

國立交通大學  
機械工程學系  
碩士論文

具彈性支撐複合材料圓板之振動與  
聲傳研究



**Vibration and Sound Radiation of Flexibly Supported  
Circular Laminated Composite Plates**

研究生：施志鴻

指導教授：金大仁

中華民國九十三年六月

具彈性支撐複合材料圓板之振動與聲傳研究

**Vibration and Sound Radiation of Flexibly Supported  
Circular Laminated Composite Plates**

研究生：施志鴻

Student : Chih-Hung Shih

指導教授：金大仁 教授

Advisor : Tai-Yan Kam

國立交通大學

機械工程研究所



Submitted to Institute of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirement

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

June 2004

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十三年六月

# 具彈性支撐複合材料圓板之振動與聲傳研究

研究生：施志鴻

指導教授：金大仁 博士

國立交通大學機械工程研究所

## 中文摘要

本文在討論具彈性支撐之複合材料圓板之振動與聲壓研究。利用同一彈性支撐來探討不同疊層角度之複材圓板及三明治圓板之聲壓曲勢之異同，並了解封閉及非封閉之彈性支撐對同一振動板之聲壓位準有何影響。

本文所使用之彈性支撐是由泡棉所加熱壓製而成的，其形狀為半圓形。在模擬分析中將其模擬、等效為彈簧，並藉由實驗，將其等效彈簧常數求出，以供往後實驗及理論分析使用。

在理論部份，本篇論文使用古典積層板理論及一階剪變形理論來模擬複合材料積層圓板及三明治圓板之力學行為，並以 Ritz Method 求解複合材料圓板的自然頻率及模態。在聲壓位準(SPL)方面，由有限元素軟體 ANSYS 建立複合材料圓板之模型進行頻率響應分析，並將各個激振頻率下各元素之振幅、相角輸出，以便由 Fortran 撰寫之聲壓位準程式計算在各個激振頻率下之聲壓值，進而繪製 SPL 關係圖。在 ANSYS 分析時，討論在不同參數下其聲壓曲線之變化，如疊層角度對聲壓位準所造成之影響。

在實驗部份，進行複合積層圓板與三明治圓板製作，及激振實驗和聲壓量測實驗，並將實驗結果與理論分析比較以確定理論分析之正確性。再藉由實驗與分析了解疊層角度、位移響應、重量、圓板結構、彈性支撐對複合材料圓板聲壓位準和趨勢有何影響，以利後續複材振動板之設計研究。

# **Vibration and Sound Radiation of Flexibly Supported Circular Laminated Composite Plates**

Student : Chih-Hung Shih

Advisor : Dr. Tai-Yan Kam

Institute of Mechanical Engineering  
National Chiao Tung University

## **ABSTRACT**

Vibration characteristics and sound radiation of flexibly supported circular laminated composite plates are studied in this thesis. Using both theoretical and experimental means, we investigate how layer angles and laminated composite structure affect the sound radiation of the flexibly supported circular plates. The effects of continuous and discontinuous flexible suspensions on the SPL of the same circular plates were studied.

The flexible suspension using PU foam was formed through a process of heating and pressing and the stiffness of the suspension was measured from experiments. In analysis, elastic springs were used to simulate the flexible suspensions.

The dynamic behaviors of the circular laminated composite plates and circular sandwich plates were studied based on the Classical Laminated Plate Theory or the First Order Shear Deformation Theory, and the Ritz method was used with a power series as the displacement function to yield natural frequencies and natural models of the circular plates. In the part of SPL calculation, we established the models of the circular composite plates using ANSYS for harmonic response analysis. And then we used the calculated amplitude and phase of each element in the circular plate to construct the SPL spectrum. Furthermore, the effects of different variables, such as lamination angle, plate thickness, stiffness of springs on the trend of the SPL curves were also studied.

In the experimental study, we made circular composite laminated plates and sandwich plates. And then we proved that the solutions of theoretical analysis were consistent with the experimental results of SPL and natural frequencies. The results provided in this thesis may be of value for designing circular radiating panels having efficient radiation capability.

## 誌謝

兩年的碩士求學生涯，對我的人生影響重大。兩年來的記憶已深深地刻在我的腦海裡，這段時光有歡笑、有淚水，有許許多多苦澀香醇的回憶將這兩年變的多采多姿。感謝爸爸、媽媽、妹妹對我求學的全力支持、更感謝哥哥對我的體諒包容，讓我可以全力以赴、無憂無慮地完成我的學業。

感謝指導教授金大仁博士的悉心指導教誨，使我在完成學業及論文之外學習到正確的處事及求學態度。感謝偉芬學姐、清榮、士璋、于昇、昌毅、志明學長的照顧，使我能克服學術和研究的困難，感謝張馨櫻小姐這二年來的關懷，讓我在人生地不熟的新竹感覺到人情的溫暖。

感謝同窗好友國晉、巧鈴、鎮隆、奇忠在求學過程中與我作伴、相互勉勵，讓我不感孤單，亦要感謝崧任、建郎、維成讓我的生活充滿歡笑，僅以此文獻給所有關心我的人。

志鴻 2004.7 于交大

# 目 錄

中文提要	.....	i
英文提要	.....	ii
誌謝	.....	iii
目錄	.....	iv
表目錄	.....	vi
圖目錄	.....	vii
第一章	緒論	1
1.1	前言	1
1.2	文獻回顧	2
1.3	研究方法	2
第二章	複合材料積層板理論與分析	4
2.1	基本假設	4
2.2	應力與應變關係	5
2.3	構成方程式	7
2.4	複材積層圓板振動分析	8
2.5	複材積層板之簡諧激振響應	11
第三章	複材積層板有限元素分析	13
3.1	虛功法在有限元素模型中之應用	13
3.2	特徵值與特徵向量	15
3.3	具阻尼結構系統之簡諧激振響應	16
第四章	聲壓計算及應用	17
4.1	聲壓波動方程式	17
4.2	聲壓曲線之繪製	20
第五章	圓形複合材料板製作與實驗程序	22
5.1	圓形複合材料疊層板之製作	22
5.2	複合材料三明治圓板之製作	22
5.3	彈性支撐壓縮實驗	23
5.4	振動實驗	24
5.5	阻尼量測實驗	25
5.6	聲壓實驗	27
第六章	理論分析與實驗結果	28
6.1	ANSYS 模型建立與其正確性驗證	28
6.1.1	利用 ANSYS 模擬分析邊界為固定之圓板模態	28
6.1.2	利用 ANSYS 模擬分析邊界為自由之圓板自然頻率	29
6.2	數值計算方法之驗證	29

6.3	數值計算方法與 ANSYS 模擬分析的比較·····	29
6.3.1	數值分析與 ANSYS 之收斂性比較·····	30
6.3.2	數值分析與 ANSYS 模態之比較·····	31
6.4	聲壓趨勢分析·····	31
6.4.0	半圓形彈性支撐之彈簧常數·····	32
6.4.1	聲壓位準與疊層角度·····	34
6.4.2	聲壓位準與振形·····	35
6.4.3	聲壓位準與疊層層數·····	36
6.4.4	聲壓位準與三明治圓板·····	37
6.4.5	聲壓位準與彈性支撐·····	38
第七章	結論與未來研究方向·····	42
7.1	結論·····	42
7.1.1	利用數值方法進行模態與自然頻率分析方面·····	42
7.1.2	具彈性支撐複材圓板之聲壓特性·····	42
7.2	未來研究方向·····	43
參考文獻	·····	45



## 表 目 錄

表 6-1	圓形振動板之材料常數和尺寸.....	47
表 6-2	圓形振動板自然頻率之 ANSYS 模擬和理論值比較.....	47
表 6-3	材料性質表.....	47
表 6-4	三明治圓板之尺寸.....	48
表 6-5	實驗結果和 ANSYS 模擬分析之比較.....	48
表 6-6	Yoshihiro[9]中的材料常數.....	48
表 6-6	三明治圓板之尺寸.....	48
表 6-7	Yoshihiro[9]與本文所使用的程式之比較.....	49
表 6-8	數值計算所用之材料性質表.....	50
表 6-9	聲壓位準實驗之振動板尺寸與邊界等.....	50
表 6-10	聲壓位準實驗用激振器之規格.....	51
表 6-11	彈性支撐之彈簧常數實驗數據.....	51
表 6-12	激振器彈波之彈簧常數.....	51
表 6-13	壓克力板之材料常數與尺寸.....	52
表 6-14	具彈性支撐壓克力圓板 LMS 自然頻率量測實驗.....	52
表 6-15	具彈性支撐壓克力圓板 ANSYS 模態分析.....	52
表 6-16	[0/90/0](Case1)和[0/0/0]碳纖積層圓板之尺寸大小.....	52
表 6-17	碳纖和巴莎木之材料性質.....	53
表 6-18	三明治圓板之尺寸(Case 3).....	53
表 6-19	彈性支撐改變對自然頻率之影響.....	54
表 6-20	具封閉彈性支撐三明治板(Case 3)與具非封閉彈性支撐 三明治板自然頻率(Case 4)之比較.....	55
表 6-21	去除激振器彈波之具封閉彈性支撐與去除激振器彈波之 具非封閉彈性支撐三明治板自然頻率比較.....	56
表 6-22	具激振器彈波之封閉彈性支撐三明治板(Case 3)與不具 激振器彈波之封閉彈性支撐三明治板自然頻率(Case 5) 之比較.....	57



## 圖 目 錄

圖 2-1	複合材料積層板座標系統.....	58
圖 2-2	半徑為 a 公尺之具彈性支撐圓形複合積層板.....	59
圖 3-1	Rayleigh Damping.....	59
圖 4-1	ANSYS 模型圖.....	60
圖 5-1	積層板製作及輔助材料疊層順序.....	60
圖 5-2	熱壓機.....	61
圖 5-3	複合材料積層板之加熱加壓硬化成型製程圖.....	61
圖 5-4	圓形複合材料三明治板.....	62
圖 5-5	HT-9102 電腦伺服控制材料試驗機.....	62
圖 5-6	PULSE 頻譜分析儀.....	63
圖 5-7	振動實驗架設圖.....	63
圖 5-8	阻尼比量測實驗架設圖.....	64
圖 5-9	頻率響應圖.....	64
圖 6-1	Leonard [10]中邊界為 Clamped 之圓形振動板之第一、第二模態.....	65
圖 6-2	ANSYS 模態分析邊界為 Clamped 之圓形振動板之第一、第二模態.....	65
圖 6-3	數值分析方法 shape function 項次與 ANSYS 模擬分析之收斂情況關係圖-1.....	66
圖 6-4	數值分析方法 shape function 項次與 ANSYS 模擬分析之收斂情況關係圖-2.....	66
圖 6-5-1	ANSYS 和數值分析之收斂性(寬厚比=40, 邊界為自由).....	67
圖 6-5-2	ANSYS 和數值分析之收斂性(寬厚比=40, 邊界為固定).....	67
圖 6-5-3	ANSYS 和數值分析之收斂性(寬厚比=50, 邊界為自由).....	68
圖 6-5-4	ANSYS 和數值分析之收斂性(寬厚比=50, 邊界為固定).....	68
圖 6-5-5	ANSYS 和數值分析之收斂性(寬厚比=60, 邊界為自由).....	69
圖 6-5-6	ANSYS 和數值分析之收斂性(寬厚比=60, 邊界為固定).....	69
圖 6-6a-1	ANSYS 模擬分析邊界為自由之圓形振動板 (orthotropic[0] <sub>6</sub> )之模態.....	70
圖 6-6a-2	ANSYS 模擬分析邊界為自由之圓形振動板 (orthotropic[0] <sub>6</sub> )之模態.....	71

圖 6-6a-3	ANSYS 模擬分析邊界為自由之圓形振動板 (orthotropic[0] <sub>6</sub> )之模態.....	72
圖 6-6b-1	Fortran數值分析描繪邊界為自由之orthotropic [0] <sub>6</sub> 圓形積層板的模態.....	73
圖 6-6b-2	Fortran數值分析描繪邊界為自由之orthotropic [0] <sub>6</sub> 圓形積層板的模態.....	74
圖 6-6b-3	Fortran數值分析描繪邊界為自由之orthotropic [0] <sub>6</sub> 圓形積層板的模態.....	75
圖 6-6c-1	ANSYS模擬分析具彈性支撐(orthotropic[0/90/0] <sub>s</sub> )圓形振動板之模態.....	76
圖 6-6c-2	ANSYS模擬分析具彈性支撐(orthotropic[0/90/0] <sub>s</sub> )圓形振動板之模態.....	77
圖 6-6d-1	Fortran數值模擬分析具彈性支撐(orthotropic[0/90/0] <sub>s</sub> )圓形振動板之模態.....	78
圖 6-6d-2	Fortran數值模擬分析具彈性支撐(orthotropic[0/90/0] <sub>s</sub> )圓形振動板之模態.....	79
圖 6-7	聲壓位準實驗所使用之激振器.....	80
圖 6-8	半圓形泡綿製懸邊.....	80
圖 6-9	具彈性支撐之圓形振動板.....	81
圖 6-10	[0/90/0]與[0/0/0]碳纖積層圓板之聲壓曲線圖.....	81
圖 6-11	[0/90(C)/0]與[0/0(C)/0]三明治圓板之MLSSA 聲壓位準圖.....	82
圖 6-12	[0/90/0]碳纖積層圓板之 SPL 實驗與模擬(Case 1).....	82
圖 6-13a	[0/90/0]圓形碳纖積層板之位移響應.....	83
圖 6-13b	[0/90/0]圓形碳纖積層板之位移響應.....	83
圖 6-14	[0/90/0]圓形碳纖積層板的自然模態和激振振型.....	84
圖 6-15	聲壓位準與疊層層數的關係.....	85
圖 6-16	[0/90(c)/0] 三明治圓板 (Case 3)ANSYS 模擬分析和 MLSSA 聲壓實驗.....	85
圖 6-17a	激振頻率與位移響應(Case3).....	86
圖 6-17b	激振頻率與位移響應(Case3).....	86
圖 6-18	碳纖積層圓板與三明治圓板之聲壓趨勢圖.....	87
圖 6-19a	碳纖積層圓板與三明治圓板之聲壓趨勢圖.....	87
圖 6-19b	碳纖積層圓板與三明治圓板之聲壓趨勢圖.....	88
圖 6-20	利用 ANSYS 模擬分析彈性支撐強度與位移響應之關係.....	88
圖 6-21	利用 ANSYS 模擬分析彈性支撐強度對圓形三明治振動板之聲壓位準影響.....	89
圖 6-22	非封閉半圓形彈性支撐.....	89

