第二章 理論推導

本文對梁變形的假設，梁變形機制的描述及梁的統御方程式，構成方程式及推導方式都與文獻[17]相同。為了文章的完整性，本章中將該梁元素的推導，簡要敘述如下：

2.1 基本假設

在本文的推導中對梁所作的基本假設如下：

(1) 梁為等斷面且為細長桿件。

(2) Euler-Bernoulli 假說成立。

(3) 斷面形心與剪力中心重合。

(4) 梁斷面變形前後，斷面形狀不變且斷面內的應變可略。

(5) 斷面軸向之翹曲位移量(Warping Displacement)為扭率與該斷面 Saint Venant 翹曲函數之乘積。

(6) 梁應變均為小應變。

由假設(2)與假設(4)可知梁元素的變形可由其形心軸的位移、斷面的方向(即斷面座標)及其翹曲來決定。

2.2 座標系統

本研究用 Corotational Total Lagrangian Formulation 來描述梁結構之變形。即在分析時將梁結構分成很多小段，每一小段梁稱為梁元素，然後在梁元素變形後的位置建立其平衡方程式。對梁元素與梁元素形心軸之交點稱作節點，並假設外加負荷均為集中負荷且作用於節點上。為了描述整個系統的變形，本文中定義了以下三個座標系統：

(a) 固定座標系統：$X_i^g (i=1,2,3)$

為一總體座標系統(global coordinate system)，結構體所有節點的座標，系統的邊界條件與平衡方程式及其他座標系統之基底，如元素座標、元素截面座標等，均在此座標系統上定義。

(b) 元素座標系統：$x_i\,(i=1,2,3)$

此座標系統是建立在每段梁元素變形後的最新位置上，如圖一所示，座標原點為節點 1，x_1 軸方向由節點 1 指向節點 2，x_2 及 x_3 軸方向在元素變形前為元素斷面的主軸方向，至於變形後其方向的決定方式是分別將位於節點 1，2 變形後的斷面繞一個與該斷面之法線及 x_1 軸垂直的旋轉軸旋轉一角度使斷面之法線方向與 x_1 軸方向一致(此時並不考慮斷面之翹曲變形，否則斷面的法線方向無法定義)，然後再以兩斷面主軸方向的角平分線作為 x_2 軸及 x_3 軸的方向。本文中梁元素之變形及其統御方程式、平衡方程式均在此座標系統上定義。

(c) 元素截面座標系統：$x_i^s\,(i=1,2,3)$

此座標系統是建立在梁元素任一變形後的截面上，如圖一所示。但翹曲變形部分不予考慮。其中 x_1^s 軸垂直截面且通過截面的形心，而 x_2^s 軸與 x_3^s 軸則分別與該截面之主軸重合。本文中軸向扭轉所導致的翹曲變形，是先在此座標系統定義，再利用座標轉換關係轉換到元素座標系統上。

2.3 旋轉向量

為便利後續的說明起見，在此定義“旋轉向量”代表一有限旋轉。圖二所示為對一向量 $\mathbf{b}$ 施以一旋轉向量 $\phi\mathbf{a}$ 而使向量 $\mathbf{b}$ 旋轉到一個新的位置向量 $\mathbf{b}'$，則 $\mathbf{b}$ 與 $\mathbf{b}'$ 存在有以下的關係[25]

$$\mathbf{b}' = \cos\phi\mathbf{b} + (1-\cos\phi)(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a} + \sin\phi\mathbf{a}\times\mathbf{b} \qquad (2.3.1)$$

其中 ϕ 表逆時鐘方向旋轉角，$\mathbf{a}$ 表旋轉軸的單位向量；'.'和'×'表向量的內積和外積。

2.4 梁元素之變形描述

本文是在元素座標上，描述梁元素的變形，由 2.1 節中的基本假設可知，梁元素的變形可以由其形心軸的單位長度伸長量(unit extension)、側向位移及其截面繞形心軸的旋轉決定。所以本文在描述梁元素的變形前，先描述其形心軸的位移及其斷面的旋轉。

本文中$\{\ \}$代表行矩陣，$(\ )_{,x} = (\ )'$代表$(\ )$對x的微分。

2.4.1 梁元素之形心軸的位移

圖一中 P 為梁元素形心軸上的任一點，令其變形前後在元素座標上的位置向量分別為$\{x \quad 0 \quad 0\}$及$\mathbf{r}_p = \{x_p(x) \quad v(x) \quad w(x)\}$，其中$x$為節點 1 量至 P 點間的形心軸在變形前的長度，$v(x)$，$w(x)$為 P 點在x_2，x_3軸方向的位移。P 點在x_1軸方向的位移u可表示成

$$u = x_p(x) - x \tag{2.4.1}$$

在本文中$x_p(x)$以下式表示

$$x_p(x) = u_1 + \int_0^x (1+\varepsilon_0)\cos\theta_n dx \tag{2.4.2}$$

$$\approx u_1 + \int_0^x (1+\varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2)dx$$

其中u_1為節點 1 在x_1方向上的位移，由元素座標系統的定義可知$u_1 = 0$。

$$\cos\theta_n = (1-\theta_2^2-\theta_3^2)^{1/2} \tag{2.4.3}$$

$$\theta_2 = -\frac{dw(x)}{ds} = -\frac{w'}{1+\varepsilon_0} \tag{2.4.4}$$

$$\theta_3 = \frac{dv(x)}{ds} = \frac{v'}{1+\varepsilon_0} \tag{2.4.5}$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial x} \text{，} v' = \frac{\partial v}{\partial x} \text{，} \varepsilon_0 = \frac{ds}{dx} - 1 \tag{2.4.6}$$

