第三章 挫屈分析

3.1 問題描述

如圖四所示之簡支梁在 B 點先受一軸向保守力P作用，然後在 A、B 兩端分別加上一保守力矩M及λM，$-1\le\lambda\le1$。如圖五所示之懸臂梁在其自由端先加上一軸向保守力P，然後在加上保守力矩M及λM，當M超過某一值時，會引起結構的側向扭轉挫屈(Lateral-torsional buckling)，該值則稱為挫屈彎矩(Buckling moment)。本文中將探討軸力P的大小對挫屈彎矩的影響。本文中主要在探討軸力為壓力的情況，軸力為拉力的情況僅在附錄(C)中推導。

本章中取梁變形前的形心軸為總體座標的X_1軸，兩個梁截面的主軸為X_2及X_3。令I_y、I_z分別代表斷面對X_2及X_3軸的二次矩，為了方便說明起見，假設$I_y > I_z$。軸向力P為施加於X_1軸方向的保守力，彎矩M及λM為施加在X_1X_3平面上。彎矩的施加方式是假設在自由端上有一剛性相接之剛體圓盤，且圓盤面是在X_1X_3平面上，圓盤重量不計。此時二個作用無窮遠處，大小相等，方向相反的保守力透過二條環繞於圓盤上的繩索施加一彎矩。

如果作用在無窮遠處的保守力平行於X_1軸的方向則稱此彎矩為 first kind Quasi Tangential Moment 或簡稱為 QT-1 型彎矩(圖六(a))。同樣地，如果作用在無窮處的保守力平行於X_3軸方向則稱此彎矩為 second kind Quasi Tangential Moment 或簡稱 QT-2 型彎矩(圖六(b))。如果 QT-1 和 QT-2 同時作用，則稱此彎矩為 Semi-Tangential Moment 或簡稱 ST 型彎矩(圖六(c))。無論是 QT-1、QT-2、ST 型的彎矩都可表示成力矩的向量形式$\mathbf{M}^g=\{0 \quad M \quad 0\}$，其中$M=2rF$其中$r$為圓盤之半徑，$F$為保守力大小，上標$g$代表總體座標系統。

如果在一自由端施加一$\delta\,\boldsymbol{\phi}^g=\{\delta\phi_1^g \quad \delta\phi_2^g \quad \delta\phi_3^g\}$的微小擾動時($\delta\phi_i^g$代表繞$X_i$軸的微小旋轉)對QT-1型的彎矩而言，其端點處力臂$\mathbf{r}=\{0 \quad 0 \quad r\}$之變化量為

$$\delta\,\mathbf{r}=\delta\,\boldsymbol{\phi}^g\times\mathbf{r}=\{r\delta\phi_2^g \quad -r\delta\phi_1^g \quad 0\} \tag{3.1.1}$$

而力矩變化量為

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{M}^g &= 2\delta\mathbf{r}\times\mathbf{F}=2\{r\delta\phi_2^g \quad -r\delta\phi_1^g \quad 0\}\times\{F \quad 0 \quad 0\}\\ &=\{0 \quad 0 \quad 2rF\delta\phi_1^g\}\end{aligned}$$

或是寫成

$$\Delta\mathbf{M}^g=\{0 \quad 0 \quad M\delta\phi_1^g\} \tag{3.1.2}$$

所以，QT-1型的彎矩在端點受到$\delta\,\boldsymbol{\phi}^g$的擾動後，其端點所承受的負荷變成

$$\mathbf{M}^g+\Delta\mathbf{M}^g=\{0 \quad M \quad M\delta\phi_1^g\} \tag{3.1.3}$$

同理，QT-2型的彎矩在端點受到$\delta\,\boldsymbol{\phi}^g$的擾動後，其端點所承受的負荷變成

$$\mathbf{M}^g+\Delta\mathbf{M}^g=\{-M\delta\phi_3^g \quad M \quad 0\} \tag{3.1.4}$$

同理，ST型的彎矩在端點受到$\delta\,\boldsymbol{\phi}^g$的擾動後，其端點所承受的負荷變成

$$\mathbf{M}^g+\Delta\mathbf{M}^g=\{-\frac{1}{2}M\delta\phi_3^g \quad M \quad \frac{1}{2}M\delta\phi_1^g\} \tag{3.1.5}$$

當負荷小於挫屈負荷時，滿足平衡方程式的變形只有主要平衡路徑，但當負荷等於挫屈負荷時滿足平衡方程式的變形除了主要平衡路徑還有次要平衡路徑。

為了求得挫屈負荷，本文先求出梁結構在某一大小的P和M作用下的主要平衡路徑，然後在該平衡位置上加上擾動位移，使其到達一新的變形

位置，若此新的變形位置也能滿足平衡方程式，則該負荷即為挫屈負荷。本文與文獻[23]林中的方法一樣。在分析時將梁分成N個元素(圖七)，共有$N+1$個節點。每個元素在其元素座標上都需滿足平衡方程式及構成方程式((2.6.17)~(2.6.26)式)，相鄰兩元素在共同節點上都需滿足變形的相容條件及力的平衡條件，即有相同的位移、旋轉、曲率、軸向扭轉率、合力、合力矩及廣義雙力矩。梁元素在結構的兩端點都需滿足外加的位移和力的邊界條件。

3.2 主要平衡路徑的統御方程式及其解法

文獻[23]中林推導出梁受軸力及均勻彎矩作用時，梁元素在主要平衡路徑的統御方程式及解析解，並由結構內部節點變形的相容條件、力的平衡條件及結構兩端點的位移和力的邊界條件，得出主要平衡路徑的數值解。本節中將修改文獻[23]的方法，使其可用在梁受軸力及不均勻彎矩作用的情況。

本節中僅探討簡支梁受端點彎矩及軸向壓力的情況，簡支梁僅受端點彎矩的情況，在附錄(B)中說明，簡支梁受軸向拉力及懸臂梁的情況在附錄(C)和附錄(D)中說明。

如圖八所示之簡支梁在挫屈前主要平衡路徑的變形僅有在X_1X_3平面上的位移，即$v=\dfrac{dv}{dx}=\theta_1=0$，所以任一元素在其元素座標上的旋轉參數向量可以表示成

$$\boldsymbol{\theta}^0=\{0 \quad \theta_2^0 \quad 0\} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}\theta_2^0 &= \sin\varphi = -\frac{dw}{ds} = \frac{-w_{,x}^0}{1+\varepsilon_0} \\ &\approx -w_{,x}^0\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

其中φ為梁元素的切線和其元素座標之x_1軸的夾角，w為在x_3軸方向的

位移。

令$\kappa = \dfrac{d\varphi}{ds}$表示梁的曲率，當$\varphi << 1$時，利用近似式$\varphi \approx \theta_2^0$及$1+\varepsilon_0 \approx 1$並將(3.2.2)式微分一次可得

$$\kappa = \frac{d\theta_2^0}{ds} = \frac{d\theta_2^0}{dx}\frac{1}{1+\varepsilon_0} = \frac{1}{1+\varepsilon_0}\frac{d}{dx}\left(\frac{-w_{,x}^0}{1+\varepsilon_0}\right)$$

$$= \frac{-w_{,xx}^0}{(1+\varepsilon_0)^2} + \frac{w_{,x}^0 \varepsilon_{0,x}}{(1+\varepsilon_0)^3} \approx -w_{,xx}^0 + w_{,x}^0 \varepsilon_{0,x} \tag{3.2.3}$$

將(2.6.26)式微分一次，並將(3.2.1)式代入其中可得

$$A_{\varepsilon,x}^{\theta} = -EI_y[(w_{,xx}^0)^2 + w_{,x}^0 w_{,xxx}^0] \tag{3.2.4}$$

將(3.2.1)、(2.6.15)及(3.2.4)式代入(2.6.25)式可得

$$F_1 = EA\varepsilon_0 + EI_y w_{,x}^0 w_{,xxx}^0 \tag{3.2.5}$$

將(3.2.1)式代入(2.6.28)、(2.6.18)及(2.6.22)式並採用近似式$1+\varepsilon_0 \approx 1$可得

$$M_{2,x} - F_3 = \underline{-F_1 w_{,x}^0} + EI_y \varepsilon_{0,x} w_{,xx}^0 \tag{3.2.6}$$

$$M_2 = E[-(1-2\varepsilon_0)I_y w_{,xx}^0 + I_y \varepsilon_{0,x} w_{,x}^0] \tag{3.2.7}$$

其中

$$F_1 = F_x \cos\phi^e - F_z \sin\phi^e \tag{3.2.8a}$$

$$F_x = -P \tag{3.2.8b}$$

$$F_z = M(1+\lambda)/\bar{L} \tag{3.2.8c}$$

ϕ^e表示元素座標x_1軸和X_1軸的夾角(見圖九)， F_x為梁端點在X_1軸方向所受的外力，P為軸向壓力，F_z為梁端點B在X_3軸方向所受的反作用力，$\bar{L}$為AB變形後的弦長，其值與變形有關，需由迭代的方式求得。F_1為梁元素在元素座標x_1軸方向之軸向力，本節中假設其值為負。