圖 6-23	具非封閉彈性支撐三明治圓板.....	90
圖 6-24a	具非封閉彈性支撐三明治圓板(Case 4).....	90
圖 6-24b	加上厚紙片之具非封閉彈性支撐三明治圓板(Case 4)...	90
圖 6-25	具非封閉彈性支撐 [0/90(c)/0] 三明治圓板 (Case 4) 之 ANSYS 模擬分析和 MLSSA 聲壓實驗比較.....	91
圖 6-26	封閉與非封閉彈性支撐 [0/90(c)/0] 三明治板的 MLSSA 聲壓位準實驗.....	91
圖 6-27	不具彈波之封閉與非封閉彈性支撐 [0/90(c)/0] 三明治圓板 ANSYS 聲壓模擬比較.....	92
圖 6-28	不具彈波之封閉與非封閉彈性支撐 [0/90(c)/0] 三明治圓板 ANSYS 位移響應比較.....	92
圖 6-29	具激振器彈波封閉懸邊與不具激振器彈波封閉懸邊 [0/90(c)/0] 三明治板的 MLSSA 聲壓位準實驗比較.....	93
圖 6-30	去除激振器彈波之封閉彈性支撐 [0/90(c)/0] 三明治圓板 (Case 5) 之 ANSYS 模擬分析和 MLSSA 聲壓實驗比較...	93
圖 6-31	無彈波激振器之 MLSSA 參數量測.....	94
圖 6-32	具彈波激振器之 MLSSA 參數量測.....	94



# 第一章 緒論

## 1.1 前言

複合材料為兩種或兩種以上的材料，利用協同加工法結合在一起，以擷取原材料的特性和優點，讓原材料能發揮本身的優異性並滿足實際需要。複合材料分纖維強化(Fiber-reinforced)、微粒強化(Particle-reinforced)兩種，其中以纖維強化的複合材料應用較廣，此種材料在纖維方向具有高勁度、高強度的特點，可以依照需求加以設計補強來達到實際要求。複合材料具有質量輕、強度高、設計多變性等優於傳統金屬的特性，目前已被廣泛地應用在航太、造船、飛彈、運動器材等對於重量較敏感以及需要有高強度需求的結構上。近年來由於顯示器、電視等商品逐漸平面化的影響下，許多揚聲器為因應平面化的需求而發展出平面振動板，而複合材料在強度、重量上都符合振動板的需求。本文的重點即在探討具彈性支撐複合材料圓板的振動及聲傳。

各種結構都有其自然頻率，當外力之激振頻率接近結構物自然頻率時，即發生共振(resonance)，此時結構本身會產生大振盪。對揚聲器而言，激振頻率達到振動板的第一個自然頻率即  $f_0$  值時，揚聲器會因為振動板的大變形而開始產生較高的聲壓位準值，在此之後振動板才会有較良好的聲壓位準值，所以振動板之  $f_0$  值亦可視為揚聲器的有效頻寬的起點。

揚聲器之功能主要在將美好的聲音再生、傳達出來。人耳之聽覺頻寬大約為 20 ~ 20k Hz、聲壓感覺範圍為 0 ~ 120 dB 之間，如果揚聲器所發出之聲壓在此頻寬下都可維持一定值、聲壓高低起伏不大，這就是一個很好之揚聲器。

本文主要目的在探討揚聲器之振動板對聲壓位準的影響。討論重點將放在疊層角度、疊層方式、位移響應、重量、彈性支撐對複合材料做成之振動板聲壓位準的影響。

## 1.2 文獻回顧

本文主要在探討具彈性支撐複合材料圓板振動和聲傳研究，在平板振動方面，由古典板理論(Classical Plate Theory, 簡稱 CPT)所改寫的古典積層板理論(Classical Laminated Plate Theory)為理論基礎進行振動模態分析。古典積層板理論適合用在薄平板之模擬，所以用在分析圓形複材薄平板的振動行為已經可以得到很不錯的效果，可以達到寬厚比 $>60$ 。若分析對象變成複材積層厚板或三明治板的時候，板子橫截面的剪變形不宜忽略，故可使用一階剪變形理論(First-Order Shear Deformation Theory, 簡稱 FSDT)或高階剪變形理論(High-Order Shear Deformation Theories, 簡稱 HSDTs)進行振動與力學分析。對三明治板而言，用 Kant-Manjunatha theory 或 Pandya-Kant theory 來模擬的話，可得比較好的結果[1]；對厚板而言，用 Kant-Manjunatha theory 做為理論基礎的話，可獲得較正確的解。由於本文所使用的複材積層板之寬厚比不小於 60，所以仍可使用古典積層板理論或是 FSDT 來進行振動板振動行為分析。

在振動方面，有關振動模態分析與多自由度振動響應系統之運動方程式，參考書籍作者為 W. T. Thomson[2]、王栢村[3]等；參考論文有陳正義[4]、詹東恩[5]、卓永剛[6]。

在聲壓計算方面，由 Morse[7]文中了解聲壓理論，並由 Takeo[8]中導出的聲壓方程式來探討圓形平面振動板的聲壓曲線特性。

## 1.3 研究方法

本文主要目的在於圓形振動板之聲射研究上，我們將重點放在探討聲壓位準和振動板結構有何關係，振動板之振形為何會影響聲壓位準的表現，及彈性支撐對聲壓位準扮演何種角色等。

在理論部分，本文改寫 Yoshihiro[9]中以古典積層板理論為基礎之數值方法來模擬具彈性支撐複合材料圓板的振動行為，並將其寫成 Fortran 數值

分析程式。首先驗證 ANSYS 模擬之正確性，與 Leonard[10]中的理論值做比較，並確定其為正確的。在確定 ANSYS 模擬的正確性後，進而探討 Fortran 數值分析的收斂性和適用範圍。

使用 ANSYS 和 Fortran 程式來模擬圓板實際之振動行為，並將所得之結果與實驗結果作比對。藉由 Fortran 和 ANSYS 進行簡諧激振響應分析，計算不同激振頻率下振動板各點之振幅及相位角。將計算所得之分析值與 PULSE 和 MLSSA 所測得之實驗結果相比較，以確定數值分析之正確性。

在實驗量測方面，首先利用 PULSE 來量測  $f_0$  及其聲壓位準值，觀察聲壓趨勢、自然頻率是否和理論結果相吻合，以驗證古典積層板理論適用性。並藉由實驗結果，探討振動板之形狀、位移響應、重量、疊層等對聲壓位準的影響，以便設計擁有更好聲壓趨勢之複合材料振動板。



## 第二章 複合材料積層板理論與分析

### 2.1 基本假設

本文之數值方法以古典積層板理論(Classical Laminated Plate Theory)和一階剪變形理論(First Order Shear Deformation Theory)為基礎來分析模擬複合材料積層板的振動行為。其中古典積層板理論基本假設如下：

1. 板的厚度遠小於板的長、寬。
2. 撓度(Deflection)很小，即  $w$  很小  $\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} \cong -\theta_x, \frac{\partial w}{\partial y} \cong -\theta_y$ 。
3. 變形後，橫截面仍保持平面且應力延厚度方向線性變化。
4. 橫截面垂直於中心面。

其位移場之假設為：

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

忽略 in-plane displacement 即  $u_0 = v_0 = 0$ ，其位移場可化簡為：

$$\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

其應變場如下：

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \varepsilon_x^0 + z \kappa_x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \varepsilon_y^0 + z \kappa_y \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}^0 + z \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中  $u$ 、 $v$ 、 $w$  分別代表積層板上任一點沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的位移量， $u_0$ 、 $v_0$ 、

$w_0$  分別代表積層板中間層(mid-plane)上任一點沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的位移量。

一階剪變形理論之基本假設和古典積層板理論相似，其相異之處為橫截面不需垂直於 mid-plane，位移場以下式表示：

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ v &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ w &= w_0(x, y) = w(x, y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

應變場與位移之關係如下：

$$[\varepsilon] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

## 2.2 應力與應變關係

複合積層板是由很多層薄片(Lamina)所疊合而成的，而每一層之纖維方向與積層板之  $x$  軸夾角為  $\theta_n$ 。如圖(2-1)所示，則每一層之古典積層板之應力與應變可以化為如下的方程式：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^n = [\bar{Q}]^n \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^n \quad (2.6)$$

其中

$$[\bar{Q}]^n = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^n & \bar{Q}_{12}^n & \bar{Q}_{16}^n \\ \bar{Q}_{12}^n & \bar{Q}_{22}^n & \bar{Q}_{26}^n \\ \bar{Q}_{16}^n & \bar{Q}_{26}^n & \bar{Q}_{66}^n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

而

$$[\bar{Q}]^n = [T]^{-1} [Q]^n [T] \quad (2.8)$$



$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$c = \cos(\theta_n) \quad s = \sin(\theta_n)$$

將上式代入(2.8)式，可以將式子化為：

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^n &= Q_{11}^n c^4 + 2(Q_{12}^n + 2Q_{66}^n) c^2 s^2 + Q_{22}^n s^4 \\ \bar{Q}_{12}^n &= (Q_{11}^n + Q_{22}^n - 4Q_{66}^n) c^2 s^2 + Q_{12}^n (c^4 + s^4) \\ \bar{Q}_{22}^n &= Q_{11}^n s^4 + 2(Q_{12}^n + 2Q_{66}^n) c^2 s^2 + Q_{22}^n c^4 \\ \bar{Q}_{16}^n &= (Q_{11}^n - Q_{12}^n - 2Q_{66}^n) c^3 s + (Q_{12}^n - Q_{22}^n + 2Q_{66}^n) c s^3 \\ \bar{Q}_{26}^n &= (Q_{11}^n - Q_{12}^n - 2Q_{66}^n) c s^3 + (Q_{12}^n - Q_{22}^n + 2Q_{66}^n) c^3 s \\ \bar{Q}_{66}^n &= (Q_{11}^n + Q_{22}^n - 2Q_{12}^n - 2Q_{66}^n) c^2 s^2 + Q_{66}^n (c^4 + s^4) \end{aligned} \quad (2.10)$$

上式中，

$$\begin{aligned} Q_{11}^n &= \frac{E_1^n}{(1 - v_{12}^n v_{21}^n)} & Q_{12}^n &= \frac{E_2^n v_{12}^n}{(1 - v_{12}^n v_{21}^n)} \\ Q_{22}^n &= \frac{E_2^n}{(1 - v_{12}^n v_{21}^n)} & Q_{66}^n &= G_{12}^n \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中  $E_1^n$  表示第  $n$  層纖維方向的揚氏模數， $E_2^n$  表示第  $n$  層基材方向的揚氏模數， $v_{12}^n$  表示第  $n$  層沿 1 方向施力在 2 方向變形量與 1 方向變形量之比值， $v_{21}^n$  表示第  $n$  層沿 2 方向施力在 1 方向變形量與 2 方向變形量之比值，而  $G_{12}^n$  表示第  $n$  層之剪力模數。

而一階剪變形理論之應力與應變關係，可以下式表示：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^n = [\bar{Q}]^n \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

其中  $[\bar{Q}]^n$  為：

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^n &= Q_{11}^n c^4 + 2(Q_{12}^n + 2Q_{66}^n) c^2 s^2 + Q_{22}^n s^4 \\ \bar{Q}_{12}^n &= (Q_{11}^n + Q_{22}^n - 4Q_{66}^n) c^2 s^2 + Q_{12}^n (c^4 + s^4) \\ \bar{Q}_{13}^n &= Q_{13}^n c^2 + Q_{23}^n s^2 \\ \bar{Q}_{22}^n &= Q_{11}^n s^4 + 2(Q_{12}^n + 2Q_{66}^n) c^2 s^2 + Q_{22}^n c^4 \\ \bar{Q}_{23}^n &= Q_{23}^n c^2 + Q_{13}^n s^2 \\ \bar{Q}_{33}^n &= Q_{33}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{16}^n &= (Q_{11}^n - Q_{12}^n - 2Q_{66}^n)c^3s + (Q_{12}^n - Q_{22}^n + 2Q_{66}^n)cs^3 \\
\bar{Q}_{26}^n &= (Q_{11}^n - Q_{12}^n - 2Q_{66}^n)cs^3 + (Q_{12}^n - Q_{22}^n + 2Q_{66}^n)c^3s \\
\bar{Q}_{36}^n &= (Q_{13}^n - Q_{23}^n)cs \\
\bar{Q}_{66}^n &= (Q_{11}^n + Q_{22}^n - 2Q_{12}^n - 2Q_{66}^n)c^2s^2 + Q_{66}^n(c^4 + s^4) \\
\bar{Q}_{44}^n &= Q_{44}^nc^2 + Q_{55}^ns^2 \\
\bar{Q}_{55}^n &= Q_{55}^nc^2 + Q_{44}^ns^2 \\
\bar{Q}_{45}^n &= (Q_{55}^n - Q_{44}^n)cs \\
c &= \cos\theta_n \\
s &= \sin\theta_n
\end{aligned} \tag{2.13}$$

