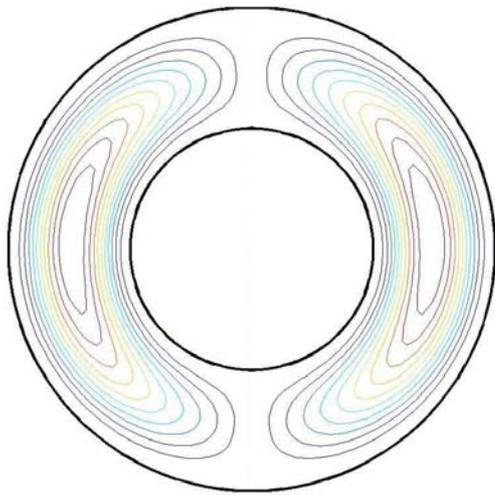
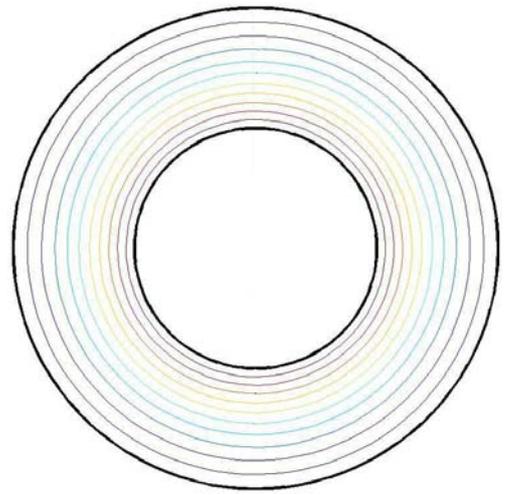
圖二 (a) $\eta=0.5$  (b) $\eta=0.75$  時，隨  $Pr$  改變所出現臨界瑞里數  $Ra_c$  以及到達第二臨界瑞里數  $Ra_0$  的位置。



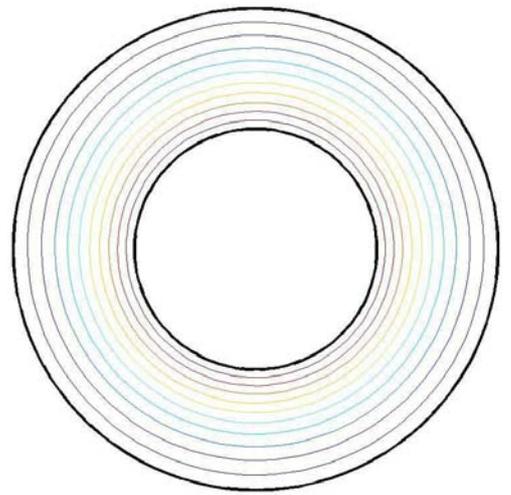
續



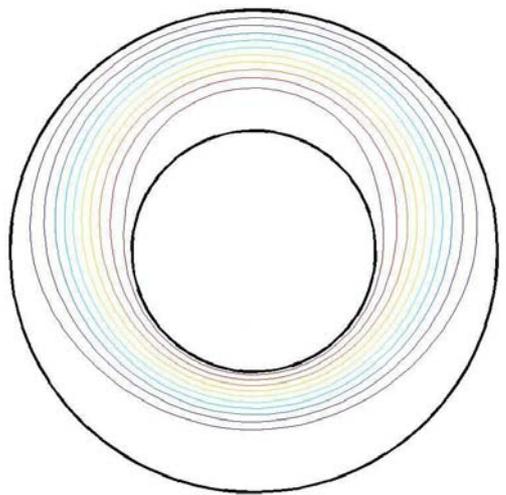
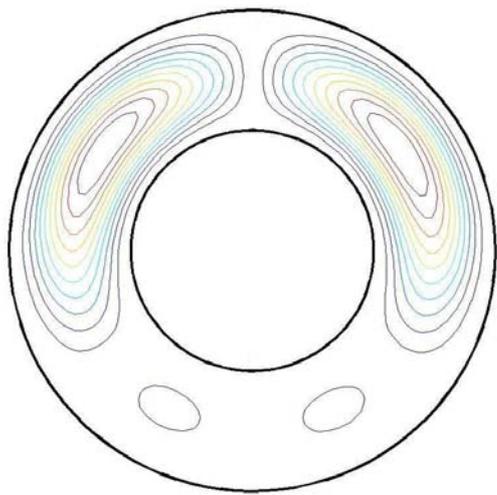
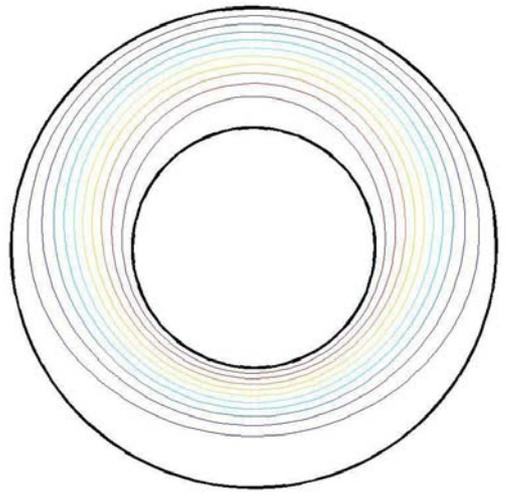
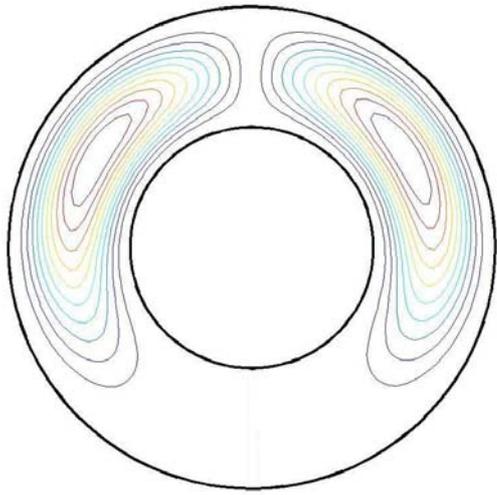
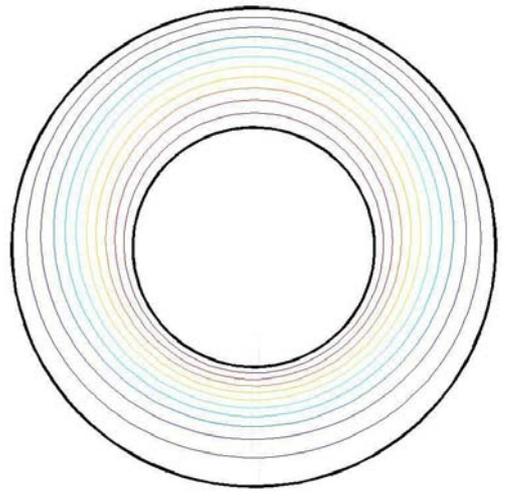
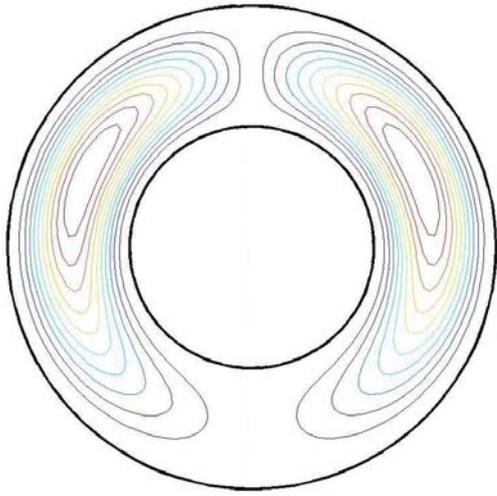
(a)



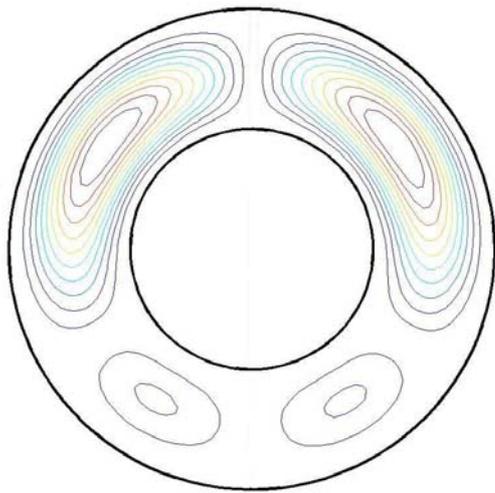
(b)