在變形後的形心軸上，P 點之單位切線向量可表示成

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}_p}{dx}\frac{1}{1+\varepsilon_0} = \{\cos\theta_n \quad \theta_3 \quad -\theta_2\} \tag{2.4.7}$$

由單位長度伸長量的定義，形心軸的單位長度伸長量ε_0可寫成

$$\varepsilon_0 = \frac{ds}{dx} - 1 \tag{2.4.8}$$

2.4.2 元素座標與元素截面座標之關係

令$\mathbf{e}_i$與$\mathbf{e}_i^s (i=1,2,3)$分別代表元素座標x_i方向的單位向量與元素截面座標x_i^s軸方向的單位向量。由座標系統的定義可知，在變形前x_i軸與x_i^s軸是一致的，而且變形後$\mathbf{e}_1^s$是與(2.4.7)式的$\mathbf{t}$重合。所以在本文中假設變形後的單位向量$\mathbf{e}_1^s (i=1,2,3)$，是由以下兩個旋轉向量連續作用於單位向量$\mathbf{e}_i (i=1,2,3)$來決定[1]：

$$\boldsymbol{\theta}_n = \theta_n \mathbf{n} \tag{2.4.9}$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \theta_1 \mathbf{t} \tag{2.4.10}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{t}}{\|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{t}\|} = \{0 \quad \theta_2 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2} \quad \theta_3 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}\} = \{0 \quad n_2 \quad n_3\} \tag{2.4.11}$$

其中$\mathbf{n}$為垂直$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{t}$的單位向量，θ_n為$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{t}$的夾角，θ_1為繞$\mathbf{t}$軸的轉角。

旋轉向量$\boldsymbol{\theta}_n$作用在$\mathbf{e}_i$上，將其轉至一中繼位置$\mathbf{e}_i'$，此時$\mathbf{e}_1'$與$\mathbf{t}$重合，再將$\boldsymbol{\theta}_t$作用在$\mathbf{e}_i'$，將其轉至$\mathbf{e}_i^s$。若$\mathbf{e}_i$、$\boldsymbol{\theta}_n$以及$\boldsymbol{\theta}_t$已知，則元素截面座標$\mathbf{e}_i^s$就唯一決定；反之，若$\mathbf{e}_i$、$\mathbf{e}_i^s$已知，則旋轉向量$\boldsymbol{\theta}_n$與$\boldsymbol{\theta}_t$亦唯一決定。

由(2.3.1)式、(2.4.7)式及(2.4.9)～(2.4.11)式可得$\mathbf{e}_i$與$\mathbf{e}_i^S$的關係可表示如下[1]：

$$\mathbf{e}_i^s = \mathbf{R}\,\mathbf{e}_i \tag{2.4.12}$$

$$\mathbf{R} = [\mathbf{t} \quad \mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \tag{2.4.13}$$

$$\mathbf{R}_1 = \cos\theta_1\,\mathbf{R}_a + \sin\theta_1\,\mathbf{R}_b \tag{2.4.14}$$

$$\mathbf{R}_2 = -\sin\theta_1\,\mathbf{R}_a + \cos\theta_1\,\mathbf{R}_b \tag{2.4.15}$$

$$\mathbf{R}_a = \{-\theta_3 \quad \cos\theta_n + (1-\cos\theta_n)n_2^2 \quad 1-\cos\theta_n n_2 n_3\} \tag{2.4.16}$$

$$\mathbf{R}_b = \{\theta_2 \quad (1-\cos\theta_n)n_2 n_3 \quad \cos\theta_n + (1-\cos\theta_n)n_3^2\} \tag{2.4.17}$$

其中(2.4.12)式中的 $\mathbf{R}$ 是一般所謂的旋轉矩陣同時也是元素座標和元素截面座標間的轉換矩陣。

由(2.4.9)～(2.4.11)式可以發現$\boldsymbol{\theta}_n$與$\boldsymbol{\theta}_t$均由$\theta_i(i=1,2,3)$決定，同樣地，(2.4.12)式中的矩陣 $\mathbf{R}$ 亦為θ_i的函數，所以本文稱θ_i為旋轉參數，$\boldsymbol{\theta}=\{\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3\}$為旋轉參數向量。當$\boldsymbol{\theta}$有一微小變量$\delta\boldsymbol{\theta}=\{\delta\theta_1 \quad \delta\theta_2 \quad \delta\theta_3\}$時，截面座標會旋轉至一個新的位置，此一新的位置可由截面座標繞$x_i(i=1,2,3)$軸分別作微小旋轉$\delta\boldsymbol{\phi}=\{\delta\phi_1 \quad \delta\phi_2 \quad \delta\phi_3\}$而得。$\delta\boldsymbol{\theta}$與$\delta\boldsymbol{\phi}$之關係可表示如下[1]：

$$\delta\boldsymbol{\phi} = [\mathbf{t} \quad \mathbf{t}_1 + a\mathbf{t} \quad \mathbf{t}_2 + b\mathbf{t}]\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{T}\delta\boldsymbol{\theta} \tag{2.4.18}$$

其中

$$\mathbf{t}_1 = \{-\theta_3 \quad (1-\theta_3^2)/\cos\theta_n \quad \theta_2\theta_3/\cos\theta_n\}$$

$$\mathbf{t}_2 = \{\theta_2 \quad \theta_2\theta_3/\cos\theta_n \quad (1-\theta_2^2)/\cos\theta_n\}$$

$$a = \theta_3(1-\cos\theta_n)/(\theta_2^2+\theta_3^2)$$

$$b = -\theta_2(1-\cos\theta_n)/(\theta_2^2+\theta_3^2)$$

(2.4.18)式的反函數可表示如下

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -\theta_3 & \cos\theta_n & 0 \\ \theta_2 & 0 & \cos\theta_n \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\phi} = \mathbf{T}^{-1}\,\delta\boldsymbol{\phi} \tag{2.4.19}$$