而 $[Q]$ 表示為下式：

$$\begin{aligned}
Q_{11}^n &= \frac{1 - \nu_{23}^n \nu_{32}^n}{E_2^n E_3^n \Delta} \\
Q_{12}^n &= \frac{\nu_{21}^n + \nu_{31}^n \nu_{23}^n}{E_2^n E_3^n \Delta} = \frac{\nu_{12}^n + \nu_{32}^n \nu_{13}^n}{E_1^n E_3^n \Delta} \\
Q_{13}^n &= \frac{\nu_{31}^n + \nu_{21}^n \nu_{32}^n}{E_2^n E_3^n \Delta} = \frac{\nu_{13}^n + \nu_{12}^n \nu_{23}^n}{E_1^n E_2^n \Delta} \\
Q_{22}^n &= \frac{1 - \nu_{13}^n \nu_{31}^n}{E_1^n E_3^n \Delta} \\
Q_{23}^n &= \frac{\nu_{23}^n + \nu_{12}^n \nu_{31}^n}{E_1^n E_3^n \Delta} = \frac{\nu_{23}^n + \nu_{21}^n \nu_{13}^n}{E_1^n E_3^n \Delta} \\
Q_{33}^n &= \frac{1 - \nu_{12}^n \nu_{21}^n}{E_1^n E_2^n \Delta} \\
Q_{44}^n &= G_{23}^n \quad Q_{55}^n = G_{13}^n \quad Q_{66}^n = G_{12}^n \\
\Delta &= \frac{1 - \nu_{12}^n \nu_{21}^n - \nu_{13}^n \nu_{31}^n - \nu_{23}^n \nu_{32}^n - 2\nu_{21}^n \nu_{32}^n \nu_{13}^n}{E_1^n E_2^n E_3^n}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

### 2.3 構成方程式(governing equation)

複合積層板所用之理論與一般平板理論有所差異，其差異性在於複合積層板必須考慮到每一層薄片所受的應力，然後再將它們累加起來成合應力和合應力矩(Resultant Force and Resultant Moment)，表示為：

$$N_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_n dz \qquad M_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_n dz \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]^n \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{Bmatrix} \right) dz \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]^n dz \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{Bmatrix} + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]^n z dz \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$[A] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]^n dz = \sum_{n=1}^N [\bar{Q}]^n z_n \quad (2.17)$$

$$[B] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]^n z dz = \frac{I}{2} \sum_{n=1}^N [\bar{Q}]^n (z_n^2 - z_{n-1}^2) \quad (2.18)$$

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

同理

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

$$[D] = \frac{I}{3} \sum_{n=1}^N [\bar{Q}]^n (z_n^3 - z_{n-1}^3) \quad (2.21)$$

其中  $z_n$  為第  $n$  層薄板之表面到中心面的距離， $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[D]$  分別為延伸、耦合、彎曲勁度矩陣 (Extension stiffness, Extension-Bending coupling, Bending stiffness Matrix)。

## 2.4 複材積層圓板振動分析

本文中用來模擬複材積層圓板之理論分別為古典積層板理論和一階剪變形理論，並且利用 Ritz method 所寫成之數值計算程式對具彈性支撐之圓形複合材料板做振動分析。如圖(2-2)所示，有一具彈性支撐複合圓板半徑為  $a$  公尺。此複合板由  $N$  層碳纖所組成，其與  $x$  軸方向夾角為  $\theta^n$ 。

以古典積層板理論分析，此系統所具有之最大應變能為  $V_{\max}$ ，可以下式表示：

$$V_{\max} = V_p + V_t + V_r \quad (2.22)$$

$$V_p = \frac{I}{2} \iint_A \{W\}^T [D] \{W\} dA$$

$$V_t = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} k_t W^2 d\theta$$

$$V_r = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} k_r \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 d\theta \quad (2.23)$$

其中  $V_p$ 、 $V_t$ 、 $V_r$  各代表圓板之應變能、圓板邊界上彈性支撐之 translational 和 rotational 所具之應變能。 $k_t$ 、 $k_r$  各代表線性剛性(translational stiffness)和旋轉剛性(rotational stiffness)。而  $W$  表示為下式：

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 W}{2\partial x \partial y} \end{Bmatrix}^T \quad (2.24)$$

系統最大動能為  $T_{\max}$ ，可表示為下式：

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 h \iint_A W^2 dA \quad (2.25)$$

將(2.22)，(2.25)無因次化，化成下次

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \frac{D_0}{a^2 \alpha} \left\{ \iint_A \{W\}^T [D] \{W\} d\xi d\eta + \frac{a^3 \alpha}{D_0} \int_0^{2\pi} k_t W^2 d\theta + \frac{a\alpha}{D_0} \int_0^{2\pi} k_r \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 d\theta \right\} \quad (2.26)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \frac{D_0}{a^2 \alpha} \lambda^2 \iint_A W^2 d\xi d\eta \quad (2.27)$$

將 shape function 代入，transverse displacements 將化為下式：

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=0} \sum_{n=0} C_{mn} \xi^m \eta^n \quad (2.28)$$

其中  $C_{mn}$  為待定係數，而其他分別定義如下：

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \eta = \frac{y}{b} \quad \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\lambda = \left( \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad D_0 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$$

使用 Ritz method

$$\frac{\partial (T_{\max} - V_{\max})}{\partial C_{mn}} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.29)$$

$$([K] - \lambda^2 [M]) \{C\} = \{0\} \quad (2.30)$$

求解上式，可得  $\lambda$  即為無因次之自然頻率。

若以一階剪變形理論分析，此系統之最大應變形  $V_{\max}$ ：

$$V_{\max} = V_p + V_t + V_r \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{1}{2} \int_V [\sigma]^T [\varepsilon] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon]^T [\bar{Q}] [\varepsilon] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_A [(A_{44} \varepsilon_4^2 + A_{55} \varepsilon_5^2 + 2A_{45} \varepsilon_4 \varepsilon_5) + (D_{11} \kappa_1^2 + D_{22} \kappa_2^2 + D_{66} \kappa_6^2) \\ &\quad + 2(D_{12} \kappa_1 \kappa_2 + D_{16} \kappa_1 \kappa_6 + D_{26} \kappa_2 \kappa_6)] dA \end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon_4 = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \varepsilon_5 = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.32)$$

$$\kappa_1 = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad \kappa_2 = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad \kappa_6 = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}$$

$$V_t = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} k_t W^2 d\theta \quad (2.33)$$

$$V_r = \frac{1}{2} \int_S M_n \phi dS = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} k_r \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 d\theta \quad (2.34)$$

而系統最大動能為  $T_{\max}$ ：

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{1}{2} \rho \int_V V^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \rho \lambda^2 \int_V (z^2 \theta_x^2 + z^2 \theta_y^2 + w^2) dV \\ &= \frac{\rho h \lambda^2}{2} \int_A [(\theta_x^2 + \theta_y^2) \frac{h^2}{12} + w^2] dA \end{aligned} \quad (2.35)$$

總位勢能  $\pi = V_p + V_T + V_R - T_{\max}$ ，代入 shape functions

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= \sum \sum C_{w_{ij}} \xi^i \eta^j \\ \theta_x(\xi, \eta) &= \sum \sum C_{\theta_{xkl}} \xi^k \eta^l \\ \theta_y(\xi, \eta) &= \sum \sum C_{\theta_{ymn}} \xi^m \eta^n \end{aligned} \quad (2.36)$$

使用 Ritz method

$$\frac{\partial(\pi)}{\partial C_{w_{ij}}} = 0 \quad \frac{\partial(\pi)}{\partial C_{\theta_{xkl}}} = 0 \quad \frac{\partial(\pi)}{\partial C_{\theta_{ymn}}} = 0 \quad (2.37)$$

其中  $i, j, k, l, m, n = 0, 1, 2, \dots, I, J, K, L, M, N$

可求得系統的 governing equations

$$([K] - \lambda^2 [M])\{C\} = \{0\} \quad (2.38)$$

求解上式，可得  $\lambda$  即為無因次之自然頻率。

## 2.5 複材積層板之簡諧激振響應

一般探討結構系統的基本模態，係假設成無阻尼狀態下的自由振動模態，如果要考慮有阻尼之狀態下的自由振動模態，只要將具阻尼之彈性係數( $k_i^*$ 、 $k_r^*$ 為複數)代入方程式中即可

$$\begin{aligned} k_i^* &= k_i(1 + i\eta_i) \\ k_r^* &= k_r(1 + i\eta_r) \end{aligned} \quad (2.39)$$

其中 $\eta_i$ 和 $\eta_r$ 為線性剛性和旋轉剛性之 loss factors。

假設有一作用力施加在一積層板上時，作用力所作之功為：

$$W_f = \sum_k P_k W \quad (2.40)$$

在自然振動下：

$$([K] - \lambda^2[M])\{C\} = \{0\} \quad (2.41)$$

$$\lambda = \left( \frac{\rho h \omega a^4}{D_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.42)$$

$$\omega = \omega_i^2(1 + i\eta_i) \quad (2.43)$$

$\omega_i$ 是第*i*個自然頻率，而 $\eta_i$ 為第*i*個模態下之 damping loss factor。

在外力激振下：

$$\begin{aligned} ([K] - \lambda^2[M])\{C\} &= \{F\} \\ \{F\} &= \sum_k \frac{2a^2\alpha}{D_0} P_k \xi_k \eta_k \end{aligned} \quad (2.44)$$

假設此作用力以角頻率 $\Omega$ 對板子做簡諧激振的話，

$$P_i(t) = P_i e^{i\Omega t} \quad (2.45)$$

而運動方程式可以寫成

$$M_i^* \ddot{u}_i + K_i^* u_i = F_i^* \quad (2.46)$$

$M_i^*, K_i^*, F_i^*$  為在模態  $i$  之廣義質量、勁度、力矩陣，可表示如下：

$$\begin{aligned} [M_i^*] &= [\Psi]^T [M] [\Psi] \\ [K_i^*] &= [\Psi]^T [K] [\Psi] \\ [F_i^*] &= [\Psi]^T [F] \\ \{C\} &= [\Psi] \{u_i\} \end{aligned} \quad \text{where } [\Psi] = [\dots C_i \dots] \quad (2.47)$$

$$u_i(\Omega) = \frac{F_i^*}{M_i^* (\omega_i^2 - \Omega^2)} \quad (2.48)$$

代入  $\{C\}$ ，又將之代入(2.22)式中即可得在激振頻率  $\Omega$  下，振動板上任一點的位移。



### 第三章 複材積層板有限元素分析

#### 3-1 虛功法在有限元素模型中之應用

我們將平板的虛功方程式以  $n$  個元素的組合來表示：

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \int_{V_e} \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV + \frac{1}{2} \delta \int_{V_e} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_{A_e} \delta u_i F_i dA \right\} = 0 \quad (3.1)$$

其中，每個節點都有五個自由度，我們以等參單元的形狀函數(Shape Function)來表示位移場：

$$\begin{aligned} u_0 &= N_i u_i & v_0 &= N_i v_i & w &= N_i w_i \\ \theta_x &= N_i \theta_{xi} & \theta_y &= N_i \theta_{yi} \end{aligned} \quad (3.2)$$

對各元素來說，其位移可用下式來表示：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & zN_i & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & zN_i \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

也可寫成：

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^m N_i \underline{I} \nabla_i \quad (3.4)$$

其中  $m$  是每一個元素中之節點數， $N_i$  是元素之形狀函數， $\underline{I}$  是一個  $5 \times 5$  的單位矩陣， $\nabla_i$  是節點位移， $\nabla_i = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}^T$ 。

對(3.2)式的導數  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  可得：

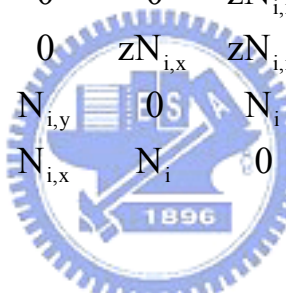
$$\begin{aligned} u_{0,x} &= N_{i,x} u_i & u_{0,y} &= N_{i,y} u_i \\ v_{0,x} &= N_{i,x} v_i & v_{0,y} &= N_{i,y} v_i \\ w_{,x} &= N_{i,x} w_i & w_{,y} &= N_{i,y} w_i \\ \theta_{x,x} &= N_{i,x} \theta_{xi} & \theta_{x,y} &= N_{i,y} \theta_{xi} \\ \theta_{y,x} &= N_{i,x} \theta_{yi} & \theta_{y,y} &= N_{i,y} \theta_{yi} \end{aligned} \quad (3.5)$$



將(3.5)式代入應變場：

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = u_{0,x} + z\theta_{x,x} = \varepsilon_1^0 + z\kappa_1^0 \\
 \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} = v_{0,y} + z\theta_{y,y} = \varepsilon_2^0 + z\kappa_2^0 \\
 \varepsilon_4 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = w_{,y} + \theta_{,y} \\
 \varepsilon_5 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = w_{,x} + \theta_{,x} \\
 \varepsilon_6 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (u_{0,y} + v_{0,x}) + z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) = \varepsilon_6^0 + z\kappa_6^0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

可得應變—位移關係如下：

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & zN_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & zN_{i,x} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & zN_{i,x} & zN_{i,x} \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_i \\ 0 & 0 & N_{i,x} & N_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$


可寫成：

$$[\varepsilon] = [B][\underline{\nabla}_i] \tag{3.8}$$

其中

$$[B] = \partial[N_i]$$

由有限元素法得知元素勁度矩陣為：

$$[K_e] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \tag{3.9}$$

其中[E]為材料特性矩陣。

再由(3.1)及(3.4)式，可用下列各式表示任意元素之各項虛功：

$$\int_{V_e} \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV = (\delta \underline{\nabla}^e)^T \underline{M}^e \underline{\ddot{\nabla}}^e \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{2} \delta \int_{V_e} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dV = (\delta \underline{\nabla}^e)^T \underline{K}_L^e \underline{\nabla}^e \tag{3.11}$$

$$\int_{A_e} \delta u_i F_i dA = (\delta \underline{\nabla}^e)^T \underline{F}^e \quad (3.12)$$