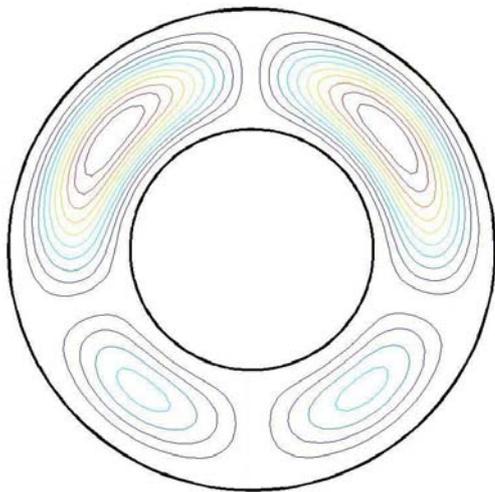
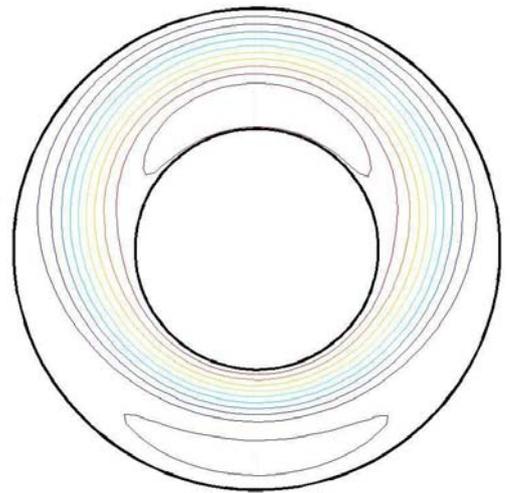
圖三 當  $\eta = 0.5$  ,  $Pr=0.05$  在內外圓柱具溫差條件下的流線圖(左)及其溫度分布圖(右) , (a)  $Ra=10$  (b)  $Ra=100$  (c)  $Ra=1000$  (d)  $Ra=2000$  (e)  $Ra=3000$  (f)  $Ra=4000$  (g)  $Ra=8000$  (h)  $Ra=20000$  。



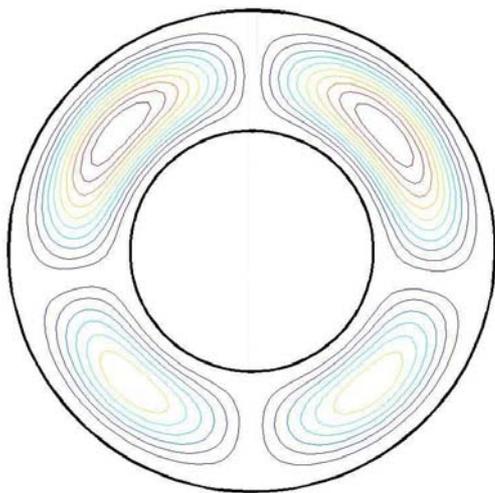
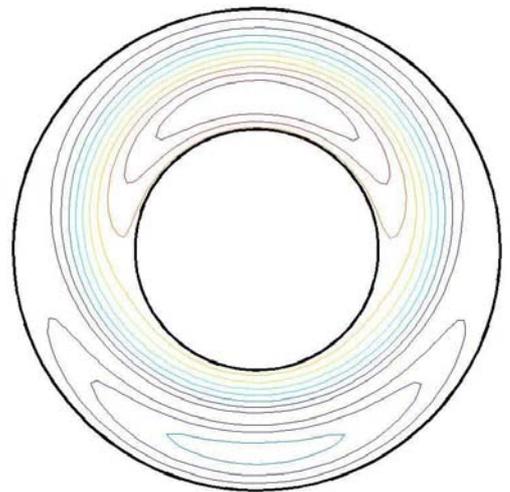
續



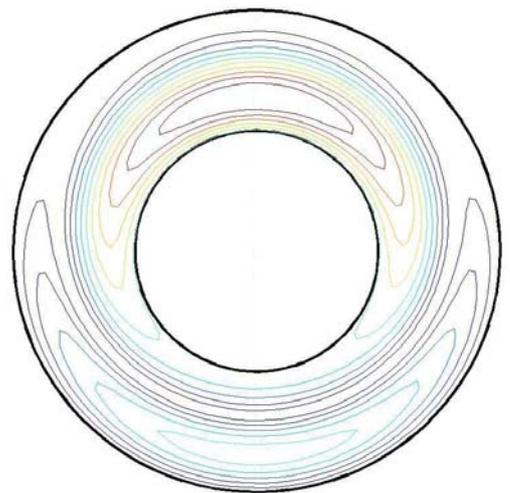
(f)



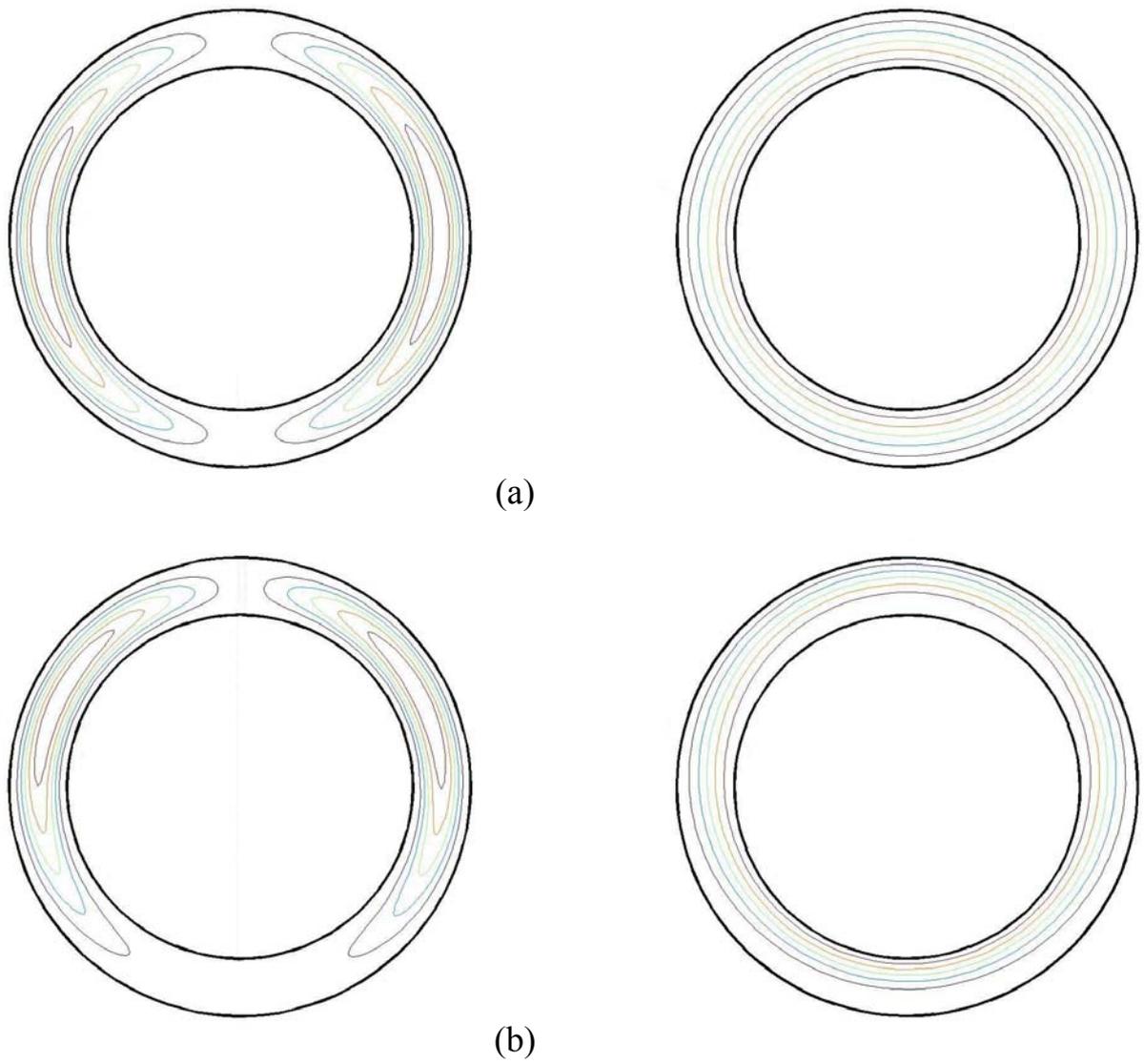
(g)