將(3.2.5)式微分一次，並將(2.6.20)式代入其中，可得

$$\varepsilon_{0,x} = -\frac{I_y}{A}(w^0_{,xx}w^0_{,xxx} + w^0_{,x}w^0_{,xxxx}) \tag{3.2.9}$$

將(3.2.9)式代入(3.2.7)式，忽略旋轉參數的三次項，並採用近似式 $1-2\varepsilon_0 \approx 1$，可得

$$\begin{aligned} M_2 &= -(1-2\varepsilon_0)EI_y w^0_{,xx} \\ &\approx -EI_y w^0_{,xx} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

將(3.2.9)式代入(3.2.3)式，並忽略旋轉參數的三次項可得

$$\kappa = -w^0_{,xx} \tag{3.2.11}$$

將(3.2.11)式代入(3.2.10)式可得

$$\kappa = \frac{M_2}{EI_y} \tag{3.2.12}$$

將(3.2.9)式代入(3.2.6)式，忽略旋轉參數的三次項可得

$$F_3 - \underline{F_1 w^0_{,x}} - M_{2,x} = 0 \tag{3.2.13}$$

將(3.2.13)式微分一次，並將(3.2.10)、(3.2.12)式及(2.6.20)式代入其中可得

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} + (-F_1)\frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \tag{3.2.14}$$

(3.2.14)式為梁元素在主要平衡路徑的統御方程式。本節中假設 F_1 為負值。

令 $\zeta = \frac{x}{l} - \frac{1}{2}$，其中 l 為梁元素的弦長，$-\frac{1}{2} \le \zeta \le \frac{1}{2}$，則 $\frac{d}{dx}$ 可表示成

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\zeta}{dx}\frac{d}{d\zeta} = \frac{1}{l}\frac{d}{d\zeta} \tag{3.2.15}$$

將(3.2.15)式代入(3.2.14)式中可將其無因次化成

$$\frac{EI_y}{l^2}\frac{d^4 w}{d\zeta^4} + (-F_1)\frac{d^2 w}{d\zeta^2} = 0 \tag{3.2.16}$$

(3.2.16)式的通解可表示成

$$w(\zeta)=\mathbf{N}^{t}(\zeta)\mathbf{q}^{0} \tag{3.2.17}$$

$$\mathbf{N}(\zeta)=\{\sin a\zeta \quad \cos a\zeta \quad \zeta \quad 1\} \tag{3.2.18}$$

$$\mathbf{q}^{0}=\{D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4\} \tag{3.2.19}$$

$$a=\left[\frac{(-F_1)\,l^2}{EI_y}\right]^{1/2} \tag{3.2.20}$$

其中 F_1 為一負值。$D_i\,(i=1\sim 4)$ 為未定係數，其值必須由邊界條件決定。圖九中梁元素之兩端節點 $j(\,j=1,2\,)$ 的邊界條件可表示如下

$$w(\zeta_1)=w(\zeta_2)=0 \tag{3.2.21}$$

$$\kappa_1=\frac{-1}{l^2}w_{,\zeta\zeta}(\zeta_1)\ ,\ \kappa_2=\frac{-1}{l^2}w_{,\zeta\zeta}(\zeta_2) \tag{3.2.22}$$

其中 $\zeta_1=-\dfrac{1}{2}$ ，$\zeta_2=\dfrac{1}{2}$ ，κ_1，κ_2 分別為梁在 ζ_1 和 ζ_2 的曲率。

由(3.2.12)式可知

$$\kappa_1=\frac{M_{21}}{EI_y}\ ,\ \kappa_2=\frac{M_{22}}{EI_y} \tag{3.2.23}$$

其中 $M_{2j}\,(\,j=1,2\,)$ 為 M_2 在節點 j 之值。

將(3.2.17)式代入(3.2.21)及(3.2.22)式可以得到

$$\mathbf{q}^{0}=\mathbf{T}\boldsymbol{\kappa} \tag{3.2.24}$$

其中

$$\mathbf{T}=\frac{l^2}{2a^2}\begin{bmatrix} -1/\sin\frac{a}{2} & 1/\sin\frac{a}{2} \\ 1/\cos\frac{a}{2} & 1/\cos\frac{a}{2} \\ 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.2.25}$$

$$\boldsymbol{\kappa}=\{\kappa_1 \quad \kappa_2\} \tag{3.2.26}$$

將(3.2.24)式代入(3.2.17)式可得

$$w(\zeta) = \mathbf{N}^t(\zeta)\mathbf{T}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{N}_w^t(\zeta)\boldsymbol{\kappa} \tag{3.2.27}$$

由圖九可知梁元素在節點 $j(j=1,2)$ 的切線和水平線(X_1軸)的夾角可表示成

$$\phi_t^j = \phi^e - \varphi^j \tag{3.2.28}$$

其中 ϕ^e 在(3.2.8)式中已定義，φ^j 為(3.2.2)式中的 φ 在節點 j 之值。由圖九的自由體圖，節點 1 的合力矩為 0 及(3.2.23)式可得

$$\sin\phi^e = \left[\frac{EI_y}{l}(\kappa_1 - \kappa_2) - F_z\cos\phi^e\right] \Big/ F_x \tag{3.2.29}$$

(3.2.29)式中 l 為梁元素的弦長，當 $\varphi << 1$ 時，利用近似式 $\varphi \approx \sin\varphi$ 及 $1+\varepsilon_0 \approx 1$，並將(3.2.27)式代入(3.2.2)式可得

$$\varphi = \frac{-1}{1+\varepsilon_0}\frac{dw}{dx} \approx -\mathbf{N}_w'^t\boldsymbol{\kappa} \tag{3.2.30}$$

由(3.2.30)式可得

$$\varphi^j = -\mathbf{N}_w'^t(\zeta_j)\boldsymbol{\kappa} \tag{3.2.31}$$

因梁元素在共同的節點上有相同的切線，所以由圖十及(3.2.28)式可以得到

$$F_i = \phi_{t(i-1)}^2 - \phi_{t(i)}^1 = 0 \qquad i = 2,3,......N \tag{3.2.32}$$

$$\phi_{t,(i)}^j = \phi_{(i)}^e - \varphi_{(i)}^j \tag{3.2.33}$$

其中下標 (i) 表示第 (i) 個元素，下標 i 表示系統之第 i 個節點，上標 $j(j=1,2)$ 表示該元素的節點 j，因梁元素在共同的節點上有相同的曲率，所以在系統節點 $i(i=1,2,3,\ldots,N+1)$ 的曲率可用 κ_i 表示。由(3.2.29)及(3.2.30)式可知元素 (i) 之 $\phi_{(i)}^e$ 及 $\varphi_{(i)}^j$ 都是 κ_i,κ_{i+1} $i=1,2,\ldots,N$ 的函數。

我們可以將(3.2.32)式寫成如下的向量形式

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{C}) = \mathbf{F}(\mathbf{C}) = \mathbf{0} \tag{3.2.34}$$

$$\mathbf{C} = \{\kappa_2, \kappa_3, ...\kappa_N\} \tag{3.2.35}$$

(3.2.35)式即為梁結構在主要平衡路徑的統御方程式。因本題中$\kappa_1 = \dfrac{M}{EI_y}$，$\kappa_{N+1} = -\dfrac{\lambda M}{EI_y}$為已知，所以不包括在(3.2.35)式中。(3.2.35)式為$N-1$個$N-1$元的非線性聯立代數方程式。

令

$$\mathbf{f} = \{-\phi_t^1 \quad \phi_t^2\} \tag{3.2.36}$$

其中ϕ_t^j已在(3.2.28)式中定義。若將$\mathbf{f}$視為元素的節點內力則(3.2.34)式中的$\mathbf{F}$可視為系統的節點內力，且可以和一般有限元素法一樣由$\mathbf{f}$組合而成；(3.2.34)式中之$\boldsymbol{\psi}$可視為系統的不平衡力。

當軸向壓力F和端點的彎矩M和λM為已知時，系統在節點i的曲率可以由(3.2.34)式決定。本文中採用牛頓法解(3.2.34)式，本文中以一個元素(即$N=1$)的解析解，作為牛頓法的初解(Predictor)。將(3.2.27)式代入(3.2.11)式，$l = L$及$\cos\phi^e = 1$代入(3.2.20)式，可得$N=1$時的曲率如下

$$\kappa = -\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\lambda)M}{EI_y}\frac{\sin a\zeta}{\sin a/2} - \frac{(1-\lambda)M}{EI_y}\frac{\cos a\zeta}{\cos a/2}\right] \tag{3.2.37}$$

$$a = \left(\frac{PL^2}{EI_y}\right)^{1/2} \tag{3.2.38}$$

牛頓法中$\mathbf{C}$的改正量可表示成

$$\delta\mathbf{C} = -\mathbf{K}_T^{-1}\boldsymbol{\psi} \tag{3.2.39}$$

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{C}} \tag{3.2.40}$$

其中$\mathbf{K}_T$可視為系統的切線剛度矩陣。$\mathbf{K}_T$可以由元素的剛度矩陣$\mathbf{k}$利用直接勁度法(direct stiffness method)組合而成。元素的剛度矩陣$\mathbf{k}$可以由(3.2.36)式對$\boldsymbol{\kappa}$微分求得，並可表示如下

$$\mathbf{k}=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\kappa}}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \kappa_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \kappa_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \kappa_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \kappa_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \tag{3.2.41}$$