其中  $\underline{\nabla}^e = \{\underline{\nabla}_1, \underline{\nabla}_2, \dots, \underline{\nabla}_q\}$ ， $\underline{M}^e$  是元素質量矩陣(Element Mass Matrix)， $\underline{K}_L^e$  是元素勁度矩陣(Element Bending Stiffness Matrix)， $\underline{F}^e$  是元素之點負載向量(Vector of Element Nodal Force)，最後將所有元素矩陣組合起來，則平板之有限元素分析模型的平衡方程式如下：

$$\underline{M} \ddot{\underline{\nabla}} + \underline{K}_L \underline{\nabla} = \underline{F} \quad (3.13)$$

其中  $\underline{M}$ 、 $\underline{K}_L$ 、 $\underline{F}$ 、 $\underline{\nabla}$  分別代表廣義的質量矩陣、勁度矩陣、載荷向量和位移向量。

### 3-2 特徵值與特徵向量

假設結構系統為無阻尼之自由振動模態，則其運動方程式可寫為：

$$[\underline{M}]\{\ddot{\underline{X}}\} + [\underline{K}]\{\underline{X}\} = 0 \quad (3.14)$$

其中  $[\underline{M}]$  為質量矩陣； $[\underline{K}]$  為勁性矩陣； $\{\underline{X}\}$  為位移向量；而對任何線性結構系統(該系統之受力與變形關係為線性)而言，上式中之  $[\underline{M}]$ 、 $[\underline{K}]$  均為實數對稱(Real Symmetric)矩陣。

求解任何線性結構系統時，通常假設在結構系統中，各不同部位之振動為簡諧運動，且其振頻與相位均為相同，即

$$\{\underline{X}\} = \{\underline{\Phi}\} e^{i\omega t} \quad (3.15)$$

$$\{\ddot{\underline{X}}\} = -\omega^2 \{\underline{X}\} = -\lambda \{\underline{X}\} \quad (3.16)$$

其中  $\{\underline{\Phi}\}$  為實向量； $\omega$  為簡諧運動之角頻率； $\lambda = \omega^2$ 。

代回(3.14)可得

$$([\underline{K}] - \omega^2 [\underline{M}])\{\underline{\Phi}\} e^{i\omega t} = \{0\} \quad (3.17)$$

上式中  $\{\underline{X}\}$  有非零解之條件為  $[\underline{K}] - \omega^2 [\underline{M}]$  為奇異性(Singular)，亦即

$$\det[\underline{K}] - \omega^2 [\underline{M}] = 0 \quad (3.18)$$

上式即為此系統之特徵方程， $\omega_r$  為系統之第  $r$  個自然頻率，而相對應之  $\{\underline{\Phi}\}_r$  為特徵向量，寫成矩陣形式，即為

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \omega_r^2 & & \\ & & \ddots & \end{bmatrix}, \quad [\underline{\Psi}] = [\{\underline{\Phi}\}_1 \quad \dots \quad \{\underline{\Phi}\}_r \quad \dots]$$

### 3-3 具阻尼結構系統之簡諧激振響應

假設此系統具有比例阻尼(Proportional Damping)

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3.18)$$

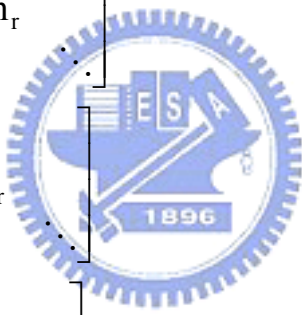
$\alpha$  和  $\beta$  以下式表示：

$$\xi_i = \alpha / (2\Omega_i) + \beta (\Omega_i / 2) \quad (3.19)$$

其中  $\xi_i$  為第  $i$  個模態之阻尼比，而  $\Omega_i$  為第  $i$  個模態之角自然頻率。  
則系統之運動方程式為

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \sin \omega t \quad (3.20)$$

根據 3-2 節，將  $[M]$ 、 $[K]$ 、 $[C]$  作對角化處理，即

$$\begin{aligned} [\Psi]^T [M] [\Psi] &= \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & m_r & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \\ [\Psi]^T [K] [\Psi] &= \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & k_r & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \\ [\Psi]^T [C] [\Psi] &= \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & c_r & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$


所以不同阻尼比相對於不同頻率計算出  $\alpha$  和  $\beta$  如 3-1 圖。並令  $\{x\} = [\Psi]\{X\}$ ，因此(3.20)可改寫為

$$[m_r]\{\ddot{x}\} + [c_r]\{\dot{x}\} + [k_r]\{x\} = [\Psi]^T \{F\} \sin \omega t \quad (3.22)$$

可得到位移響應，

$$x_r = \frac{F_r}{k_r} \left( \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2c_r\beta)^2} + j \frac{2c_r\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2c_r\beta)^2} \right) \quad (3.23)$$

其中  $\beta = \omega / \omega_r$ 。

## 第四章 聲壓計算及應用

### 4.1 聲壓波動方程式

對平面波而言，一維波動方程式為：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

其中， $c$  為聲音之速度，在室溫  $24^\circ$  時， $c=343$  m/s。

利用一維波動問題 D'Alembert 解，可求得：

$$p(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

$f_1, f_2$  為任意函數，對於諧波聲場，可直接求解：

$$\frac{d^2 \tilde{p}}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{p} = 0 \quad (4.2)$$

令  $k = \omega / c$ ，為波數(wave number)，可求得：

$$\tilde{p}(x) = \tilde{A}e^{-jkx} + \tilde{B}e^{jkx} \quad (4.3)$$

還原成時間域的表示法：

$$\tilde{p}(x) = \tilde{A}e^{-j(\omega t - kx)} + \tilde{B}e^{j(\omega t - kx)} \quad (4.4)$$

其中  $\tilde{A}, \tilde{B}$  為未定複數，對於點聲源而言，3-D 波動方程式在球面座標

(Spherical coordinate) 為：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

因為點聲源是一個完全對稱的聲源，所以我們可以預期它所產生的聲場不

會有方向性，所以式(4.5)可化簡成：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

其中  $r$  為點聲源距量測點的距離

上式可改寫成

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp) = \frac{1}{r} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rp) \quad (4.7)$$

故

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} \quad (4.8)$$

觀察(4.8)式的型式和前面的一維波動方程式式一樣的，其解為：

$$rp = f_1(r-ct) + f_2(r+ct)$$

所以

$$p(r,t) = \frac{1}{r} f_1(r-ct) + \frac{1}{r} f_2(r+ct) \quad (4.9)$$

由於一個點聲源只會發出外傳波(Outgoing wave)，所以

$$p(r,t) = \frac{1}{r} f_1(r-ct) \quad (4.10)$$

對於簡諧球面波(Harmonic spherical wave)而言

$$p(r,t) = \frac{\tilde{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (4.11)$$

對一個微小振動板  $\delta s$  而言，距離振動板  $r$  的聲壓可表示為下式：

$$p(r,t) = \left( \frac{j\omega \rho_{air} |u_d| \delta s}{2\pi r} \right) e^{j(\omega t - kr)} \quad (4.12)$$

對一塊振動板而言，可由 Rayleigh's first integral 計算振動板整體聲壓表現，表示為下式：

$$p(r,t) = \frac{j\omega\rho_{air}}{2\pi} e^{j\omega t} \int_s \frac{|u_d(r,t)| e^{-jkr}}{r} dS \quad (4.13)$$

設  $A_d(r,t) = Ae^{i(\omega t - kr)}$

則  $u_d(r,t) = i\omega A e^{i(\omega t - kr)} = i\omega A_d(r,t)$

將  $u_d(r,t)$  代入上式(4.13)：

$$p(r,t) = \frac{-\omega^2 \rho_{air}}{2\pi} e^{j\omega t} \int_s \frac{A e^{-jkr}}{r} dS \quad (4.14)$$

$$p(r,t) = \frac{-\omega^2 \rho_{air}}{2\pi} \sum_i A e^{j(\omega t - kr)} \frac{\Delta S}{r_i} \quad (4.15)$$

$$p(r,t) = \frac{-\omega^2 \rho_{air}}{2\pi} \sum_i (A \cos(\omega t - kr_i)) \frac{\Delta S}{r_i} \quad (4.16)$$

假設聲源的力是簡諧激振的模式，且其簡諧激振響應的解採用穩態解。考慮聲音接收處(Microphone)是位於垂直中心點  $r$  處，接收時間考慮使用的頻率區間。則：

$$P = \left( \frac{-\rho_{air} \omega^2}{2\pi} \right) \sum_i (A(x_i, y_j) \times \cos(\theta_i - kr_i)) \frac{\Delta S}{r_i} \quad (4.17)$$

其中  $p(r,t)$  為量測點與振動板距離為  $r$  處的聲壓， $\rho_{air} = 1.1614 \text{kg/m}^3$  為空氣密度， $u_d(r,t)$  為振動板表面元素之速度大小， $A$  為振動板表面元素之振幅大小， $r_i$  為量測點與振動板表面元素之距離， $j = \sqrt{-1}$ ， $k$  為波數( $\omega/c$ )， $\theta_i$  為板子當時之相角(Phase angle)。

在實務上，量測聲音用的尺度為對數尺度(log scale)，單位為分貝(decibel)，接用對數尺度的主要原因在於聲音的動態範圍非常大，同時人耳對音量的感覺亦比較接近對數尺度。

聲壓位準(Sound Pressure Level)

$$\text{SPL} = 20 \log\left(\frac{|P_{\text{rms}}|}{P_{\text{ref}}}\right) \text{ (dB)} \quad (4.18)$$

$P_{\text{rms}}$  為量測點聲壓之均方根值為：

$$P_{\text{rms}} = \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |p(r,t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (4.19)$$

聲壓參考值  $P_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa}$

在量測聲壓的儀器上看到的聲壓曲線即為頻率響應曲線，縱軸為(dB)，橫軸為激振頻率。



## 4.2 聲壓曲線之繪製

聲壓方程式如(4.17)所示，為

$$P(\text{frequency}) = \left( \frac{-\rho_{\text{air}} \omega^2}{2\pi} \right) \sum_i (A(x_i, y_j) \times \cos(\theta_i - kr_i)) \frac{\Delta S}{r_i} \quad (4.20)$$

其中  $A(x_i, y_j)$ 、 $\theta_i$ 、 $r_i$  的結果可由有限單元分析軟體 ANSYS 進行簡諧激振響應分析得到。

本文實驗的架設是先將一圓形複材板與半圓形懸邊之內徑黏合，再以雙面膠將懸邊的另一邊固定於壓克力之框架上，並在複材板的下方放置激

振器，激振器施力的情況就像是一個簡諧的力函數。

然後以ANSYS建立模型(如圖 4-1)模擬實際受力情況，以Shell91 及 Combin14 元素建立複材板及彈性支承模型，並輸入板的疊層層數、疊層角度、厚度及複材板材料常數和彈性支撐之彈簧常數等，再將複材振動板板切割成面積大小為  $2\text{mm}^2$  的小面積元素，並在圓板外徑和激振器波彈上建立彈性支撐，在板中央施與環狀力模擬激振器實際施力狀況。在整個模型建立完成後，進行簡諧激振響應分析(Harmonic Analysis)。

當 ANSYS 簡諧激振響應分析完後，輸出各結點距量測點之距離及各激振頻率下結點之位移響應(Displacement response)和相位角(Phase angle)等資料。再將資料代入以式(4.20)寫成之 Fortran 程式計算振動板之聲壓位準值，將結果以 Origin 統計繪圖軟體繪出聲壓位準曲線。



## 第五章 圓形複合材料板製作與實驗程序

### 5.1 圓形複合材料積層板之製作

- (1)首先由冷凍庫中取出複合材料預浸材，並在室溫下放置 12~14 小時。
- (2)將預浸材按需要裁剪、堆疊。
- (3)在鐵板上依序放置輔助材及複合材料(如圖 5-1)，抽真空，再將複材積層板送上熱壓機(如圖 5-2)，依圖 5-3 所示的加溫時間-溫度關係及溫度-壓力關係來控制複材積層板成型條件。
- (4)等時間一到，關掉熱壓機，讓複材積層圓板在室溫下自然冷卻，待複材圓板冷卻至室溫時，將圓板取出即可。



### 5.2 複合材料三明治圓板之製作

#### (一)面層為非等向性材料之製作：

- (1)首先由冷凍庫中取出複合材料預浸材，並在室溫下放置 12~14 小時。
- (2)裁剪出所需預浸材之大小及角度及所需的輔助材。
- (3)在鐵板上依序放置輔助材及複合材料(如圖 5-1)，抽真空，再將模具送上熱壓機(如圖 5-2)，依加溫時間-溫度關係及溫度-壓力關係(如圖 5-3 所示)來控制複合積層板成型條件。
- (4)等時間一到，關掉熱壓機，讓試片在室溫下自然冷卻，待板子冷卻至

室溫時，再將積層板取出，並將板子裁剪成所需之大小的圓形板，上下共 2 片。

(二)面層與核心層之接合：

- (1)將發泡材或是巴莎木(三明治板中心層之材料)剪裁成實驗所需之尺寸大小。
- (2)將 AB 膠以 A 膠比 B 膠等於 1:0.8 的比例混合調成。
- (3)將 AB 膠均勻塗在積層板上，再精準的粘著在核心層上。
- (4)最後放置陰涼處 18 小時，使其完全密合(如圖 5-4)。

### 5.3 彈性支撐壓縮實驗



(一)設備介紹

使用弘達儀器公司生產之 HI-9102 電腦伺服控制材料試驗機(如圖 5-5)量測彈性支撐之彈簧常數，此儀器可連接電腦將位移及荷重之訊號傳至電腦裡，由電腦輸出檔案。此儀器有二組荷重元(loadcell)，分別為 20kg 及 200kg。在量測彈性支撐之彈簧常數時，最好使用 20kg 之荷重元，會具有較高之精確度。