當旋轉參數θ_2與θ_3很小時，(2.4.18)式中的$\mathbf{T}^{-1}$矩陣可近似如下式

$$\mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & \theta_3/2 & -\theta_2/2 \\ -\theta_3 & 1 & 0 \\ \theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4.20}$$

2.5 梁元素之位移與應變

圖一中 Q 點為梁元素中的任意點，P 點為 Q 點在形心軸上的對應點，即 P 點與 Q 點位於同一斷面上。在元素座標上，Q 點在梁元素變形前後的位置向量可分別表示如下

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \tag{2.5.1}$$

$$\mathbf{r} = x_p(x)\mathbf{e}_1 + v(x)\mathbf{e}_2 + w(x)\mathbf{e}_3 + \theta_{1,x}\omega\mathbf{e}_1^s + y\mathbf{e}_2^s + z\mathbf{e}_3^s \tag{2.5.2}$$

其中$x_p(x)$、$v(x)$以及$w(x)$分別是 P 點在$x_i(i=1,2,3)$ 軸上的座標，$\theta_{1,x}=\dfrac{d\theta_1}{dx}$是沿變形後的形心軸的斷面之軸向扭轉率，$\omega=\omega(y,z)$為該截面之 Saint Venant 翹曲函數，$y$、$z$分別是 Q 點在$x_2^s$軸與$x_3^s$軸的座標。

將(2.4.12)式代入(2.5.2)式，並利用近似式$\cos\theta_n=1-\dfrac{1}{2}\theta_2^2-\dfrac{1}{2}\theta_3^2$，可得$\mathbf{r}$在$x_i\,(i=1, 2, 3)$軸方向之分量$x_i$如下[26]

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_p + y(\theta_2\sin\theta_1 - \theta_3\cos\theta_1) \\ &\quad + z(\theta_2\cos\theta_1 + \theta_3\sin\theta_1) + \theta_{1,x}(1-\frac{1}{2}\theta_2^2-\frac{1}{2}\theta_3^2)\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= v + y[\frac{1}{2}\theta_2\theta_3\sin\theta_1 + (1-\frac{1}{2}\theta_3^2)\cos\theta_1] \\ &\quad + z[\frac{1}{2}\theta_2\theta_3\cos\theta_1 - (1-\frac{1}{2}\theta_3^2)\sin\theta_1] + \theta_{1,x}\theta_3\omega \end{aligned}$$

$$x_3 = w + y[\frac{1}{2}\theta_2\theta_3\cos\theta_1 + (1-\frac{1}{2}\theta_2^2)\sin\theta_1]$$

$$+ z[(1-\frac{1}{2}\theta_2^2)\cos\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2\theta_3\sin\theta_1] - \theta_{1,x}\theta_2\omega \tag{2.5.3}$$

本文的應變採用工程應變。為了推導上的方便，本文中先推導出 Green Strain $\varepsilon_{ij}\,(i, j=1,2,3)$。再由 Green Strain 求得與其對應之工程應變。由基本假設(4)，本文僅考慮 ε_{11}，ε_{12} 及 ε_{13}。如果將 x, y, z 當作獨立變數，則依 Green Strain 的定義 ε_{11}，ε_{12}，ε_{13} 可表示成

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1^t\mathbf{g}_1 - 1), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\mathbf{g}_1^t\mathbf{g}_2, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\mathbf{g}_1^t\mathbf{g}_3 \tag{2.5.4a}$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} \tag{2.5.4b}$$

將(2.5.3)式代入(2.5.4)式，並保留 ε_0、旋轉參數及旋轉參數之微分項至二次項，可得應變為

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^1 + \varepsilon_{11}^2$$

$$\varepsilon_{11}^1 = \varepsilon_0 - yv_{,xx} - zw_{,xx} + \omega\theta_{1,xx}$$

$$\varepsilon_{11}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0^2 + \varepsilon_{0,x}(yv_{,x} + zw_{,x}) + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\theta_{1,x}^2 + \theta_1(zv_{,xx} - yw_{,xx})$$

$$+ \frac{1}{2}y^2v_{,xx}^2 + yzv_{,xx}w_{,xx} + \frac{1}{2}z^2w_{,xx}^2 + \varepsilon_0\omega\theta_{1,xx} - \theta_{1,xx}\omega(yv_{,xx} + zw_{,xx})$$

$$+ \frac{1}{2}\omega^2\theta_{1,xx}^2 \tag{2.5.5a}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{12}^2$$

$$\varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,y} - z)\theta_{1,x}$$

$$\varepsilon_{12}^{2}=\frac{1}{2}[\omega_{,y}\varepsilon_0\theta_{1,x}+(\omega-y\omega_{,y})\theta_{1,x}v_{,xx}-z\omega_{,y}\theta_{1,x}w_{,xx}+\omega\omega_{,y}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}]$$
$$+\frac{1}{4}z(v_{,x}w_{,xx}-w_{,x}v_{,xx})$$
(2.5.5b)

$$\varepsilon_{13}=\varepsilon_{13}^{1}+\varepsilon_{13}^{2}$$
$$\varepsilon_{13}^{1}=\frac{1}{2}(\omega_{,z}+y)\theta_{1,x}$$
$$\varepsilon_{13}^{2}=\frac{1}{2}[\omega_{,z}\varepsilon_0\theta_{1,x}+(\omega-z\omega_{,z})\theta_{1,x}w_{,xx}-y\omega_{,z}\theta_{1,x}v_{,xx}+\omega\omega_{,z}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}]$$
$$+\frac{1}{4}y(w_{,x}v_{,xx}-v_{,x}w_{,xx})$$
(2.5.5c)

