第四章 數值例題

本文中的例題共考慮了 7 種不同斷面的梁：(1)橢圓斷面，長軸半徑 a = 2.5cm，短軸半徑 b = 0.25cm，(2)橢圓斷面，長軸半徑 a = 3cm，短軸半徑 b = 0.1cm，(3)W14×159 型鋼，(4)W14×90 型鋼，(5)W10×100 型鋼，(6)W10×60 型鋼，(7)W10×30 型鋼。

橢圓形梁的長度有二種：L=25、50cm，楊氏模數和剪力模數各有二種，第一種：$E=10^4\ N/cm^2$ 、$G=5\times10^3\ N/cm^2$ ；第二種：$E=2\times10^7\ N/cm^2$ 、$G=E/2.6=7.6923\times10^7\ N/cm^2$ 。W 型鋼的長度有二種：L = 300、600in，其楊氏模數 $E=2.9\times10^4 ksi$ ，剪力模數 $G=1.12\times10^4 ksi$ 。橢圓及 W 型鋼的斷面尺寸及斷面常數都列於附錄 L 的表中。

本章中 $\alpha=I_z/I_y$ ，P_{cr} 、P_ϕ 分別代表梁在軸向力作用時的側向挫屈軸力及扭轉挫屈軸力(詳見附錄 L)。為了方便以後的討論，本文中令 $P_r=P/P_{cr}$ ，$P_r<1$ 且 $P_r<P_\phi/P_{cr}$ ；$M_{NB}^{(P_r,\lambda)}$ 、$M_{cr}^{(P_r,\lambda)}$ 分別表示在軸向力 P、端點彎矩 M 及 λM ，$-1\le\lambda\le1$ 作用時，本文求得的挫屈彎矩及文獻上的線性挫屈彎矩。

當 $P_r = 0$ 時表示梁兩端只受到彎矩比值為 λ 的彎矩作用，當 $\lambda=-1$ 時表示梁受到均勻彎矩的作用，令 $C_b=M_{cr}^{(0,\lambda)}/M_{cr}^{(0,-1)}$ ，由文獻[31](或附錄 L)可知 C_b 僅與 λ 有關與邊界條件無關，並可以下列之近似式表示

$$C_b=1.75+1.05\lambda+0.3\lambda^2\le2.56 \tag{4.1}$$

由文獻[31] (或附錄 L)可知 $M_{cr}^{(P_r,\lambda)}$ 可以表示成

$$\frac{M_{cr}^{(P_r,\lambda)}}{M_{cr}^{(0,\lambda)}}=[(1-\frac{P}{P_{ycr}})(1-\frac{P}{P_{zcr}})(1-\frac{P}{P_\phi})]^{1/2} \tag{4.2}$$

$$M_{cr}^{(0,\lambda)}=C_b\frac{\pi EI_y}{k_bL}\sqrt{\alpha\beta}\ \sqrt{1+K^2} \tag{4.3}$$

$$\alpha=\frac{I_z}{I_y}\ ,\ \beta=\frac{GJ}{EI_y}\ ,\ \gamma=\frac{EI_\omega}{GJ}\ ,\ K=\sqrt{\gamma\pi^2/(k_tL)^2}\ , \tag{4.4}$$

其中P_{ycr}及P_{zcr}分別為梁在兩個主平面的側向挫屈軸力，k_b,k_t二常數分別代表不同邊界條件時之有效長度和實際長度的比值，其值見附錄 L。

因P_{ycr}、P_{zcr}、P_ϕ與邊界條件有關而與λ無關，所以由(4.2)式可知$\dfrac{M_{cr}^{(P_r,\lambda)}}{M_{cr}^{(0,\lambda)}}$之值與$\lambda$無關。

本研究一方面要比較$M_{NB}^{(P_r,\lambda)}$、$M_{cr}^{(P_r,\lambda)}$在不同情況時的差異，以了解線性挫屈彎矩的正確性，另一方面希望$M_{NB}^{(P_r,\lambda)}$也能找到類似(4.1)、(4.2)式的公式，以供設計時參考。所以本文中比照(4.1)式，令$C_{nb}=M_{NB}^{(0,\lambda)}/M_{NB}^{(0,-1)}$，並計算出不同$\lambda$值的$\dfrac{M_{NB}^{(P_r,\lambda)}}{M_{NB}^{(0,\lambda)}}$與對應的$\dfrac{M_{cr}^{(P_r,\lambda)}}{M_{cr}^{(0,\lambda)}}$之值比較。

