

國立交通大學
機械工程學系碩士班
碩士論文

壓電板表面交指叉換能器激發藍姆波
的模擬分析



Modeling of Lamb Waves Excited by Interdigital Transducers
Deposited on Piezoelectric Plates

研究生：楊秋華

指導教授：尹慶中 博士

中華民國九十三年七月

壓電板表面交指叉換能器激發藍姆波的模擬分析

研究生：楊秋華

指導教授：尹慶中 博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘 要

本文探討表面交指叉換能器在厚度模式及厚度剪切模式壓電陶瓷平板中激發的藍姆波，數值計算時、頻域響應及其波傳特性。依據 Engan (1969) 求解半無限域表面交指叉換能器電場強度的方法，以級數解與雷見德函數近似壓電平板表面電極之驅動電位，作為外加激發源的電性邊界條件，求解考慮壓電材料機電耦合效應的板波波傳響應。應用修正 Clenshaw-Curits 數值積分計算交指叉電極激發之壓電平板藍姆波位移之頻域響應，以反快速傅立葉方法轉換成時域響應。厚度模式壓電平板所激發的 S_0 藍姆波的振幅幾乎與 A_0 藍姆波響應一般大，這是施加表面曳力激發藍姆波方式無法比擬。本文並討論不同電極數目及寬度之交指叉換能器生成的近場與遠場藍姆波響應。

Modeling of Lamb Waves Excited by Interdigital Transducers Deposited on Piezoelectric Plates

Student : Chiu-Hua Yang

Advisor : Dr. Ching-Chung Yin

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The thesis presents a study on Lamb waves excited by the interdigital transducers deposited on piezoelectric ceramic plates in thickness mode and thickness shear mode. The Lamb wave response in frequency and time domains are evaluated numerically. Based on the approach provided by Engan (1969) on electric field from a surface wave interdigital transducer with small piezoelectric coupling assumption, the electric field induced by the interdigital transducer on piezoelectric plates is solved and expressed in a series with the coefficients containing Legendre functions. The approximate electric potential on surface is employed as the continuous boundary conditions to evaluate the Lamb wave response generated in the piezoelectric plates. Computation of the frequency response of Lamb waves from interdigital transducer is carried out through a one-dimensional wave number integration using a modified Clenshaw-Curits numerical scheme. The time domain responses are calculated from frequency responses through the inverse fast Fourier transform. The S_0 mode excited by interdigital transducer has response as large as the A_0 mode in piezoelectric plate of thickness mode. It is seldom found in the plate excited by time-variation of surface traction. The Lamb wave responses due to different numbers and widths of surface interdigital transducers are also investigated.

誌 謝

在此篇論文定稿之時，感謝指導教授 尹慶中博士兩年來悉心指導，使學生論文得以順利完成，在此致上由衷的謝意。同時感謝蕭國模老師、楊哲化老師及何旭川老師撥空擔任學生口試委員，給予學生指教與指正。

感謝學長王多聞、游泰和、許世明及劉育翔提供秋華在生活上及學習上寶貴經驗，讓秋華視野更加的廣闊。同學羅世青、徐家保、張朝雯、黃仁傑兩年來互相的扶持、幫助及鼓勵，喜怒哀樂一路相隨，這份情誼秋華將謹記在心，也祝福你們畢業後順利朝理想邁進。學弟許家豪、孫繼增、黃俊傑及蔡德新過去一年謝謝你們的陪伴，讓秋華的研究生活增色不少，也在此祝福你們論文順利。

最後感謝好友蔣竣凱兩年來的關心，讓秋華總是能保持較佳狀態；父母多年來之悉心照顧及奉獻，給予秋華無限之關懷及支持，讓秋華無後顧之憂得以順利完成學業。僅以此論文獻給我摯愛的父母及朋友，再次謝謝你們，謝謝。



目 錄

	頁次
中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖表目錄	vi
第一章 緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 內容簡述	3
第二章 壓電平板交指叉電極之電位分析	5
2.1 壓電效應	5
2.2 壓電本構方程式	5
2.3 電位分析	8
2.3.1 厚度模式	9
2.3.2 厚度剪切模式	14
第三章 單層壓電板藍姆波波傳行為	17
3.1 壓電平板的藍姆波波傳	17
3.1.1 克里斯多福方程式	17
3.1.2 藍姆波頻散方程	19
3.2 交指叉換能器激發之藍姆波	21
第四章 數值分析與討論	27
4.1 壓電平板藍姆波之頻譜響應	27
4.1.1 核函數特性	27
4.1.2 波數積分	27
4.1.3 表面位移之頻域響應	30
4.2 壓電平板藍姆波表面位移之時域響應	31



4.2.1 激發源函數	31
4.2.2 電極數目之影響	31
4.2.3 電極寬度之影響	33
第五章 結論與展望	34
參考文獻	36
附錄 A	38
附錄 B	41
附錄 C	43
附表	45
附圖	47



第一章 緒論

1.1 研究背景

壓電材料為一具有機電耦合效應之材料，早在 1880 年，法國人居禮兄弟(Pierre Curie and Jacques Curie)發現石英晶體受壓力時，表面會產生電荷，電荷與壓力成正比。直到 1916 年，石英才被成功的應用於聲納(sonar)系統上。壓電材料的能量密度高、能量衰減慢、反應快，故被應用作為精準的感測器、致動器或較微小之定位控制器上。在生物科技、通訊系統、航太、汽車工業、非破壞檢測及評估等領域中，具有很高的應用性。

近年來，結構健康監測(structural health monitoring, SHM)研究逐漸受到重視，可以提升結構的安全性及可靠度。結構健康監測是在結構表面黏貼圓形碟狀壓電片，激發結構應力波，主動偵測結構內部的損傷缺陷。由於壓電片激發之結構導波向四方傳遞，缺陷引起的散射波能量亦向四處消散，感測器接收的應力波訊號因此極微微弱。若以交指叉換能器(inter-digital transducer, IDT)激發結構導波，不僅能量集中於特定方向，還可以選擇特定波長，生成窄頻的結構導波，可以大幅度提升偵測缺陷的能力。

本文分析如圖 1-1 所示壓電平板表面之交指叉換能器，激發的板波波傳，壓電平板的極化方向分成垂直及水平兩種情況，前者稱為厚度模式(thickness mode)，後者稱為厚度剪切模式(thickness shear mode)，圖 1-1 所示之 P 符號為壓電板之極化方向。垂直極化壓電平板的電極依次分別接至正、負電位，平板底部的電極接地。水平極化壓電平板的電極，則依序分別接至正、負電位。如此，電場方向大部分與極化方向平行，機電耦合效應將會最強。若施加電壓具時諧特性，則材料會持續造成膨脹收縮，產生徹體波。徹體波在平板上下表面間多重反射，於厚度方向共振，形成藍姆波。

本研究分析厚度模式及厚度剪切模式壓電平板表面交指叉換能器激發之藍姆波，探討電性邊界條件、電極數目及寬度對於藍姆波表面位移響應

之影響。

1.2 文獻回顧

藍姆波係侷限於平板上下表面之間，在厚度方向共振之彈性波，因為在厚度方向維持共振模態，具有波傳距離長、衰減小等特性，對於厚度方向的缺陷偵測非常靈敏，廣泛應用於較大尺寸結構之超音波探傷。

1916年，Lamb [1]發現在自由邊界之等向性(isotropic)平板中，存在波長較長之藍姆波，分成對稱與反對稱兩種模態，並探討當頻率和厚度之乘積趨近於無限大時，藍姆波之特徵方程式會轉變為雷利波之特徵方程式。Synge [2]在1957年分析異向性(anisotropic)介質之波傳行為，亦得到當厚度趨近無限大時，半無限域表面會產生雷利波。

Nayfeh 和 Chimenti [3]於1989年分析異向性平板之波傳，並發現對高對稱性材料而言，如正交性(orthotropic)、橫向等向性(transversely isotropic)、立方堆積(cubic)等材料，當波沿著材料主軸傳遞時，面內波位移與面外波位移會呈現非耦合(decoupled)，如同等向性平板之波傳一般。許多學者曾於1980年代末至1990年代，密集探討藍姆波在複合層板中之波傳，應用於複材層板的非破壞評估。

Joshi 和 White [4]於1969年，計算交流電壓施於壓電材料表面週期性金屬電極所產生之電場，忽略材料機電耦合效應，並將其視為外加激發源，求解表面波的位移。並得知在電極寬度為相鄰電極節距(pitch)一半時，IDT之效能最好。同年，Engan [5]亦假設機電耦合較小之情況下，即忽略表面波產生之壓電效應，求出表面電極的電位可表示成雷見德(Legendre)函數。[4-5]都是利用雙重級數(dual series)，處理邊界值問題。

Parton *et al* [6]在1994年，利用雙重積分(dual integral)計算半無限域中，由一對表面電極激發之表面波位移。利用一次無因次化(normalized)及兩次變數變換，以減少符號複雜度，方便轉換雙重積分之上下限，並以應力強度因子(stress intensity factor)的大小，說明在施加多次電壓後，易於表面電極邊緣處，產生破壞之裂縫。

1991年, Jin 和 Joshi [7-8] 探討在 X-cut 鋰酸鋰及 128°Y-X cut 鋰酸鋰板中, 交指叉電極激發之藍姆波頻散關係。求解格林函數(Green's function), 計算交指叉換能器激發之位移。Rose *et al* [9]於 1998年, 利用實驗找出在當電極寬度為電極節距一半時, 交指叉換能器在金屬板中能獲得最好之響應。同年 Sun *et al* [10], 探討在不同電性邊界條下, 對稱與反對稱型態之藍姆波相速度會改變, 可用來作為判斷材料電性參數之依據, 並發現機電耦合因子(electromechanical coupling factor)與對稱電性邊界條件之藍姆波相速度有關。

2003年, Jin *et al* [11]分析壓電材料之 IDT 換能器在金屬基板(host plate)上激發藍姆波之波傳行為, 此模型將 IDT 與壓電板當一致動器, 在壓電板下之金屬板產生藍姆波, 可以對於不同材料的平板作探傷之應用。聲場分為近場及遠場分別計算, 近場是指 IDT 換能器與基板結合處, 求解基板響應的解析解, 遠場係依據近場計算的結果, 以互置理論(reciprocal theorem)及模態展開法(normal mode expansion)而得。

波傳頻域響應計算通常會採用反傅立葉積分轉換, 即所謂的波數積分(wavenumber integral), 波傳函數 $\exp(ikx)$ 會因波數逐漸增加而發生強烈振盪, 數值積分需要特別處理。Dravinski 和 Mossessian [12]在 1988年, 曾比較波數積分的幾種數值方法, 如: Clenshaw-Curits 積分、Gauss 積分、曲線(spline)及多項式積分, 求解瑕積分(improper integration)之精確度, 其中以 Clenshaw-Curits 積分為最有效率之數值積分。1992年, Lih 和 Mal [13]發展一改良式 Clenshaw-Curits 之數值積分, 求解複材表面承受暫態集中點負載及均佈負載時, 複材板表面位移之頻域響應, 再利用反快速傅立葉轉換(fast Fourier transform, FFT)計算時域訊號。

1.3 內容簡述

本文共分為五章。第二章介紹基本壓電效應及本構方程式, 其後則求解在忽略機電耦合效應下, 表面交指叉電極在垂直及水平極化壓電平板中之電場分析。第三章分為兩小節, 第一小節探討分別在短路(short circuit)及

開路(open circuit)對稱電性邊界條件下，求解藍姆波波傳的頻散方程式；第二小節則將第二章求得之交指叉電極表面電位，當成壓電平板表面電性的邊界條件，求解表面交指叉電極激發之藍姆波波傳響應。第四章為本研究的結果與討論，第一小節比較不同積分路徑偏移量對位移頻域響應之影響；第二節則討論垂直及水平極化壓電平板中，表面電極數目及寬度對於時域訊號之影響。第五章為本文結論與展望。



第二章 壓電平板交指叉電極之電位分析

本章利用 Engan [5]之方法，假設材料的機電耦合效應微弱，求解壓電平板表面交指叉電極產生的電場及表面電位連續函數，以便之後分析交指叉換能器激發壓電平板藍姆波之波傳特性。

2.1 壓電效應

壓電效應[14]，包含正壓電效應(direct piezoelectric effect)及逆壓電效應(reverse piezoelectric effect)。若對壓電材料施加正向壓力，壓電體內為了抵抗電偶極矩因材質受到壓縮而變短之趨勢，將產生電壓以保持原狀態，即是機械能轉換為電能之正壓電效應。當壓電材料受到電場作用時，電偶極矩會被拉長，壓電體會依電場方向而產生形變，此即電能轉換為機械能之逆壓電效應。圖 2-1 所示為機電耦合效應基本型態[14]，圖中顯示 x 方向電場 E_x 與其產生對應的應變分量 S 之關係，六張圖分別可表示不同壓電係數造成之影響。

某些材料因晶格內原子間特殊排列的方式，使得機械能與電能產生耦合的特性，如單晶類的石英及鋰酸鋰(LiNbO₃)、陶瓷類的鈦酸鉛鋯(PZT)、薄膜類的氧化鋅(ZnO)及複合壓電材料等。由於壓電材料取得製作容易、成本低廉、靈敏度高，被廣泛應用於感測器及致動器。

2.2 壓電本構方程式

對於壓電材料而言，應力、應變、電場強度及電位移之間存有相互作用之機電耦合效應，壓電本構方程式(piezoelectric constitutive equations) [16] 為

$$T_{ij} = C_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (2.1)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j \quad (2.2)$$

其中 T_{ij} 、 S_{kl} 分別為材料所受應力、應變場， C_{ijkl}^E 、 e_{kij} 及 ε_{ij}^S 分別為壓電材料剛性常數(stiffness constants)、壓電應力常數(piezoelectric stress constants)及介電常數(dielectric constants)，上標 E 及 S 分別代表電場及應變為定值時所測得之材料常數，而 E_i 則表示電場強度(electric field)、 D_i 則表示電位移(electric displacement)，其單位分別為 V/m、C/m²。若無壓電常數時，即為一般非壓電材料的應力與應變關係式，以及介電材料的電場與電位移關係式。應變與位移 u_i 的關係式及電場與電位(electric potential) ϕ 的關係式如下

$$S_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (2.3)$$

$$E_j = -\phi_{,j} \quad (2.4)$$

其中， u_i 為彈性位移，下標的逗點運算(\cdot) _{j} 表示對 x_j 之偏微分。

T_{ij} 及 S_{kl} 為對稱二階張量(tensor)， E_i 及 D_i 為向量(一階張量)， C_{ijkl}^E 為應力與應變之兩個對稱二階張量之關係，為具對稱性的四階張量， ε_{ij}^S 為電場與電位移向量之關係，為二階張量，而 e_{kij} 則為應力與電場強度或應變與電位移之二階張量與向量之關係，為三階張量。由上述可知

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (2.5)$$

$$S_{kl} = S_{lk} \quad (2.6)$$

$$e_{kij} = e_{kji} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{ij}^S = \varepsilon_{ji}^S \quad (2.8)$$

$$C_{ijkl}^E = C_{jikl}^E = C_{ijlk}^E \quad (2.9a)$$

若假設彈性應變能密度(strain energy density)為應變的二次函數，則

$$C_{ijkl}^E = C_{klij}^E \quad (2.9b)$$

若採用 Voigt 表示法，上述場變數的下標可以簡化如表 1，當 $i = j$ 或 $k = l$ ， $p, q = 1 \sim 3$ ， $T_{ij} \rightarrow T_p$ 、 $C_{ijkl}^E \rightarrow C_{pq}^E$ 、 $e_{kij} \rightarrow e_{kp}$ 且 $S_{kl} \rightarrow S_q$ ，當 $k \neq l$ ， $q = 4 \sim 6$ ，

$2S_{kl} \rightarrow S_q$ 。描述一壓電材料最多需要 21 個剛性常數、18 個壓電常數、6 個介電常數。壓電材料的本構方程式可以表示成其他型式，詳如[17]。(2.1)

及(2.2)可改寫成

$$T_p = C_{pq}^E S_q - e_{kp} E_k \quad (2.10)$$

$$D_i = e_{iq} S_q + \varepsilon_{ij}^S E_j \quad (2.11)$$

(2.10)及(2.11)可展成 9×9 的矩陣表示式，

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & C_{14}^E & C_{15}^E & C_{16}^E & -e_{11} & -e_{21} & -e_{31} \\ C_{12}^E & C_{22}^E & C_{23}^E & C_{24}^E & C_{25}^E & C_{26}^E & -e_{12} & -e_{22} & -e_{32} \\ C_{13}^E & C_{23}^E & C_{33}^E & C_{34}^E & C_{35}^E & C_{36}^E & -e_{13} & -e_{23} & -e_{33} \\ C_{14}^E & C_{24}^E & C_{34}^E & C_{44}^E & C_{45}^E & C_{46}^E & -e_{14} & -e_{24} & -e_{34} \\ C_{15}^E & C_{25}^E & C_{35}^E & C_{45}^E & C_{55}^E & C_{56}^E & -e_{15} & -e_{25} & -e_{35} \\ C_{16}^E & C_{26}^E & C_{36}^E & C_{46}^E & C_{56}^E & C_{66}^E & -e_{16} & -e_{26} & -e_{36} \\ e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & \varepsilon_{11}^S & \varepsilon_{12}^S & \varepsilon_{13}^S \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & \varepsilon_{12}^S & \varepsilon_{22}^S & \varepsilon_{23}^S \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} & \varepsilon_{13}^S & \varepsilon_{23}^S & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

其中，剛性-壓電-介電矩陣可分成四個矩陣，包含左上角之 6×6 剛性常數矩陣、右下角之 3×3 介電常數矩陣、互為轉置矩陣(transpose matrix)之左下角和右上角 3×6 及 6×3 之壓電常數矩陣。鈦酸鋇是最早發展及應用之壓電陶瓷，其化學性質穩定、操作溫度範圍大。之後人們繼續研究其他鈣鈦石結構，發展出 PZT 的壓電材料，本文所用之壓電材料為 PZT 系列材料。一般而言，PZT 之極化(polarization)方向 P 大多在厚度方向，即材料的主軸 Z 方向，如圖 2-2(a)所示，其剛性-壓電-介電矩陣如下：

$$\begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{12}^E & C_{11}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{13}^E & C_{13}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

本文另外考慮如圖 2-2(b)所示極化方向為水平方向的 PZT，其剛性-壓電-介電矩陣如下：

$$\begin{bmatrix} C_{33}^E & C_{13}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{33} & 0 & 0 \\ C_{13}^E & C_{11}^E & C_{12}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{31} & 0 & 0 \\ C_{13}^E & C_{12}^E & C_{11}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 \\ e_{33} & e_{31} & e_{31} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11}^S \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

材料常數的矩陣轉換關係如附錄 A。本文計算採用 PZT-5A，材料常數[15]詳列於表 2。

2.3 電位分析

壓電材料上方的交指又電極為週期性電極，電極中點至相鄰電極中點間距為 L ，電極寬度為 aL ($0 < a < 1$)，壓電材料厚度為 h ， N 為電極與電極間隙(gap)數目。取虛線框作一分析，即 $x_1 \in [-L/2, L/2]$ 、 $x_3 \in [0, h]$ ，各佔半個電極。當外加電壓施於電極時，壓電材料中產生的電場分量可分為水平及垂直方向。以下分成兩種狀況討論：I. 壓電平板厚度極化，稱為厚度模式(thickness mode)，為了使較大的電場分量與極化方向一致，以便產生較大之逆壓電效應，將壓電平板的下表面接地，上表面交指又相鄰電極的電位分別為 $\pm V_0$ ，如圖 2-3(a)所示。II. 壓電平板水平極化，稱為厚度剪切模式(thickness shear mode)，如圖 2-3(b)所示，相鄰電極之電位差為 V_0 ，平板下表面不接地。

本文沿用 Engan [5]解法，先作兩個基本假設：A. 機電耦合(electro-mechanical coupling)可被忽略，由於當作致動器使用，故其產生之位移很小，使(2.11)中右式之第一項遠小於第二項，而忽略之，亦即假設機電耦合效應對波傳之影響可以忽略。B. 電極於 x_2 為無限長，電場在 x_2 方向可視為均質(homogeneous)，故所有場變數獨立於 x_2 ，即 $\partial/\partial x_2 = 0$ 。

由假設 A , (2.11) 蛻變為

$$D_i = \epsilon_{ij}^S E_j \quad (2.15)$$

電位移滿足靜電方程式(electrostatic equation)

$$D_{i,i} = 0 \quad (2.16)$$

可得

$$m^2 \phi_{,11} + \phi_{,33} = 0 \quad (2.17)$$

此處 , $m^2 = \epsilon_{11}^S / \epsilon_{33}^S$ (厚度模式) 或 $m^2 = \epsilon_{33}^S / \epsilon_{11}^S$ (厚度剪切模式)。參考圖 2-4 所示 , 所分析的區塊之邊界條件為

- (i) E_1 對稱於 $x_1 = 0$,
- (ii) $x_1 = \pm L/2$, $E_1 = 0$

電性邊界條件 :

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad x_3 = h, \quad & \begin{cases} \phi = 0 \\ D_3 = 0 \end{cases} \\ \text{(iv)} \quad x_3 = 0, \quad & \begin{cases} D_3 = 0, & |x_1| < L(1-a)/2 \\ E_1 = 0, & L(1-a)/2 < |x_1| < L/2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

在 $|x_1| < L(1-a)/2$ 範圍 , 無電極覆蓋 , 故無表面電荷。在 $L(1-a)/2 < |x_1| < L/2$ 範圍 , 有電極覆蓋 , 設為等電位 , 即 $E_1 = 0$ 。

2.3.1 厚度模式

假設電位具有時諧因子(time harmonic factor) $e^{-i\omega t}$, 利用分離變數法(separation of variables) , 電位函數為

$$\phi(x_1, x_3, t) = X(x_1)Z(x_3)e^{-i\omega t} \quad (2.19)$$

因為靜電方程式的解為穩態解 , 以下之推導省略時諧因子。將(2.19)代回(2.17) ,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx_1^2} + \frac{1}{m^2 Z} \frac{d^2 Z}{dx_3^2} = 0 \quad (2.20)$$

$X(x_1)$ 、 $Z(x_3)$ 分別為 x_1 、 x_3 的獨立函數，為了滿足(2.20)，各項分別等於任意常數(arbitrary constants)。令

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx_1^2} = -k_x^2 \quad (2.21a)$$

$$\frac{1}{m^2 Z} \frac{d^2 Z}{dx_3^2} = -k_z^2 \quad (2.21b)$$

k_x^2 、 k_z^2 為由邊界條件決定之常數，將(2.21)代入(2.20)

$$k_x^2 + k_z^2 = 0 \quad (2.22)$$

故可設定

$$k_x^2 = -k_z^2 = k_1^2 \quad (2.23)$$

k_x^2 及 k_z^2 的正負號決定 $X(x_1)$ 及 $Z(x_3)$ 之通解形式，由於壓電平板上表面的交指叉電極為週期性電極， $X(x_1)$ 之通解應呈現週期之特性。由(2.21)及(2.23)可得

$$X_{,11} + k_1^2 X = 0 \quad (2.24a)$$

$$Z_{,33} - m^2 k_1^2 Z = 0 \quad (2.24b)$$

$X(x_1)$ 之通解為

$$X(x_1) = A_1 \cos(k_1 x_1) + A_2 \sin(k_1 x_1) \quad (2.25a)$$

$$X_{,1}(x_1) = -k_1 A_1 \sin(k_1 x_1) + k_1 A_2 \cos(k_1 x_1) \quad (2.25b)$$

由邊界條件(i)，知 $X_{,1}(x_1)$ 對稱於 $x_1 = 0$ ，故 $A_1 = 0$ 。代入邊界條件(ii)，得

$$X_{,1}(\pm L/2) = k_1 A_2 \cos(k_1 L/2) = 0 \quad (2.26)$$

若 $k_1 \neq 0$ ，則 k_1 滿足 $\cos(k_1 L/2) = 0$ ，故

$$k_1 = \frac{(2n+1)\pi}{L} \quad (2.27)$$

$Z(x_3)$ 之通解為

$$Z(x_3) = B_1 \cosh(mk_1 x_3) + B_2 \sinh(mk_1 x_3) \quad (2.28)$$

由邊界條件(iii) , 得

$$Z(h) = B_1 \cosh(mk_1 h) + B_2 \sinh(mk_1 h) = 0 \quad (2.29)$$

將(2.29)代回(2.28) , 則

$$Z(x_3) = B_3 \sinh[mk_1 (h - x_3)] \quad (2.30)$$

其中 , $B_3 = -B_2 / \cosh(mk_1 h)$ 。

由(2.25)-(2.30) , 可得到壓電平板內的電位全解為

$$\phi(x_1, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L}{\pi(2n+1)} G_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{L} x_1\right] \sinh\left[\frac{(2n+1)m\pi}{L} (h - x_3)\right] e^{-i\omega t} \quad (2.31)$$

其中 , $G_n = A_2 B_3 (2n+1)\pi / L$, 電位為 x_1 的奇函數。由邊界條件(iv)分別可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{L} x_1\right] \cosh\left[\frac{(2n+1)m\pi}{L} h\right] = 0, \quad |x_1| < (1-a)L/2 \quad (2.32a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{L} x_1\right] \sinh\left[\frac{(2n+1)m\pi}{L} h\right] = 0, \quad (1-a)L/2 < |x_1| < L/2 \quad (2.32b)$$

引入第一類雷見德(Legendre)函數[18] , 且考慮 $x_1 > 0$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \nu = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} (\cos\nu - \cos\theta)^{-1/2}, & 0 \leq \nu < \theta \\ 0, & \theta < \nu < \pi \end{cases} \quad (2.33)$$

由(2.32)與(2.33)的範圍及參數比較 , 可知

$$G_n \sinh\left[\frac{(2n+1)m\pi}{L} h\right] = B P_n[\cos\pi(1-a)] \quad (2.34)$$

其中， B 是符合 $0 \leq x_1 < L(1-a)/2$ 邊界條件之常數，考慮電位之全微分

$$d\phi(x_1, x_3) = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} dx_3 = -E_1 dx_1 - E_3 dx_3 \quad (2.35)$$

由邊界條件(iv)可知在 $0 \leq x_1 < L(1-a)/2$ 範圍，沒有 E_3 之存在，此表面電位差

$$\phi(L(1-a)/2, 0) - \phi(0, 0) = - \int_0^{L(1-a)/2} E_1(x_1, 0) dx_1 = V_0/2 \quad (2.36)$$

根據(2.31)之電位全解，(2.36)可以表示為

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L}{\pi(2n+1)} G_n \sinh\left[\frac{(2n+1)m\pi}{L} h\right] \sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}(1-a)\right] = V_0/2 \quad (2.37)$$

引入第一類完全補橢圓積分(complementary complete elliptic integral of the first kind) $K'(k_2)$ ，雷見德函數與第一類完全橢圓積分 $K(k_2)$ 之定義[18]

如下：

$$P_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left[z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} z^{n-4} - + \dots \right] \quad (2.38)$$

$$K(\sin\alpha) = \pi \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(1/2)_m}{m!} \right]^2 \sin[(4m+1)\alpha] \quad (2.39)$$

且

$$\left(\frac{1}{2}\right)_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \left(\frac{1}{2} + m - 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (2.40)$$

又第一類完全補橢圓積分與第一類完全橢圓積分之關係[18]為

$$K'(k_2) = K(k'_2) = K(\sqrt{1-k_2^2}) \quad (2.41)$$

令 $z = \cos(2\alpha)$ ， $\alpha = \pi(1-a)/2$ ，將(2.38)、(2.39)展開，並參考(2.41)，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)} P_n(2k_2^2 - 1) \sin \left[\frac{\pi(2n+1)(1-a)}{2} \right] = K'(k_2) \quad (2.42)$$

將(2.42)、(2.34)代入(2.37)，可得

$$\frac{BLK'(k_2)}{2\pi} = V_0/2 \quad (2.43)$$

其中， $k_2 = \cos[\pi(1-a)/2]$ ，由(2.43)可獲得 B 值，再代回(2.34)，得

$$G_n = \frac{V_0\pi}{L} \frac{P_n(2k_2^2 - 1)}{K'(k_2) \sinh \left[\frac{(2n+1)m\pi}{L} h \right]} \quad (2.44)$$

因此獲得完整電位型式。由(2.31)、(2.44)可得電場分量為

$$E_1(x_1, x_3, t) = -\sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos \left[\frac{(2n+1)\pi}{L} x_1 \right] \sinh \left[\frac{(2n+1)m\pi}{L} (h-x_3) \right] e^{-i\omega t} \quad (2.45a)$$

$$E_3(x_1, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} mG_n \sin \left[\frac{(2n+1)\pi}{L} x_1 \right] \cosh \left[\frac{(2n+1)m\pi}{L} (h-x_3) \right] e^{-i\omega t} \quad (2.45b)$$

根據[9]之研究，電極寬度與相鄰電極之間隙(gap)等寬時，IDT 激發之彈性波擾動振幅最大，此處取 $a=0.5$ 進行分析。

由於採用級數展開求解，且為了節省計算時間，累加之項數並不需要趨近於無限大，故依據

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^M \phi_n - \phi(L/2, 0)}{\phi(L/2, 0)} \right| < \varepsilon_{allow} = 10^{-3} \quad (2.46)$$