其中ε_{1j}^{k} $(j=1,2,3,k=1,2)$代表ε_{1j}中之k次項。

Green Strain ε_{11}, ε_{12}, ε_{13} 與工程應變 e_{11}, γ_{12}, γ_{13} 間的關係如下：

$$e_{11}=(1+2\varepsilon_{11})^{1/2}-1 \tag{2.5.6a}$$

$$\sin\gamma_{12}=\frac{2\varepsilon_{12}}{(1+2\varepsilon_{11})^{1/2}(1+2\varepsilon_{22})^{1/2}} \tag{2.5.6b}$$

$$\sin\gamma_{13}=\frac{2\varepsilon_{13}}{(1+2\varepsilon_{11})^{1/2}(1+2\varepsilon_{33})^{1/2}} \tag{2.5.6c}$$

當應變很小時(2.5.6)式可以用下列近似式代替

$$e_{11}=\varepsilon_{11}-\frac{1}{2}\varepsilon_{11}^{2} \tag{2.5.7a}$$

$$\gamma_{12}=2\varepsilon_{12}-2\varepsilon_{12}\varepsilon_{11} \tag{2.5.7b}$$

$$\gamma_{13}=2\varepsilon_{13}-2\varepsilon_{13}\varepsilon_{11} \tag{2.5.7c}$$

因(2.5.4)式中 Green strain 僅保留到旋轉參數的二次項，所以本文中工程應變亦僅保留到旋轉參數的二次項。由(2.5.5)式及(2.5.7)式，並保留ε_0、$\varepsilon_{0,x}$、旋轉參數及其微分項到二次項可得

$$e_{11} = e_{11}^1 + e_{11}^2$$

$$e_{11}^1 = \varepsilon_0 - zw_{,xx} - yv_{,xx} + \omega\theta_{1,xx}$$

$$e_{11}^2 = \frac{1}{2}\theta_{1,x}^2(y^2 + z^2) + y(-\theta_1 w_{,xx} + \varepsilon_0 v_{,xx}) + z(\varepsilon_0 w_{,xx} + \theta_1 v_{,xx})$$

$$+ \varepsilon_{0,x}(yv_{,x} + zw_{,x}) \qquad (2.5.8a)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{12}^1 + \gamma_{12}^2$$

$$\gamma_{12}^1 = (-z + \omega_{,y})\theta_{1,x}$$

$$\gamma_{12}^2 = -z^2\theta_{1,x}w_{,xx} + \omega\theta_{1,x}v_{,xx} + z(\varepsilon_0\theta_{1,x} + v_{,x}\frac{w_{,xx}}{2} - w_{,x}\frac{v_{,xx}}{2}$$

$$+ \omega\theta_{1,x}\theta_{1,xx}) - yz\theta_{1,x}v_{,xx} \qquad (2.5.8b)$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{13}^1 + \gamma_{13}^2$$

$$\gamma_{13}^1 = (y + \omega_{,z})\theta_{1,x}$$

$$\gamma_{13}^2 = y^2\theta_{1,x}v_{,xx} + \omega\theta_{1,x}w_{,xx} + y(-\varepsilon_0\theta_{1,x} - v_{,x}\frac{w_{,xx}}{2} + w_{,x}\frac{v_{,xx}}{2}$$

$$- \omega\theta_{1,x}\theta_{1,xx}) + yz\theta_{1,x}w_{,xx} \qquad (2.5.8c)$$

其中 e_{11}^k , γ_{12}^k , γ_{13}^k ($k = 1, 2$) 代表 e_{11} , γ_{12} , γ_{13} 中之 k 次項。

將(2.5.8)式中之 e_{11} , γ_{12} , γ_{13} 分別作變分可得到下式

$$\delta e_{11} = \delta e_{11}^0 + \delta e_{11}^1$$

$$\delta e_{11}^0 = \delta\varepsilon_0 - \delta w_{,xx}z - \delta v_{,xx}y + \delta\theta_{1,xx}\omega$$

$$\delta e_{11}^1 = \delta w_{,xx}(-\theta_1 y + \varepsilon_0 z) + \delta v_{,xx}(\varepsilon_0 y + \theta_1 z) + \delta\theta_{1,x}(y^2 + z^2)\theta_{1,x}$$

$$+ \delta\theta_1(-yw_{,xx} + zv_{,xx}) + \delta\varepsilon_0(zw_{,xx} + yv_{,xx}) + \delta v_{,x}y\varepsilon_{0,x}$$

$$+ \delta w_{,x}z\varepsilon_{0,x} + \delta\varepsilon_{0,x}(yv_{,x} + zw_{,x}) \qquad (2.5.9a)$$

$$\delta\gamma_{12} = \delta\gamma_{12}^0 + \delta\gamma_{12}^1$$

$$\delta\gamma_{12}^0 = \delta\theta_{1,x}(-z + \omega_{,y})$$

$$\delta\gamma_{12}^1 = \delta w_{,xx}(-z^2\theta_{1,x} + \frac{zv_{,x}}{2}) + \delta v_{,xx}(\omega\theta_{1,x} - \frac{1}{2}zw_{,x} - yz\theta_{1,x})$$

$$+ \delta\theta_{1,x}(-z^2 w_{,xx} + \omega v_{,xx} + z\varepsilon_0 + \omega z\theta_{1,xx} - yzv_{,xx})$$

$$+ \delta\varepsilon_0 z\theta_{1,x} + \frac{1}{2}\delta v_{,x} zw_{,xx} - \frac{1}{2}\delta w_{,x} zv_{,xx} + \delta\theta_{1,xx}\omega z\theta_{1,x}$$

