

## 第一章 緒 言

梁在結構工程系統中，長久以來一直扮演著非常重要的角色，在機械、航空太空、建築、車輛及土木工程中皆有很廣泛的應用。梁結構在使用中，常需承受大位移及大旋轉，因此傳統的線性分析已無法滿足現今的結構設計需求。所以有許多非線性分析理論與方法[1~7]相繼被提出來用於探討由幾何形狀改變所造成的非線性行為。有些結構如飛機、太空船、船舶等，為了減輕重量而使用了高強度材料及薄壁斷面，所以在使用時容易發生挫屈現象。為了結構體的安全，挫屈分析便成為分析及設計上必要之考量。

梁結構的挫屈是由軸向、撓曲與扭曲變形間的耦合作用所造成的，所以挫屈分析是一個二階分析(即非線性分析)[8]。挫屈一般可分為側向挫屈、扭轉挫屈、及側向-扭轉挫屈等。在古典線性挫屈分析中，因不考慮挫屈前的變形效應且假設挫屈前的內力與負荷成線性關係，所以當挫屈前的變形很小時，線性挫屈分析應足夠準確；但當挫屈前的變形較大時，線性挫屈分析與考慮挫屈前變形的非線性挫屈分析所得之結果便有很大的差異。

薄壁梁受彎矩作用時，容易造成側向-扭轉挫屈，文獻上在這方面有很多的研究[2]、[8-14]，其中大部分的研究為線性挫屈分析，小部份是非線性挫屈分析，梁柱結構在使用時經常同時受軸力和彎矩作用，更容易造成側向-扭轉挫屈，但文獻上在這方面的研究卻很少見。

在文獻[1]中 Hsiao 用 Corotational Total Lagrangian Formulation 提出一個三維梁元素，用以分析空間中梁結構的靜態大位移、大旋轉但小應變之問題。為了考慮撓曲、扭曲及軸向變形間的耦合效應，[1]中採用了完整之非線性梁理論的一致線性化推導元素，其變形力保留到所有變形參數之二次項，剛度矩陣則保留到變形參數的一次項。[1]中的梁元素可用在非線性分析及挫屈分析，但[1]僅將其應用於梁之非線性分析。由[1]中之例題的結果證明其梁元素相當的可靠。文獻[15]賴採用[1]中的梁元素，提出一個非線性挫屈分析的計算程序，用增量迭代法求得挫屈前的變形，並用系統的切線剛度矩陣的行列式值是否為零作為挫屈的判斷準則，藉以探討梁在挫屈前的變形對挫屈的影響以及挫屈後的行為。文獻[16]楊利用[1]中的梁元素，推

導與變形相關之負荷所造成的負荷剛度矩陣，並探討兩主軸之撓曲剛度比，扭轉與撓曲剛度比，跨度，作用力作用位置及邊界條件對梁受純彎矩時之挫屈負荷的影響。但[1,15,16]皆假設梁形心軸之扭轉率(twist rate)為一常數，即沒有考慮梁的翹曲剛度(warping rigidity)的效應。

文獻[17]中吳亦採用 Corotational Total Lagrangian Formulation 及虛功原理來推導一三維梁的統御方程式及構成方程式，並且使用了一致線性化將方程式中的變形參數保留到二次項，使其簡化，但仍能完整地考慮到應變間的耦合效應。[17]利用[1]中所提出之對梁變形機制的描述方法，但並未使用[1]中對形心軸單位長度之扭轉角為一固定值之假設，即考慮了翹曲剛度的效應。[17]中利用推導出的二階梁理論及級數解來分析一懸臂梁及簡支梁受保守扭矩的側向-扭轉挫屈。文獻[18]鄭利用文獻[17]的二階梁理論及級數解來分析一懸臂梁及簡支梁受純彎矩的側向-扭轉挫屈，[18]中考慮了挫屈前的變形，其所得之結果與文獻[19]之古典理論解作比較。當梁的兩個主軸之撓曲剛度相差甚大時，在某些邊界條件下兩者幾乎有一致的結果。但，當兩主軸的撓曲剛度相差不大時，其與古典的線性挫屈負荷有明顯不同之結果，所以由此可知在主軸的撓曲剛度相差不是很大時或不同的邊界條件時，挫屈前的變形必須加以確實考量。