其中

$$k_{11}=k_\phi-N'_{w,1}(\zeta_1)-\kappa_1 S_{11}-\kappa_2 S_{21} \quad ,$$
$$k_{12}=-k_\phi-N'_{w,2}(\zeta_1)-\kappa_1 S_{12}-\kappa_2 S_{22} \quad ,$$
$$k_{21}=-k_\phi+N'_{w,1}(\zeta_2)-\kappa_1 S_{21}-\kappa_2 S_{11} \quad ,$$
$$k_{22}=k_\phi+N'_{w,2}(\zeta_2)-\kappa_1 S_{22}-\kappa_2 S_{12} \quad ,$$

$$k_\phi=\frac{-EI_y}{(F_x\cos\phi^e-F_z\sin\phi^e)\,l}=\frac{EI_y}{(P\cos\phi^e+F_z\sin\phi^e)\,l}$$
$$S_{11}=\frac{l}{a}\frac{\partial a}{\partial \kappa_1}\left(\frac{1}{\sin^2 a}+\frac{\cos a}{a\sin a}-\frac{2}{a^2}\right)$$
$$S_{21}=\frac{l}{a}\frac{\partial a}{\partial \kappa_1}\left(\frac{-1}{a\sin a}-\frac{\cos a}{\sin^2 a}+\frac{2}{a^2}\right)$$
$$S_{12}=-S_{11}$$
$$S_{22}=-S_{21}$$
$$\frac{\partial a}{\partial \kappa_1}=\frac{-1}{2}(EI_y)^{1/2}\frac{F_x\sin\phi^e+F_z\cos\phi^e}{(-F_x\cos\phi^e+F_z\sin\phi^e)^{3/2}}$$
$$\frac{\partial a}{\partial \kappa_2}=-\frac{\partial a}{\partial \kappa_1} \tag{3.2.42}$$

$N'_{w,k}$ 表示(3.2.31)式中 $\mathbf{N}'_w$ 之第 $k(k=1,2)$ 個元素。

3.3 梁結構之次要平衡路徑

本節使用的方法與文獻[23]的方法相同。

3.3.1 擾動後的元素座標及變形參數

本節中的推導考慮了簡支梁和懸臂梁兩種情況。當梁結構由 3.2 節中求得之主要平衡路徑上受到擾動位移作用時會達到一個新變形位置。令梁元素節點 j ($j=1,2$) 在總體座標上的擾動位移及擾動旋轉向量為

$$\mathbf{u}_j^g = \{ u_j^g , v_j^g , w_j^g \} \tag{3.3.1}$$

$$\boldsymbol{\phi}_j^g = \{ \phi_{1j}^g , \phi_{2j}^g , \phi_{3j}^g \} \tag{3.3.2}$$

其中 $(\ )^g$ 代表 $(\ )$ 是在總體座標上定義的，ϕ_{ij}^g 為梁元素截面在節點 j 繞 X_i 軸的擾動旋轉。梁元素節點 j ($j=1,2$) 在總體座標上形心軸的擾動扭轉率為 β_j。

由圖九知，在擾動前的平衡位置，元素座標 x_i 和總體座標 X_i 的關係表示成

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi^e & 0 & -\sin\phi^e \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi^e & 0 & \cos\phi^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{ge}\mathbf{x} \tag{3.3.3}$$

其中 ϕ^e 為 X_i 軸和 x_i 軸的夾角，由(3.3.3)式可得

$$\mathbf{u}_j^g = \mathbf{A}_{ge}\mathbf{u}_j \tag{3.3.4}$$

$$\boldsymbol{\phi}_j^g = \mathbf{A}_{ge}\,\boldsymbol{\phi}_j \tag{3.3.5}$$

其中 $\mathbf{u}_j = \{ u_j , v_j , w_j \}$、$\boldsymbol{\phi}_j = \{ \phi_{1j} , \phi_{2j} , \phi_{3j} \}$ 為元素節點 j ($j=1,2$) 在元素座標 x_i 上的擾動位移及擾動旋轉向量，節點扭轉率的擾動量與座標系統無關，故在元素座標仍為 β_j。

當元素節點受到$\mathbf{u}_j$及$\boldsymbol{\phi}_j$擾動後，利用文獻[1]中的方法，可以決定擾動後的元素座標$\bar{x}_i$及節點旋轉參數θ_{ij}，其推導過程在附錄 E 中有詳盡的說明。梁元素受擾動後在任意截面的旋轉向量可表示成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta} &= \{\theta_1 \quad \theta_2^0+\theta_2 \quad \theta_3\} \\ &\approx \{\theta_1 \quad -w_{,x}^0 - w_{,x} \quad v_{,x}\}\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

在(3.3.6)式中$\theta_1, -w_{,x}, v_{,x}$(或$\theta_1$,$\theta_2$,$\theta_3$)是由所施加的擾動量造成的，故為極小量(infinitesimal quantity)即$\theta_1, -w_{,x}, v_{,x} \to 0$而$-w_{,x}^0$為擾動前的旋轉參數為一有限量(finite quantity)。由元素座標的定義可知，當梁元素的數目取的夠多時$-w_{,x}^0$為一微小量(small quantity)，即$-w_{,x}^0 << 1$，但仍為一有限量。由以上討論可知(2.6.17)~(2.6.26)式在任一元素上都能適用。在本文的推導過程中因$\theta_1, -w_{,x}, v_{,x}$為極小量，所以僅保留$\theta_1, -w_{,x}, v_{,x}$及其微分至一次項，而$w_{,x}^0$為有限量，故$w_{,x}^0$及其微分項都全部保留。

由(2.6.17)~(2.6.26)式中可發現當僅保留至$\theta_1, -w_{,x}, v_{,x}$及其微分的一次項時，僅$\theta_1$ 和$v_{,x}$有偶合關係。且由附錄 E 中可發現θ_{1j}和θ_{3j}僅和擾動位移v_j,ϕ_{1j},ϕ_{3j}($j=1,2$)有關，所以本研究在以後的推導中僅考慮與θ_1、$v_{,x}$有關的統御方程式及擾動量，即取$u_j = w_j = \phi_{2j} = -w_{,x} = 0$。所以由附錄 E 可知本節中擾動後的元素座標$\bar{x}_i$與擾動前的元素座標間的關係可表示成

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_{e\bar{e}}\bar{\mathbf{x}} \tag{3.3.7}$$

$$\mathbf{A}_{e\bar{e}} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\Delta v}{\ell} & 0 \\ \dfrac{\Delta v}{\ell} & 1 & -\bar{e}_{23} \\ 0 & \bar{e}_{23} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3.8}$$

其中

$$\bar{e}_{23}=\frac{1}{2}(\phi_{11}+\phi_{12})-\frac{1}{4}s_1(\phi_{31}-\frac{\Delta v}{\ell})-\frac{1}{4}s_2(\phi_{32}-\frac{\Delta v}{\ell}) \quad , \quad \Delta v=v_2-v_1$$

$s_j=\sin\varphi_{2j}^0=\theta_{2j}^0\ (j=1,2)$，$\ell$ 為元素擾動前的弦長。

因本研究以後的推導都是以節點在總體座標上的擾動位移、旋轉及扭轉率為獨立變數，所以必須將擾動後之元素座標的節點擾動位移及旋轉參數表示成總體座標之節點擾動量的函數。

令 $\mathbf{u}_g$ 和 $\mathbf{u}_e$ 代表元素的節點擾動位移向量，$\mathbf{u}_\theta$ 代表擾動後的節點參數向量，並表示如下：

$$\mathbf{u}_g=\{v_1^g, \phi_{11}^g, \phi_{31}^g, \beta_1, v_2^g, \phi_{12}^g, \phi_{32}^g, \beta_2\} \tag{3.3.9}$$

$$\mathbf{u}_e=\{v_1, \phi_{11}, \phi_{31}, \beta_1, v_2, \phi_{12}, \phi_{32}, \beta_2\} \tag{3.3.10}$$

$$\mathbf{u}_\theta=\{\bar{v}_1, \theta_{11}, \theta_{31}, \beta_1, \bar{v}_2, \theta_{12}, \theta_{32}, \beta_2\} \tag{3.3.11}$$