(2.5.9b)

$$\delta\gamma_{13} = \delta\gamma_{13}^0 + \delta\gamma_{13}^1$$

$$\delta\gamma_{13}^0 = \delta\theta_{1,x}(y + \omega_{,z})$$

$$\delta\gamma_{13}^1 = \delta w_{,xx}(\omega\theta_{1,x} - \frac{1}{2}yv_{,x} + yz\theta_{1,x}) + \delta v_{,xx}(y^2\theta_{1,x} + \frac{1}{2}yw_{,x})$$

$$+ \delta\theta_{1,x}(y^2 v_{,xx} + \omega w_{,xx} - y\varepsilon_0 - \omega y\theta_{1,xx} + yzw_{,xx})$$

$$- \delta\varepsilon_0 y\theta_{1,x} - \frac{1}{2}\delta v_{,x} yw_{,xx} + \frac{1}{2}\delta w_{,x} yv_{,xx} - \delta\theta_{1,xx}\omega y\theta_{1,x}$$

(2.5.9c)

其中 δe_{11}^k , $\delta\gamma_{12}^k$, $\delta\gamma_{13}^k$ ($k = 0,1$) 代表 δe_{11} , $\delta\gamma_{12}$, $\delta\gamma_{13}$ 中之 k 次項。

由(2.4.1)~(2.4.6)式可得

$$u_{,x} = \frac{dx_p}{dx} - 1 = \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2 \tag{2.5.10}$$

由(2.5.10)式可得

$$\varepsilon_0 = u_{,x} + \frac{1}{2}v_{,x}^2 + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \tag{2.5.11a}$$

將上式對 x 微分

$$\varepsilon_{0,x} = u_{,xx} + v_{,x}v_{,xx} + w_{,x}w_{,xx} \tag{2.5.11b}$$

將(2.5.11)式變分可得

$$\delta\varepsilon_0 = \delta u_{,x} + v_{,x}\delta v_{,x} + w_{,x}\delta w_{,x} \tag{2.5.12a}$$

$$\delta\varepsilon_{0,x} = \delta u_{,xx} + \delta v_{,x}v_{,xx} + \delta v_{,xx}v_{,x} + \delta w_{,x}w_{,xx} + \delta w_{,xx}w_{,x} \tag{2.5.12b}$$

2.6 平衡方程式及構成方程式

本文利用虛功原理在元素座標上推導梁元素的平衡方程式及構成方程式。圖三所示為梁元素中的一小段，點 a、b 分別表示這一小段梁元素的端點，x 為形心軸變形前的長度。本文採用形心軸在 $x_i(i=1,2,3)$ 軸方向的位移量 $u_i(u_1=u\,,u_2=v\,,u_3=w)$，旋轉參數 ε_0，θ_1， $v_{,x}\,,-w_{,x}$ 及 $\theta_{1,x}$ 作為廣義位移。在斷面上與廣義位移對應之廣義合力為在 $x_i(i=1,2,3)$ 軸方向的力 $F_i(i=1,2,3)$ 、廣義力矩 A_ε^θ , $M_i^\theta(i=1,2,3)$ 及廣義雙力矩(Bimoment) B^θ 。

若給予端點 a 及 b 一個虛廣義位移 $(\delta u_i)_j$，$(\delta\varepsilon_0)_j$，$(\delta\theta_1)_j$，$(\delta v_{,x})_j$，$(-\delta w_{,x})_j$， $(\delta\theta_{1,x})_j$ $(i=1,2,3,\ j=a,b)$，其中 $(\ )_j$ 表 $(\ )$ 在端點 j 之值，則由虛功原理可知對應於虛位移，內力所作的虛功 δW_{int} 等於外力所作的虛功 δW_{ext} ，即

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \tag{2.6.1}$$

因本文假設梁元素間無外加負荷，所以 δW_{ext} 即為端點 a、b 上內力之廣義合力所作的虛功，δW_{ext} 可以表示成

$$\begin{aligned}\delta W_{ext} &= [\delta\mathbf{u}_\theta^t\mathbf{M}_\theta^* + \delta\mathbf{u}^t\mathbf{F} + \delta\theta_{1,x}B^\theta\ ]_a^b \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx}[\delta\mathbf{u}_\theta^t\mathbf{M}_\theta^* + \delta\mathbf{u}^t\mathbf{F} + \delta\theta_{1,x}B^\theta]\,dx\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

其中

$$\mathbf{M}_\theta^* = \{A_\varepsilon^\theta \quad M_1^\theta \quad M_2^\theta \quad M_3^\theta\} \tag{2.6.3}$$

$$\mathbf{F} = \{\ F_1 \quad F_2 \quad F_3\ \} \tag{2.6.4}$$

$$\delta\mathbf{u} = \{\delta u_1 \quad \delta u_2 \quad \delta u_3\} = \{\delta u \quad \delta v \quad \delta w\} \tag{2.6.5}$$

$$\delta\mathbf{u}_\theta = \{\delta\varepsilon_0 \quad \delta\theta_1 \quad -\delta w_{,x} \quad \delta v_{,x}\} \tag{2.6.6}$$

(2.6.2)式表示[ ]內各項在端點 b 之值減掉各項在端點 a 之值。利用(2.5.12)式，(2.6.2)式可表示成以下的積分式

$$\begin{aligned}\delta W_{ext} = \int_a^b [&A_\varepsilon^\theta \delta\varepsilon_{0,x} + M_1^\theta \delta\theta_{1,x} + M_2^\theta \delta(-w_{,xx}) + M_3^\theta \delta v_{,xx} \\ &+ (A_{\varepsilon,x}^\theta + F_1)\delta\varepsilon_0 + M_{1,x}^\theta \delta\theta_1 \\ &+ (F_2 - F_1 v_{,x} + M_{3,x}^\theta)\delta v_{,x} + (F_3 - F_1 w_{,x} - M_{2,x}^\theta)\delta w_{,x} \\ &+ F_{1,x}\delta u + F_{2,x}\delta v + F_{3,x}\delta w \\ &+ B^\theta \delta\theta_{1,xx} + B_{,x}^\theta \delta\theta_{1,x}]\, dx\end{aligned} \tag{2.6.7}$$