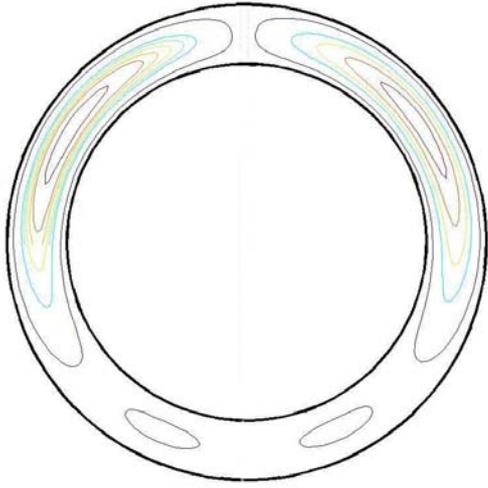
(h)



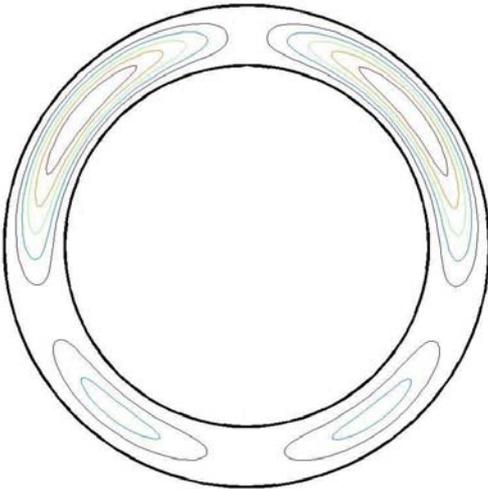
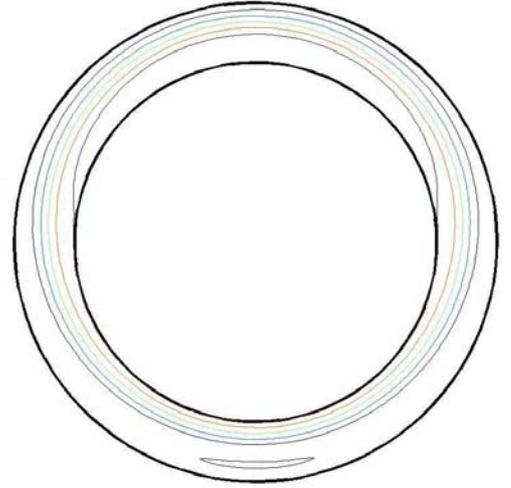
續



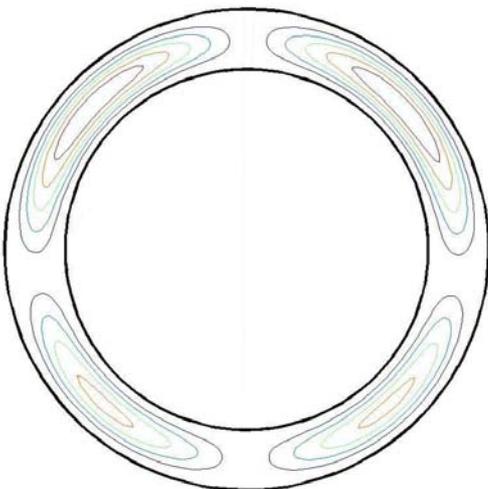
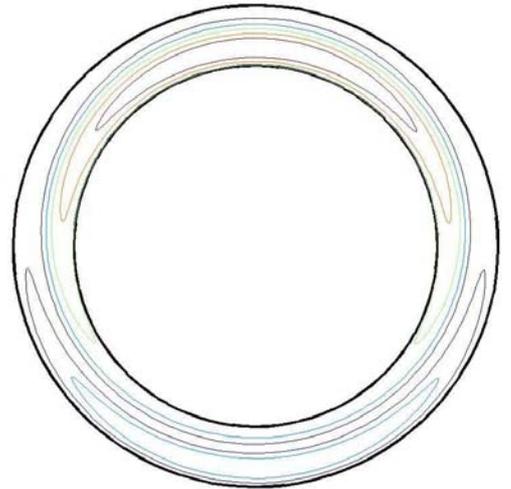
圖四 當  $\eta = 0.75$  ,  $Pr=0.03$  在內外圓柱具溫差條件下的流線圖(左) 及其溫度分布圖(右) , (a)  $Ra=100$  (b)  $Ra=4000$  (c)  $Ra=8000$  (d) $Ra=20000$  (e)  $Ra=60000$  。



(c)

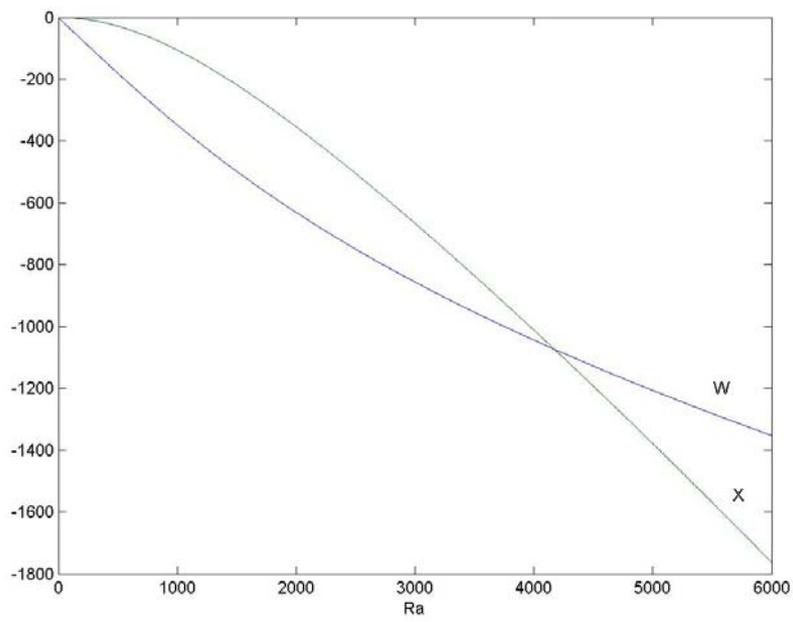


(d)

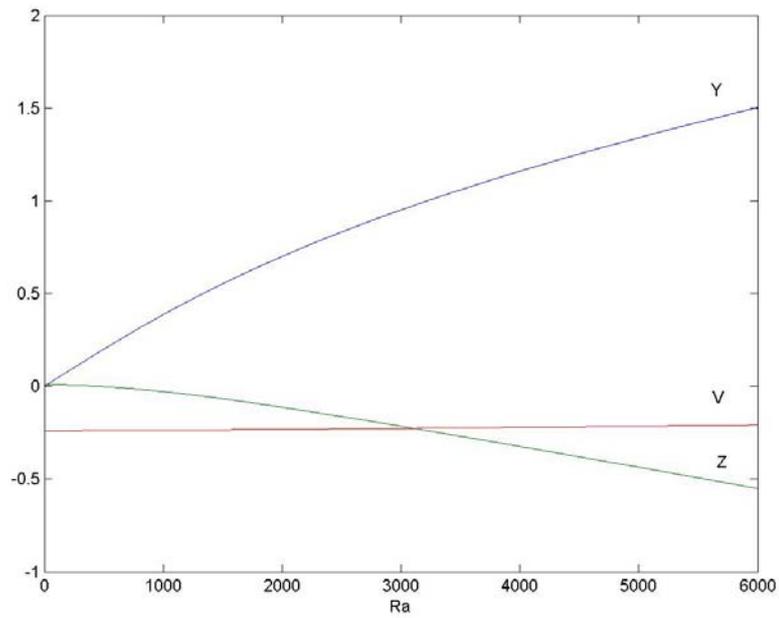


(e)