其中 $\mathbf{u}_g$ 和 $\mathbf{u}_e$ 的分量在(3.3.1)、(3.3.2)、(3.3.4)及(3.3.5)式中已有定義。$\theta_{1j}, \theta_{3j}\ (j=1,2)$ 為擾動後節點 j 的旋轉參數，$\bar{v}_j\ (j=1,2)$ 表示元素節點 j 在擾動後之元素座標 $\bar{x}_2$ 軸方向的擾動位移。由元素座標的定義可知 $\bar{v}_j=0$，因 β_j 和座標系統無關，故在 x_i 和 $\bar{x}_i$ 座標中有相同的值。

由(3.3.3)~(3.3.5)式可得

$$\mathbf{u}_g=\mathbf{T}_{ge}\mathbf{u}_e \tag{3.3.12}$$

$$\mathbf{T}_{ge}=\begin{bmatrix}\mathbf{T}_4 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_4\end{bmatrix} \tag{3.3.13}$$

$$\mathbf{T}_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi^e & -\sin\phi^e & 0\\ 0 & \sin\phi^e & \cos\phi^e & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3.3.14}$$

其中 ϕ^e 在(3.2.8)式中已有定義，且 $\mathbf{0}$ 為 4×4 的零矩陣，$j=1,2$。

由附錄 E 中可得θ_{1j},θ_{3j}與擾動量v_j,ϕ_{1j},ϕ_{3j}之間的關係，所以(3.3.10)及(3.3.11)式的關係可表示如下：

$$\mathbf{u}_{\theta}=\mathbf{T}_{\theta e}\mathbf{u}_{e} \tag{3.3.15}$$

$$\mathbf{T}_{\theta e}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}s_1 & 0 & a & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}s_2 & 0 \\ b_1 & \frac{1}{2}s_1 & c_1+\frac{s_1^2}{4} & 0 & -b_1 & -\frac{1}{2}s_1 & \frac{s_1 s_2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}s_1 & 0 & -a & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}s_2 & 0 \\ b_2 & -\frac{1}{2}s_2 & \frac{s_1 s_2}{4} & 0 & -b_2 & \frac{1}{2}s_2 & c_2+\frac{s_2^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3.16}$$

其中 $a=\frac{1}{4\ell}(s_1-s_2)$ ， $b_j=\frac{c_j}{\ell}+\frac{s_j^2}{4\ell}+\frac{s_1 s_2}{4\ell}$

3.3.2 梁元素在次要平衡路徑的統御方程式

本節中除了另有聲明外，所有的變數都是在擾動後的元素座標$\bar{x}_i$中定義。θ_1 , $v_{,x}$在次要平衡路徑之統御方程式的推導和文獻[23]一樣，其推導的過程如下：

將(2.6.21)式對x微分可得

$$\begin{aligned} M^{\theta}_{1,x} &= -B^{\theta}_{,xx}+E\varepsilon_{0,x}I_p\theta_{1,x}+E\varepsilon_0 I_p\theta_{1,xx}-2C\varepsilon_{0,x}\theta_{1,x} \\ &\quad +(1-2\varepsilon_0)C\theta_{1,xx}+\frac{1}{2}Cw^0_{,x}v_{,xxx}-\frac{1}{2}Cw^0_{,xxx}v_{,x} \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

將(2.6.24)式對x微分二次可得

$$B^{\theta}_{,xx}=C_1\theta_{1,xxxx} \tag{3.3.18}$$

將(2.6.19)式對x微分，並將(2.6.20)式代入其中，可得

$$M^{\theta}_{3,xx}=F_1 v_{,xx}-EI_z(\varepsilon_{0,xx}v_{,xx}+\varepsilon_{0,x}v_{,xxx})$$

$$-\frac{1}{2}Cw^0_{,xxx}\theta_{1,x}-\frac{1}{2}Cw^0_{,xx}\theta_{1,xx} \tag{3.3.19}$$

將(2.6.23)式對 x 微分二次可得

$$\begin{aligned} M^{\theta}_{3,xx} &= E[-I_z\varepsilon_{0,xxx}v_{,x}-4I_z\varepsilon_{0,xx}v_{,xx}-5I_z\varepsilon_{0,x}v_{,xxx} \\ &\quad +(1-2\varepsilon_0)I_z v_{,xxxx}-(I_y-I_z)(w^0_{,xxxx}\theta_1+2w^0_{,xxx}\theta_{1,x}+w^0_{,xx}\theta_{1,xx})] \\ &\quad +\frac{1}{2}C(w^0_{,xxx}\theta_{1,x}+2w^0_{,xx}\theta_{1,xx}+w^0_{,x}\theta_{1,xxx}) \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

分別將(3.3.17)、(3.3.18)式代入(2.6.17)式及(3.3.20)式代入(3.3.19)式可得

$$\begin{aligned} &-C_1\theta_{1,xxxx}+[E\varepsilon_0 I_p+(1-2\varepsilon_0)C]\theta_{1,xx}+(E\varepsilon_{0,x}I_p-2C\varepsilon_{0,x})\theta_{1,x} \\ &+\frac{1}{2}Cw^0_{,x}v_{,xxx}+E(I_y-I_z)w^0_{,xx}v_{,xx}-\frac{1}{2}Cw^0_{,xxx}v_{,x}=0 \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}Cw^0_{,x}\theta_{1,xxx}+[-E(I_y-I_z)w^0_{,xx}+\frac{3}{2}Cw^0_{,xx}]\theta_{1,xx} \\ &+[-2E(I_y-I_z)w^0_{,xxx}+Cw^0_{,xxx}]\theta_{1,x}-E(I_y-I_z)w^0_{,xxxx}\theta_1 \\ &+(1-2\varepsilon_0)EI_z v_{,xxxx}-4EI_z\varepsilon_{0,x}v_{,xxx}+(-3EI_z\varepsilon_{0,xx}-F_1)v_{,xx} \\ &-EI_z\varepsilon_{0,xxx}v_{,x}=0 \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

其中 ε_0 , $\varepsilon_{0,x}$, $\varepsilon_{0,xx}$ 及 $\varepsilon_{0,xxx}$ 可以由如下方法求得：

因梁結構僅在端點受軸向壓力 P 及彎矩 M ，當保留擾動量到一次項時，由(3.3.7)與(3.3.8)式知梁元素的軸力和擾動前相同，所以由(3.2.5)式 ε_0 可表示成

$$\varepsilon_0=\varepsilon_p-\frac{I_y w^0_{,x}w^0_{,xxx}}{A} \tag{3.3.23}$$

其中

$$\varepsilon_p=\frac{F_1}{EA} \tag{3.3.24}$$

將(3.3.23)式微分可得

$$\varepsilon_{0,x} = -\frac{I_y}{A}(w^0_{,xx}w^0_{,xxx} + w^0_{,x}w^0_{,xxxx}) \tag{3.3.25a}$$

$$\varepsilon_{0,xx} = -\frac{I_y}{A}[(w^0_{,xxx})^2 + 2w^0_{,xx}w^0_{,xxxx} + w^0_{,x}w^0_{,xxxxx}] \tag{3.3.25b}$$

$$\varepsilon_{0,xxx} = -\frac{I_y}{A}[4w^0_{,xxx}w^0_{,xxxx} + 3w^0_{,xx}w^0_{,xxxxx} + w^0_{,x}w^0_{,xxxxxx}] \tag{3.3.25c}$$

(3.3.21)及(3.3.22)式即為θ_1和θ_3在次要平衡路徑的統御方程式。

令

$$\zeta = \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \tag{3.3.26}$$

將(3.3.26)式代入(3.3.21)及(3.3.22)式中，並使用近似式$1+\varepsilon_0 \approx 1$及$1-2\varepsilon_0 \approx 1$，則(3.3.21)及(3.3.22)式可無因次化成以下的形式

$$\mathbf{P}\begin{Bmatrix}\theta_{1,\zeta\zeta\zeta\zeta} \\ v_{,\zeta\zeta\zeta\zeta}\end{Bmatrix} + \mathbf{Q}\begin{Bmatrix}\theta_{1,\zeta\zeta\zeta} \\ v_{,\zeta\zeta\zeta}\end{Bmatrix} + \mathbf{R}\begin{Bmatrix}\theta_{1,\zeta\zeta} \\ v_{,\zeta\zeta}\end{Bmatrix} + \mathbf{S}\begin{Bmatrix}\theta_{1,\zeta} \\ v_{,\zeta}\end{Bmatrix} + \mathbf{T}\begin{Bmatrix}\theta_1 \\ v\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix} \tag{3.3.27}$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 \\ 0 & -EI_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = l\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}Cw^0_{,x} \\ -\frac{1}{2}Cw^0_{,x} & 4EI_z\varepsilon_{0,x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = l^2\begin{bmatrix} E\varepsilon_0 I_p + C & E(I_y - I_z)w^0_{,xx} \\ [E(I_y - I_z) - \frac{3}{2}C]w^0_{,xx} & 3EI_z\varepsilon_{0,xx} + F_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = l^3\begin{bmatrix} (EI_p - 2C)\varepsilon_{0,x} & -\frac{1}{2}Cw^0_{,xxx} \\ [2E(I_y - I_z) - C]w^0_{,xxx} & EI_z\varepsilon_{0,xxx} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = l^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E(I_y - I_z) w^0_{,xxxx} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.28}$$