(二)實驗程序

- (1)利用一壓克力圓板為振動板。
- (2)設定儀器之參數，如實驗方法、機台速度、停止條件等。
- (3)將壓克力圓板黏上彈性支撐放上機台，啟動儀器。

(4)做壓縮實驗。

(5)待機台停止，將電腦輸出之荷重及位移資料重新計算，由繪圖軟體

Origins 繪出力量-位移關係圖，求得彈簧常數。

## 5.4 振動實驗

### (一)B&K 的 PULSE 頻譜分析儀

使用 B&K 科技出廠的頻譜分析系統 PULSE(如圖 5-6)量測自然頻率，

其基本設備有

(1)PULSE 信號收集及處理器

(2)PULSE 軟體

(3)加速規

(4)個人電腦



架設如圖 5-7 所示。

### (二)實驗程序

(1)將試片依照所需的邊界條件放置妥當，再將加速規固定於試片任一量測位置。

(2)設定頻譜分析軟體的環境，如測量頻寬、解析度、激發方式，訊號模擬方法等。

(3)將加速規黏在試片上，使用衝擊槌敲擊試片，經由頻譜分析儀以快速傅利葉轉換(Fast Fourier Transform)算出頻譜區域中的頻譜。

- (4)過濾雜訊，讀取頻譜圖上加速度值較高的振動頻率數值。
- (5)把加速規放置在試片上其他量測點，重複(2)~(4)步驟。
- (6)把量測到的頻率數值平均，即為此試片在此種邊界條件下所具有之自然頻率。

## 5.5 阻尼量測實驗

### (一)B&K 的 PULSE 頻譜分析儀

使用雷射測速儀進行振動板之頻率-響應量測，並藉由 Bandwidth Method 來計算各激振頻率之系統阻尼比。其基本設備有

- (1)PULSE 信號收集及處理器
- (2)PULSE 軟體
- (3)Polytec OFV350 雷射測速儀
- (4)Polytec OFV2500 測速儀控制器
- (5)個人電腦
- (6)組裝好之平面揚聲器



將儀器如圖 5-8 所示般架設。

### (二)實驗程序

- (1)將待測之平面揚聲器放置在一固定台上。
- (2)啟動 PULSE 程式，設定好量測頻寬、解析度、激發方式、訊號模擬方法等。

- (3)先將 OFV2500 控制器接上 OFV350 雷射測速儀對平面揚聲器進行對焦，盡量使控制器接受訊號強度達到最大，再將 PULSE 訊號分析儀之訊號(輸出電壓)經電纜線接到激振器上。
- (4)驅動激振器，並將傳回的訊號分析處理，由於所傳回之訊號為振動板之速度，需要將訊號對時間做一次積分以便得到振動板的位移響應。
- (5)利用 Bandwidth Method 處理振動板之位移響應，以得到某自然頻率之阻尼比。

### (三)Bandwidth Method:

如圖 5-9 所示為一振動板中心之頻率-響應圖，其中 Peak response 為某一共振頻率相對應之振幅， $f_1$  及  $f_2$  為曲線和  $peak/\sqrt{2}$  之交點。利用下式求得共振頻率之阻尼比：

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \quad (5-1)$$

$\xi$  為此共振頻率之阻尼比。

### (四)Rayleigh Damping:

由 Bandwidth Method 得到每一共振頻率相對應之阻尼比後，可從任二組共振頻率響應得到系統阻尼比(如圖 3-1 所示)。利用下式可以求得系統  $\alpha$ -damping 和  $\beta$ -damping：

$$\xi_i = \alpha / (2\Omega_i) + \beta (\Omega_i / 2) \quad (5-2)$$

$\xi_i$ ：第  $i$  個模態之阻尼比

$\Omega_i$ : 第  $i$  個模態之角自然頻率

$\alpha$ : 與質量矩陣有關的阻尼比

$\beta$ : 與勁度矩陣有關的阻尼比

## 5.6 聲壓實驗

平面揚聲器之聲壓量測是利用 MLSSA 聲壓頻譜儀來量測。

### (一) 設備介紹

(1) MLSSA 聲壓頻譜儀

(2) MLSSA 量測專用麥克風

(3) 平面揚聲器



### (二) 實驗程序

(1) 啟動 MLSSA，設定待測物的阻抗、待測物離麥克風的距離、量測頻寬等。

(2) 將揚聲器固定於障板上。

(3) 麥克風放置在離揚聲器中心一公尺外之同一高度腳架上。

(4) 訊號經由 MLSSA 聲壓頻譜儀經 FFT(Fast Fourier Transform)處理，計算出頻率響應之聲壓圖。

## 第六章 理論分析與實驗結果

### 6.1 ANSYS 模型建立與其正確性驗證

由於使用 ANSYS 有限元素分析軟體來進行數值分析與實驗模擬，所以首先要驗證 ANSYS 有限元素分析結果的正確性。當確認 ANSYS 模擬之正確性後，我們才可將其模擬結果拿來和數值模擬方法、振動與聲壓實驗比較，並討論各項變數對聲壓位準的影響。

#### 6.1.1 利用 ANSYS 模擬分析邊界為固定之圓板模態

對於 ANSYS 模態分析之精確性，我們利用 Leonard [10] 中邊界被固定住之等向性(isotropic)圓板自然頻率理論解與 ANSYS 分析結果做比較。式 (6.1) 為圓板在邊界固定時的角頻率：

$$\omega_{mn} = \left(\frac{m}{2} + n\right)^2 \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_E}{\rho}} \quad (6.1)$$

將其改寫成自然頻率  $f_{mn}$ ，表示為下式：


$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \left(\frac{m}{2} + n\right)^2 \frac{\pi}{2a^2} \sqrt{\frac{D_E}{\rho}} \quad \text{for large } n \quad (6.2)$$

圓板材料性質如表 6-1 所示，觀察表 6-2 發現理論解與 ANSYS 模擬分析值相差不到 0.5%，更由圖 6-1 與圖 6-2 中得到理論上的模態和 ANSYS 模擬分析之模態一樣，故我們可以確定 ANSYS 分析模型是正確的。

### 6.1.2 利用 ANSYS 模擬分析邊界為自由之圓板自然頻率

以如表 6-3 所示之材料性質，如表 6-4 所示之尺寸，進行振動實驗來量測邊界為自由的情況下之三明治圓板的自然頻率。振動實驗是藉由衝擊錘敲擊圓板後經由加速規獲得加速度並經快速傅利葉轉換(Fast Fourier Transform)算出頻譜區域中的頻譜。結果如表 6-5 所示，三明治振動實驗值與 ANSYS 之誤差在 5% 以下，大部分都在 2% 左右，證明利用 ANSYS 模擬分析三明治圓板之模態亦為正確的，所以我們可以利用 ANSYS 有限元素分析軟體進行圓形振動板模態分析。

### 6.2 數值計算方法之驗證



本文中所用之數值計算方法為 Ritz Method，而理論為古典積層板理論。我們利用此數值計算方法，來分析具彈性支撐之圓形振動板的振動行為。若利用此數值方法對具彈性支撐複材圓板做模態分析前，必須確定此數值方法是正確的，我們利用 Yoshihiro[9]中的數據來進行驗證。表 6-6 為 Yoshihiro[9]文中使用的材料常數，我們可以從表 6-7 中發現，本文所使用的數值計算程式和文獻上的值是非常吻合的，故我們可以確定此數值程式可用來模擬圓形積層板之模態與自然頻率。

### 6.3 數值計算方法與 ANSYS 模擬分析的比較

在確定數值分析的正確性後，利用此數值計算程式來分析圓形積層板



之振動行為並將其得到的結果與 ANSYS 和實驗做比較，討論程式收斂性與數值分析方法之適用範圍。

### 6.3.1 數值分析與 ANSYS 之收斂性比較

因本文目的主要是在探討圓形複合積層板之振動行為，故我們將分析與實驗的重點放在 orthotropic 為材料的積層板上。材料性質及尺寸如表 6-8 所示，首先我們先進行 ANSYS 之模型建立，我們利用 Shell 91(殼元素)與 Combin 14(彈簧元素)來模擬圓板及彈性支撐。

接下來討論 Fortran 數值分析中形狀函數項次與其收斂性，圖 6-3 和圖 6-4 為古典積層板理論為理論基礎之數值分析方法的位移場所取之多項式項次與 ANSYS 模擬分析收斂性比較，我們可以看到多項式只要採用到  $17 \times 17$  項，數值解和 ANSYS 模擬分析所得之值已呈收斂，故在古典積層板理論數值分析方法中 shape function 只要達到  $17 \times 17$  項就可獲得比較精確的值。從圖 6-3 和圖 6-4 中更可看出，彈性支撐的剛性愈軟收斂性愈好，相對而言，彈性支撐的剛性愈硬收斂性愈差。

因數值計算所用之理論有其基本假設，如古典積層板理論就不適合用來分析厚板，但一階剪變形板理論較適合分析厚板。從圖 6-5 中，我們可以發現若寬厚比小於 60 時，以古典積層板理論寫成之數值方法之自然頻率曲線漸漸呈現發散的現象。以一階剪變形平板理論寫成之數值方法之自然頻率曲線在寬厚比為 40 時還呈現收斂，故使用古典積層板理論的數值分析方

法用在寬厚比大於等於 60 之積層板上會有較準確的值，而使用一階剪變形平板理論的數值分析方法可以精確至寬厚比大於等於 40。

### 6.3.2 數值分析與 ANSYS 模態之比較

在確定數值分析是收斂的情況下，我們討論 ANSYS 和 Fortran 的模態是否一致。圖 6-6a 為利用 ANSYS 模擬邊界為自由(Free)的情況下圓板之模態，而圖 6-6b 為 Fortran 數值分析模擬邊界為自由的情況下所描繪的模態，我們可以看出其模態完全相同；若利用 ANSYS 和 Fortran 數值分析模擬具彈性支撐[0/90/0]<sub>s</sub>積層圓板的模態的話，我們可以從圖 6-6c 和圖 6-6d 中看到兩者模態完全相同，故我們可以用此數值分析程式來描繪計算具彈性支撐圓形複材板之模態。



## 6.4 聲壓趨勢分析

聲音是由於物體振動擠壓空氣，而產生聲波並傳播到耳朵內的聽覺器官的物理現象。揚聲器之主要功能在於原音重現，也就是說把記錄下來的聲音原汁原味地播放出來。揚聲器在結構上可分成三個部分，一：振動系統，二：磁氣回路、三：本體，其中振動系統包含：振動板，音圈，檔板。

本文所探討的重點在於圓形振動板對聲壓趨勢之影響，而人耳所能聽到之音域為 20~20K Hz，所以我們將聲壓位準頻寬設在此範圍內，在人耳不能感受之音域不加以討論。在本文中我們將呈現五組聲壓實驗，其尺寸

大小及材料常數如表 6-9 所示。聲壓位準實驗用之激振器外觀如圖 6-7 所示、規格如表 6-10 所示，線圈長為 2.3 公尺、磁場大小為 1.256Tesla、電流大小為 0.5A，由式(6.3)求出激振力：

$$F = BIL \quad (6.3)$$

其中 F=激振力(N)，B=磁場大小(Tesla)，I=電流大小(A)，L=線圈長度(m)，求出激振器的出力為 1.4444 牛頓。

本文最重要的目的在於探討疊層角度、重量、結構、彈性支撐等對聲壓趨勢的影響，所以必須統一使用同一個激振器，此激振器的規格如上所示。在此前提下才能從實驗與分析中探討各種參數對聲壓趨勢的影響，並藉此設計擁有更好聲壓趨勢的圓形振動板。

#### 6.4.0 半圓形彈性支撐之彈簧常數

傳統錐盆式單體在外圍都會有一圈懸邊，用來將錐盆固定在框架上，使錐盆能在運動後能回到原位。簡而言之，懸邊的主要功能在於定向和定位。懸邊截面形狀多為弧形、半圓形或是波浪形，而材質有紙、泡綿、布和橡膠等等，而本文中所用的彈性支撐如圖 6-8 所示，截面形狀為半圓形，材質為泡綿壓製而成，此彈性支撐的等效彈簧常數可藉由 5.3 節中彈性支撐壓縮實驗求得：

$$K = \frac{F}{X} \quad (6.4)$$

其中 K=彈性支撐之彈簧常數(N/m)，F=壓力(N)，X=位移(m)

實驗數據如表 6-11 所示，經過計算處理得彈性支撐的等效彈簧常數為  $474.743 \text{ N/m}$ 。

系統之等效彈簧常數除了黏貼在圓形振動板之懸邊外(如圖 6-9 所示)，還有激振器(如圖 6-7)的彈波。激振器彈波的彈簧常數可由 LMS 阻抗量測求得自然頻率，實驗數據經計算處理得到彈波之彈簧常數為  $3396.064 \text{ N/m}$  (表 6-12)。

在進行聲壓位準實驗前，我們必須驗證彈簧常數的正確性。利用一塊材料常數如表 6-13 所示的壓克力圓板貼上半圓形彈性支撐，並接上激振器。使用 LMS 量測系統的第一個自然頻率  $f_0$ (如表 6-14)，並假設在系統第一個自然模態時，壓克力板還未變形(壓克力板揚氏模數為 3GPa)，得到系統等效彈簧常數為  $3823.2182 \text{ N/m}$ ，與上面實驗量測到之系統等效彈簧常數 ( $3870.789 \text{ N/m}$ ) 差異不到 1.3%。為了確定等效彈簧常數 ( $3870.789 \text{ N/m}$ ) 可以用在聲壓模擬，我們利用 ANSYS 建立模型並將實驗量測到的等效彈簧常數代入進行模態分析。分析系統的第一個自然模態為剛體振動，自然頻率為  $80.708 \text{ Hz}$ ，和實驗量測值相異不到 0.03%(如表 6-15 所示)。所以我們在以後的聲壓位準實驗裡，將懸邊的彈簧常數定為  $474.743 \text{ N/m}$ ，而激振器彈波之彈簧常數定為  $3396.064 \text{ N/m}$  來進行 ANSYS 有限元素的分析，並將實驗之聲壓位準和 ANSYS 分析之聲壓位準進行比較，來探討何種因素對聲壓造成什麼樣的影響。