決定累加之項數，本文的收斂分析以 $(L/2, 0)$ 處的電位值做為參考，累加到第 M 項之電位與真確值誤差小於容許誤差即可。如圖 2-5 所示，取項數為 40 項，即可宣告收斂，如圖 2-6 所示。近似電位隨著項數增加而趨近於 $V_0/2$ 。電位函數第 n 項之圖形如圖 2-7 所示，具有遞減快速的趨勢。

圖 2-8、2-9 分別為厚度模式之電位三維透視圖、等高線圖及電場流

向圖，圖 2-9 的箭頭方向即為電場方向，電場由高電位流向低電位，箭頭之長短即為電場之強弱，距離表面電極愈遠，電場愈弱。圖 2-10 為級數解之係數 G_n 與電極寬度之關係圖，級數愈多，對應之係數 G_n 值愈小。選擇不同電極寬度，其相對應電場強度，會影響激發彈性波之振幅，可視需求選擇適當之電極寬度。

2.3.2 厚度剪切模式

依照前一小節的作法，取 $x_1 \in [-L/2, L/2]$ 、 $x_3 \in [0, h]$ 予以分析，其中 $m = (\epsilon_{33} / \epsilon_{11})^{1/2}$ ， x_1 、 x_3 方向的電位函數 $X(x_1)$ 、 $Z(x_3)$ 之通解型式同(2.25a)、(2.28a)，唯 $x_3 = h$ 的邊界條件(iv)導致

$$Z(x_3) = B_3 \cosh[mk_1(h - x_3)] \quad (2.47)$$

其中， $B_3 = -B_2 / \sinh(mk_1 h)$ ，故電位的全解為

$$\phi(x_1, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L}{\pi(2n+1)} G_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{L} x_1\right] \cosh\left[\frac{(2n+1)m\pi}{L}(h - x_3)\right] e^{-i\omega t} \quad (2.48)$$

同理，代入上表面邊界條件(iv)，可得類似(2.32)之雙重級數(dual series)，

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{L} x_1\right] \sinh\left[\frac{(2n+1)m\pi}{L} h\right] = 0, \quad |x_1| < L(1-a)/2 \quad (2.49a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{L} x_1\right] \cosh\left[\frac{(2n+1)m\pi}{L} h\right] = 0, \quad L(1-a)/2 < |x_1| < L/2 \quad (2.49b)$$

其中，係數 G_n 為

$$G_n = \frac{V_0 \pi}{L} \frac{P_n(2k_2^2 - 1)}{K'(k_2) \cosh\left[\frac{(2n+1)m\pi}{L} h\right]} \quad (2.50)$$

電場分量為

$$E_1(x_1, x_3, t) = -\sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{L} x_1\right] \cosh\left[\frac{(2n+1)m\pi}{L}(h-x_3)\right] e^{-i\omega t} \quad (2.51a)$$

$$E_3(x_1, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} mG_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{L} x_1\right] \sinh\left[\frac{(2n+1)m\pi}{L}(h-x_3)\right] e^{-i\omega t} \quad (2.51b)$$

圖 2-11、2-12 所示為厚度剪切模式電位之三維透視圖、等高線圖及電場流向圖，係取 40 項數展開計算所得結果。圖 2-13 所示為 G_n 與電極寬度比列 a 的關係圖，厚度模式產生電場之能力較厚度剪切模式大，除了前兩項級數的差異較大外，其他項數之大小均差異不大。

就厚度剪切模式而言，在 $x_3 = 0$ 之電位與電場如圖 2-14，兩者都呈週期性分佈，圖 2-14(a) 之表面電位解在表面電極處呈等電位，而在兩電極間則為一連續函數。由於電位採用級數近似求解，表面電極鄰近無覆蓋電極交界處的電位會產生跳動情形(Gibbs phenomenon)，此處電場變化最大。若級數取的太少，則表面電極的電位不會趨近於等電位，例如圖 2-15 所示為電位級數解僅採前 30 項的結果，在表面電極兩端的電位函數呈現跳動的情形。本文的表面電位及電場解採用 40 項級數，既符合收斂條件，且跳動現象也不明顯。

由(2-45)及(2-51)的電場全解可歸納出厚度模式與厚度剪切模式相似點：(a)當 $x_1 = \pm L/2 \pm n_1 L$ ，($n_1 = 0, 1, 2, \dots$)，由於電場成週期性分佈，在交界處只有垂直 $x_3 = 0$ 界面之電場，即 $E_1 = 0$ 。(b) E_1 分量對稱於 $x_1 = 0$ ， E_3 分量則反對稱於 $x_1 = 0$ 。(c)在 $0 \leq x_3 \leq h$ 範圍內，距離 $x_3 = 0$ 愈遠， E_1 與 E_3 分量大小呈遞減。(d)當 $x_1 = \pm n_1 L$ ， $E_3 = 0$ ，即電場方向垂直 $x_1 = \pm n_1 L$ 。在 $x_3 = h$ 處，厚度模式的電場分量 E_1 為零，厚度剪切模式的電場分量 E_3 為零，分別可與圖 2-9、圖 2-12 作一對應。

以上求出之電位解為沿 x_1 軸，自 $-\infty$ 至 ∞ 週期性展開的結果，表示壓電平板表面具有無限多組電極。真實情形僅在有表面電極覆蓋處，即 $x_1 \in [-L_t/2, L_t/2]$ ，有電位、電場存在，如圖 2-3 所示， L_t 為總電極長度。取 $h = 1 \text{ mm}$ ， $L = 1 \text{ mm}$ ， $N = 19$ ，即產生 19 組電場(或 9.5 對電場)。為了確定

電位、電場僅在 $x_1 \in [A, B]$ 內存在，則將表面電位、電場以一維空間傅立葉轉換表示，詳如附錄 B，圖 2-16 及 2-17 分別為反傅立葉轉換所得之表面電位、電場的空間分佈。電位、電場僅在 $x_1 \in [-9.5, 9.5]$ 時有值，在表面電極處， E_1 為零，表面無電極處， E_3 為零。在表面電極及無電極覆蓋的交界處，電位的一次空間導函數不連續，故電場級數解在此處會劇烈地變化。

由於電場為電位的一次空間導函數，電場的計算誤差會因此增大。故下一章分析壓電板中藍姆波的波傳，將不採用 Joshi 和 White [4] 的方法，改將忽略機電耦合效應所求得之級數解(2.31)及(2.48)，做為表面電位的連續函數，求解壓電平板受交指叉電極激發之藍姆波波傳。圖 2-18 為厚度模式壓電平板表面電位之響應圖形，在激發波長 $\lambda = 2L = 2(\text{mm})$ 時， $k = \pi(1/\text{mm})$ 有最大響應，會激發出最大之藍姆波位移。



第三章 單層壓電板藍姆波波傳行為

壓電平板的藍姆波可以藉表面曳力作用或表面電極的電場變化生成，本文探討後者激發板波之機制。壓電平板表面電極間正負電位的交換，對於壓電材料之粒子造成擠壓，在平板內形成共振，生成板波向外波傳。

3.1 壓電平板的藍姆波波傳

假設電極朝 x_2 無限延伸，所有場變數均獨立於 x_2 ，即 $\partial/\partial x_2 = 0$ 。根據壓電材料的極化方向，分成厚度模式(垂直極化)及厚度剪切模式(水平極化)。參考圖 3-1 所示，本節將電性之邊界條件分為短路(short circuit)、開路(open circuit)及兩者混合之情形。

3.1.1 克里斯多福方程式

PZT 為六方堆積材料，沿材料主軸波傳，面內與面外波呈現非耦合情形[16]，本文僅考慮面內波動，假設藍姆波沿 x_1 方向行進，位移場與電位具時諧因子(time harmonic factor) $e^{-i\omega t}$ ，可寫成

$$u_i(x_1, x_3, t) = A_i e^{i(kx_1 + \zeta x_3 - \omega t)}, \quad i = 1, 3 \quad (3.1a)$$

$$\phi(x_1, x_3, t) = A_4 e^{i(kx_1 + \zeta x_3 - \omega t)} = u_4(x_1, x_3, t) \quad (3.1b)$$

其中， k 、 ζ 分別為 x_1 、 x_3 方向之波數(wave number)，且 $k = \omega s_1$ 、 $\zeta = \omega \eta$ ， A_i 為第 i 個偏振方向振幅之分量， ω 為波之角頻率，壓電材料的動態統御方程式包括力平衡方程式及準靜電方程式：

$$T_{ij,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.2)$$

$$D_{i,i} = 0 \quad (3.3)$$

其中， ρF_i 為徹體力(body force)，彈性波的位移擾動小，徹體力作的功遠小於應變能及動能，因此，徹體力可以忽略。將壓電材料的本構方程式及位

移與電位關係式(3.1)代入(3.2)-(3.3)，整理後將振幅分量 A_1 、 A_3 、 A_4 提出，可得克里斯多福方程式(Christoffel equations)如下：

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14} & \Gamma_{34} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

就厚度模式壓電平板而言，對應之矩陣元素為

$$\Gamma_{11} = a_{11}s_1^2 + a_{44}\eta^2 - 1$$

$$\Gamma_{13} = (a_{13} + a_{44})s_1\eta$$

$$\Gamma_{14} = (b_{15} + b_{31})s_1\eta$$

$$\Gamma_{33} = a_{44}s_1^2 + a_{33}\eta^2 - 1$$

$$\Gamma_{34} = b_{15}s_1^2 + b_{33}\eta^2$$

$$\Gamma_{44} = -d_{11}s_1^2 - d_{33}\eta^2$$

其中， $s_1 = 1/c$ ， s_1 、 η 為波慢(slowness)在 x_1 、 x_3 方向上之分量， c 為相速度。為簡化符號，此處定義一組新的參數， $a_{pq} = C_{pq}/\rho$ ， $b_{pq} = e_{pq}/\rho$ ， $d_{pq} = \varepsilon_{pq}/\rho$ ，若存在非零解，(3.4)等號左端的行列式必須為零，

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14} & \Gamma_{34} & \Gamma_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

將(3.5)展開，可得 η^2 的三次特徵方程式，

$$B_6\eta^6 + B_4\eta^4 + B_2\eta^2 + B_0 = 0 \quad (3.6)$$

領導係數 $B_0 \sim B_6$ 詳列於附錄 C，為了限制特徵值為單值函數，需加入一拘束條件， $\text{Im}(\eta_l) \geq 0$ ， $l = 1, 2, 3$ 。特徵值分別為 $\pm \eta_1, \pm \eta_2, \pm \eta_3$ ，正號代表朝正 x_3 方向波傳的下傳波(down-going waves)，負號代表朝負 x_3 方向波傳的上傳波(up-going waves)。將特徵值代入(3.4)，可獲得對應的特徵向量 A_1^\pm 、 A_3^\pm 、 A_4^\pm ，特徵向量各分量的比值詳如附錄 C。六個特徵值代表壓電材料內，上傳與下傳的波慢在 x_3 方向之分量，對應之特徵向量 $\{A_1^\pm, A_3^\pm, A_4^\pm\}$ 為各波式的偏振量。

就厚度剪切模式的壓電平板而言，(3.4)的各個矩陣元素分別如下：

$$\Gamma_{11} = a_{33}s_1^2 + a_{44}\eta^2 - 1$$

$$\Gamma_{13} = (a_{13} + a_{44})s_1\eta$$

$$\Gamma_{14} = b_{33}s_1^2 + b_{15}\eta^2$$

$$\Gamma_{33} = a_{44}s_1^2 + a_{11}\eta^2 - 1$$

$$\Gamma_{34} = (b_{15} + b_{31})s_1\eta$$

$$\Gamma_{44} = -d_{33}s_1^2 - d_{11}\eta^2$$

同理，也可以獲得一個以 η^2 為未知數的三次特徵方程式，各項係數及特徵向量詳列於附錄 C。

3.1.2 藍姆波頻散方程

前一小節所討論的是彈性波必須滿足的統御方程式及其解，本節考慮在有限厚度 h 的壓電平板中，受到上下邊界條件的限制，徹體波在上下表面間多重反射，干涉成具有頻散特性的藍姆波，其特徵是相速度為頻率的函數。

每個特徵值對應之特徵向量代表一部份的波動，將其疊加起來就呈現真正的波形，故(3.1)可寫成

$$u_1(x_1, x_3, t) = \sum_{j=1}^3 p_{1j}^{\pm} \bar{C}_j^{\pm} [\cos(\zeta_j x_3) \pm i \sin(\zeta_j x_3)] e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (3.7)$$

$$u_3(x_1, x_3, t) = \sum_{j=1}^3 p_{3j}^{\pm} \bar{C}_j^{\pm} [\cos(\zeta_j x_3) \pm i \sin(\zeta_j x_3)] e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (3.8)$$

$$u_4(x_1, x_3, t) = \sum_{j=1}^3 p_{4j}^{\pm} \bar{C}_j^{\pm} [\cos(\zeta_j x_3) \pm i \sin(\zeta_j x_3)] e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (3.9)$$

上標 \pm 號分別為 $+\zeta_j$ 及 $-\zeta_j$ 對應之數值。參考圖 3-2 所示，藍姆波依位移及電位之對稱性，可分成對稱波(symmetric waves，或稱 extensional waves)和反對稱波(anti-symmetric waves，或稱 flexural waves)，由正、餘函數之於中平面的對稱性，可將(3.7)~(3.9)分成兩部分。就厚度模式壓電平板而言，對稱與反對稱波函數分別如下：

(1) 對稱波

$$u_1 = \sum_{j=1}^3 p_{1j}^+ B_j \cos \zeta_j x_3 e^{i(kx_1 - \omega t)}$$

$$u_3 = i \sum_{j=1}^3 p_{3j}^+ B_j \sin \zeta_j x_3 e^{i(kx_1 - \omega t)}$$

$$u_4 = i \sum_{j=1}^3 p_{4j}^+ B_j \sin \zeta_j x_3 e^{i(kx_1 - \omega t)}$$

(2) 反對稱波

$$u_1 = i \sum_{j=1}^3 p_{1j}^+ D_j \sin \zeta_j x_3 e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (3.10)$$

$$u_3 = \sum_{j=1}^3 p_{3j}^+ D_j \cos \zeta_j x_3 e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (3.11)$$

$$u_4 = \sum_{j=1}^3 p_{4j}^+ D_j \cos \zeta_j x_3 e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (3.12)$$

其中， $B_j = \bar{C}_j^+ + \bar{C}_j^-$ 、 $D_j = \bar{C}_j^+ - \bar{C}_j^-$ 。

短路與開路的物理意義[16]可以介電常數作為區分，當介電常數趨近於無限大時，可儲存較多電荷數目，促使電流趨近於無限大，相對的阻抗應趨近於零，即相當於電路中短路的情形。當介電常數趨近於零，意謂著電流趨近於零，阻抗則應趨近於無限大，即相當於電路中開路的情形。而一般情形則介於兩者間。

壓電平板上下表面之曳力及電性邊界條件如下：

- (1) 無曳力及短路條件： $T_3 = T_5 = \phi = 0$ on $x_3 = \pm h/2$
- (2) 無曳力及開路條件： $T_3 = T_5 = D_3 = 0$ on $x_3 = \pm h/2$
- (3) 無曳力及混合電性條件： $T_3 = T_5$ on $x_3 = \pm h/2$
 $\phi = 0$ on $x_3 = -h/2$
 $D_3 = 0$ on $x_3 = h/2$

對稱波及反對稱波的待定係數 $B_1 \sim B_3$ 及 $D_1 \sim D_3$ 必須滿足下列矩陣關係式，

$$Q_{ij} B_j = 0 \quad (3.13a)$$

$$\hat{Q}_{ij} D_j = 0 \quad (3.13b)$$

$$Q_{ij}^* B_j = 0 \quad (3.14a)$$

$$\hat{Q}_{ij}^* D_j = 0 \quad (3.14b)$$

其中， Q_{ij} 及 Q_{ij}^* 分別代表對稱波滿足短路及開路邊界條件得到之矩陣， \hat{Q}_{ij} 及 \hat{Q}_{ij}^* 則為反對稱波對應之矩陣，對應之藍姆波頻散方程式分別為

$$\det \mathbf{Q} = \det \hat{\mathbf{Q}} = 0 \quad (3.15)$$

$$\det \mathbf{Q}^* = \det \hat{\mathbf{Q}}^* = 0 \quad (3.16)$$

混合電性邊界條件下之藍姆波不適合將場變數分成對稱及反對稱波，因此仍維持(3.7)-(3.9)的函數型態，邊界條件導致一組矩陣關係式，

$$\bar{Q}_{ij} \bar{C}_j = 0 \quad (3.17)$$

其中， \bar{C}_j 包含了 \bar{C}_j^+ 及 \bar{C}_j^- 。所對應之藍姆波頻散方程式為

$$\det \bar{\mathbf{Q}} = 0 \quad (3.18)$$

在固定頻率下，找出符合(3.15)、(3.16)、(3.18)之 c 值，即為在短路、開路或混合電性邊界條件下藍姆波相速度。在特定頻率範圍內，可繪製成不同模態之藍姆波頻散曲線。

厚度剪切模式壓電平板的藍姆波場變數，同樣可分成對稱波及反對稱波， u_1 及 u_3 位移函數與(3.10)、(3.11)相同，僅改變電位函數型式為

(1) 對稱波：

(2) 反對稱波：

$$u_4 = \sum_{j=1}^3 p_{4j}^+ B_j \cos \zeta_j x_3 e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad u_4 = i \sum_{j=1}^3 p_{4j}^+ D_j \sin \zeta_j x_3 e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (3.19)$$

同理，分成短路、開路與混合之邊界條件求解頻散方程式。

厚度模式及厚度剪切模式之壓電平板在短路與開路電性邊界條件下，藍姆波的頻散曲線數值結果分別示於圖 3-3、圖 3-4，圖中實線部分為短路電性條件之結果，虛線部分則為開路電性條件之結果。由圖 3-3、圖 3-4 可發現開路電性條件之藍姆波波速均較短路電性條件快。在短路電性邊界條件中，壓電平板的上下表面為等電位，平板內的電場為零，材料的壓電效應沒有提昇材料的剛性所致。

3.2 交指叉換能器激發之藍姆波

參考圖 2-3 所示，壓電平板表面的交指叉換能器承受交流電壓負載，將激發藍姆波波傳響應。由於壓電平板上下表面邊界條件不一致，位移及電

位等場變數無法直接分為對稱波及反對稱波型式。本節分兩種模式討論，其一為厚度模式，另一為厚度剪切模式。壓電平板上表面的電位採用前一章所求得之級數解，當作上表面電性邊界條件的連續解，假設電位僅在 $x_1 \in [-L_t/2, L_t/2]$ 內有值。

假設交指叉電極沿 x_2 無限延伸，所有的場變數獨立於 x_2 ，即 $\partial/\partial x_2 = 0$ 。採用一維傅立葉積分轉換表示面內波動的位移與電位如下：

$$u_i(x_1, x_3, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_i(k, x_3) e^{i(kx_1 - \omega t)} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_i(k) e^{i(kx_1 + \zeta x_3 - \omega t)} dk \quad (3.20)$$

其中， $i=1, 3, 4$ ， $i=4$ 之場變數，代表電位， k 、 ζ 分別為波向量(wave vector) 在 x_1 、 x_3 方向之分量，其定義與 3.1.1 節同。兩種模式壓電平板之邊界條件分別如下：

(1)厚度模式：

$$\begin{aligned} x_3 = z_0, \quad T_5 = T_3 = 0 \quad \text{且} \quad u_4 = \phi(x_1, z_0) \quad \text{或} \\ \bar{T}_5 = \bar{T}_3 = 0 \quad \text{且} \quad \bar{u}_4 = \bar{\phi}(k, z_0) \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} x_3 = z_1, \quad T_5 = T_3 = u_4 = 0 \quad \text{或} \\ \bar{T}_5 = \bar{T}_3 = \bar{u}_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.21b)$$

(2)厚度剪切模式：

$$\begin{aligned} x_3 = z_0 \quad T_5 = T_3 = 0 \quad \text{且} \quad u_4 = \phi(x_1, z_0) \quad \text{或} \\ \bar{T}_5 = \bar{T}_3 = 0 \quad \text{且} \quad \bar{u}_4 = \bar{\phi}(k, z_0) \end{aligned} \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} x_3 = z_1 \quad T_5 = T_3 = D_3 = 0 \quad \text{或} \\ \bar{T}_5 = \bar{T}_3 = \bar{D}_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.22b)$$

在厚度模式下，將(3.20)代入(2.16)、(3.2)、(3.3)，提出 $\tilde{u}_1(k) \sim \tilde{u}_4(k)$ ，可得類似(3.4)的克里斯多福方程式，對應的矩陣係數與前一節之推導相同。各特徵值及對應之特徵向量代表部分成分的波，疊加起來即為通解，(3.20)可改為

$$u_i(x_1, x_3, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left\{ p_{ij}^+ C_j^+ e^{i\zeta_j(x_3-z_0)} + p_{ij}^- C_j^- e^{i\zeta_j(z_1-x_3)} \right\} e^{i(kx_1 - \omega t)} dk \quad (3.23)$$

上標正號為下傳波，上標負號為上傳波，其中 $C_j^+ = \bar{C}_j^+ e^{i\zeta_j z_0}$ 、 $C_j^- = \bar{C}_j^- e^{-i\zeta_j z_1}$ 為新定義的待定係數。此外，定義一個三維向量如下：

$$\mathbf{t}^*(k, x_3) = \begin{Bmatrix} \bar{T}_5 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{u}_4 \end{Bmatrix} = [\hat{\mathbf{Q}}_{21} \quad \hat{\mathbf{Q}}_{22}] \begin{bmatrix} \mathbf{E}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{E}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^+ \\ \mathbf{C}^- \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

其中， $\hat{\mathbf{Q}}_{21}$ 、 $\hat{\mathbf{Q}}_{22}$ 、 \mathbf{E}^\pm 為 3×3 矩陣，且 $\hat{\mathbf{Q}}_{21}$ 、 $\hat{\mathbf{Q}}_{22}$ 對應於應力分量，由(3.23)代入(2.10)整理而得，且

$$\mathbf{E}^+ = \begin{bmatrix} e^{i\zeta_1(x_3-z_0)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\zeta_2(x_3-z_0)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\zeta_3(x_3-z_0)} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{E}^- = \begin{bmatrix} e^{i\zeta_1(z_1-x_3)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\zeta_2(z_1-x_3)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\zeta_3(z_1-x_3)} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{C}^\pm = \{C_1^\pm \quad C_2^\pm \quad C_3^\pm\} \quad (3.27)$$

代入邊界條件(3.21)，可得

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_{21} & \hat{\mathbf{Q}}_{22} \mathbf{E} \\ \hat{\mathbf{Q}}_{21} \mathbf{E} & \hat{\mathbf{Q}}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^+ \\ \mathbf{C}^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\phi}(k, z_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

其中，

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e^{i\zeta_1(z_1-z_0)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\zeta_2(z_1-z_0)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\zeta_3(z_1-z_0)} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

利用克拉瑪法則，求出(3.28)中的 $C_1^\pm \sim C_3^\pm$ 六個係數，

$$C_1^\pm \sim C_3^\pm = \frac{\Delta_{I,II}(k, x_3)}{\Delta_{Lamb}(\omega, k)} \quad (3.30)$$

其中，分子部分由(3.28)等號右端之邊界條件貢獻，決定響應的大小，分母為(3.28)等號左端行列式之結果，代表藍姆波的極點(poles)。將(3.30)代回(3.23)，可計算厚度模式壓電平板藍姆波響應。

厚度剪切模式壓電平板之藍姆波響應的推導類似厚度模式，定義另一個三維向量，

$$\mathbf{t}(k, x_3) = \begin{Bmatrix} \bar{T}_5 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{D}_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{Q}_{21} \quad \mathbf{Q}_{22}] \begin{bmatrix} \mathbf{E}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{E}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^+ \\ \mathbf{C}^- \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

其中， \mathbf{Q}_{21} 、 \mathbf{Q}_{22} 、 \mathbf{E}^\pm 為 3×3 矩陣，(3.31)的第三列元素為電位移之相關項， \mathbf{Q}_{21} 、 \mathbf{Q}_{22} 係將(3.23)代入(2.11)整理而得。邊界條件(3.22)導致一組聯立方程式：

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_{21} & \hat{\mathbf{Q}}_{22}\mathbf{E} \\ \mathbf{Q}_{21}\mathbf{E} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^+ \\ \mathbf{C}^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\phi}(k, z_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

利用克拉瑪法則可以求出 $C_1^\pm \sim C_3^\pm$ 六個係數，再代回(3.23)，即可得厚度剪切模式壓電平板位移響應之核函數 $\bar{u}_1(k, x_3)$ 及 $\bar{u}_3(k, x_3)$ 。

若交指叉電極的電極數目設為 $N=19$ ，厚度模式壓電平板上表面的位移響應 $\bar{u}_1(k, 0)$ 、 $\bar{u}_3(k, 0)$ 之響應圖形如圖 3-5 所示。圖中的尖突部分是因為計算的位移響應落在藍姆波極點附近，因此顯現出奇異性(singularity)。圖 3-6 所示的實線是以波數-頻率表示的藍姆波頻散曲線，頻率曲線上的每一點代表藍姆波的極點。圖 3-6 的等高線圖是根據圖 3-5 的表面位移響應之核函數

透視圖所繪製，後者的波數-頻率解析度較前者差，因此無法觀察到後者透視圖的稜線。但若提高計算解析度，則圖 3-6 中原本為圖 3-5 之等高線應與藍姆波頻散曲線更加接近。藍姆波之激發頻率一般較低，在 0 至 2 MHz 的頻率範圍內，圖 3-5 的結果顯示波數在 10(1/mm)以內的位移響應較大。當頻率小於 2MHz 且波數超過 10(1/mm)時，沒有其他藍姆波模態存在，位移響應函數值也較小。

圖 3-7 為表面位移響應之核函數大小的灰階圖，淺色部分的值較大，深色部分的值較小。圖中的結果顯示表面位移響應 $\bar{u}_1(k,0)$ 對於 $k=0$ 呈對稱， $\bar{u}_3(k,0)$ 則呈反對稱，瞭解核函數特性有助於簡化波數積分之運算。

厚度剪切模式之 $\bar{u}_1(k,0)$ 、 $\bar{u}_3(k,0)$ 亦有上述之特性，例如圖 3-8 所示，頻率及波數同樣取到 2 MHz 及 10(1/mm)。同樣，將核函數之等高線圖與頻散曲線做一對應，如圖 3-9。圖 3-10 所示為厚度剪切模式壓電平板表面位移響應核函數特性，由圖中可知 $\bar{u}_1(k,0)$ 對 $k=0$ 呈反對稱型式， $\bar{u}_3(k,0)$ 則呈對稱型式，與厚度模式情況剛好相反。而圖 3-11、圖 3-12 分別為厚度模式與厚度剪切模式藍姆波速度對波數之頻散曲線。圖 3-11、圖 3-12 所示的前 4 個模態，分別為 A_0 、 S_0 、 A_1 、 S_1 ，對照圖 3-6、圖 3-9，當 $k \rightarrow 0$ ， A_0 模態的相速度 $c \rightarrow 0$ ， S_0 模態的 c 為有限值。頻率 $f = (kc)/(2\pi)$ ，倘若固定 k ，因為 $c_{S_0} > c_{A_0}$ ，故 $f_{S_0} > f_{A_0}$ 。此外，因為 $c_{S_1} > c_{A_1}$ ，故 $f_{S_1} > f_{A_1}$ 。當 $k \rightarrow 0$ 時，若對應之 f 為有限值，則 $c \rightarrow \infty$ ，圖 3-11、圖 3-12 之 A_1 、 S_1 模態對應之頻散曲線可以決定。

圖 3-13 所示為厚度模式壓電平板在開路與短路電性邊界條件下，計算所得之藍姆波頻散曲線。厚度模式壓電平板表面交指叉換能器的上下表面電性條件與短路相同，其激發之藍姆波頻散曲線(破折線)應與短路電性條件的結果(實線)一致，交指叉換能器表面電極的電位大小影響位移響應，不影響藍姆波極點出現的位置。圖 3-14 則為厚度剪切模式壓電平板在開路、短路及混合電性邊界條件下，藍姆波的頻散曲線的比較。厚度剪切模式壓電平板表面交指叉換能器的上下表面屬於混合電性邊界條件，一邊為電位受到限制，另一邊則電位移受到限制，計算得到之頻散曲線介於開路與短路