另外，在本章探討懸臂梁的部分，以M_{CR}代表懸臂梁自由端承受外加彎矩作用時的線性挫屈彎矩；M_B代表懸臂梁自由端承受外加彎矩和軸向力作用時，本文求得的挫屈彎矩。本文中將簡支梁及懸臂梁在不同邊界條件的線性挫屈軸力及彎矩列於附錄 L 中。本章中 N 代表使用的元素數目，本文中 BC1，BC2，BC3 及 BC4 分別代表簡支梁的四種邊界條件即(3.3.83a)~(3.3.83d)式。

本文在分析時使用(3.3.31)式將$\mathbf{Q,R,S,T}$展開成了ζ的多項式級數，而本文中 m 代表多項式級數所取到的項次。為了本章所求得挫屈彎矩的準確性，本文中用不同的 m 及 N 對挫屈彎矩做了一些收斂分析，並將其結果列於表一至表四。

首先分析級數解(3.3.31)式到達要求收斂精度，$\mathbf{Q,R,S,T}$所需ζ的項次。由表一至表四可發現當梁承受均勻彎矩($\lambda=-1$)時，本文的結果與文獻[23]收斂分析的結果非常接近。由表二發現，當梁承受均勻彎矩且軸力為零

時，採用 50 個元素，W14×159 型鋼($\alpha=0.3973$)，只要保留到ζ^0項就有相當的精確度。但是，在同一型鋼和邊界條件下，當梁承受均勻彎矩且軸力增為 0.9P_{cr}時，只採用 30 個元素且同樣只取到ζ^0項也有相當精確度。在表二中，當$\lambda=1$時，無論是軸力為零或軸力增為 0.9P_{cr}時，都必須取到至少ζ^1項及 50 個元素才有較高的精確度。但由表一，橢圓斷面，$a:b=10$，L=25cm 和同樣的邊界條件下，當$\lambda=1$時，只要取到ζ^0項及 50 個元素就有相當的精確度。分別比較表一和表二，表三和表四可知，在大變形，元素數目較少時，且承受大軸力的情況下，必須取到ζ較高的次項，才能達到較高的精確度。所以本文分析時為求更精確，故一律取到ζ^5項。

由表一到表四元素數目的收斂分析，當$\lambda=-1$或 1，軸力為零時，原則上取 50 個元素就有相當的精確度。但軸力增大到 0.9P_{cr}時，取 30 個元素，或甚至 10 個元素，就有很高的精確度。這是因為軸力為 0.9P_{cr}時，挫屈前的變形較軸力為零時小。但為了確保在各種不同情況答案的精度，本文所有例題的分析都採用 50 個元素來作分析。

表五到表二十為不同斷面的簡支梁在不同軸力及不同彎矩比值下的挫屈彎矩。由表五至表二十可發現，本文的結果與文獻[26]用有限元素法所求得的結果非常接近。表五至表二十的挫屈彎矩和文獻[26]的挫屈彎矩比較，大部分到小數點第二位都是一樣精確的。當應變很小時，Green Strain 和工程應變是很接近的。文獻[26]推導內力所作的虛功，應變是採用 Green Strain，而本文則是採用工程應變。所以由文獻[26]和本文挫屈彎矩比較的結果可知，應變採用 Green Strain，或是工程應變對所求得的挫屈彎矩雖然會有一些影響，但是影響不大。當λ值相同，軸力不同時，$P_r=0$的挫屈彎矩為最大，當軸向壓力增加時，本文方法所求得的挫屈彎矩$M_{NB}^{(P_r,\lambda)}$也逐漸降低。為了方便與線性挫屈彎矩的古典解比較，本文亦將C_b及