#### 6.4.1 聲壓位準與疊層角度

本文實驗用的圓形振動板是由複合材料所構成的，使用複合材料做振動板的原因在於複合材料可利用加工方法將不同的材料結合在一起，擷取原材料的特性和優點，使材料發揮其優異特性並符合實際設計需求。理想的振動板有重量輕且強度高的特性，而複合材料恰可滿足理想振動板的需求。

複合材料製成的振動板通常會因不同疊層方式及不同疊層角度而造成振動板強度、重量上的不同。首先我們藉由 $[0/90/0]$ 碳纖積層圓板(Case1)及 $[0/0/0]$ 碳纖積層圓板探討疊層角度對聲壓有何影響，其聲壓曲線如圖 6-10 所示。從圖中，我們可以發現疊層角度對於圓形振動板之聲壓曲線影響很小，對於聲壓位準而言，在低頻頻率區段影響聲壓最大的是邊界和振動板之重量，當振動板重量差異太小(如表 6-16 所示)且邊界太軟的情況下，振動板之聲壓趨勢是一樣的。反之在高頻頻率區段影響最大的則是振動板本身的強度和形狀，當振動板為圓形時，因其幾何形狀具有較強之結構強度(圓板不會有 corner force 產生)，所以在中高頻區段聲壓表現上，疊層角度上的差異並沒有對聲壓趨勢造成太大之影響。

對於三明治圓板，疊層角度對聲壓位準的影響如圖 6-11 所示。疊層角度對聲壓位準也是完全沒有影響，其原因在於：低頻區段之聲壓位準受彈性支撐和振動板重量所影響。實驗中所用之振動板除心層疊層角度不同

外，使用同一彈性支撐且振動板重量亦相同，所以低頻區段之聲壓位準一樣；中高頻區段之聲壓位準則受振動板本身強度和形狀所影響，因三明治板心層強度比面層弱上許多，故心層疊層角度為 $0^\circ$ 或是 $90^\circ$ 對結構強度上影響微不足道，所以在聲壓表現上更沒有影響。

#### 6.4.2 聲壓位準與振形

本實驗所用之碳纖材料常數如表 6-17 所示。我們以[0/90/0]碳纖積層圓板為例探討聲壓位準與振形之關係，聲壓趨勢如圖 6-12 所示。從圖 6-12 中可以看出實驗所量測之聲壓位準和模擬分析所得到的聲壓位準非常接近，故我們可以藉由模擬分析來得知振形和聲壓趨勢的關係。

我們都知道聲壓曲線和振動板元素之位移響應有很大的關係，故在分析時將整塊振動板劃分成一塊塊的元素，而每一塊元素為一個點聲源，當元素位移為正時，會增加空氣壓力使聲壓值有較大值；反之位移為負時，會降低空氣壓力使聲壓值減低。在此我們利用 Case 1 來討論聲壓趨勢和位移響應的關係，圖 6-13a 和圖 6-13b 為激振頻率與位移響應的關係，我們可以從圖 6-12 和圖 6-13 看出當位移總和最大時，其聲壓值有最大值。更可以從三個圖形中看出聲壓曲線的起伏和位移響應的起伏一樣，當聲壓曲線從波峰降至波谷時，位移總和也是一樣從波峰降至波谷。如圖 6-12 中 163.7 Hz、221.6 Hz 和 406.1 Hz 之聲壓值為波峰值，而從圖 6-13 中相對應之激振頻率的位移響應也是波峰值(在 170 Hz、220 Hz 和 380 Hz)。

從自然模態和激振振型中亦可以看出振形和聲壓位準的關係。一般來說，在下列情況發生時，聲壓值會較低進而在曲線上產生波谷：

- (1) 此自然模態之振型無法被激振出，也就是說此自然模態對聲壓位準沒有貢獻，這種自然模態的共通特徵為在激振器的位置(此實驗在圓板中心)產生節線(如圖 6-14 所示)。
- (2) 在一段頻率區間沒有自然頻率，如果系統達到共振(自然頻率)時，聲壓值將達到最大(因振幅比達到最大)，但是隨著激振頻率逐漸遠離自然頻率時振幅比也會逐漸地變小，直到激振頻率接近另一共振頻率時才會慢慢地上升。



### 6.4.3 聲壓位準與疊層層數

從單自由度系統之簡諧激振響應中，我們可以看出系統的位移響應受簡諧激振力的大小、系統彈簧強度和質點重量的影響。若將系統換成多自由度的振動板系統亦是一樣，系統的位移響應還是受到激振力大小、系統彈簧常數、振動板剛性和質量的影響。

從 6.4.2 節中，我們得到聲壓位準和位移響應的關係。而此節中，我們延續上一節中的論點繼續討論層數對圓形振動板聲壓位準的影響。圖 6-15 為 $[0/90/0]$ 碳纖積層圓板(Case 1)與 $[0/90/0]_s$ 碳纖積層圓板(Case 2)的聲壓位準比較，從表 6-9 中可以看出 $[0/90/0]_s$ 比 $[0/90/0]$ 重 1.455 公克，此現象將反應在聲壓位準圖上，並使疊層數較多者(較重者)的聲壓位準值呈現較小的現

象，就如同單自由度系統之簡諧激振響應中質量愈重位移響應愈小。

#### 6.4.4 聲壓位準與三明治圓板

三明治板與積層板最大的不同在於三明治板擁有不同於面層材料的心層結構。在分析積層板時可以忽略出平面應變效應(the effects of out-of-plane strains)，但對於由二種截然不同的材料所構成之三明治板而言，其橫截面之剪應變、應力和應變都變成不可忽略，最重要的是這些都沿著厚度方向呈現非線性的變化。

在此節中將討論三明治圓板之聲壓趨勢，並藉著與[0/90/0]碳纖積層圓板(Case 1)的比較來了解三明治板對聲壓位準的影響。如表 6-18 所示，三明治板之心層材料為巴莎木、面層材料為碳纖，實驗編號為 Case 3。圖 6-16 為三明治圓板 (Case 3)之 ANSYS 模擬分析和 MLSSA 聲壓實驗比較，從圖中可以看出兩者聲壓趨勢一樣，所以我們可以確定此模擬分析是正確的。從圖 6-16 中，我們發現三明治圓板之聲壓趨勢是較為平緩的，原因在於三明治板之心層提供了較大的厚度使振動板的橫截面之慣性矩變大，當振動板之慣性矩變大時，振動板承受彎曲力矩的能力就變強。三明治板因結構較強不易產生形變，所以位移響應就比較平緩(如圖 6-17a.b)。而位移響應愈平緩，聲壓位準愈不容易振盪。

圖 6-18 為[0/90/0]碳纖積層圓板(Case 1)與[0/90(c)/0]三明治圓板(Case 3) MLSSA 聲壓位準實驗的比較圖，我們藉由此圖來看三明治結構與積層板結



構對聲壓值產生的影響。從圖中可以很清楚的看出，三明治板之聲壓趨勢較碳纖積層板平緩、較少起伏，也就是說其聲壓位準值變化較小、較能維持一水平值。圖 6-19a.b 為[0/90/0]碳纖積層圓板(Case 1)和[0/90(c)/0]三明治圓板(Case 3)的位移響應圖，我們可從圖中發現，三明治確實比碳纖積層板的位移響應平緩，所以三明治板之聲壓曲線當然比積層板之聲壓曲線平緩。當振動板所發出之聲壓值能維持平緩時，此振動板在各音域所發出的聲音就不會忽大忽小或是出現某些頻率的聲音發不出來的現象。

三明治圓板之聲壓趨勢較碳纖積層板平緩的原因在於，三明治板在結構上比碳纖積層板多了柔軟的心層。此心層提供的厚度約佔總厚的3/4強(如表 6-18 所示)，使三明治圓板在厚度上比碳纖積層圓板大上許多(約大 1mm)，但在重量上三明治圓板和碳纖層圓板差異不大(多 0.645g)。從這些幾何關係上，我們可以看出三明治板結構比碳纖層板結構強(厚度變大，慣性矩變大，抗彎曲能力變強)，而在重量上的差異也不足以達到使位移響應變小的程度。所以我們可以發現三明治板在不增加重量的前提下，能增加結構強度、使聲壓位準趨於平緩。

#### 6.4.5 聲壓位準與彈性支撐

##### a. 彈性支撐強度

如 6.4.0 節所言，懸邊的作用是貼在振動板上，使振動板和框架密切黏

接，不致於在振動時脫落或是發出異常的聲音。除此之外，懸邊的材質、厚度、外形亦會對聲音造成一定程度的影響。懸邊的強度(等效彈簧常數)對聲壓位準的影響主要在於低頻區段。對封閉的彈性支撐(懸邊)而言，當懸邊強度由軟變強時，系統之前三個自然頻率亦由小變大(如表 6-19 所示)。觀察其位移響應圖(圖 6-20)，可發現懸邊較軟者自然頻率較早出現，且因為彈性支撐強度較軟所以振幅較大，聲壓值亦較大。但過了前三個自然模態後，懸邊強度較軟者之振幅已降低，但此時懸邊強度較硬者因處於共振，故振幅被放大聲壓值亦變的比彈性支撐軟者為高(圖 6-21)。總而言之，彈性支撐強度愈強，影響聲壓位準的範圍亦愈廣，若圓板之彈性支撐強度變異不大時，聲壓位準與趨勢亦不會有太大之變化。



#### **b.封閉(連續)與非封閉(非連續)**

我們使用具連續彈性支撐之相同振動圓板([0/90(c)/0]三明治圓板)為對照組探討不連續之彈性支撐與聲壓位準之間的關係為何。本實驗所用的封閉(連續)半圓形彈性支撐如圖 6-22 所示，材質為泡綿，等效彈簧常數為 474.743 N/m。而非封閉(不連續)之彈性支撐所用的材質相同，壓製過程一樣。我們在三明治板外徑上  $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $180^\circ$  和  $270^\circ$ (圖 6-23)處各黏上彈性支撐(懸邊等彈簧常數為 158.248N/m)，再連同激振器固定在框架上，並將空隙處貼上厚紙片以避免反射音波干擾實驗量測(圖 6-24ab)。圖 6-25 為具非封閉彈性支撐三明治圓板(Case 4)之 ANSYS 模擬分析與 MLSSA 聲壓位準

實驗的比較圖，從圖上發現模擬與分析相同，證明 ANSYS 模擬分析是正確的。

圖 6-26 表示具封閉與具非封閉彈性支撐三明治圓板(Case 3 與 Case 4)之聲壓位準比較，我們可以看出非封閉懸邊之聲壓值較低，在觀察其自然模態時，發現兩者的自然模態一樣，只是自然頻率有所差距。表 6-20 為兩者自然頻率比較，發現在前三個模態時非封閉系統(Case 4)的自然頻率比封閉系統(Case 5)的自然頻率低，但在較高的模態下自然頻率就沒有差異。歸咎其原因在於，激振器彈波太硬( $K = 3396.064 N/m$ )導致彈性支撐從  $K = 474.743 N/m$  下降至  $K = 158.248 N/m$  時，亦不會對系統之自然頻率造成太大的影響。

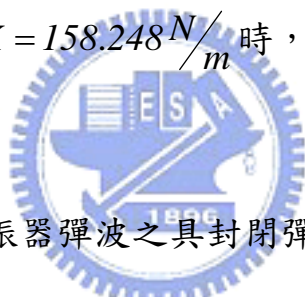


圖 6-27 表示去除激振器彈波之具封閉彈性支撐與去除激振器彈波之具非封閉彈性支撐三明治圓板 ANSYS 聲壓位準模擬，從圖中可以看出在頻率 1000Hz 以前非封閉之彈性支撐之聲壓位準較低也較早有值，但在 1000Hz 以後之聲壓位準與位移響應圖(如圖 6-28 所示)都無沒差別。而其自然頻率(表 6-21)，亦顯示出封閉彈性支撐與非封閉彈性支撐在前幾個自然頻率有所差異外，其他自然頻率亦無差別。故封閉與非封閉彈性支撐對圓形振動板之影響不大，且影響範圍視支撐的強度而定，支撐愈強者，影響聲壓趨勢的範圍愈大。

### c. 激振器彈波

圖 6-29 表示去除激振器彈波之具封閉彈性支撐三明治圓板和有激振器彈波之具封閉彈性支撐三明治圓板之聲壓位準實驗圖，我們可以很明顯地看出有激振器彈波與去除激振器彈波之具封閉懸邊三明治圓板聲壓趨勢一樣。圖 6-30 為去除激振器彈波之封閉彈性支撐三明治圓板 MLSSA 聲壓位準實驗與 ANSYS 分析的比較圖，從圖上發現模擬與分析相同，證明 ANSYS 模擬分析是正確的。表 6-21 為去除激振器彈波之具封閉懸邊三明治圓板 (Case 5) 與有激振器彈波之具封閉懸邊三明治圓板自然頻率比較，只有前三個自然頻率有所差異外(彈性支撐愈軟者，自然頻率愈低)，其他在較高的模態之自然頻率沒有不同。但在聲壓值方面去除激振器彈波之具封閉懸邊三明治圓板聲壓值略低於有激振器彈波之具封閉懸邊三明治圓板聲壓值。從圖 6-31 中看出，去除彈波之激振器的 BL 值為 1.91 Tesla-M，比原本具彈波之激振器 BL 值小(2.16 Tesla-M，如圖 6-32 所示)，此現象是因去除彈波後之音圈將無法被有效固定在行程內，激振器出力就變小了。所以整體聲壓趨勢不變，但聲壓值卻因此而變低。所以激振器彈波去除會影響激振器出力的效率，進而影響到聲壓值的高低，但亦沒法有效改變聲壓趨勢。