電性條件之間，基本模態的藍姆波頻散曲線比較接近短路電性條件的結果。



第四章 數值分析與討論

4.1 壓電平板藍姆波之頻譜響應

4.1.1 核函數特性

壓電平板表面交指叉換能器激發的藍姆波頻率響應是經由一維波數積分計算之結果，本節探討之波數積分核函數為壓電平板表面之垂直位移 \bar{u}_3 。由圖 2-18 可知節距 $L=1\text{mm}$ ，IDT 激發之波數在 $\pi(1/\text{mm})$ 附近，與藍姆波波數 $k = 2\pi/\lambda$ 一致，其中激發波長 $\lambda = 2L$ 。對應至圖 3-6、圖 3-9 所示的厚度模式與厚度剪切模式之 A_0 板波頻散曲線，激發頻率分別為 0.8240 MHz、0.6533 MHz。圖 4-1 所示為頻率 0.75-0.85MHz，厚度模式壓電平板表面位移 \bar{u}_3 的核函數，圖 4-2 則為厚度剪切模式的表面位移核函數，兩者都是 $N=19$ 時，交指叉換能器激發的響應。該核函數之虛部數值遠小於實部，故圖中所顯示僅為實數部分，由圖 4-1 及 4-2 中可發現存在奇異值，且落在藍姆波極點(Lamb poles)上，參考圖 3-6、圖 3-9，先後出現的兩個藍姆波極點分別為 S_0 及 A_0 藍姆波。因為波數 $k = \omega/c$ ，在固定頻率下， S_0 藍姆波相速度較 A_0 快，故 S_0 藍姆波極點出現在波數較小處。當觀察頻率接近激發頻率時， A_0 之波數愈接近 $\pi(1/\text{mm})$ ，核函數的數值應為最大。在圖 4-1(i)中， $k \approx 0.5(1/\text{mm})$ 時，還存在著另一個模態，如圖中以圓圈標示的部分，對應圖 3-6 的頻散曲線，應為 A_1 藍姆波極值出現處。

4.1.2 波數積分

藍姆波頻域響應的波數積分之通式如下：

$$I(x_1, x_3, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(k, x_3, \omega) e^{ikx_1} dk = I_T + I_L \quad (4.1)$$

其中，核函數 $\bar{g}(k, x_3)$ 即為本文計算之 $\bar{u}_1(k, x_3)$ 、 $\bar{u}_3(k, x_3)$ 。波數積分之困難在於波數之指數函數為高度振盪(oscillation)的函數，且核函數含有藍姆波的極

點(pole)，因此數值積分之精確度及效率的要求極為重要。

若只考慮波朝單(正 x_1)方向傳遞,則(4.1)的積分下限可以改成 $k = 0$ 。(4.1)之波數積分可分成兩部分處理,一部份是從 $k = 0$ 起之有限積分 I_T , 另一部份則是剩餘的尾部積分 I_L ,

$$I_T(x_1, x_3, \omega) = \int_0^{k_c} \bar{g}(k, x_3, \omega) e^{ikx_1} dk \quad (4.2)$$

$$I_L(x_1, x_3, \omega) = \int_{k_c}^{\infty} \bar{g}(k, x_3, \omega) e^{ikx_1} dk \quad (4.3)$$

I_T 是包含極點存在範圍之積分, 積分路徑需採如圖 4-3 所示的避點積分方式, 避開奇異點。本文僅考慮波為向正 x_1 方向傳遞, 故取此積分路徑, 若向負 x_1 方向波傳, 則取包含負的波數之下半圓積分路徑。尾部積分 I_L 之核函數 $\bar{g}(k, x_3, \omega)$ 已不包含極點, 其數值積分不受到藍姆波極點之影響, 收斂較快。

本文採用 Lih 與 Mal [13]發展的波數積分, 進行數值計算。將(4.1)改為

$$I_s(x_1, \omega) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{g}_s(k, \omega) e^{ikx_1} dk \quad (4.4)$$

核函數若具有對稱性, 將會使(4.4)積分更為簡化。先以二階齊次多項式近似核函數 $\bar{g}_s(k, \omega)$,

$$\bar{g}_s(k, \omega) = \sum_{m=0}^2 F_m k^m \quad (4.5)$$

此處 F_m 為一定值, 由核函數決定, $m = 0, 1, 2$, 若核函數趨近於極點時, F_2 會隨著增大。將波數積分的上下限 α_1 、 α_2 以線性轉換映射至 -1 至 1 , 則波數 k 的轉換關係為

$$k = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \xi = A_1 + A_2 \xi \quad (4.6)$$

(4.4)轉換為

$$I_s(x_1, \omega) = \int_{-1}^1 \bar{g}_s(\xi, \omega) K e^{i\xi X} d\xi \quad (4.7)$$

此處，核函數 $\bar{g}_s(k, \omega) = \bar{g}_s(\xi, \omega)$ ， $K = A_2 e^{i4x_1}$ ， $X = A_2 x_1$ ，核函數的近似式可以表成

$$\bar{g}_s(\xi, \omega) = \sum_{m=0}^2 f_m \xi^m \quad (4.8)$$

其中的三個係數 f_0 、 f_1 、 f_2 由 $\bar{g}_s(k, \omega)$ 決定。參考圖 4-4(a)，圖中具有奇異性之曲線為核函數， $\xi = -1, 0, 1$ 對應的函數值與 $k = \alpha_1, (\alpha_1 + \alpha_2)/2, \alpha_2$ 對應的函數值相同，兩者具有下列關係式：

$$\bar{g}_s(\alpha_1, \omega) = f_0 - f_1 + f_2 = g_1 \quad (4.9a)$$

$$\bar{g}_s((\alpha_1 + \alpha_2)/2, \omega) = f_0 = g_2 \quad (4.9b)$$

$$\bar{g}_s(\alpha_2, \omega) = f_0 + f_1 + f_2 = g_3 \quad (4.9c)$$

由上式可以解得

$$f_0 = g_2 \quad (4.10a)$$

$$f_1 = (g_3 - g_1)/2 \quad (4.10b)$$

$$f_2 = (g_3 + g_1)/2 - g_2 \quad (4.10c)$$



因此(4.7)可以轉換為

$$I_s(x_1, \omega) = K \sum_{m=0}^2 f_m I_m \quad (4.11)$$

其中，

$$I_m = \int_{-1}^1 \xi^m e^{i\xi X} d\xi$$

此處，

$$I_0 = \frac{2 \sin X}{X}, \quad I_1 = [I_0 - 2 \cos X] \frac{i}{X}, \quad I_2 = I_0 + i \frac{2}{X} I_1$$

在波數積分中，將積分範圍等分成數個區段，每一個區段均由三個節點組成之拋物線近似，計算每一區段下之面積，如圖 4-4(b)，

$$\left| \frac{J_p^{(n)} - \sum_{m=1}^2 J_m^{(n+1)}}{J_p^{(n)}} \right| < \varepsilon_{error} \quad (4.12)$$

直到達到(4.12)收斂， J 之上標代表分割次數，下標代表在某次分割中所佔之區域。此積分之優點在於，當覺得分割次數不夠需繼續分割時，原來分割點之數值均有保留，僅需計算新的分割點即可，故可節省計算時間；但在遠離極點處之核函數數值均較小，故可能造成浪費計算資源在遠離極點處；總之，選擇適當之收斂誤差 ε_{error} ，即可達到精準收斂的目的。

4.1.3 表面位移之頻域響應

在壓電平板表面交指叉換能器以外的場點(field point)上，位移的頻譜響應是以波數積分計算得到。數值積分的路徑係採避點積分分式，在波數的複數平面上，沿著正向波傳之藍姆波極點的下方 ε 偏量(單位為 1/mm)的路徑進行數值積分。故 ε 之選定亦決定積分之準確性，若 ε 太小，積分路徑太靠近極點，核函數的奇異性會造成數值計算的誤差隨之增大；若 ε 太大，則積分路徑太遠離該點，亦會造成數值誤差。圖 4-5 所示數值積分結果屬於交指叉電極數目 $N=19$ ，場點與電極原點的距離 6 倍於交指叉電極總長的半寬(即 $x_1 = 3L_t$)，選取不同的 ε 值所計算之厚度模式表面位移 \bar{u}_3 頻率響應。圖中結果顯示 $\varepsilon = 10^{-3}$ (1/mm) 與 $\varepsilon = 10^{-5}$ (1/mm) 所得之頻率響應較為接近，前者較後者平滑，後者的峰值附近呈現跳動的數值雜訊。積分路徑 $\varepsilon = 10^{-10}$ (1/mm) 太靠近藍姆波極點，導致計算不穩定，使得數值結果偏大而不正確；積分路徑 $\varepsilon = 10^{-1}$ (1/mm) 太遠離極點，導致積分結果太小而錯誤；積分路徑 $\varepsilon = 10^{-3}$ (1/mm) 的頻譜響應平滑，在轉換至時域響應時，不會出現非預期的高頻雜訊，故避點積分路徑選偏移 $\varepsilon = 10^{-3}$ (1/mm)，進行計算。

在圖 4-5 所示的表面位移頻譜響應圖上，2 MHz 以下具有三個較大的響應，分別出現在 0.85、1.15、1.6 MHz 附近，在此場點上觀測的時域訊號應該會有三個明顯的模態存在。壓電平板表面交指叉換能器的節距為 1 mm，因此交指叉換能器激發的藍姆波以波數 $k = \pi$ (1/mm) 最為顯著。參考圖 3-6

之藍姆波頻散曲線，當 $k = \pi$ (1/mm)時，在頻率 0.85、1.15、1.6 MHz 附近分別對應著 A_0 、 S_0 、 A_1 藍姆波，映證圖 4-5 中較大的表面位移頻譜響應為前述的三個藍姆波模態。

圖 4-6 所示為不同 ε 值計算之厚度剪切模式壓電平板表面位移 \bar{u}_3 的頻率響應，在 0.65、1.3、1.85 MHz 附近也分別出現三個較大的響應。對照圖 3-9 所示之混合電性邊界條件下，厚度剪切模式壓電平板的藍姆波頻散曲線，當 $k = \pi$ 時，在上述三個頻率附近，依序出現 A_0 、 S_0 、 A_1 三個模態的藍姆波。

4.2 壓電平板藍姆波表面位移之時域響應

4.2.1 激發源函數

假設壓電平板表面交指叉換能器承受一漢尼函數(Hanning function)之電位變化，其表示式如下

$$f(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{2\pi(t - t_s)}{\tau} \right] \right\} \quad t_s < t < t_s + \tau \quad (4.13)$$

圖 4-7 所示為時間延遲 $t_s = 10\mu s$ ，週期 $\tau = 1.214\mu s$ 之漢尼函數及對應之頻譜，激發源函數的週期設為壓電平板藍姆波激發頻率的倒數，厚度模式壓電平板為 $1.214\mu s$ ，厚度剪切模式則設為 $1.531\mu s$ 。

4.2.2 電極數目之影響

波源函數(4.13)經快速傅立葉轉換(FFT)，獲得對應之波源頻譜，與壓電平板藍姆波表面位移頻譜響應相乘，即褶積(convolution)運算，再經由逆快速傅立葉轉換(IFFT)，可得到藍姆波表面位移之時域響應。在計算過程中，將褶積運算後的函數乘上一窗形函數(window function)，移除低頻之 dc 偏量及頻率超過 2MHz 的高頻影響。厚度模式及厚度剪切模式之時域響應計算的時間間隔(time interval)，或稱取樣時間(sampling time)分別設為 $0.06068\mu s$ 、 $0.07653\mu s$ ，取樣點為 2048 個資料點，涵蓋藍姆波自交指叉電極

中點至接收場點的波程時間。

若壓電平板表面交指叉換能器的電極數目為 $N=19$ ，厚度模式壓電平板近場的表面位移時域響應模擬結果示於圖 4-8，場距自 l 至 $1.5l$ ，間隔 $0.1l$ 。圖 4-9 所示則為厚度剪切模式壓電平板近場的表面位移時域響應之模擬結果。場距 l 位於交指叉電極的邊緣，圖 4-8、4-9 的藍姆波位移模擬結果顯示初始位移具有較大的響應，這是因為本文先前限定 $x_1 = l$ 處的電位為零，此處電場梯度變化劇烈，導致訊號不穩定，或是與 Parton *et al* [6] 預測交指叉電極邊緣具有應力強度因子有關，尚需未來進一步的查證。

圖 4-10、圖 4-11 顯示電極數目 $N=19$ ，場距自 $5l$ 至 $15l$ ，間隔 $5l$ 一組的厚度模式及厚度剪切模式壓電平板遠場的藍姆波位移響應結果。倘若電極數目愈多，所激發的藍姆波會愈趨於穩態響應，反之，將愈趨近於暫態響應。電極數目 $N=19$ 的遠場模擬響應具有較長的振盪時間，若振盪時間大於兩個模態之藍姆波的波程時間差，將難以區分模態所屬。

為了區分壓電平板表面位移響應各自對應的藍姆波模態，將電極數目減少至 $N=9$ ，圖 4-12、圖 4-13 所示為厚度模式與厚度剪切模式壓電平板的近場模擬結果，在鄰近交指叉電極的邊緣處(即場距為 l)，初始位移響應依然較大，隨著場距增加，振幅漸趨均勻一致，頻散現象不明顯。圖 4-14、圖 4-15 則為藍姆波表面位移之遠場模擬結果，遠場的藍姆波表面位移響應顯現出些微的頻散現象。當場距增為 $15l$ 時，已經可以明顯區分出兩個藍姆波模態。

圖 4-8~圖 4-15 的模擬結果顯示，厚度模式壓電平板的 S_0 與 A_0 藍姆波的位移較厚度剪切模式的位移大，其中，兩種模式之 S_0 藍姆波的位移差異尤其顯著。厚度模式激發的對稱波為壓電平板極化方向收縮造成，厚度剪切模式的對稱波則為橫向於壓電平板極化方向的收縮所造成，壓電平板的壓電常數 $d_{33} > |d_{31}|$ ，故厚度剪切模式之 S_0 藍姆波位移響應較厚度模式小，在模態分辨上，也將會較為困難。

表 3 根據藍姆波遠場位移響應的模擬結果，計算厚度模式與厚度剪切模式壓電平板藍姆波群速度，並與 $k = \pi$ 所對應的頻散曲線相速度比較。由

於考慮單頻(monochromatic)藍姆波朝 x_1 方向傳遞，群速度應與相速度一致。兩種計算方法的精確度不一，兩者的計算結果存有一些差異，但大約可推得兩個模態先後分別應為 S_0 與 A_0 藍姆波；速度較快的為 S_0 波，較慢的為 A_0 波。

4.2.3 電極寬度之影響

本文先前將交指叉電極的寬度設為電極節距的一半，即 $a = 0.5$ ，進行前面相關的各項模擬。本節將討論電極寬度對響應之影響，以電極數目 $N = 19$ 激發的準穩態藍姆波，於場距 $10l$ 處之位移響應為基準，比較厚度模式及厚度剪切模式壓電平板之響應與電極寬度關係。如圖 4-16、圖 4-17 所示，激發藍姆波的交流電壓大小設為 1 volt，當電極寬度愈大，產生的電場強度愈大，激發的藍姆波位移響應也愈大。但本文結果與 Rose *et al* [9] 的實驗結果， $a = 0.5$ 激發的導波響應最大不一致。本文先前的假設不考慮電極重量，分析結果自然與真實情況有所差別。當電極寬度超過電極節距一半時，電極重量所造成的影響將會抑制位移大小，電極寬度 $a > 0.5$ 的位移響應將較 $a < 0.5$ 小。因此，若考慮電極重量的因素，超過 $a > 0.5$ 時，圖 4-16、圖 4-17 的響應曲線應會逐漸降低，將有可能與 Rose *et al* [9] 的結果趨勢近似。

第五章 結論與展望

本文依據 Engan [5] 求解半無限域表面交指叉換能器電場的方法，假設壓電材料的機電耦合效應極為微小，求解壓電平板表面交指叉電極的電位連續函數，將其視為壓電平板表面電性之近似邊界條件，分析厚度模式及厚度剪切模式壓電平板表面交指叉換能器激發藍姆波的響應。

本文探討短路、開路及混合電性邊界條件，對於厚度模式及厚度剪切模式壓電平板的藍姆波相速度之影響。開路邊界下，藍姆波相速度大於短路邊界的相速度，混合電性邊界條件下之藍姆波相速度值則介於短路及開路兩者之間。厚度模式壓電平板表面交指叉換能器激發的藍姆波屬於短路形式，厚度剪切模式激發的藍姆波則屬於混合電性形式。

數值積分計算壓電平板藍姆波位移響應採用避點積分，避開藍姆波的極點，在複數的波數平面上，路徑偏移量設為 $\varepsilon = 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$ ，若偏移量太小，積分路徑太接近奇異點，會造成數值計算上的誤差。若偏移量太大，亦會造成誤差。在進行波數積分前，需先測試避點積分的偏移量選擇是否適當。

壓電平板表面交指叉換能器的電極數目愈多，愈能激發出單頻、穩態的藍姆波，但是不同模態的藍姆波將混雜在一塊，不易自時域響應中區分出來。本文計算例之交指叉換能器的電極數目為 9 及 19，電極數目為 19 時，激發的藍姆波已幾乎達到穩態，但是難以分辨不同的藍姆波模態；電極數目為 9 時，激發的藍姆波隨著場距增加，在近場範圍逐漸趨於穩態，在遠場範圍又逐漸趨於暫態響應，且頻散現象較為明顯。電極數目的選擇是不同應用需要考慮的因素之一。

本文忽略表面交指叉電極的質量對於激發藍姆波響應的影響，當交指叉電極寬度愈大時，壓電平板的電場強度增加，藍姆波位移之時域響應振幅隨之單調增加，計算的結果與 Rose *et al* [9] 激發結構管波實驗的結論不一致，當電極寬度超過電極節距一半時，電極質量應該會對藍姆波的響應產生抑制效果。

本研究提供一解析解，分析交指叉換能器在厚度模式及厚度剪切模式壓電平板表面激發藍姆波之波傳特性。壓電平板表面的電位為忽略機電耦

合效應求得的級數近似解，未來可考慮採用 Parton *et al* [6]之雙重積分方法求解表面位移，降低因忽略機電耦合效應造成模擬結果的誤差。並考慮表面電極質量對激發壓電平板藍姆波之影響，使模擬結果更逼近真實情況。

厚度模式壓電平板較厚度剪切模式容易激發出較大響應之藍姆波，特別是 S_0 藍姆波的振幅幾乎與 A_0 藍姆波響應一般大，這是施加表面曳力激發藍姆波方式無法比擬。厚度模式壓電平板的 S_0 波係於板厚極化方向膨脹、收縮，厚度剪切模式的 S_0 波卻為橫向於水平極化方向的膨脹、收縮，因為壓電平板的壓電常數 $d_{33} > |d_{31}|$ ，厚度剪切模式壓電平板的 S_0 波較 A_0 波的振幅小很多。厚度模式壓電平板的製作成本較低，但是激發藍姆波所需的電源需要具有接地輸出之三端點功率放大器；反之，厚度剪切模式壓電平板的製作成本較高，但是只需要兩端點相對電壓輸出之功率放大器，就可以激發藍姆波，儀器成本較廉。



參考文獻

- [1] H. Lamb (1916), "On waves in an elastic plate," *Proc. R. Soc. Lond.*, **A93**, 114-128.
- [2] J. L. Synge (1957), "Elastic waves in anisotropic media," *J. Math. and Phys.*, **35**, 323-334.
- [3] A. H. Nayfeh and D. E. Chimenti (1989), "Free wave propagation in plates of general anisotropic media," *ASME Journal of Applied Mechanics*, **56**, 881-886.
- [4] S. G. Joshi and R. M. White (1969), "Excitation and detection of surface elastic waves in piezoelectric crystals," *J. Acoust. Soc. Am.*, **46**(1), 17-27.
- [5] H. Engan (1969), "Excitation of elastic surface waves by spatial harmonics of interdigital transducer," *IEEE Transactions on Electron Devices*, **ED-16** (12), 1014-1017.
- [6] V. Parton, B. Kudryavtsev, N. Senik, and J. Tani (1994), "Rayleigh waves excitation using a pair of oppositely charged electrodes," *Int. J. of Applied Electromagnetics in Materials*, **5**, 291-310.
- [7] Y. Jin and S. G. Joshi (1991), "Lamb wave propagation in piezoelectric plates," *IEEE Ultrasonics Symposium*, 1023-1027.
- [8] S. G. Joshi and Y. Jin (1991), "Excitation of ultrasonic Lamb waves in piezoelectric plates," *J. Appl. Phys.*, **69**(12), 8018-8024.
- [9] J. L. Rose, S. P. Pelts, and M. J. Quarry (1998), "A comb transducer model for guided wave NDE," *Ultrasonics*, **36**, 163-169.
- [10] Z. Sun, Y. Mao, W. Jiang, and D. Zhang (1998), "Influence of electrical boundary conditions on Lamb wave propagation in piezoelectric plates," *IEEE Ultrasonics Symposium*, 435-438.
- [11] J. Jin, S. T. Quek, and Q. Wang (2003), "Analytical solution of excitation of Lamb waves in plates by inter-digital transducers," *Proc. R. Soc. Lond.*, **A459**, 1117-1134.

- [12] M. Dravinski and T. K. Mossessian (1988), "On evaluation of the Green functions for harmonic line loads in viscoelastic half space," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**, 823-841.
- [13] S. S. Lih and A. K. Mal (1992), "Elastodynamic response of a uni-directional composite laminate to concentrated surface loads: Part II," *ASME Journal of Applied Mechanics*, **59**, 887-892.
- [14] B. A. Auld (1973), *Acoustic Fields and Waves in Solids*, John Wiley & Sons, New York.
- [15] V. M. Ristic (1983), *Principles of Acoustic Devices*, Krieger, Toronto, 174-211.
- [16] D. Royer and E. Dieulesaint (2000), *Elastic Waves in Solids, vols. I & II*, Springer, New York.
- [17] *An American National Standard : IEEE Standard on Piezoelectricity*, Standards Committee of the IEEE Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control Society, 1988, IEEE, New York.
- [18] A. Erdelyi (1953), *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, New York.

附錄 A

材料的晶格有不同的對稱形式，彈性波在材料中的波傳行為因晶格切面的不同而有所差異。對同一座標系而言，材料因主軸的旋轉，對應不同之材料矩陣[14]。茲將一階到四階張量的轉換分述於下：

1. 一階張量(如本文之電位移 D_i 及電場強度 E_i)

$$A'_i = \alpha_{ik} A_k \sim \alpha \mathbf{A} \quad (1.a)$$

其中，

$$\alpha_{ik} = e'_i \cdot e_k \sim \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

此處，“ \sim ”表示相當於矩陣之形式， α_{ik} 為旋轉後材料主軸的第 i 個基底向量 (base vector) 在旋轉前第 k 個材料主軸之投影量，如圖 1-a，且 $\alpha^T = \alpha^{-1}$ ， α 為正交矩陣，稱為轉換矩陣(transformation matrix)。

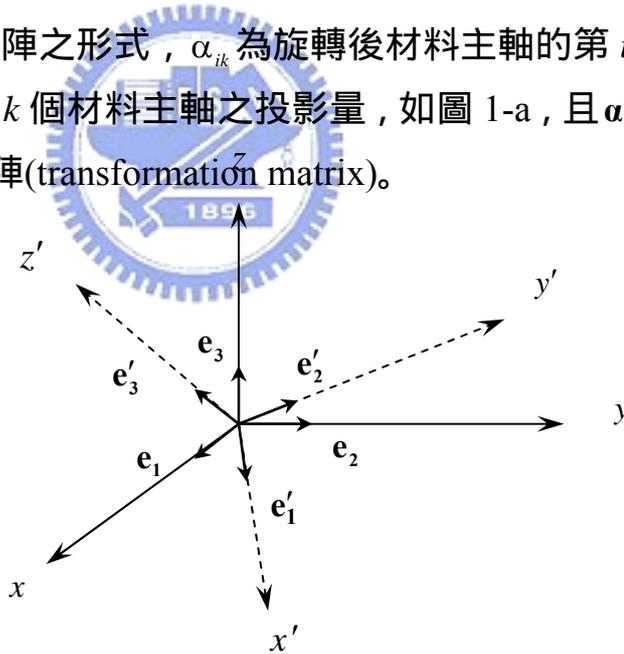


圖 A.1 兩個正交(orthonormal)座標系統，

x' 、 y' 、 z' 為旋轉後之材料主軸， x 、 y 、 z 為旋轉前之材料主軸

2. 二階張量(如本文之應力 T_{ij} 及應變 S_{kl})

$$A'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} A_{kl} \sim \alpha \mathbf{A} \alpha^T$$

若將本文中之兩個對稱的二階張量表示成矩陣，轉換關係可整理成

$$\begin{aligned} T'_p &\sim \mathbf{T}_\sigma \mathbf{T} \\ S'_q &\sim \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{S} \end{aligned} \quad (1.b)$$

其中，

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^2 & \alpha_{12}^2 & \alpha_{13}^2 & 2\alpha_{12}\alpha_{13} & 2\alpha_{11}\alpha_{13} & 2\alpha_{11}\alpha_{12} \\ \alpha_{21}^2 & \alpha_{22}^2 & \alpha_{23}^2 & 2\alpha_{22}\alpha_{23} & 2\alpha_{21}\alpha_{23} & 2\alpha_{21}\alpha_{22} \\ \alpha_{31}^2 & \alpha_{32}^2 & \alpha_{33}^2 & 2\alpha_{32}\alpha_{33} & 2\alpha_{31}\alpha_{33} & 2\alpha_{31}\alpha_{32} \\ \alpha_{21}\alpha_{31} & \alpha_{22}\alpha_{32} & \alpha_{23}\alpha_{33} & (\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{23}\alpha_{32}) & (\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{33}) & (\alpha_{31}\alpha_{22} + \alpha_{21}\alpha_{32}) \\ \alpha_{11}\alpha_{31} & \alpha_{12}\alpha_{32} & \alpha_{13}\alpha_{33} & (\alpha_{13}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{33}) & (\alpha_{11}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{31}) & (\alpha_{11}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{31}) \\ \alpha_{11}\alpha_{21} & \alpha_{12}\alpha_{22} & \alpha_{13}\alpha_{23} & (\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{22}) & (\alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{21}) & (\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^2 & \alpha_{12}^2 & \alpha_{13}^2 & \alpha_{12}\alpha_{13} & \alpha_{11}\alpha_{13} & \alpha_{11}\alpha_{12} \\ \alpha_{21}^2 & \alpha_{22}^2 & \alpha_{23}^2 & \alpha_{22}\alpha_{23} & 2\alpha_{21}\alpha_{23} & \alpha_{21}\alpha_{22} \\ \alpha_{31}^2 & \alpha_{32}^2 & \alpha_{33}^2 & \alpha_{32}\alpha_{33} & \alpha_{31}\alpha_{33} & \alpha_{31}\alpha_{32} \\ 2\alpha_{21}\alpha_{31} & 2\alpha_{22}\alpha_{32} & 2\alpha_{23}\alpha_{33} & (\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{23}\alpha_{32}) & (\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{33}) & (\alpha_{31}\alpha_{22} + \alpha_{21}\alpha_{32}) \\ 2\alpha_{11}\alpha_{31} & 2\alpha_{12}\alpha_{32} & 2\alpha_{13}\alpha_{33} & (\alpha_{13}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{33}) & (\alpha_{11}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{31}) & (\alpha_{11}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{31}) \\ 2\alpha_{11}\alpha_{21} & 2\alpha_{12}\alpha_{22} & 2\alpha_{13}\alpha_{23} & (\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{22}) & (\alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{21}) & (\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}) \end{bmatrix}$$

且 $\mathbf{T}_\sigma^T = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1}$ ， $\mathbf{T}_\varepsilon^{-1} = \mathbf{T}_\sigma^T$ 。

3. 三階張量(如本文之壓電常數 e_{ijk})

$$A'_{ijk} = \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} A_{lmn}$$

由(2.11)式，當 $\mathbf{E}=0$ 時，

$$\mathbf{D} = \mathbf{eS} \quad (1.c)$$

座標旋轉後，材料常數的新矩陣關係如下：

$$\mathbf{D}' = \mathbf{e}'\mathbf{S}' \quad (1.d)$$

由(1.a)及(1.b)，可將 $\mathbf{D} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{D}'$ ， $\mathbf{S} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1}\mathbf{S}'$ 代入(1.c)與(1.d)式，對照可得

$$\mathbf{e}' = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}\mathbf{T}_\sigma^T$$

4. 四階張量(如本文之材料剛性係數 C_{ijkl})

$$A'_{ijkl} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{ko} \alpha_{lp} A_{mnop}$$

由(2.10)式，當 $E=0$ 時，

$$\mathbf{T} = \mathbf{CS}$$

類似三階張量之轉換方法，將 \mathbf{T} 及 \mathbf{S} 座標轉換至新座標系，成為 \mathbf{T}' 及 \mathbf{S}' 。

整理後，可得新的剛度矩陣， \mathbf{C}' 與 \mathbf{T}' 、 \mathbf{S}' 的關係，與上式比較，可得

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}'_o \mathbf{C} \mathbf{T}'_o^T$$



附錄 B

假設一函數型式如下：

$$f(x) = \begin{cases} \cos(bx) & , |x| \leq l \\ 0 & , |x| > l \end{cases}$$

其傅立葉轉換為

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-l}^l \cos(bx) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{\sin[(b+k)l]}{b+k} + \frac{\sin[(b-k)l]}{b-k} \end{aligned} \quad (2.a)$$

考慮另一函數型式，

$$f(x) = \begin{cases} \sin(bx) & , |x| \leq l \\ 0 & , |x| > l \end{cases}$$

其傅立葉轉換為

$$\bar{f}_2(k) = \frac{i \sin[(b+k)l]}{b+k} - \frac{i \sin[(b-k)l]}{b-k} \quad (2.b)$$