續

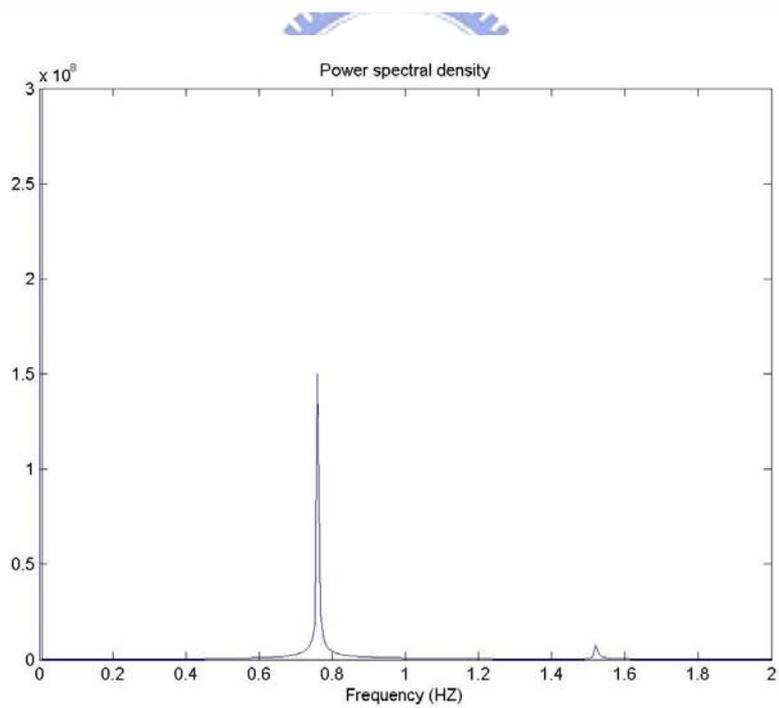
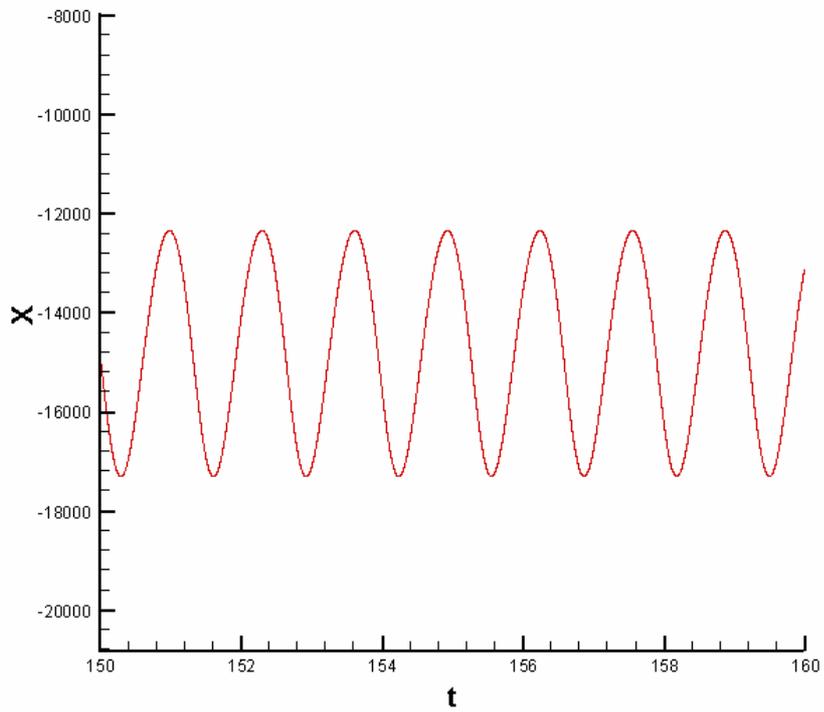


(a)



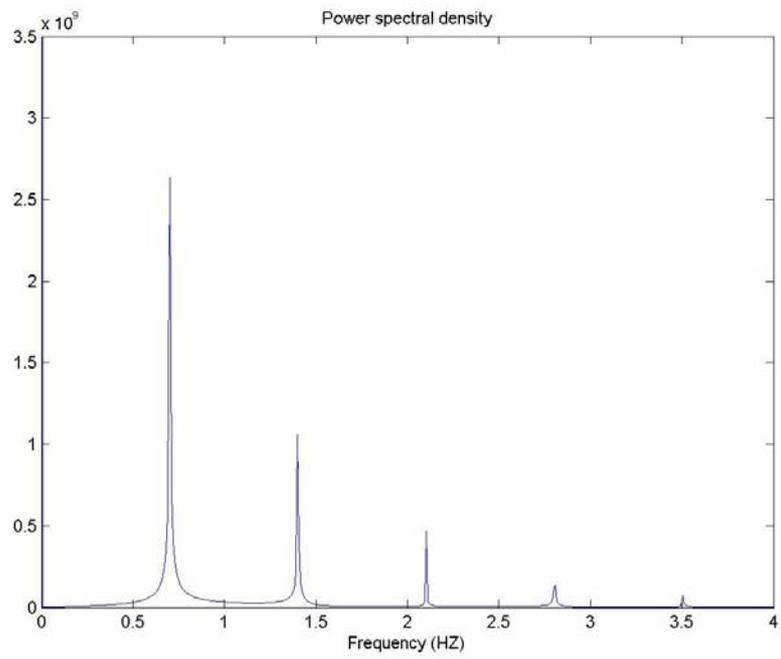
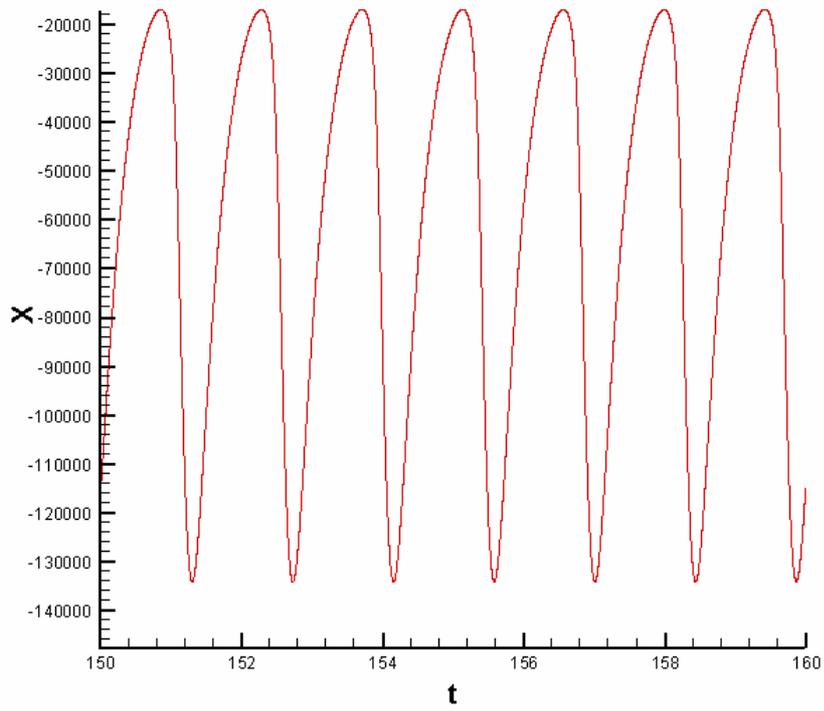
(b)

圖五  $\eta=0.5$ ， $Pr=0.05$  時在穩定狀態下，由 Runge-Kutta 法所解出來各函數隨 Ra 值的變化圖。



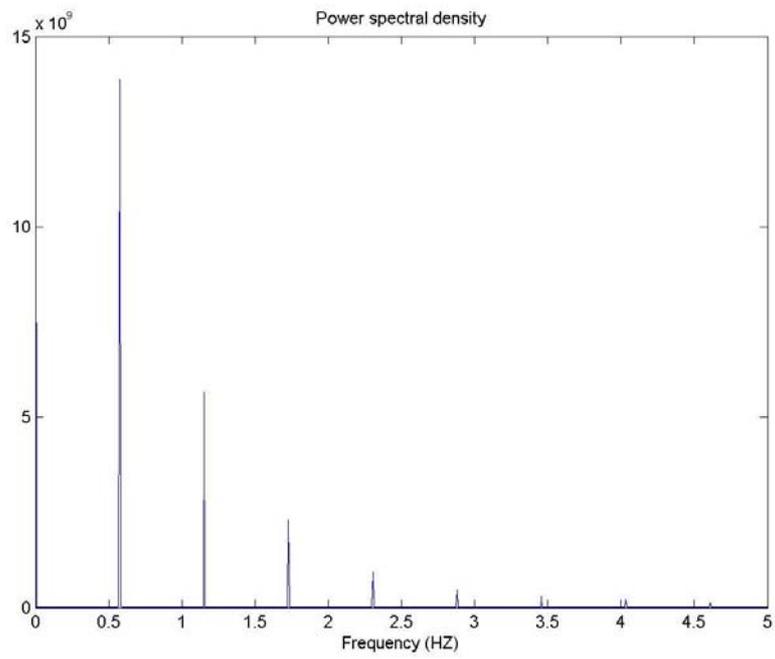
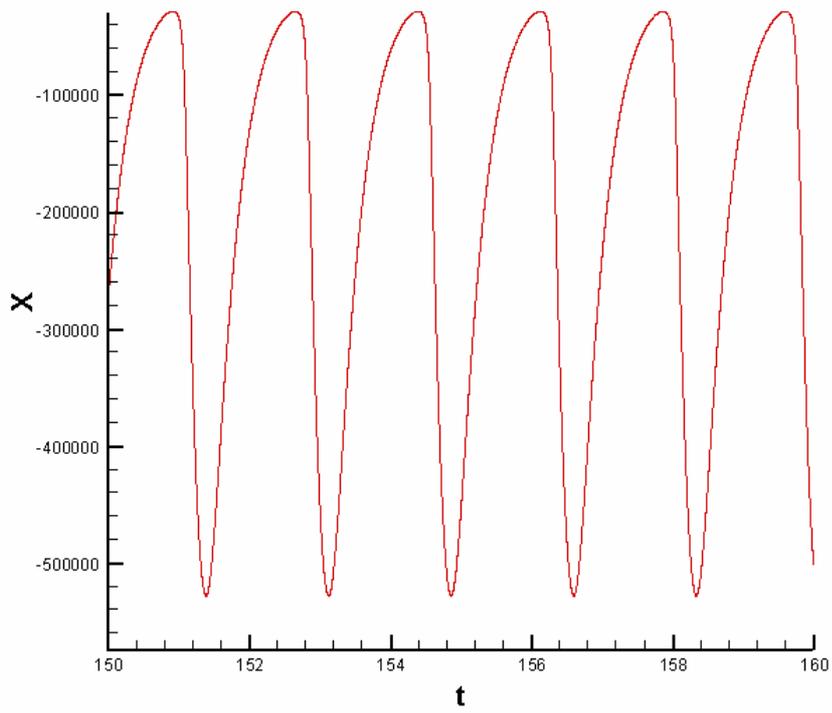
(a)