## 第七章 結論與未來研究方向

### 7.1 結論

#### 7.1.1 利用數值方法進行模態與自然頻率分析方面

在以古典積層板理論與一階剪變形平板理論的數值方法進行複合積層圓板的模態與自然頻率分析時，我們可以發現：

1. 古典積層板理論和一階剪變形平板理論之數值方法橫截面位移 (transverse displacement) 多項式需取至  $17 \times 17$  項。
2. 在  $D/h > 100$  時，以古典積層板理論為基礎之程式模擬效果最好。
3. 當  $D/h > 60$  時，古典積層板理論之數值方法能有較好之收斂性。
4. 當  $D/h > 40$  時，一階剪變形平板理論之數值方法能有較好之收斂性。
5. 圓板之彈性支撐的剛性愈軟自然頻率愈小，收斂性愈好。相對而言，支撐愈硬自然頻率愈大，收斂性愈差。

#### 7.1.2 具彈性支撐複材圓板之聲壓特性

具彈性支撐複合材料圓板之聲壓位準經過實驗與分析後，我們可以得到下列幾個特性：

1. 振動板的形狀會決定聲壓趨勢的平坦與否，圓形振動板之聲壓趨勢比矩形振動板之聲壓位準趨勢平坦，其原因在於圓形的結構強度比矩形好。
2. 對複材積層圓板而言，疊層角度並不會影響聲壓位準的表現；對複材三

- 明治圓板而言，疊層角度更不會影響聲壓位準的表現。
3. 聲壓位準會隨著振動板位移響應總和的振盪而高低起伏，當位移響應變大時，聲壓位準亦會變大；反之位移響應變小時，聲壓位準亦會變小。
  4. 振動板之自然模態無法被激振出時，此頻率的聲壓位準會較低，原因在於振幅比無法達到最大，故聲壓值會較低。
  5. 激振頻率逐較靠近自然頻率時，會因共振而使振幅比變大。如振動板在一段頻率區間內都沒有自然頻率的話，其振幅比會很小，故聲壓值亦會變小。
  6. 振動板重量會嚴重影響聲壓位準值，重量愈重者聲壓位準愈小。
  7. 振動板如果使用三明治結構的話，會使聲壓趨勢維持平緩，較不易產生振盪。
  8. 封閉彈性支撐之強度對圓形振動板聲壓位準之影響在於聲壓值的高低，支撐愈軟者聲壓值愈低，支撐愈硬者聲壓愈高，但支撐強度無法改變圓形振動板之聲壓趨勢。
  9. 封閉(連續)與非封閉(非連續)彈性支撐對圓形振動板聲壓趨勢沒有影響。
  10. 當激振器之彈波被去除掉後，激振器之出力會因此而降低，並導致聲壓下降，但去除彈波之聲壓趨勢和具激振器彈波之聲壓趨勢一樣。



## 7.2 未來研究方向

1. 利用數值方法進行厚板或是三明治板的分析時，宜使用較高階的板理論

來模擬，並討論高階板理論對圓板模擬的精確性。

2. 數值方法和 ANSYS 有限元素分析軟體皆可用在聲壓模擬和簡諧激振分析上，但數值方法的計算效率比 ANSYS 好太多。
3. 在同一疊層方式、面積、彈性支撐的前提下，討論圓板和矩形板的聲壓趨勢。
4. 三明治結構確實可以有效的使聲壓位準之振盪變的和緩，但聲壓值之差矩還不能縮小至 5dB 下。
5. 三明治心層結構可以改用蜂巢結構，並討論蜂巢結構和巴莎木結構何者對聲壓較好。



## 參考文獻

1. T. Kant, and K. Swaminathan, “Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory”, Composite Structures vol.53, pp. 73-85, 2001.
2. W. T. Thomson, “Theory of Vibration with Applications”, 2<sup>nd</sup> Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.
3. 王栢村編著, “振動學”, 全華書局, 台北市, 1996。
4. 陳正義, “具彈性支承複合材料板之聲傳研究”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文”, 新竹市, 2003。
5. 詹東恩, “複合材料三明治板之振動與聲射研究”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文”, 新竹市, 2003。
6. 卓永剛, “複合材料積層板的振動及聲射分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文”, 新竹市, 2003。
7. P. M. Morse and K. U. Ingard, “Theoretical Acoustics”, McGraw-Hill, NY, 1968; rpt. Princeton University Press, NJ, pp. 375-379, 1986.
8. Takeo Shindo, Osamu Yashima, and Hideo Suzuki, “Effect of voice-coil and surround on vibration and sound pressure response of loudspeaker cones”, Journal of The Audio Engineering Society volume 28, number 7/8, pp.490-498, 1980.
9. Yoshihiro Narita, “Vibration studies for symmetrically laminated circular and elliptical plates resting on elastic point supports”, Composites Science and Technology vol.39, pp.75-88, 1990.
10. Leonard Meirovitch, “Principles and Techniques of Vibrations”, Prentice-Hall, Inc., pp.454~457, 1997.
11. T. Kant and Manjunatha BS, “An unsymmetric FRC laminate  $C^0$  finite element model with 12 degrees of freedom per node”, Eng Comput vol.5(3), pp.300-308, 1988.
12. Pandya BN and T. Kant, “Finite element stress analysis of laminated



- composite plates using higher order displacement model”, *Compos Sci Technol* vol.32, pp.137-155, 1988.
- 13.A.K Nayak, S.S.J. Moy, and R.A. Shenoi, “Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy’s higher-order theory”, *Composites: Part B* vol.33, pp.508-519, 2002.
- 14.K. C. Hung, M. K. Lim and K. M. Liew, “Boundary beam characteristics orthonormal polynomials in energy approach for vibration of symmetric laminates- II :Elastically restrained boundaries”, *Composite Structures* vol.26, pp.185-209, 1993.



表 6-1 圓形振動板之材料常數和尺寸

Isotropic 之圓形振動板

---

$h = 1\text{mm}$   
 $R = 10\text{cm}$   
 $E = 136\text{e}9\text{ Pa}$   
 $\nu = 0.3$   
 $\text{Density} = 1600\text{ kg / m}^3$

---

表 6-2 圓形振動板自然頻率之 ANSYS 模擬和理論值比較

	Mode 1	Mode 2
理論值	451.49	944.43
ANSYS 模擬分析	453.52	943.64

表 6-3 材料性質表

Material Properties of Face	
Property	Carbon/epoxy
$E_1$	147.503GPa
$E_2$	9.223GPa
$\nu_{12}$	0.327
$\nu_{23}$	0.25
$G_{12}$	6.8355Gpa
$G_{23}$	1.1229GPa
$\rho$	1520 Kg/m <sup>3</sup>
t(每層厚度)	0.1229 mm
Material Properties of Core	
Property	發泡聚苯乙烯平板
E	27.65MPa
$\rho$	48 Kg/m <sup>3</sup>

表 6-4 三明治圓板之尺寸

	重(g)	厚(mm)	直徑(cm)
碳纖(1)	1.780	0.290	10.000
碳纖(2)	1.780	0.290	10.000
珍珠板	1.265	2.270	10.000
AB 膠	0.460	0.000	10.000
三明治圓板	5.285	2.850	10.000

表 6-5 實驗結果和 ANSYS 模擬分析之比較

	PULSE	ANSYS	實驗誤差(%)
Mode 1	936.000	957.671	-2.26289
Mode 2	952.000	973.849	-2.24357
Mode 3	1512.000	1589.246	-4.86054
Mode 4	1616.000	1659.437	-2.61757
Mode 5	1656.000	1676.598	-1.22856
Mode 6	2088.000	2144.216	-2.62175

表 6-6 Yoshihiro[9]中的材料常數

Layer Material Properties for Plates Studied						
Material	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$E_1/E_2$	$V_f$
E-Glass/epoxy(E/E)	60.7	24.8	11.99	0.23	2.45	0.72
Graphite/epoxy(G/E)	138	8.96	7.1	0.30	15.4	0.67

表 6-7 Yoshihiro[9]與本文所使用的程式之比較

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
(a) E/E elastic support( $k = 10^2$ )						
6 × 6 [3]	6.359	6.929	9.418	11.160	18.040	25.070
6 × 6	6.355	6.926	9.416	11.153	18.027	25.040
7 × 7 [3]	6.199	6.916	9.328	10.780	16.550	24.770
7 × 7	6.194	6.913	9.326	10.775	16.537	24.699
8 × 8 [3]	6.190	6.190	9.327	10.730	16.540	24.380
8 × 8	6.186	6.907	9.324	10.718	16.527	24.3514
9 × 9 [3]	6.150	6.906	9.316	10.640	16.500	24.240
9 × 9	6.146	6.903	9.314	10.636	16.488	24.213
10 × 10 [3]	6.147	6.905	9.315	10.620	16.490	24.160
10 × 10	6.143	6.901	9.313	10.614	16.485	24.136
(b) E/E, Simply Support( $k = \infty$ ) (使用 $K_t = 1e8$ 來模擬)						
6 × 6 [3]	6.860	7.197	9.689	12.310	19.520	27.810
6 × 6	6.860	7.195	9.689	12.310	19.521	27.806
7 × 7 [3]	6.677	7.182	9.544	11.830	17.500	27.240
7 × 7	6.678	7.181	9.543	11.834	17.499	27.231
8 × 8 [3]	6.668	7.175	9.541	11.770	17.490	26.560
8 × 8	6.668	7.174	9.540	11.768	17.487	26.543
9 × 9 [3]	6.620	7.171	9.521	11.670	17.430	26.350
9 × 9	6.622	7.169	9.520	11.672	17.433	26.339
10 × 10 [3]	6.617	7.169	9.519	11.650	17.430	26.210
10 × 10	6.617	7.167	9.518	11.647	17.430	26.197
(c) G/E, simply support( $k = \infty$ ) (使用 $K_t = 1e8$ 來模擬)						
6 × 6 [3]	2.943	3.972	8.389	8.844	11.700	12.580
6 × 6	2.943	3.971	8.388	8.844	11.703	12.585
7 × 7 [3]	2.932	3.959	8.001	8.661	11.080	11.560
7 × 7	2.932	3.958	8.001	8.660	11.082	11.563
8 × 8 [3]	2.920	3.946	7.951	8.434	10.970	11.400
8 × 8	2.920	3.945	7.951	8.434	10.967	11.397
9 × 9 [3]	2.916	3.943	7.929	8.413	10.890	11.380
9 × 9	2.916	3.942	7.928	8.413	10.894	11.374
10 × 10 [3]	2.911	3.941	7.905	8.358	10.880	11.330
10 × 10	2.912	3.939	7.904	8.358	10.878	11.323

表 6-8 數值計算所用之材料性質表

Material Properties of Face	
Property	Carbon/epoxy
E <sub>1</sub>	127.503GPa
E <sub>2</sub>	9.22300GPa
v <sub>12</sub>	0.3060
v <sub>23</sub>	0.2500
G <sub>12</sub>	6.83560GPa
G <sub>23</sub>	1.12290GPa
ρ	1532kg/m <sup>3</sup>
t(每層厚度)	0.125mm
圓板半徑	50mm

表 6-9 聲壓位準實驗之振動板尺寸與邊界等

Case 編號	疊層	材料	半徑(mm)	重量(g)	厚度(mm)	邊界
1	[0/90/0]	碳纖	35.5	2.19	0.39	A
2	[0/90/0] <sub>s</sub>	碳纖	37	3.645	0.75	A
3	[0/90(c)/0]	碳纖和巴莎木	37	2.835	1.39	A
4	[0/90(c)/0]	碳纖和巴莎木	37	2.835	1.39	B
5	[0/90(c)/0]	碳纖和巴莎木	37	2.835	1.39	C

註：1. 三明治結構材料為碳纖和巴莎木，心層為巴莎木而面層為碳纖。

2. A:表示振動板之彈性支撐為封閉(連續)之懸邊。

3. B:表示振動板之彈性支撐為非封閉(非連續)之懸邊。

4. C:表示去除激振器彈波之具封閉彈性懸邊。

表 6-10 聲壓位準實驗用激振器之規格

音圈阻抗	4 ohm
磁場大小	1.256 Tesla
線圈長度	2.3 m
聲壓實驗電流量	0.5 A
激振力	1.4444 N

表 6-11 彈性支撐之彈簧常數實驗數據

實驗編號	K (N/m)
1	465.00
2	470.89
3	477.65
4	482.94
5	474.03
6	477.95
平均	474.743

表 6-12 激振器彈波之彈簧常數

塑膠圈及彈波重量為 0.78g LMS 阻抗量測			
實驗編號	$f_0$	K(N/m)	平均(N/m)
1	332.191	3398.052	3396.064
2	332.191	3398.052	
3	332.191	3398.052	
4	332.191	3398.052	
5	332.194	3398.114	

表 6-13 壓克力板之材料常數與尺寸

壓克力材料參數				
$E=2.15\text{G Pa}$	$\nu=0.27$	$\rho=1178.7\text{kg}$	$R=36.5e-3\text{ m}$	$h=3e-3\text{ m}$

表 6-14 具彈性支撐壓克力圓板 LMS 自然頻率量測實驗

實驗編號	圓板質量(Kg)	$f_0$ (Hz)	系統彈性常數(N/m)
1	14.86e-3	80.7282	3823.2182
2	14.86e-3	80.7282	3823.2182
3	14.86e-3	80.7282	3823.2182
4	14.86e-3	80.7282	3823.2182
5	14.86e-3	80.7282	3823.2182