由基本假設(4)，本文僅考慮 $e_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$，所以(2.6.1)式中內力所作的虛功可表示成

$$\delta W_{\text{int}} = \int_a^b \sigma_{11}\delta e_{11} dV + \int_a^b (\sigma_{12}\delta\gamma_{12} + \sigma_{13}\delta\gamma_{13}) dV$$

(2.6.8)

其中 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ 為工程應力，V 為端點 a , b 間梁元素變形前的體積 $dV = dAdx$。又本文假設材料為彈性材料，所以應力與應變有如下的關係

$$\sigma_{11} = Ee_{11} \tag{2.6.9a}$$

$$\sigma_{12} = G\gamma_{12} \tag{2.6.9b}$$

$$\sigma_{13} = G\gamma_{13} \tag{2.6.9c}$$

其中 E 為楊氏模數，G 為剪力模數。

將(2.6.9)式代入(2.6.8)式中可得

$$\delta W_{\text{int}} = E\int_a^b e_{11}\delta e_{11} dV + G\int_a^b (\gamma_{12}\delta\gamma_{12} + \gamma_{13}\delta\gamma_{13}) dV \tag{2.6.10}$$

將(2.5.8)式及(2.5.9)式代入(2.6.10)式中，經整理後(2.6.10)式的第一個積分式可寫成

$$\int_a^b \int e_{11}\delta e_{11} dAdx$$

$$=\int_a^b\{\delta\varepsilon_0(A\varepsilon_0+\frac{1}{2}I_p\theta_{1,x}^2-I_y w_{,xx}^2-I_z v_{,xx}^2)$$

$$+\delta\varepsilon_{0,x}(-I_z v_{,x}v_{,xx}-I_y w_{,x}w_{,xx})$$

$$+\delta v_{,x}(-I_z\varepsilon_{0,x}v_{,xx})+\delta w_{,x}(-I_y\varepsilon_{0,x}w_{,xx})-\delta\theta_1(I_y-I_z)v_{,xx}w_{,xx}$$

$$+\delta\theta_{1,x}[I_p\varepsilon_0\theta_{1,x}-(\alpha_z+\alpha_{yz})\theta_{1,x}v_{,xx}-(\alpha_y+\alpha_{zy})\theta_{1,x}w_{,xx}$$

$$+(\alpha_{y\omega}+\alpha_{z\omega})\theta_{1,x}\theta_{1,xx}+\frac{1}{2}K_I\theta_{1,x}^3]$$

$$+\delta\theta_{1,xx}[I_\omega\theta_{1,xx}+\frac{1}{2}(\alpha_{y\omega}+\alpha_{z\omega})\theta_{1,x}^2]$$

$$+\delta v_{,xx}[(1-2\varepsilon_0)I_z v_{,xx}-I_z\varepsilon_{0,x}v_{,x}-\frac{1}{2}(\alpha_z+\alpha_{yz})\theta_{1,x}^2-(I_y-I_z)w_{,xx}\theta_1]$$

$$+\delta w_{,xx}[(1-2\varepsilon_0)I_y w_{,xx}-I_y\varepsilon_{0,x}w_{,x}-\frac{1}{2}(\alpha_y+\alpha_{zy})\theta_{1,x}^2$$

$$-(I_y-I_z)\theta_1 v_{,xx}]\}\,dx \qquad (2.6.11)$$

其中A為截面的面積，

$$I_y=\int z^2dA,\quad I_z=\int y^2dA,\quad K_I=\int[(y-y_p)^2+(z-z_p)^2]^2dA$$

$$\alpha_y=\int z^3dA,\quad \alpha_z=\int y^3dA,\quad \alpha_{yz}=\int z^2ydA,\alpha_{zy}=\int y^2zdA$$

$$I_\omega=\int\omega^2dA,\alpha_\omega=\int\omega^3dA,\quad \alpha_{y\omega}=\int z^2\omega dA,\quad \alpha_{z\omega}=\int y^2\omega dA$$

$$\alpha_{\omega y}=\int\omega^2zdA,\quad \alpha_{\omega z}=\int\omega^2ydA,\quad \alpha_{\omega yz}=\int\omega yzdA,\ I_p=I_y+I_z$$

(2.6.10)式的第二個積分式可寫成

$$\int_a^b\int(\delta\gamma_{12}\gamma_{12}+\delta\gamma_{13}\gamma_{13})\,dAdx$$

$$=\int_a^b\{\delta w_{,xx}(-\frac{1}{2}Jv_{,x}\theta_{1,x}+J_y\,\theta_{1,x}^2)$$

$$+\delta v_{,xx}(\frac{1}{2}Jw_{,x}\theta_{1,x}+J_z\,\theta_{1,x}^2)$$

$$+\delta\theta_{1,x}[(1-2\varepsilon_0)J\theta_{1,x}+2\,J_y\,\theta_{1,x}w_{,xx}+2\,J_z\,\theta_{1,x}v_{,xx}$$

$$-2J_\omega \theta_{1,x}\theta_{1,xx}+\frac{1}{2}Jw_{,x}v_{,xx}-\frac{1}{2}Jv_{,x}w_{,xx}]$$

$$+\delta\varepsilon_0(-J\theta_{1,x}^2)+\delta v_{,x}(-\frac{1}{2}Jw_{,xx}\theta_{1,x})+\delta w_{,x}(\frac{1}{2}Jv_{,xx}\theta_{1,x})$$