圖六 當  $\eta = 0.5$ ,  $Pr = 0.05$  在內外圓管具溫差條件下的時間級數圖(上)及其頻譜圖(下), (a)  $Ra = 29000$  (b)  $Ra = 60000$  (c)  $Ra = 100000$ 。



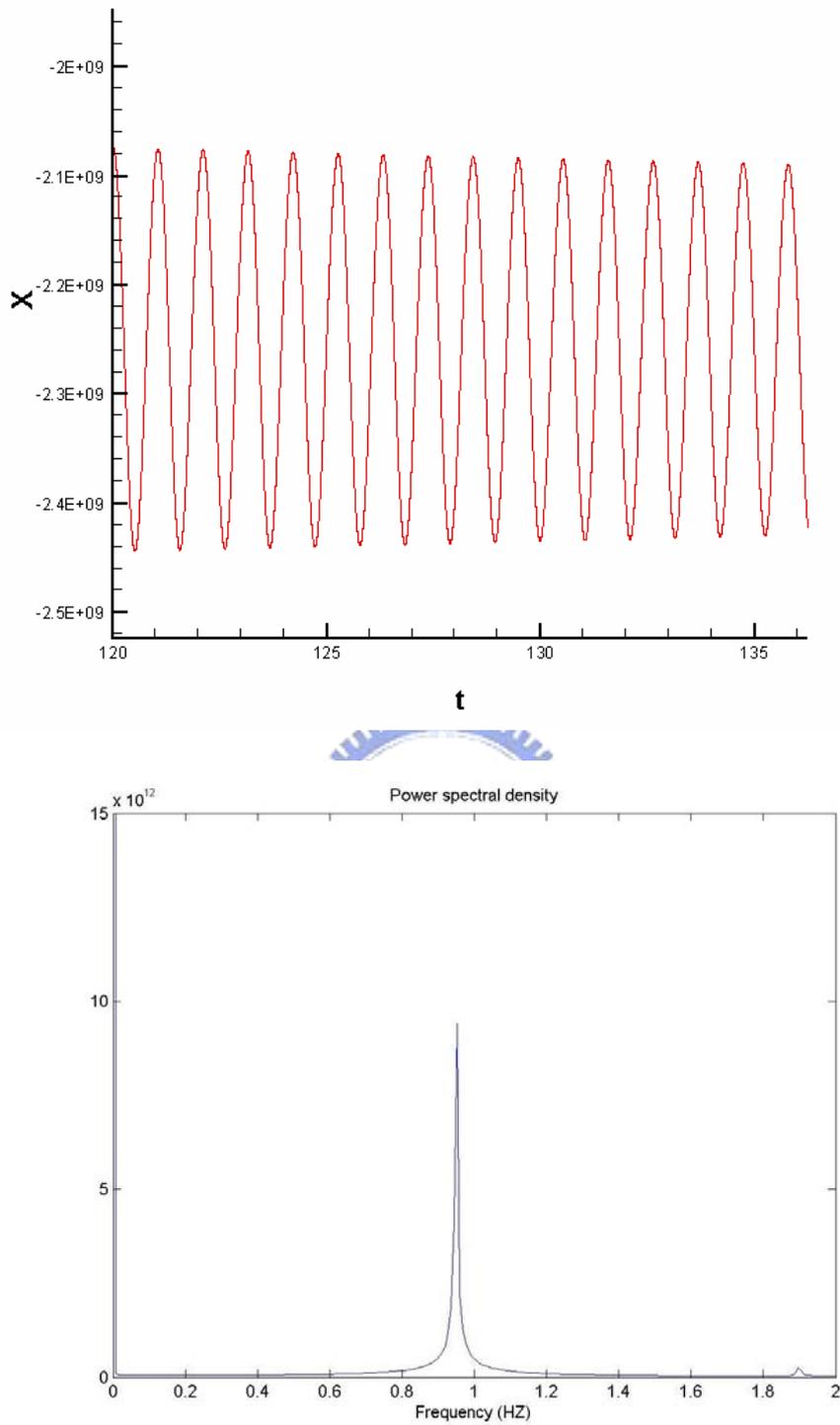
(b)

續



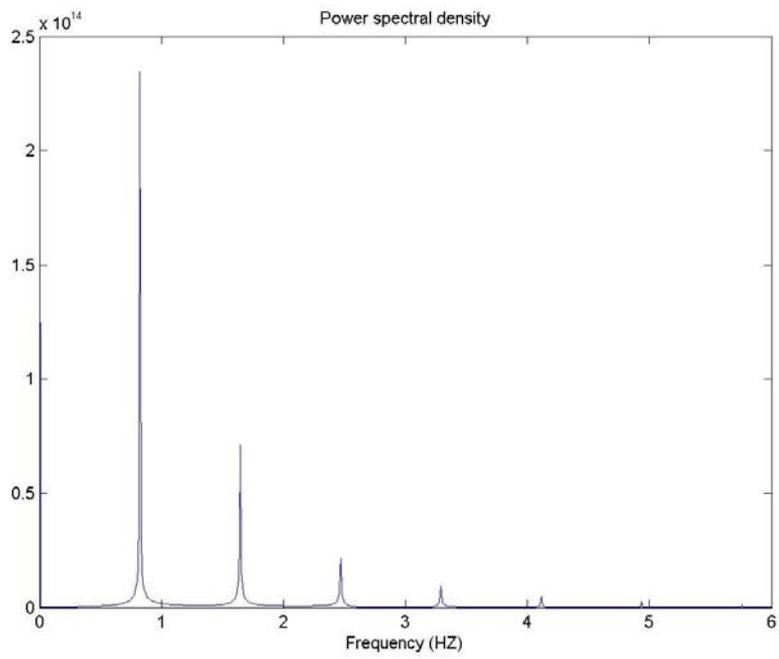
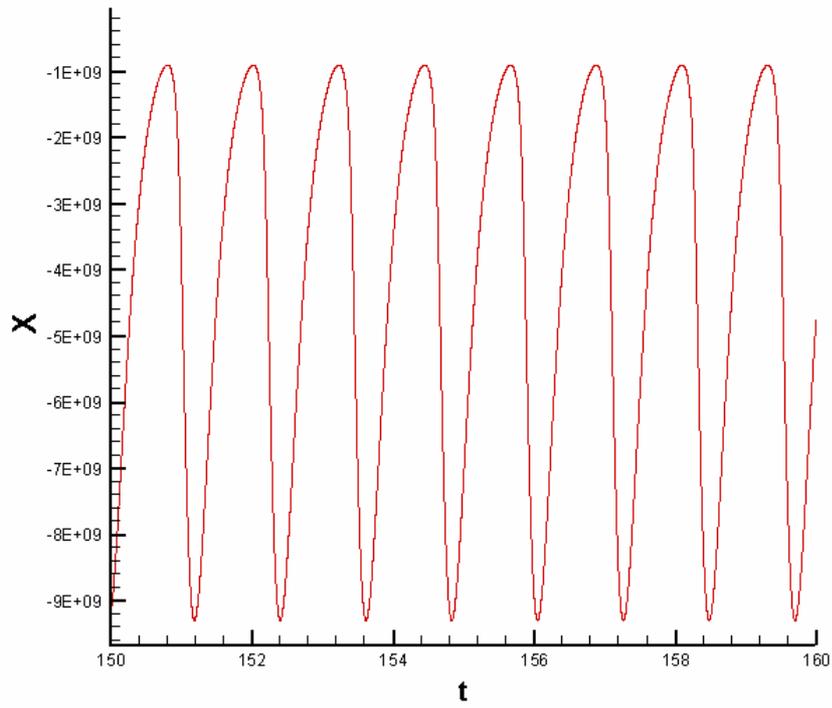
(c)