表 6-15 具彈性支撐壓克力圓板 ANSYS 模態分析

系統總彈簧常數 = 3870.789			
彈性支撐	彈簧數	K (N/m)	$f_0$ (Hz)
懸邊	232	2.04631	80.708
激振器彈波	80	42.4508	

表 6-16 [0/90/0](Case1)和[0/0/0]碳纖積層圓板之尺寸大小

	重量(g)	半徑(mm)	密度(kg/m <sup>3</sup> )	厚度(mm)
[0/90/0]	2.19	35.5	1418.32	0.39
[0/0/0]	2.26	35.5	1359.10	0.42

表 6-17 碳纖和巴莎木之材料性質

Balsa's material properties and size

$$E_x = 3.7e9 \text{ Pa} \quad E_y = 0.055e9 \text{ Pa} \quad E_z = 0.055e9 \text{ Pa}$$

$$\nu_{xy} = 0.02 \quad \nu_{yx} = 0.5 \quad \nu_{xz} = 0.02$$

$$G_{xy} = G_{yz} = G_{xz} = 0.010e9 \text{ Pa}$$

Carbon fiber's material properties and size

$$E_x = 147.503e9 \text{ Pa} \quad E_y = 9.223e9 \text{ Pa} \quad E_z = 9.223e9 \text{ Pa}$$

$$\nu_{xy} = 0.327 \quad \nu_{yz} = 0.25 \quad \nu_{xz} = 0.327$$

$$G_{xy} = 6.8355e9 \text{ Pa} \quad G_{yz} = 1.1229e9 \text{ Pa} \quad G_{xz} = 6.8355e9 \text{ Pa}$$

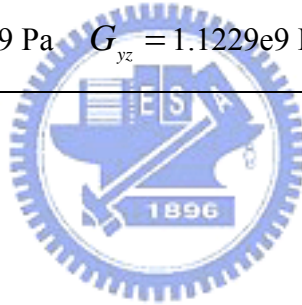


表 6-18 三明治圓板之尺寸(Case 3)

	半徑(mm)	厚度(mm)	重量(g)	密度(kg/m <sup>3</sup> )
心層(巴莎木)	37	1.05	0.975	216
面層(碳纖)	37	0.17	0.93	1272
三明治板	37	1.39	2.835	



表 6-19 彈性支撐改變對自然頻率之影響

Mode	K=240N/m	K=3600N/m	Mode	K=240N/m	K=3600N/m	Mode	K=240N/m	K=3600N/m
1	46.252	176.409	31	5152.594	5155.869	61	7735.185	7737.291
2	65.452	251.809	32	5373.623	5376.63	62	7865.659	7867.672
3	65.457	252.131	33	5502.541	5506.412	63	7956.766	7958.718
4	952.623	990.206	34	5508.072	5511.928	64	7991.565	7999.491
5	999.301	1032.881	35	5650.264	5659.63	65	7991.695	7999.62
6	1756.35	1767.997	36	5650.936	5660.287	66	8150.587	8152.87
7	1764.185	1785.771	37	5924.566	5927.474	67	8153.085	8155.364
8	1820.831	1840.561	38	5928.306	5931.197	68	8178.318	8181.248
9	2378.611	2387.15	39	6097.273	6099.945	69	8178.747	8181.676
10	2505.421	2521.528	40	6192.108	6195.862	70	8511.88	8513.838
11	2534.13	2549.694	41	6194.764	6198.539	71	8518.314	8520.268
12	2604.789	2611.647	42	6211.739	6214.281	72	8569.446	8577.13
13	3182.953	3196.391	43	6243.782	6252.473	73	8569.484	8577.169
14	3192.915	3206.179	44	6244.25	6252.906	74	8681.921	8683.735
15	3213.094	3219.088	45	6691.344	6693.988	75	8711.965	8713.769
16	3271.921	3277.709	46	6699.663	6702.297	76	8820.639	8823.436
17	3603.329	3608.107	47	6826.263	6834.517	77	8821.22	8824.015
18	3823.17	3835.019	48	6826.433	6834.697	78	8849.4	8851.154
19	3827.992	3839.746	49	6869.868	6873.426	79	8853.141	8855.295
20	4032.721	4037.592	50	6871.23	6874.771	80	8854.798	8856.95
21	4041.631	4046.442	51	6911.767	6914.1	81	9145.084	9152.554
22	4289.313	4293.362	52	6948.726	6951.038	82	9145.463	9152.934
23	4438.015	4444.022	53	7116.961	7119.169	83	9269.309	9271.144
24	4446.02	4456.744	54	7411.139	7419.329	84	9273.102	9274.934
25	4448.526	4456.974	55	7411.179	7419.368	85	9457.173	9459.858
26	4785.094	4789.362	56	7432.139	7434.582	86	9457.439	9460.125
27	4796.856	4801.097	57	7436.32	7438.756	87	9506.386	9508.061
28	5051.154	5061.133	58	7528.314	7531.417	88	9508.077	9509.748
29	5052.347	5062.296	59	7529.139	7532.24	89	9543.659	9545.707
30	5105.72	5109.059	60	7732.917	7735.03	90	9544.326	9546.373

表 6-20 具封閉彈性支撐三明治板(Case 3)與具非封閉彈性支撐三明治板

自然頻率(Case 4)之比較

Mode	Case 3	Case 4	Mode	Case 3	Case 4	Mode	Case 3	Case 4
1	123.62	98.75	31	5163.09	5162.67	61	7741.51	7741.36
2	123.66	98.78	32	5381.24	5381.04	62	7870.90	7870.65
3	183.40	175.36	33	5503.34	5503.00	63	7961.77	7961.64
4	956.30	951.21	34	5508.87	5508.58	64	7992.12	7991.41
5	1009.46	1007.42	35	5650.93	5650.04	65	7992.25	7991.53
6	1766.81	1764.47	36	5651.60	5650.68	66	8151.86	8151.66
7	1772.87	1772.05	37	5931.97	5931.65	67	8154.36	8154.15
8	1824.31	1822.87	38	5934.69	5934.50	68	8178.53	8178.24
9	2394.33	2393.36	39	6099.26	6098.93	69	8178.96	8178.67
10	2506.80	2504.99	40	6192.53	6192.31	70	8518.79	8518.57
11	2535.50	2534.33	41	6195.18	6194.90	71	8525.20	8525.06
12	2620.44	2620.00	42	6212.69	6212.53	72	8569.98	8569.25
13	3183.97	3182.62	43	6244.40	6243.54	73	8570.02	8569.36
14	3193.91	3192.73	44	6244.87	6243.94	74	8682.81	8682.66
15	3218.73	3218.29	45	6696.10	6695.81	75	8713.11	8712.88
16	3279.57	3278.83	46	6704.43	6704.24	76	8820.84	8820.58
17	3606.12	3605.81	47	6826.85	6826.19	77	8821.42	8821.13
18	3824.02	3822.93	48	6827.02	6826.33	78	8849.85	8849.74
19	3828.85	3827.70	49	6870.16	6869.74	79	8853.75	8853.55
20	4036.50	4035.98	50	6871.52	6871.11	80	8855.40	8855.21
21	4046.12	4045.81	51	6915.75	6915.56	81	9145.61	9144.93
22	4296.90	4296.42	52	6951.93	6951.63	82	9145.99	9145.31
23	4441.37	4440.66	53	7121.09	7120.95	83	9274.92	9274.74
24	4446.79	4445.78	54	7411.71	7410.98	84	9278.72	9278.57
25	4453.48	4452.94	55	7411.75	7411.04	85	9457.36	9457.11
26	4787.00	4786.55	56	7434.76	7434.52	86	9457.63	9457.37
27	4798.75	4798.48	57	7438.94	7438.73	87	9507.63	9507.44
28	5051.88	5051.04	58	7528.54	7528.26	88	9509.63	9509.52
29	5053.08	5052.03	59	7529.37	7529.03	89	9543.97	9543.81
30	5114.74	5114.48	60	7739.52	7739.28	90	9544.64	9544.43

註：Case 3:具封閉彈性支撐三明治板, Case 4:具非封閉彈性支撐三明治板

表 6-21 去除激振器彈波之具封閉彈性支撐與去除激振器彈波之

具非封閉彈性支撐三明治板自然頻率比較

Mode	非封閉	封閉
1	104.98	176.41
2	148.70	251.81
3	149.04	252.13
4	952.58	990.21
5	1017.28	1032.88
6	1761.64	1768.00
7	1768.24	1785.77
8	1829.85	1840.56
9	2379.64	2387.15
10	2507.94	2521.53
11	2540.93	2549.69
12	2608.29	2611.65
13	3186.28	3196.39
14	3197.36	3206.18
15	3215.75	3219.09
16	3272.10	3277.71
17	3605.75	3608.11
18	3826.83	3835.02
19	3831.12	3839.75
20	4033.61	4037.59
21	4044.11	4046.44
22	4289.65	4293.36
23	4441.64	4444.02
24	4449.14	4456.74
25	4449.90	4456.97
26	4785.96	4789.36
27	4799.00	4801.10
28	5054.35	5061.13
29	5054.83	5062.30
30	5107.05	5109.06

Mode	非封閉	封閉
31	5152.64	5155.87
32	5375.11	5376.63
33	5503.78	5506.41
34	5509.74	5511.93
35	5652.92	5659.63
36	5653.41	5660.29
37	5925.00	5927.47
38	5929.68	5931.20
39	6097.49	6099.95
40	6194.11	6195.86
41	6196.35	6198.54
42	6213.06	6214.28
43	6245.94	6252.47
44	6246.06	6252.91
45	6691.75	6693.99
46	6700.89	6702.30
47	6829.54	6834.52
48	6829.55	6834.70
49	6870.21	6873.43
50	6871.66	6874.77
51	6912.66	6914.10
52	6948.78	6951.04
53	7118.07	7119.17
54	7413.73	7419.33
55	7413.98	7419.37
56	7432.75	7434.58
57	7437.20	7438.76
58	7529.26	7531.42
59	7529.65	7532.24
60	7733.23	7735.03

Mode	非封閉	封閉
61	7736.19	7737.29
62	7865.82	7867.67
63	7957.78	7958.72
64	7994.10	7999.49
65	7994.20	7999.62
66	8151.32	8152.87
67	8153.74	8155.36
68	8179.11	8181.25
69	8179.49	8181.68
70	8512.18	8513.84
71	8519.23	8520.27
72	8571.49	8577.13
73	8572.25	8577.17
74	8682.61	8683.74
75	8712.01	8713.77
76	8821.54	8823.44
77	8821.85	8824.02
78	8850.29	8851.15
79	8853.78	8855.30
80	8855.47	8856.95
81	9147.40	9152.55
82	9147.80	9152.93
83	9269.76	9271.14
84	9273.76	9274.93
85	9457.93	9459.86
86	9458.19	9460.13
87	9506.63	9508.06
88	9508.87	9509.75
89	9544.45	9545.71
90	9544.78	9546.37

表 6-22 具激振器彈波之封閉彈性支撐三明治板(Case 3)與不具激振器彈波

之封閉彈性支撐三明治板自然頻率(Case 5)之比較

Mode	Case 3	Case 5	Mode	Case 3	Case 5	Mode	Case 3	Case 5
1	123.62	64.98	31	5163.09	5152.82	61	7741.51	7735.33
2	123.66	92.01	32	5381.24	5373.83	62	7870.9	7865.80
3	183.4	92.03	33	5503.34	5502.81	63	7961.77	7956.90
4	956.3	955.32	34	5508.87	5508.34	64	7992.12	7992.12
5	1009.46	1001.69	35	5650.93	5650.92	65	7992.25	7992.25
6	1766.81	1757.17	36	5651.6	5651.59	66	8151.86	8150.75
7	1772.87	1765.71	37	5931.97	5924.77	67	8154.36	8153.24
8	1824.31	1822.22	38	5934.69	5928.51	68	8178.53	8178.52
9	2394.33	2379.21	39	6099.26	6097.46	69	8178.96	8178.95
10	2506.8	2506.56	40	6192.53	6192.37	70	8518.79	8512.02
11	2535.5	2535.23	41	6195.18	6195.03	71	8525.2	8518.45
12	2620.44	2605.27	42	6212.69	6211.92	72	8569.98	8569.98
13	3183.97	3183.90	43	6244.4	6244.39	73	8570.02	8570.02
14	3193.91	3193.85	44	6244.87	6244.86	74	8682.81	8682.05
15	3218.73	3213.51	45	6696.1	6691.53	75	8713.11	8712.09
16	3279.57	3272.33	46	6704.43	6699.85	76	8820.84	8820.83
17	3606.12	3603.66	47	6826.85	6826.84	77	8821.42	8821.42
18	3824.02	3824.00	48	6827.02	6827.02	78	8849.85	8849.52
19	3828.85	3828.82	49	6870.16	6870.12	79	8853.75	8853.29
20	4036.5	4033.06	50	6871.52	6871.48	80	8855.4	8854.95
21	4046.12	4041.97	51	6915.75	6911.93	81	9145.61	9145.61
22	4296.9	4289.60	52	6951.93	6948.89	82	9145.99	9145.99
23	4441.37	4438.50	53	7121.09	7117.12	83	9274.92	9269.44
24	4446.79	4446.77	54	7411.71	7411.71	84	9278.72	9273.23
25	4453.48	4449.05	55	7411.75	7411.75	85	9457.36	9457.36
26	4787	4785.39	56	7434.76	7432.31	86	9457.63	9457.63
27	4798.75	4797.15	57	7438.94	7436.49	87	9507.63	9506.50
28	5051.88	5051.85	58	7528.54	7528.53	88	9509.63	9508.19
29	5053.08	5053.05	59	7529.37	7529.36	89	9543.97	9543.80
30	5114.74	5105.95	60	7739.52	7733.07	90	9544.64	9544.47

註：Case 3:有彈波之三明治板自然頻率, Case 5:無彈波之三明治板自然頻率