$$+\delta\theta_{1,xx}(-J_\omega\theta_{1,x}^2)\}dx \qquad (2.6.12)$$

其中

$$J=\int(y^2+z^2+y\omega_{,z}-z\omega_{,y})\,dA$$

$$J_y=\int[z(y^2+z^2-z\omega_{,y}+y\omega_{,z})+\omega y+\omega\omega_{,z}]\,dA$$

$$J_z=\int[y(y^2+z^2-z\omega_{,y}+y\omega_{,z})-\omega z+\omega\omega_{,y}]\,dA$$

$$J_\omega=\int\omega(y^2+z^2-z\omega_{,y}+y\omega_{,z})\,dA$$

對於雙對稱斷面，α_y、α_z、α_{yz}、J_y、J_z、J_ω、$\alpha_{y\omega}$、$\alpha_{z\omega}$、$\alpha_{\omega y}$、$\alpha_{\omega z}$及α_ω的值皆為零。所以(2.6.11)式與(2.6.12)式可分別簡化如下

$$\int_a^b\int\delta e_{11}e_{11}\,dAdx$$

$$=\int_a^b\{\delta\varepsilon_0(A\varepsilon_0+\frac{1}{2}I_p\theta_{1,x}^2-I_yw_{,xx}^2-I_zv_{,xx}^2)$$

$$+\delta\varepsilon_{0,x}(-I_zv_{,x}v_{,xx}-I_yw_{,x}w_{,xx})+\delta v_{,x}(-I_z\varepsilon_{0,x}v_{,xx})$$

$$+\delta w_{,x}(-I_y\varepsilon_{0,x}w_{,xx})-\delta\theta_1(I_y-I_z)v_{,xx}w_{,xx}$$

$$+\delta\theta_{1,x}(I_p\varepsilon_0\theta_{1,x}+\frac{1}{2}K_I\theta_{1,x}^3)+\delta\theta_{1,xx}(I_\omega\theta_{1,xx})$$

$$+\delta v_{,xx}[(1-2\varepsilon_0)I_zv_{,xx}-I_z\varepsilon_{0,x}v_{,x}-(I_y-I_z)w_{,xx}\theta_1]$$

$$+\delta w_{,xx}[(1-2\varepsilon_0)I_yw_{,xx}-I_y\varepsilon_{0,x}w_{,x}-(I_y-I_z)\theta_1v_{,xx}]\}\,dx$$

(2.6.13)

$$\int_a^b\int(\delta\gamma_{12}\gamma_{12}+\delta\gamma_{13}\gamma_{13})\,dAdx$$

$$=\int_a^b\{\delta w_{,xx}(-\frac{1}{2}Jv_{,x}\theta_{1,x})+\delta v_{,xx}(\frac{1}{2}Jw_{,x}\theta_{1,x})$$

$$+\delta\theta_{1,x}[(1-2\varepsilon_0)J\theta_{1,x}+\frac{1}{2}Jw_{,x}v_{,xx}-\frac{1}{2}Jv_{,x}w_{,xx}]$$

$$+\delta\varepsilon_0(-J\theta_{1,x}^2)+\delta v_{,x}(-\frac{1}{2}Jw_{,xx}\theta_{1,x})+\delta w_{,x}(\frac{1}{2}Jv_{,xx}\theta_{1,x})\}\,dx$$

(2.6.14)

令

$$\bar{\varepsilon}_0=\frac{1}{A}(A\varepsilon_0+\frac{1}{2}I_p\theta_{1,x}^2-I_yw_{,xx}^2-I_zv_{,xx}^2) \tag{2.6.15}$$

將(2.5.13)、(2.6.14)及(2.6.15)式代入(2.6.10)式，則δW_{int}可寫成

$$\delta W_{\text{int}}=E\int_a^b\int e_{11}\delta e_{11}\,dAdx+G\int_a^b\int(\gamma_{12}\delta\gamma_{12}+\gamma_{13}\delta\gamma_{13})\,dAdx$$

$$\begin{aligned}
&=E\int_a^b\{\delta\varepsilon_0(A\bar{\varepsilon}_0)+\delta\varepsilon_{0,x}(-I_zv_{,x}v_{,xx}-I_yw_{,x}w_{,xx})\\
&\quad+\delta v_{,x}(-I_z\varepsilon_{0,x}v_{,xx})+\delta w_{,x}(-I_y\varepsilon_{0,x}w_{,xx})-\delta\theta_1(I_y-I_z)v_{,xx}w_{,xx}\\
&\quad+\delta\theta_{1,x}(I_p\varepsilon_0\theta_{1,x}+\frac{1}{2}K_I\theta_{1,x}^3)+\delta\theta_{1,xx}(I_\omega\theta_{1,xx})\\
&\quad+\delta v_{,xx}[(1-2\varepsilon_0)I_zv_{,xx}-I_z\varepsilon_{0,x}v_{,x}-(I_y-I_z)w_{,xx}\theta_1]\\
&\quad+\delta w_{,xx}[(1-2\varepsilon_0)I_yw_{,xx}-I_y\varepsilon_{0,x}w_{,x}-(I_y-I_z)\theta_1v_{,xx}]\}\,dx\\
&\quad+G\int_a^b\{\delta w_{,xx}(-\frac{1}{2}Jv_{,x}\theta_{1,x})+\delta v_{,xx}(\frac{1}{2}Jw_{,x}\theta_{1,x})\\
&\quad+\delta\theta_{1,x}[(1-2\varepsilon_0)J\theta_{1,x}+\frac{1}{2}Jw_{,x}v_{,xx}-\frac{1}{2}Jv_{,x}w_{,xx}]\\
&\quad+\delta\varepsilon_0(-J\theta_{1,x}^2)+\delta v_{,x}(-\frac{1}{2}Jw_{,xx}\theta_{1,x})+\delta w_{,x}(\frac{1}{2}Jv_{,xx}\theta_{1,x})\}\,dx
\end{aligned}$$