(2.31)、(2.45)與(2.48)、(2.51)之電位、電場型式類似上述函數，故 b 及 l 對應電場中之參數分別為 $(2n+1)\pi/L$ 、 $NL/2$ (即 $L_r/2$)，故由(2.31)、(2.45)與(2.48)、(2.51)可得經由傅立葉轉換之電場型式。

厚度模式壓電平板表面交指叉電極產生的電位及電場分別為

$$\bar{\Phi}(k, x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b} G_n \sinh[bm(h-x_3)] \bar{f}_2(k) \quad (2.c)$$

$$\bar{E}_1(k, x_3) = -\sum_{n=0}^{\infty} G_n \sinh[bm(h-x_3)] \bar{f}_1(k) \quad (2.d)$$

$$\bar{E}_3(k, x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} m G_n \cosh[bm(h-x_3)] \bar{f}_2(k) \quad (2.e)$$

厚度剪切模式壓電平板表面交指叉電極生成的電位及電場為

$$\bar{\phi}(k, x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b} G_n \cosh[bm(h - x_3)] \bar{f}_2(k) \quad (2.f)$$

$$\bar{E}_1(k, x_3) = -\sum_{n=0}^{\infty} G_n \cosh[bm(h - x_3)] \bar{f}_1(k) \quad (2.g)$$

$$\bar{E}_3(k, x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} mG_n \sinh[bm(h - x_3)] \bar{f}_2(k) \quad (2.h)$$



附錄 C

(3.6)中之領導係數

厚度模式壓電平板：

$$B_6 = -a_{44}(a_{33}d_{33} + b_{33}^2)$$

$$B_4 = Ca_{33}a_{44} - Aa_{33}d_{33} - Ba_{44}d_{33} + 2DEb_{33} - E^2a_{33} - 2Fa_{44}b_{33} - Ab_{33}^2 + D^2d_{33}$$

$$B_2 = BCa_{44} + ACa_{33} - ABd_{33} + 2DEF - BE^2 - 2AFb_{33} - F^2a_{44} - D^2C$$

$$B_0 = A(BC - F^2)$$

其中

$$A = a_{11}s_1^2 - 1$$

$$B = a_{44}s_1^2 - 1$$

$$C = -d_{11}s_1^2$$

$$D = (a_{13} + a_{44})s_1$$

$$E = (b_{31} + b_{15})s_1$$

$$F = b_{15}s_1^2$$



厚度剪切模式壓電平板：

$$B_6 = -a_{11}(a_{44}d_{11} + b_{15}^2)$$

$$B_4 = Ca_{11}a_{44} - Aa_{11}d_{11} - Ba_{44}d_{11} + 2DFb_{15} - F^2a_{44} - 2Ea_{11}b_{15} - Bb_{15}^2 + D^2d_{11}$$

$$B_2 = BCa_{44} + ACa_{11} - ABd_{11} + 2DEF - AF^2 - 2BEb_{15} - E^2a_{11} - D^2C$$

$$B_0 = B(AC - E^2)$$

其中

$$A = a_{33}s_1^2 - 1$$

$$B = a_{44}s_1^2 - 1$$

$$C = -d_{33}s_1^2$$

$$D = (a_{13} + a_{44})s_1$$

$$E = b_{33}s_1^2$$

$$F = (b_{31} + b_{15})s_1$$

由(3.4)可得偏振向量 $A_i^{(j)}$ 比例式

$$\frac{A_1^{\pm(j)}}{p_{1j}^{\pm}} = \frac{A_3^{\pm(j)}}{p_{3j}^{\pm}} = \frac{A_4^{\pm(j)}}{p_{4j}^{\pm}} = \bar{C}_j^{\pm}$$

其中，上標 \pm 各表示代 $\pm \zeta_j$ 相對應的數值；而其特徵向量 p_{ij}

$$p_{1j}^{\pm}(\pm\eta_j) = \begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{34} & \Gamma_{44} \end{vmatrix}$$

$$p_{3j}^{\pm}(\pm\eta_j) = - \begin{vmatrix} \Gamma_{13} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14} & \Gamma_{44} \end{vmatrix}$$

$$p_{4j}^{\pm}(\pm\eta_j) = \begin{vmatrix} \Gamma_{13} & \Gamma_{33} \\ \Gamma_{14} & \Gamma_{34} \end{vmatrix}$$

就厚度模式壓電平板而言，列出代 $\pm \eta_j$ 所對應之 p_{ij}^{\pm} 與代 $+\eta_j$ 之 p_{ij} 關係

$$p_{1j}^{\pm}(\pm\eta_j) = p_{1j}^{+}(+\eta_j)$$

$$p_{3j}^{\pm}(\pm\eta_j) = \pm p_{3j}^{+}(+\eta_j)$$

$$p_{4j}^{\pm}(\pm\eta_j) = \pm p_{4j}^{+}(+\eta_j)$$

就厚度剪切模式壓電平板而言

$$p_{1j}^{\pm}(\pm\eta_j) = p_{1j}^{+}(+\eta_j)$$

$$p_{3j}^{\pm}(\pm\eta_j) = \pm p_{3j}^{+}(+\eta_j)$$

$$p_{4j}^{\pm}(\pm\eta_j) = p_{4j}^{+}(+\eta_j)$$



表 1 符號之簡化

下標 <i>ij</i> or <i>kl</i>	簡化後之下標 <i>p</i> or <i>q</i>
11	1
22	2
33	3
23 or 32	4
13 or 31	5
12 or 21	6

表 2 PZT-5A 之材料常數

剛性係數 (GPa)				
C_{11}^E	C_{33}^E	C_{12}^E	C_{13}^E	C_{44}^E
138.3	131.3	93.16	95.06	21.05

註： $C_{66}^E = (C_{11}^E - C_{12}^E)/2$

壓電係數 (C/m ²)			介電係數		密度 (g/cm ³)
e_{15}	e_{31}	e_{33}	$\epsilon_{11}^S / \epsilon_0$	$\epsilon_{33}^S / \epsilon_0$	ρ
12.32	-4.019	16.58	917.2	844.4	7.75

註：真空中介電常數 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m

表 3 不同方法計算之壓電平板藍姆波相速度比較表

number of electrodes	mm / μ s	Phase velocity (mm/ μ s)		Phase velocity (mm/ μ s)	
		from simulation		from dispersion curves	
		A_0	S_0	A_0	S_0
N=19	Thickness mode	1.58	2.25	1.65	2.33
	Thickness shear	1.62	NA	1.31	2.72
N=9	Thickness mode	1.56	2.25	1.65	2.33
	Thickness shear	1.53	2.81	1.31	2.72

註：NA：Not Available



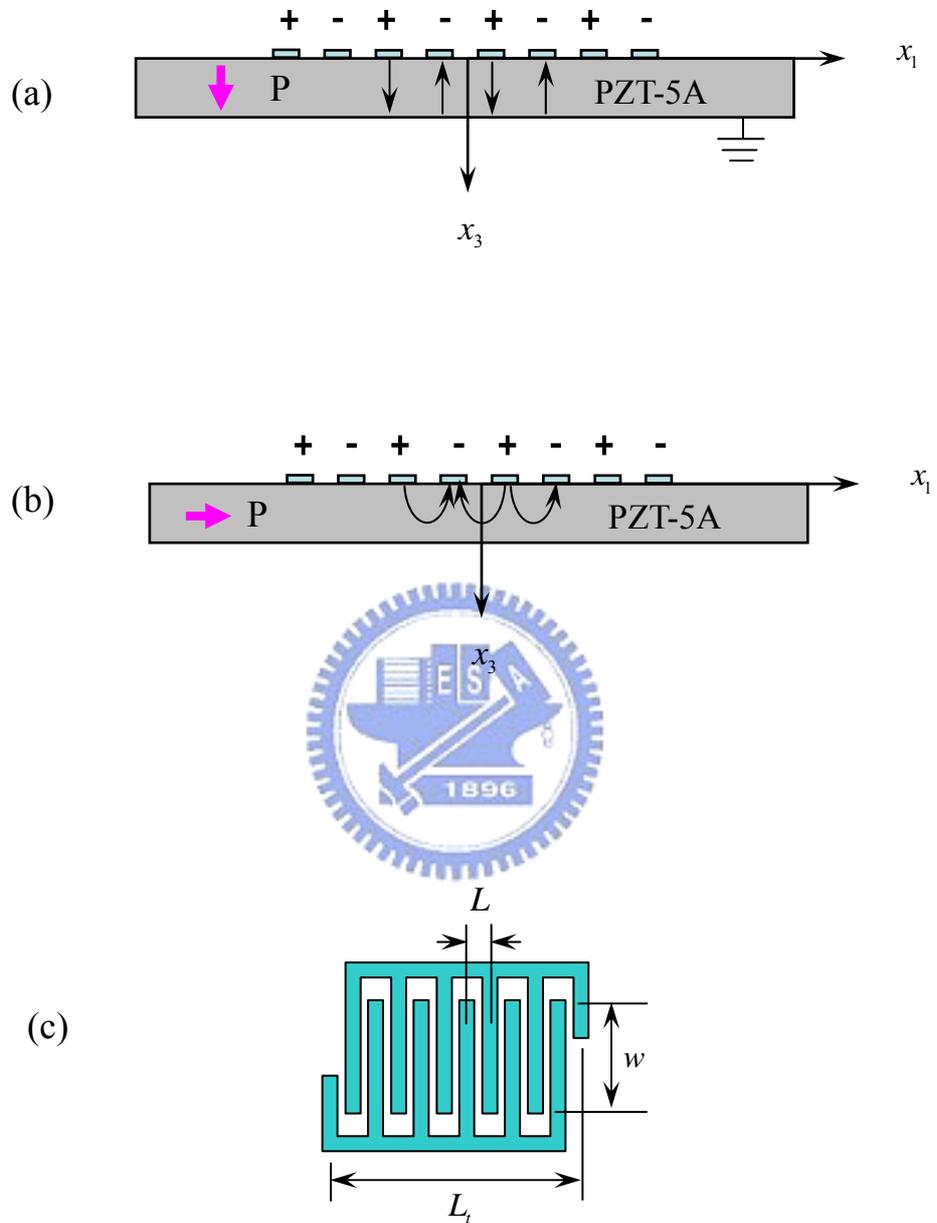


圖 1-1 (a) 垂直極化、(b) 水平極化壓電陶瓷平板表面交指叉換能器及電性示意圖，(c) 交指叉電極上視圖

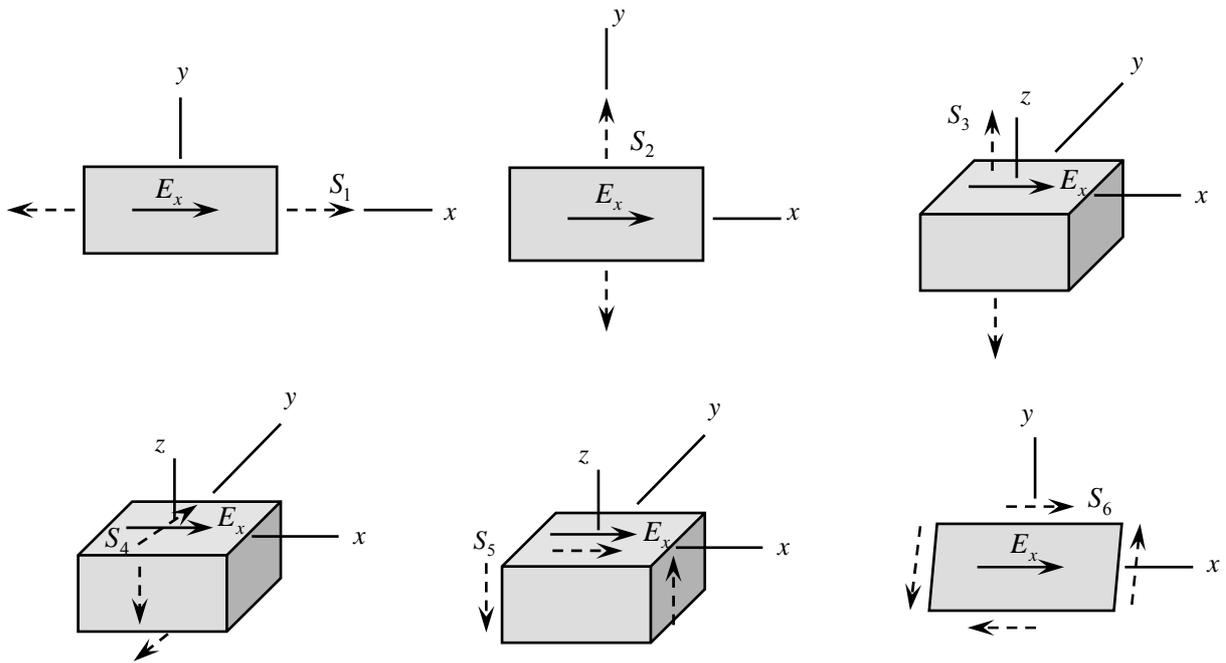


圖 2-1 機電耦合基本型態

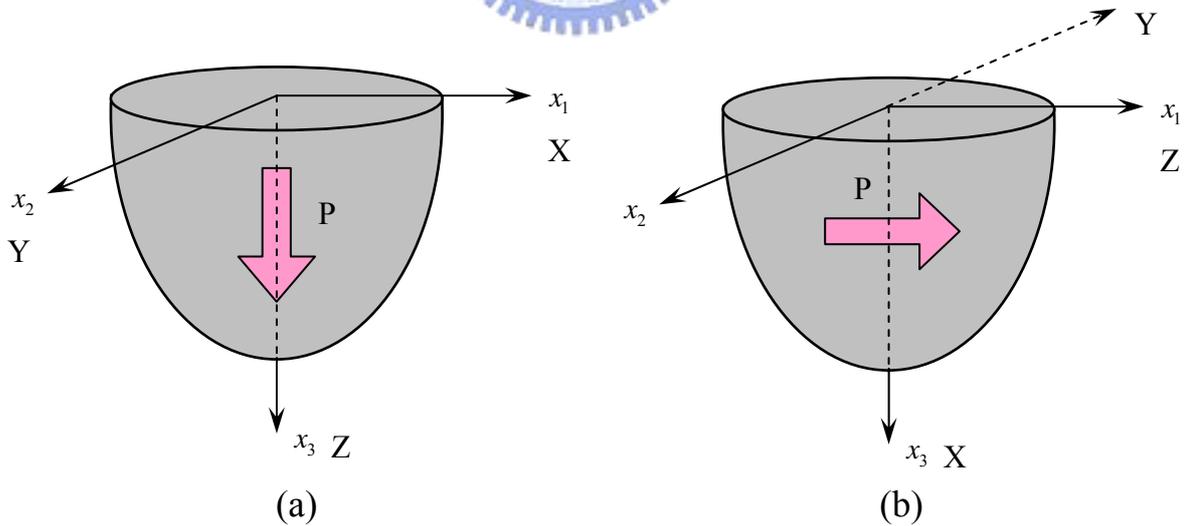


圖 2-2 兩種極化型式之 PZT 材料，P 為極化方向，
X、Y、Z 為材料主軸， $\langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ 為參考之正交座標系

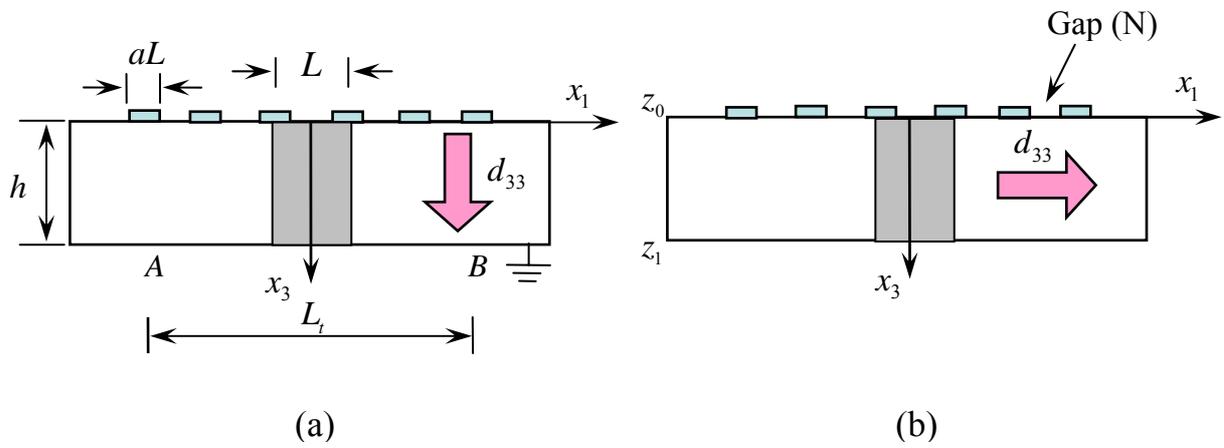


圖 2-3 (a) 厚度模式、(b) 厚度剪切模式之壓電平板表面交指叉電極尺寸及極化方向示意圖

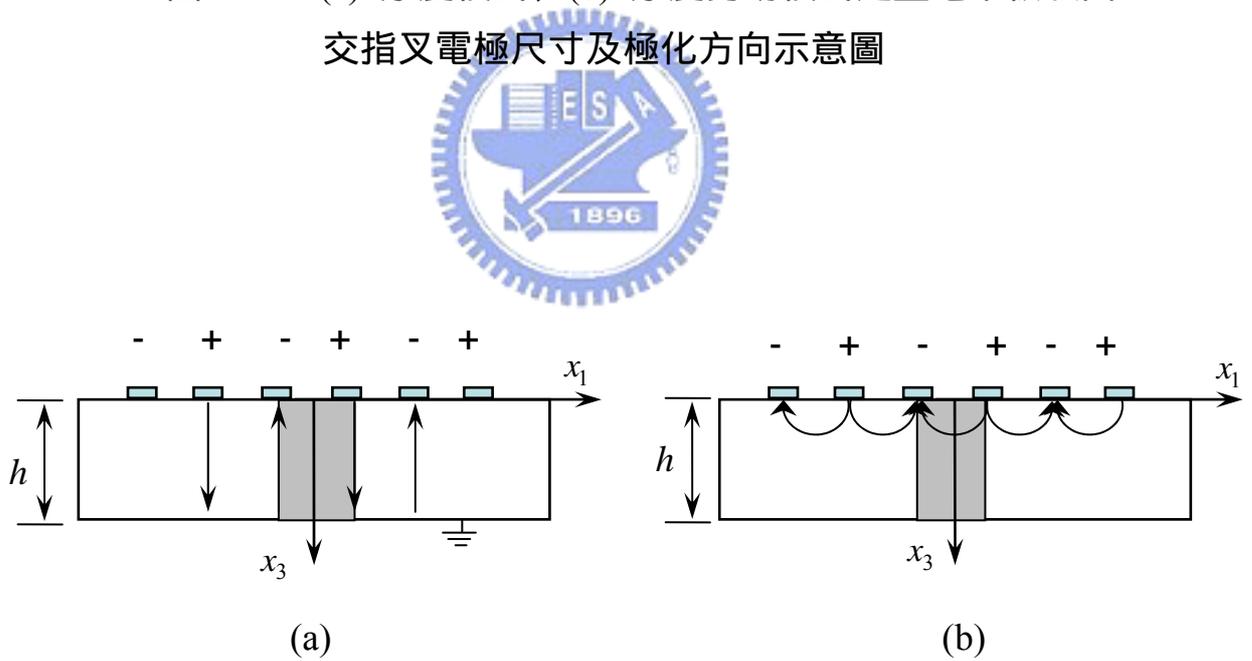


圖 2-4 (a) 厚度模式、(b) 厚度剪切模式之壓電平板電場示意圖

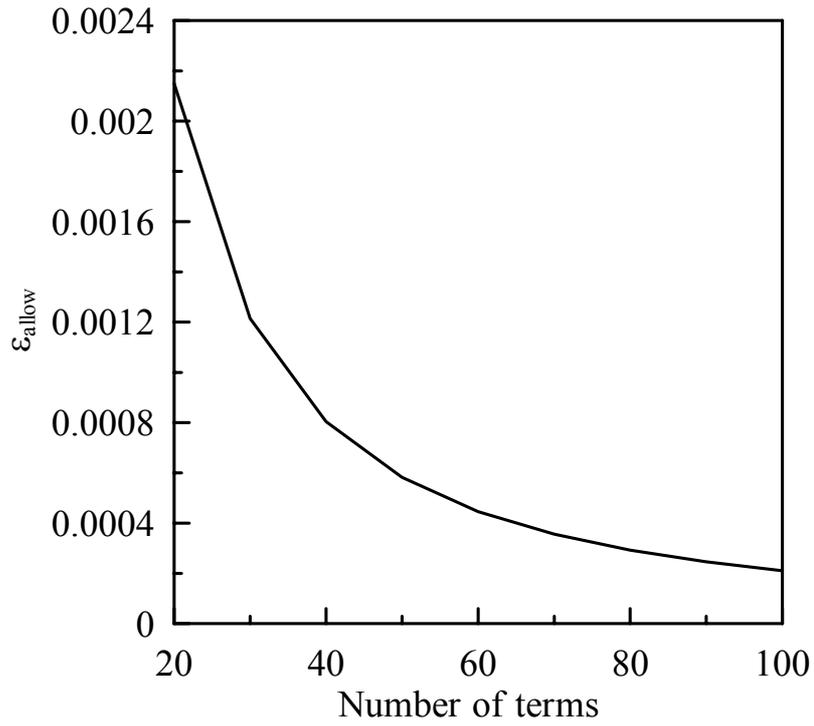


圖 2-5 (2.46)式允許誤差與項數之圖形

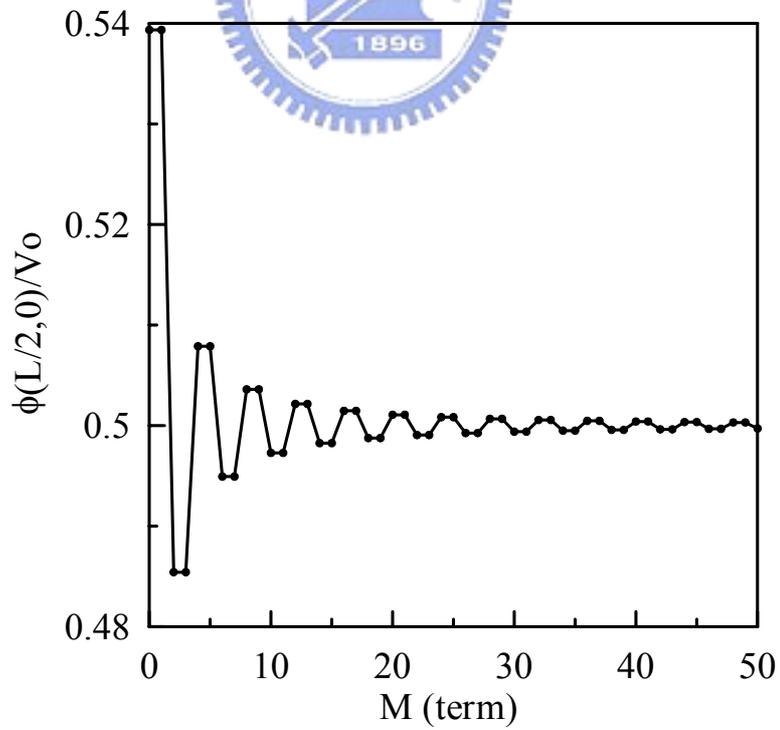


圖 2-6 厚度模式表面電極電位級數解累加至第 M 項的收斂情形

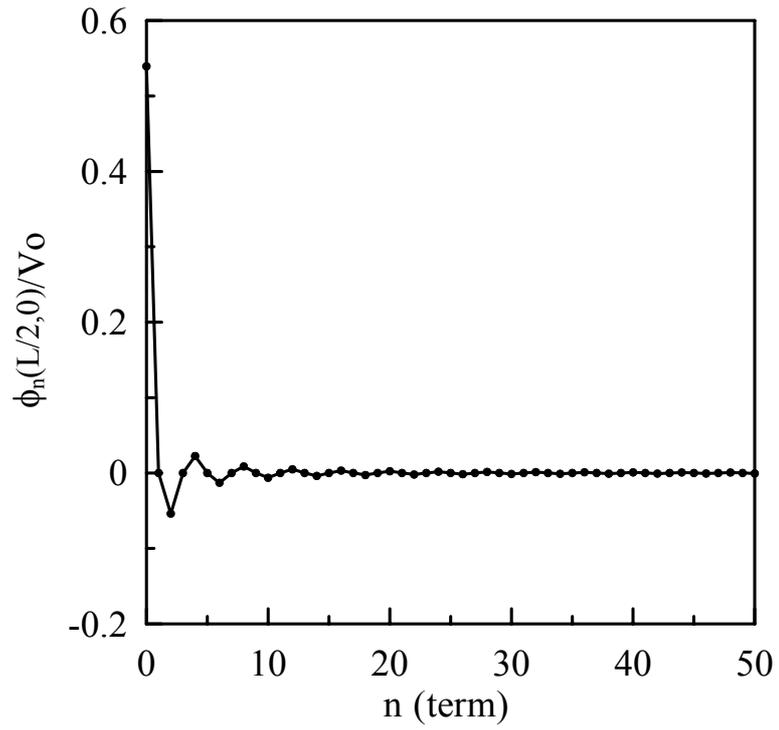


圖 2-7 厚度模式表面電極的電位級數解第 n 項級數大小之圖形



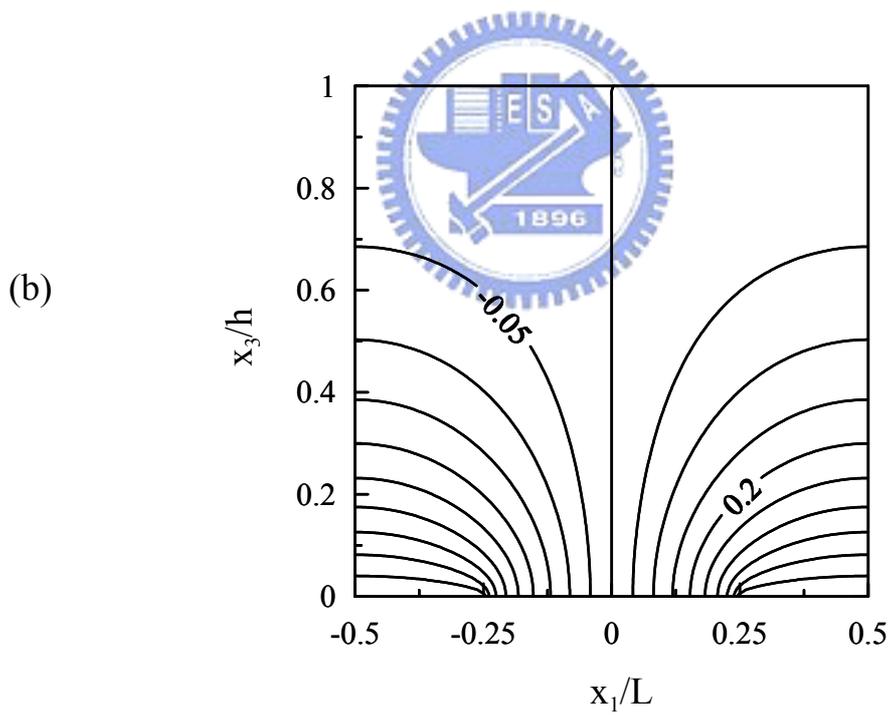
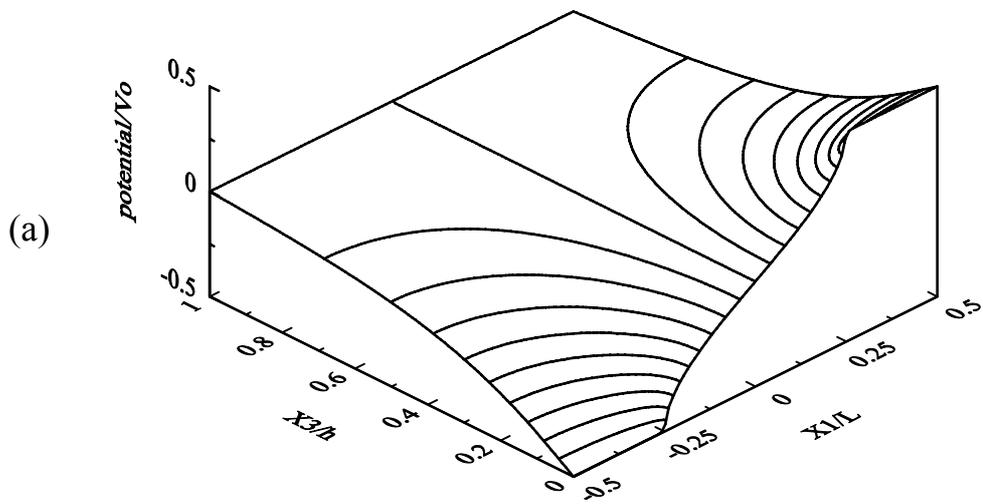