3.3.3 擾動位移的級數解

本節中採用的方法和[23]一樣，為了本文的完整性，本節重複[23]中的推導。

假設(3.3.27)式的解可以表示成下列的級數

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbf{A}_n \tag{3.3.29}$$

$$\mathbf{A}_n = \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} \tag{3.3.30}$$

如前節所述，θ_1和v是定義在擾動後的元素座標$\bar{x}_i$中。

因(3.3.27)式的為二個聯立的四次線性常微分方程式，所以其解只有 8 個獨立的未定係數，本節中取$\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$為獨立的未定係數，所以所有的$\mathbf{A}_n (n \geq 4)$都可以表示成$\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$的函數，其間的遞迴關係可由以下的推導求得。由(3.2.17)~(3.2.19)式及(3.3.23)式知(3.3.27)式中的$\theta_2^0, \varepsilon_0$及其微分都是$\sin a\zeta$及$\cos a\zeta$的函數。因本節中採用了$\zeta$的多項式作為(3.3.27)式的級數解所以必須先將(3.3.28)式中的$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$表示成以下多項式的形式。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \sum_{i=0}^{m} \zeta^i \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{R} &= \sum_{i=0}^{m} \zeta^i \mathbf{R}_i \\ \mathbf{S} &= \sum_{i=0}^{m} \zeta^i \mathbf{S}_i \\ \mathbf{T} &= \sum_{i=0}^{m} \zeta^i \mathbf{T}_i \end{aligned} \tag{3.3.31}$$

其中$m \geq 0$，本文中m最大取到 5，$\mathbf{Q}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{S}_i, \mathbf{T}_i$為常數矩陣，在附錄

F，G(軸力為壓力)、H，I(軸力為拉力)都有詳細推導。

將(3.3.30)，(3.3.31)式及$m=5$代入(3.3.27)式中並將其化成ζ^{n-4}的形式可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)\zeta^{n-4}\mathbf{A}_n \\
&+(\sum_{i=0}^{5}\zeta^{i}\mathbf{Q}_i)\sum_{n=4}^{\infty}(n-1)(n-2)(n-3)\zeta^{n-4}\mathbf{A}_{n-1} \\
&+(\sum_{i=0}^{5}\zeta^{i}\mathbf{R}_i)\sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)\zeta^{n-4}\mathbf{A}_{n-2} \\
&+(\sum_{i=0}^{5}\zeta^{i}\mathbf{S}_i)\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)\zeta^{n-4}\mathbf{A}_{n-3} \\
&+(\sum_{i=0}^{5}\zeta^{i}\mathbf{T}_i)\sum_{n=4}^{\infty}\zeta^{n-4}\mathbf{A}_{n-4}=\mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{3.3.32}
$$

將(3.3.32)式展開並按照ζ的次方排列可得

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{P}\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_n+\mathbf{Q}_0\sum_{n=4}^{\infty}(n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1} \\
&+\mathbf{R}_0\sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2}+\mathbf{S}_0\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)\mathbf{A}_{n-3}+\mathbf{T}_0\sum_{n=4}^{\infty}\mathbf{A}_{n-4}]\zeta^{n-4} \\
&+[\mathbf{Q}_1\sum_{n=4}^{\infty}(n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1}+\mathbf{R}_1\sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2} \\
&+\mathbf{S}_1\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)\mathbf{A}_{n-3}+\mathbf{T}_1\sum_{n=4}^{\infty}\mathbf{A}_{n-4}]\zeta^{n-3}+[\mathbf{Q}_2\sum_{n=4}^{\infty}(n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1} \\
&+\mathbf{R}_2\sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2}+\mathbf{S}_2\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)\mathbf{A}_{n-3}+\mathbf{T}_2\sum_{n=4}^{\infty}\mathbf{A}_{n-4}]\zeta^{n-2} \\
&+[\mathbf{Q}_3\sum_{n=4}^{\infty}(n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1}+\mathbf{R}_3\sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2} \\
&+\mathbf{S}_3\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)\mathbf{A}_{n-3}+\mathbf{T}_3\sum_{n=4}^{\infty}\mathbf{A}_{n-4}\zeta^{n-1}]+[\mathbf{Q}_4\sum_{n=4}^{\infty}(n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1} \\
&+\mathbf{R}_4\sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2}+\mathbf{S}_4\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)\mathbf{A}_{n-3}+\mathbf{T}_4\sum_{n=4}^{\infty}\mathbf{A}_{n-4}]\zeta^{n}
\end{aligned}
$$

$$+[\mathbf{Q}_5\sum_{n=4}^{\infty}(n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1}+\mathbf{R}_5\sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2}$$

$$+\mathbf{S}_5\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)\mathbf{A}_{n-3}+\mathbf{T}_5\sum_{n=4}^{\infty}\mathbf{A}_{n-4}]\zeta^{n+1}=0$$

(3.3.33)

將(3.3.33)式化成ζ^{n-4}的排列方式

$$[\mathbf{P}\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_n+\mathbf{Q}_0\sum_{n=4}^{\infty}(n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1}$$

$$+\mathbf{R}_0\sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2}+\mathbf{S}_0\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)\mathbf{A}_{n-3}+\mathbf{T}_0\sum_{n=4}^{\infty}\mathbf{A}_{n-4}]\zeta^{n-4}$$

$$+[\mathbf{Q}_1\sum_{n=5}^{\infty}(n-2)(n-3)(n-4)\mathbf{A}_{n-2}+\mathbf{R}_1\sum_{n=5}^{\infty}(n-3)(n-4)\mathbf{A}_{n-3}$$

$$+\mathbf{S}_1\sum_{n=5}^{\infty}(n-4)\mathbf{A}_{n-4}+\mathbf{T}_1\sum_{n=5}^{\infty}\mathbf{A}_{n-5}]\zeta^{n-4}+[\mathbf{Q}_2\sum_{n=6}^{\infty}(n-3)(n-4)(n-5)\mathbf{A}_{n-3}$$

$$+\mathbf{R}_2\sum_{n=6}^{\infty}(n-4)(n-5)\mathbf{A}_{n-4}+\mathbf{S}_2\sum_{n=6}^{\infty}(n-5)\mathbf{A}_{n-5}+\mathbf{T}_2\sum_{n=6}^{\infty}\mathbf{A}_{n-6}]\zeta^{n-4}$$

$$+[\mathbf{Q}_3\sum_{n=7}^{\infty}(n-4)(n-5)(n-6)\mathbf{A}_{n-4}+\mathbf{R}_3\sum_{n=7}^{\infty}(n-5)(n-6)\mathbf{A}_{n-5}$$

$$+\mathbf{S}_3\sum_{n=7}^{\infty}(n-6)\mathbf{A}_{n-6}+\mathbf{T}_3\sum_{n=7}^{\infty}\mathbf{A}_{n-7}]\zeta^{n-4}+[\mathbf{Q}_4\sum_{n=8}^{\infty}(n-5)(n-6)(n-7)\mathbf{A}_{n-5}$$

$$+\mathbf{R}_4\sum_{n=8}^{\infty}(n-6)(n-7)\mathbf{A}_{n-6}+\mathbf{S}_4\sum_{n=8}^{\infty}(n-7)\mathbf{A}_{n-7}+\mathbf{T}_4\sum_{n=8}^{\infty}\mathbf{A}_{n-8}]\zeta^{n-4}$$

$$+[\mathbf{Q}_5\sum_{n=9}^{\infty}(n-6)(n-7)(n-8)\mathbf{A}_{n-6}+\mathbf{R}_5\sum_{n=9}^{\infty}(n-7)(n-8)\mathbf{A}_{n-7}$$

$$+\mathbf{S}_5\sum_{n=9}^{\infty}(n-8)\mathbf{A}_{n-8}+\mathbf{T}_5\sum_{n=9}^{\infty}\mathbf{A}_{n-9}]\zeta^{n-4}=0$$

(3.3.34)

由(3.3.27)式可得下列遞迴關係式

當$4\le n\le 8$時

$$\mathbf{A}_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_n^j \mathbf{A}_{n-j} \tag{3.3.35}$$