(2.6.16)

對一斷面為雙軸對稱之梁，由(2.6.1)式、(2.6.7)式與(2.6.16)式可得下列方程式：

$$M_{1,x}^\theta=-E(I_y-I_z)v_{,xx}w_{,xx} \tag{2.6.17}$$

$$M_{2,x}^\theta-F_3=-\underline{F_1w_{,x}}-\frac{1}{2}Cv_{,xx}\theta_{1,x}+EI_y\varepsilon_{0,x}w_{,xx} \tag{2.6.18}$$

$$M_{3,x}^\theta+F_2=\underline{F_1v_{,x}}-\frac{1}{2}Cw_{,xx}\theta_{1,x}-EI_z\varepsilon_{0,x}v_{,xx} \tag{2.6.19}$$

$$F_{1,x}=F_{2,x}=F_{3,x}=0 \tag{2.6.20}$$

$$M_1^{\theta}+B_{,x}^{\theta}=E\varepsilon_0 I_p\theta_{1,x}+C[(1-2\varepsilon_0)\theta_{1,x} -\frac{1}{2}v_{,x}w_{,xx}+\frac{1}{2}w_{,x}v_{,xx}]+\underline{\frac{1}{2}EK_I\theta_{1,x}^3} \tag{2.6.21}$$

$$M_2^{\theta}=E[-(1-2\varepsilon_0)I_y w_{,xx}+(I_y-I_z)\theta_1 v_{,xx}+I_y\varepsilon_{0,x}w_{,x}]+\frac{1}{2}Cv_{,x}\theta_{1,x} \tag{2.6.22}$$

$$M_3^{\theta}=E[(1-2\varepsilon_0)I_z v_{,xx}-(I_y-I_z)w_{,xx}\theta_1-I_z\varepsilon_{0,x}v_{,x}]+\frac{1}{2}Cw_{,x}\theta_{1,x} \tag{2.6.23}$$

$$B^{\theta}=C_1\theta_{1,xx} \tag{2.6.24}$$

$$F_1=EA\bar{\varepsilon}_0-C\theta_{1,x}^2-A_{\varepsilon,x}^{\theta} \tag{2.6.25}$$

$$A_{\varepsilon}^{\theta}=-E(I_z v_{,x}v_{,xx}+I_y w_{,x}w_{,xx}) \tag{2.6.26}$$

其中$\bar{\varepsilon}_0=\frac{1}{A}(A\varepsilon_0+\frac{1}{2}I_p\theta_{1,x}^2-I_y w_{,xx}^2-I_z v_{,xx}^2)$，(2.6.18)與(2.6.19)式中之$F_1$為(2.6.25)式的$F_1$，$C_1=EI_{\omega}$為翹曲剛度(warping rigidity)，$C=GJ$為扭轉剛度(torsional rigidity)。

(2.6.17)~(2.6.26)式中保留變形參數的全部一次項、二次項和部份三次項(含底線項)。(2.6.17)~(2.6.20)式可視為平衡方程式，(2.6.21)~(2.6.26)式可視為構成方程式。

因不同元素在相鄰節點需有相同的節點內力，故需將廣義力矩M_i^{θ}($i=1,2,3$)轉換成傳統力矩M_i($i=1,2,3$)(即繞x_i軸旋轉的力矩)。對應於傳統力矩M_i的虛位移為$\delta\phi_i$(見(2.4.18)式)。由(2.4.4)、(2.4.5)式的變分及(2.5.12a)、(2.4.20)式可得

$$\delta\mathbf{u}_{\theta}=\mathbf{T}_{\theta\phi}\,\delta\mathbf{u}_{\phi}$$

$$\delta\mathbf{u}_{\theta}=\{\delta\varepsilon_0 \quad \delta\theta_1 \quad -\delta w_{,x} \quad \delta v_{,x}\},\quad \delta\mathbf{u}_{\phi}=\{\delta\varepsilon_0 \quad \delta\theta_1 \quad -\delta\theta_2 \quad \delta\theta_3\}$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\theta_3 & -\frac{1}{2}\theta_2\\ \theta_2 & -\theta_3 & 1+\varepsilon_0 & 0\\ \theta_3 & \theta_2 & 0 & 1+\varepsilon_0\end{bmatrix} \tag{2.6.27}$$

由反梯度法則(Controgradient law)[27]可得對應於 $\delta\mathbf{u}_\phi$ 的力矩向量 $\mathbf{M}_\phi^*=\{A_\varepsilon \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3\}$ 及對應於 $\delta\mathbf{u}_\theta$ 的力矩向量 $\mathbf{M}_\theta^*=\{A_\varepsilon^\theta \quad M_1^\theta \quad M_2^\theta \quad M_3^\theta\}$之關係如下：

$$\mathrm{M}_\phi^*=\mathbf{T}_{\theta\phi}^t\mathbf{M}_\theta^* \tag{2.6.28}$$

由(2.6.28)式，(2.6.21)~(2.6.26)式即可得傳統力矩在元素座標上的構成方程式。由(2.4.12)式，將在元素座標上的傳統力矩轉換到元素截面座標上，即可求得傳統力矩在截面主軸上的構成方程式。由(2.6.17)~(2.6.26)式也可發現如果僅保存變形參數的一次項，則(2.6.17)~(2.6.26)式就變成一階梁理論用的平衡方程式及構成方程式。在[17]中發現某些三次項亦不能忽略，否則在某些情況會造成誤差。所以本文亦保留了[17]中的三次項。