續



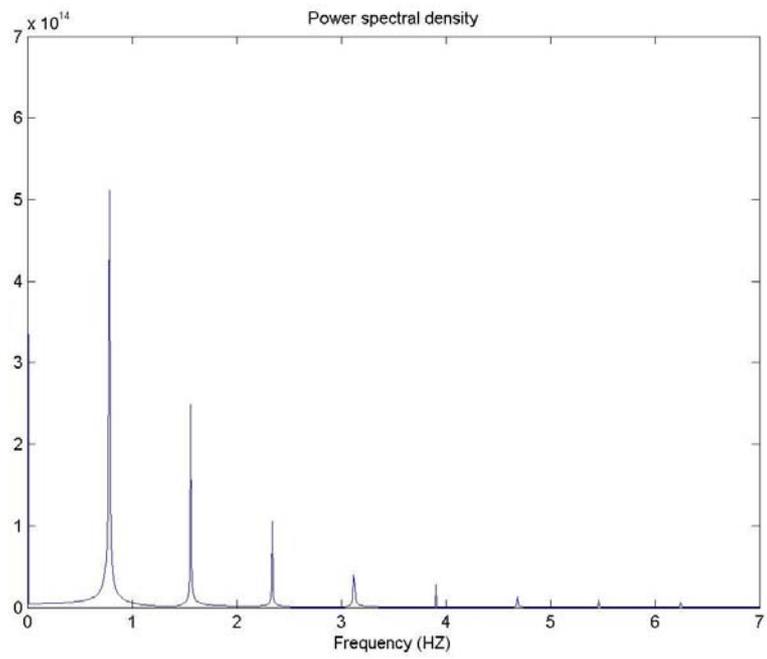
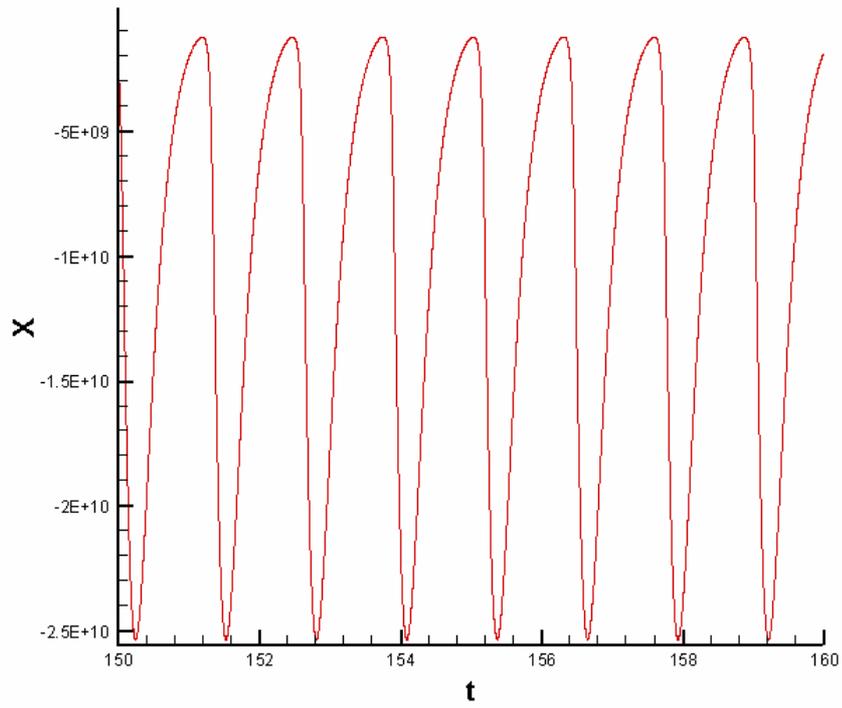
(a)

圖七 當  $\eta=0.75$  ,  $Pr=0.03$  在內外圓管具溫差條件下的時間級數圖 (上)及其頻譜圖(下), (a)  $Ra=77000$  (b)  $Ra=120000$  (c)  $Ra=200000$  (d)  $Ra=300000$  。



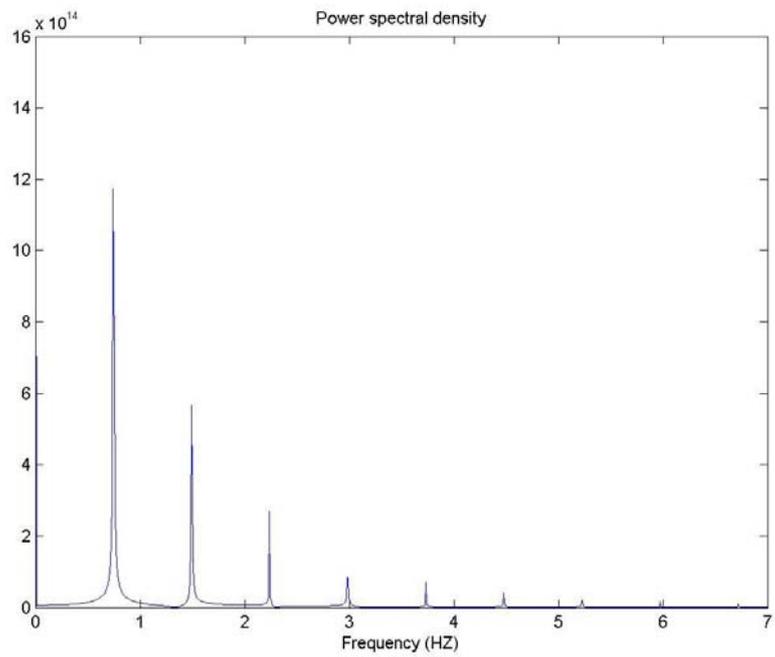
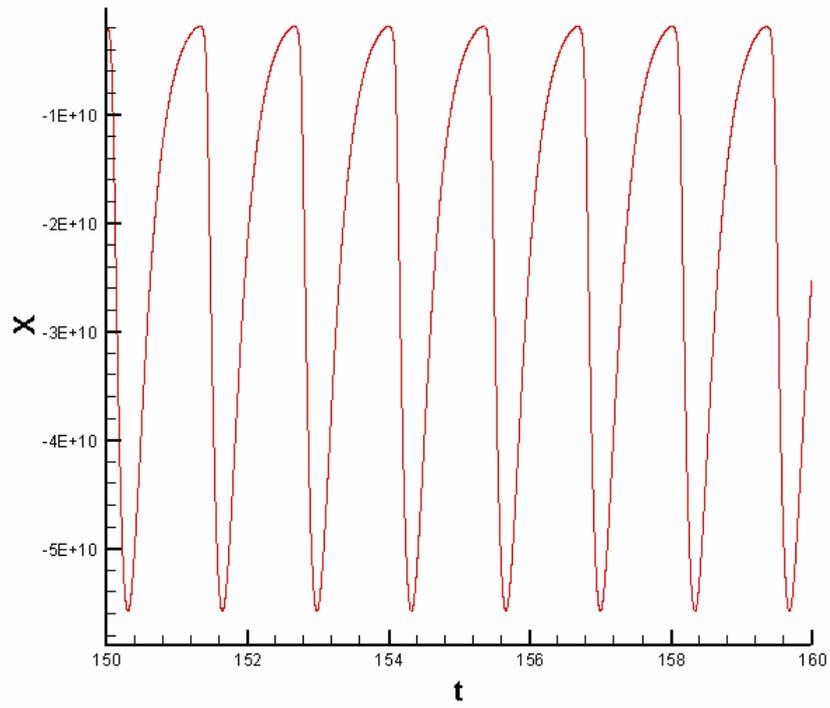
(b)