圖 2-8 厚度模式壓電平板的電位解析解之
(a) 三維透視圖、(b) 等高線圖

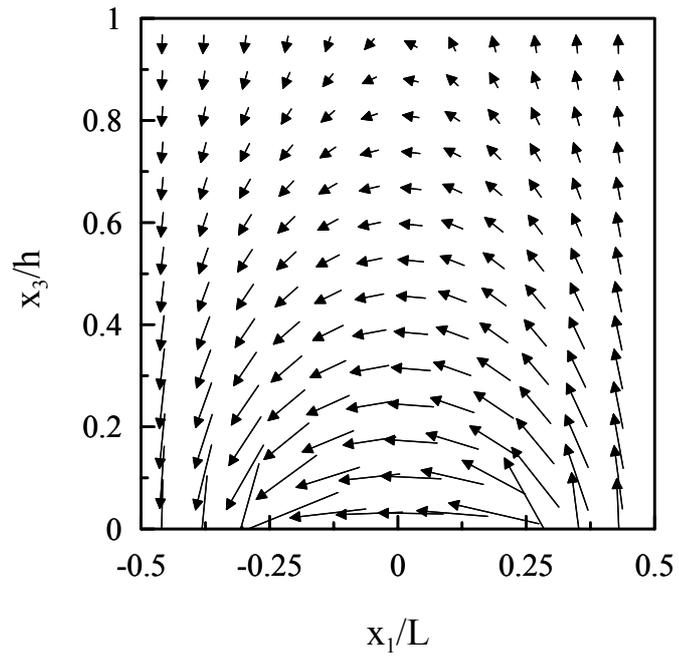


圖 2-9 厚度模式壓電平板的電場流向圖

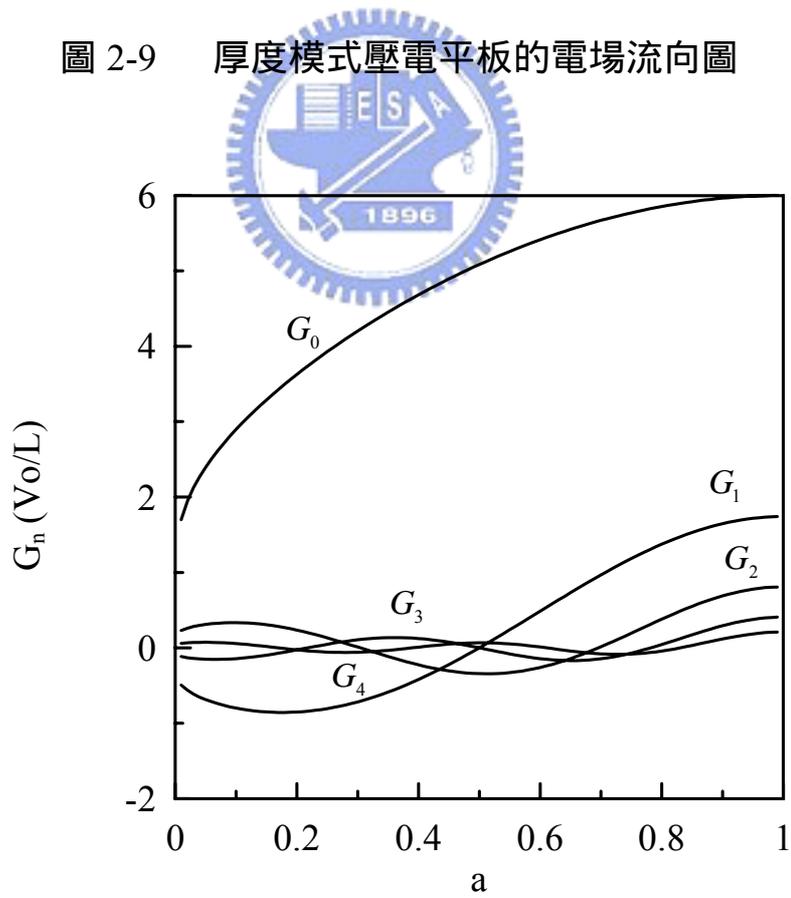


圖 2-10 厚度模式壓電平板電位級數解之常數 G_n

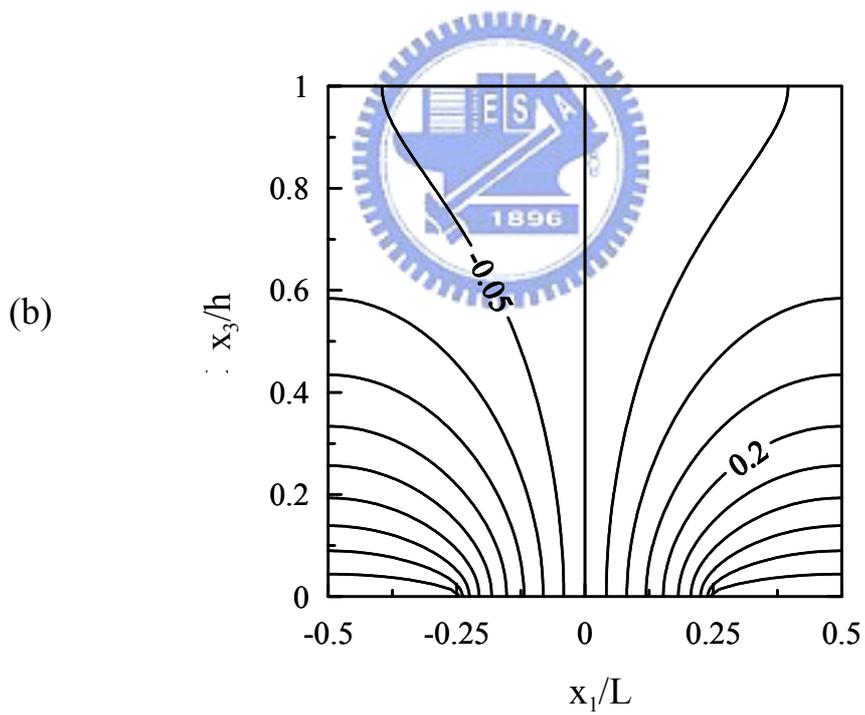
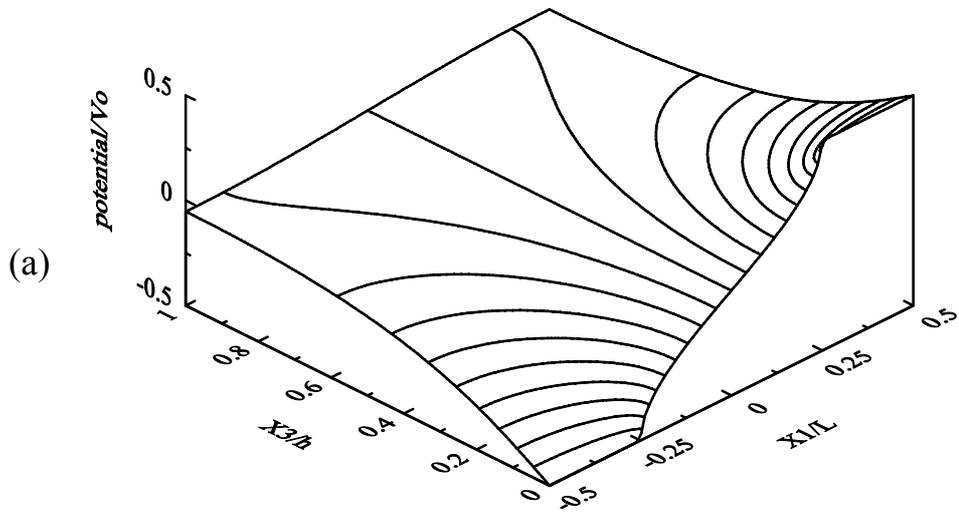


圖 2-11 厚度剪切模式壓電平板的電位解析解之
(a) 三維透視圖、(b) 等高線圖

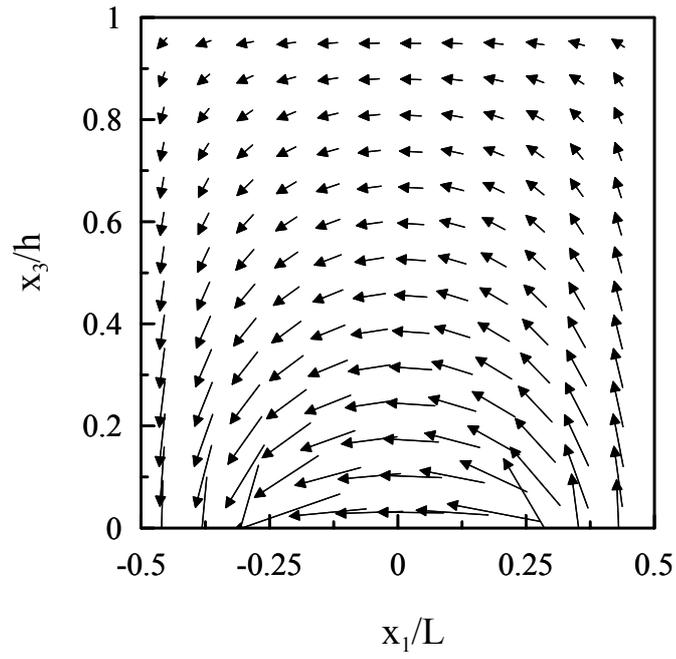


圖 2-12 與圖 2-9 同，但為厚度剪切模式

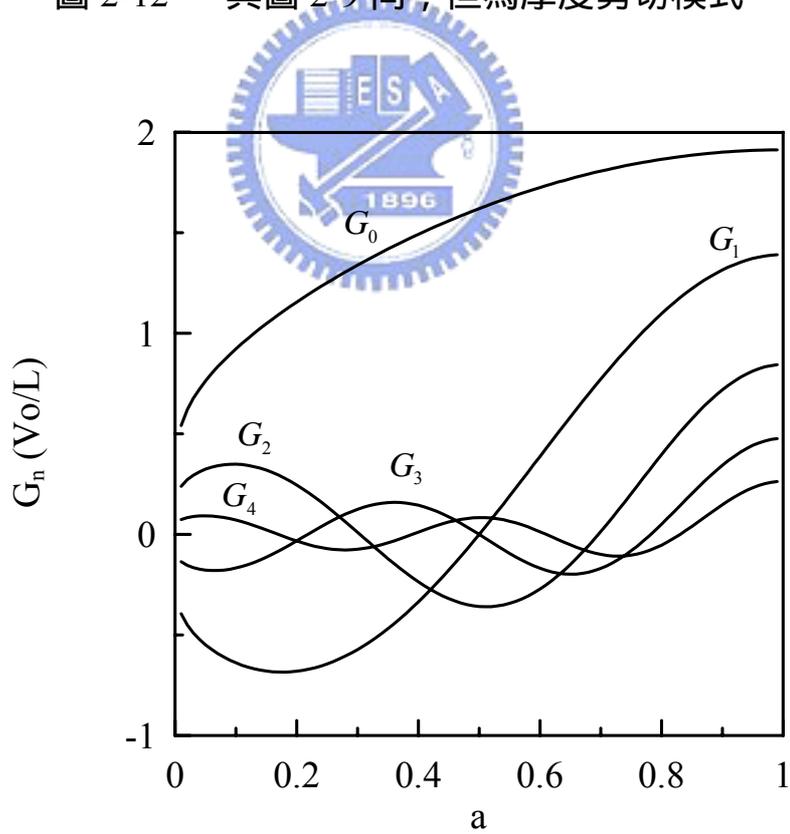


圖 2-13 與圖 2-10 同，但為厚度剪切模式

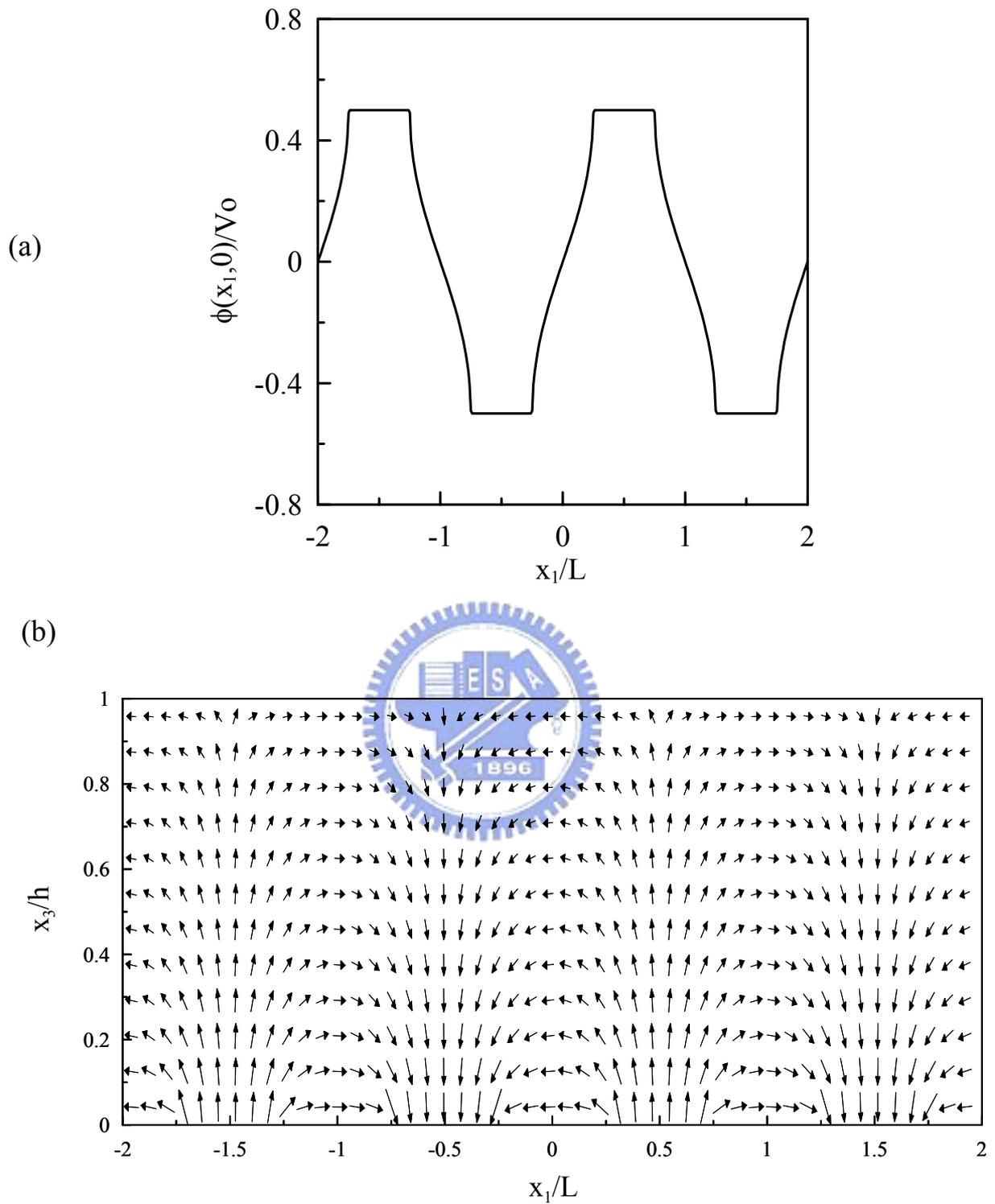


圖 2-14 厚度剪切模式壓電平板之

(a) 表面電位、(b) 電場分佈流向圖

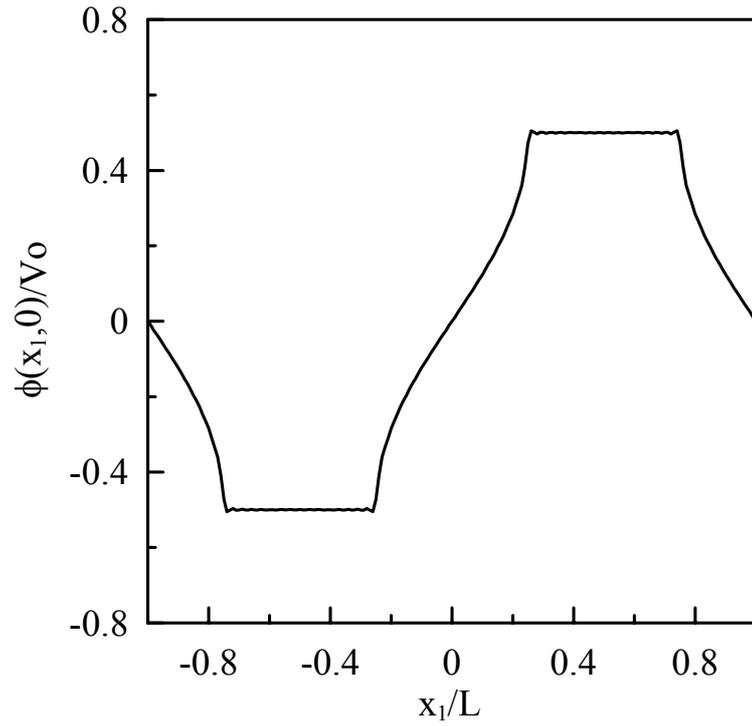


圖 2-15 與圖 2-14(a)同，但是取前 $M=30$ 項級數解

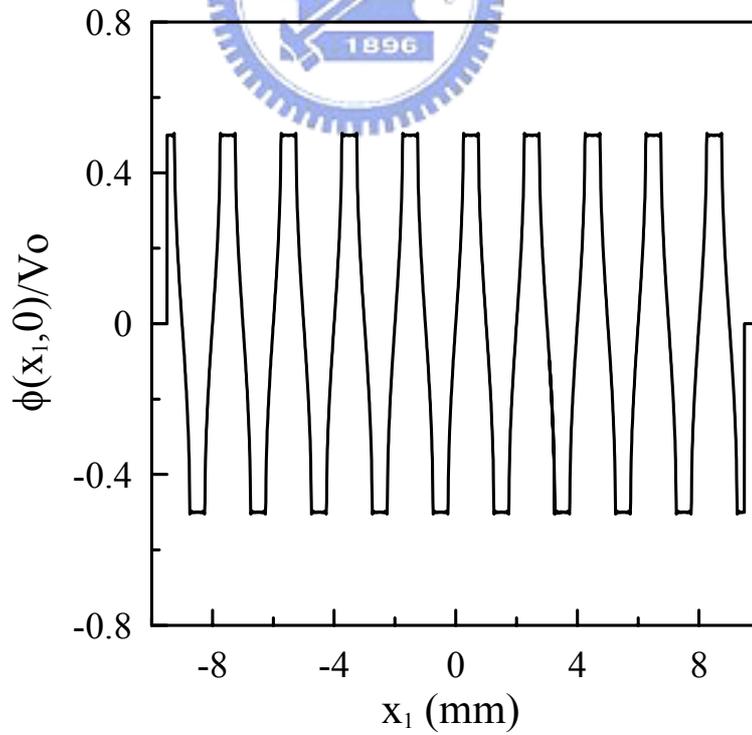


圖 2-16 有限數目交指叉電極之厚度模式壓電平板電位 $\phi(x_1, 0)$ 分佈圖

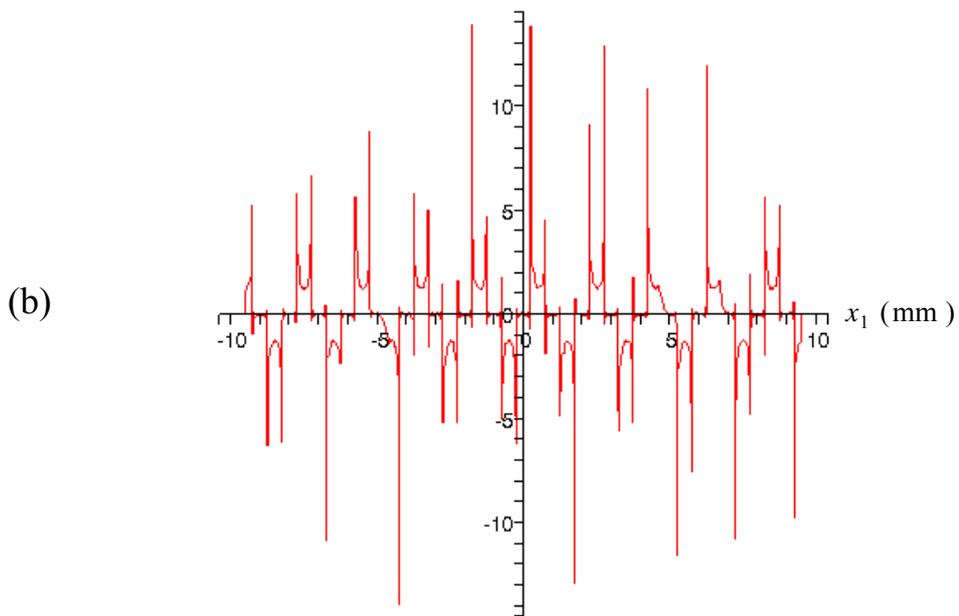
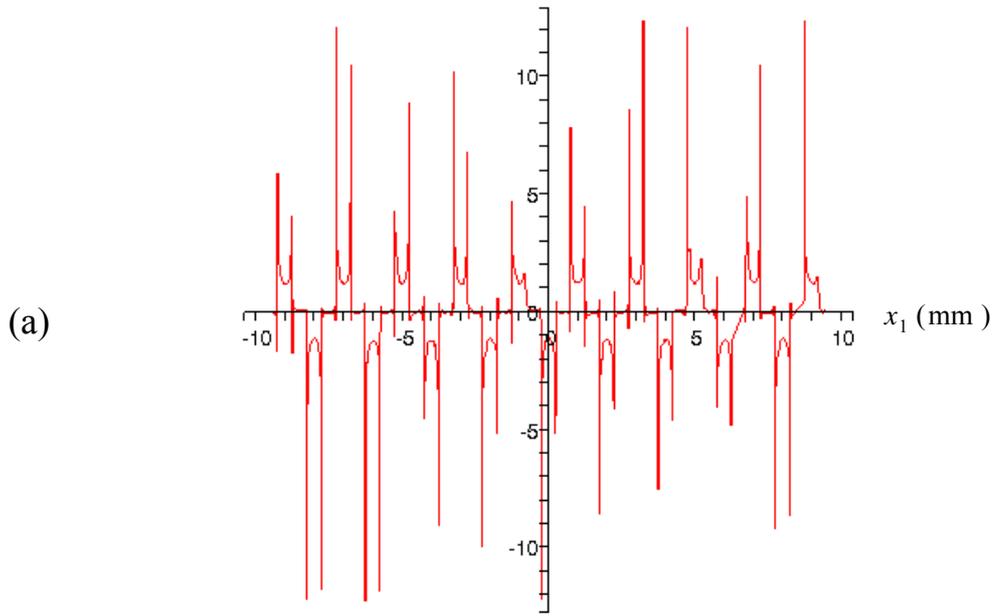