$M_{cr}^{(P_r,\lambda)}/M_{cr}^{(0,\lambda)}$ 的值(公式詳見附錄 L)列於表中。當 $P_{cr}/P_{\phi}>1$ 時，就需控制 $P_r=P/P_{cr}$ 的值，使 $P/P_{\phi}<1$。另外，由表中可以發現 $M_{NB}^{(0,-1)}$ 和 $M_{cr}^{(0,-1)}$ 的比值與文獻[23]的比值(未附在本文中)非常接近。由此可見，文獻[23]中工程應變二次項的錯誤似乎沒有對結果造成太大的影響。$M_{NB}^{(P_r,\lambda)}$ 和 $M_{cr}^{(P_r,\lambda)}$ 有很大的差別，且差別的大小與斷面、長度、邊界條件、軸力、彎矩比值都有關。

當 λ 接近 -1 時，表十三到表二十橢圓斷面 $M_{NB}^{(P_r,\lambda)}/M_{NB}^{(0,\lambda)}$ 的值和線性挫屈分析 $M_{cr}^{(P_r,\lambda)}/M_{cr}^{(0,\lambda)}$ 的值很接近。這是可預期的結果，因橢圓斷面其主要主軸的撓曲剛度 EI_y 遠大於次要主軸的撓曲剛度 EI_z 及扭轉剛度 GJ，所以挫屈前的變形應可忽略。同樣地，表九到表十二中 W10×30 型鋼斷面也有類似的結果。相反地，當 λ 接近 -1 時，表五到表八 W14×159 型鋼斷面 $M_{NB}^{(P_r,\lambda)}/M_{NB}^{(0,\lambda)}$ 的值和線性挫屈分析 $M_{cr}^{(P_r,\lambda)}/M_{cr}^{(0,\lambda)}$ 的值有相當的差異，這是因為 W14×159 的斷面之 $I_z/I_y=0.3937$，所以挫屈前的變形對挫屈彎矩有相當的影響。

表二十一到表二十九為懸臂梁的挫屈分析，由其中可發現本文的結果與文獻[23]的比值(未附在本文中)非常接近，再度說明，文獻[23]中工程應變二次項的錯誤對結果影響不大。表二十一至二十三為懸臂梁(橢圓斷面)的挫屈分析，QT-1 和 ST 型彎矩所得的 M_B 和 M_{CR} 較接近，當軸力為 0.9P_{CR} 時 M_B 約為 0.3M_{CR}，而 QT-2 型的 M_B 約為 0.45M_{CR}，顯示不同彎矩的施加方式所得的 M_B 有變大差距，而表二十四至二十九中 W 型鋼斷面受 QT-1，QT-2 及 ST 型彎矩也有類似的結果，但在表二十五中(Warping restraint,QT-2)所受軸力為 0.9P_{CR} 時，M_B 仍可高達 0.50~0.56M_{CR}。

圖十二為用表五到表二十中之 $C_{nb}=M_{NB}^{(0,\lambda)}/M_{NB}^{(0,-1)}$ 所繪製的 $\dfrac{1}{C_{nb}}-\lambda$

曲線及文獻[8]所陳述之 $\frac{1}{C_b}-\lambda$ 曲線和理論結果的區域帶。由圖十二中發現當 $-1<\lambda<0$ 時，$\frac{1}{C_{nb}}$ 與 $\frac{1}{C_b}$ 相當接近。當 λ 值越趨近 1，本文所求得的 $\frac{1}{C_{nb}}$ 與 $\frac{1}{C_b}$ 差距越大，但都還是在文獻[8]所陳述的經驗公式(或 $\frac{1}{C_b}-\lambda$ 曲線)和理論結果區域帶下限的範圍之間。由上述之觀察結果可知，當 $-1<\lambda<0$ 時，也許可以用(4.1)式 C_b 之值當作 C_{nb} 之值，並且用 $M_{NB}^{(0,-1)}$ 的值及 $C_{nb}=M_{NB}^{(0,\lambda)}/M_{NB}^{(0,-1)}$ 估算 $M_{NB}^{(0,\lambda)}$；當 $0<\lambda<1$ 時最好以非線性挫屈分析求得 $M_{NB}^{(0,\lambda)}$。