文獻[18]鄭僅就梁受保守彎矩之側向挫屈進行分析。但在一般的傳動機構、機械手臂、吊車的吊桿、撐竿跳時用的撐桿以及梁柱的結構上，承受彎矩的過程中，經常伴隨著有軸向力的存在，而軸向力在梁的挫屈分析過程中，對變形間的耦合效應所造成之影響更是不容忽視。文獻[20]中賴探討彎矩與軸向力同時並存時對梁之側向挫屈的影響。因[17]中的二階梁理論考慮了所有變形間的耦合作用，所以賴採用[17]中的梁理論及以級數解來探討有關彎矩及軸向力作用下梁的挫屈分析，並以 W 斷面的型鋼及橢圓斷面之梁受到軸向力及保守彎矩的作用為例，以了解梁在軸向力及保守彎矩同時作用下對挫屈負荷之影響。

文獻[17]、[18]中所得的結果與文獻[16]、[21]使用有限元素法所得到的結果及文獻[22]中的理論解比較，可以發現當兩個主軸的撓曲剛度相差很大時，在各種邊界條件下的結果都很接近，但當兩主軸的撓曲剛度相差不是

很大時，[18、20]的結果和[16、21、22]的結果有相當的差異。從文獻[18、20]中的推導可發現，其次要平衡路徑的統御方程式是建立在擾動前的元素座標上，且其元素的節點內力亦是在擾動前的元素座標上計算。但次要平衡路徑的統御方程式要建立在擾動後的元素座標上且元素的內力要在擾動後的元素座標上計算才正確。故文獻[18、20]中元素節點的擾動位移與擾動變形間的關係是不恰當的，且元素座標與總體座標間的轉換矩陣也是不恰當的，因此會造成結果不精確。

文獻[23]中林改正了文獻[18、20]中的錯誤，並重新分析了文獻[18、20]中的例題。由文獻[23]例題之結果可以發現其結果與文獻[16、21、22]中的結果非常接近，故文獻[23]中的方法應是正確的。

但在文獻[23]中在 Green Strain 求對應的工程應變，在剪應變的部份所用的公式有誤(詳見附錄 A 或文獻[24])，故其工程應變的二次項有些錯誤，雖然該錯誤對其數值例題的結果似乎影響很小，但仍需改正。故本研究的目的之一為改正文獻[23]中推導的錯誤。另外，文獻[23]僅探討梁受軸力及均勻彎矩的挫屈彎矩。但實際上梁經常受不均勻彎矩的作用，故本研究的另一目的為探討梁在軸力及不均勻彎矩作用下的挫屈彎矩。

因文獻[23]的方法稍加修改，即可分析梁受軸力及不均勻彎矩的挫屈問題，所以本文中將修改文獻[23]的方法，以探討梁在軸力及不均勻彎矩作用下的挫屈彎矩。本研究將在第二章中以梁變形前的形心軸之長度為獨立變數，重新推導梁元素的平衡方程式及構成方程式。在第三章中，將推導出梁元素的主要平衡路徑的統御方程式並求其解，然後在主要平衡路徑上加上擾動位移以建立梁元素在次要平衡路徑的統御方程式，並求出其級數解及梁元素在次要平衡路徑的節點內力。最後，利用梁結構的端點及內部節點邊界條件求出挫屈負荷。在第四章中將以數值例題求出在不同邊界條件下，不同斷面之尤拉梁受軸力及均勻或不均勻彎矩同時作用時的側向-扭轉挫屈彎矩，並與文獻的結果比較，以說明本研究方法的正確性及有效性。