續



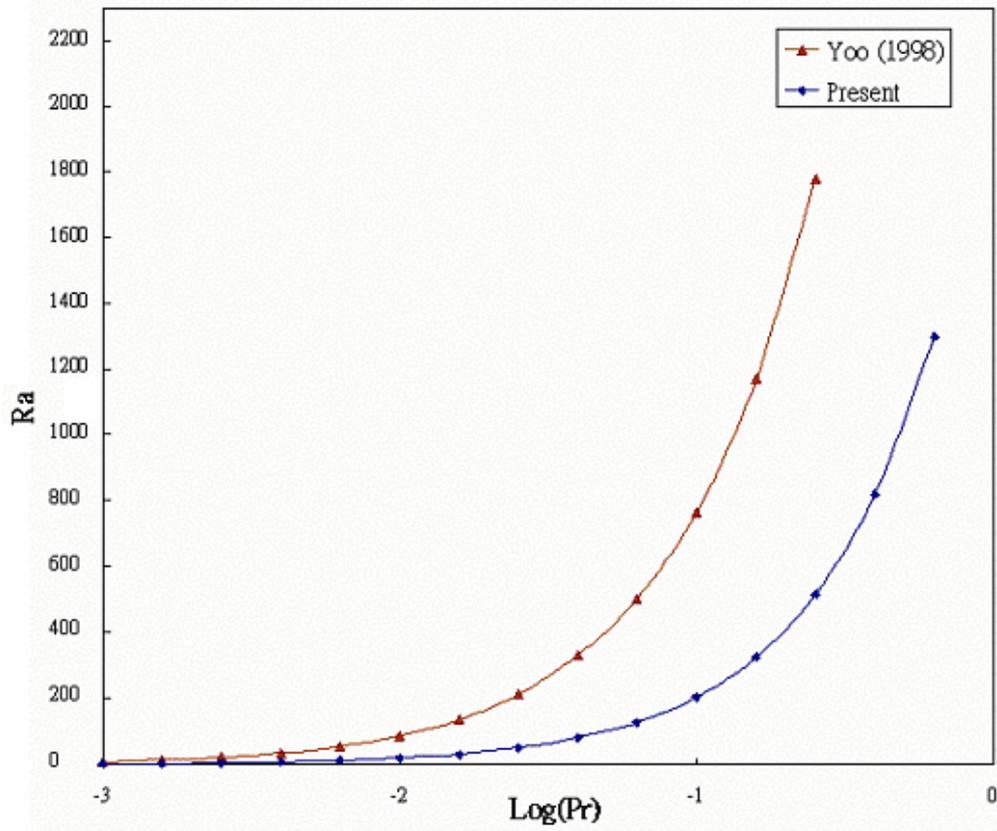
(c)

續

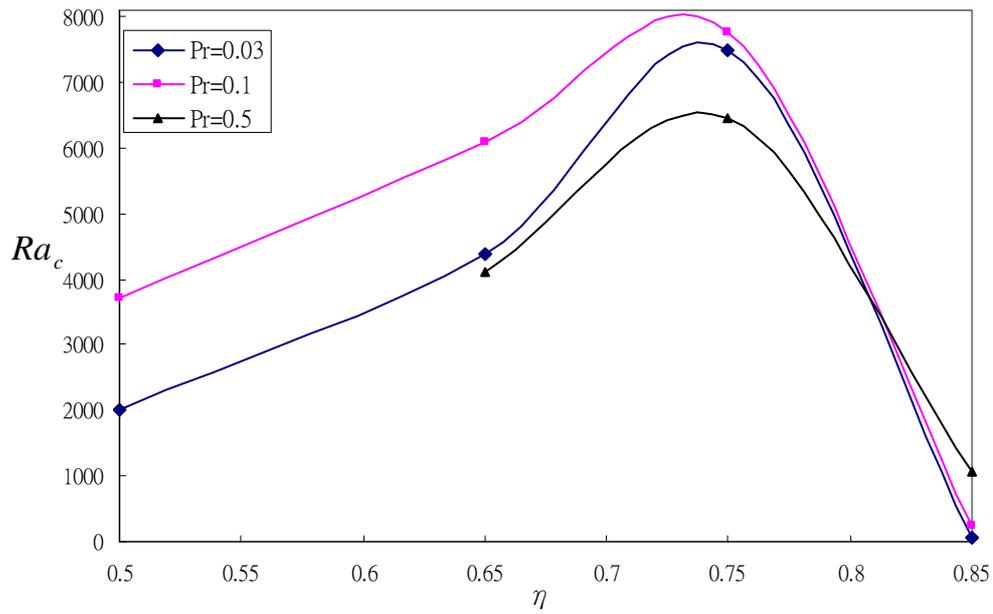


(d)

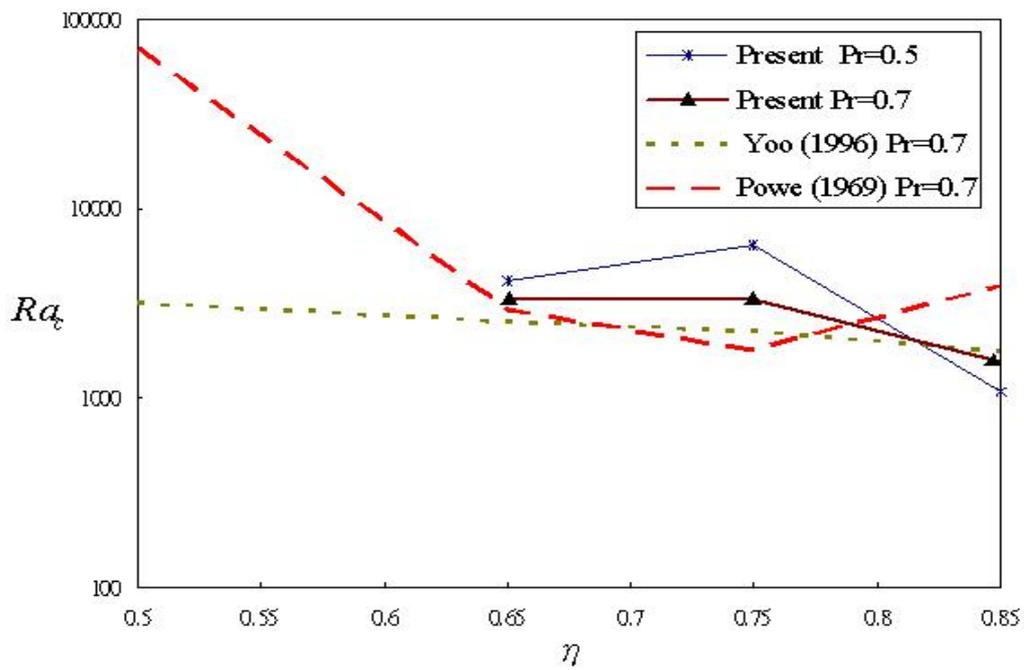
續



圖八  $\eta=0.85$  時在不同的  $Pr$  下，水平同心圓管在穩定解範圍內所發生 2-渦旋轉 4-渦旋的臨界瑞里數  $Ra_c$  對照圖。



(a)

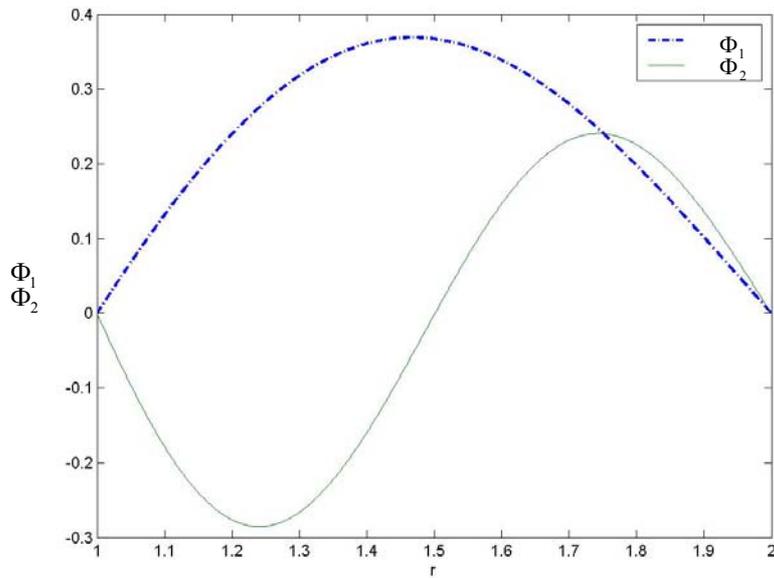
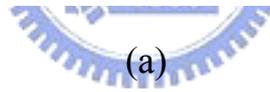
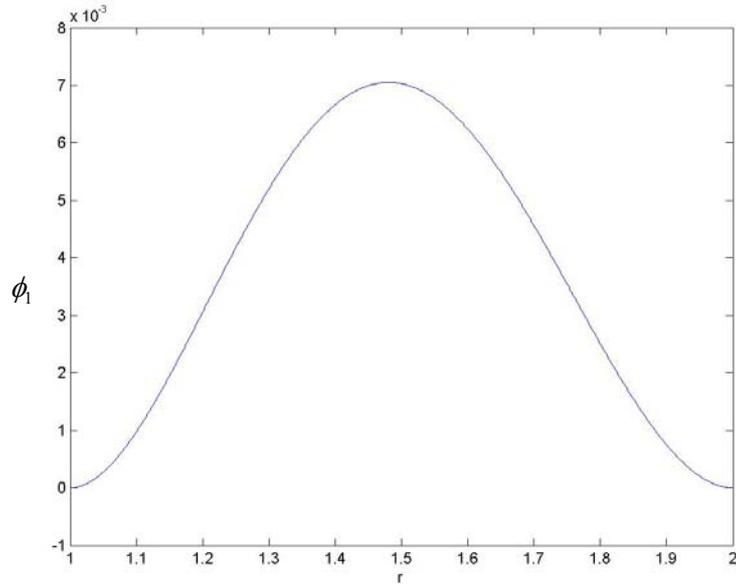