圖 2-17 厚度模式壓電平板的表面電場分量
(a) $E_1(x_1, 0)$ 、(b) $E_3(x_1, 0)$ 分佈圖

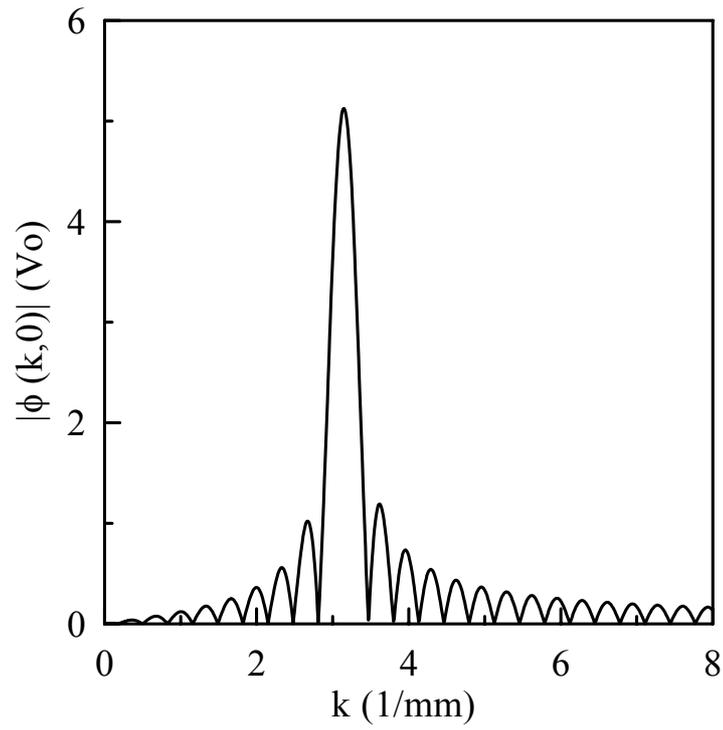


圖 2-18 厚度模式壓電平板表面電位 $\bar{\phi}(k,0)$ 之響應



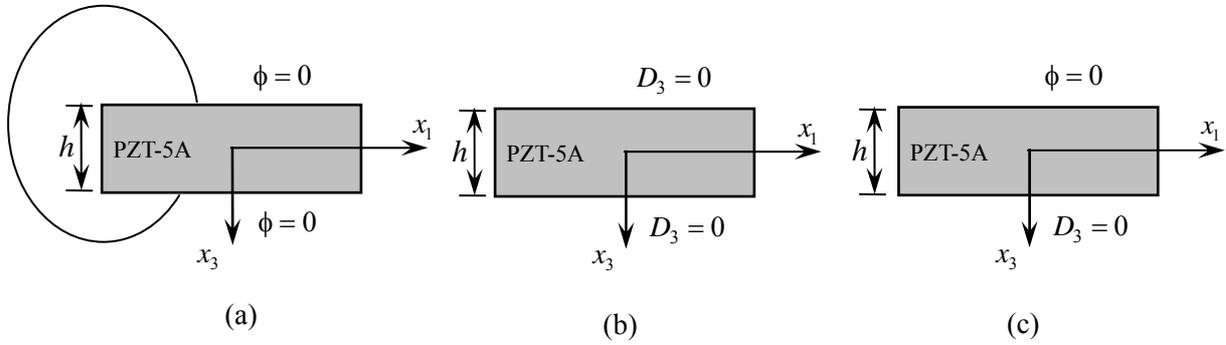


圖 3-1 壓電平板上下表面之 (a)短路、(b)開路、(c)混合電性
邊界條件示意圖

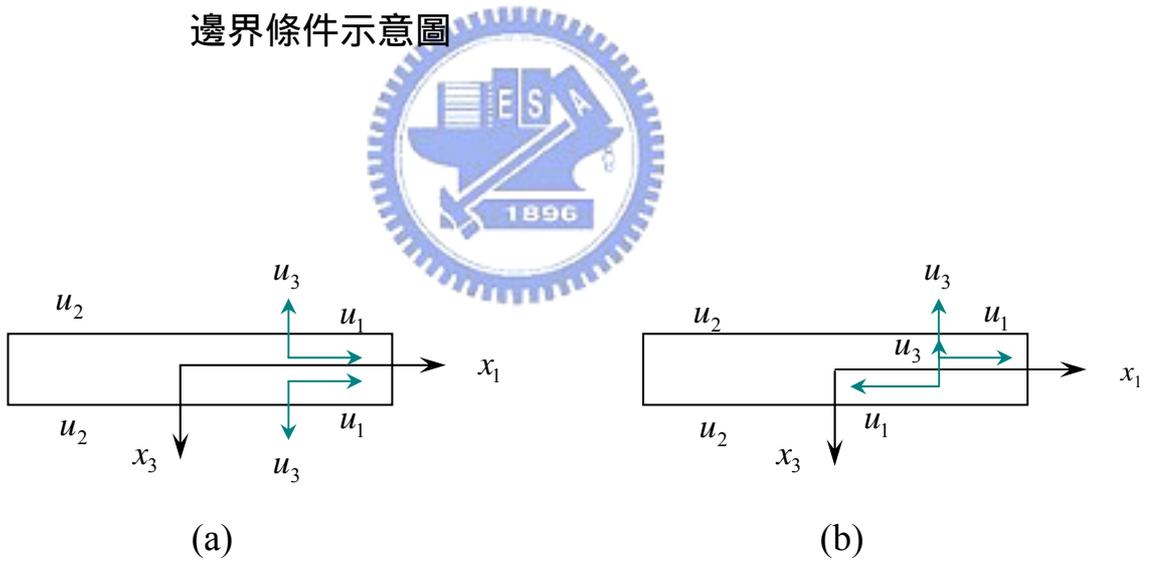


圖3-2 (a)對稱、(b)反對稱藍姆波模態示意圖

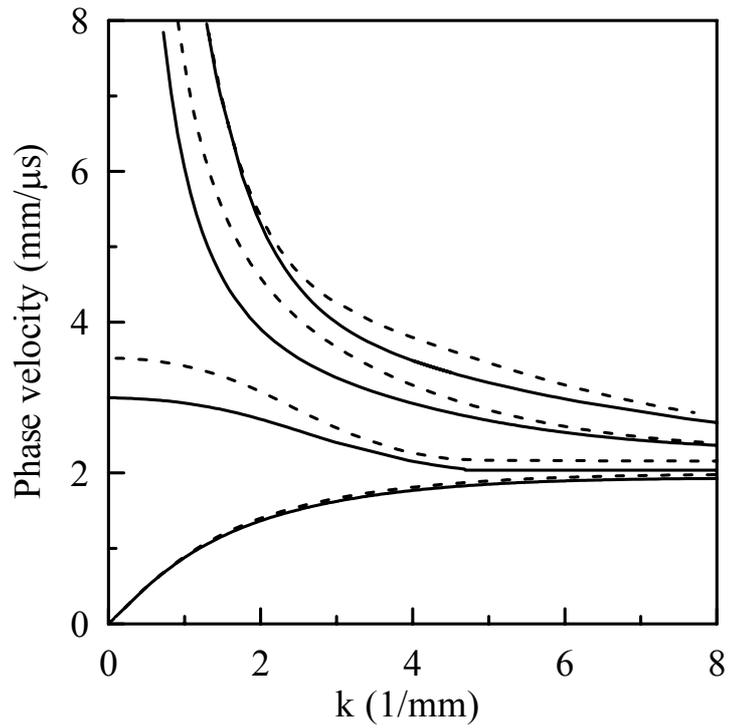


圖 3-3 厚度模式壓電平板藍姆波的頻散曲線，實線、虛線代表短路、開路電性邊界條件的結果

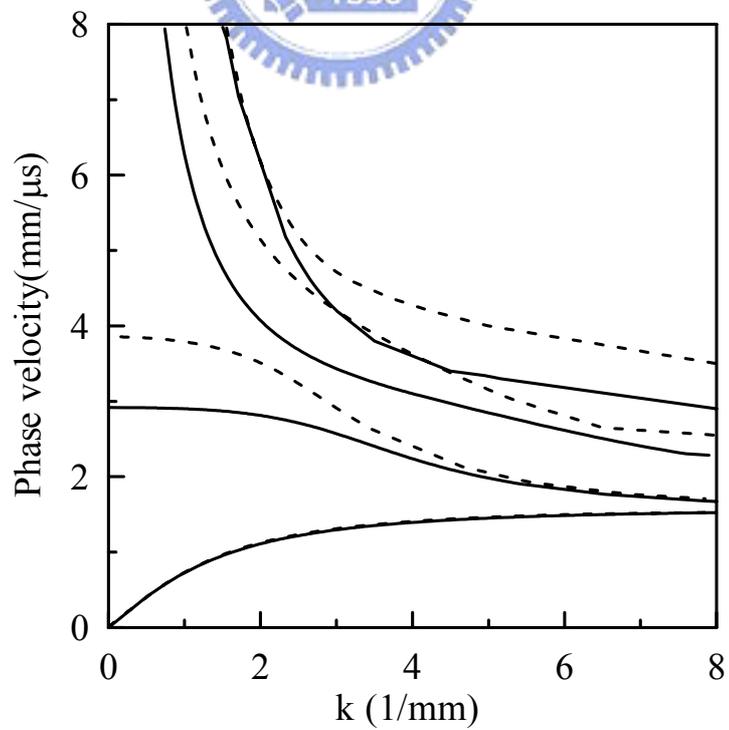


圖 3-4 與圖 3-3 同，但為厚度剪切模式壓電平板

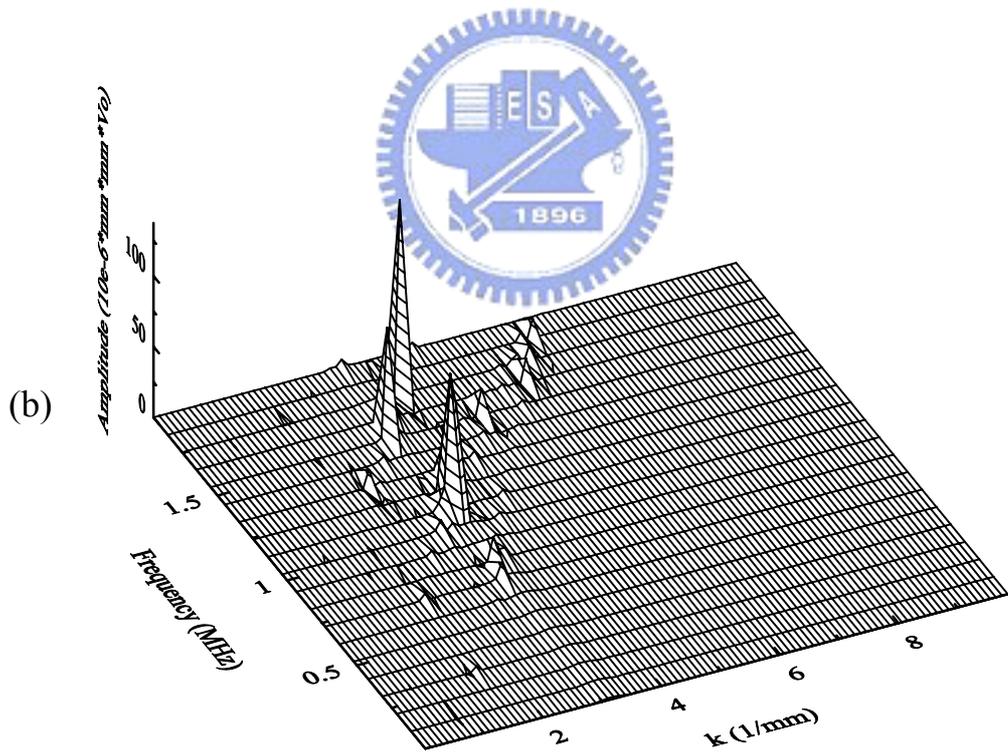
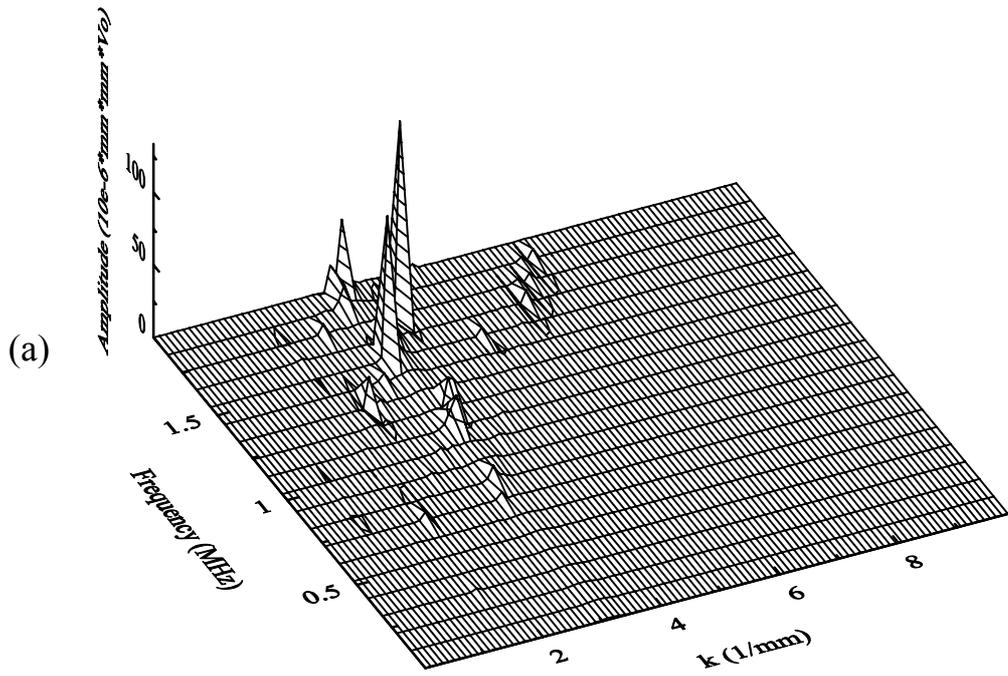


圖 3-5 厚度模式壓電平板表面位移響應之核函數
 (a) $\bar{u}_1(k, 0, \omega)$ 、(b) $\bar{u}_3(k, 0, \omega)$ 的透視圖

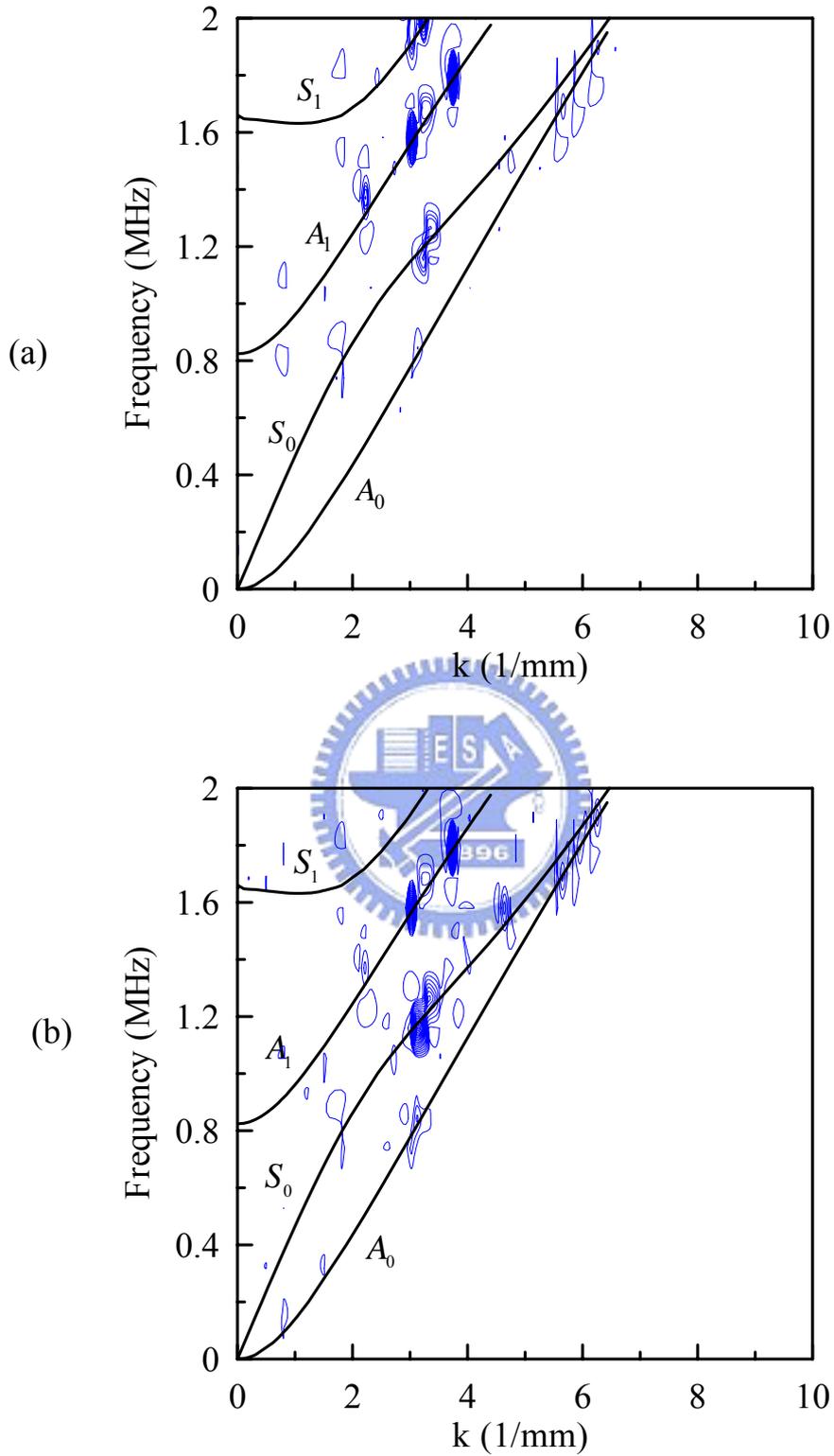


圖 3-6 厚度模式壓電平板藍姆波頻散曲線(實線)及表面位移響應之核函數(a) $\bar{u}_1(k,0,\omega)$ 、(b) $\bar{u}_3(k,0,\omega)$ 的等高線

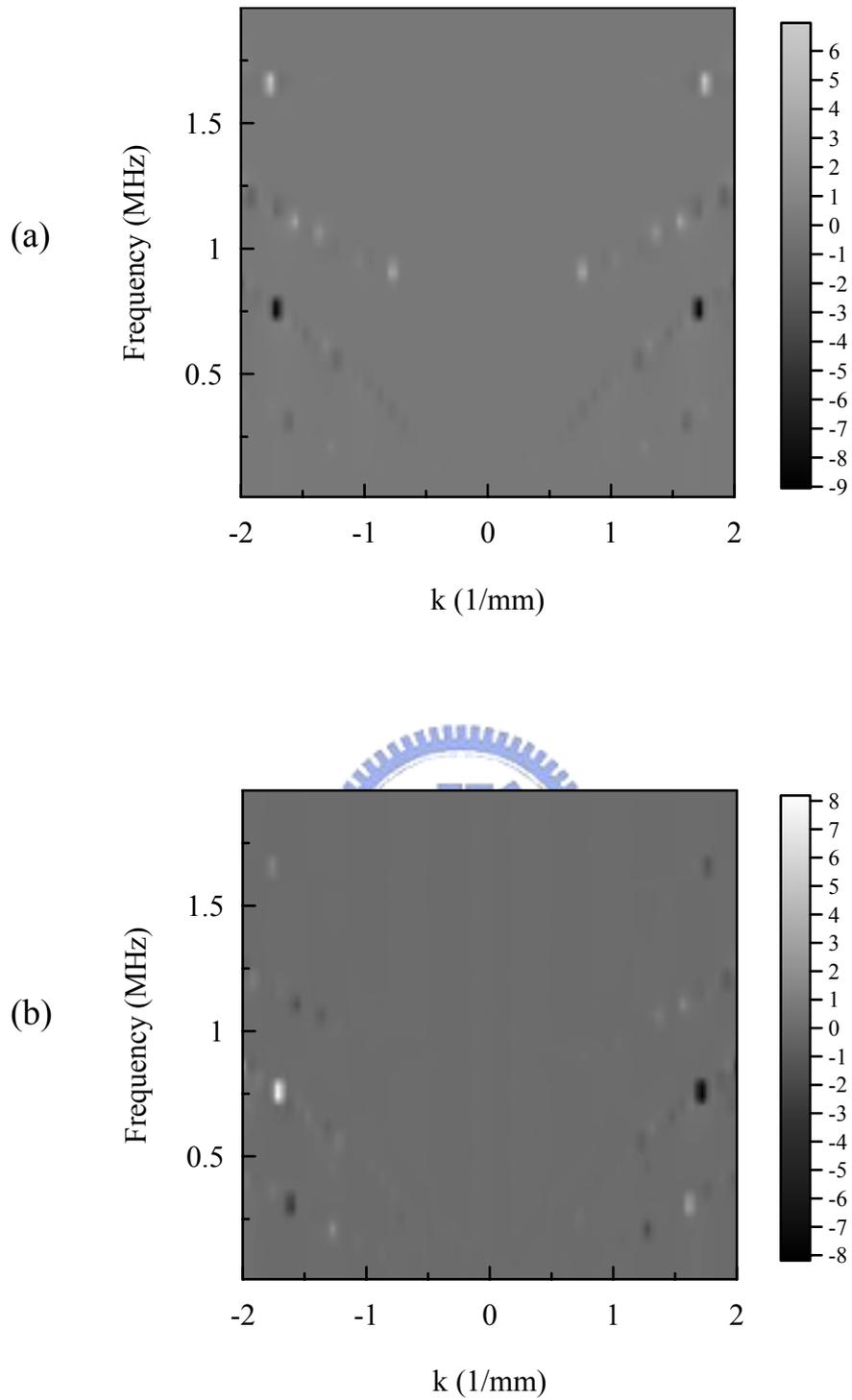


圖 3-7 厚度模式壓電平板表面位移響應(a) $\bar{u}_1(k, 0, \omega)$ 、
(b) $\bar{u}_3(k, 0, \omega)$ 的灰階圖

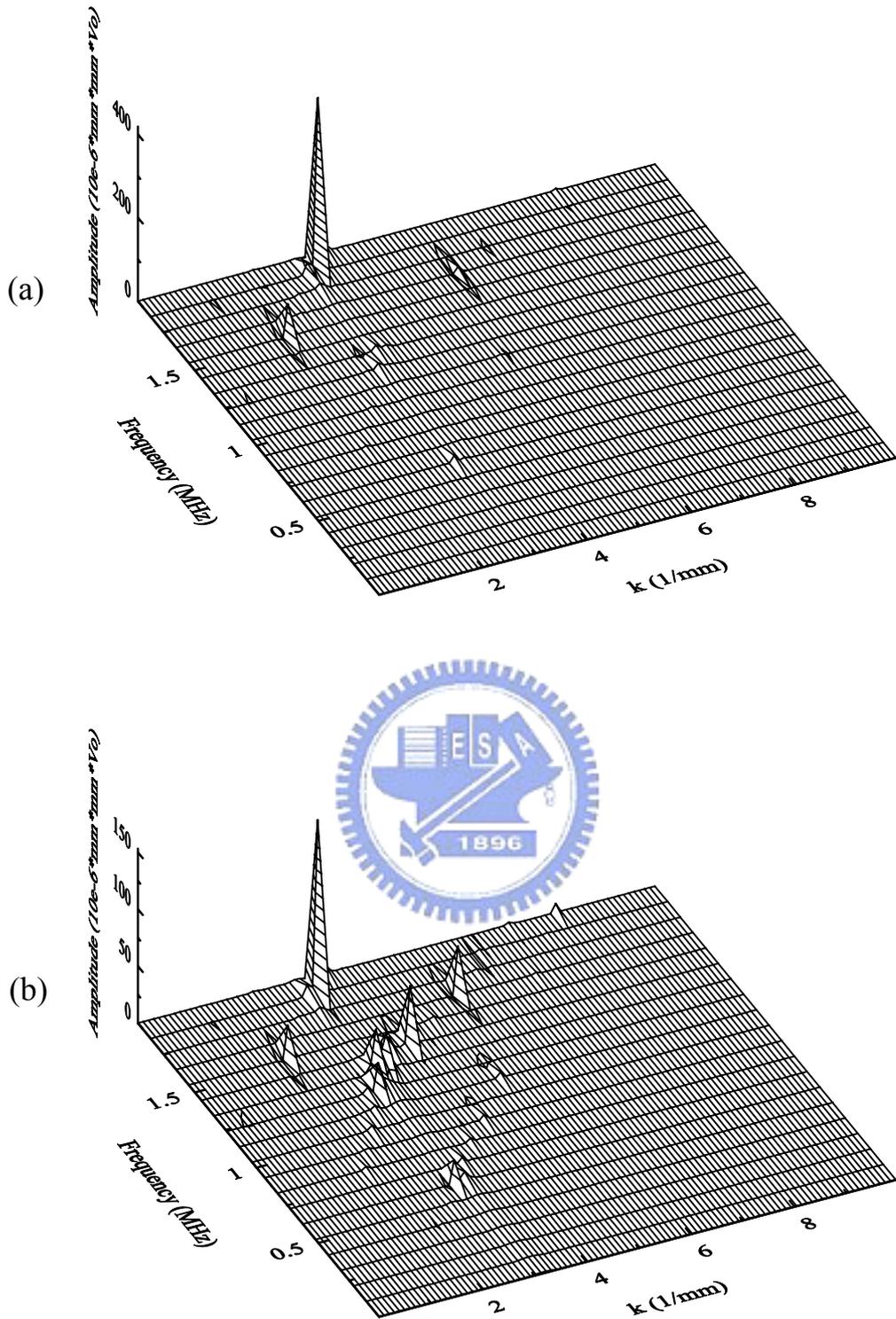


圖 3-8 厚度剪切模式壓電平板表面位移響應之核函數
 (a) $\bar{u}_1(k, 0, \omega)$ 、(b) $\bar{u}_3(k, 0, \omega)$ 的透視圖

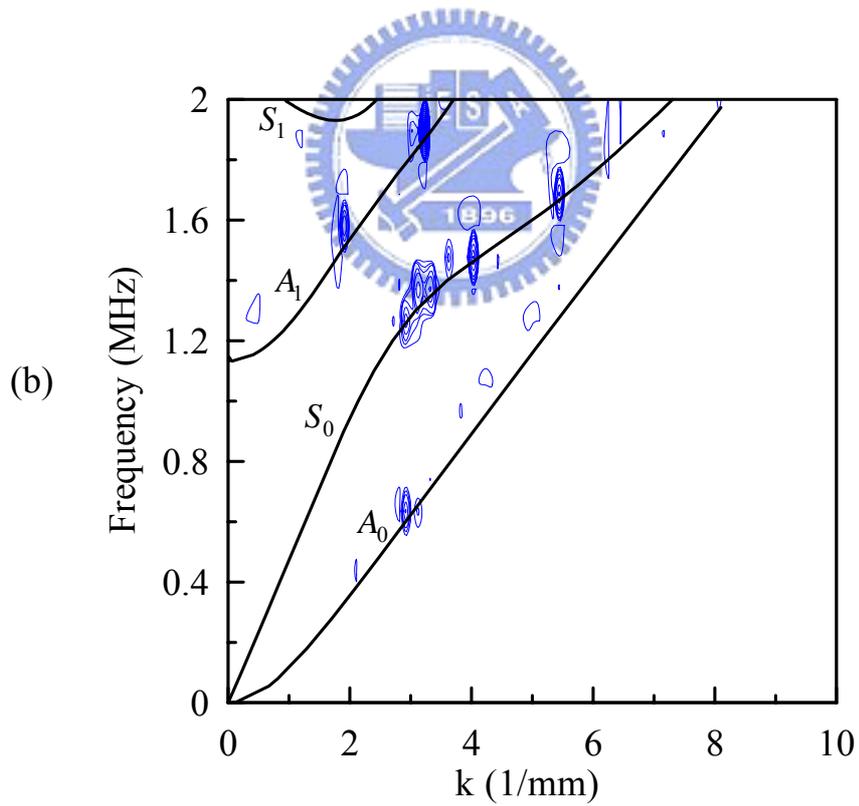
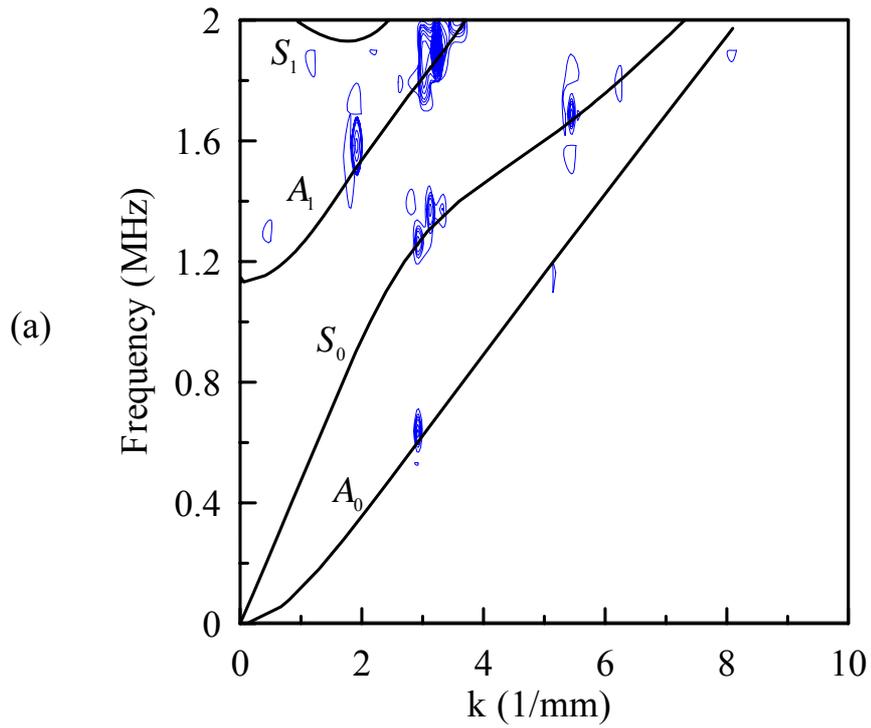


圖 3-9 厚度剪切模式壓電平板藍姆波頻散曲線(實線)及表面位移響應之核函數(a) $\bar{u}_1(k, 0, \omega)$ 、(b) $\bar{u}_3(k, 0, \omega)$ 的等高線

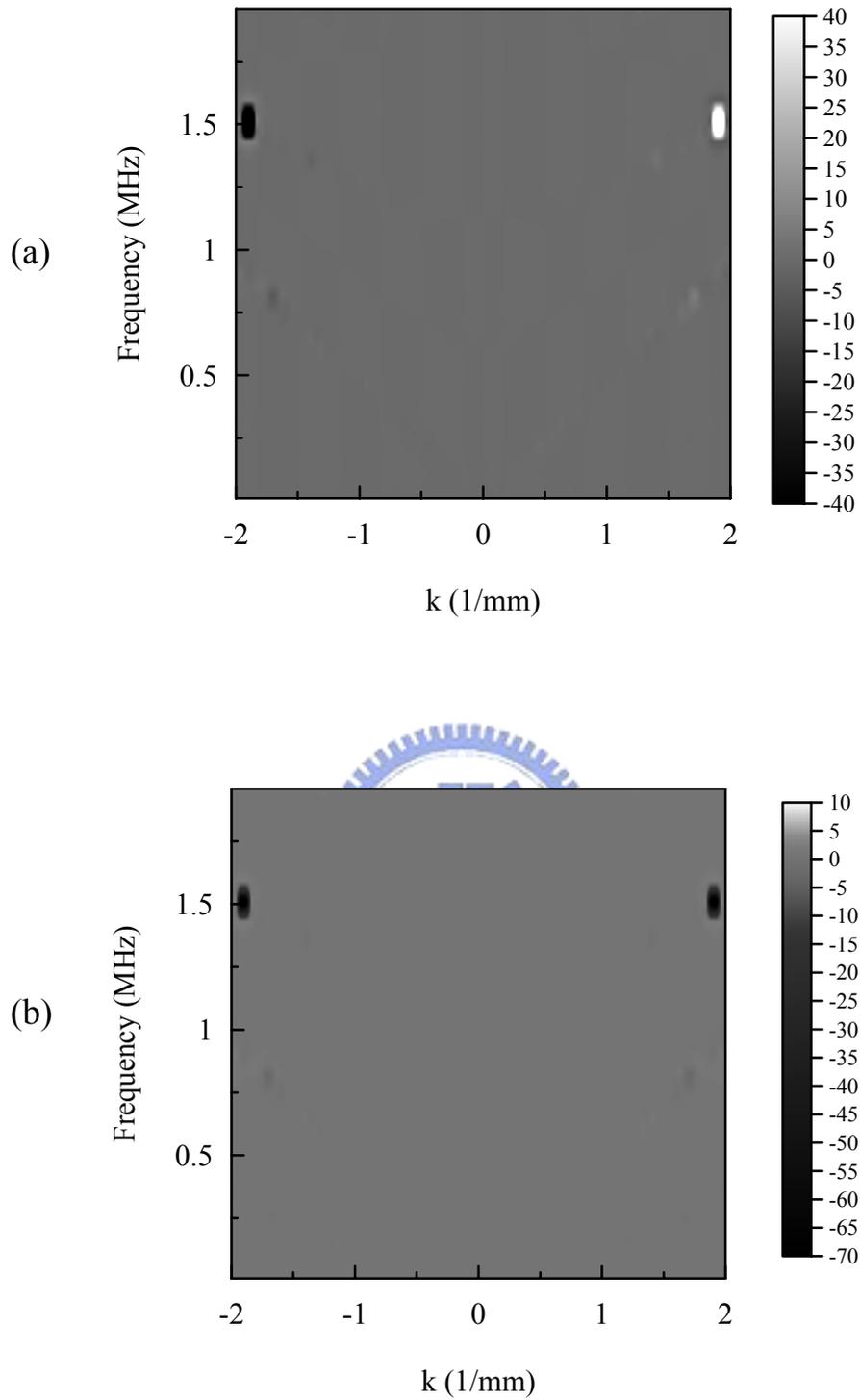


圖 3-10 厚度剪切模式壓電平板表面位移響應(a) $\bar{u}_1(k, 0, \omega)$ 、
(b) $\bar{u}_3(k, 0, \omega)$ 灰階圖