當 $n \geq 9$ 時

$$\mathbf{A}_n = \sum_{j=1}^{9} \mathbf{X}_n^j \mathbf{A}_{n-j} \tag{3.3.36}$$

其中

$$\mathbf{X}_n^1 = -\frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}_0}{n}$$

$$\mathbf{X}_n^2 = -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{R}_0 + (n-4)\mathbf{Q}_1]}{n(n-1)}$$

$$\mathbf{X}_n^3 = -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{S}_0 + (n-4)\mathbf{R}_1 + (n-4)(n-5)\mathbf{Q}_2]}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\mathbf{X}_n^4 = -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{T}_0 + (n-4)\mathbf{S}_1 + (n-4)(n-5)\mathbf{R}_2 + (n-4)(n-5)(n-6)\mathbf{Q}_3]}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\mathbf{X}_n^5 = -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{T}_1 + (n-5)\mathbf{S}_2 + (n-5)(n-6)\mathbf{R}_3 + (n-5)(n-6)(n-7)\mathbf{Q}_4]}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\mathbf{X}_n^6 = -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{T}_2 + (n-6)\mathbf{S}_3 + (n-6)(n-7)\mathbf{R}_4 + (n-6)(n-7)(n-8)\mathbf{Q}_5]}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\mathbf{X}_n^7 = -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{T}_3 + (n-7)\mathbf{S}_4 + (n-7)(n-8)\mathbf{R}_5]}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\mathbf{X}_n^8 = -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{T}_4 + (n-8)\mathbf{S}_5]}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\mathbf{X}_n^9 = -\frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}_5}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

(3.3.37)

由(3.3.35)及(3.3.36)式中的遞迴關係式，我們可以將 $\mathbf{A}_n (n \geq 4)$ 表示成 $\mathbf{A}_i (i = 0 \sim 3)$ 的函數，其推導過程如下所述。

令

$$\mathbf{A}_n = \sum_{j=0}^{3} \mathbf{T}_j^n \mathbf{A}_j \quad (4 \le n \le 8) \tag{3.3.38}$$

比較(3.3.35)和(3.3.38)式可得

$$\mathbf{T}_j^4 = \mathbf{X}_4^j \quad (j = 0 \sim 3) \tag{3.3.39}$$

$$\mathbf{T}_j^n = \mathbf{X}_n^{n-j} + \sum_{i=1}^{n-4} \mathbf{X}_n^i \mathbf{T}_j^{n-i} \quad (j = 0 \sim 3), (5 \le n \le 8) \tag{3.3.40}$$

由(3.3.40)式的遞迴關係及(3.3.39)式即可求出(3.3.38)式中的 $\mathbf{T}_j^n$ $(4 \le n \le 8)$

當 $n \ge 9$ 時，令

$$\mathbf{A}_n = \sum_{i=0}^{8} \mathbf{Y}_i^n \mathbf{A}_i \qquad n \ge 9 \tag{3.3.41}$$

由(3.3.34)式可得

$$\mathbf{A}_{n-j} = \sum_{i=0}^{8} \mathbf{Y}_i^{n-j} \mathbf{A}_i \qquad j = 1 \sim 9 \tag{3.3.42}$$

將(3.3.42)式代入(3.3.36)式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n &= \sum_{j=1}^{9} \mathbf{X}_n^j \sum_{i=0}^{8} \mathbf{Y}_i^{n-j} \mathbf{A}_i \\ &= \sum_{i=0}^{8} \sum_{j=1}^{9} \mathbf{X}_n^j \mathbf{Y}_i^{n-j} \mathbf{A}_i \end{aligned} \tag{3.3.43}$$

比較(3.3.41)式和(3.3.43)式可得

$$\mathbf{Y}_i^n = \sum_{j=1}^{9} \mathbf{X}_n^j \mathbf{Y}_i^{n-j} \qquad (i = 0 \sim 8), (n \ge 9) \tag{3.3.44}$$

當 $n = 9$ 時，由(3.3.36)式可得

$$\mathbf{A}_9 = \sum_{j=1}^{9} \mathbf{X}_9^j \mathbf{A}_{9-j} \tag{3.3.45}$$

由(3.3.43)式可得

$$\mathbf{A}_9 = \sum_{j=1}^{9}\sum_{i=0}^{8} \mathbf{X}_9^j \mathbf{Y}_i^{9-j} \mathbf{A}_i \tag{3.3.46}$$

比較(3.3.45)式和(3.3.46)式可得

$$\mathbf{Y}_i^k = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{if} \quad i = k \\ \mathbf{0} & \text{if} \quad i \neq k \end{cases} \tag{3.3.47}$$

其中 $i = 0 \sim 8, k = 0 \sim 8$ ，$\mathbf{I}$ 為 2×2 的單位矩陣，$\mathbf{0}$ 為 2×2 的零矩陣。

由 (3.3.44) 式中的遞迴關係式及 (3.3.47) 式即可求得 $\mathbf{Y}_i^n\ (n \geq 9, i = 0 \sim 8)$ ((3.3.41)式)。將(3.3.38)及(3.3.41)式代入(3.3.29)式，可將 $\{\theta_1, v\}$ 的級數解表示成以下 $A_j\,(j = 0 \sim 3)$ 的函數

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^{3} \mathbf{U}_j^N \mathbf{A}_j \tag{3.3.48}$$

$$\mathbf{U}_j^N = \zeta^j \mathbf{I} + \sum_{m=4}^{8} \zeta^m \mathbf{T}_j^m + \sum_{n=9}^{N} \mathbf{Z}_j^n \tag{3.3.49}$$

$$\mathbf{Z}_j^n = \zeta^n (\mathbf{Y}_j^n + \sum_{m=4}^{8} \mathbf{Y}_m^n \mathbf{T}_j^m) \tag{3.3.50}$$

其中 $9 \leq n \leq \infty$ ，$j = 0 \sim 3$

本文在數值計算時，是以下式作為 $\{\theta_1, v\}$ 級數解((3.3.48)式)的收斂準則

$$\frac{\left\|\mathbf{Z}_j^n\right\|_\infty}{\left\|\mathbf{U}_j^N\right\|_\infty} \leq E_{tol} \tag{3.3.51}$$

其中 E_{tol} 為所給定之容許誤差值，$\|\ \ \|_\infty$ 為矩陣的Row sum norm。一個矩陣 $\mathbf{A}_{N\times N}$ 的Row sum norm的定義如下[28]

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i (\sum_{j=1}^{N} |\mathbf{A}_{ij}|)$$

由(3.3.48)式可將 θ_1 和 v 表示成下列的形式

$$\theta_1 = \mathbf{N}_1^t \mathbf{q} \tag{3.3.52}$$

$$v = \mathbf{N}_v^t \mathbf{q} \tag{3.3.53}$$

$$\mathbf{q} = \{A_0 \quad B_0 \quad A_1 \quad B_1 \quad A_2 \quad B_2 \quad A_3 \quad B_3\} \tag{3.3.54}$$

其中 $\mathbf{N}_1$ 和 $\mathbf{N}_v$ 皆為 8×1 的行矩陣，本文中稱其為形狀函數。

A_i, B_i $(i = 0 \sim 3)$ 為未定係數。其值是由梁元素端點的邊界條件決定。令 θ_{1j}、v_j、θ_{3j}、β_j 表示 θ_1、v、$\theta_3 = \dfrac{dv}{ds}$((2.4.5)式），$\beta = \dfrac{d\theta_1}{ds}$ 在節點 j ($j = 1,2$) 之值。

由(3.3.52)和(3.3.53)式可得

$$\mathbf{u}_\theta = \mathbf{T}_{\theta q} \mathbf{q} \tag{3.3.55}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\theta q} = \{ & \mathbf{N}_v^t(\zeta_1) \quad \mathbf{N}_1^t(\zeta_1) \quad \mathbf{N}_{v,s}^t(\zeta_1) \quad \mathbf{N}_{1,s}^t(\zeta_1) \\ & \mathbf{N}_v^t(\zeta_2) \quad \mathbf{N}_1^t(\zeta_2) \quad \mathbf{N}_{v,s}^t(\zeta_2) \quad \mathbf{N}_{1,s}^t(\zeta_2) \} \end{aligned} \tag{3.3.56}$$

其中 $\mathbf{u}_\theta$ 已在(3.3.11)式中定義，$\zeta_1 = -0.5$，$\zeta_2 = 0.5$。

因本文以後的推導都是以節點在總體座標上的擾動位移、旋轉及形心軸的扭轉率為獨立變數，所以必須將(3.3.52)式及(3.3.53)式中的 $\mathbf{q}$ 表示成 $\mathbf{u}_g$ 的函數。

由(3.3.12)、(3.3.15)及(3.3.55)式可得

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_{qg} \mathbf{u}_g \tag{3.3.57}$$

$$\mathbf{T}_{qg} = \mathbf{T}_{\theta q}^{-1} \mathbf{T}_{\theta e} \mathbf{T}_{ge}^t \tag{3.3.58}$$

3.3.4 梁元素在次要平衡路徑的節點內力

因在次要平衡路徑上，梁元素的內力在共同的節點上必須滿足力的平衡，在兩端的節點必須必須滿足外力的邊界條件，所以本節中首先要將梁截面在元素座標上的合力、合力矩及雙力矩表示成擾動位移$\mathbf{u}_g$的函數。在本節的推導中，所有的擾動量及其微分都僅取到一次項。梁的內力必須在受擾動後的元素座標$\bar{x}_i$上計算。

令

$$\overline{\mathbf{F}}_j = \{ \bar{F}_{1j} , \bar{F}_{2j} , \bar{F}_{3j} \} \tag{3.3.59}$$

$$\overline{\mathbf{M}}_j = \{ \bar{M}_{1j} , \bar{M}_{2j} , \bar{M}_{3j} \} \tag{3.3.60}$$