(b)

圖九 (a)在固定 Pr 之下，不同的半徑比  $\eta=0.5$ 、 $0.65$ 、 $0.75$  及  $0.85$  所出現臨界瑞里數  $Ra_c$  之位置圖。(b)在  $Pr=0.7$  時，與 Yoo 及 Powe 的  $Ra_c$  對照圖。

# 附 錄 一

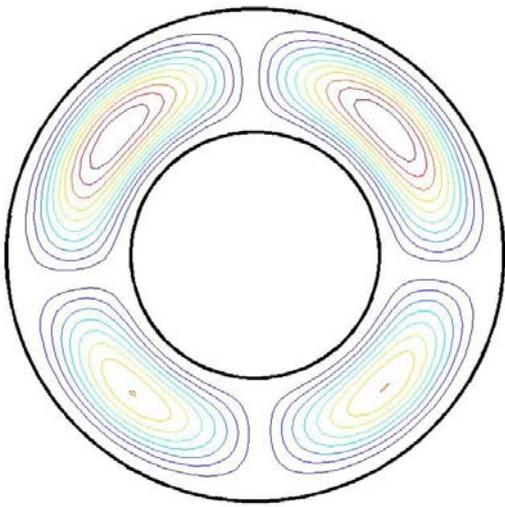
以下圖中分別表示在半徑比 $\eta=0.5$ 時， $\phi_1(r)$ ， $\Phi_1(r)$ 與 $\Phi_2(r)$ 分別的關係圖，其中在 $r$ 範圍部份是由 $\frac{\eta}{1-\eta}$ 到 $\frac{1}{1-\eta}$ 之間。



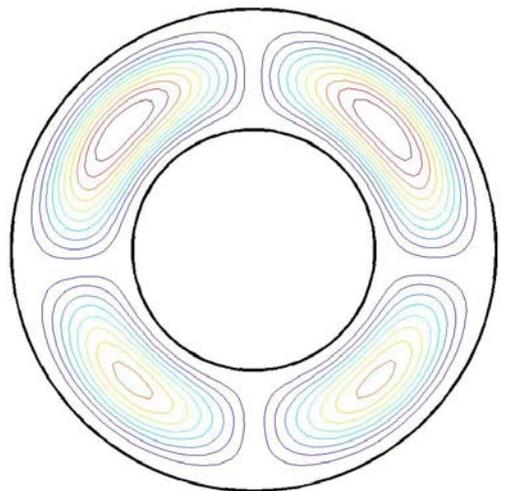
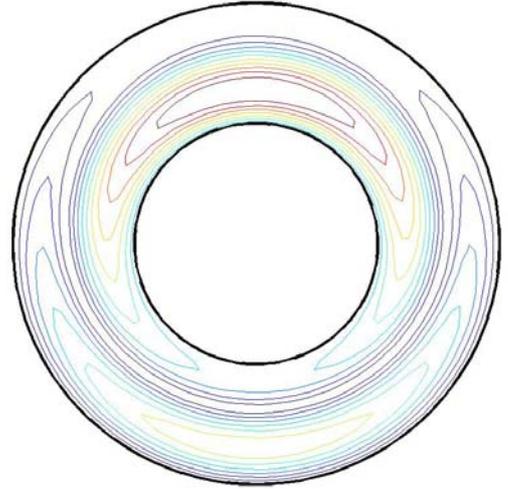
(b)

## 附 錄 二

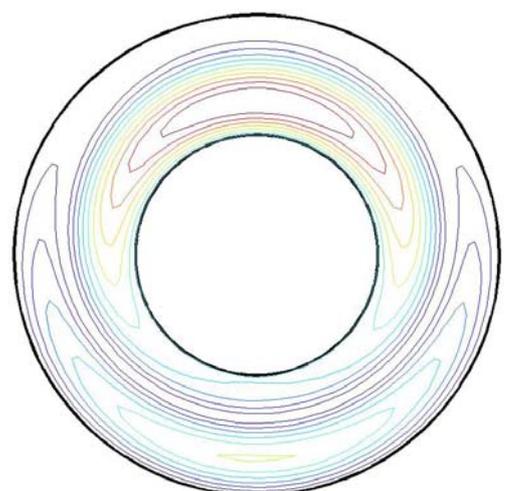
下圖表示當  $\eta=0.5$ ， $Pr=0.05$ ， $Ra=29000$  為超過第二臨界瑞里數後在半週期內的流線圖(左)及其溫度分布圖(右)，(a)  $t=128.041$  (b)  $t=128.272$  (c)  $t=128.503$  (d)  $t=128.734$ 。

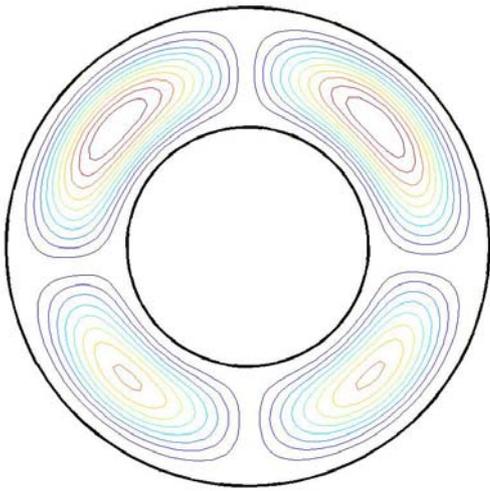


(a)

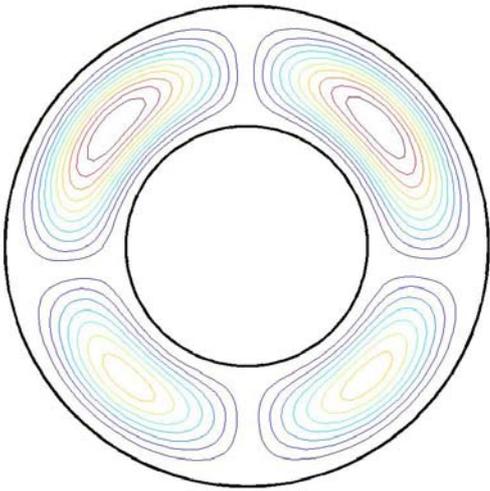
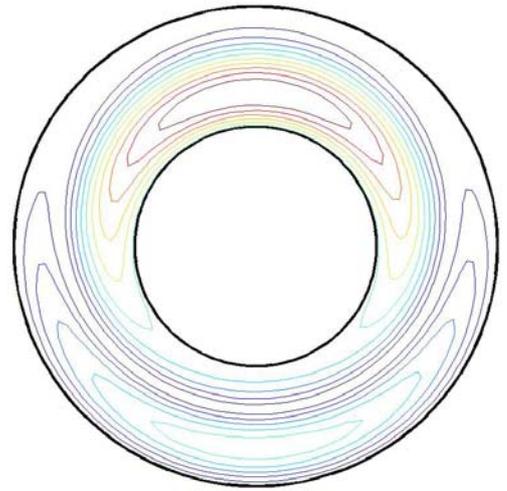


(b)

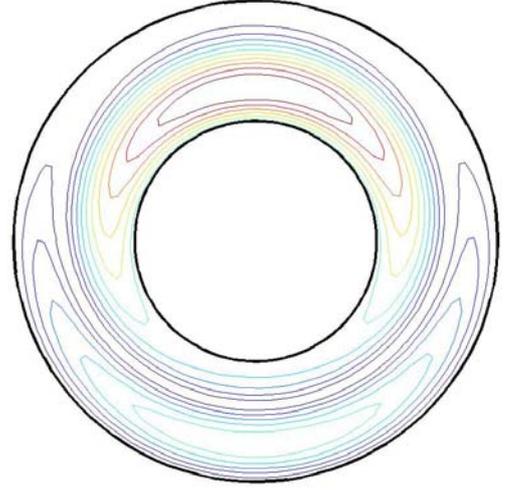




(c)



(d)



續