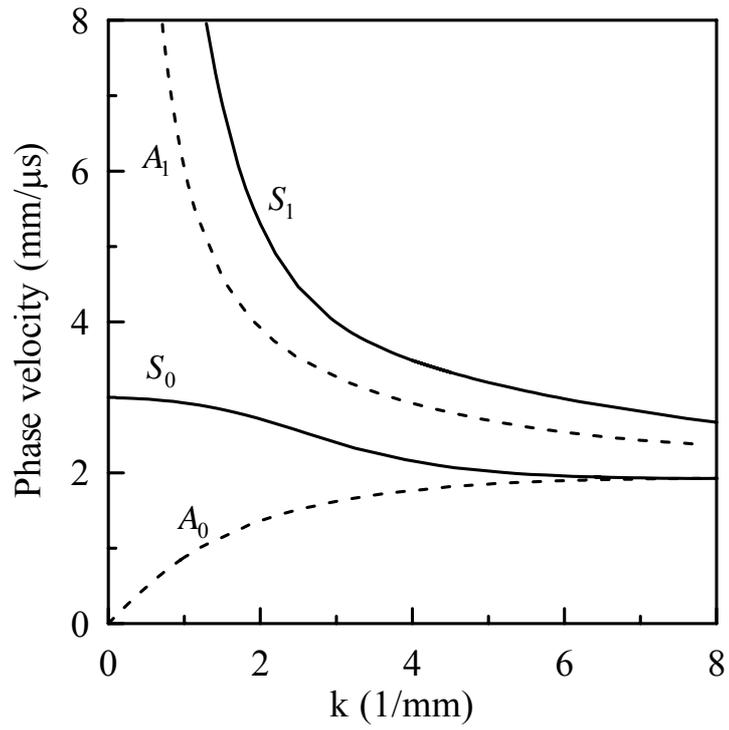


圖 3-11 厚度模式壓電平板表面交指叉電極激發之藍姆波頻散曲線

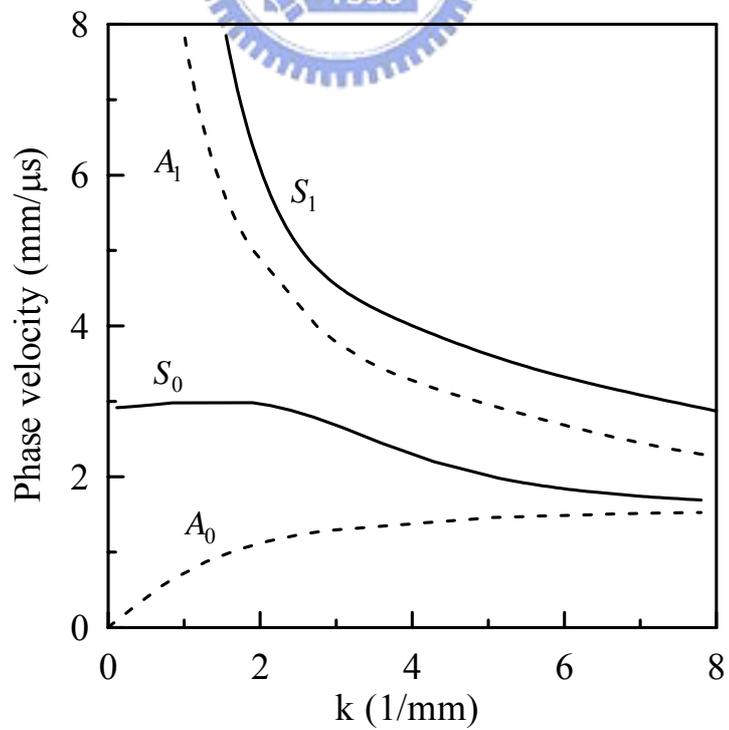


圖 3-12 與圖 3-11 同，但為厚度剪切模式

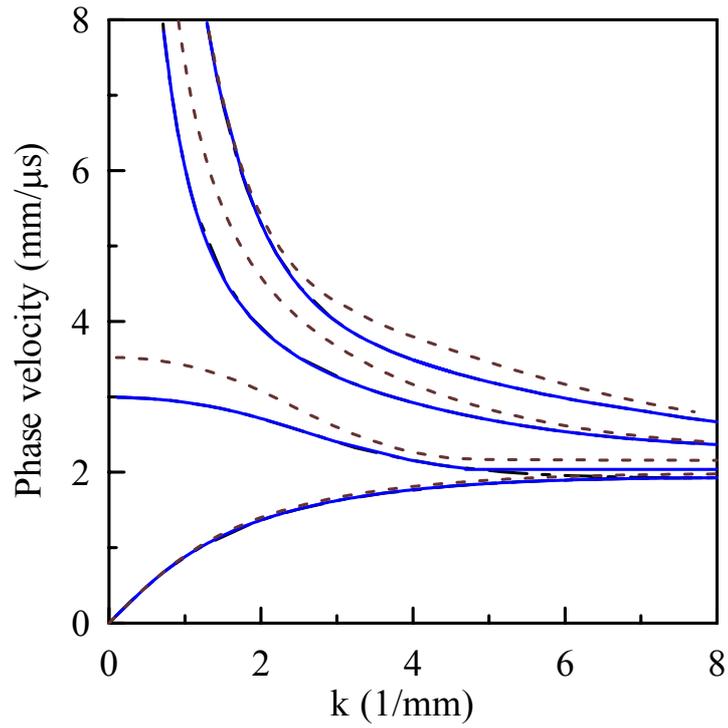


圖 3-13 厚度模式壓電平板藍姆波頻散曲線，實線、虛線、破折線代表短路、開路電性條件與圖 3-11 的結果

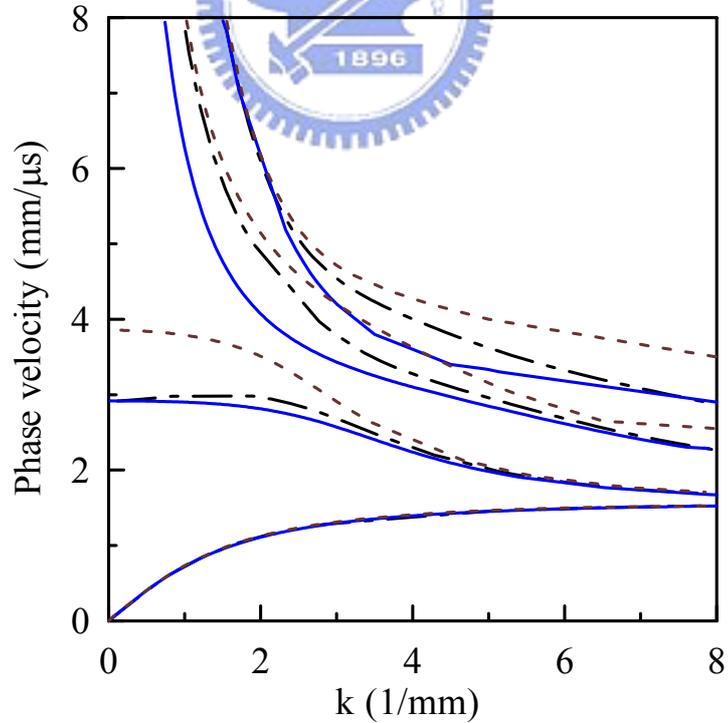


圖 3-14 與圖 3-13 同，但為厚度剪切模式，破折線代表圖 3-12 的結果

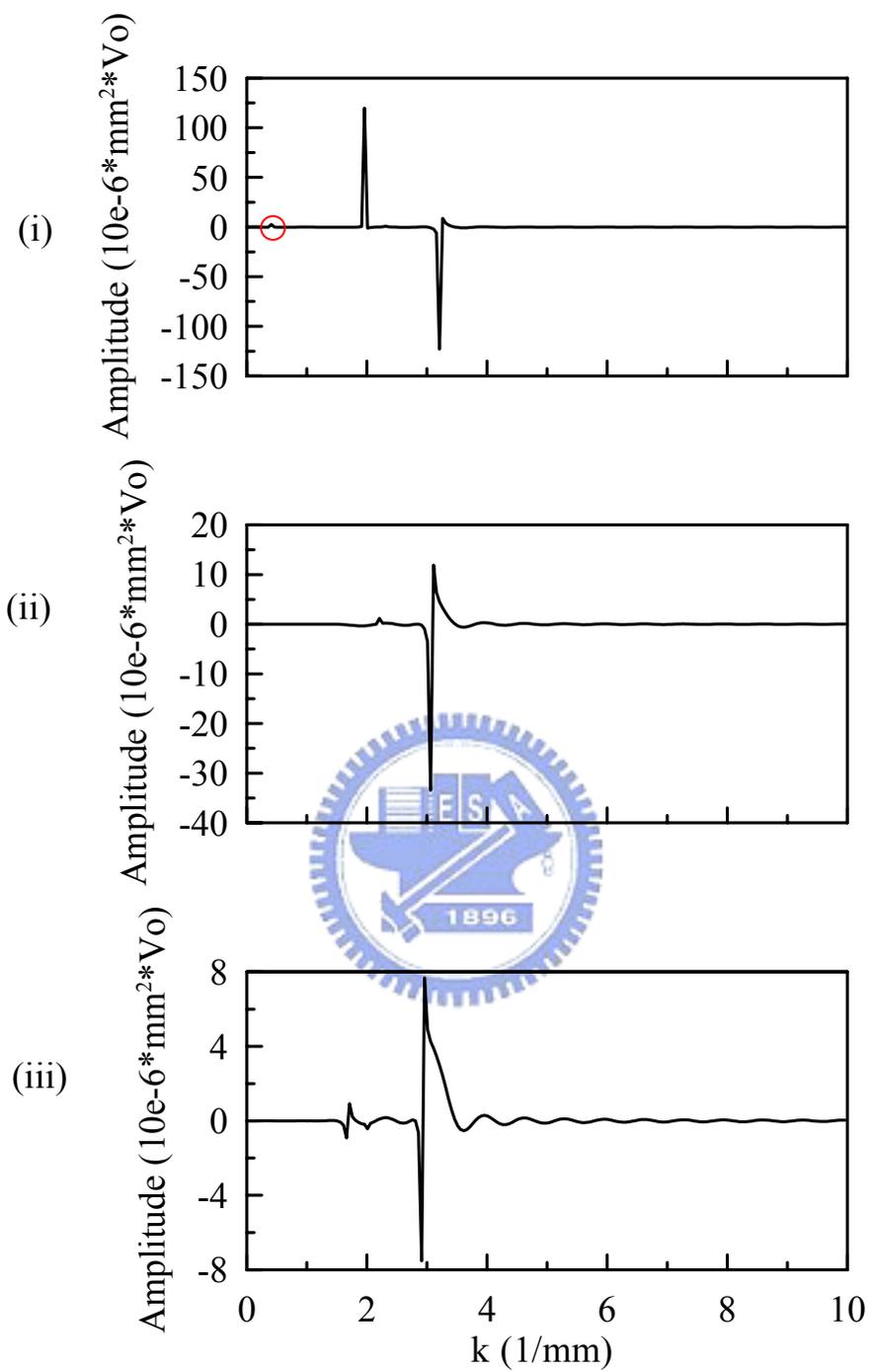


圖 4-1 厚度模式壓電平板藍姆波位移響應核函數 $\bar{u}_3(k, \omega, 0)$
 (i) 0.85、(ii) 0.8、(iii) 0.75 MHz

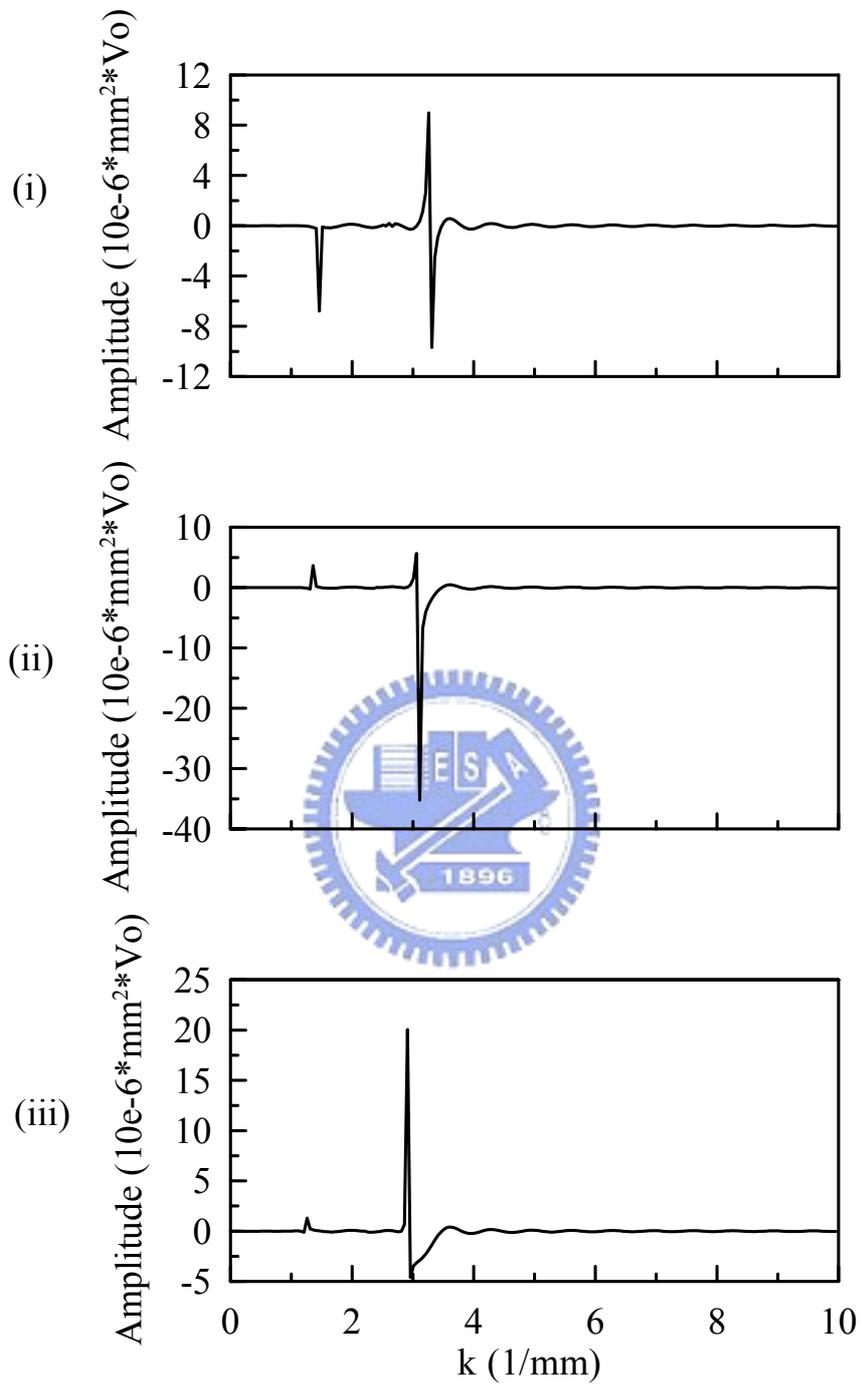


圖 4-2 同圖 4-1，但為厚度剪切模式，且(i) 0.7、(ii) 0.65、(iii) 0.6 MHz

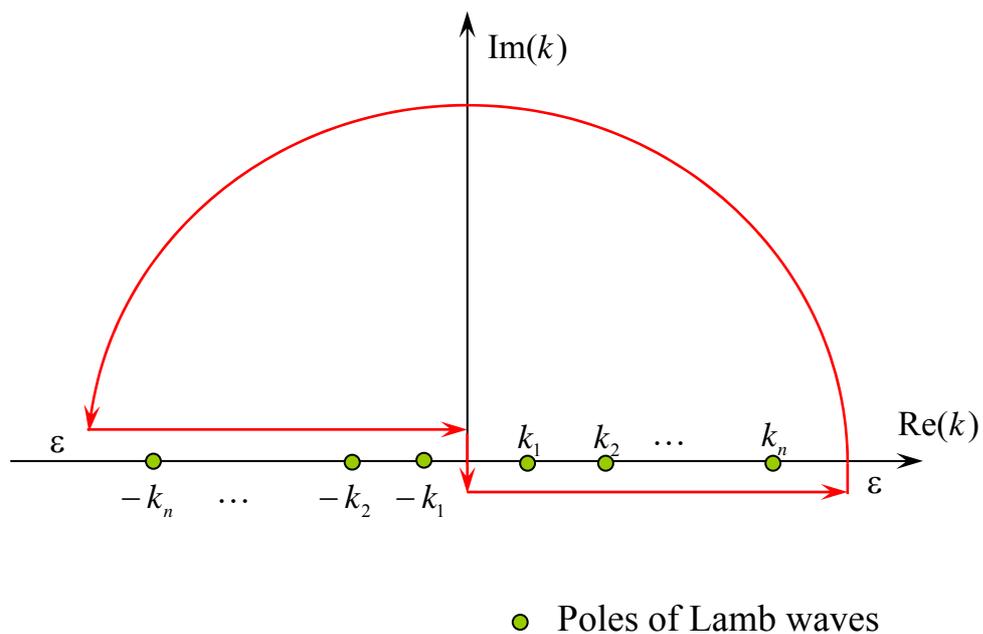


圖 4-3 波數積分路徑圖

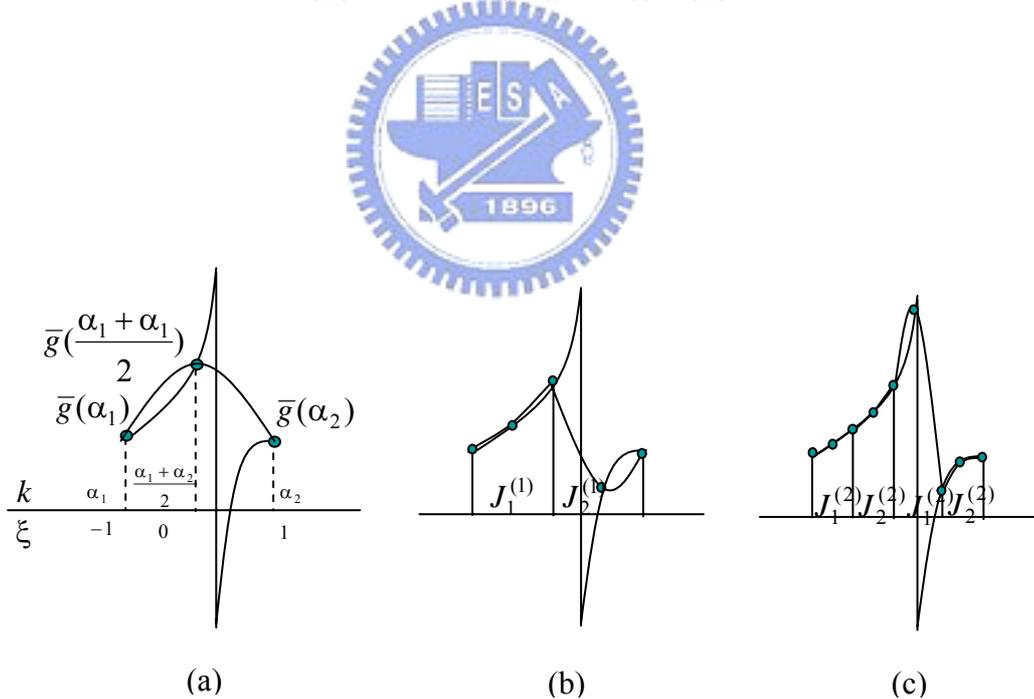


圖 4-4 波數積分示意圖，依精度要求，由(a)至(c)細分積分區間

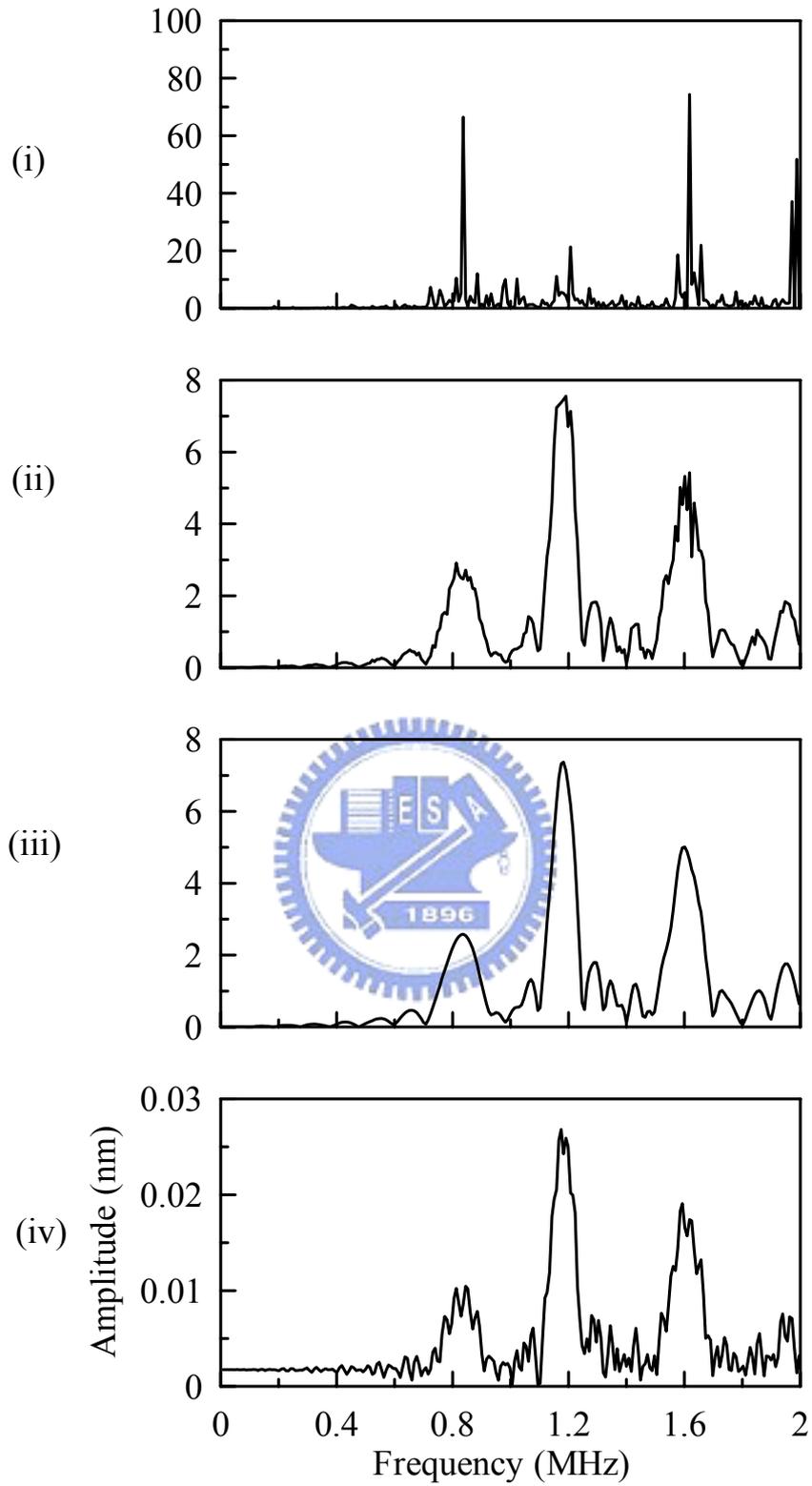


圖 4-5 厚度模式壓電平板於場距 $6l$ 處之表面位移 u_3 頻域響應

(i) $\epsilon = 10^{-8}$ 、(ii) $\epsilon = 10^{-5}$ 、(iii) $\epsilon = 10^{-3}$ 、(iv) $\epsilon = 10^{-1}$ (1/mm)

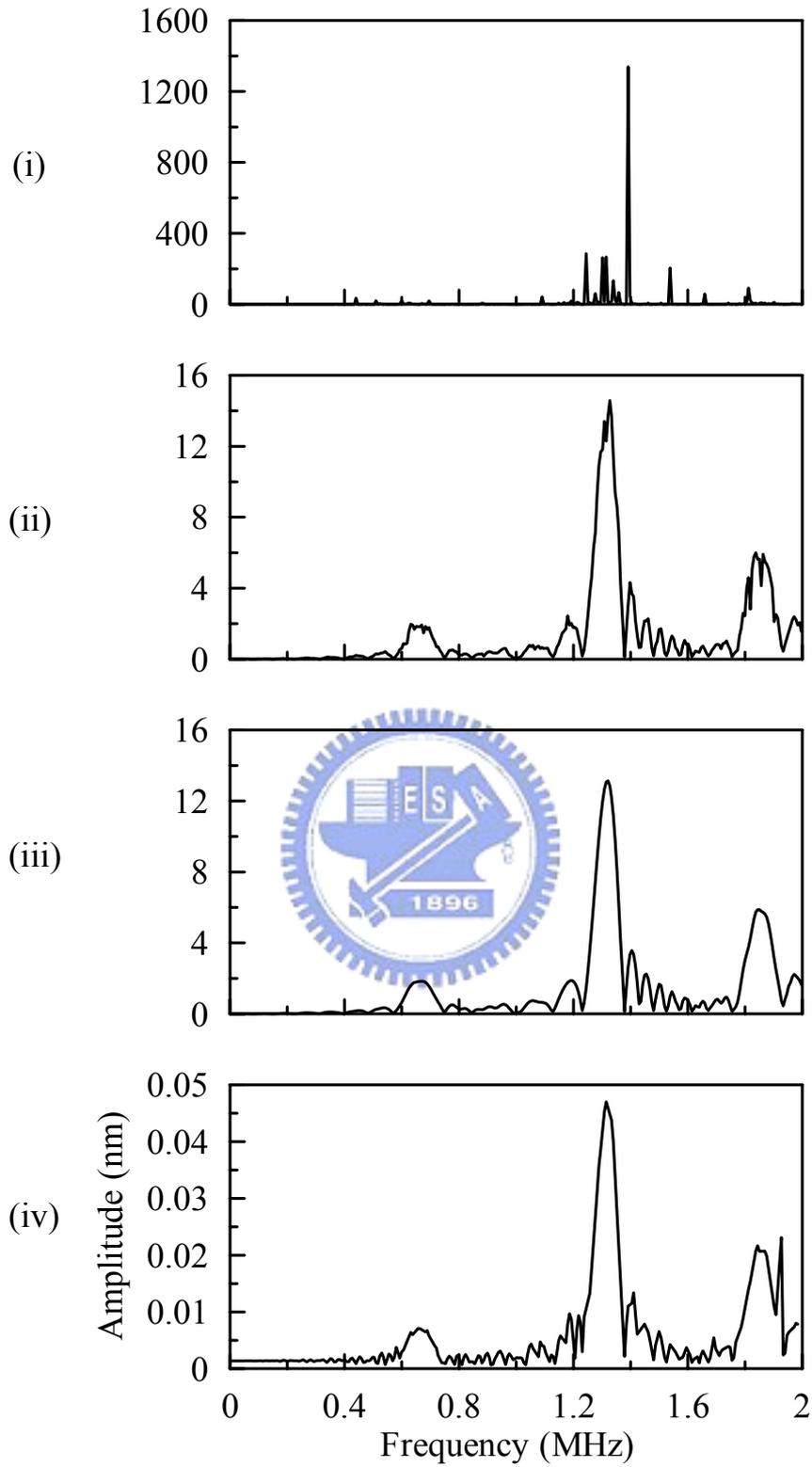


圖 4-6 與圖 4-5 同，但為厚度剪切模式

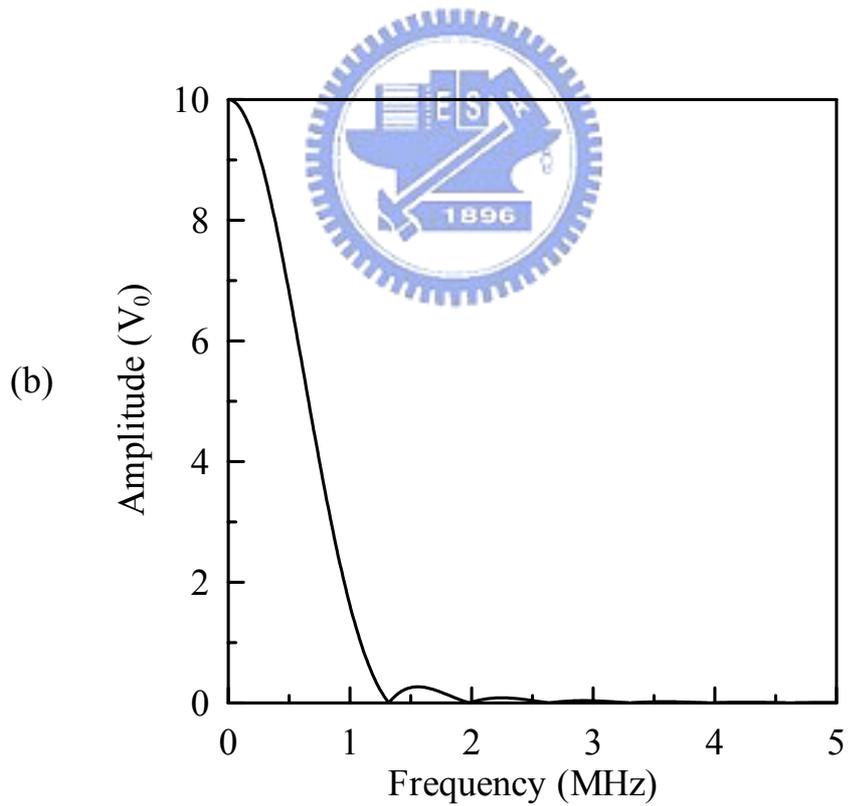
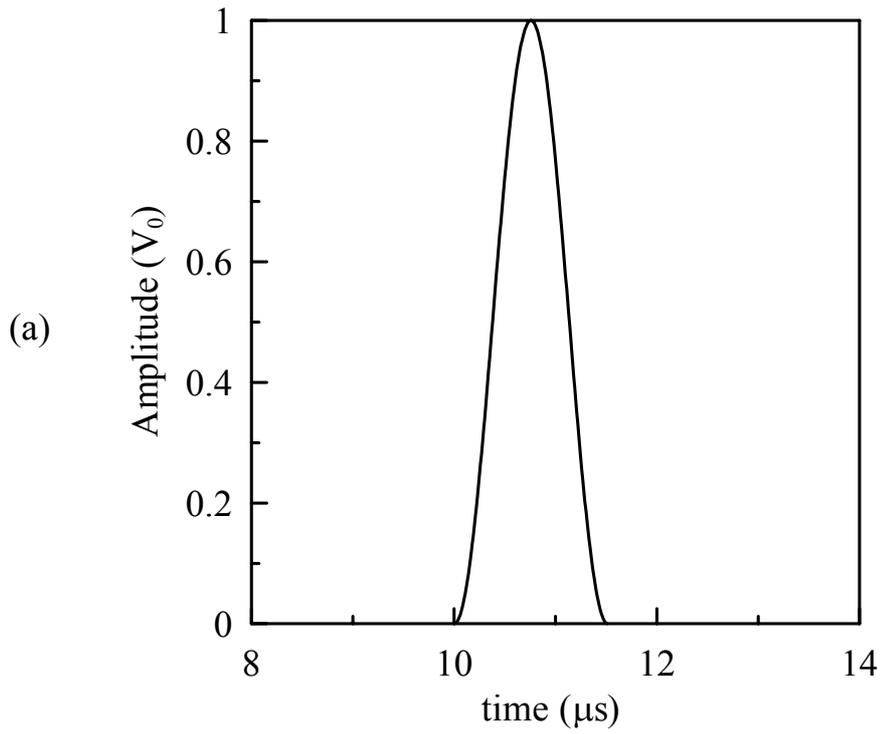