其中$\bar{F}_{ij}$及$\bar{M}_{ij}$表示元素節點$j(j=1,2)$在擾動後之元素座標軸$\bar{x}_i (i=1,2,3)$方向的節點力及力矩。$\bar{F}_{ij}$及$\bar{M}_{ij}$的計算方法與[23]的方法一樣，在附錄J中有詳盡的推導。

為了推導上的方便，本研究將$\overline{\mathbf{F}}_j$及$\overline{\mathbf{M}}_j$的分量表示成在擾動前之元素座標x_i上的分量F_{ij}及M_{ij}，由(3.3.8)式可得

$$\mathbf{F}_j = \{ F_{1j} , F_{2j} , F_{3j} \} = \mathbf{A}_{e\bar{e}} \overline{\mathbf{F}}_j \tag{3.3.61}$$

$$\mathbf{M}_j = \{ M_{1j} , M_{2j} , M_{3j} \} = \mathbf{A}_{e\bar{e}} \overline{\mathbf{M}}_j \tag{3.3.62}$$

所以由(3.3.8)、(3.3.61)、(3.3.62)式可得

$$F_1 = \bar{F}_1 \tag{3.3.63}$$

$$F_2 = \bar{F}_2 + \bar{F}_1 \frac{\Delta v}{\ell} - \bar{F}_3 \bar{e}_{23} \tag{3.3.64}$$

$$F_3 = \bar{F}_3 \tag{3.3.65}$$

$$M_1 = \bar{M}_1 - \bar{M}_2 \frac{\Delta v}{\ell} \tag{3.3.66}$$

$$M_2 = \bar{M}_2 \tag{3.3.67}$$

$$M_3 = \overline{M}_2 \bar{e}_{23} + \overline{M}_3 \tag{3.3.68}$$

因本文中僅取到擾動量的一次項，所以(3.3.64)、(3.3.66)及(3.3.68)式中之$\overline{F}_1$、$\overline{F}_3$及$\overline{M}_2$是採用其在擾動前之值，即(3.2.5)、(3.2.6)及(3.2.7)式

令

$$\mathbf{F}_e = \{ -\mathbf{F}_{e1}, -B_1^{\theta}, \mathbf{F}_{e2}, B_2^{\theta} \} \tag{3.3.69}$$

$$\overline{\mathbf{F}}_e = \{ -\overline{\mathbf{F}}_{e1}, -B_1^{\theta}, \overline{\mathbf{F}}_{e2}, B_2^{\theta} \} \tag{3.3.70}$$

$$\mathbf{F}_{ej} = \{ F_{2j}, M_{1j}, M_{3j} \} \tag{3.3.71}$$

$$\overline{\mathbf{F}}_{ej} = \{ \overline{F}_{2j}, \overline{M}_{1j}, \overline{M}_{3j} \} \tag{3.3.72}$$

其中$j\ (j=1,2)$，$\mathbf{F}_e$、$\overline{\mathbf{F}}_e$為元素擾動後的節點內力向量分別表示成擾動前元素座標上的分量及擾動後元素座標上的分量。

由(3.3.8)、(3.3.61)、(3.3.62)及(3.3.69)~(3.3.72)式可將擾動後的元素節點內力表示成

$$\mathbf{F}_e = \overline{\mathbf{F}}_e + \mathbf{T}_{\bar{e}e}\mathbf{u}_e \tag{3.3.73}$$

其中

$$\mathbf{T}_{\bar{e}e} = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_{F1} \\ \mathbf{0}_{1\times 8} \\ \mathbf{T}_{F2} \\ \mathbf{0}_{1\times 8} \end{bmatrix} \tag{3.3.74}$$

$\mathbf{T}_{Fj}$代表$\mathbf{T}_F$在節點$j\ (j=1,2)$之值

$$
\mathbf{T}_{Fj}^{t}=\begin{bmatrix}
-\frac{F_{1j}}{\ell}+\frac{F_{3j}}{4\ell}(s_1+s_2) & \frac{M_{2j}}{\ell} & -\frac{M_{2j}}{4\ell}(s_1+s_2) \\
-\frac{F_{3j}}{2} & 0 & \frac{M_{2j}}{2} \\
\frac{F_{3j}}{4}s_1 & 0 & -\frac{M_{2j}}{4}s_1 \\
0 & 0 & 0 \\
\frac{F_{1j}}{\ell}-\frac{F_{3j}}{4\ell}(s_1+s_2) & \frac{-M_{2j}}{\ell} & \frac{M_{2j}}{4\ell}(s_1+s_2) \\
-\frac{F_{3j}}{2} & 0 & \frac{M_{2j}}{2} \\
\frac{F_{3j}}{4}s_2 & 0 & -\frac{M_{2j}}{4}s_2 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$s_j=\sin\varphi_{2j}^{0}=\theta_{2j}^{0}$$

由附錄 J 中的(J.20)與(3.3.73)式可得

$$\mathbf{F}_e=\mathbf{N}_F\mathbf{q}+\mathbf{T}_{\bar{e}e}\mathbf{u}_e \tag{3.3.75}$$

其中 $\mathbf{N}_F$ 在附錄 J 中(J.21)式中已有定義，$\mathbf{q}$ 在(3.3.54)式中已有定義。

由(3.3.15)、(3.3.55)式可將(3.3.75)式表示成

$$\mathbf{F}_e=(\mathbf{N}_F\mathbf{T}_{\theta q}^{-1}\mathbf{T}_{\theta e}+\mathbf{T}_{\bar{e}e})\mathbf{u}_e \tag{3.3.76}$$

令

$$\mathbf{F}_g=\{\,F_{21}^{g}\quad M_{11}^{g}\quad M_{31}^{g}\quad B_1^{\theta}\quad F_{22}^{g}\quad M_{12}^{g}\quad M_{32}^{g}\quad B_2^{\theta}\} \tag{3.3.77}$$

其中 $F_{2j}^{g},M_{1j}^{g},M_{3j}^{g},B_j^{\theta}(\,j=1,2\,)$ 分別為梁元素在節點 j 沿 X_2 軸方向的內力，繞 X_1 及 X_3 軸的力矩及雙力矩。

由(3.3.12)式可知 $\mathbf{F}_g$ (3.3.77)式及 $\mathbf{F}_e$ (3.3.76)式的關係如下：

$$\mathbf{F}_g=\mathbf{T}_{ge}\mathbf{F}_e \tag{3.3.78}$$

利用(3.3.12)式可將(3.3.78)式表示成

$$\mathbf{F}_g=\mathbf{T}_{ge}(\mathbf{N}_F\mathbf{T}_{\theta q}^{-1}\mathbf{T}_{\theta e}+\mathbf{T}_{\bar{e}e})\mathbf{T}_{ge}^{t}\mathbf{u}_g \tag{3.3.79}$$

3.3.5　梁結構的邊界條件

本文中分析的簡支梁和懸臂梁在兩端點因支承不同而有不同的邊界條件，但在內部節點則有相同邊界條件，所以本節中將邊界分為兩端節點和內部節點兩種邊界。本節中以$(\ )_i^g$表示$(\ )$在系統節點$i\,(i=1-N+1)$的值且$(\ )$是在總體座標上定義的，$(\ )_{j(i)}^g$表示$(\ )$在第$i\,(i=1-N)$個元素節點$j\,(j=1,2)$之值，且$(\ )$是在總體座標上定義的。所以$v_{,i}^g$,$\phi_{1,i}^g$，$\phi_{3,i}^g$，$\beta_{,i}^\theta$代表系統之第i個節點在X_2方向的擾動位移，繞X_1及X_3軸的擾動旋轉及形心軸的扭轉率。$v_{,j(i)}^g$，$\phi_{1,j(i)}^g$，$\phi_{3,j(i)}^g$，$\beta_{,j(i)}^\theta$ $(j=1,2)$代表第i個元素的節點j在X_2方向的擾動位移，繞X_1及X_3軸的擾動旋轉及形心軸的扭轉率。為了方便說明，本節中令懸臂梁的第一個節點為固定端，第$N+1$個節點為自由端，本文中僅考慮兩端具有相同邊界條件的簡支梁。

梁端點的的邊界條件可以說明如下：

(1)固定端(第一個節點)邊界條件：

$$\phi_{1,1}^g=\phi_{11(1)}^g=0$$

$$\phi_{3,1}^g=\phi_{31(1)}^g=0$$

$$v_{,1}^g=v_{1(1)}^g=0$$

$$B_{,1}^\theta=B_{1(1)}^\theta=0\text{(自由翹曲)，或 }\beta_{,1}^\theta=\beta_{1(1)}^\theta=0\text{(抑制翹曲)} \tag{3.3.80}$$