圖 4-7 Hanning 函數的(a)歷時曲線、(b)頻譜

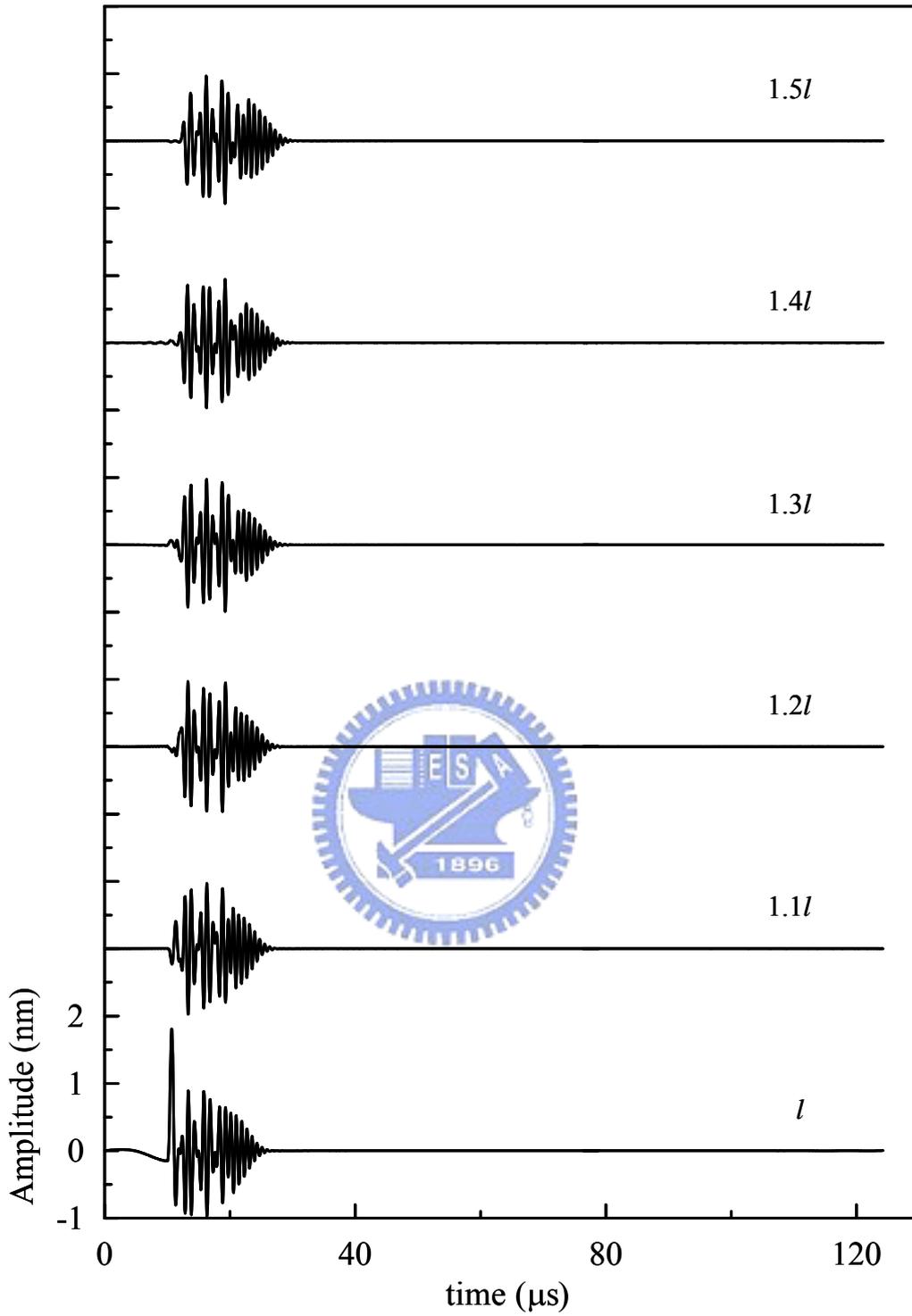


圖 4-8 厚度模式壓電平板近場表面位移 u_3 之時域響應，
場距為 $l \sim 1.5l$ ($l = 9.5 \text{ mm}$)

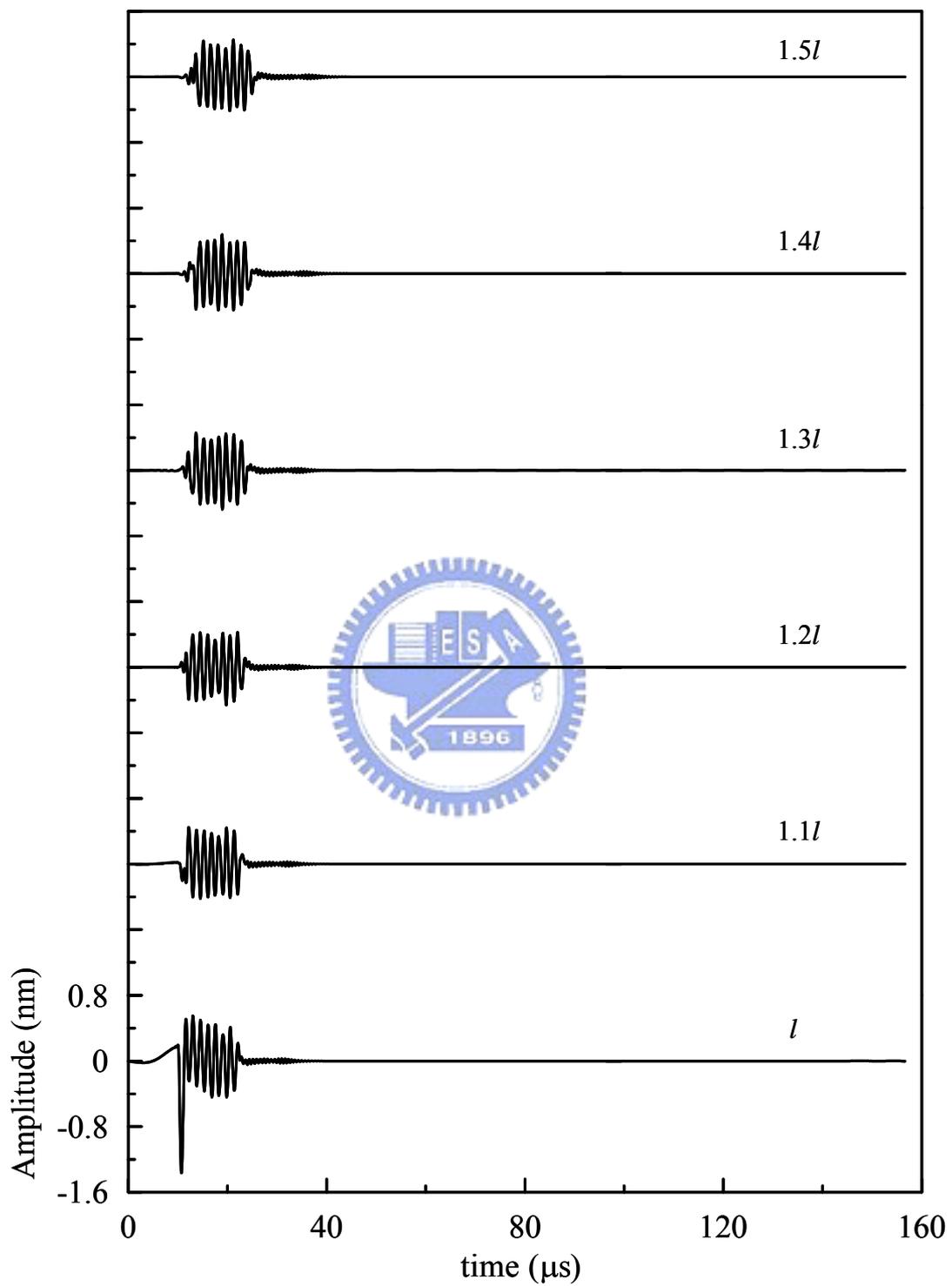


圖 4-9 與圖 4-8 同，但為厚度剪切模式

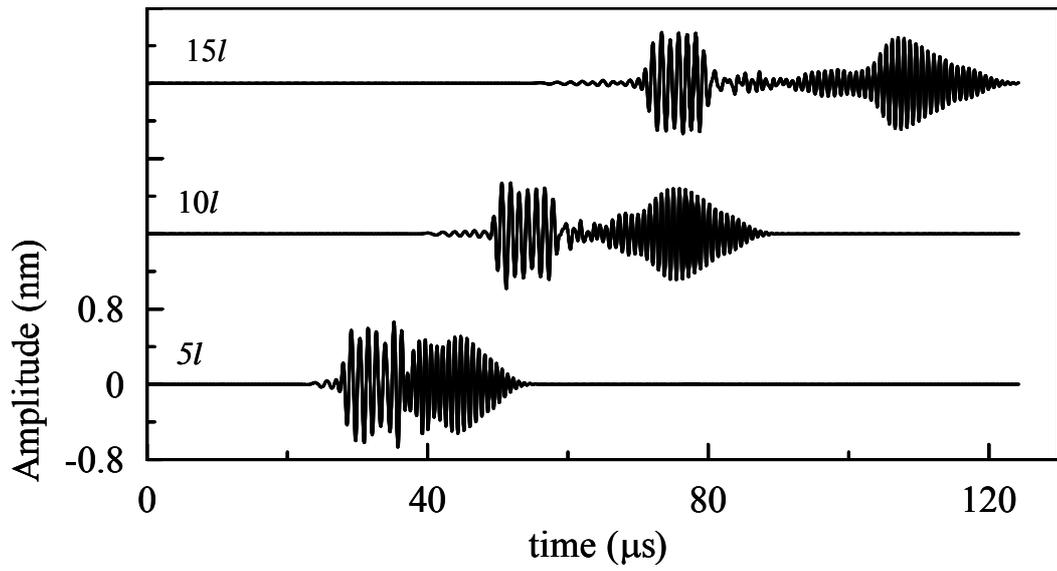


圖 4-10 厚度模式壓電平板遠場表面位移 u_3 之時域響應，
場距為 $5l \sim 15l$ ($l = 9.5 \text{ mm}$)

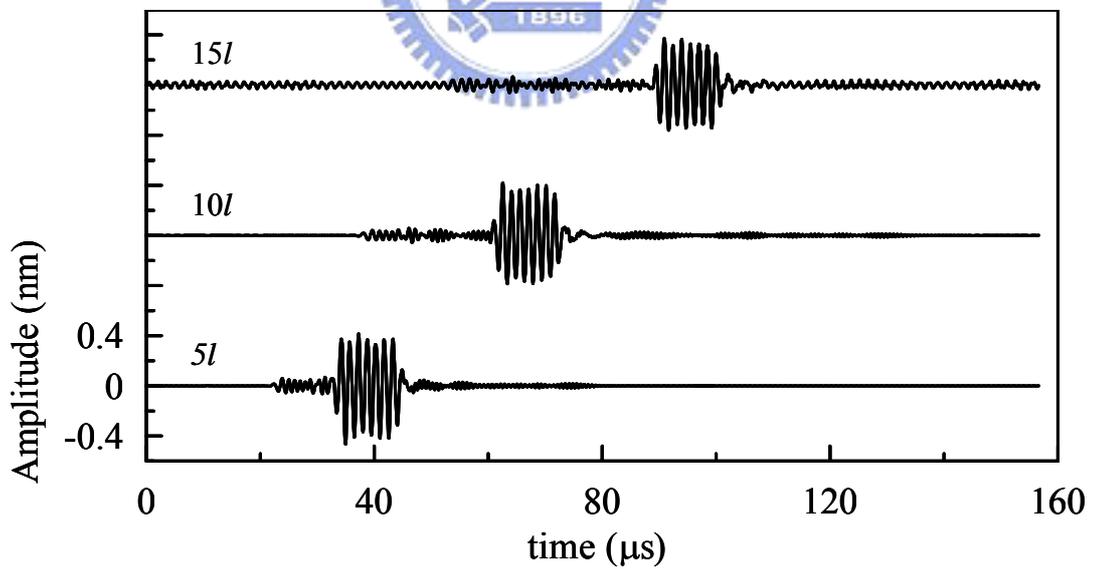


圖 4-11 與圖 4-10 同，但為厚度剪切模式

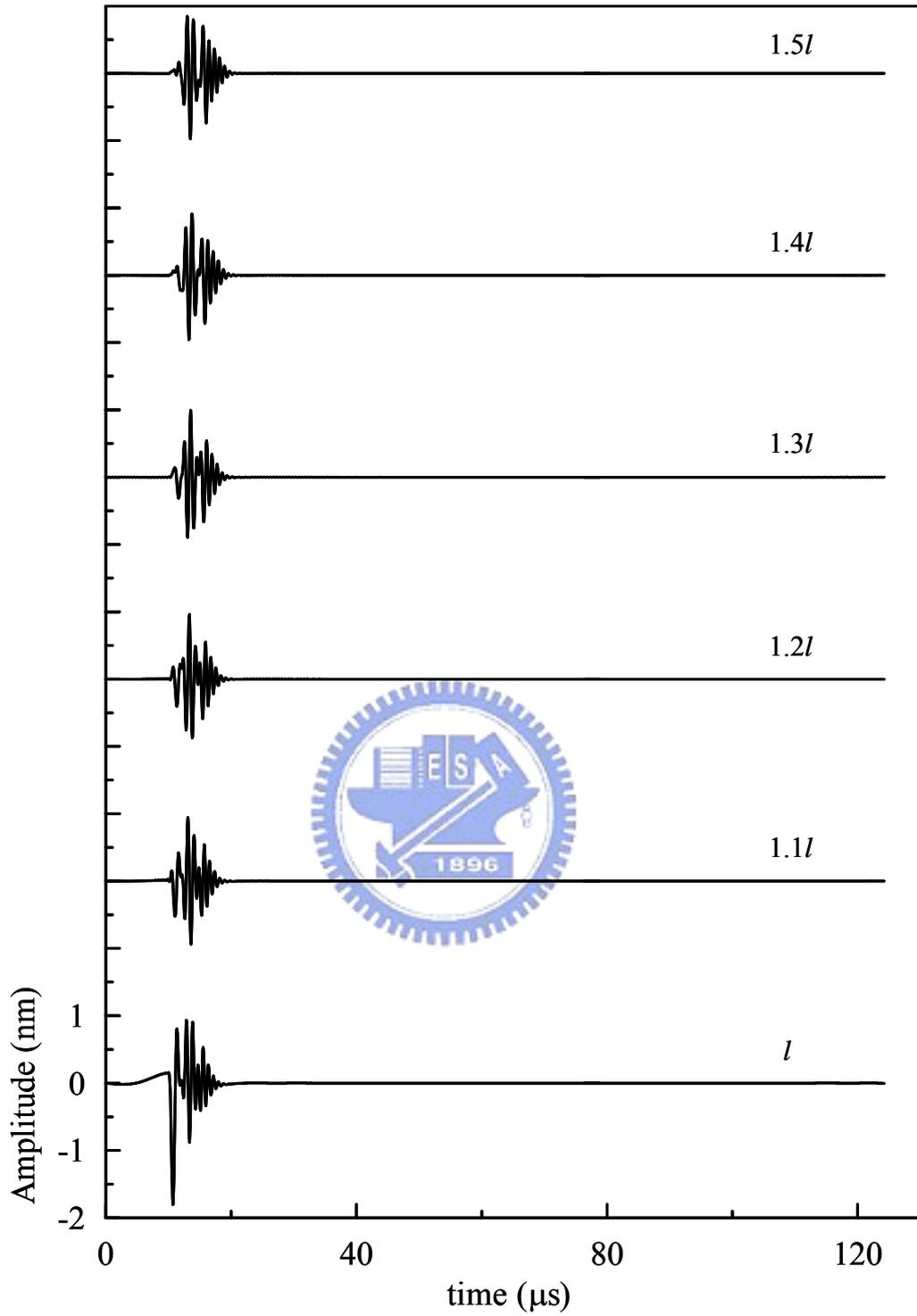


圖 4-12 厚度模式壓電平板近場表面位移 u_3 之時域響應，場距為 $l \sim 1.5l$ ($l = 4.5 \text{ mm}$)

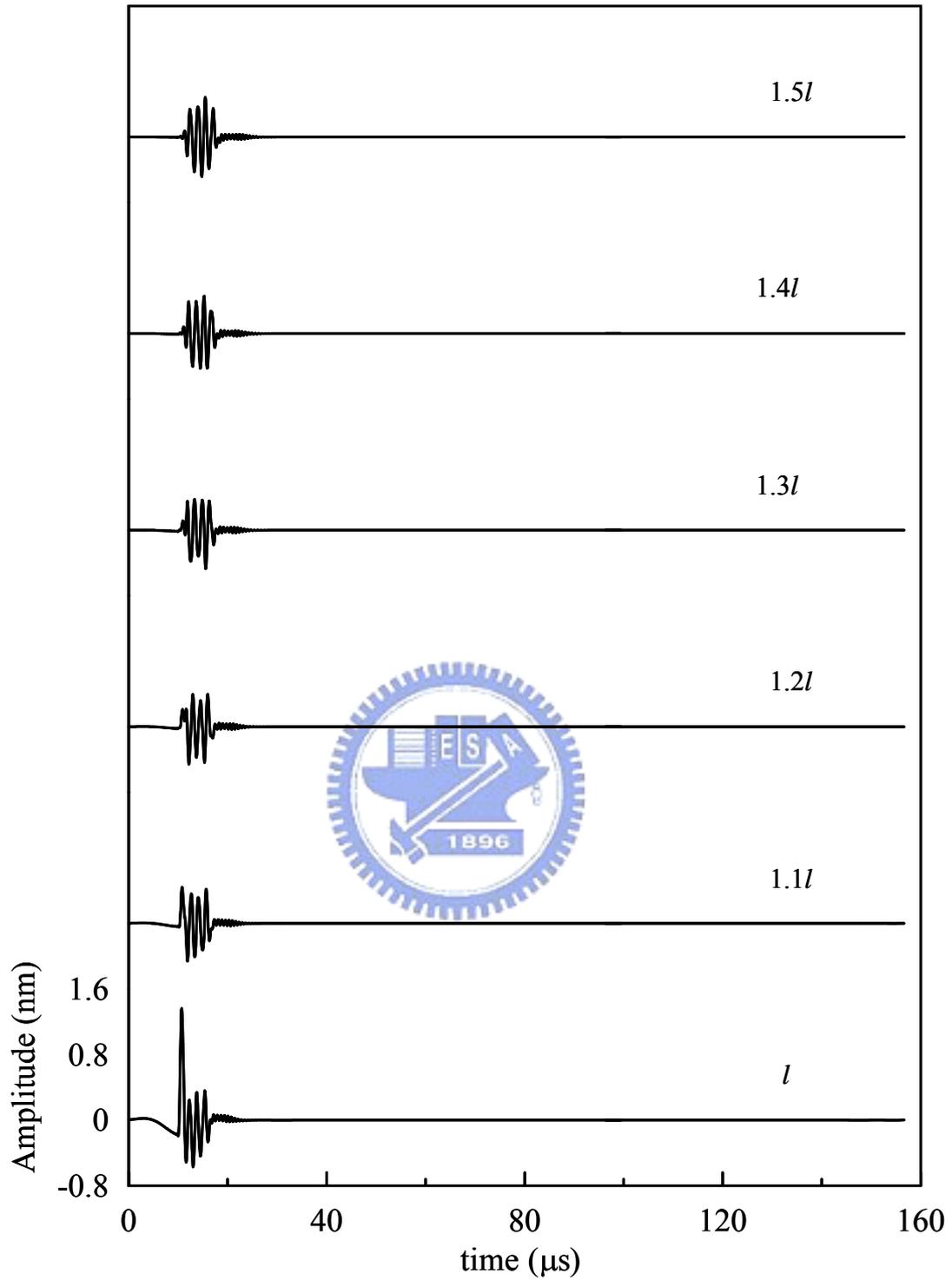


圖 4-13 與圖 4-12 同，但為厚度剪切模式

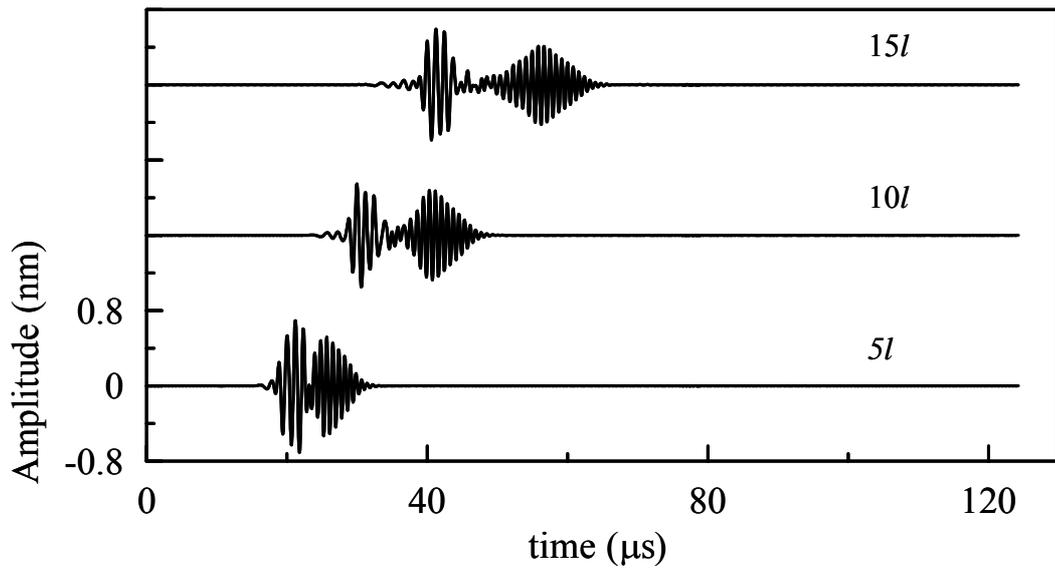


圖 4-14 厚度模式壓電平板遠場表面位移 u_3 之時域響應，
場距為 $5l \sim 15l$ ($l = 4.5 \text{ mm}$)

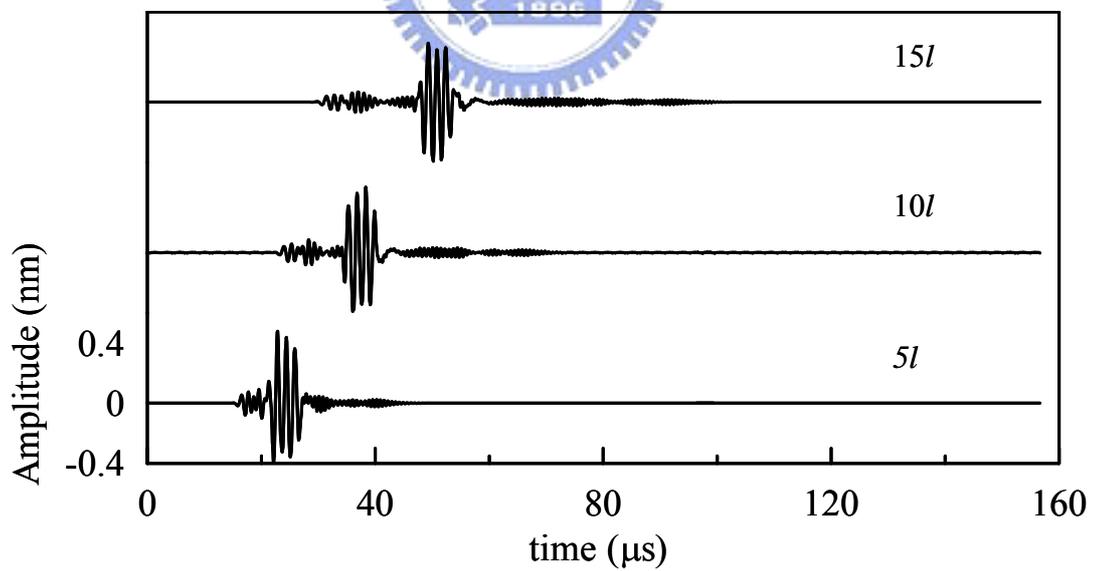


圖 4-15 與圖 4-14 同，但為厚度剪切模式

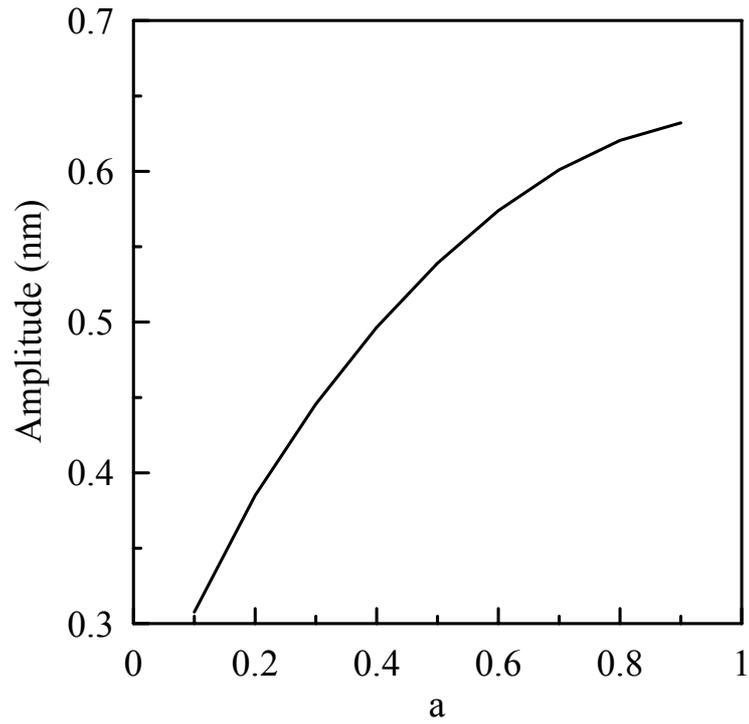


圖 4-16 厚度模式壓電平板時域響應振幅與電極寬度之關係(場距 $10l$)

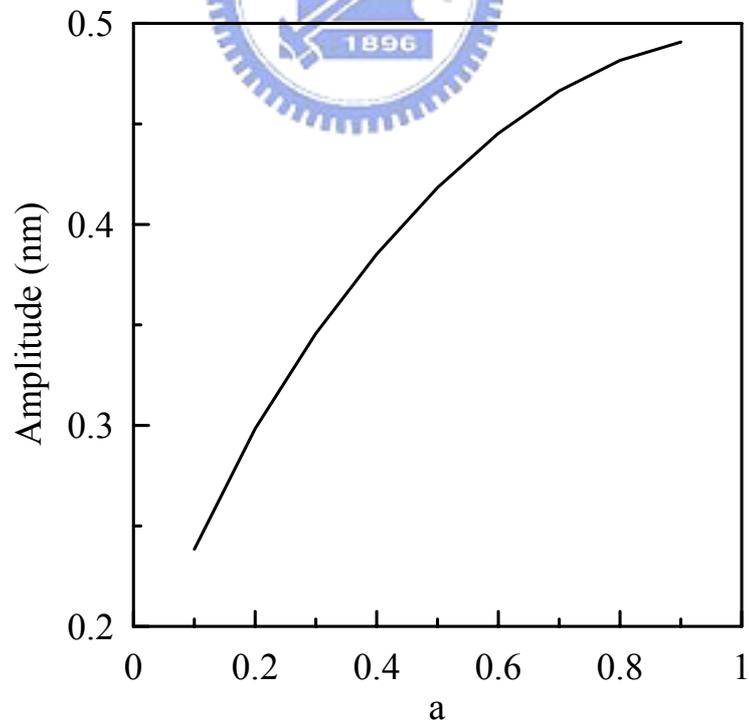


圖 4-17 與圖 4-16 同，但為厚度剪切模式