(2)自由端第$N+1$個節點

自由端的邊界條件和施加力矩方式有關(見(3.1.3)~(3.1.5)式)，可分為 QT-1，QT-2 及 ST 來說明

QT-1：

$$M^{g}_{1,N+1}=M^{g}_{12(N)}=0 \qquad M^{g}_{3,N+1}=M\phi^{g}_{1,N+1}=M^{g}_{32(N)} \tag{3.3.81a}$$

QT-2：

$$M^{g}_{1,N+1}=-M\phi^{g}_{3,N+1}=M^{g}_{12(N)} \qquad M^{g}_{3,N+1}=M^{g}_{32(N)}=0 \tag{3.3.81b}$$

ST：

$$M^{g}_{1,N+1}=-\frac{1}{2}M\phi^{g}_{3,N+1}=M^{g}_{12(N)} \qquad M^{g}_{3,N+1}=\frac{1}{2}M\phi^{g}_{1,N+1}=M^{g}_{32(N)} \tag{3.3.81c}$$

另外與力矩形式無關的邊界條件有

$$F^{g}_{2,N+1}=F^{g}_{22(N)}=0 \qquad B^{\theta}_{,N+1}=B^{\theta}_{2(N)}=0 \tag{3.3.82a}$$

$$\begin{aligned}&\phi^{g}_{1,N+1}=\phi^{g}_{12(N)} \qquad \phi^{g}_{3,N+1}=\phi^{g}_{32(N)}\\&v^{g}_{,N+1}=v^{g}_{2(N)}\\&\beta^{g}_{,N+1}=\beta^{g}_{2(N)}\end{aligned} \tag{3.3.82b}$$

(3)簡支梁端點邊界條件(第 1 和第 $N+1$個節點)

本文中共考慮了以下四種不同的邊界條件。

(a) $$\begin{aligned}&M^{g}_{3,1}=M^{g}_{31(1)}=0 \qquad M^{g}_{3,N+1}=M^{g}_{32(N)}=0\\&\beta^{\theta}_{,1}=\beta^{\theta}_{1(1)}=0 \qquad \beta^{\theta}_{,N+1}=\beta^{\theta}_{2(N)}=0\end{aligned} \tag{3.3.83a}$$

(b) $$\begin{aligned}&M^{g}_{3,1}=M^{g}_{31(1)}=0 \qquad M^{g}_{3,N+1}=M^{g}_{32(N)}=0\\&B^{\theta}_{,1}=B^{\theta}_{1(1)}=0 \qquad B^{\theta}_{,N+1}=B^{\theta}_{2(N)}=0\end{aligned} \tag{3.3.83b}$$

(c) $$\begin{aligned}&\phi^{g}_{3,1}=\phi^{g}_{31(1)}=0 \qquad \phi^{g}_{3,N+1}=\phi^{g}_{32(N)}=0\\&\beta^{\theta}_{,1}=\beta^{\theta}_{1(1)}=0 \qquad \beta^{\theta}_{,N+1}=\beta^{\theta}_{2(N)}=0\end{aligned} \tag{3.3.83c}$$

(d) $$\begin{aligned}&\phi^{g}_{3,1}=\phi^{g}_{31(1)}=0 \qquad \phi^{g}_{3,N+1}=\phi^{g}_{32(N)}=0\\&B^{\theta}_{,1}=B^{\theta}_{1(1)}=0 \qquad B^{\theta}_{,N+1}=B^{\theta}_{2(N)}=0\end{aligned} \tag{3.3.83d}$$

另外四種不同的邊界有以下共同的邊界條件。

$$\phi^g_{1,1} = \phi^g_{11(1)} = 0 \qquad \phi^g_{1,N+1} = \phi^g_{12(N)} = 0$$

$$v^g_{,1} = v^g_{1(1)} = 0 \qquad v^g_{,N+1} = v^g_{2(N)} = 0 \tag{3.3.84}$$

以上的四種邊界條件在外加彎矩為 QT-1，QT-2 及 ST 時皆適用。

在簡支梁和懸臂梁的內部節點，即第 2 個到第 N 個節點，相鄰元素在共同節點上必需有一致的變形且滿足力的平衡，其邊界條件可以表示如下

(1)位移邊界條件：

$$\begin{aligned}
&v^g_{2(i)} = v^g_{1\ (i+1)} = v^g_{,i+1} \\
&\phi^g_{12(i)} = \phi^g_{11(i+1)} = \phi^g_{1,i+1} \\
&\phi^g_{32(i)} = \phi^g_{31(i+1)} = \phi^g_{3,i+1} \\
&\beta^g_{2(i)} = \beta^g_{1(i+1)} = \beta^g_{,i+1}
\end{aligned} \tag{3.3.85a}$$

(2)力邊界條件：

$$\begin{aligned}
&F^g_{22(i)} - F^g_{21(i+1)} = 0 \\
&M^g_{12(i)} - M^g_{11(i+1)} = 0 \\
&M^g_{32(i)} - M^g_{31(i+1)} = 0 \\
&B^\theta_{2(i)} - B^\theta_{1(i+1)} = 0
\end{aligned} \tag{3.3.85b}$$

本文在分析時候將 $v^g_{,i}$,$\phi^g_{1,i}$,$\phi^g_{3,i}$ 及 $\beta^g_i\,(i = 1, N+1)$ 當做獨立變數，所以位移的邊界條件都可以自動滿足。

3.4 挫屈負荷

將(3.3.78)、(3.3.79)式代入 3.3.5 節中力的邊界條件，即可求得挫屈負荷的統御方程式。今以懸臂梁固定端為抑制翹曲，外加彎矩為 QT-1 型為例，說明挫屈負荷統御方程式的形成。將 (3.3.78)、(3.3.79)、(3.3.80)、(3.3.82b)及(3.3.85a)式代入(3.3.81a)、(3.3.82a)及(3.3.85b)式可得

$$[\mathbf{K}]_{4N\times 4N}\{\mathbf{U}\}_{4N\times 1}=\{\mathbf{0}\}_{4N\times 1} \tag{3.4.1}$$

$$\{\mathbf{U}\}_{4N\times 1}=\{V_2^g \quad \phi_{1,2}^g \quad \phi_{3,2}^g \quad \beta_2^\theta \quad \cdots\cdots \quad V_{N+1}^g \quad \phi_{1,N+1}^g \quad \phi_{3,N+1}^g \quad \beta_{N+1}^\theta\} \tag{3.4.2}$$

其中[ ],{ }之下標分別代表矩陣和向量的維數(dimension)。而 N 代表元素的數目。$[\mathbf{K}]$可視為系統的剛度矩陣，$\{\mathbf{U}\}$為系統的位移向量。

對於不同的邊界條件，該統御方程式的維數會有不同，但形式相同，所以本文中以下式作為挫屈負荷的統御方程式

$$\mathbf{KU}=\mathbf{0} \tag{3.4.3}$$

若(3.4.3)式有非零解時，表示結構在原平衡位置附近還有其他的平衡位置，也就是發生挫屈。因(3.4.3)式為一齊項式(homogeneous equation)，所以僅有當剛度矩陣 $\mathbf{K}$ 的行列式值 $\det\mathbf{K}$ 為零時 $\mathbf{U}$ 才有非零的解。而(3.4.3)式中剛度矩陣 $\mathbf{K}$ 為彎矩 M 之非線性函數，即 $\mathbf{K}=\mathbf{K}(M)$。因此能滿足 $\det\mathbf{K}(M^*)=0$ 之最小 M^* 即稱為臨界負荷。本文中求臨界負荷的方法和[17]中的方法一樣，並說明如下：

在數值程序中則是先給定一個 M 初始值 M^0，及迭代增量 ΔM，然後再計算對應於 $M=M^0+I\Delta M \ \ (I=1,2,3\cdots)$ 的 $\det\mathbf{K}$，一直到 $\det\mathbf{K}$ 的值變號，然後再用二分法求得滿足 $\det\mathbf{K}=0$ 之 M^* 數值。本文中以

$$\left|\det\mathbf{K}\right|/\left|\det\mathbf{K}\right|_{\max}\le e_{tol} \tag{3.4.4}$$

作為判斷 $\det\mathbf{K}=0$ 的收斂準則，其中 $\left|\det\mathbf{K}\right|_{\max}$ 為計算過程最大的 $\left|\det\mathbf{K}\right|$，

e_{tol} 為給定的誤差值。當求得挫屈負荷 M^* 後，本文用以下的方法求得挫屈模態。

將 $\mathbf{K}(M^*)$ 分解成

$$\mathbf{K}(M^*) = \mathbf{K}_L \mathbf{K}_U \tag{3.4.5}$$

其中 $\mathbf{K}_L$ 為一下三角矩陣，其對角線元素皆為 1，$\mathbf{K}_U$ 為一上三角矩陣。

若 $\mathbf{K}_U$ 之對角線元素之絕對值在第 I 行有最小值取挫屈模態第 I 個分量 $U_I = 1$。將(3.4.3)式改寫成 $(4N-1)$ 個聯立方程式，再用高斯消去法求出剩餘的 $(4N-1)$ 個挫屈模態的分量。